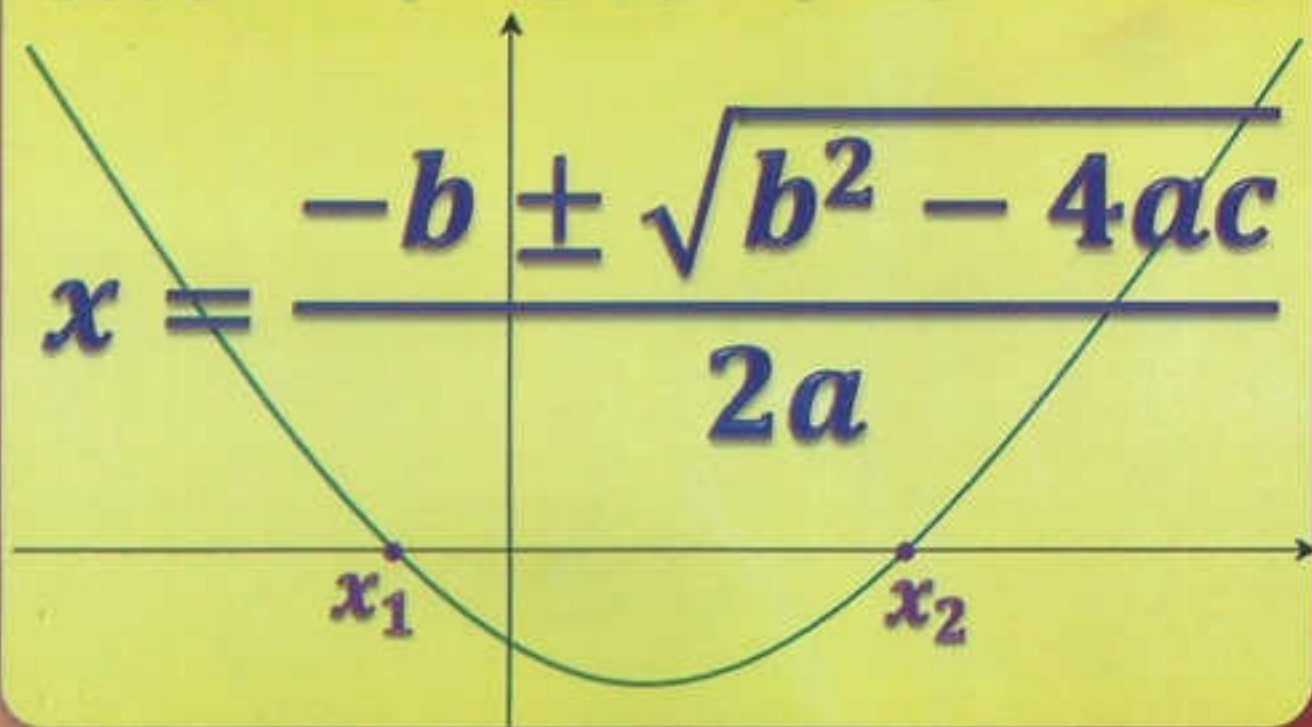


ÁLGEBRA

ECUACIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$\bar{x}-14\sqrt{\text{H}\mu\epsilon\vec{r}\tau\alpha\varsigma}$

Las Matemáticas son fáciles

twitter.com/calapenshko

Christiam Huertas

Nivel UNI



Índice

1. Ecuación	02	5. Ecuación cuadrática	13
1.1 Solución de una ecuación	02	5.1 Métodos de resolución	13
1.2 Conjunto solución de una ecuación	03	5.1.1 Por factorización	13
1.3 Ecuaciones equivalentes	04	5.1.2 Por fórmula general	14
1.4 Clasificación de la ecuaciones según su conjunto solución	04	5.1.3 Completando el cuadrado	15
2. Ecuación paramétrica	05	5.2 Naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática	16
2.1 Análisis de la ecuación paramétrica: $Ax = B$	05	5.3 Interpretación geométrica de las raíces de una ecuación cuadrática	17
3. Ecuaciones polinomiales	07	5.4 Teorema de Cardano - Viete	18
3.1 Raíz de un polinomio	07	5.5 Diferencia de raíces	20
3.2 Teorema del factor	08	5.6 Reconstrucción de una ecuación cuadrática	21
3.3 Multiplicidad de una raíz	08	5.7 Ecuaciones cuadráticas equivalentes	21
3.3.1 Raíz múltiple	09		
3.3.2 Teorema de la raíz múltiple	09		
3.4 Solución y/o raíz de una ecuación polinomial	10	6. Problemas resueltos	23
4. Ecuación lineal	11	6.1 Universidad Nacional de Ingeniería (UNI)	34
		7. Problemas propuestos	41
		8. Claves	44



Ecuación

Es una igualdad condicional que se establece entre dos expresiones matemáticas donde hay por lo menos una variable (el cual la llamaremos incógnita).

$$P(x) = Q(x)$$

dónde:

- P y Q son expresiones matemáticas.
- x es la variable (incógnita)

Ejemplo 1.

- $5x = 20$
- $\sqrt{x^2 - 1} = 3$
- $x^2 = 3x + 4$
- $2x + 3 = 2x + 3$

Solución de una ecuación

Es aquel valor de la incógnita que transforma la ecuación en una proposición verdadera; es decir, dicho valor verifica la ecuación.

Ejemplo 2.

Dada la ecuación: $5x = 20$

Si $x = 4$: $5(4) = 20$ (Verdadero)

Entonces, 4 es solución de la ecuación.

Si $x = 3$: $5(3) = 20$ (Falso)

Entonces, 3 no es solución de la ecuación.

Ejemplo 3.

Dada la ecuación: $x^2 + 2 = 3x$

Si $x = 1$: $1^2 + 2 = 3(1)$ (Verdadero)

Entonces, 1 es solución de la ecuación.

Si $x = 2$: $2^2 + 2 = 3(2)$ (Verdadero)

Entonces, 2 es solución de la ecuación.

Ejemplo 4.

Dada la ecuación: $x^2 + 1 = 0$

Si $x = i$: $i^2 + 1 = 0$ (Verdadero)

Entonces, i es solución de la ecuación.

Si $x = -i$: $(-i)^2 + 1 = 0$ (Verdadero)

Entonces, $-i$ es solución de la ecuación.

Recuerde:

$$i^2 = -1 \quad (-i)^2 = -1$$

Ejemplo 5.

Dada la ecuación: $2x - 1 = 2x - 1$

Vemos que en ambos lados aparece la misma expresión matemática, por lo tanto al reemplazar cualquier valor a la variable la ecuación siempre se verifica. Es decir, cualquier número (real o complejo) es solución.

Ejemplo 6.

Dada la ecuación: $\frac{1}{x-1} = 0$

Esta ecuación no se verifica para ningún valor. Pues,

$$\frac{1}{x-1} = 0$$

$(x-1)$ pasa a multiplicar al lado derecho:

$$1 = 0(x-1)$$

$$1 = 0 \quad (\text{Falso})$$

Ejemplo 7.

Si β es una solución de la ecuación $x^2 + 1 = \sqrt{3}x$, entonces halle el valor de $\beta + \frac{1}{\beta}$.

Resolución.

Como β es solución de la ecuación

$$x^2 + 1 = \sqrt{3}x$$

entonces la verifica; es decir,

$$\beta^2 + 1 = \sqrt{3}\beta$$

Dividimos entre β :

$$\frac{\beta^2 + 1}{\beta} = \frac{\sqrt{3}\beta}{\beta}$$

Simplificamos:

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \sqrt{3}$$

Conjunto solución de una ecuación

Es el conjunto denotado por CS que agrupa a todas las soluciones (si existen) de una ecuación.

Si la ecuación no tiene solución, entonces su conjunto solución es el conjunto vacío (ϕ).

Ejemplo 8.

La ecuación $5x = 20$ tiene por solución a 4, entonces su conjunto solución es: CS = {4}

Ejemplo 9.

La ecuación $x^2 + 2 = 3x$ tiene por soluciones a 1 y 2, entonces su conjunto solución es: CS = {1; 2}

Ejemplo 10.

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene por soluciones a i y $-i$, entonces su conjunto solución es: CS = { i ; $-i$ }

Ejemplo 11.

La ecuación $2x - 1 = 2x - 1$ tiene por solución a cualquier número, entonces su conjunto solución es: CS = $\mathbb{C}$

Ejemplo 12.

La ecuación $\frac{1}{x-1} = 0$ no tiene solución, entonces su conjunto solución es: CS = { }

Ejemplo 13.

Dada la ecuación $x^2 = 2x + 1$. Si $\{a; b\}$ es su conjunto solución, halle el valor de

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b + 1}$$

Resolución.

Se tiene la ecuación

$$x^2 = 2x + 1$$

cuyo conjunto solución es $\{a; b\}$. Es decir, a y b son las soluciones (por tanto, verifican la ecuación). Luego:

$$\begin{aligned} a^2 &= 2a + 1 \\ b^2 &= 2b + 1 \end{aligned} \quad \downarrow$$

Sumamos: $a^2 + b^2 = 2a + 2b + 2$

Factorizamos 2 en el lado derecho:

$$a^2 + b^2 = 2(a + b + 1)$$

De donde se obtiene:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b + 1} = 2$$

OBS.

Resolver una ecuación significa hallar su conjunto solución.

Ejemplo 14.

Resuelva la ecuación

$$x^2(x-2) = 9(x-2)$$

Resolución.

Se tiene la ecuación:

$$x^2(x-2) = 9(x-2)$$

Lo llevamos a un solo lado para factorizarlo:

$$x^2(x-2) - 9(x-2) = 0$$

Factorizamos $(x-2)$:

$$(x-2)(x^2-9) = 0$$

$$(x-2)(x+3)(x-3) = 0$$

Recuerde:

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0 \vee b = 0$$

En la ecuación:

$$x-2=0 \vee x+3=0 \vee x-3=0$$

$$x=2 \vee x=-3 \vee x=3$$

(son las soluciones de la ecuación)

Por lo tanto,

$$CS = \{2; -3; 3\}$$

Ecuaciones equivalentes

Dos o más ecuaciones en la misma incógnita son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo 15.

Las ecuaciones

$$x^2 + 9 = 6x$$

$$2x - 6 = 0$$

son equivalentes, pues:

- $x^2 + 9 = 6x$ tiene por solución solo a 3; es decir, $CS = \{3\}$
- $2x - 6 = 0$ tiene por solución a 3; es decir, $CS = \{3\}$

Vemos que tienen el mismo conjunto solución.

Clasificación de las ecuaciones según su conjunto solución

Según el número de soluciones, las ecuaciones se pueden clasificar en:

1. Ecuaciones compatibles

Son aquellas ecuaciones que poseen al menos una solución. Se clasifican en:

a. Determinadas

Son aquellas ecuaciones que tienen una cantidad finita de soluciones.

b. Indeterminadas

Son aquellas ecuaciones que tienen una cantidad infinita de soluciones.

2. Ecuaciones incompatibles

También llamadas **ecuaciones inconsistentes**. Son aquellas ecuaciones que no poseen soluciones; es decir, su conjunto solución es el conjunto vacío (ϕ)

Ejemplo 16.

Dadas las ecuaciones y su conjunto solución:

- $5x = 20$, $CS = \{4\}$

Es una ecuación *compatible determinada*, pues tiene una cantidad finita de soluciones.

- $x^2 + 2 = 3x$, CS = $\{1; 2\}$

Es una ecuación *compatible determinada*, pues tiene una cantidad finita de soluciones.

- $x^2 + 1 = 0$, CS = $\{i; -i\}$

Es una ecuación *compatible determinada*, pues tiene una cantidad finita de soluciones.

- $2x - 1 = 2x - 1$, CS = $\mathbb{C}$

Es una ecuación *compatible indeterminada*, pues tiene una cantidad infinita de soluciones.

- $\frac{1}{x-1} = 0$, CS = $\{ \}$

Es una ecuación *incompatible* (o inconsistente), pues no tiene soluciones.

Ejemplo 17.

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\sqrt{x^2} = x$?

Resolución.

Se tiene la ecuación

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$|x| = x$$

Esta igualdad se verifica solo cuando x es positivo o cero; es decir, $x \geq 0$.

Luego,

$$\text{CS} = [0; +\infty)$$

La ecuación tiene infinitas soluciones.

Ecuación paramétrica

Forma general:

$$Ax = B$$

dónde:

- A y B son los parámetros.
- x es la variable (incógnita).

Ejemplo 18.

Ejemplos de ecuaciones paramétricas:

- $(n - 2)x = 1$
- $3x = 2r - 5$
- $(t + 1)x = t - 3$
- $(a^2 - 4)x = a^2 - 3a + 2$

Análisis de la ecuación paramétrica: $Ax = B$

Caso I

$$A \neq 0$$

En la ecuación:

$$Ax = B$$

A puede pasar a dividir:

$$x = \frac{B}{A} \quad (\text{es la solución})$$

$$\text{CS} = \left\{ \frac{B}{A} \right\}$$

Vemos que la ecuación posee solución única. Por lo tanto, es compatible determinada.

Caso II

$$A = 0 \wedge B = 0$$

Lo reemplazamos en la ecuación:

$$0x = 0$$

Esta igualdad se verifica para cualquier número. Es decir, CS = $\mathbb{C}$.

Vemos que la ecuación tiene infinitas soluciones. Por lo tanto, es compatible indeterminada.

Caso III $A = 0 \wedge B \neq 0$

Lo reemplazamos en la ecuación:

$$\begin{aligned} 0x &= B \\ 0 &= B \end{aligned}$$

Esta igualdad no se verifica para ningún número (pues, $B \neq 0$). Es decir, $CS = \emptyset$.

Teoremas

Dada la ecuación paramétrica:

$$Ax = B$$

1. Es compatible determinada si:

$$A \neq 0$$

2. Es compatible indeterminada si:

$$A = 0 \wedge B = 0$$

3. Es incompatible (o inconsistente) si:

$$A = 0 \wedge B \neq 0$$

Ejemplo 19.

