Géométrie euclidienne

Préparation à l'Agrégation, ENS de Cachan. Hugues Auvray.

Novembre 2013

1 Définitions et rappels

Définition 1 (Espace affine euclidien)**.** *Un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$ est dit* ***euclidien*** *si sa direction E est un espace vectoriel euclidien (et donc de dimension finie n).*

Ainsi, il existe sur E un produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)$ de norme associée $\|\cdot\|$. Ce produit scalaire permet de munir l'espace affine $\mathcal{E}$ d'une distance définie par $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ et de la topologie qui lui est associée.

Remarque 2. *Puisque E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur E. Ainsi, les distances correspondantes sur $\mathcal{E}$ définies par $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ sont uniformément équivalentes. L'espace $\mathcal{E}$ est ainsi muni d'une topologie canonique, que toute norme de E permet de définir. D'où l'intérêt d'étudier une norme euclidienne associée à un produit scalaire, plus facile à manipuler et riche en applications.*

On appelle **repère orthonormé** de $\mathcal{E}$ un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ où $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une base orthonormée de E.

But : Étudier les transformations de $\mathcal{E}$ qui préservent à la fois la structure affine (applications affines, *cf.* chapitre précédent) et la distance (notions d'isométrie...).

Lemme 3. *Soient $\big(E,(\cdot,\cdot)\big)$ et $\big(E',(\cdot,\cdot)'\big)$ deux espaces vectoriels euclidiens et $f : E \to E'$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est linéaire et pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|' = \|x\|$.*
2. *f est additive et pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|' = \|x\|$.*
3. *$f(0) = 0$ et pour tous x et $y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|' = \|x - y\|$.*
4. *Pour tous x et $y \in E$, $(f(x), f(y))' = (x, y)$.*

Démonstration.
La démonstration est assez immédiate, notamment en ce qui concerne (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4). Il faut se rappeler que si f est additive, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, et donc $f(0) = 0$.

Rappelons aussi les **formules de polarisation :** si x et $y \in E$, $(x,y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$, et on a d'autres égalités en faisant intervenir $\|x-y\|^2$.

Pour démontrer (4) $\implies$ (1), supposons que f préserve le produit scalaire. Comme alors f conserve automatiquement la norme, il reste à montrer que f est linéaire.

Si x et $y \in E$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in E$, $\big(f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y), f(z)\big) = \big(f(\lambda x + \mu y), f(z)\big) - \lambda\big(f(x), f(z)\big) - \mu\big(f(y), f(z)\big) = (\lambda x + \mu y, z) - \lambda(x,z) - \mu(y,z) = 0$.

Ainsi, $u = f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)$ est dans l'orthogonal de $f(E)$, donc aussi dans l'orthogonal de $\operatorname{Vect} f(E)$. Comme $u \in \operatorname{Vect} f(E)$, $(u,u) = \|u\|^2 = 0$ et $u = 0$. $\square$

Proposition et Définition 4 (Isométries affines)**.** *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines euclidiens et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f conserve les distances.*

2. *f conserve les distances et f est affine.*

3. *f est affine et $\overrightarrow{f}$ conserve le produit scalaire.*

Une telle application f est appelée une ***isométrie affine****. L'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est noté $\mathcal{I}s(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.*

Remarque 5. *Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une isométrie, alors elle est injective (car $\overrightarrow{f}$ l'est). Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ ont même dimension, elle est bijective et son inverse est encore une isométrie.*

Ainsi, $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est un groupe et pour toute isométrie $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$.

Notons $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E}) = \{f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E}),\ \overrightarrow{f} \in SO(E)\}$ (respectivement $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E}) = \{f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E}),\ \overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^-(E)\}$) : ce sont les **déplacements** de $\mathcal{E}$ (respectivement les **antidéplacements**).

Bien sûr, en géométrie affine euclidienne, le théorème suivant est toujours valable.

Théorème 6 (Pythagore)**.** *Si les droites (AB) et (BC) sont orthogonales, alors $d(A,C)^2 = d(A,B)^2 + d(B,C)^2$, et réciproquement.*

Nous avons vu en géométrie affine la notion de projection affine. Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, de direction F, on définit $p_{\mathcal{F}} = p$ la **projection orthogonale sur** $\mathcal{F}$ comme étant le projecteur affine sur $\mathcal{F}$ selon la direction $F^{\perp}$.

