

Familles sommables

Maintenant que vous savez très bien calculer des séries, on va s'intéresser à des sommes sur un ensemble I quelconque, et non plus sur $\mathbb{N}$. *Mais qu'est ce que cela change ?*

Et bien dans $\mathbb{N}$, vous l'avez bien compris, on regarde la suite des sommes partielles. Donc il y a un ordre 0, 1, 2, 3, 4, ... On pourrait se dire que la somme ne dépend pas de l'ordre, et donc qu'une somme sur un ensemble non ordonné I , est la même quel que soit l'ordre choisit.

Essayons, pour garder notre intuition sur $I = \mathbb{N}$. On sait que $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ a pour somme $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} \dots \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \frac{1}{128} - \frac{1}{512} - \frac{1}{2048} - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

En fait, on pourrait réécrire cette série dans n'importe quel sens, elle aurait toujours la même limite. On appelle cela des séries *commutativement convergente*. Mais cela ne fonctionne pas toujours...

Par exemple la série de $(-1)^n$ est divergente sans limite. Pourtant on peut "la faire tendre vers $+\infty$ " en réarrangeant les termes.

$$\begin{aligned} 0 &= \boxed{1-1+1} \boxed{-1+1} \boxed{-1} \boxed{+1} - 1 \boxed{+1} - 1 \boxed{+1} - 1 \dots \\ &= 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty, \end{aligned}$$

ce qui pose problème.

Il faut donc bien comprendre, sur un ensemble non ordonné, dans quels cas on peut sommer, et ne pas obtenir des résultats arbitraires en fonction de l'ordre que l'on définit. Ça tombe bien : c'est le but du chapitre !

Dans ce chapitre, I et J désignent des ensembles.

1 CAS OÙ LES TERMES SONT DES RÉELS POSITIFS

Compléments et conventions sur la demi-droite achevée $[0, +\infty]$

La relation d'ordre $\leq$ est **totale sur** $[0, +\infty]$ et on définit dans $[0, +\infty]$ comme dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ les notions de

- **Partie majorée** $A \subset [0, +\infty]$, si $\exists M \in [0, +\infty], \forall a \in A, a \leq M$. Ici M est un **majorant de** A .
- **Plus grand élément** $\alpha \in A$, si $\forall a \in A, a \leq \alpha$.
- **Borne supérieure** $\sup A \in [0, +\infty]$, le plus petit des majorant des A .
D'après le théorème de la borne supérieure, celle-ci existe toujours. Ici $\sup A$ peut être $+\infty$, et si $A = \emptyset$, alors $\sup A = 0$.

L'addition de $\overline{\mathbb{R}}$ est une loi interne sur $[0, +\infty]$, car on sait que $+\infty + x = +\infty$, pour tout $x \in [0, +\infty]$. Aucun risque de voir $+\infty$ rencontrer $-\infty$.

La multiplication est elle aussi une loi interne sur $[0, +\infty]$, posant $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$... *et oui, c'est choquant*. Comme dans $\mathbb{R}$, on peut montrer que pour toutes parties A et B de $[0, +\infty]$ et pour tout $\lambda \in [0, +\infty]$, on a

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B, \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup A \quad \text{et si } A \neq \emptyset \text{ et } B \neq \emptyset, \quad \sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Définition 1 : Famille sommable de nombres positifs

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$.

On appelle **somme de $(x_i)_{i \in I}$** l'élément de $[0, +\infty]$ $\sum_{i \in I} x_i := \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{j \in J} x_j = \sup \left\{ \sum_{j \in J} x_j \mid J \subset I \text{ finie} \right\}$,

qui existe comme borne supérieure d'une partie de $[0, +\infty]$.

On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **sommable**, si $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$.

Comment essayer de définir cette somme ?

Fixons une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par un ensemble I . On pose $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I . Essayons de définir proprement $\sum_{i \in I} x_i$.

I fini. On va commencer par le cas I fini, et l'approcher par les parties finies $J \subset I$. Dans ce cas $\sum_{i \in I} x_i$ est bien défini comme une somme finie naturelle de termes.

