Apuntes de Combinatoria para la Olimpiada de Matemáticas

Pedro Sánchez. (drini@planetmath.org)

14 de marzo de 2002

Índice general

Capítulo 1

Conteo.

1.1. Principios básicos de conteo.

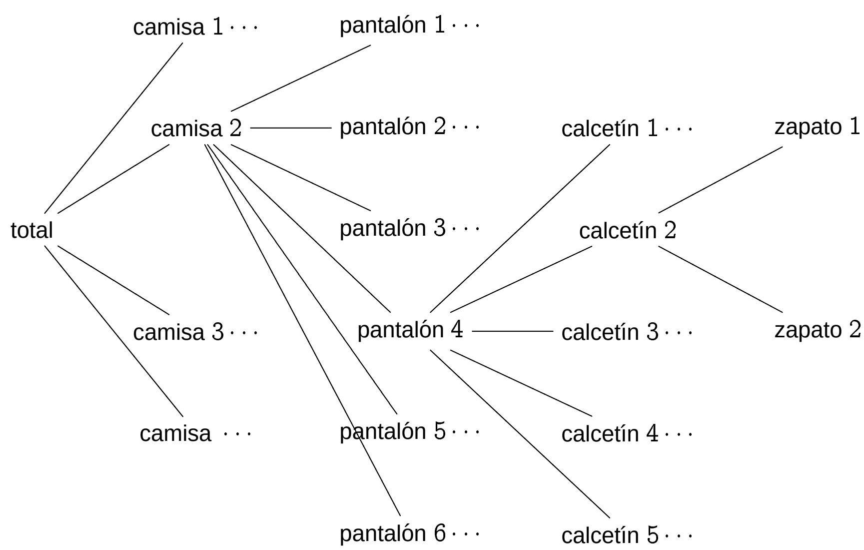
Hay dos principios básicos en combinatoria.

1.1 **(Principio de la adición)** Si se desea escoger un objeto que puede tener r tipos distintos, y para el primer tipo hay t_1 opciones, para el segundo tipo hay t_2 opciones, para el tercer tipo t_3 opciones, y así sucesivamente hasta t_r opciones para el último tipo, entonces el objeto puede escogerse de $t_1 + t_2 + \cdots + t_r$ maneras.

Lo que el principio anterior dice, es que el total de opciones es la suma del número de opciones en cada tipo. Como ejemplo, supongamos que hay que escoger un libro de entre 3 materias: matemáticas, historia y biología. Hay 6 libros de matemáticas, 9 de historia y 4 de biología. Entonces tenemos $6 + 9 + 4 = 19$ opciones.

1.2 **(Principio de la multiplicación)** Si una tarea se ha de realizar en n etapas, y si la primera etapa tiene k_1 maneras de realizarse, la segunda tiene k_2 maneras, y así sucesivamente hasta k_n maneras de realizar la última, entonces el número de formas de realizar la tarea es $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n$.

Si una persona ha de escoger cómo vestirse, teniendo 4 camisas, 6 pantalones, 5 pares de calcetines y 2 pares de zapatos, entonces tiene $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 240$ formas de vestirse, ya que para cada elección de la camisa (4 opciones) tiene 6 opciones para el pantalón, lo que da $4 \times 6 = 24$ opciones para camisa y pantalón. Para cada una de esas 24 tiene 5 pares de calcetines, totalizando 120 formas, y para cada una de esas tiene dos opciones para los zapatos, de modo que se duplica el total y al final tiene 240 formas de vestirse. El principio de la multiplicación puede visualizarse mediante un diagrama de árbol



Veamos algunas ejercicios que usan estos principios.

Ejemplo. ¿Cuántos números de 5 cifras están formados únicamente de cuatros y doses (ejemplos: 44242, 24422)?

Nos están pidiendo números de cinco cifras, es decir, nos piden llenar con doses y cuatros las cinco rayitas _ _ _ _ _. En la primera rayita podemos poner un dos o un cuatro (2 opciones), en la segunda podemos poner un dos o un cuatro (2 opciones), lo mismo en la tercera, cuarta y quinta rayita. El principio de la multiplicación dice que el total es $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$. Así, la respuesta es que hay 32 de los números pedidos. □

Ejemplo. ¿Cuántos números de 5 cifras no tienen cincos ni treses?

Como en el ejercicio anterior, tenemos que llenar cinco espacios _ _ _ _ _. En el primer espacio, de los 10 dígitos, no podemos usar el 3 ni el 5, pero tampoco podemos poner un cero ya que si ponemos cero, el número tendría menos de 5 cifras. Entonces tenemos 7 opciones para el primer espacio. En las restantes 4 posiciones podemos poner cualquier dígito excepto el 3 y el 5, es decir, ocho opciones en cada caso. El principio de la multiplicación nos da un total de $7 \times 8^4 = 28672$. □

Ejemplo. Si hay que escoger un número que tenga todas sus cifras pares excepto cuatros y ochos, o todas sus cifras impares excepto cincos y sietes, ¿de cuántas formas puede hacerse?

Hay dos tipos de números que queremos contar: los que tienen dígitos pares y los que tienen dígitos impares. El principio de la adición dice que el total lo obtenemos sumando el total de cada caso.

Cuando todos son pares, hay cuatro posiciones _ _ _ _. En la primera posición tenemos que poner un número par que no sea 4 ni 8, pero tampoco cero (porque de lo contrario, el número ya no tendría 4 cifras). Entonces tenemos dos opciones $(2, 6)$. Para las demás posiciones tenemos 3 opciones siempre $(2, 6, 0)$. El total es $2 \times 3^3 = 54$.