Dada la ecuación paramétrica

$$(n^2 - 1)x = n^2 + n + 1$$

Halle los valores reales de n para que la ecuación sea compatible determinada.

Resolución.

Para que la ecuación paramétrica

$$\underbrace{(n^2 - 1)}_A x = \underbrace{n^2 + n + 1}_B$$

sea compatible determinada se debe cumplir: $A \neq 0$

Reemplazamos:

$$n^2 - 1 \neq 0$$

$$(n + 1)(n - 1) \neq 0$$

$$n \neq -1 \wedge n \neq 1$$

Es decir, n puede tomar cualquier número real menos a -1 y 1 .

$$\therefore n \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

Ejemplo 20.

Dada la ecuación paramétrica

$$(t^3 + 1)x = t^2 - 1$$

Halle los valores reales de t para que la ecuación sea compatible indeterminada.

Resolución.

Para que la ecuación paramétrica

$$\underbrace{(t^3 + 1)}_A x = \underbrace{t^2 - 1}_B$$

sea compatible indeterminada se debe cumplir:

$$A = 0 \wedge B = 0$$

Reemplazamos:

$$t^3 + 1 = 0 \wedge t^2 - 1 = 0$$

Factorizamos:

$$(t + 1)(t^2 - t + 1) = 0 \wedge$$

$$(t + 1)(t - 1) = 0$$

Vemos que para que ambas expresiones sean ceros a la vez, se debe cumplir:

$$t + 1 = 0$$

$$t = -1$$

Ejemplo 21.

Dada la ecuación paramétrica

$$(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 2a$$

Halle los valores reales de a para que la ecuación no tenga solución.

Resolución.

twitter.com/calapenshko

Para que la ecuación paramétrica

$$\frac{(a^2 - 5a + 6)x}{A} = \frac{a^2 - 2a}{B}$$

no tenga solución, se debe cumplir:

$$A = 0 \wedge B \neq 0$$

Reemplazamos:

$$a^2 - 5a + 6 = 0 \wedge a^2 - 2a \neq 0$$

$$\begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ -2 \quad -3 \end{array} \quad a(a-2) \neq 0$$

$$(a-2)(a-3) = 0 \wedge a(a-2) \neq 0$$

$$a = 2 \vee a = 3$$

Se descarta $a = 2$, pues no cumple la segunda proposición.

Por lo tanto, $a = 3$.

Ecuaciones polinomiales

Forma general de una ecuación polinomial de grado n :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde $a_0 \neq 0$.

Ejemplo 22.

Ejemplos de ecuaciones Polinomiales:

- $3x - 2 = 0$
Ecuación polinomial de grado 1.
- $x^2 - 3x - 4 = 0$
Ecuación polinomial de grado 2.
- $2x^3 - x^2 + x - 2 = 0$
Ecuación polinomial de grado 3.
- $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$
Ecuación polinomial de grado 4.

OBS.

Como los polinomios generalmente están definidas en $\mathbb{C}$, entonces las ecuaciones polinomiales las resolveremos en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 23.

Resuelva la ecuación polinomial:

$$x^3 - x^2 + x = 1$$

Resolución.

Lo llevamos a un solo lado para factorizarlo:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2(x-1) + (x-1) = 0$$

Factorizamos $(x-1)$:

$$(x-1)(x^2+1) = 0$$

$$(x-1)(x+i)(x-i) = 0$$

Recuerde:

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0 \vee b = 0$$

En la ecuación:

$$x-1=0 \vee x+i=0 \vee x-i=0$$

$$x=1 \vee x=-i \vee x=i$$

(son las soluciones de la ecuación)

$$\therefore \text{CS} = \{1; -i; i\}$$

Raíz de un polinomio

Sea $P(x)$ un polinomio de grado mayor que

1. El número α es llamado raíz del polinomio $P(x)$ si y solo si $P(\alpha) = 0$.

Ejemplo 24.

Dado el polinomio $P(x) = x - 5$

Vemos que $P(5) = 5 - 5 = 0$; es decir, 5 es raíz del polinomio $P(x)$.

Ejemplo 25.

Dado el polinomio $T_{(x)} = x^2 - 3x + 2$

Vemos que:

$$T_{(1)} = 1^2 - 3(1) + 2 = 0$$

$$T_{(2)} = 2^2 - 3(2) + 2 = 0$$

Es decir, los números 1 y 2 son las raíces del polinomio $T_{(x)}$.

Teorema del factor

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de grado mayor que 1. Si α es una raíz del polinomio $P_{(x)}$ entonces $(x - \alpha)$ es un factor de $P_{(x)}$.

Es decir, existe un polinomio $q_{(x)}$ tal que

$$P_{(x)} = (x - \alpha) \cdot q_{(x)}$$

Ejemplo 26.

Dado el polinomio

$$P_{(x)} = x^2 - 3x - 10$$

Vemos que

$$P_{(-2)} = (-2)^2 - 3(-2) - 10 = 0$$

Es decir,

-2 es una raíz del polinomio $P_{(x)}$

Entonces, por el teorema del factor:

$(x - (-2))$ es un factor de $P_{(x)}$

Luego, $P_{(x)} = (x + 2) \cdot q_{(x)}$

Ejemplo 27.

Dado el polinomio

$$T_{(x)} = x^3 - x^2 + x - 1$$

Vemos que

$$T_{(i)} = i^3 - i^2 + i - 1 = 0$$

Es decir,

i es una raíz del polinomio $T_{(x)}$

Entonces, por el teorema del factor:

$(x - i)$ es un factor de $T_{(x)}$

Luego, $T_{(x)} = (x - i) \cdot q_{(x)}$

OBS.

Un método práctico para hallar las raíces de un polinomio es, factorizarlo sobre $\mathbb{C}$ e igualar a cero cada factor y despejar la variable.

Ejemplo 28.

Halle todas las raíces del polinomio

$$P_{(x)} = x^4 - 1$$

Resolución.

Acomodamos convenientemente:

$$P_{(x)} = (x^2)^2 - 1^2$$

Por diferencia de cuadrados:

$$P_{(x)} = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$P_{(x)} = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$P_{(x)} = (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1)$$

Igualemos cada factor a cero:

$$x + i = 0; x - i = 0; x + 1 = 0; x - 1 = 0$$

$$x = -i; x = i; x = -1; x = 1$$

Por lo tanto, los números:

$$-i; i; -1; 1$$

son las raíces del polinomio $P_{(x)}$.

Multiplicidad de una raíz

Hablar de la multiplicidad de una raíz, es indicar las veces que se repite dicha raíz.

Ejemplo 29.

Dado el polinomio factorizado:

$$P(x) = (x-5)(x+1)^2(x-2)^3$$

Para hallar sus raíces, igualamos a cero cada factor:

- $x-5=0$
 $x_1=5$
- $(x+1)^2 = \underbrace{(x+1)}_{x_2=-1} \underbrace{(x+1)}_{x_3=-1} = 0$
 $x_2=-1; x_3=-1$
- $(x-2)^3 = \underbrace{(x-2)}_{x_4=2} \underbrace{(x-2)}_{x_5=2} \underbrace{(x-2)}_{x_6=2} = 0$
 $x_4=2; x_5=2; x_6=2$

Es decir,

$x_1=5$: 5 es una raíz simple

$x_2=-1$
 $x_3=-1$: -1 es una raíz doble o de multiplicidad dos

$x_4=2$
 $x_5=2$
 $x_6=2$: 2 es una raíz triple o de multiplicidad tres

$$3; 3; 3; 3; 3; -4; -4; -4; -4; -4; -4; -4$$

3 es raíz de multiplicidad 5

-4 es raíz de multiplicidad 7

Teorema de la raíz múltiple

Si α es una raíz de multiplicidad k del polinomio $P(x)$, entonces

$$P(\alpha) = 0$$

$$P'(\alpha) = 0$$

$$P''(\alpha) = 0$$

$$P'''(\alpha) = 0$$

$$\vdots$$

$$P^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

Donde $P^{(k-1)}$ es la derivada de orden $(k-1)$ del polinomio $P(x)$.

Ejemplo 31.

Determine el valor de ab si se sabe que el número 1 es una raíz doble del polinomio

$$f(x) = x^5 + x^2 + ax + b.$$

Resolución.

Como el número 1 es una raíz doble (raíz de multiplicidad dos), por el teorema de la raíz múltiple se cumple que:

$$f(1) = 0 \text{ y } f'(1) = 0$$

Entonces:

- Evaluamos $f(x)$ en 1:

$$f(1) = 1 + 1 + a + b = 0$$

$$\text{de donde: } a + b = -2 \dots (*)$$

- Como

$$f(x) = x^5 + x^2 + ax + b$$

Derivando se obtiene:

Raíz múltiple

Sea $P(x)$ un polinomio de grado mayor que 1. Diremos que el número α es una raíz de multiplicidad k si y solo si $(x-\alpha)^k$ es un factor del polinomio $P(x)$ y $(x-\alpha)^{k+1}$ no es factor de $P(x)$.

Ejemplo 30.

En el polinomio

$$T(x) = (x-3)^5(x+4)^7$$

las raíces son:

$$f'(x) = 5x^4 + 2x + a$$

Lo evaluamos en 1:

$$f'(1) = 5 + 2 + a = 0$$

de donde $a = -7$

Reemplazando en (*): $b = 5$

Por lo tanto, $ab = -35$.

Solución y/o raíz de una ecuación polinomial

Consideremos la ecuación polinomial de grado 6:

$$P(x) = (x - 5)(x + 1)^2(x - 2)^3 = 0$$

- Sus soluciones son:

$$5; -1; 2$$

(tiene 3 soluciones)

- Las raíces del polinomio $P(x)$ (ejemplo 29) son:

$$5; -1; -1; 2; 2; 2$$

(tiene 6 raíces)

Es decir, las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$ son las raíces del polinomio $P(x)$, pero se diferencian en cantidad (Es decir, coinciden en valor, pero se diferencian en cantidad).

En general, en una ecuación polinomial se cumple que:

$$\# \text{ soluciones} \leq \# \text{ raíces}$$

Ejemplo 32.

La ecuación polinomial

$$P(x) = (x - 5)(x + 1)^2(x - 2)^3 = 0$$

tiene 6 raíces, pero solo 3 soluciones.

OBS.

El grado del polinomio nos indica la cantidad de raíces que tiene.

Ejemplo 33.

- El polinomio $P(x) = x^5 - x + 1$ tiene exactamente 5 raíces, por ser de grado 5.
- El polinomio $Q(x) = 2x^{12} + x^3 - 1$ tiene exactamente 12 raíces por ser de grado 12.
- La ecuación polinomial $3x^{21} - x^{13} + x^7 - x + 1 = 0$ tiene exactamente 21 raíces por estar formado por un polinomio de grado 21.

Ejemplo 34.

Si en la ecuación polinomial

$$(x - a)^2(x - b)^4 = 0; a \neq b$$

La suma de raíces es 22 y la suma de soluciones es 6, calcule el valor de ab .

Resolución.

Se tiene la ecuación polinomial:

$$(x - a)^2(x - b)^4 = 0$$

Es una ecuación polinomial de grado 6.

- Sus soluciones son: a y b

Por dato:

$$\text{suma de soluciones} = 6$$

$$a + b = 6$$

- Sus raíces son: $a; a; b; b; b; b$

Por dato:

$$\text{suma de raíces} = 6$$

$$a + a + b + b + b + b = 22$$

$$2a + 4b = 22$$

Sacamos mitad: $a + 2b = 11$

$$\frac{a+b+b}{6} = 11$$

$$b = 5 \wedge a = 1$$

Por lo tanto, $ab = 5$.

Ejemplo 35.

Si la ecuación polinomial

$$(x-n)^4(2x+3)^p(x-p)^2(5x-1)^n = 0$$

admite 10 raíces cuya suma es $131/10$, determine el valor de p/n .

Resolución

Se tiene la ecuación polinomial:

$$(x-n)^4(2x+3)^p(x-p)^2(5x-1)^n = 0$$

tiene tiene tiene tiene
grado 4 grado p grado 2 grado n

cuyas soluciones son:

$$n; -\frac{3}{2}; p; \frac{1}{5}$$

(estas soluciones lo obtenemos igualando a cero cada factor)

1er dato:

la ecuación tiene 10 raíces

Esto quiere decir que el grado del polinomio es 10. Luego,

$$4 + p + 2 + n = 10$$

$$p + n = 4 \dots (*)$$

2do dato:

$$\text{suma de raíces} = \frac{131}{10}$$

$$4n - \frac{3}{2}p + 2p + \frac{1}{5}n = \frac{131}{10}$$

Multiplicamos por 10:

$$40n - 15p + 20p + 2n = 131$$

$$42n + 5p = 131$$

A la ecuación (*) por 5:

$$5n + 5p = 20$$

Restamos: $37n = 111$

$$n = 3$$

Luego (reemplazando en (*)):

$$p = 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{p}{n} = \frac{1}{3}$$

Ecuación lineal

Es aquella ecuación de primer grado cuya forma general es:

$$P(x) = ax + b = 0$$

donde $a \neq 0$.

OBS.

Toda ecuación lineal tiene una única solución (o una única raíz).

Ejemplo 36.

Resuelva la ecuación lineal

$$2x - 5 = 0$$

Resolución.

Se tiene la ecuación lineal

$$2x - 5 = 0$$

Sumo 5:

$$2x - 5 + 5 = 0 + 5$$

$$2x = 5$$

Divido entre 2:

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{es la solución o raíz de la ecuación}$$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$



Ejemplo 37.

Resuelva la ecuación lineal

$$\frac{x-1}{2} = \frac{x-2}{3}$$

Resolución.