Pour toute partie finie J de I , $\sum_{j \in J} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$, donc $\sum_{i \in I} x_i$ majore l'ensemble $A = \left\{ \sum_{j \in J} x_j \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$.

Cela dit, $\sum_{i \in I} x_i$ appartient à A par finitude de I , donc $\sum_{i \in I} x_i = \max A = \sup A = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{j \in J} x_j$.

$I = \mathbb{N}$. Un autre cas que vous connaissez bien après le chapitre sur les **SÉRIES NUMÉRIQUES**, est celui d'une série $\sum x_n$ de réels positifs de somme U .

Pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, $\sum_{j \in J} x_j \leq \sum_{j=0}^{\max J} x_j \leq U$ par positivité, donc U majore l'ensemble A défini précédemment.

Cela dit, S est aussi la limite d'une suite d'éléments de A , puisque c'est, par définition, la limite des sommes partielles.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = S = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})} \sum_{j \in J} x_j$ d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Ces deux exemples nous montre bien pourquoi on a posé cette définition.

⚠ ATTENTION Contrairement aux séries, où l'on somme dans l'ordre u_0 , puis u_1 , puis $u_2, \dots$ la somme sur une famille I ne dépend pas de l'ordre choisi.

Notation Si $\sum u_n$ est à termes positifs et diverge, on

note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ et on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n u_k$$

Exemple 1

Si un $x_i = +\infty$, alors $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$ et la famille n'est pas sommable.

Si I est fini, on a vu dans la remarque que la famille est sommable si et seulement si $x_i \neq +\infty$, pour tout $i \in I$. Dans ce cas, cette somme est la somme habituelle d'un nombre fini de réels.

Exemple 2

Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée de E .

Pour toute partie finie J de I , on sait que est le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}((e_i)_{i \in J})$ est donné par

$$y = \sum_{i \in J} (e_i | x) e_i ,$$

et que d'après le théorème de Pythagore, le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2$.

Mais $\|y\|^2 = \sum_{i \in J} (e_i | x)^2$, et donc $\sum_{i \in J} (e_i | x)^2 \leq \|x\|^2$. Cela prouve la sommabilité de la famille $((e_i | x)^2)_{i \in I}$ ainsi que l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i \in I} (e_i | x)^2 \leq \|x\|^2 .$$

Théorème 1 : Théorème de sommation par paquets

Pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k \in K}$ de I et toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$,

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j .$$

Paquets = regroupements

En fait, tout ce que l'on fait c'est regrouper les termes en paquets disjoints, sans oublier un seul terme. Par exemple, si $I = \mathbb{N}$, on prends le paquet des nombres pairs et le paquet des nombres impairs.

Ce théorème est le point central de ce paragraphe. Après, on pourra se reposer.

Preuve. Cela revient à montrer ce que vous savez déjà sur un ensemble fini.

Réécrivons les définitions des sommes

$$\textcircled{1} \sum_{i \in I} x_i = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{i \in J} x_i \quad \text{et} \quad \textcircled{2} \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j = \sup_{L \in \mathcal{P}_f(K)} \sum_{k \in L} \sup_{J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)} \sum_{j \in J_k} x_j .$$

On va montrer l'égalité par double inégalité.

- Montrons que $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j$, c'est à dire que $\forall J \in \mathcal{P}_f(I), \sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j$.

Fixons J quelconque dans $\mathcal{P}_f(I)$ et pour tout $k \in L$, $J_k = J \cap I_k$, qui est une partie finie de I_k .