Cuanto todos son impares, como no podemos poner cincos ni sietes, tenemos 3 opciones para cada espacio: $1, 3, 9$. En total hay $3^4 = 81$ números de esta forma.

Entonces, el total pedido (usando el principio de la suma) es $54 + 81 = 135$. □

Ejemplo. ¿Cuántos números de 6 cifras hay que no tienen sus dígitos repetidos?

Tenemos 6 espacios a llenar _ _ _ _ _ _. En el primero, tenemos 9 opciones, porque no podemos poner al cero. En la segunda posición también tenemos 9 opciones, porque aunque ya no podemos usar el número que escogimos antes, ahora sí podemos usar el cero. Para la tercera posición tenemos 8 opciones (de los diez dígitos, ya usamos dos), para la cuarta posición hay 7 opciones, para la quinta 6 y para la última 5. En total hay $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$ números de seis cifras sin dígitos repetidos. □

Aunque los principios básicos de conteo pueden usarse en la gran mayoría de los casos, usualmente hay fórmulas (basadas en esos principios) que nos permiten hacer los cálculos de manera más rápida. En la siguientes secciones estudiaremos las principales.

1.2. Permutaciones.

En varios de los ejemplos anteriores usamos el principio de la multiplicación en una situación muy especial: en cada posición, siempre teníamos las mismas opciones (como en el ejercicio de la sección anterior que se pedía formar números que sólo tenían cuatros y doses). Si hay que llenar n posiciones y cada posición tiene k opciones, el total de arreglos es

$$\underbrace{k \times k \times k \times \cdots \times k}_{n \text{ veces}} = k^n.$$

Es importante notar que la fórmula anterior es válida únicamente cuando en todas las posiciones siempre tenemos la misma cantidad de opciones.

Ejemplo. Se escriben las letras `a, b, c, d, e, f` en papelitos distintos y luego se revuelven los seis papelitos en una bolsa. Se desea formar palabras de cuatro letras con esas letras. Se extrae un papelito, se apunta la letra, y se regresa a la bolsa, repitiendo este proceso 4 veces. ¿Cuántas palabras se puede formar?

Las palabras son arreglos de cuatro letras, cada letra puede ser de seis tipos distintos. Entonces el total de palabras es $6^4 = 1296$ palabras. □

Otra situación especial que aparece con frecuencia, es que cada vez que hacemos una elección, *no podemos volver a escoger esa opción* (como en el ejercicio que había que formar números cuyos dígitos no se repitieran). Imaginemos primero que se tienen n objetos y nos preguntamos de cuántas maneras podemos ordenarlos en fila. Como ejemplo concreto, consideremos las 5 vocales `a, e, i, o, u` y nos preguntamos de cuántas maneras podemos ordenarlas. Posibles arreglos serían `aeiou, ueoia, aioue`. Son 5 posiciones y 5 objetos. La primera posición tiene 5 opciones, la segunda 4 (porque ya no podemos usar la misma letra), la tercera 3, la cuarta 2 y la última 1. Entonces en total hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ arreglos.

Hacemos notar que lo importante aquí es que no podemos repetir lo que escogemos. Podemos ver que si en vez de 5 tuviésemos n objetos que ordenar, el total habría sido $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Si n es un entero positivo, al número $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1\cdot$ se conoce como n *factorial* y se representa como $n!$. Notemos que la definición anterior dice que n es un entero positivo. Una de las propiedades que cumple el factorial es que

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Esa propiedad nos dice una manera de "extender" la definición para incluir al cero, ya que entonces $0!$ sería $\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$.

Regresando a nuestro problema, podemos enunciarlo con esta nueva notación como sigue:

1.3 Hay $n!$ maneras de ordenar n objetos cualquiera.

Ejemplo. Si se tienen 7 libros, el número de formas de ordenarlos en un librero (uno junto a otro) es $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$. □

Ejemplo. Si se baraja un paquete completo de 52 cartas. ¿De cuántas formas pueden quedar ordenadas?

El número de arreglos de las 52 cartas es

$$52! = 80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000$$

□

1.2.1. k-permutaciones de n objetos.

El alfabeto tiene 27 letras. ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar en las que ninguna letra se repita? El principio de la multiplicación nos dice que podemos llenar los 5 espacios _ _ _ _ _ de $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 9687600$ formas.

Si en vez de 5 hubíesemos pedido palabras de 10 letras, el número habría sido $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdots 28$, y si en lugar de 10 pidiéramos arreglos de k letras, el total sería

$$27 \cdot 26 \cdot 25 \cdots (27-k+2)(27-k+1)$$

(puedes sustituir varios valores de k para comprobar). ¿Porqué funciona esa fórmula? En todas las etapas las opciones vienen del mismo conjunto, pero como cada vez que hacemos una elección ya no podemos volver a usar esa letra, las opciones van disminuyendo de una en una, y como hay k posiciones, tenemos k factores consecutivos.

Tampoco tenía nada de especial el 27. La situación general es como sigue: se tiene un conjunto con n objetos (en el ejemplo anterior fue un conjunto de 27 letras), de los cuales se escogen k elementos (en el ejemplo fueron 5) para formar arreglos (palabras), ¿de cuántas formas se puede hacer? La primera posición tiene n opciones, la segunda $n-1$, la tercera $n-2$, y así sucesivamente hasta llenar las k posiciones. El total de arreglos es entonces

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n+k+1)}_{k \text{ factores}}$$

Un arreglo formado por k elementos que se escogen de un conjunto con n elementos se llama una *k-permutación* (de n objetos) o simplemente *permutaciones de n en k*. El número de las mismas se calcula con el producto de arriba. El producto anterior se "parece" a un factorial. Si lo completamos y dividimos entre los factores que hicieron falta obtenemos la fórmula que buscamos.