Si $x \in \mathcal{E}$, $p(x)$ est égal à l'unique élément y de $\mathcal{F}$ tel que $d(x,y) = d(x,\mathcal{F}) = \min\{d(x,z),\ z \in \mathcal{F}\}$. (C'est une conséquence directe du théorème de Pythagore.)

ATTENTION : $p : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ n'est pas une isométrie, ni p vue comme application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même dès que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine propre. Par contre, un projecteur orthogonal «raccourcit» les longueurs, dans le sens où pour tous points A et B de $\mathcal{E}$, $p(A)p(B) \leq AB$.

De même, on définit la **symétrie affine orthogonale par rapport à** $\mathcal{F}$, qui elle est un élément de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$. Si $\mathcal{F}$ est un hyperplan, on parle de **réflexion (hyperplane)**.

2 Forme réduite des isométries

2.1 Enoncé

Rappel du cours de Géométrie Affine : Si $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, $Fix(f)$ l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big)$. De plus, si $\ker\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big) = \{0\}$, alors $Fix(f)$ est un singleton.

Lemme 7. (1) *Si $\vec{u} \in E$, notons $t = t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Soit $h \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$. Alors $t \circ h = h \circ t$ si, et seulement si $\vec{u} \in \ker(\overrightarrow{h} - \mathrm{id}_E)$.*

(2) *Si $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, alors $E = \ker\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big)$ (la somme est directe et orthogonale).*

<u>*Démonstration.*</u>

(1) Écrire $t \circ h = h \circ t$ équivaut à dire que pour tout point $A \in \mathcal{E}$, $h(A) + \vec{u} = h(A + \vec{u}) = h(A) + \overrightarrow{h}(\vec{u})$. Ceci équivaut encore à dire que $\big(\overrightarrow{h} - \mathrm{id}_E\big)(\vec{u}) = 0$, soit $\vec{u} \in \ker\big(\overrightarrow{h} - \mathrm{id}_E\big)$.

(2) Si f est une isométrie, il suffit de voir que $\ker\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big)$ et $\mathrm{Im}\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big)$ sont orthogonaux, pour des raisons de dimensions ces espaces seront supplémentaires.

Si $x \in \ker\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big)$, et $z = \overrightarrow{f}(y) - y \in \mathrm{Im}\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big)$, alors $(x,z) = (x, \overrightarrow{f}(y)) - (x,y) = (\overrightarrow{f}(x), \overrightarrow{f}(y)) - (x,y) = 0$ car $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$ et $x = \overrightarrow{f}(x)$. □

Théorème 8 (Forme réduite des isométries)**.** *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et f une isométrie de $\mathcal{E}$. Alors :*

1. *Il existe un unique couple $(t,h) \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})^2$ où t est une translation, h admet un point fixe, tel que $f = t \circ h = h \circ t$.*

2. *Il existe un unique couple $(t,h) \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})^2$ où t est une translation de vecteur $\vec{u} \in \mathcal{E}$, h admet un point fixe, tel que $f = t \circ h$ et $\vec{u} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$.*

3. *Il existe un unique couple $(t,h) \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})^2$ où t est une translation de vecteur $\vec{u} \in \mathcal{E}$, h admet un point fixe, tel que $f = h \circ t$ et $\vec{u} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$.*

Démonstration.

En remarquant que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{h}$, le premier point du lemme montre que les trois assertions sont en réalité équivalentes. Il faut donc montrer l'existence et l'unicité de t et h vérifiant les propriétés du théorème.

Analyse : Si $A \in \mathcal{E}$ est un point fixe de h, alors $f(A) = h(A) + \vec{u} = A + \vec{u}$ si bien que $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$.

De plus, s'il existe un point $A \in \mathcal{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$, alors en posant $h = t_{-\vec{u}} \circ f$, h est une isométrie et $h(A) = f(A) - \overrightarrow{Af(A)} = A$ donc A est un point fixe de h.

Ainsi, si l'on pose $\Gamma = \left\{A \in \mathcal{E},\, \overrightarrow{Af(A)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)\right\}$, alors l'existence de h et t revient à montrer que Γ est non vide.

De plus, le vecteur de la translation $\vec{u}$ est égal à $\overrightarrow{Af(A)}$ pour un point $A \in \Gamma$. Montrer l'unicité revient alors à montrer que pour tous points A et B de Γ, $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)}$.