Si $L = \{k \in K \mid J \cap I_k \neq \emptyset\}$, alors la famille $(J_k)_{k \in L}$ est un recouvrement disjoint de J car

$$\bigsqcup_{k \in L} J_k = \bigsqcup_{k \in L} (J \cap I_k) = \bigsqcup_{k \in K} (J \cap I_k) = J \cap \bigsqcup_{k \in K} I_k = J \cap I = J .$$

Donc $|J| = \sum_{k \in L} |J_k| \geq \sum_{k \in L} 1 = |L|$, donc que L est fini, ce qui permet de conclure, en utilisant la définition $\textcircled{2}$,

$$\sum_{i \in J} x_i = \sum_{k \in L} \sum_{j \in J_k} x_j \leq \sum_{k \in L} \sum_{j \in I_k} x_j \leq \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j$$

- Montrons que $\sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$, c'est à dire que $\forall L \in \mathcal{P}_f(K), \sum_{k \in L} \sum_{j \in I_k} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$.

Fixons L quelconque dans $\mathcal{P}_f(K)$. Pour toute partie finie J_k de I_k , k décrivant L , les ensembles J_k sont disjoints et

$J := \bigsqcup_{k \in L} J_k$ est une partie finie de I , donc

$$\sum_{k \in L} \sum_{j \in J_k} x_j = \sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i .$$

En passant à la borne supérieure, on obtient le résultat voulu, soit $\sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$.

□

Exemple 3

Si $I = \mathbb{N}$, on peut sommer, par exemple, sur les paquets

- pairs et impairs $I_1 = 2\mathbb{N}$ et $I_2 = 2\mathbb{N} + 1$,
- d'intervalles $\llbracket 2^k, 2^{k+1} - 1 \rrbracket$, ce qui donne $\mathbb{N} = \{1\} \sqcup \llbracket 2, 3 \rrbracket \sqcup \llbracket 4, 7 \rrbracket \sqcup \llbracket 8, 15 \rrbracket \sqcup \dots$,
- définis par leur reste de la division euclidienne par 7, soit pour tout $k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$, $I_k = 7\mathbb{N} + k$.

Exemple 4

Si $I = \mathbb{N}^2$, on peut sommer, par exemple, sur les paquets

- de lignes $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (\{i\} \times \mathbb{N})$
- de colonnes $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \times \{i\})$
- de cases blanches et noires, comme sur un quadrillage $\mathbb{N}^2 = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid k + l \in 2\mathbb{N}\} \sqcup \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid k + l \in 2\mathbb{N} + 1\}$.
- de diagonales de pente -1 $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{(k, n - k) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$
- de diagonales de pente 4 $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{(k, n + 4k) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

Exemple 5

Soit $I = (\mathbb{N}^*)^2$ et, pour $(i, j) \in I$, $a_{i,j} = \frac{1}{\max(i, j)^3}$. Regroupons les termes de la famille en fonction de la valeur de $\max(i, j)$, en écrivant $I = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$, où $I_n = \{(n, j) \mid j \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \cup \{(i, n) \mid i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $|I_n| = 2n - 1$, on a $\sum_{(i,j) \in I_n} a_{i,j} = \frac{2n - 1}{n^3}$, d'où

$\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n - 1}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, où le dernier terme n'est pas calculable avec les fonctions usuelles et est appelée la constante d'Apéry environ égale à 1,202056...

Proposition 1 : Opérations sur les sommes quelconques de réels positifs

Soient $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$, $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$, $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ des familles d'éléments de $[0, +\infty]$ et $\lambda \in [0, +\infty]$.

- ① **Changement d'indice** Pour toute bijection φ de J sur I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$.
- ② **Restriction** Si J est une partie de I , $\sum_{j \in J} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$.
- ③ **Linéarité** $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.
- ④ **Croissance** Si $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in I$, $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.
- ⑤ **Théorème de Fubini** $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}$.
- ⑥ **Familles produits** $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j$.

Séries commutativement convergentes

En particulier, dans ①, pour $I = J = \mathbb{N}$, pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est invariante par permutation, c'est à dire, ne dépend pas de l'ordre de sommation. On dit qu'elle est **commutativement convergente**. On va voir que les séries absolument convergentes sont toutes commutativement convergente. La réciproque est vraie pour les nombres réels ou complexes.