1.4 (Permutaciones de n en k) Si de un conjunto de n elementos se escogen k para formar arreglos, entonces elnúmero de tales arreglos se representa como $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ y

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Este número también se representa como P_k^n o $P(n,k)$.

Así, la solución de las palabras de cinco letras la pudimos haber calculado como $P(27,22) = \frac{27!}{(27-5)!} = \frac{27!}{22!} = 9687600$.

Ejemplo. Si en un concurso de matemáticas participan 50 personas, ¿de cuántas maneras pueden quedar repartidos el primer, segundo y tercer lugar?

Para los premiados se escogen 3 de las 50 personas, y como el orden importa, la respuesta es

$$\begin{bmatrix} 50 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{50!}{(50-3)!} = \frac{50!}{47!} = 50 \times 49 \times 48 = 117600.$$

$\square$

1.1 ¿Cuántos números de 3 cifras tienen todas sus cifras impares y al menos una de ellas está repetida?

1.2.2. Permutaciones circulares, y con repetición.

1.3. Combinaciones.

Para terminar esta sección, consideramos el siguiente tipo de problemas: "Dada una colección de n objetos, ¿de cuántas maneras se pueden escoger k de ellos?".

Veamos un ejemplo concreto. El conjunto a considerar será $A = \{a, e, i, o, u\}$ y nos preguntamos de cuántas maneras podemos escoger tres vocales. Un primer intento diría:

Como hay que formar arreglos de 3 *letras a partir de un conjunto que tiene* 5 *elementos, hay* $P(5, 3) = 60$ *arreglos.*

Sin embargo, el razonamiento anterior es incorrecto. Para ver el porqué, imaginemos que las letras escogidas son `a, i, u`. Estas forman los arreglos `aiu, aui, iua, iau, uia, uai`. Entonces, seis diferentes arreglos representan la misma elección. El problema es que aquí *no* se nos pide el número de arreglos, sino simplemente el número de formas de escoger las letras. Es decir, *no importa el orden*.

Nuestro problema es, que si contamos arreglos, estamos contando 6 veces el número que queremos. Esto es así, porque cada vez que escogemos tres letras, hay $3! = 6$ formas de revolverlas entre sí (ver Teorema 1.3). Si por cada grupo de 3 letras hay 6 arreglos, entonces el número que buscamos es un sexto del número de arreglos. Entonces la respuesta que buscamos es $60/6 = 10$.

¿Qué habría pasado si en vez de grupos de tres hubiéramos formado grupos de cuatro? ¿o de dos? ¿Y si en vez de un conjunto de 5 elementos hubiésemos comenzado con uno de 10 o de 20?

Para encontrar la fórmula, supongamos que comenzamos con un conjunto de n elementos y queremos contar de cuántas formas se puede hacer un grupo de k de sus elementos. Al igual que en el razonamiento anterior, comenzamos contando el número de arreglos de tamaño k. El Teorema 1.4 nos dice que este número es

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!.}$$

Pero al igual que en ejemplo, este no es el número que buscamos, ya que varios arreglos pueden representar el mismo grupo. Pero ya sabemos que k objetos se pueden revolver de $k!$ maneras entre sí (Teorema 1.3). Entonces el número de grupos es $1/k!$ veces el número de arreglos. De este modo, el número de formas de escoger k elementos a partir de un conjunto con n elementos (sin importar orden) es

$$\frac{P(n,k)}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Un subconjunto de k elementos de un conjunto con n se llama a veces una *combinación*, por lo que al número calculado se le llama *combinaciones de n en k* (o "n en k" por brevedad). También se le da le nombre de *coeficiente binomial* por razones que aprenderemos más adelante. Se representa de varias maneras, algunas de las cuales son $C(n,k)$, C_k^n, $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k,n-k}$, entre otras. [1] Resumimos nuestro trabajo en el siguiente teorema.

1.5 **(Combinaciones de n en k)** El número de subconjuntos con k elementos de un conjunto con n elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Las combinaciones juegan un papel central en la combinatoria, por lo que dedicaremos todo el capítulo siguiente al estudio de sus propiedades. Por ahora únicamente nos interesa su aplicación al conteo (cálculos numéricos).

Ejemplo. El poker se juega con 32 cartas , cada una de las cuales tiene un "número" que puede ser $7, 8, 9, 10, J, Q, K, A$ y un símbolo (o "palo") que puede ser $\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit$. De este modo, $(10, \heartsuit)$ representa el diez de corazones. Un jugador recibe cinco cartas.

1. Si de las cinco cartas, hay 3 de un mismo número y dos de otro, ¿de cuántas maneras se puede hacer?
2. Si el jugador recibe cuatro cartas del mismo número (por tanto la última de distinto), ¿cuántos casos posibles hay?
3. ¿De cuántas formas puede recibir sus cinco cartas de modo que las cinco sean del mismo palo?
4. ¿De cuántas maneras puede recibir sus cartas de

1. Primero, usamos el principio de la multiplicación para ver que hay 56 formas de escoger qué número se va a repetir 3 veces y cual se va a repetir dos (porque en total hay 8 numeros).