Synthèse : Si A et $B \in \Gamma$, $\overrightarrow{Af(A)} - \overrightarrow{Bf(B)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$ d'après la définition de Γ. Mais $\overrightarrow{Af(A)} - \overrightarrow{Bf(B)} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{f(A)f(B)} \in \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$. Comme d'après le point (2) du Lemme, ces deux espaces sont orthogonaux, en fait $\overrightarrow{Af(A)} - \overrightarrow{Bf(B)} = 0$, ce qui montre l'unicité.

Pour l'existence, prenons un point $M \in \mathcal{E}$. Si A est un autre point de $\mathcal{E}$, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{Mf(M)} + \overrightarrow{f(M)f(A)} = \overrightarrow{Mf(M)} + \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)(\overrightarrow{MA})$

Comme on a une somme directe, on décompose $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u} + \vec{v}$ où $\vec{u} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$ et $\vec{v} = \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)(\overrightarrow{w}) \in \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$. Ainsi, en prenant pour point $A = M - \overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Mf(M)} + \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)(\overrightarrow{MA}) = \vec{u} + \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)(\overrightarrow{w}) + \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)(-\overrightarrow{w}) = \vec{u} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$, et donc $A \in \Gamma \neq \varnothing$. □

Corollaire 9. *Si $f = h \circ t$ est la forme réduite de $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, alors f admet un point fixe si, et seulement si $t = id_{\mathcal{E}}$.*

Ce corollaire découle directement de l'unicité de la forme réduite de f.

2.2 Application : classification des isométries en dimension 2 et 3

2.2.1 En dimension 2

- **Déplacements**

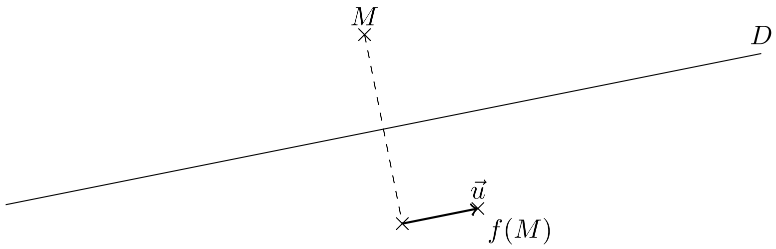
Si $f \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{E}^2)$, alors $\overrightarrow{f}$ est un élément de SO_2. Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$, f est soit l'identité, soit une translation.

Sinon, $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle d'angle $\theta \in]0, 2\pi[$ et $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right) = \{0\}$. Ainsi f a un unique point fixe A. On obtient alors la rotation de centre A et d'angle θ.

Isométrie	$\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$	Points fixes
$\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$	E	$\mathcal{E}$
translation	E	aucun
rotation	$\{0\}$	un point, le centre

- **Antidéplacements**

Si $f \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{E}^2)$ alors $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^-$ est une réflexion par rapport à la droite vectorielle $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$. Ainsi, si $f = t \circ h$ est la forme réduite de f, soit $t = id_{\mathcal{E}}$ et alors f est une **symétrie axiale** d'axe la droite des points fixes de f, soit f n'a aucun point fixe et est la composée d'une symétrie axiale d'axe D dirigé par $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ parallèle à D. On dit alors que f est une **symétrie glissée**. La droite D est laissée globalement invariante par f, et est appelée **l'axe** de la symétrie glissée.



Isométrie	$\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$	Points fixes
symétrie axiale	une droite vectorielle	une droite affine D, l'axe
symétrie glissée	une droite vectorielle dirigeant l'axe	aucun

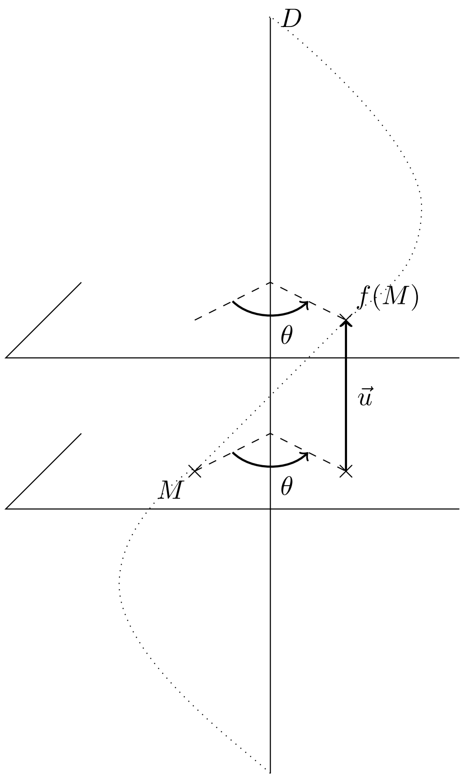
2.2.2 En dimension 3

• **Déplacements**

De même, si $f \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{E}^3)$, $\overrightarrow{f} \in SO_3$ est soit l'identité, soit une rotation vectorielle dont l'axe est la droite $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$.