Se tiene la ecuación lineal:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{x-2}{3}$$

Multiplicamos en aspa:

$$3(x-1) = 2(x-2)$$

$$3x-3 = 2x-4$$

$$3x-2x = -4+3$$

$$x = -1$$

(es la solución o raíz de la ecuación)

$$\therefore \text{CS} = \{-1\}$$

Ejemplo 38.

Resuelva la ecuación lineal

$$\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2$$

Resolución.

Se tiene la ecuación lineal:

$$\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2$$

Convenientemente el número 2 lo pasamos a restar al lado izquierdo como $-1-1$; es decir,

$$\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 = 0$$

$$\frac{x-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{x-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

Vemos que los numeradores son iguales y por tanto lo factorizamos:

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

Para que el producto sea cero, el primer factor debe ser cero, ya que el segundo factor es un número diferente de cero. Es decir:

$$x-\sqrt{2}-\sqrt{3} = 0$$

De donde:

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

(es la solución o raíz de la ecuación lineal)

$$\therefore \text{CS} = \{\sqrt{2} + \sqrt{3}\}$$

Ejemplo 39.

Resuelva la siguiente ecuación lineal.

$$\left(p + \frac{1}{p}\right) \left(p - \frac{1}{p}\right) = x \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}p\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}p\right)^2} \right)$$

Considere $p > 0$.**Resolución**

Se tiene la ecuación:

$$\left(p + \frac{1}{p}\right) \left(p - \frac{1}{p}\right) = x \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}p\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}p\right)^2} \right)$$

$$p^2 - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = x \left(\sqrt{\frac{9}{4}p^2 + \frac{27}{4}p^2} \right)$$

$$p^2 - \frac{1}{p^2} = x \left(\sqrt{\frac{36}{4}p^2} \right)$$

$$p^2 - \frac{1}{p^2} = x (\sqrt{9p^2})$$

$$p^2 - \frac{1}{p^2} = x(3p)$$

De donde

$$x = \frac{1}{3p} \left(p^2 - \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ \frac{1}{3} \left(p - \frac{1}{p^3} \right) \right\}$$

Ejemplo 40.

Dada la ecuación lineal:

$$(a-1)x^2 + (3-a)x + b = 0$$

Halle el valor de b si se sabe que $CS = \{3\}$

Resolución.

Para que la ecuación sea lineal, el coeficiente de x^2 debe ser cero. Es decir,

$$a-1=0$$

$$a=1$$

Lo reemplazamos en la ecuación:

$$2x + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{2} = 3 \text{ (dato)}$$

Por lo tanto, $b = -6$.

Ecuación cuadrática

Es aquella ecuación de segundo grado cuya forma general es:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a \neq 0$.

Métodos de resolución

Presentamos a continuación los métodos más utilizados para resolver una ecuación cuadrática.

1 Por factorización

Se lleva la ecuación a la forma general (todos los términos a un solo lado) y se factoriza el polinomio por el método del aspa simple.

Ejemplo 41.

Resuelva la ecuación $6x^2 - x - 2 = 0$.

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática:

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & -2 \\ 2x & & 1 \end{array}$$

$$(3x-2)(2x+1) = 0$$

Recuerde:

Si $ab = 0$, entonces $a = 0 \vee b = 0$

En la ecuación:

$$3x-2=0 \vee 2x+1=0$$

$$3x=2 \vee 2x=-1$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \vee x_2 = -\frac{1}{2}$$

(son las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática)

Por lo tanto,

$$CS = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right\}$$

Ejemplo 42.

Resuelva la ecuación cuadrática

$$x^2 - 5ix - 6 = 0$$

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 5ix - 6 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -2i \\ x & & -3i \end{array}$$

$$(x-2i)(x-3i) = 0$$

$$x-2i=0 \vee x-3i=0$$

$$x_1 = 2i \vee x_2 = 3i$$

Por lo tanto, $CS = \{2i; 3i\}$

Ejemplo 43.

Resuelva la ecuación cuadrática

$$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$$

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática:

$$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$$

$$ax \quad \quad \quad -b$$

$$bx \quad \quad \quad -a$$

$$(ax - b)(bx - a) = 0$$

$$ax - b = 0 \vee bx - a = 0$$

$$ax = b \vee bx = a$$

$$x_1 = \frac{b}{a} \vee x_2 = \frac{a}{b}$$

Por lo tanto, $CS = \left\{ \frac{b}{a}; \frac{a}{b} \right\}$

2 Por fórmula general

Dada la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

entonces las raíces están dadas por:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

OBS.

1. La expresión

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

es el **discriminante** de la ecuación cuadrática.

2. Se sabe que:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Luego,

$$CS = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

es el conjunto solución de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejemplo 44.

Resuelva la ecuación cuadrática:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

Resolución.

Se tiene la ecuación:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

Identificamos los coeficientes:

$$a = 2; b = -3; c = -1$$

Calculamos su discriminante:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-1)$$

$$\Delta = 17$$

Lo reemplazamos en la fórmula general:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1; x_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{17}}{2(2)}$$

$$x_1; x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Es decir,

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \text{ y } x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

Por lo tanto,

$$CS = \left\{ \frac{3 - \sqrt{17}}{4}; \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

Ejemplo 45.

Resuelva la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Resolución.

Identificamos los coeficientes:

$$a = 1; b = -2; c = 2$$

Calculamos su discriminante:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2)$$

$$\Delta = -4$$

Lo reemplazamos en la fórmula general:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1; x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2(1)}$$

$$x_1; x_2 = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

Simplificamos:

$$x_1; x_2 = 1 \pm i$$

Es decir,

$$x_1 = 1 - i \text{ y } x_2 = 1 + i$$

Por lo tanto, $CS = \{1 - i; 1 + i\}$

3 Completando el cuadrado

Para este método aplicaremos la siguiente propiedad:

$$\text{Si } x^2 = a \rightarrow x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$$

Por ejemplo:

- Si $x^2 = 9$, entonces:

$$x = \sqrt{9} \vee x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

- Si $x^2 = 5$, entonces:

$$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

- Si $x^2 = -2$, entonces:

$$x = \sqrt{-2} \vee x = -\sqrt{-2}$$

$$x = \sqrt{2}i \vee x = -\sqrt{2}i$$

Ejemplo 46.

Resuelva la ecuación cuadrática

$$4x^2 - 12x + 7 = 0$$

Resolución.

Se tiene la ecuación:

$$4x^2 - 12x + 7 = 0$$

Sumamos 2 para completar el cuadrado:

$$4x^2 - 12x + 9 = 2$$

$$(2x - 3)^2 = 2$$

Por la propiedad anterior:

$$2x - 3 = \sqrt{2} \vee 2x - 3 = -\sqrt{2}$$

$$2x = 3 + \sqrt{2} \vee 2x = 3 - \sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \vee x_2 = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto,

$$CS = \left\{ \frac{3 + \sqrt{2}}{2}; \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \right\}$$

Ejemplo 47.

Resuelva la ecuación cuadrática

$$9x^2 + 6x + 5 = 0$$

Resolución.

Se tiene la ecuación:

$$9x^2 + 6x + 5 = 0$$

Desdoblamos 5:

$$9x^2 + 6x + 1 + 4 = 0$$

$$9x^2 + 6x + 1 = -4$$

$$(3x + 1)^2 = -4$$

Por la propiedad anterior:

$$3x + 1 = \sqrt{-4} \vee 3x + 1 = -\sqrt{-4}$$

$$3x + 1 = 2i \vee 3x + 1 = -2i$$

$$3x = -1 + 2i \vee 3x = -1 - 2i$$

$$x_1 = \frac{-1+2i}{3} \vee x_2 = \frac{-1-2i}{3}$$

(son las raíces o soluciones (no reales) de la ecuación)

Por lo tanto,

$$CS = \left\{ \frac{-1+2i}{3}; \frac{-1-2i}{3} \right\}$$

Naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática

Considerando la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

de coeficientes reales y raíces x_1 y x_2 . Se cumple:

1. Si $\Delta = 0$, las raíces x_1 y x_2 son iguales ($x_1 = x_2$) y reales. Es decir, la ecuación tiene una única solución.
2. Si $\Delta > 0$, las raíces x_1 y x_2 son diferentes ($x_1 \neq x_2$) y reales.
3. Si $\Delta < 0$, las raíces x_1 y x_2 son diferentes ($x_1 \neq x_2$) y no reales. Además; son conjugados, es decir:

$$x_1 = a + bi$$

$$x_2 = a - bi$$

Ejemplo 48.

En la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2(n-3)x + 4n = 0$$

determine los valores que puede tomar n para que la ecuación posea raíces iguales. De cómo respuesta la suma de estos valores.

Resolución

Por dato, la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2(n-3)x + 4n = 0$$

debe tener raíces iguales, entonces su discriminante debe ser cero; es decir,

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-2(n-3))^2 - 4(1)(4n) = 0$$

$$4(n-3)^2 - 16n = 0$$

Sacamos cuarta:

$$(n-3)^2 - 4n = 0$$

$$n^2 - 6n + 9 - 4n = 0$$

$$n^2 - 10n + 9 = 0$$

$$\begin{array}{c} n \quad \quad \quad -1 \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ n \quad \quad \quad -9 \end{array}$$

$$(n-1)(n-9) = 0$$

De donde: $n = 1$ o $n = 9$

Por lo tanto, la suma de los valores de n es 10.

Observación:

El resultado también se puede obtener aplicando el teorema de Cardano en la ecuación: $n^2 - 10n + 9 = 0$

$$n_1 + n_2 = -\frac{-10}{1} = 10$$

Ejemplo 49.

Dada la ecuación cuadrática de raíces complejas: $3x^2 + (m+2)x + m = -2$ halle el máximo valor entero que puede tomar m .

Resolución

Como la ecuación cuadrática

$$3x^2 + (m+2)x + m = -2$$

$$3x^2 + (m+2)x + m + 2 = 0$$

tiene raíces complejas, entonces

$$\Delta < 0$$

$$(m+2)^2 - 4(3)(m+2) < 0$$

Factorizamos $(m + 2)$:

$$(m + 2)(m + 2 - 12) < 0$$

$$(m + 2)(m - 10) < 0$$

Aplicamos el Criterio de los Puntos Críticos.

Puntos críticos o raíces: -2 y 10



Luego, $m \in (-2; 10)$.

Por lo tanto, el máximo valor entero de m es 9.

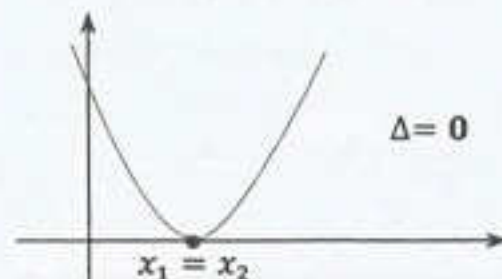
Interpretación geométrica de las raíces de una ecuación cuadrática

Considerando la ecuación cuadrática

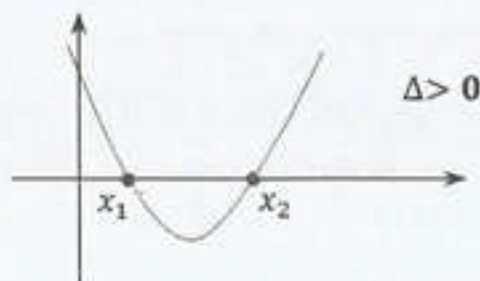
$$ax^2 + bx + c = 0; a > 0$$

de coeficientes reales y raíces x_1 y x_2 .

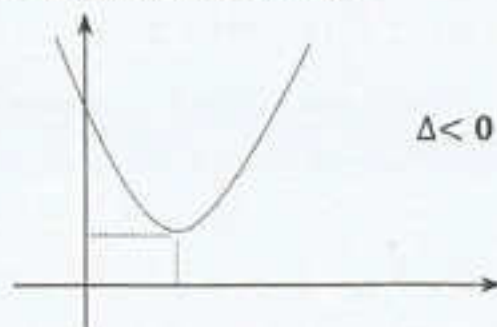
1. Raíces x_1 y x_2 reales e iguales:



2. Raíces x_1 y x_2 reales y diferentes:



3. Raíces x_1 y x_2 no reales:



OBS.

Se forma análoga se considera la interpretación geométrica de las raíces de la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a < 0$$

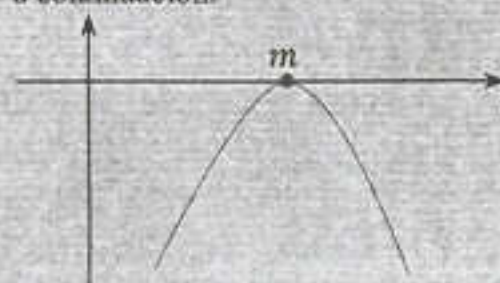
Solo que en este caso la parábola se abre hacia abajo.

Ejemplo 50.

Dada la ecuación cuadrática

$$-x^2 + 3ax - (a + 7) = 0; a \in \mathbb{Z}$$

cuya interpretación geométrica se muestra a continuación:



determine el valor de $a + m$.

Resolución.

Como la parábola es tangente al eje X , el discriminante de la ecuación debe ser igual a cero; además, como la parábola se abre hacia abajo, el coeficiente principal es negativo. En conclusión, se deben cumplir:

$$\Delta = 0 \wedge \text{Coef. Principal} < 0$$

de raíces x_1 y x_2 , entonces se cumple:

1. Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. Producto de raíces:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Consecuencia:

3. Suma de las inversas de las raíces:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

Ejemplo 52.

- Dada la ecuación cuadrática

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

entonces:

- ▷ Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

- ▷ Producto de raíces:

$$x_1 x_2 = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$

- ▷ Suma de las inversas de las raíces:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{-2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

- Dada la ecuación cuadrática

$$2nx^2 + (n+1)x + n - 3 = 0$$

entonces:

- ▷ Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{n+1}{2n}$$

- ▷ Producto de raíces:

$$x_1 x_2 = \frac{n-3}{2n}$$

Ejemplo 53.