   Ahora, para cada una de esas elecciones, hay que escoger tres cartas de las cuatro que tienen el primer número. Esto puede hacerse de $C(4,3)$ formas. Para formar las dos

[1] La última se debe a que $C(n,k)$ es un caso particular de combinaciones con repetición o coeficientes multinomiales (con dos tipos de objetos).

restantes, escogemos dos de las cuatro que tienen el segundo número, lo cual puede hacerse de $C(4,2)$ formas. El total de formas es

$$56\binom{4}{3}\binom{4}{2} = 56 \times 4 \times 6 = 1344.$$

2. Hay 8 formas de escoger el número que se repite cuatro veces (que es lo mismo que hacer $C(8,1)$). La carta restante necesariamente es de un número distinto, porque sólo hay cuatro de cada número, así que la podemos escoger de cualquiera de las 28 restantes (en total son 32 cartas), por lo que el número de casos posibles es $8 \times 28 = 224$.

3. El palo tiene cuatro opciones (que es lo mismo que $C(4,1)$). De las 8 cartas de cada palo, hay que escoger 5. Entonces el total es

$$\binom{4}{1}\binom{8}{5} = 4 \times 56 = 224$$

$\square$

Capítulo 2

Coeficientes binomiales.

En el capítulo anterior, vimos que $C(n, k)$ representa el número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto con n elementos. Además, vimos que se puede calcular mediante la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

A lo largo de este capítulo veremos una gran variedad de otras propiedades, pero el enfoque será distinto al anterior. Para poder desarrollar las habilidades de demostración en combinatoria, nuestras pruebas no se basarán en el cálculo explícito con la fórmula, sino en el hecho de que son el número de k-subconjuntos de un conjunto con n elementos. Así, aunque podemos demostrar las propiedades desarrollando la fórmula con factoriales, de este modo las combinaciones nunca serán más que herramientas de conteo para nosotros, mientras que el uso de su definición como número de subconjuntos nos permite adquirir nuevas habilidades que nos serán extremadamente útiles al momento de enfrentarnos a la resolución de problemas.

2.1. Identidades básicas.

Al usar las combinaciones en el capítulo anterior, habían unos casos especiales (cuando los subconjuntos son de un elemento, cuando se escoge todo el conjunto), que tal vez notaste. A continuación los enunciamos para poder usarlos libremente.

2.1 Si $\binom{n}{k}$ representa el número de subconjuntos con k elementos que tiene un conjunto de n elementos, entonces para cualquier n:

(a) $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Dado que sólo hay una manera de escoger todos los elementos, y sólo una manera de no escoger ninguno, tenemos que $C(n, n) = C(n, 0) = 1$. Por otro lado, si un conjunto tiene n elementos y queremos escoger uno, tenemos n opciones. Así $C(n, 1) = n$.

Para demostrar la segunda, notamos que cada vez que escogemos k elementos para formar el subconjunto, estamos determinando a los $n - k$ que no van a estar en el subconjunto. Y viceversa, escoger $n - k$ que no estén en el subconjunto automáticamente determina a los k que sí están. Si para cada elección de unos hay una elección correspondiente de los otros, el total en ambos casos es el mismo (igual número de formas de escoger los k que sí van a estar y los $n - k$ que no van a estar. Esto es,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

□

La demostración dada es un ejemplo de cómo se evita la aplicación mecánica de la fórmula, usando un argumento basado en la definición. El siguiente resultado ya no es tan simple y a la vez es muy interesante, se conoce como Identidad de Pascal.

2.2 **(Identidad de Pascal)** Si n, k son enteros mayores a 1, entonces

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Hagamos un análisis previo. Supongamos que $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ es el conjunto que tiene n elementos, con los que queremos formar subconjuntos con k elementos. Fijémonos en un elemento cualqueira, digamos a_1. De todos los conjuntos que queremos formar, algunos contendrán a a_1 y otros no, sin embargo

Total de subconjuntos con k elementos $=$
(subconjuntos con k elementos que contienen a a_1)
$+$ (subconjuntos con k elementos que no contienen a a_1).

El total es, por definición $C(n, k)$. Ahora queremos contar cuántos de ellos contienen a a_1. Si uno de tales conjuntos tiene a a_1, hay que llenar $k - 1$ posiciones con cualquiera de los otros $n-1$. En otras palabras, como ya sabemos que a_1 es un elemento, hay que escoger $k-1$ de los $n-1$ restantes, lo que se puede hacer de $C(n-1, k-1)$ formas.

Para formar un conjunto que no contiene a a_1, hay que escoger k elementos de los $n-1$ que son distintos a a_1. Esto lo podemos hacer de $C(n-1, k)$ formas. Entonces, por las observaciones de arriba, concluimos que $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$. □

Sabemos contar cuántos subconjuntos de tamaño k tiene un conjunto de n elementos, ¿pero cuántos subconjuntos tiene en total? Hay un conjunto con 0 elementos (el vacío), hay n con un sólo elemento, hay $C(n, 2)$ que tienen dos elementos, etc. En otras palabras, queremos calcular la suma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Como hemos estado haciendo, analizaremos primero un caso particular como ejemplo. Imaginemos que tenemos el conjunto $S = \{p, q, r, s, t\}$. Como tiene 5 elementos, queremos calcular $C(5, 0) + C(5, 1) + C(5, 2) + C(5, 3) + C(5, 4) + C(5, 5)$. La idea que usaremos será "representar" los subconjuntos con sucesiones de unos y ceros del siguiente modo: consideramos cinco espacios $\_\,\_\,\_\,\_\,\_$, y escogemos un subconjunto; si un elemento aparece en el conjunto escribimos un 1 en su posición, y de lo contrario ponemos un 0.

