

Déterminant

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 FORMES n -LINÉAIRES

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Définition 1 : Formes n -linéaires

Une **application n -linéaire de E dans F** est une application $f : E^n \rightarrow F$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$, l'application

$$x \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

est linéaire de E dans F .

Une **forme n -linéaire sur E** est une application n -linéaire de E dans son corps de base.

Vocabulaire On utilise plutôt **bilinéaire** et **trilinéaire** à la place de 2-linéaire et 3-linéaire.

Exemple 1

L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &\longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$, qui définit le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$, dont vous avez déjà l'habitude. Arriveriez-vous à généraliser cela sur $\mathbb{R}^n$, avec des matrices colonnes ?

Exemple 2

L'application

$$\begin{aligned} \det : (\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}))^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) &\longmapsto ad - bc \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire.

Exemple 3

Les formes trilinéaires sur $\mathbb{R}$ sont données par $(x, y, z) \mapsto \lambda xyz$, où λ est un réel.

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application suivante est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (A, B) &\longmapsto \text{tr}(AB). \end{aligned}$$

Proposition 1

L'ensemble des applications n -linéaires entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Preuve. A vous ! $\square$

Définition 2

Soit f une application n -linéaire entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F . On dit que f est

Symétrique Pour toute transposition $\tau \in S_n$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Antisymétrique Pour toute transposition $\tau \in S_n$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$.

Alternée Si deux des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Alternée $\Leftrightarrow$ Antisymétrique

Si f est alternée, alors pour tout $x, y, x_3, \dots, x_n \in E$, on a $f(x + y, x + y, x_3, \dots, x_n) = 0$. D'où $f(x, y, x_3, \dots, x_n) + f(y, x, x_3, \dots, x_n) = 0$. Il suffit de faire le même raisonnement pour chaque entrée de f , pour montrer que f est antisymétrique.

Si f est antisymétrique, alors, pour tout $x, x_3, \dots, x_n \in E$, $f(x, x, x_3, \dots, x_n) = -f(x, x, x_3, \dots, x_n)$, d'où $2f(x, x, x_3, \dots, x_n) = 0$. De même pour toutes les autres entrées de f , et donc f est alternée.

Proposition 2

Soit f une application n -linéaire entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F .

f **symétrique** $\Leftrightarrow$ pour tout $\sigma \in S_n$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

f **antisymétrique** $\Leftrightarrow$ pour tout $\sigma \in S_n$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$.

On rappelle que $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

Preuve. Il suffit d'utiliser le fait que toute permutation est générée par les transpositions. $\square$

Propriétés d'une forme linéaire alternée

On peut utiliser les propriétés suivantes, si f est une forme linéaire **alternée**. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Tout d'abord, c'est une forme linéaire, donc $f(\lambda \cdot x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Le caractère alterné nous donne $f(x_2, x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $f(x_1 + \lambda x_k, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Ces propriétés permettent de résoudre les équations dans les exercices.

Exemple 5

On peut donc conclure, que si $x_1, \dots, x_n \in E$ forment une famille liée, alors il existe une combinaison linéaire nulle, avec des coefficients non nuls. Disons, que λ_1 est non nul tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$, où tous les λ_k sont des réels. Alors, si f est une forme n -linéaire alternée

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, x_2, \dots, x_n\right) = f(0, \dots, x_n) = 0.$$

2 DÉTERMINANTS

2.1 DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

Théorème 1

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Il existe une unique forme n -linéaire alternée φ_0 sur E telle que $\varphi_0(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Toute forme n -linéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0 .

Définition 3 : Déterminant d'une famille de vecteurs

En reprenant les notations du théorème, pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$, le scalaire $\varphi_0(x_1, \dots, x_n)$ est appelé le **déterminant de la famille de vecteurs** $(x_1, \dots, x_n)$ **par rapport à la base** $\mathcal{B}$ et se note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

On note alors $\det_{\mathcal{B}}$ l'application φ_0 .

Calcul du déterminant

Soient $\mathcal{B}$ une base de E , $x_1, \dots, x_n \in E$ et, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(x_{i,j})_i$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$, soit $x_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} e_j$, on note

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire alternée, ses propriétés nous disent que

- $\det_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, donc multiplier une colonne par un scalaire, revient à multiplier $\det_{\mathcal{B}}$ par un scalaire,
- $\det_{\mathcal{B}}(x_1 + \lambda x_k, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, donc on peut faire des opérations sur les colonnes de la matrice ci dessus, sans changer le déterminant.