En la ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ las raíces son $p \neq 0$ y $q \neq 0$. Halle el valor de $p + q$.

Resolución

Se tiene la ecuación cuadrática

$$x^2 + px + q = 0$$

de raíces:

$$p \neq 0 \text{ y } q \neq 0$$

Entonces, por el Teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$p + q = -p$$

Producto de raíces:

$$pq = q$$

Cancelamos q :

$$p = 1$$

Lo reemplazamos en la primera igualdad:

$$1 + q = -1$$

$$q = -2$$

Por lo tanto,

$$p + q = -1$$

Ejemplo 54.

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación

$$x^2 - 2(m-1)x + 3 = 0$$

¿Cuál es la suma de los valores que puede tomar m para que satisfaga la relación

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 1?$$

Resolución

Se tiene la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2(m-1)x + 3 = 0$$

de raíces x_1 y x_2 .

Por teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2(m-1)}{1} = 2(m-1)$$

Producto de raíces:

$$x_1 x_2 = \frac{3}{1} = 3$$

Por dato:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 1$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2 x_1} = 1$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2 x_1} = x_1 x_2$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = x_1 x_2$$

$$(x_1 + x_2)^2 = 3x_1 x_2$$

Reemplazamos:

$$(2(m-1))^2 = 3(3)$$

$$4(m-1)^2 = 9$$

$$(m-1)^2 = \frac{9}{4}$$

$$m-1 = \frac{3}{2} \vee m-1 = -\frac{3}{2}$$

$$m = \frac{5}{2} \vee m = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la suma de los valores de m es:

$$\frac{5}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{2} = 2$$

Diferencia de raíces

Para hallar la diferencia de raíces usamos la segunda identidad de Legendre:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 x_2$$

Ejemplo 55.

Si las raíces de la ecuación cuadrática

$$mx^2 - (m+3)x + 2m+1 = 0$$

difieren en 2 unidades, determine el conjunto de valores que puede admitir m .

Resolución

Se tiene la ecuación cuadrática

$$mx^2 - (m+3)x + 2m+1 = 0$$

Sean sus raíces: x_1 y x_2 .

Por el teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-(m+3)}{m} = \frac{m+3}{m}$$

Producto de raíces:

$$x_1 x_2 = \frac{2m+1}{m}$$

Por dato, las raíces difieren en dos unidades.

Es decir,

$$x_1 - x_2 = 2$$

Además se sabe que:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 x_2$$

Reemplazando:

$$\left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - (2)^2 = 4\left(\frac{2m+1}{m}\right)$$

$$\frac{(m+3)^2}{m^2} - 4 = \frac{4(2m+1)}{m}$$

Multiplicamos por m^2 :

$$(m+3)^2 - 4m^2 = 4m(2m+1)$$

$$m^2 + 6m + 9 - 4m^2 = 8m^2 + 4m$$

Lo llevamos todo para el lado derecho:

$$0 = 11m^2 - 2m - 9$$

$$\begin{array}{ccc} 11m & & 9 \\ & \nearrow & \searrow \\ & m & -1 \end{array}$$

$$(11m+9)(m-1) = 0$$

De donde,

$$m = -\frac{9}{11} \vee m = 1$$

Por lo tanto, el conjunto de valores de m es:

$$\left\{-\frac{9}{11}; 1\right\}$$

Reconstrucción de una ecuación cuadrática

Conociendo las raíces de una ecuación cuadrática, esta se reconstruye de la siguiente manera:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Ejemplo 56.

- La ecuación cuadrática de raíces $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$ es:

$$\begin{aligned} x^2 - (3 + 5)x + (3)(5) &= 0 \\ x^2 - 8x + 15 &= 0 \end{aligned}$$

- La ecuación cuadrática de raíces $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ y $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ es:

$$\begin{aligned} x^2 - (3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2})x + \\ + (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) &= 0 \\ x^2 - 6x + 7 &= 0 \end{aligned}$$

- La ecuación cuadrática de raíces $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$ es:

$$\begin{aligned} x^2 - (1 + i + 1 - i)x + \\ + (1 + i)(1 - i) &= 0 \\ x^2 - 2x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 57.

Si las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son m y n , entonces, halle otra ecuación cuadrática cuyas raíces sean $(m + n)$ y mn .

Resolución

Se tiene la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

de raíces m y n .

Por el teorema de Cardano:

suma de raíces: producto de raíces:

$$m + n = -\frac{b}{a} \quad mn = \frac{c}{a}$$

Nos piden una ecuación cuadrática de raíces $(m + n)$ y mn . Es decir, la ecuación:

$$x^2 - (m + n + mn)x + (m + n)mn = 0$$

Reemplazando los valores de $m + n$ y mn se obtiene:

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)x + \left(-\frac{b}{a}\right)\frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{(b - c)x}{a} - \frac{bc}{a^2} = 0$$

Multiplicamos por a^2 :

$$a^2x^2 + a(b - c)x - bc = 0$$

Por lo tanto, la ecuación pedida es:

$$a^2x^2 + a(b - c)x - bc = 0$$

Ecuaciones cuadráticas equivalentes

Si las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad abc \neq 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0; \quad mnp \neq 0$$

son equivalentes (es decir, tienen las mismas soluciones), se cumple:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

Ejemplo 58.

Si las ecuaciones cuadráticas

$$(4a^2 + b^2)x^2 + 2x - 4k = 0$$

$$(b - 2a - 1)x^2 + x - 2k = 0$$

son equivalentes, calcule el valor de $a + b$.

Considere $a, b, k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$.

Resolución.

Como las ecuación cuadráticas son equivalentes, entonces se cumple la relación:

$$\frac{4a^2 + b^2}{b - 2a - 1} = \frac{2}{1} = \frac{-4k}{-2k}$$

Es decir,

$$\frac{4a^2 + b^2}{b - 2a - 1} = 2$$

$$4a^2 + b^2 = 2(b - 2a - 1)$$

$$4a^2 + b^2 = 2b - 4a - 2$$

Llevamos todo al lado izquierdo y agrupamos convenientemente:

$$4a^2 + 4a + 1 + b^2 - 2b + 1 = 0$$

$$(2a + 1)^2 + (b - 1)^2 = 0$$

Recuerde:

Séan x e y números reales.

$$\text{Si } x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

En el problema:

$$2a + 1 = 0 \wedge b - 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \wedge b = 1$$

Por lo tanto, $a + b = \frac{1}{2}$.

Definiciones

Dada la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

de raíces x_1 y x_2 no nulas. Diremos que:

1. Tiene raíces simétricas si:

$$x_1 + x_2 = 0$$

2. Tiene raíces reciprocas si:

$$x_1 x_2 = 1$$

Consecuencias:

1. La ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene raíces simétricas si $b = 0$.

2. La ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene raíces reciprocas si $a = c$.

Ejemplo 59.

Si la ecuación cuadrática

$$kx^2 + x^2 - 4x + 3k - 7 = 0$$

tiene raíces reciprocas, entonces, halle el valor de k .

Resolución

Por dato, la ecuación

$$kx^2 + x^2 - 4x + 3k - 7 = 0$$

$$(k + 1)x^2 - 4x + 3k - 7 = 0$$

tiene raíces reciprocas, entonces

$$x_1 x_2 = 1$$

Aplicamos el Teorema de Cardano:

$$\frac{3k - 7}{k + 1} = 1$$

$$3k - 7 = k + 1$$

$$2k = 8$$

$$k = 4$$

Por lo tanto, el valor de k es 4.

Problemas resueltos

Problema 1.

Si α es una solución de la ecuación

$$x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$$

determine el valor de $J = \alpha^{18} + \alpha^6 + 1$.

- A) 1 B) -1 C) 2
D) 3 E) -3

Resolución.

Reemplazamos la solución α en la ecuación:

$$\alpha^2 - \sqrt{3}\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^2 + 1 = \sqrt{3}\alpha$$

Elevamos al cuadrado

$$(\alpha^2 + 1)^2 = (\sqrt{3}\alpha)^2$$

$$\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = 3\alpha^2$$

$$\alpha^4 - \alpha^2 + 1 = 0$$

Multiplicamos por $(\alpha^2 + 1)$ para formar una suma de cubos:

$$(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 - \alpha^2 + 1) = 0(\alpha^2 + 1)$$

$$(\alpha^2)^3 + 1^3 = 0$$

$$\alpha^6 + 1 = 0$$

Es decir, $\alpha^6 = -1$

Nos piden calcular

$$J = \alpha^{18} + \alpha^6 + 1$$

$$J = (\alpha^6)^3 + \alpha^6 + 1$$

$$J = (-1)^3 - 1 + 1 = -1$$

Problema 2.

Calcule el valor de n para que la ecuación de x : $(n^2 - 4n + 3)x = n^2 - 3n + 2$ no tenga solución.

- A) 0 B) 2 C) 1
D) 3 E) 5

Resolución.

Se tiene la ecuación paramétrica:

$$(n^2 - 4n + 3)x = n^2 - 3n + 2$$

$$\begin{array}{ccc} n & \nearrow & -3 \\ & \nearrow & \\ n & \searrow & -1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} n & \nearrow & -2 \\ & \nearrow & \\ n & \searrow & -1 \end{array}$$

$$\underbrace{(n-3)(n-1)}_A x = \underbrace{(n-2)(n-1)}_B$$

Recuerde:

Para que una ecuación paramétrica $Ax = B$ no tenga solución, se debe cumplir que:

$$A = 0 \wedge B \neq 0$$

En el problema:

$$(n-3)(n-1) = 0 \wedge (n-2)(n-1) \neq 0$$

Vemos que ambas relaciones se cumplen solo para $n = 3$.

Problema 3.

La ecuación tiene solución única

$$\frac{x - m - n - p}{m + n + q} + \frac{x - m - n - q}{m + n + p} = \frac{2x}{p + q + 2(n + m)}$$

halle el valor de $E = x - 2(n + m)$

- A) pq B) $p - q$ C) $p + q$
D) 1 E) p/q

Resolución.

Se tiene la ecuación

$$\frac{x - m - n - p}{m + n + q} + \frac{x - m - n - q}{m + n + p} = \frac{2x}{p + q + 2(n + m)}$$

Restamos 2 a cada lado convenientemente:

$$\frac{x-m-n-p}{m+n+q} - 1 + \frac{x-m-n-q}{m+n+p} - 1 = \frac{2x}{p+q+2(n+m)} - 2$$

Operamos de dos en dos:

$$\begin{aligned} \frac{x-2m-2n-p-q}{m+n+q} + \frac{x-2m-2n-p-q}{m+n+p} \\ = \frac{2(x-2m-2n-p-q)}{p+q+2(n+m)} \end{aligned}$$

Factorizamos $(x-2m-2n-p-q)$ de los numeradores:

$$\begin{aligned} (x-2m-2n-p-q) \left(\frac{1}{m+n+q} - \frac{1}{m+n+p} \right) \\ = (x-2m-2n-p-q) \left(\frac{2}{p+q+2(n+m)} \right) \end{aligned}$$

Vemos que la igualdad se verifica si

$$x-2m-2n-p-q=0$$

Es decir,

$$x=2m+2n+p+q$$

Nos piden calcular:

$$E=x-2(n+m)$$

$$E=2m+2n+p+q-2(n+m)$$

$$E=p+q$$

Por lo tanto, $E=p+q$.

Se tiene la ecuación lineal:

$$\begin{aligned} (x-1)(n^2+n) &= 2-x \\ (n^2+n)x - (n^2+n) &= 2-x \\ (n^2+n)x + x &= n^2+n+2 \\ (n^2+n+1)x &= n^2+n+2 \end{aligned}$$

Luego,

$$x = \frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}$$

Por dato: $x \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$

Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{n^2+n+2}{n^2+n+1} \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \\ \frac{(n^2+n+1)+1}{n^2+n+1} \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Desdoblamos:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n^2+n+1} \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{n^2+n+1} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Esto se cumple cuando

$$n^2+n+1=1 \vee n^2+n+1=-1$$

$$n^2+n=0 \vee \underline{n^2+n+2=0}$$

$$n(n+1)=0 \quad \exists n \in \mathbb{Z}$$

$$n=0 \vee n=-1$$

- Si $n=0$, entonces, $x=2$.
- Si $n=-1$, entonces, $x=2$.

Por lo tanto, el mayor valor de $x+n$ es 2.

Problema 4.

Dada la ecuación lineal en x :

$$(x-1)(n^2+n)=2-x$$

donde $x \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Determine el mayor valor de $x+n$.

- A) 5 B) 4 C) 1
D) 2 E) 3

Resolución.

Problema 5.

Resuelva la siguiente ecuación lineal de incógnita x :

$$\sum_{i=2}^{100} \frac{ix - (i+2)}{(i+2)(i+1)i} = \frac{103}{202}$$

- A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{99}{102}\right\}$ C) $\left\{\frac{103}{99}\right\}$

D) $\left\{\frac{34}{11}\right\}$

E) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Resolución.

Se tiene la ecuación lineal:

$$\sum_{i=2}^{100} \frac{ix - (i+2)}{(i+2)(i+1)i} = \frac{103}{202}$$

$$\sum_{i=2}^{100} \left(\frac{ix}{(i+2)(i+1)i} - \frac{(i+2)}{(i+2)(i+1)i} \right) = \frac{103}{202}$$

$$\sum_{i=2}^{100} \left(\frac{x}{(i+2)(i+1)} - \frac{1}{(i+1)i} \right) = \frac{103}{202}$$

Distribuimos:

$$\sum_{i=2}^{100} \frac{x}{(i+2)(i+1)} - \sum_{i=2}^{100} \frac{1}{(i+1)i} = \frac{103}{202}$$

$$x \sum_{i=2}^{100} \frac{1}{(i+2)(i+1)} - \sum_{i=2}^{100} \frac{1}{(i+1)i} = \frac{103}{202}$$

Halleemos el valor de cada sumatoria:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{100} \frac{1}{(i+2)(i+1)} \\ &= \sum_{i=2}^{100} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) \end{aligned}$$

Desarrollamos la sumatoria:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{102} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{102} = \frac{99}{306} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^{100} \frac{1}{(i+1)i} = \sum_{i=2}^{100} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

Desarrollamos la sumatoria:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{101} = \frac{99}{202}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$\frac{99}{306}x - \frac{99}{202} = \frac{103}{202}$$

$$\frac{99}{306}x = \frac{103}{202} + \frac{99}{202}$$

$$\frac{99}{306}x = \frac{202}{202}$$

$$\frac{99}{306}x = 1$$

$$x = \frac{306}{99}$$

$$x = \frac{34}{11}$$

$$\therefore CS = \left\{ \frac{34}{11} \right\}$$

Problema 6.