Ejemplo: Si el subconjunto escogido fuera $\{q, s, t\}$, escribiríamos 01011 porque sólo el tercer, el cuarto y el quinto elementos están el subconjunto. Si el subconjunto fuera $\{p, q\}$ la sucesión sería 11000, y al subconjunto vacío le toca 00000. También es claro que si escogemos cualquier sucesión de longitud cinco hecha de unos y ceros, representa algún subconjunto. Por ejemplo la sucesión 10101 es el subconjunto $\{p, r, t\}$ y la sucesión 00001 es el subconjunto $\{t\}$.

Así, cada sucesión es un conjunto y cada subconjunto es una sucesión. Entonces contar subconjuntos es lo mismo que contar sucesiones. Pero el principio de la multiplicación nos dice que hay 2^5 de tales sucesiones. Por tanto, hay 32 subconjuntos.

No había nada de especial en que el subconjunto tuviera cinco elementos. Si tuviese n elementos, usaríamos sucesiones de longitud n. El argumento es completamente análogo. De nueva cuenta resumimos nuestro análisis en un teorema.

2.3 Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos diferentes:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

2.2. El Triángulo de Pascal y el Teorema del Binomio.

Acomodemos en una tabla los valores de $\binom{n}{k}$ con los valores de n por filas y los de k por columnas:

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	

La Identidad de Pascal nos dice que todo elemento del triángulo es igual a los dos que se encuentran directamente[1] sobre ella. Esto quiere decir que si construimos un arreglo triangular de números (comenzando con 1 en la primera fila) de modo que toda entrada sea la suma de las dos que están encima de ella, los números que aparecen son precisamente los coeficientes binomiales. El arreglo que se forma se conoce como *Triángulo de Pascal*

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
\color{blue}{1} & 2 & 1 \\
\color{blue}{1} & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

El Triángulo de Pascal encierra muchas relaciones numéricas, por ejemplo, la suma de todos los números en la n-ésima fila es 2^n equivalente al Teorema (2.3). Fijémonos ahora en la suman de las “diagonales”. En la siguiente figura, consideramos las diagonales cuarta (en verde), quinta (en rojo) y sexta (en azul) contando desde cero. Sus sumas son respectivamente $1+3+1=5$, $1+4+3=8$ y $1+5+6+1=13$.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & \color{blue}{3} & \color{red}{1} \\
1 & \color{blue}{4} & \color{red}{6} & 4 & 1 \\
\color{blue}{1} & \color{red}{5} & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\color{red}{1} & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

[1] Si el arreglo se hiciera en forma simétrica, las entradas que estarían directamente sobre una dada son las que al poner el arreglo en forma de tabla son las que quedan arriba y arriba a la izquierda.

Entonces tenemos que la suma de los elementos de la diagonal verde y la roja es igual a la suma de los elementos de la diagonal azul. Esto sucede en general, si d_r denota la suma de los elementos en la r-ésima diagonal, entonces

$$d_{r+1} = d_r + d_{r-1}.$$

Además, dado que $d_0 = 1$ y $d_1 = 1$. Los números que se forman de esta manera se conocen como *Números de Fibonacci*. Decimos entonces que la suma de los números en la r-ésima diagonal del Triángulo de Pascal es igual al r-ésimo número de Fibonacci. Posteriormente estudiaremos estos números con mayor profundidad.

Otra relación interesante es la propiedad "hexagonal".

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Escojamos un número en el interior, por ejemplo el $10 = C(5,3)$. Fijémonos en el hexágono de números que se forma a su alrededor con $6 = C(4,2)$, $4 = C(4,3)$, $10 = C(5,2)$, $5 = C(5,4)$, $20 = C(6,3)$, $15 = C(6,4)$. Si se multiplican vértices alternados de este hexágono (vértices azules y vértices rojos) se obtiene en ambos casos la misma cantidad:

$$4 \cdot 10 \cdot 15 = 600 = 6 \cdot 5 \cdot 20.$$

Esta propiedad también es válida formando hexágonos de este tipo en cualquier parte del triángulo.

Sin embargo, quizás la relación más interesante en el Triángulo de Pascal se relaciona con el Teorema del Binomio.

Consideremos el producto $(a+b)^5$. Al desarrollarlo, ¿con qué coeficiente aparece a^3b^2? Aquellos que conozcan el Teroema del Binomio dirán enseguida: El coeficiente es $C(5,3)$. ¿Pero porqué sucede así? Uno podría decir: "porque si desarrollamos $(a+b)^5 = a^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5$ vemos que el coeficiente es 10". Pero esa respuesta en realidad no está diciendo la razón e porqué el coeficiente se calcula precisamente como $C(5,3)$.

Para analizar la situación vamos a "diferenciar" los factores:

$$(a+b)^5 = (a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)(a_4+b_4)(a_5+b_5).$$

Donde las a_i y las b_j son iguales entre sí, pero que estamos considerando como diferentes por ahora. Si efectuamos el producto de la derecha vemos que los términos que cuentan como a^3b^2 son:

$$\begin{array}{ccccc} a_1a_2a_3b_4b_5, & a_1a_2b_3a_4b_5, & a_1a_2b_3b_4a_5, & a_1b_2a_3a_4b_5, & a_1b_2a_3b_4a_5, \\ a_1b_2a_3a_4b_5, & b_1a_2a_3a_4b_5, & b_1a_2a_3b_4a_5, & b_1a_2b_3a_4a_5, & b_1b_2a_3a_4a_5. \end{array}$$

En otras palabras, si efectuamos la multiplicación "larga" de los cinco factores, los 10 términos listados arriba son los que quedan en la columna de a^3b^2. Una manera de "contar" la lista consiste en fijarnos que siempre hay precisamente cinco posiciones de las cuales dos son ocupadas por b's y tres por a's. Entonces, dependiendo si nos fijamos en las a's o en las b's obtenemos que hay $C(5,3)$ o $C(5,2)$ que en ambos casos es 10.