Preuve.

$$\textcircled{1} \sum_{i \in I} x_i = \sup_{L \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{l \in L} x_l = \sup_{L \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{\varphi(k) \in L} x_{\varphi(k)} = \sup_{L \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{k \in \varphi^{-1}(L)} x_{\varphi(k)} = \sup_{K \in \mathcal{P}_f(J)} \sum_{k \in K} x_{\varphi(k)} = \sum_{k \in J} x_{\varphi(k)} ,$$

Car toute bijection est aussi une bijection des parties finies.

$$\textcircled{2} I = J \sqcup (I \setminus J) \text{ donc par sommation par paquets, } \sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j + \underbrace{\sum_{j \in I \setminus J} x_j}_{\geq 0} \geq \sum_{j \in J} x_j .$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) &= \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{j \in J} (\lambda x_j + y_j) = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \lambda \sum_{j \in J} x_j + \sum_{j \in J} y_j = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \lambda \sum_{j \in J} x_j + \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{j \in J} y_j \\ &= \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i . \end{aligned}$$

Attention, toutes les égalités sont vraies parce que tout est positif ici !

④ Si l'un des x_i vaut $+\infty$, on a le résultat immédiatement.

Dans le cas contraire, $y_i - x_i \in [0, +\infty]$ pour tout $i \in I$, donc par linéarité

$$\sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} (x_i + (y_i - x_i)) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} (y_i - x_i) = \sum_{i \in I} x_i + \underbrace{\sum_{i \in I} (y_i - x_i)}_{\geq 0} \geq \sum_{i \in I} x_i .$$

⑤ Prenons la décomposition $\bigsqcup_{i \in I} (\{i\} \times J) = I \times J = \bigsqcup_{j \in J} (I \times \{j\})$. Alors d'après le théorème de sommation par paquets

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij} .$$

$$\textcircled{6} \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j \stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_i b_j \stackrel{\textcircled{3}}{=} \sum_{j \in J} \left(b_j \sum_{i \in I} a_i \right) \stackrel{\textcircled{3}}{=} \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j .$$

□

Exemple 6

① $n \mapsto n+1$ étant une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1}$ qui n'est qu'un glissement d'indice.

① $\varphi : n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \geq 0 \\ -n-1/2 & \text{si } n < 0 \end{cases}$ étant une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\varphi(n)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} x_{-k} .$

② $\sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\min(i,j)}$ diverge car $\sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\min(i,j)} \geq \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\min(i,1)} = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} 1 = +\infty .$

④ $\sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\max(i,j)^3}$ converge car $\sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\max(i,j)^3} \leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{i^{3/2} j^{3/2}}$, car $\max(i,j)^3 = (\max(i,j)^{3/2})^2 \geq i^{3/2} j^{3/2}$ et $\sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{i^{3/2} j^{3/2}} = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{i^{3/2}} \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{j^{3/2}} < +\infty$ par critère de Riemann convergente.

⑤ $\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = 1 .$

$$\textcircled{5} \quad \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{p^q}{e^{2p} q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{p^q}{q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p} e^p = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-p} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

$$\textcircled{6} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n} = \sum_{\substack{n,k \in \mathbb{N}^* \\ k \leq n}} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Quand tout est positif, tout va bien !

Conclusion : Lorsqu'on veut sommer des familles de réels positifs, il n'y a rien à justifier, aucune notion de convergence. Les règles de calcul, le théorème de sommation par paquets et en particulier de Fubini, n'utilisent aucune hypothèse hormis la positivité. Le simple fait que le résultat est fini ou non permet de dire que la famille est sommable ou non.

Mais quand ce n'est pas le cas, ...

2 CAS GÉNÉRAL

On considère maintenant le cas où $(z_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes.

Définition 2 : Famille sommable de nombres complexes

Soit $(z_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que $(z_i)_{i \in I}$ est sommable si $\sum_{i \in I} |z_i| < +\infty$.

L'ensemble des familles sommables de $\mathbb{C}^I$ à valeurs dans $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est noté $\ell^1(I, \mathbb{K})$.

Exemple 7

Toute famille finie de nombres complexes est sommable.