Resuelva la ecuación en x:

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} = a+b+c$$

Considere $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}^+$

A) $\{0\}$

B) $\{abc\}$

C) $\{ab+ac+bc\}$

D) $\{1\}$

E) $\{a+b+c\}$

Resolución.

Se tiene la ecuación lineal:

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} = a+b+c$$

Operamos convenientemente. Para eso el número $a+b+c$ lo pasamos a restar de la siguiente manera:

$$\frac{x-ab}{a+b} - c + \frac{x-bc}{b+c} - a + \frac{x-ca}{c+a} - b = 0$$

Operamos de dos en dos:

$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b} + \frac{x-bc-ab-ac}{b+c} + \frac{x-ca-bc-ab}{c+a} = 0$$

Notamos que los numeradores son iguales, por lo tanto lo factorizamos:

Ya que $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}^+$

$$(x-ab-ac-bc) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = 0$$

Es decir, para que el producto sea cero, el que debe ser cero es el primer factor:

$$x-ab-ac-bc = 0$$

De donde, $x = ab + ac + bc$

Por lo tanto, $CS = \{ab + ac + bc\}$

Problema 7.

Halle la suma de los valores de k , tales que la recta $y = kx$ sea tangente a la curva

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0.$$

- A) $-6/5$ B) $5/6$ C) $-5/6$
D) $6/5$ E) $3/5$

Resolución.

La ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \quad \dots (\alpha)$$

se puede expresar (completando cuadrados) así:

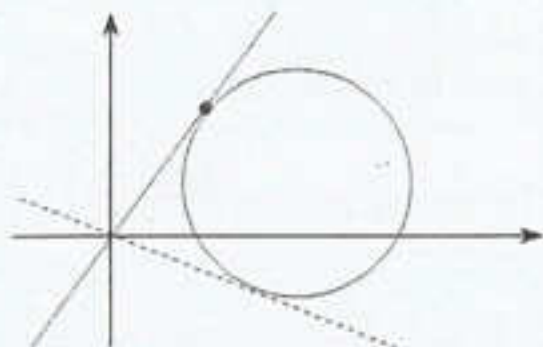
$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 4$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

Es la ecuación de una circunferencia de centro $C = (3; 1)$ y radio $r = 2$. Y la

ecuación $y = kx$ representa a una recta que pasa por el origen.

Según el problema, la recta debe ser tangente a la circunferencia:



Reemplazamos $y = kx$ en la ecuación (α) :

$$x^2 + (kx)^2 - 6x - 2kx + 6 = 0$$

$$x^2 + k^2x^2 - (6 + 2k)x + 6 = 0$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 2(3 + k)x + 6 = 0$$

Para que la recta $y = kx$ sea tangente a la curva (α) , esta última ecuación debe tener una única solución; es decir,

$$\Delta = 0$$

$$(-2(3 + k))^2 - 4(k^2 + 1)6 = 0$$

$$4(3 + k)^2 - 24(k^2 + 1) = 0$$

$$4(3 + k)^2 = 24(k^2 + 1)$$

Cancelamos 4: $(3 + k)^2 = 6(k^2 + 1)$

Operamos: $9 + 6k + k^2 = 6k^2 + 6$

$$0 = 5k^2 - 6k - 3$$

Aplicamos el teorema de Cardano para hallar la suma de los valores de k :

$$k_1 + k_2 = -\frac{-6}{5} = \frac{6}{5}$$

Problema 8.

Sea $\sec \phi$ y $\csc \phi$ las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Determine la relación que existe entre a , b y c .

- A) $a^2 + b^2 = -2ac$ B) $a^2 - c^2 = 2ab$
 C) $b^2 - a^2 = 2ac$
 D) $b^2 - c^2 = 2ac$ E) $c^2 + a^2 = 2ab$

Resolución.

Por dato, $\sec \phi$ y $\csc \phi$ son las raíces de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

Aplicamos el teorema de Cardano

Suma de raíces:

$$\sec \phi + \csc \phi = -\frac{b}{a}$$

Producto de raíces:

$$\sec \phi \cdot \csc \phi = \frac{c}{a}$$

Como

$$\sec \phi + \csc \phi = -\frac{b}{a}$$

Elevamos al cuadrado:

$$(\sec \phi + \csc \phi)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\sec^2 \phi + \csc^2 \phi + 2 \sec \phi \csc \phi = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\sec^2 \phi \cdot \csc^2 \phi + 2 \sec \phi \csc \phi = \frac{b^2}{a^2}$$

$$(\sec \phi \cdot \csc \phi)^2 + 2 \sec \phi \csc \phi = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{2ac}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$c^2 + 2ac = b^2$$

Por lo tanto, $b^2 - c^2 + 2ac$.

Problema 9.

En una recta, se ubican los puntos consecutivos P , Q , R y S . Si $PQ = a$, $PR = m$, $PS = b$ y $QR = RS$, halle una raíz de la ecuación

$$x^2 + \frac{b+a}{m}x + \frac{m-a}{b-m} = 0$$

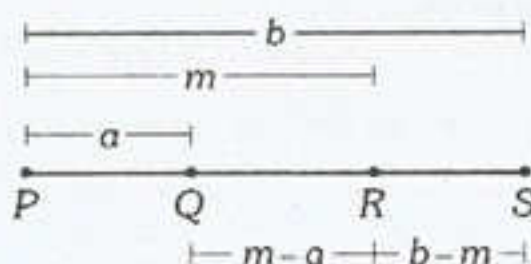
- A) 1 B) -1 C) 2
 D) -2 E) 3

Resolución.

Se quiere hallar una raíz de la ecuación

$$x^2 + \frac{b+a}{m}x + \frac{m-a}{b-m} = 0$$

Representemos gráficamente los datos del problema:



De donde se obtiene:

$$m - a = b - m$$

Es decir, $2m = a + b$

o también:

$$\frac{m-a}{b-m} = 1$$

Lo reemplazamos en la ecuación y se obtiene:

$$x^2 + \frac{2m}{m}x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

Por lo tanto, una raíz de la ecuación es -1.

Problema 10.

Formar la ecuación cuadrática siendo las raíces:

$$x_1 = \frac{m-n}{m+n}; x_2 = -\frac{m+n}{m-n}$$

A) $x^2 + \left(\frac{4mn}{n^2 - m^2}\right)x + 1 = 0$

B) $x^2 + \left(\frac{4mn}{n^2 - m^2}\right)x - 1 = 0$

C) $x^2 - 4mnx - 1 = 0$

D) $x^2 - 2(m+n)x - 1 = 0$

E) $x^2 - (m-n)x - 1 = 0$

Resolución.

Recuerde:

La ecuación cuadrática de raíces α y β esta dada por:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

(ecuación reconstruida a partir de sus raíces)

Se quiere una ecuación cuadrática de raíces:

$$x_1 = \frac{m-n}{m+n} \quad y \quad x_2 = -\frac{m+n}{m-n}$$

La ecuación es:

$$x^2 - \left(\frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n}\right)x - \left(\frac{m-n}{m+n}\right)\left(\frac{m+n}{m-n}\right) = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{(m-n)^2 - (m+n)^2}{(m+n)(m-n)}\right)x - 1 = 0$$

2da identidad de Legendre

$$x^2 + \left(\frac{(m+n)^2 - (m-n)^2}{m^2 - n^2}\right)x - 1 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{4mn}{m^2 - n^2}\right)x - 1 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{4mn}{n^2 - m^2}\right)x - 1 = 0$$

valor de a que permita que las raíces de la ecuación sean iguales:

A) $-3/2$

B) -1

C) 0

D) $1/2$

E) 1

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática:

$$2ax^2 + (3a-1)x + a+b = 0$$

Por dato, tiene raíces iguales. Es decir,

$$\Delta = 0$$

$$(3a-1)^2 - 4(2a)(a+b) = 0$$

$$9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 - 8ab = 0$$

$$a^2 - (8b+6)a + 1 = 0$$

Se ha formado una nueva ecuación cuadrática de variable a . Además, por dato existe un solo valor de a . Por lo tanto, el discriminante de la ecuación cuadrática debe ser cero.

$$\Delta = 0$$

$$(-(8b+6))^2 - 4(1)(1) = 0$$

$$(8b+6)^2 = 4$$

De donde,

$$8b+6 = 2 \quad \vee \quad 8b+6 = -2$$

$$8b = -4 \quad \vee \quad 8b = -8$$

$$b = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad b = -1$$

Por lo tanto, un valor de b es -1 .

Problema 11.

Dada la ecuación cuadrática

$$2ax^2 + (3a-1)x + a+b = 0$$

Halle un valor de b para que exista un solo

Problema 12.

Dada la ecuación cuadrática

$$(x-3)^2 + (\sqrt{7} + 2\sqrt{10})x = 5 - 6x$$

Indique el módulo de una raíz.

A) 1

B) 2

C) -2

D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

E) $\sqrt{34}$

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática

$$(x-3)^2 + (\sqrt{7+2\sqrt{10}})x = 5-6x$$

Tenga en cuenta:

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$$

Lo reemplazamos en la ecuación:

$$(x-3)^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{2})x = 5-6x$$

$$x^2 - 6x + 9 + (\sqrt{5}+\sqrt{2})x = 5-6x$$

Reduciendo se obtiene:

$$x^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{2})x + 4 = 0$$

Hallemos su discriminante:

$$\Delta = (\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 - 4(1)(4) < 0$$

Esto quiere decir que sus raíces son imaginarias (y por lo tanto conjugadas). Es decir, son de la forma: $x_1 = z$ y $x_2 = \bar{z}$.

Por el teorema de Cardano:

Producto de raíces:

$$z \cdot \bar{z} = 4$$

$$|z|^2 = 4$$

$$|z| = 2$$

Luego, el módulo de una de las raíces es 2.

$$x^2 + (\sqrt{8^r + 12^r})x + \frac{1}{4} \cdot 18^r = 0$$

cuyo conjunto solución es $\{\alpha\}$. Es decir, la ecuación tiene solución única, y por lo tanto su discriminante es cero:

$$\Delta = 0$$

$$\sqrt{8^r + 12^r}^2 - 4(1)\left(\frac{1}{4} \cdot 18^r\right) = 0$$

$$8^r + 12^r = 18^r$$

Por el teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$\alpha + \alpha = -\sqrt{8^r + 12^r}$$

$$2\alpha = -\sqrt{18^r}$$

$$2\alpha = -\sqrt{(9 \cdot 2)^r}$$

$$2\alpha = -\sqrt{9^r \cdot 2^r}$$

$$2\alpha = -\sqrt{9^r} \sqrt{2^r}$$

$$2\alpha = -3^r \cdot 2^{\frac{r}{2}}$$

Damos forma para hallar el valor de L :

$$\frac{2\alpha}{3^r \cdot 2^{\frac{r}{2}}} = -1$$

$$3^{-r} \cdot 2 \cdot 2^{-\frac{r}{2}} \cdot \alpha = -1$$

$$\frac{3^{-r} \cdot 2^{1-\frac{r}{2}} \cdot \alpha}{L} = -1$$

Por lo tanto, $L = -1$.

Problema 13

Si la ecuación cuadrática

$$x^2 + (\sqrt{8^r + 12^r})x + \frac{1}{4} \cdot 18^r = 0$$

tiene como conjunto solución al conjunto $\{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcule el valor de

$$L = 3^{-r} \cdot 2^{1-r/2} \cdot \alpha$$

A) -1

B) 1/4

C) 0

D) 1/2

E) 2

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática

Problema 14.

Dada la ecuación cuadrática

$$ax^2 - bx + b = 0; a \neq 0 \wedge ab < 0$$

de raíces r y s tal que $r > s > 0$.

Determine el valor de

$$I = \sqrt{\frac{r}{s}} + \sqrt{\frac{s}{r}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$

A) 0

B) 1

C) 4

D) $2\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{3}$

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática

$$ax^2 - bx + b = 0; a \neq 0 \wedge ab < 0$$

de raíces r y s . Por el teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$r + s = \frac{b}{a}$$

Producto de raíces:

$$rs = \frac{b}{a}$$

Nos piden calcular:

$$J = \sqrt{\frac{r}{s}} + \sqrt{\frac{s}{r}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$J = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$J = \frac{r+s}{\sqrt{rs}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Reemplazamos:

$$J = \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b}{a}}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$J = \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$$

Por lo tanto, el valor de J es cero.

Problema 15.