Analizando el proceso

Ejercicios y problemas.

2.1 Interprete combinatoriamente la siguiente afirmación:

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1).$$

2.2 Demuestra la propiedad hexagonal del Triángulo de Pascal (ver sección 2.2).

2.3 Demuestra que la suma de los elementos en la r-ésima diagonal del Triángulo de Pascal es precisamente el r-ésimo número de Fibonacci.

2.4 Demuestra que

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

Capítulo 3

Dos principios importantes.

Hay dos principios en combinatoria que se aplican en una gran variedad de situaciones, y en los que se basan muchos otros resultados. El primero es el Principio de las Casillas que es la principal herramienta para demostrar la existencia de un objeto, y el Principio de Inclusión-Exclusión que ayuda a enumerar los elementos de un conjunto. A los largo del capiítulo los estudiaremos y analizaremos varios problemas cuya solución depende de los mismos.

3.1. Principio de las casillas.

El Principio de las Casillas, es también conocido como Principio del Palomar[1] se enuncia como sigue:

3.1 **(Principio de las casillas.)** Si se dispone de n cajas, en las cuales se reparten $n+1$ objetos, entonces alguna caja contiene al menos dos objetos.

Este principio puede parecer tan obvio a simple vista que parecería un poco extraño estudiarle en u ncapítulo aparte. Pero como veremos, una gran variedad de problemas combinatorios pueden atacarse con este principio, especialmente aquellos en los que se desea demostrar la existencia de alguna situación. Veamos algunos ejemplos muy sencillos.

Ejemplo. En cualquier grupo de seis personas, hay tres personas que se conocen todas entre sí o tres personas que no se conocen ninguna a la otra (asuminedo que si X conoce a Y entonces Y tambien conoce a X).

consideremos una persona de las seis, digamos A. Las restantes cinco personas caen en dos

[1] En inglés: *box principle* y *pigeonhole principle*.

clases: conocen a A o no conocen a A. Por prinicpio de las casillas, una de esas clases debe tener al menos tres personas.

Supongamos que hay al menos tres personas que no concoen a A. si algun par de ellas no se conocen, junto con A ya son 3 personas que no se conocen entre sí, y en el caso restante las tres personas se concoen todas entre sí. Un argumento similar se ocupa del caso cuando las tres personas conocen a A. $\square$

Apéndice A

Inducción Matemática.

Consideremos por un momento el polinomio $p(x) = x^2 + x + 41$. Sustituyendo $x = 1, 2, 3 \ldots$ obtenemos los valores

x	$x^2 + x + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71

Observemos que todos los valores obtenidos son números primos. ¿Será cierto que para cualquier entero x el valor que se obtiene es un número primo? Responderemos esta pregunta más adelante.

A.1 **(Yuc-98)** Considera un triángulo rectángulo isósceles con catetos iguales a 1. Sobre la hipotenusa de éste se levanta un segundo triángulo rectángulo de cateto igual a 1, como se muestra en la figura, sobre la hipotenusa de este nuevo triángulo se levanta un tercer triángulo rectángulo y así sucesivamente. Encuentra la longitud de la hipotenusa del triángulo número 1998.

Usando el Teorema de Pitágoras obtenemos que la primera hipotenusa vale $\sqrt{2}$, la tercera vale $\sqrt{3}$, la cuarta vale $\sqrt{4}$. Si este patrón continuara, obtendríamos que la hipotenusa del triángulo 1998 sería $\sqrt{1999}$. Pero, ¿podemos asegurar que este patrón realmente continúa?

A.1. El método de Inducción Matemática.

En muchos problemas necesitamos demostrar que una propiedad que depende de un número entero n se cumple para todos los enteros positivos. La técnica canónica que usaremos para lograr este objetivo se denomina *inducción matemática*.

En su forma simple, este método consta de dos etapas:

1. Se verifica que la propiedad se cumple para un valor inicial ($n = 1$).
2. Se demuestra que si la propiedad se cumple para algún entero k, entonces se cumple para el siguiente ($k + 1$).

Una vez verificados esos 2 requisitos, podemos asegurar que la propiedad se cumple para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Veamos un ejemplo práctico antes de analizar porqué funciona el método.

En el problema del triángulo, queremos comprobar la propiedad

La hipotenusa del triángulo n es $\sqrt{n+1}$.

Notemos que la propiedad depende de un y sólo un número entero, el valor de n. Esto es un indicador de que el método de inducción matemática podría ser apropiado.

La primera etapa pide mostrar que la propiedad se cumple para $n = 1$, es decir, que la hipotenusa del primer triángulo es $\sqrt{2}$, lo cual es cierto en virtud del Teorema de Pitágoras.

En la segunda etapa, imaginamos que ya sabemos que la propiedad se cumple para algún valor k (o sea, la hipotenusa del triángulo k es $\sqrt{k+1}$). Queremos probar que la propiedad también se cumple para $k + 1$ (o sea, la hipotenusa del triángulo $k + 1$ es $\sqrt{k+2}$).