Exemple 6

Soit a, b et c trois scalaires. Cherchons une expression factorisée du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit juste de décomposer dans la base par linéarité. Pour $x_1, \dots, x_n \in E$, on note $x_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} e_j$, et on a alors,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \prod_{j=1}^n x_{i_j, j} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Pour j fixé, si deux indices i_k et i_l sont égaux, avec $k \neq l$, alors $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$, car f est alternée. Donc, on peut définir une application $j \mapsto i_j$ bijective, c'est-à-dire une permutation de S_n . On obtient alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n x_{\sigma(j), j} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Comme f est alternée, en fixant la valeur de $f(e_1, \dots, e_n)$, on fixe aussi $f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot f(e_1, \dots, e_n)$. Notons alors $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$. On peut réécrire

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(j), j}.$$

Il suffit alors de montrer que cette application est bien une forme n -linéaire alternée, ce qui prouve l'existence de φ_0 , en prenant $\lambda = 1$, et toutes les autres formes n -linéaires sont obtenues en fixant une autre valeur à λ .

L'unicité est immédiate. $\square$

Espace vectoriel des formes n -linéaires sur un espace de dimension finie

L'espace vectoriel des formes n -linéaires, sur un espace E de dimension n , forme donc un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

Si l'espace E est de dimension $n - 1$, on ne trouvera pas n vecteur linéairement indépendants, par définition de la dimension. Donc $f = 0$.

Si l'espace E est de dimension $n + 1$, Il faut fixer la valeur de f en $(e_1, \dots, e_n)$, en $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1})$, ..., en $(e_2, \dots, e_{n+1})$, donc on peut montrer plus rigoureusement que l'espace des formes n -linéaires sur E est de dimension $n + 1$.

Exemple 7

La preuve donne une formule directe pour le déterminant

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) u_{\sigma(1), 1} u_{\sigma(2), 2} \dots u_{\sigma(n), n}.$$

Pour $n = 2$, on a

$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}u_{2,1}$, une formule que vous connaissez déjà.

Pour $n = 3$, on a $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = u_{1,1}u_{2,2}u_{3,3} + u_{1,2}u_{2,3}u_{3,1} + u_{1,3}u_{2,1}u_{3,2} - u_{1,1}u_{2,3}u_{3,2} - u_{1,2}u_{2,1}u_{3,3} - u_{1,3}u_{2,2}u_{3,1}$. Que l'on retrouve grâce à la méthode dite "de Sarrus",

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the Sarrus rule for a 3x3 matrix. The first three rows are shown. Below them, the first two rows are repeated to facilitate tracing diagonals from top-left to bottom-right and from top-right to bottom-left.

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the Sarrus rule for a 3x3 matrix. The first three rows are shown. Below them, the first two rows are repeated to facilitate tracing diagonals from top-left to bottom-right and from top-right to bottom-left.

On recopie les deux lignes de la matrice sous celle-ci, et on trace les diagonales dans les deux sens. En additionnant les produits des diagonales de gauche à droite, puis en soustrayant le produit des diagonales de droite à gauche.

ATTENTION La méthode de Sarrus n'est pas généralisable à des matrices de taille différente de 3.

Déterminant de matrices triangulaires

Avec les notations précédentes, si, pour tous $i > j$, $u_{i,j} = 0$, alors $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_{i,i}$.

Le résultat reste vrai si, pour tous $i < j$, $u_{i,j} = 0$, c'est à dire pour les matrices triangulaires supérieures.

Déterminant, aire et volume

Dans $\mathbb{R}^2$, le déterminant de deux vecteurs dans la base canonique s'interprète comme l'aire orienté du parallélogramme construit par ces deux vecteurs.

De même dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant de trois vecteurs dans la base canonique s'interprète comme le volume orienté du parallélépipède construit par ces trois vecteurs.

Proposition 3 : Caractérisation d'une base

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n . Alors, n vecteurs $x_1, \dots, x_n \in E$ forme une base de E si, et seulement si,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

Preuve. Comme la famille a pour cardinal $n = \dim E$, il suffit de montrer que $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une famille libre si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Si la famille est liée, alors l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres. Or on a vu que l'image d'une famille liée par une forme linéaire alternée est toujours nulle. d'où la contraposée.

($\Rightarrow$) Si la famille $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base alors les deux formes n -linéaires alternées $\det_{\mathcal{X}}$ et $\det_{\mathcal{B}}$ sont proportionnelles. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{X}} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

En évaluant en $(x_1, \dots, x_n)$ cette égalité, on obtient que $\lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 1 \neq 0$.