Si $B = \left\{ \frac{2n-1}{n-1}, \frac{2n+3}{n+1} \right\}$ es el conjunto solución de la ecuación $ax^2 + 2bx + 4c = 0$, determine el valor de

$$L = \frac{b^2 - 4ac}{(a+b+c)^2}$$

A) 16

B) 12

C) 4

D) 8

E) 2

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática

$$ax^2 + 2bx + 4c = 0$$

cuyo conjunto solución es:

$$\left\{ \frac{2n-1}{n-1}, \frac{2n+3}{n+1} \right\}$$

Es decir, sus raíces son:

$$x_1 = \frac{2n-1}{n-1} \wedge x_2 = \frac{2n+3}{n+1}$$

Damos forma a cada raíz:

$$\blacksquare x_1 = \frac{2n-1}{n-1} = 2 + \frac{1}{n-1}$$

$$x_1 - 2 = \frac{1}{n-1}$$

Despejamos $n-1$:

$$n-1 = \frac{1}{x_1-2} \dots (*)$$

$$\blacksquare x_2 = \frac{2n+3}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}$$

$$x_2 - 2 = \frac{1}{n+1}$$

Despejamos $n+1$:

$$n+1 = \frac{1}{x_2-2} \dots (**)$$

Restamos $(**) - (*)$ para eliminar n :

$$2 = \frac{1}{x_2-2} - \frac{1}{x_1-2}$$

$$2 = \frac{x_1-2 - (x_2-2)}{(x_2-2)(x_1-2)}$$

$$2 = \frac{x_1-x_2}{x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4}$$

Por el teorema de Cardano se sabe que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a} \wedge x_1x_2 = \frac{4c}{a}$$

Reemplazamos en la última igualdad:

$$2 = \frac{x_1-x_2}{\frac{4c}{a} - 2\left(-\frac{2b}{a}\right) + 4}$$

$$2 = \frac{x_1-x_2}{\frac{4c}{a} + \frac{4b}{a} + 4}$$

$$2 = \frac{x_1 - x_2}{\frac{4c + 4b + 4a}{a}}$$

$$8 = \frac{a(x_1 - x_2)}{a + b + c}$$

Elevamos al cuadrado:

$$64 = \frac{a^2(x_1 - x_2)^2}{(a + b + c)^2} \dots (***)$$

También se sabe que:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$

$$\left(-\frac{2b}{a}\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4\left(\frac{4c}{a}\right)$$

$$\frac{4b^2}{a^2} - (x_1 - x_2)^2 = \frac{16c}{a}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{4b^2}{a^2} - \frac{16c}{a}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{4b^2}{a^2} - \frac{16ac}{a^2}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{4b^2 - 16ac}{a^2}$$

$$a^2(x_1 - x_2)^2 = 4b^2 - 16ac$$

Reemplazando en (***):

$$64 = \frac{4b^2 - 16ac}{(a + b + c)^2}$$

Sacamos cuarta:

$$16 = \frac{b^2 - 4ac}{(a + b + c)^2} = L$$

Por lo tanto, el valor de L es 16.

Problema 16.

Calcule la suma de los valores de a y b sabiendo que las ecuaciones

$$(a + 1)x^2 - (b - 3)x - 4 = 0$$

$$(b - 1)x^2 + (a + 3)x - 6 = 0$$

poseen raíces reales con signos contrarios.

A) 11

B) 10

C) 9

D) 8

E) 12

Resolución.

Por dato las ecuaciones poseen raíces reales con signos opuestos.

Sean:

x_1 y x_2 : raíces de la primera ecuación.

$-x_1$ y $-x_2$: raíces de la segunda ecuación.

1era ecuación:

$$(a + 1)x^2 - (b - 3)x - 4 = 0$$

Por el teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = \frac{b - 3}{a + 1} \dots (\alpha)$$

Producto de raíces:

$$x_1x_2 = \frac{-4}{a + 1} \dots (\beta)$$

2da ecuación:

$$(b - 1)x^2 + (a + 3)x - 6 = 0$$

Por el teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$-x_1 - x_2 = -\frac{a + 3}{b - 1} \dots (\theta)$$

Producto de raíces:

$$(-x_1)(-x_2) = \frac{-6}{b - 1} \dots (\gamma)$$

De $(\alpha) + (\theta)$:

$$0 = \frac{b - 3}{a + 1} - \frac{a + 3}{b - 1}$$

$$\frac{a + 3}{b - 1} = \frac{b - 3}{a + 1}$$

$$(a + 3)(a + 1) = (b - 3)(b - 1)$$

$$a^2 + 4a + 3 = b^2 - 4b + 3$$

$$a^2 - b^2 + 4a + 4b = 0$$

$$(a + b)(a - b) + 4(a + b) = 0$$

$$(a + b)(a - b + 4) = 0$$

Es decir,

$$a + b = 0 \vee a - b = -4$$

De aquí, un valor de $a + b$ es 0.

De $(\beta) = (\gamma)$:

$$\frac{-4}{a+1} = \frac{-6}{b-1}$$

Cancelamos -2:

$$\frac{2}{a+1} = \frac{3}{b-1}$$

$$2b - 2 = 3a + 3$$

$$3a - 2b = -5$$

$$a + 2(a - b) = -5$$

$$a + 2(-4) = -5$$

$$a = 3$$

$$b = 7$$

Por lo tanto, el valor de $a + b$ es 10.

$$100 - 12m > 0$$

$$100 > 12m$$

Sacamos cuarta:

$$25 > 3m$$

$$m < \frac{25}{3}$$

$$\text{ii. } x_1 + x_2 > 0$$

$$-\frac{10}{3} > 0$$

$$\frac{10}{3} > 0 \text{ (verdadero)}$$

$$\text{iii. } x_1 x_2 > 0$$

$$\frac{m}{3} > 0$$

$$m > 0$$

Intersectando i), ii) y iii) se obtiene:

$$0 < m < \frac{25}{3}$$

Por lo tanto, $m \in (0; \frac{25}{3})$

Problema 17.

Si las raíces de la ecuación

$$3x^2 - 10x + m = 0$$

son positivas y diferentes, entonces el conjunto de valores reales que admite m es:

$$\text{A) } (0; \frac{25}{3})$$

$$\text{B) } (-\frac{25}{3}; \frac{25}{3})$$

$$\text{C) } (-\frac{25}{3}; 0)$$

$$\text{D) } (-1; \frac{25}{3})$$

$$\text{E) } (-2; \frac{25}{3})$$

Resolución.

Para que la ecuación cuadrática

$$3x^2 - 10x + m = 0$$

tenga raíces positivas y diferentes, se debe cumplir:

$$\Delta > 0 \wedge x_1 + x_2 > 0 \wedge x_1 x_2 > 0$$

$$\text{I. } \Delta > 0$$

$$(-10)^2 - 4(3)m > 0$$

Problema 18.

Sean a y b números reales. Si las ecuaciones cuadráticas

$$(a+b)x^2 + (a+1)x - 3 = 0$$

$$-5bx^2 - (12b+1)x - 15 = 0$$

tienen las mismas raíces, entonces halle el valor de $b^2 - a$.

$$\text{A) } 3$$

$$\text{B) } 39$$

$$\text{C) } 5$$

$$\text{D) } 10$$

$$\text{E) } 7$$

Resolución.

Por dato, las ecuaciones cuadráticas

$$(a+b)x^2 + (a+1)x - 3 = 0$$

$$-5bx^2 - (12b+1)x - 15 = 0$$

tienen las mismas raíces.

Recuerde:

Si las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0$$

son equivalentes (es decir, tienen las mismas raíces), se cumple:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

En el problema:

$$\frac{a+b}{-5b} = \frac{a+1}{-(12b+1)} = \frac{-3}{-15}$$

Es decir,

$$\frac{a+b}{-5b} = \frac{1}{5} \quad \wedge \quad \frac{a+1}{-(12b+1)} = \frac{1}{5}$$

$$a+b = -b \quad (*)$$

$$a = -2b$$

Lo reemplazamos en (*):

$$\frac{-2b+1}{-(12b+1)} = \frac{1}{5}$$

$$-10b+5 = -12b-1$$

$$2b = -6$$

$$b = -3$$

$$a = 6$$

Nos piden calcular: $b^2 - a = 9 - 6 = 3$

Problema 19.

Determine el valor de m para que las raíces de la ecuación: $x + \frac{2m}{x} = \frac{1}{2}$; $x \neq 0$ sean recíprocas.

A) 2

B) $1/4$

C) $1/2$

D) 8

E) 4

Resolución.

Se tiene la ecuación

$$x + \frac{2m}{x} = \frac{1}{2}$$

Multiplicamos por $2x$:

$$2x^2 + 4m = x$$

$$2x^2 - x + 4m = 0$$

Como la ecuación tiene raíces recíprocas, entonces el producto de sus raíces es 1.

Es decir,

$$x_1 x_2 = 1$$

$$\frac{4m}{2} = 1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Problema 20.

Dada la ecuación cuadrática

$$a(b-c)x^2 + c(a-b)x + b(c-a) = 0$$

donde x_1 y x_2 son sus raíces. Determine el valor de $J = (x_1)^{x_2} + (x_2)^{x_1} - x_1 x_2$.

A) 1

B) -1

C) 2

D) -2

E) 3

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática

$$a(b-c)x^2 + c(a-b)x + b(c-a) = 0$$

Notamos que una de sus raíces es 1, pues al reemplazarlo verifica la ecuación:

$$\frac{ab - ac + ca - cb + bc - ba}{0} = 0$$

Entonces, sea $x_1 = 1$.

Por la forma de la expresión que se pide calcular, no es necesario hallar la segunda raíz. Pues al reemplazar $x_1 = 1$ en J se obtiene:

$$J = (1)^{x_2} + (x_2)^1 - (1)x_2$$

$$J = 1 + x_2 - x_2$$

Por lo tanto, $J = 1$.

Universidad Nacional de Ingeniería (UNI)

Problema 21.

Si $ac + ad + bc + ab + bd = 0$,
determine el valor de x de modo que
 $(b + c + d) = x(a + c + d)$

- A) $\frac{b^2}{a^2}$ B) a^2b^2 C) $a^2 + b^2$
D) $a^2 - b^2$ E) $\frac{a^2}{b}$

UNI 2000 - II

Resolución.

Se tiene la ecuación

$$(b + c + d) = x(a + c + d)$$

de modo que

$$ac + ad + bc + ab + bd = 0 \quad \dots (*)$$

En (*) sumamos b^2 :

$$\underline{ac} + \underline{ad} + bc + \underline{ab} + bd + b^2 = b^2$$

Agrupamos convenientemente y factorizamos:

$$a(c + d + b) + b(c + d + b) = b^2$$

$$(c + d + b)(a + b) = b^2 \quad \dots (\alpha)$$

En (*) sumamos a^2 :

$$\underline{ac} + \underline{ad} + bc + ab + \underline{bd} + \underline{a^2} = a^2$$

Agrupamos convenientemente y factorizamos:

$$a(c + d + a) + b(c + a + d) = a^2$$

$$(c + d + a)(a + b) = a^2 \quad \dots (\beta)$$

Dividimos (α) entre (β) :

$$\frac{c + d + b}{c + d + a} = \frac{b^2}{a^2}$$

De donde:

$$b + c + d = \frac{b^2}{a^2} (a + c + d)$$

comparando con la ecuación dada en el problema:

$$(b + c + d) = x(a + c + d)$$

se obtiene:

$$x = \frac{b^2}{a^2}$$

Problema 22.

La condición para que las ecuaciones cuadráticas: $x^2 + bx + c = 0$ y $x^2 + b'x + c' = 0$ tengan una raíz en común es

- A) $(b - b')^2 + (c - c')(bc' - b'c) = 0$
B) $(c - c')^2 + (b - b') = 0$
C) $(b - b') + (bc' - b'c) = 0$
D) $(c - c')^2 + (bc' - b'c) = 0$
E) $(c - c')^2 + (b - b')(bc' - b'c) = 0$

UNI 2000 - II

Resolución.

Supongamos que α sea la raíz común de las ecuaciones

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \dots (*)$$

$$x^2 + b'x + c' = 0$$

Entonces

$$\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$$\alpha^2 + b'\alpha + c' = 0$$

Restamos: $(b - b')\alpha + c - c' = 0$

Despejamos la raíz α :

$$\alpha = \frac{c' - c}{b - b'}$$

Lo reemplazamos en (*):

$$\left(\frac{c' - c}{b - b'}\right)^2 + b\left(\frac{c' - c}{b - b'}\right) + c = 0$$

Multiplicamos por $(b - b')^2$:

$$(c' - c)^2 + b(c' - c)(b - b') + c(b - b')^2 = 0$$

$$(c' - c)^2 + (b - b')(b(c' - c) + c(b - b')) = 0$$

$$(c' - c)^2 + (b - b')(bc' - bc + bc - b'c) = 0$$

$$(c' - c)^2 + (b - b')(bc' - b'c) = 0$$

$$(3k)(5k) = 15$$

$$15k^2 = 15$$

$$k^2 = 1$$

$$k = 1 \vee k = -1$$

• Si $k = 1$, entonces, $m = -16$

• Si $k = -1$, entonces, $m = 16$

Luego, $m = -16 \vee m = 16$

Es decir, $|m| = 16$.

Problema 23.

Dada la ecuación $2x^2 + mx + 30 = 0$ y x_1, x_2 sus raíces. ¿Para qué valores de m se cumple que

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{5}?$$

A) $|m| = 16$

B) $|m| = 10$

C) $|m| = 14$

D) $|m| = 8$

E) $|m| = 20$

UNI 2001 - I

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática

$$2x^2 + mx + 30 = 0$$

de raíces x_1 y x_2 tal que

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3k}{5k}$$

Por el Teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{m}{2}$$

$$8k = -\frac{m}{2}$$

$$m = -16k$$

Producto de raíces:

$$\frac{x_1 x_2}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Problema 24.

Dada la ecuación

$$z^2 + (a + ib)z + c + id = 0$$

donde a, b, c, d son reales. Esta ecuación tiene una raíz real, si sus coeficientes satisfacen la relación

A) $abd = c^2 + d^2b$

B) $abd = d^2 + c^2b$

C) $abd = b^2 + c^2d$

D) $abd = b^2 + d^2c$

E) $abd = d^2 + b^2c$

UNI 2003 - II

Resolución.

Por dato, la ecuación

$$z^2 + (a + ib)z + c + id = 0$$

tiene una raíz real. Sea β dicha raíz.