Para calcular la hipotenusa del triángulo $k+1$ aplicamos el Teorema de Pitágoras. Uno de sus catetos es 1, y el otro es la hipotenusa del triángulo anterior, el cual estamos suponiendo que vale $\sqrt{k+1}$. Entonces

$$hipotenusa = \sqrt{1^2 + (\sqrt{k+1})^2} = \sqrt{1+k+1} = \sqrt{k+2}.$$

Comprobamos que *si* la propiedad se cumple para un entero k, se cumple para $k + 1$. Entonces la inducción matemática nos garantiza que la propiedad *siempre* se cumple, y ya somos capaces de asegurar que la hipotenusa del triángulo 1998 es $\sqrt{1999}$.

¿Porqué funciona el método?

Este proceso puede compararse a una escalera, donde la primera etapa nos da el primer peldaño, y la segunda etapa construye nuevos peldaños a partir de los anteriores.

La primera etapa prueba que la propiedad se cumple para $n = 1$, dándonos un punto de partida. La segunda etapa dice que si sabemos que la propiedad se cumple para algún entero, se cumple para el siguiente. ¡Pero la primera etapa nos dice que la propiedad se cumple para $n = 1$! Entonces podemos asegurar que la propiedad se cumple para el siguiente entero, es decir, $n = 2$. Como la propiedad se cumple para $n = 2$, la segunda etapa nos dice que se cumple para el siguiente, $n = 3$. Como ahora ya sabemos que se cumple para $n = 3$, la segunda etapa nos dice que la propiedad se cumple para $n = 4$, y así sucesivamente.

Esto basta para asegurar que la propiedad se cumple para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, ya que no importa qué número escojamos, en algún momento la escalera "alcanza" ese número.

Variantes del método de inducción.

El análisis del método de inducción sugiere algunas variantes. Por ejemplo, en la primera etapa, el valor inicial no necesariamente tiene que ser 1. Si en la primera etapa probamos (por ejemplo) que la propiedad se cumple para $n = 10$, el método de Inducción nos garantiza que la propiedad se cumple únicamente para $n = 10, 11, 12, \ldots$, y si probásemos que la propiedad se cumple para $n = -3$, el método de Inducción nos garantiza que la propiedad se cumple para $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Sin embargo, en la mayoría de los problemas el paso inicial es $n = 0$ o $n = 1$.

La segunda etapa también es susceptible de modificación. Un ejemplo sería probar que si la propiedad se cumple para algún entero k, se cumple para $k + 2$. En este caso, suponiendo que el valor inicial fuese $n = 1$, habríamos probado que la propiedad se cumple para $n = 1, 3, 5, 7 \ldots$ (Cerciorarse de este hecho). Sin embargo, las modificaciones a la segunda etapa son bastante raras, y con frecuencia pueden evitarse escogiendo adecuadamente la variable de inducción.

Importancia de las dos etapas.

Si bien es cierto que la segunda etapa es la que "demuestra" que la propiedad se cumple, la primera tiene una importancia fundamental. Un error común es dar por sentada la primera parte del método y comprobar únicamente la segunda. Este es un error que se debe evitar, pues es necesario tener un punto inicial para que la inducción pueda funcionar. Consideremos el siguiente ejemplo.

En el problema del triángulo, imaginemos que equivocadamente hubiéramos notado que la hipotenusa del triángulo n era $\sqrt{n-1}$.

En la segunda etapa suponemos que la propiedad se cumple para un k e intentamos probar que también se cumple para $k + 1$. Usando el Teorema de

Pitágoras:

$$hipotenusa = \sqrt{1^2 + (\sqrt{k-1})^2} = \sqrt{1+k-1} = \sqrt{k}.$$

y concluimos que la hipotenusa el triángulo n es ¡¡$\sqrt{n-1}$ en vez de $\sqrt{n+1}$!!.

El error provino de omitir la primera etapa, que es la que nos provee de una base verdadera para que la segunda etapa construya una escalera de verdades.

Analicemos ahora el problema del polinomio. Después de probar los primeros 20 números obtenemos siempre números primos (esto equivaldría a realizar la primera etapa), sin embargo, como nos es difícil probar la segunda parte, nos vemos tentados a decir "después de hacer muchos casos, concluimos que el polinomio siempre devuelve números primos". Este es un error aún más grande que el anterior, pues

$$p(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41(41+1+1) = 41{\cdot}43$$

y tenemos que el polinomio no siempre genera números primos. La moraleja es que si algún patrón parece repetirse de manera constante, es bueno señalarlo, pero hasta no realizar ambos pasos de la inducción no podemos garantizar que la propiedad siempre se cumple (aunque la comprobemos en muchos casos particulares).

A.2. Problemas y Ejercicios.

A.2 Demostrar que la suma de los ángulos de un polígono de n lados es $(n-1)180°$.

A.3 Demostrar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\\
1+3+5+7+\cdots+(2n-1) &= n^2
\end{aligned}$$

A.4 Verifica que

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

A.5 Todos los números de la forma $1007, 10017, 100117, 1001117, \ldots$ son divisibles entre 53.

A.6 Se tienen $2n$ puntos, y de todos los segmentos que los unen se colorean n^2+1. Prueba que existen 3 puntos tales que los 3 segmentos que los unen están pintados.

A.7 Se construye la siguiente sucesión de números:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{si } n > 2. \end{aligned}$$

Demuestra que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

A.8 Si α es un número real tal que $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ es un número entero, prueba que $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ siempre es un entero para cualquier potencia entera n.