□

Exemple 8

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $\mathcal{B} := (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique, et $\mathcal{A} := (1 - 2X + X^2, 1 - X, 2 - X^3, 2X - X^3)$. On a

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(1 - 2X + X^2, 1 - X, 2 - X^3, 2X - X^3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \end{aligned}$$

Dons $\mathcal{A}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Base directe ou indirecte

Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel orienté de dimension finie est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base de référence $\mathcal{B}$. Une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E est **directe** si $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) > 0$; elle est **indirecte** sinon.

Exemple 9

Considérons l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté par la base canonique (e_1, e_2, e_3) . Alors, les bases (e_2, e_3, e_1) et (e_3, e_1, e_2) sont directes, alors que la base (e_1, e_3, e_2) est indirecte.

2.2 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME EN DIMENSION FINIE

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Proposition 4 : Invariance du Déterminant au changement de base

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.

Définition 4

Le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Preuve. Considérons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E . Remarquons que les applications $\det_{\mathcal{B}'}$ et $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$ sont n -linéaires, alternées donc proportionnelles à $\det_{\mathcal{B}}$. Il existe donc deux scalaires λ, μ tels que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) &= \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n), \\ \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) &= \mu \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

En évaluant la première relation en $(e_1, \dots, e_n)$, on obtient que

$$\lambda = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

En multipliant la première relation par μ , on obtient, en utilisant la seconde relation,

$$\det_{\mathcal{B}'}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n),$$

et en évaluant en $(e'_1, \dots, e'_n)$, on obtient

$$\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)).$$

Ce qui prouve le résultat annoncé. $\square$

Exemple 10

$\det \text{Id}_E = \det_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(e_1), \dots, \text{Id}_E(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, $\det(\lambda \text{Id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda \text{Id}_E(e_1), \dots, \lambda \text{Id}_E(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1, \dots, \lambda e_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda^n$.

Exemple 11

Soit $\sigma \in S_n$ et $\mathcal{B}$ une base de E . L'endomorphisme de E défini pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$ a pour déterminant $\det f = \det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)$.

Lien avec le déterminant en base $\mathcal{B}$

L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est n -linéaire, alternée donc proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

En évaluant en $(e_1, \dots, e_n)$, on obtient que $\lambda = \det u$ donc

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Proposition 5 : Vitale

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$.

De plus, l'endomorphisme u est inversible si, et seulement si, $\det(u) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$.

Preuve.

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}}(u \circ v(x_1), \dots, u \circ v(x_n)) &= \det u \cdot \det_{\mathcal{B}}(v(x_1), \dots, v(x_n)) \\ &= \det u \cdot \det v \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

D'où $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$.

On a $\det(u) \neq 0 \iff$ la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base $\iff u$ envoie une base sur une base est une base $\iff u$ est un automorphisme.

En utilisant la formule précédente, $\det(u^{-1}) \det(u) = \det(u^{-1} \circ u) = \det(\text{Id}) = 1$, ce qui montre la dernière identité. $\square$

Exemple 12

On suppose que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$. Montrons que la dimension de E est paire.

On a, par passage au déterminant, $\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\text{Id}_E) = (-1)^n$.

Or $\det(f)^2$ est un réel positif, donc $n = \dim E$ est un entier pair.

2.3 DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Définition 5

Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de M est le scalaire noté $\det M$ défini comme le déterminant des vecteurs colonnes de M dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j}.$$

C'est bien sûr la même chose que pour l'application linéaire associée !

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors, par définitions, $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det M$. Et oui ! Les vecteurs colonnes représentant les $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les colonnes de M .

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note f_A l'application linéaire associée à A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors

$\det f_A = \det_{\mathcal{B}}(f_A(e_1), \dots, f_A(e_n)) = \det A$.

On obtient donc la proposition vitale suivante.

Proposition 6 : Vitale (version matrice)

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(MN) = \det M \det N$ et $\det(M^T) = \det(M)$.

De plus, M est inversible si, et seulement si, $\det M \neq 0$.

Preuve.

On montre le résultat pour la transposée. En notant $M = (m_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$

$$\begin{aligned} \det(M^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n m_{k,\sigma(k)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma^{-1}(j),\sigma(\sigma^{-1}(j))} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma^{-1}(j),j} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n m_{\sigma^{-1}(j),j} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n m_{\sigma^{-1}(j),j} = \det M. \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 13

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ne sont pas inversibles. Vous savez pourquoi ?

⚠ ATTENTION

~~$\det(\lambda M) = \lambda \det M$~~ , mais $\det(\lambda M) = \lambda^n \det M$.