Lo reemplazamos en la ecuación:

$$\beta^2 + (a + ib)\beta + c + id = 0$$

$$\beta^2 + a\beta + ib\beta + c + id = 0$$

$$\frac{(\beta^2 + a\beta + c)}{0} + \frac{(b\beta + d)i}{0} = 0$$

(tanto la parte real como la parte imaginaria deben ser ceros por ser un complejo nulo)

Entonces,

$$\beta^2 + a\beta + c = 0 \quad \wedge \quad b\beta + d = 0$$

$$(*) \quad \beta = -\frac{d}{b}$$

Lo reemplazamos en (*):

$$\left(-\frac{d}{b}\right)^2 + a\left(-\frac{d}{b}\right) + c = 0$$

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0$$

Multiplicamos por b^2 :

$$d^2 - abd + b^2c = 0$$

De donde, $d^2 + b^2c = abd$.

Problema 25.

¿Qué cantidad es necesario aumentar a las raíces de la ecuación

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)x^2 + 2(a+b)x + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$$

para que las cantidades resultantes sean iguales en magnitud pero de signos opuestos?

- A) $\frac{a-b}{ab}$ B) $\frac{ab}{a-b}$ C) $\frac{a+b}{ab}$
 D) $\frac{ab}{a+b}$ E) $\frac{b-a}{ab}$

UNI 2004 - I

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática:

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)x^2 + 2(a+b)x + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$$

Sean las raíces: x_1 y x_2

Por dato, se debe aumentar a las raíces una misma cantidad: $x_1 + k$ y $x_2 + k$ de tal manera que sean iguales en magnitud pero de signos opuestos. Es decir,

$$x_1 + k = -(x_2 + k)$$

$$x_1 + k = -x_2 - k$$

$$\underline{x_1 + x_2} = -2k$$

$$-\frac{2(a+b)}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} = -2k$$

Cancelamos -2 :

$$\frac{(a+b)}{a^2 - b^2} = k$$

$$\frac{(a+b)ab}{a^2 - b^2} = k$$

$$\frac{(a+b)ab}{(a+b)(a-b)} = k$$

Cancelamos $(a+b)$:

$$\frac{ab}{a-b} = k$$

Por lo tanto, se debe sumar:

$$\frac{ab}{a-b}$$

Problema 26.

Si $(x_1, x_2, \dots, x_{20})$ es una 20-upla de números reales. Sea la ecuación

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \dots + (x_{19} - x_{20})^2 + (x_{20} - x_1)^2 = 1$$

El número de 20-uplas de números enteros $(x_1, x_2, \dots, x_{20})$ que son soluciones de la ecuación anterior es igual a

- A) 0 B) 1 C) 19
 D) 20 E) ∞

UNI 2006 - I

Resolución.

Se tiene la ecuación

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \dots + (x_{19} - x_{20})^2 + (x_{20} - x_1)^2 = 1$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ son números enteros.

Para que la igualdad se verifique, todos los cuadrados deben ser iguales a cero excepto uno de ellos que debe ser 1.

Supongamos que

$$(x_1 - x_2)^2 = 1 \dots (*)$$

entonces los otros deben sumar cero. Es decir:

$$(x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \dots + (x_{19} - x_{20})^2 + (x_{20} - x_1)^2 = 0$$

Igualdad que se cumple solo cuando las bases son iguales a cero:

$$x_2 - x_3 = 0 \wedge x_3 - x_4 = 0 \wedge \dots \wedge x_{19} - x_{20} = 0 \wedge x_{20} - x_1 = 0$$

Lo cual implica que:

$$x_2 = x_3 \wedge x_3 = x_4 \wedge \dots \wedge x_{19} = x_{20} \wedge x_{20} = x_1$$

De donde

$$x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_{19} = x_{20} = x_1$$

Vemos que: $x_2 = x_1$

Lo cual contradice (*).

Por lo tanto, la ecuación no tiene soluciones de componentes enteras.

Problema 27.

Una ecuación cuadrática tiene como raíces a $\Delta + 4$ y $\Delta - 2$. Halle la suma de las cifras del producto de estas raíces, siendo Δ el discriminante de la ecuación.

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

UNI 2006 - II

Resolución.

Como $\Delta + 4$ y $\Delta - 2$ son las raíces de una ecuación cuadrática. Vamos a reconstruir dicha ecuación:

$$x^2 - (\Delta + 4 + \Delta - 2)x + (\Delta + 4)(\Delta - 2) = 0$$

Es decir,

$$x^2 - (2\Delta + 2)x + (\Delta^2 + 2\Delta - 8) = 0$$

Ahora, hallemos su discriminante (Δ):

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(2\Delta + 2))^2 - 4(1)(\Delta^2 + 2\Delta - 8) \\ \Delta &= (2\Delta + 2)^2 - 4\Delta^2 - 8\Delta + 32 \\ \Delta &= 4\Delta^2 + 8\Delta + 4 - 4\Delta^2 - 8\Delta + 32 \\ \Delta &= 36 \end{aligned}$$

Por dato, las raíces son:

$$x_1 = \Delta + 4 = 40$$

$$x_2 = \Delta - 2 = 34$$

Luego, $x_1 x_2 = (40)(34) = 1360$.

Por lo tanto, la suma de cifras del producto de raíces es 10.

Problema 28.

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(1) = -2$, $p(2) = 3$ y $p(5) = 34$. Determine un valor de x' de modo que $p(x') = 0$.

- A) $\frac{3 - \sqrt{34}}{8}$ B) $\frac{-3 + \sqrt{217}}{8}$
C) $\frac{-3 + \sqrt{17}}{8}$
D) $\frac{\sqrt{217} + 3}{8}$ E) $\frac{\sqrt{217} + \sqrt{3}}{8}$

UNI 2007 - I

Resolución.

Se tiene el polinomio

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

de modo que

$$p(1) = -2, p(2) = 3 \text{ y } p(5) = 34$$

Es decir, se forma el sistema de ecuaciones:

$$p(1) = a + b + c = -2 \quad \dots (\alpha)$$

$$p(2) = 4a + 2b + c = 3 \quad \dots (\beta)$$

$$p(5) = 25a + 5b + c = 34 \quad \dots (\theta)$$

Realizamos las siguientes operaciones:

$$(\beta) - (\alpha): \quad 3a + b = 5 \quad \dots (I)$$

$$(\theta) - (\beta): 21a + 3b = 31 \quad \downarrow \cdot (II)$$

$$(I) \times 3: 9a + 3b = 15 \quad \downarrow$$

$$\text{Restamos: } 12a = 16$$

$$a = \frac{4}{3}$$

Al reemplazarlo en (I) se obtiene:

$$b = 1$$

Reemplazamos en (α) y obtenemos:

$$c = -\frac{13}{3}$$

Reemplazamos en $p(x)$:

$$p(x) = \frac{4}{3}x^2 + x + -\frac{13}{3}$$

$$p(x) = \frac{1}{3}(4x^2 + 3x - 13)$$

Como $p(x^*) = 0$, entonces x^* es una raíz de $p(x)$; y lo hallamos por la fórmula general:

$$x^* = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(4)(-13)}}{2(4)}$$

$$x^* = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$$

De donde:

$$x^* = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8} \vee x^* = \frac{-3 - \sqrt{217}}{8}$$

Problema 29.

Si la ecuación $4x^2 - 2x + 3 = 0$, cuyas raíces son a y b . Halle otra ecuación cuadrática que tenga por raíces $(2a - 1)$ y $(2b - 1)$.

A) $y^2 - y + 1 = 0$ B) $y^2 - y - 2 = 0$

C) $y^2 + y + 3 = 0$

D) $y^2 - \frac{1}{2}y - 2 = 0$ E) $y^2 - \frac{1}{4}y + 3 = 0$

UNI 2008 - I

Resolución.

Se tiene la ecuación cuadrática:

$$4x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ de raíces } a \text{ y } b$$

Por el teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$a + b = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$$

Producto de raíces:

$$ab = \frac{3}{4}$$

Nos piden una ecuación cuadrática de raíces:

$$(2a - 1) \text{ y } (2b - 1)$$

Recuerde:

Si α y β son las raíces de una ecuación cuadrática. La ecuación reconstruida es:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

En el problema, la ecuación es:

$$x^2 - (2a - 1 + 2b - 1)x + (2a - 1)(2b - 1) = 0$$

$$x^2 - (2(a + b) - 2)x + 4ab - 2(a + b) + 1 = 0$$

$$x^2 - \left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\right)x + 4\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$x^2 + x + 3 = 0$$

Problema 30.

Si las raíces de la ecuación

$$x^2 - (\alpha + d)x + \alpha d - bc = 0$$

son $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ y las raíces de la ecuación

$$y^2 - (\alpha^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$$

son y_1 , y_2 . Entonces, halle el valor de $y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2^2$.

A) 213 000 B) 313 000 C) 413 000

D) 513 000

E) 613 000

UNI 2010 - I

Resolución.

1er dato:

Se tiene la ecuación cuadrática

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$$

de raíces $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

Por el teorema de Cardano:

Suma de raíces:

$$3 + 5 = -\frac{-(a + d)}{1} = a + d$$

Entonces,

$$a + d = 8$$

Producto de raíces:

$$3 \times 5 = \frac{ad - bc}{1}$$

Entonces,

$$ad - bc = 15$$

$$bc - ad = -15$$

2do dato:

Se tiene la ecuación cuadrática

$$y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$$

de raíces y_1, y_2 .

Por el teorema de Cardano.

Suma de raíces:

$$y_1 + y_2 = -\frac{-(a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)}{1}$$

$$y_1 + y_2 = a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd$$

$$y_1 + y_2 = a^3 + d^3 + 3bc \frac{(a + d)}{8}$$

$$y_1 + y_2 = a^3 + d^3 + 24bc \dots (*)$$

Como:

$$a + d = 8$$

Elevamos al cubo:

$$(a + d)^3 = 8^3$$

$$a^3 + d^3 + 3ad \frac{(a + d)}{8} = 512$$

$$a^3 + d^3 + 24ad = 512$$

$$a^3 + d^3 = 512 - 24ad$$

Reemplazamos en (*):

$$y_1 + y_2 = 512 - 24ad + 24bc$$

$$y_1 + y_2 = 512 + 24(bc - ad)$$

$$y_1 + y_2 = 512 + 24(-15)$$

$$y_1 + y_2 = 152$$

Producto de raíces:

$$y_1 y_2 = \frac{(ad - bc)^3}{1}$$

$$y_1 y_2 = (ad - bc)^3$$

$$y_1 y_2 = (15)^3$$

$$y_1 y_2 = 3375$$

Nos piden calcular:

$$\begin{aligned} y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 &= y_1 y_2 (y_1 + y_2) \\ &= 3375(152) \\ &= 513000 \end{aligned}$$

Problema 31.

Las ecuaciones de segundo grado:

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + b'x + c' = 0$$

tienen una raíz común si

$$(c - c')^2 + (b - b')(bc' - b'e) = 0$$

Determine la condición para que las ecuaciones $x^3 + px + q = 0$ y $x^2 + x + r = 0$ tengan una raíz común.

$$A) (r - p - 1)(r^2 - pr + q) = 0$$

$$B) (r + q)^2 + (r - p - 1)(r^2 - pr + q) = 0$$

$$C) (r + q)^2 + (r^2 - pr + q) = 0$$

$$D) (r+q)^2 + (r-p-1) = 0$$

$$E) (r+q)^2 + (r-p-1)(r^2 - pr + q) = 0$$

UNI 2010 - II

Resolución.Sea β la raíz común de las ecuaciones:

$$x^3 + px + q = 0 \text{ y } x^2 + x + r = 0$$

entonces (lo reemplazamos):

$$\beta^3 + p\beta + q = 0 \quad \dots (I)$$

$$\beta^2 + \beta + r = 0 \quad \dots (II)$$

La ecuación (II) lo multiplicamos por β :

$$\beta^3 + \underbrace{\beta^2}_{-\beta-r} + \beta r = 0$$

Entonces,

$$\beta^3 + (r-1)\beta - r = 0 \quad \dots (III)$$

Luego, con (III) y (I) se forma el sistema:

$$\begin{cases} \beta^3 + (r-1)\beta - r = 0 \\ \beta^3 + p\beta + q = 0 \end{cases}$$

Restamos:

$$(r-1)\beta - p\beta - r - q = 0$$

$$(r-p-1)\beta = r+q$$

De donde

$$\beta = \frac{r+q}{r-p-1}$$

Lo reemplazamos en (II):

$$\left(\frac{r+q}{r-p-1}\right)^2 + \left(\frac{r+q}{r-p-1}\right) + r = 0$$

Multiplicamos por $(r-p-1)^2$:

$$(r+q)^2 + (r+q)(r-p-1) + r(r-p-1)^2 = 0$$

$$(r+q)^2 + (r-p-1)(r+q + r(r-p-1)) = 0$$

$$(r+q)^2 + (r-p-1)(r+q+r^2-rp-r) = 0$$

$$(r+q)^2 + (r-p-1)(r^2-pr+q) = 0$$

Problema 32.

La ecuación cuadrática

$$z \cdot \bar{z} - (1+3i)z - (1-3i)\bar{z} - 12$$

representa:

A) una circunferencia B) una hipérbola

C) una recta

D) dos puntos

E) un punto

UNI 2012 - I

Resolución.Consideremos $z = x + yi$ Entonces $\bar{z} = x - yi$

Se sabe que:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Además,

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z - \bar{z} = 2yi$$

Se tiene la ecuación cuadrática:

$$z \cdot \bar{z} - (1+3i)z - (1-3i)\bar{z} - 12$$

$$|z|^2 - z - 3zi - \bar{z} + 3\bar{z}i = 12$$

$$|z|^2 - (z + \bar{z}) - 3i(z - \bar{z}) = 12$$

$$x^2 + y^2 - (2x) - 3i(2yi) = 12$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 12$$

Completamos cuadrados:

$$\underline{x^2 - 2x + 1} + \underline{y^2 + 6y + 9} = 22$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = \sqrt{22}^2$$

Representa la ecuación de una circunferencia de centro $(1; -3)$ y radio $\sqrt{22}$.