Pour $I = \mathbb{N}$, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si la série $\sum x_n$ converge absolument.

Pour toutes familles $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, si $|x_i| \leq |y_i|$ pour tout $i \in I$, et $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable, alors $(x_i)_{i \in I}$, car $\sum_{i \in I} |x_i| \leq \sum_{i \in I} |y_i| < +\infty$. Super utile en pratique !

Définition 3 : Calcul d'une famille sommable

Pour $(x_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{R})$, $\sum_{i \in I} x_i := \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$, où $\forall x \in \mathbb{R}, x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ et $x^- = \frac{|x|-x}{2}$.

Pour $(z_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$, $\sum_{i \in I} z_i := \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(z_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(z_i)$.

Pourquoi ces définition ?

Pour $x \in \mathbb{R}^I$, les familles $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ et $x^- = \frac{|x|-x}{2}$, représentent respectivement la partie positive et la partie négative de x .

On a alors $0 \leq x^+ \leq |x|$, $0 \leq x^- \leq |x|$, $x^+ + x^- = |x|$ et $x^+ - x^- = x$.

Les familles $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et leurs sommes sont des réels car $\sum_{i \in I} x_i^+ \leq \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$. On

peut alors définir alors la somme de la famille $(x_i)_{i \in I}$ en posant $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$.

Prenons maintenant une famille complexe $(z_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$.

Les familles $(\operatorname{Re}(x_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(x_i))_{i \in I}$ sont sommables, car par exemple $\sum_{i \in I} |\operatorname{Re}(x_i)| \leq \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$. On peut alors définir $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i)$, en se ramenant au cas réel.

On a aussi $\operatorname{Re}\left(\sum_{i \in I} x_i\right) = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i)$ et $\operatorname{Im}\left(\sum_{i \in I} x_i\right) = \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i)$.

Proposition 2 : Propriétés des familles sommables

Soient $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}, (u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}, (a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- ① **Restriction** Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et si $J \subset I$, alors la famille $(x_j)_{j \in J}$ est sommable.
- ② **Linéarité** L'ensemble $\ell^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, c'est à dire,
 $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{K}) \implies (x_i + \lambda y_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{K})$ et on a $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.
- ③ **Croissance** Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables réelles et si $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in I$, $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.
- ④ **Inégalité triangulaire** Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.
- ⑤ **Théorème de sommation par paquets** $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$.
- ⑥ **Changement d'indice** Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour toute bijection φ de J sur I , la famille $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ l'est aussi et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$.
- ⑦ **Théorème de Fubini** Si $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable, les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{ij}\right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{ij}\right)_{j \in J}$ le sont aussi et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}$$
- ⑧ **Familles produits** Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont sommables, la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ l'est aussi et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j$$
- ⑨ **Approximation par des sommes finies** Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \quad \left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right| < \varepsilon.$$

Preuve.

- ① D'après le résultat sur les sous-familles de réels positifs, $\sum_{j \in J} |x_j| \leq \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$, donc $(x_j)_{j \in J}$ est sommable.
- ② La famille $(\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$ est sommable car $\sum_{i \in I} |\lambda x_i + y_i| \leq \sum_{i \in I} (|\lambda| \cdot |x_i| + |y_i|) = |\lambda| \sum_{i \in I} |x_i| + \sum_{i \in I} |y_i| < +\infty$.
- ③ On a $\sum_{i \in I} y_i - \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} (y_i - x_i) \geq 0$, d'où la croissance.

$$(4) \text{ Pour le cas réel, } \left| \sum_{i \in I} x_i \right| = \left| \sum_{i \in I} \overbrace{x_i^+}^{\geq 0} - \sum_{i \in I} \overbrace{x_i^-}^{\geq 0} \right| \leq \sum_{i \in I} x_i^+ + \sum_{i \in I} x_i^- = \sum_{i \in I} (x_i^+ + x_i^-) = \sum_{i \in I} |x_i|.$$

Pour le cas complexe, à vous !