Point final : Inversibilité d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① M est inversible, soit $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MN = NM = I_n$,
- ② M est inversible à gauche, soit $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), NM = I_n$,
- ③ M est inversible à droite, soit $\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MN = I_n$,
- ④ M est la matrice d'un isomorphisme dans des bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
- ⑤ Les vecteurs colonnes de M forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.
- ⑥ Les vecteurs colonnes de M forment une famille libre de $\mathbb{K}^n$.
- ⑦ Les vecteurs lignes de M forment une famille libre de $\mathbb{K}^n$.
- ⑧ Les vecteurs lignes de M forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.
- ⑨ $\text{rg}(M) = n$,
- ⑩ $\text{Ker} M = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$,
- ⑪ $\det M \neq 0$.

De plus, si la matrice M est inversible, alors le système $MX = Y$ possède une unique solution $M^{-1}Y$, et dans ce cas, le système est dit **de Cramer**.

Corollaire 6.1

Deux matrices semblables ont même déterminant (et la même trace).

3 APPLICATIONS**3.1 CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE**

Le déterminant ne permet pas seulement de savoir si une matrice est inversible, mais de calculer son inverse !

Définition 6 : Comatrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Le **mineur de position (i, j) de M** est le scalaire, noté $\Delta_{i,j}$ défini comme le déterminant de la matrice $(m_{k,l})_{k \neq i, l \neq j}$, c'est-à-dire de la matrice déduite de M en supprimant la ligne i et la colonne j .

Le **cofacteur de position (i, j) de M** est le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

La **comatrice de M** est la matrice notée $\text{Com}(M)$ dont les coefficients sont les cofacteurs de M .

Exemple 14

Calculons la comatrice N de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ en détaillant élément par élément.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad n_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{2} & \bullet \quad n_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{2} & \bullet \quad n_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-4} \\
 \bullet \quad n_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{1} & \bullet \quad n_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{1} & \bullet \quad n_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{3} \\
 \bullet \quad n_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{6} & \bullet \quad n_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-4} & \bullet \quad n_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-2}
 \end{aligned}$$

Proposition 7

Soit $M = (m_{ij})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les formules suivantes pour calculer le déterminant

$$\text{Développement selon une colonne} \quad \forall j \leq n, \quad \det M = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

$$\text{Développement selon une ligne} \quad \forall i \leq n, \quad \det M = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

Preuve. On montre la formule pour la j -ième colonne, fixée. Comme $\det M = \det {}^t M$, cela montrera le résultat pour les lignes.

On note $C_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les colonnes de M , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors

$$\det M = \sum_{i=1}^n m_{i,j} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} (-1)^{n-j} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n, E_i),$$

en ayant permuté la j -ième colonne avec la suivante jusqu'à la dernière, soit $n - j$ fois. Or, en utilisant la formule du déterminant,

$$\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n, E_i) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n c_{\sigma(k),k}.$$

Mais le produit $\prod_{k=1}^n c_{\sigma(k),k}$ est nul, si et seulement si, $\sigma(n) \neq i$. Donc il reste seulement dans notre somme, les permutations qui envoient n sur j . Cet ensemble de permutations est isomorphe à S_{n-1} et représente toutes les permutations de $\sigma \in S_n$, telles que $\sigma(i) \neq j$, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On obtient bien

$$\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n, E_i) = (-1)^{n-i} \Delta_{i,j}.$$

□

Exemple 15

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

Remarquons que $D_1 = a+b$ et $D_2 = a^2 + b^2 + ab$ puis que, pour tout $n \geq 3$, on a, par développement par rapport à la première ligne,

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - a \begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

En développant désormais le dernier déterminant par rapport à la première colonne, on obtient $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

On est ainsi ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont les racines de l'équation caractéristique sont a et b .

- Si $a \neq b$, alors il existe des scalaires λ, μ tels que $\forall n \geq 1, D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ et les valeurs initiales entraînent $\lambda = \frac{-a}{b-a}$ et $\mu = \frac{b}{b-a}$ et donc $\forall n \geq 1, D_n = \frac{-a}{b-a} a^n + \frac{b}{b-a} b^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$
- Si $a = b$, alors il existe des scalaires λ, μ tels que $\forall n \geq 1, D_n = (\lambda + n\mu)a^n$ et les valeurs initiales entraînent $\lambda = \mu = 1$ et donc $\forall n \geq 1, D_n = (1+n)a^n$. On remarque que ce cas correspond au passage à la limite quand b tend vers a ce qui est logique car la fonction $b \mapsto D_n$ est continue car polynomiale.

Théorème 2 : Formule de la comatrice

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Com}(M)^T M = M \text{Com}(M)^T = \det(M) \text{I}_n$.

Exemple 16

Vous connaissez déjà le cas $n = 2$!