Problemas propuestos

Problema 1.

Si β es una solución de la ecuación

$$3x^3 + 5x - 3 = 0$$

determine el valor de $\frac{\beta}{1 - \beta^3}$

- A) 8/5 B) 5/3 C) 1/5
D) 3/5 E) 2/5

Problema 2.

Si α es una solución de la ecuación

$$x^4 - x^2 + 1 = 0$$

determine el valor de $\alpha + \frac{1}{\alpha}$

- A) -3 B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) 1 E) 0

Problema 3.

Dada la ecuación polinomial

$$\sqrt{5}(2x - 1)^2(x + 2)(x - 1)^3 = 0$$

de modo que

m : representa la suma raíces.

n : representa la suma de soluciones.

calcule el valor de $3mn$.

- A) 3 B) -1 C) -3
D) 1 E) -2

Problema 4.

Si la ecuación polinomial

$$2x^4 - 10x^3 + 5x^2 + mx + n = 0$$

tiene raíces x_1, x_2, x_3 y x_4 tal que

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \wedge x_2 = x_3 = x_4 = 2$$

Calcule el valor de $m + n$.

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Problema 5.

Dada la ecuación paramétrica

$$\frac{(n+1)(n+3)}{n+1}x = (n+3)(n+1)$$

Indique las proposiciones verdaderas.

- I. Si $n = -1$, la ecuación es compatible indeterminada.
II. Si $n \neq -1$ y $n \neq -3$, la ecuación tiene solución única.
III. Si $n = -3$, la ecuación es incompatible.

- A) I y II B) II y III C) solo I
D) solo II E) solo III

Problema 6.

Dada la ecuación de incógnita x :

$$(n^2 - n)x = n^4 - n^2$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- p: Si $n = 0$ o $n = 1$, entonces, la ecuación es compatible.
q: Si $n \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$, entonces la ecuación es incompatible.
r: Si $0! < n$, entonces la ecuación es compatible determinada.

- A) VFF B) VFV C) VVV
D) FVV E) VFF

Problema 7.

Dada la ecuación de incógnita x :

$$(9n^2 - 1)x = (3n + 1)(n + 2)$$

Calcule el valor de $(12n + 1)$ si se sabe que su conjunto solución es el vacío.

- A) 4 B) 5 C) 3 D) 13 E) 14

Problema 8.

Si las ecuaciones

$$(2n^2 + n - 1)x = n^2 - 1$$

$$3x + 2 = 3x + 2$$

son equivalentes, determine el valor de n .

- A) $1/2$ B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

Problema 9.

La ecuación polinomial

$(x - p)^2(x - 2)^m(x - m)^p = 0$; $m \neq p$ tiene 9 raíces cuya suma es 26, halle el valor de mp .

- A) 8 B) 7 C) 9 D) 10 E) 12

Problema 10.

Dada la ecuación polinomial

$$(x + 2)^m(x - 3)^2(x + m)^n = 0$$

Si la suma de soluciones es -2 y tiene una raíz simple, calcule el grado de la ecuación.

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Problema 11.

Dada la ecuación polinomial

$(x - n)^m(x + 1)^n = 0$ de quinto grado; halle la suma de sus raíces si se sabe que la suma de sus soluciones es 1.

- A) 2 B) 3 C) 5
D) -4 E) 4

Problema 12.

Dada la ecuación en x :

$$\frac{2x}{3} + \frac{x+1}{2} = nx$$

Si $CS = \{1/n\}$, halle el valor de n .

- A) $1/2$ B) $3/4$ C) $7/3$
D) $3/2$ E) 2

Problema 13.

Resuelva la ecuación lineal

$$\frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2x - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2$$

- A) $\{\sqrt{2} + \sqrt{3}\}$ B) $\{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$
C) $\{1 + \sqrt{2}\}$
D) $\left\{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right\}$ E) $\{1 + \sqrt{3}\}$

Problema 14.

Dada la ecuación lineal

$$2x - 1 + \frac{x}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

halle el cuadrado de la solución aumentado en 1.

- A) $3 + 2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2} + 1$ C) 2
D) 3 E) 4

Problema 15.

Si x_0 es la solución de la ecuación lineal

$$\frac{x - 2a - b}{b} + \frac{x}{a + b} = 3$$

calcule el valor de $\frac{x_0}{a + b}$.

considere $a, b \in \mathbb{R}^+$.

- A) $1/2$ B) 1 C) $1/3$
D) 2 E) -1

Problema 16.

Halle el valor de x de la siguiente ecuación.

$$\frac{x - a^2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{x - b^2c^2}{b^2 + c^2} + \frac{x - c^2a^2}{c^2 + a^2} = a^2 + b^2 + c^2$$

- A) abc
 B) $a^2b^2 - b^2c^2 + a^2c^2$
 C) 0
 D) $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$
 E) $a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2$

Problema 17.

Si $n \neq \pm 1$. Determine el conjunto solución de la ecuación en x :

$$\frac{x-1}{n-1} + \frac{2n^2(1-x)}{n^4-1} = \frac{2x-1}{1-n^4} - \frac{1-x}{1+n}$$

- A) $\{n\}$ B) $\{1/n\}$ C) $\{1/4\}$
 D) $\{3/4\}$ E) $\{1\}$

Problema 18.

Resuelva la siguiente ecuación.

$$\frac{x-7}{\sqrt{2}} + \frac{x-\sqrt{2}}{7} + \frac{x-7-\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = 2$$

- A) $\{7\}$ B) $\{\sqrt{2} + 1\}$
 C) $\{\sqrt{2} + 2\}$
 D) $\{7 + \sqrt{2}\}$ E) $\{\sqrt{2}\}$

Problema 19.

Halle la menor raíz de la siguiente ecuación cuadrática.

$$3x^2 - (5\sqrt{2} - 1)x + 2 = 0$$

- A) $\sqrt{2} + 1$ B) $-\sqrt{2} + 1$ C) $\sqrt{2} - 1$
 D) $-\sqrt{2} - 1$ E) $\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}$

Problema 20.

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación

$$x^2 - 2ix - 2 = 0; i = \sqrt{-1}$$

determine el valor de $|x_1| + |x_2|$.

- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 4
 D) 2 E) 1

Problema 21.

Si $a + b \neq 0$, ¿qué valor deberá tener w en la ecuación

$$(a+b)^2x^2 + 2(a^2 - b^2)x + w = 0$$

para que sus dos raíces sean iguales?

- A) $(a-b)$ B) $(a-b)^2$
 C) $a^2 - b^2$
 D) $-(a+b)^2$ E) $b^2 - a^2$

Problema 22.

Dado x_1 y x_2 raíces de la ecuación

$$x^2 + Mx + 4 = 0$$

halle el valor de M si $x_1^3 + x_2^3 = 16$.

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 8 E) 10

Problema 23.

Dada la ecuación cuadrática

$$(p^2 + 1)x^2 - (3p - 2)x = -p^2 - 3p$$

cuyo conjunto solución es de la forma

$$CS = \left\{ \frac{m+n}{3m+2n}, \frac{m+n}{m+2n} \right\}$$

Halle la suma de los valores de p .

- A) $9/4$ B) $-9/4$ C) $1/2$
 D) $-1/2$ E) 1

Problema 24.

Encuentre un valor de k si se sabe que la ecuación cuadrática

$$x^2 - (3k^2 + 5)x + 15k^2 = 0$$

tiene como conjunto solución a

$$\{b^b + 3; b^b + 2\}.$$

- A) $\sqrt{2}/2$ B) $\sqrt{2}/3$ C) $\sqrt{2}/\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}$ E) $-1/2$

Problema 25.

Resuelva la ecuación

$$\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$$

De como respuesta la suma de las soluciones.

- A) $\frac{5a-8b}{12}$ B) $\frac{5a+19b}{12}$
C) $\frac{5a+9b}{12}$
D) $\frac{6a+10b}{15}$ E) $\frac{6a+14b}{15}$

Problema 26.

En la ecuación cuadrática

$$\alpha x^2 - (\alpha - 5)x + 1 = 0$$

el producto de las raíces es igual a su diferencia. Determine una raíz.

- A) $2/3$ B) $-1/6$ C) $1/4$
D) $1/2$ E) $-3/4$

Problema 27.

Si $\{r; s\}$ es el conjunto solución de

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + n = 0\}; n \in \mathbb{R}$$

Construir un nuevo conjunto B cuya solución sea $\{r/s^2; s/r^2\}$. De como respuesta el valor que debe tomar n para que la suma de coeficientes de la nueva ecuación sea 27.

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

Problema 28.

Determine la suma de cifras de λ^4 para que las ecuaciones cuadráticas

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x^2 + 2x - \lambda + 1 = 0 \\ 12x^2 + \lambda^3x = 4 \end{cases}$$

sean equivalentes.

- A) 5 B) 7 C) 9 D) 8 E) 6

Problema 29.

Si las ecuaciones cuadráticas

$$(5m - 2)x^2 - (m - 1)x + 2 = 0$$

$$(2n + 1)x^2 - 5x + 3 = 0$$

tiene las mismas raíces, halle el valor de $(4n - 9m)$.

- A) 9 B) 18 C) 27 D) 57 E) 13

Problema 30.

Si $(2 - \sqrt{3})$ es una de las raíces de

$$P(x) = 2x^2 - (m + 1)x + 2(n - 1)$$

definido sobre $\mathbb{Q}$; halle el valor de $m + n$.

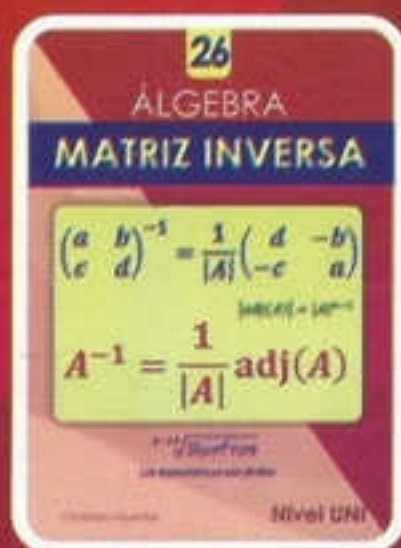
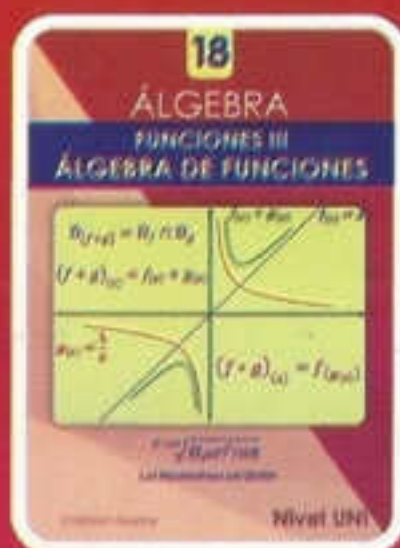
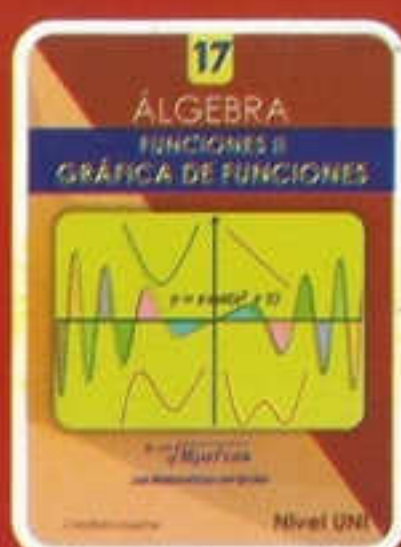
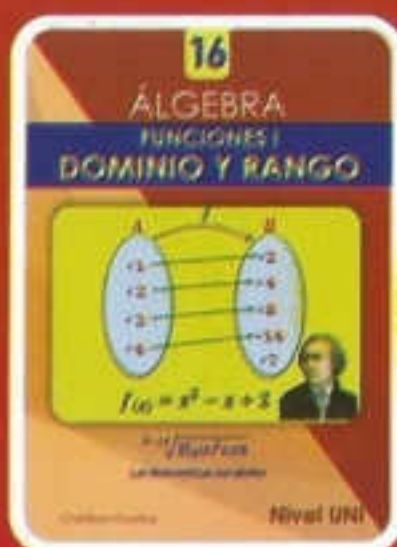
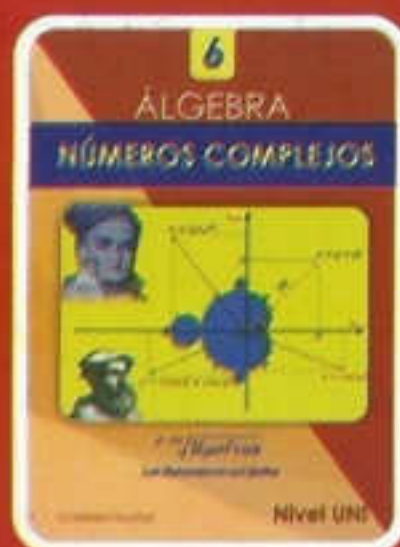
- A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

Claves

01 D	07 B	13 C	19 C	25 B
02 B	08 B	14 D	20 B	26 C
03 C	09 E	15 D	21 B	27 C
04 E	10 C	16 D	22 B	28 B
05 D	11 E	17 C	23 B	29 B
06 B	12 C	18 D	24 D	30 B



OTRAS PUBLICACIONES



$\bar{x} - 14 \sqrt{\text{H} \mu \epsilon \rho \tau \alpha \varsigma}$

16.11.20

twitter.com/calapenshko



Christiam Huertas



993 473 766



chr1614@hotmail.com



ALGEBRAPRE