(5) La famille $(x_i)_{i \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in K$ d'après (1), donc les familles $(x_i^+)_{i \in I_k}$ et $(x_i^-)_{i \in I_k}$ aussi. La famille $\left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)_{k \in K}$ l'est ensuite à son tour car $\sum_{k \in K} \left| \sum_{i \in I_k} x_i \right| \stackrel{(3)}{\leq} \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |x_i| = \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$, et on peut remplacer x_i par x_i^+ et x_i^- dans cette majoration. Finalement

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^- = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i^+ - \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i^- \stackrel{(2)}{=} \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} x_i^+ - \sum_{i \in I_k} x_i^- \right) \stackrel{(2)}{=} \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} (x_i^+ - x_i^-) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i.$$

(6) Même preuve que pour le cas des réels positifs.

(7) Même preuve que pour le cas des réels positifs.

(8) Même preuve que pour le cas des réels positifs.

(9) Soit $\varepsilon > 0$.

Cas réel positif. Par définition de $\sum_{i \in I} x_i$ comme borne supérieure de

$$A := \left\{ \sum_{i \in F} x_i, F \subset I \text{ finie} \right\}$$

$\sum_{i \in I} x_i - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A donc il existe $F \subset I$ finie telle que

$$\sum_{i \in I} x_i - \varepsilon < \sum_{i \in F} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

d'où le résultat désiré. Remarquons qu'il reste valable si l'on remplace F par $G \supset F$.

Cas réel sommable. Comme

$$\sum_{i \in I} x_i := \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$$

Par le cas précédent, il existe $F_+, F_- \subset I$ finies telles que

$$\left| \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in F_+} x_i^+ \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{i \in I} x_i^- - \sum_{i \in F_-} x_i^- \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $G = F_+ \cup F_-$, alors par la remarque du cas précédent et par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \in G} x_i \right| = \left| \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in G} x_i^+ - \left(\sum_{i \in I} x_i^- - \sum_{i \in G} x_i^- \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cas complexe. Même principe que ci-dessus en séparant parties réelle et imaginaire.

□

Exemple 8

En particulier, pour $I = J = \mathbb{N}$, (5) montre que la somme d'une série absolument convergente est invariante par permutation, c'est à dire, ne dépend pas de l'ordre de sommation.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \sum u_n \text{ est commutativement convergente} \Leftrightarrow \sum u_n \text{ est absolument convergente.}$$

Exemple 9

La famille $\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{|\sin(p+q)|}{p^2q^2} \leq \sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2q^2} = \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\right) \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2}\right) < +\infty$.

Exemple 10

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la famille $(z^{ij})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$. En effet,

$$\begin{aligned} - \text{Si } |z| < 1 : \quad \sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} |z^{ij}| &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} (|z|^i)^j |z|^i = 1 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|z|^i}{1 - |z|^i} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|z|^i}{1 - |z|} = \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} < +\infty. \\ - \text{Si } |z| \geq 1 : \quad \sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} |z^{ij}| &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} (|z|^i)^j = \sum_{i=1}^{+\infty} +\infty = +\infty. \end{aligned}$$

Proposition 3 : Produit de Cauchy

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

On appelle **produit de Cauchy** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$p_n := \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

La famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

On dit aussi que la série $\sum p_n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Preuve. Nous savons déjà que la famille $(u_i v_j)_{i,j \in \mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \times \sum_{j \in \mathbb{N}} v_j = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} u_i v_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n$$

Plus explicitement,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \times \sum_{j \in \mathbb{N}} v_j = \underbrace{u_0 v_0}_{i+j=0} + \underbrace{u_0 v_1 + u_1 v_0}_{i+j=1} + \underbrace{u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0}_{i+j=2} + \dots = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq i,j \leq n \\ i+j=n}} u_i v_j.$$

□

Exemple 11

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. En effet, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, donc par produit de Cauchy de cette suite avec elle-même

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Exemple 12

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$. En effet, les suites $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{b^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont sommables, donc par produit de Cauchy

$$e^a e^b = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.$$

Autrement dit $e^{a+b} = e^a e^b$!