A.9 Si a un tablero de $2^n \times 2^n$ se le quita una casilla en alguna esquina, el tablero resultante se puede cubrir con L-triminós.

Apéndice B

Soluciones y sugerencias de ejercicios seleccionados.

1.1 Este problema es bastante complicado, ya que hay varios casos (una repetida dos veces, una letra que se repite tres veces). Una de las técnicas más comunes en conteo es contar el complemento del conjunto que se nos pide. En este caso, contamos cuántos números de 3 cifras impares que no se repiten hay, y se lo restamos al total de números de 3 cifras impares (al total le quitamos los que no nos sirven y nos da el número que queremos).

¿Cuántos números de 3 cifras impares hay? Son 3 posiciones, en cada posición puede ir el $1, 3, 5, 7, 9$ por lo que en total hay 5^3 números.

¿Cuántos *no* tienen cifras repetidas? Este número es el número de arreglos (porque importa el orden, ya que 351 no es lo mismo que 153) de 3 números escogidos de un conjunto con 5 elementos (el conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$). Por tanto hay $P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ números sin cifras repetidas.

Para terminar, al total le restamos los casos que no nos sirven, esto es $5^3 - 60 = 125 - 60 = 65$ números de 3 cifras impares en los que alguna se repite.

2.1 Dado un conjunto con n elementos, hay $C(n, 2)$ formas de escoger 2 elementos, lo que es lo mismo a escoger los $n - 2$ que no van a estar. Esto es, $C(n, 2) = C(n, n - 2)$. Ahora bien,

2.2 Debido a la naturaleza multiplicativa del problema, en este caso nos conviene usar la fomula con factoriales. Si el hexágono a considerar tiene centro en $C(n, k)$, tenemos que probar que

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

pero al expandir con la fórmula obtenemos que

$$\begin{aligned}&\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}\\ = \quad &\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\right)\left(\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}\right)\left(\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{(n-1)!n!(n+1)!}{(k-1)!(n-k)!(k+1)!(n-k-1)!k!(n-k+1)!}$$

y además

$$\begin{aligned}
&\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1} \\
&\quad = \left(\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\right)\left(\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}\right)\left(\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}\right) \\
&\quad = \frac{(n-1)!n!(n+1)!}{k!(n-k-1)!(k-1)!(n-k+1)!(k+1)!(n-k)!}
\end{aligned}$$

Al comparar numeradores y denominadores, vemos que ambos productos son iguales.

2.3 Tal y como se mencionó en el texto, lo que se necesita probar es que

$$d_{r+1} = d_r + d_{r-1}$$

donde d_k representa la suma de los elementos en la k-ésima diagonal. Dado que $d_0 = d_1 = 1$, si se prueba la relación anterior se habrá probado que los números que aparecen son los números de Fibonacci.

Supongamos que n es par. Tenemos que $n = 2s$ y entonces

$$d_n = \binom{2s}{0} + \binom{2s-1}{1} + \binom{2s-2}{2} + \cdots + \binom{s}{s}$$

y además $n - 1 = 2s - 1$ por lo que

$$d_{n-1} = \binom{2s-1}{0} + \binom{2s-2}{1} + \binom{2s-3}{2} + \cdots + \binom{s}{s-1}.$$

Aplicando la Identidad de Pascal tenemos que

$$\begin{aligned}
\binom{2s-1}{0} + \binom{2s-1}{1} &= \binom{2s}{1} \\
\binom{2s-2}{1} + \binom{2s-2}{2} &= \binom{2s-1}{2} \\
\binom{2s-3}{2} + \binom{2s-3}{3} &= \binom{2s-2}{3} \\
&\vdots \\
\binom{s}{s} + \binom{s}{s-1} &= \binom{s+1}{s}
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
d_n + d_{n-1} &= \binom{2s}{0} + \left[\binom{2s}{1} + \binom{2s-1}{2} + \binom{2s-2}{3} + \cdots + \binom{s+1}{s}\right] \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots + \binom{s+1}{2}
\end{aligned}$$

Como n era par, $n+1 = 2s+1$ es impar y de este modo

$$d_{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{s+1}{s}$$

que es precisamente la expresión encontrada arriba puesto que

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}.$$

A.2 Si $n = 3$ tenemos el conocido teorema de que la suma de sus ángulos es 180°. Supongamos que se cumple para un polígono de k lados. Si a un polígono de $k+1$ lados le quitamos el triángulo formado por dos lados consecutivos y la diagonal que los une, obtenemos un polígono de k lados cuya suma de ángulos es $(k-2)180^\circ$. La suma de los ángulos del polígono de $k+1$ es la suma de los ángulos del triángulo recortado y el polígono obtenido, es decir, la suma S de los ángulos es

$$S = (180^\circ) + (k-2)^\circ = 180^\circ(1 + k - 2) = (k-1)180^\circ.$$

El método de inducción nos permite concluir que la fórmula es válida para $n \geq 3$.

A.4 $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$.

A.5 El primer número es $53{\cdot}19$, y la diferencia entre dos consecutivos también es divisible entre 53.

A.6 Prueba que el número máximo de vértices que se pueden colorear sin que aparezcan triángulos coloreados es a lo más n^2.

Este documento fue creado con LaTeX 2_ε y Vim.
Última compilación:14 de marzo de 2002, 21:38.

Pedro David Sánchez Salazar
http://br.crashed.net/~drini
drini@planetmath.org