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Preuve. Par définition du produit matriciel, $(\text{Com}(M)^T M)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \Delta_{k,i} m_{k,j}$. C'est exactement le déterminant $\det(C_1(M), \dots, C_{i-1}(M), C_j(M), C_{i+1}(M), \dots, C_n(M))$, en développant sur la i -ème colonne, ce qui prouve le résultat. $\square$

Exemple 17

Dans l'exemple 14, on obtient $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ -2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$.

Praticité

Ce résultat n'est pas très utile pour les matrices carrées de taille supérieure à 4, car cela fait calculer au moins 16 déterminants 3×3 , et le déterminant de la matrice. Autant utiliser le Pivot de Gauss. Utile pour les matrices de taille inférieure, ou avec les matrices qui ont beaucoup de 0.

3.2 CARACTÉRISATION DU RANG

Soient $M = (m_{i,j})_{i \in [1,n], j \in [1,m]} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $r \leq \min(n, m)$.

Définition 7 : Mineur d'ordre r

Un **déterminant extrait d'ordre r** ou **mineur d'ordre r** de M est un scalaire de la forme $\det(m_{i,j})_{i \in L_r, j \in C_r}$ où L_r et C_r sont des parties de $[1, n]$ et $[1, m]$ de cardinal r .

Proposition 8

Le rang de M est supérieur ou égal à r si, et seulement si il existe un déterminant extrait d'ordre r de M non nul. Donc le rang de M est égal à r si, et seulement si

il existe un mineur d'ordre r de M non nul et tous les mineurs d'ordre $r+1$ de M sont nuls.

Exemple 18

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 2 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 3 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1 - 0 - 3 = -2 \neq 0$$

Donc $\text{rg} A \geq 3$.

Cependant, tous les mineurs d'ordre 4 contiennent les 2 premières lignes, proportionnelles, donc ils sont tous nuls.

Donc $\text{rg} A = 3$

Exemple 19

Une matrice de taille $n \times n$ de la forme

$$\begin{bmatrix} \star & \cdots & \cdots & \cdots & \star \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \star \end{bmatrix}$$

où $\star$ indique un scalaire inconnu, est de rang supérieur ou égal à $n - 1$ puisque le mineur $\Delta_{1,n}$ est égal à 1 donc non nul.

Preuve.

($\Rightarrow$) Si le rang de M est supérieur ou égal à r , alors il existe r colonnes de M linéairement indépendantes. Notons $\mathcal{C}_r$ l'ensemble des indices de telles colonnes et considérons la matrice M_r obtenue avec ces r colonnes. La matrice M_r est de rang r donc il existe r lignes linéairement indépendantes, notons $\mathcal{L}_r$ l'ensemble des indices de telles lignes. Alors, la matrice $(m_{i,j})_{i \in \mathcal{L}_r, j \in \mathcal{C}_r}$ est de taille $r \times r$ et de rang r donc inversible. Son déterminant est non nul.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $\mathcal{L}_r$ et $\mathcal{C}_r$ des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, p \rrbracket$ de cardinal r telles que

$$\det(m_{i,j})_{i \in \mathcal{L}_r, j \in \mathcal{C}_r} \neq 0.$$

Si les colonnes de la matrice définie ci-dessus sont liées, le déterminant est nul, ce qui est absurde. Les colonnes correspondantes dans M forment donc une famille libre, donc $\text{rg} M \geq r$.

□

3.3 FORMULE DE CRAMER

Il est souvent plus rapide de faire le pivot de Gauss pour résoudre un système mais il arrive que les formules de Cramer offre une solution immédiate.

Proposition 9

Soit un système linéaire $AX = B$, avec A une matrice carrée inversible d'ordre n . La solution unique $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est donnée par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i -ème colonne de A par le vecteur B .

Preuve.

Puisque $AX = B$, on a

$$B = \sum_{j=1}^n x_j C_j(A),$$

où $C_j(A)$ désigne la j -ème colonne de la matrice A . Si on remplace la colonne i de A par B , alors le déterminant de cette nouvelle matrice peut être développé selon les colonnes, en utilisant la linéarité et les propriétés des déterminants

$$\det(A_i) = \sum_{j=1}^n x_j \det(C_1(A), \dots, C_{i-1}(A), C_j(A), C_{i+1}(A), \dots, C_n(A))$$

Seul le terme avec $j = i$ survit (les autres donnent 0 en raison de colonnes identiques), et on obtient

$$\det(A_i) = x_i \det(A) \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

□

Exemple 20

Pour $n = 2$, cela donne le système

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \quad \text{avec } ad - bc \neq 0$$

La solution unique est donnée par

$$x = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}, \quad y = \frac{a\beta - c\alpha}{ad - bc}$$