Dans le premier cas, on retrouve l'identité et les translations. Dans le second cas, si la partie translation est triviale, il s'agit d'une **rotation** autour de la droite des points fixes de f, appelée l'**axe** de f. Si l'angle de la rotation est π, c'est un **retournement :** f est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace affine de codimension 2 (donc une droite ici !).

Lorsque la partie translation est non triviale, f est appelée **vissage**. C'est la composée d'une rotation d'axe une droite affine D et d'une translation dont le vecteur est parallèle à D. La droite D est alors globalement invariante par f On l'appelle encore l'**axe** du vissage.



Isométrie	$\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$	Points fixes
identité	E	$\mathcal{E}$
translation	E	aucun
rotation	une droite vectorielle	une droite affine, l'axe
vissage	une droite vectorielle dirigeant l'axe	aucun

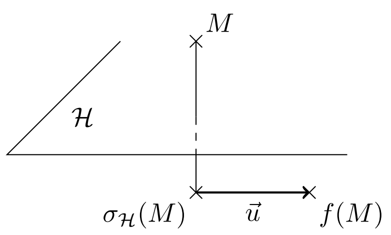
• **Antidéplacements**

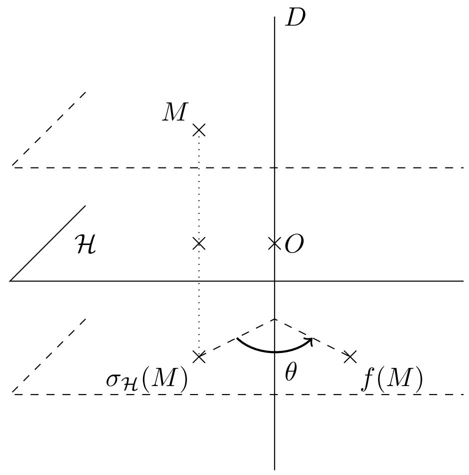
Comme $\overrightarrow{f}$ est un élément de $\mathcal{O}_3^-$, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{f}$ est soit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in]0, 2\pi[$.

Dans le premier cas, f est soit une **réflexion plane** et admet un plan affine de points fixes, soit la composée d'une réflexion plane et d'une translation de vecteur parallèle à ce plan.

Dans le second cas, 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ et donc f admet un unique point fixe. Ainsi, il existe un plan affine $\mathcal{H}$ tel que $f = r \circ \sigma_{\mathcal{H}}$ où $\sigma_{\mathcal{H}}$ est la réflexion de plan $\mathcal{H}$ et r une rotation d'angle θ et d'axe D, une droite affine orthogonale à $\mathcal{H}$. Le point O d'intersection de $\mathcal{H}$ et D est l'unique point fixe de f.

Dans le cas où $\theta = \pi$, $\overrightarrow{f} = -\mathrm{id}_E$ et f est une **symétrie centrale**, de centre O l'unique point fixe de f.





Isométrie	$\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right)$	Points fixes
réflexion plane	un plan vectoriel	un plan affine
composée d'une réflexion et d'une translation	un plan vectoriel	aucun
composée d'une réflexion plane et d'une rotation d'angle $\theta \neq \pi$	$\{0\}$	un point unique
symétrie centrale	$\{0\}$	un point unique, le centre

3 «Construction» d'isométries.

Si $A_0, \dots, A_k$ sont des points distincts d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, alors pour tous indices $0 \leq i < j \leq k$, $d(f(A_i), f(A_j)) = d(A_i, Aj)$. Ainsi, si $B_0, \dots, B_k$ sont d'autres points de $\mathcal{E}$, une condition nécessaire pour qu'il existe f une isométrie de $\mathcal{E}$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i est que pour tous indices $0 \leq i < j \leq k$, $d(B_i, B_j) = d(A_i, Aj)$. En réalité, cette condition est également suffisante, et c'est l'objet de ce paragraphe. Observons dès à présent que l'on ne demande aucune contrainte sur k.

Théorème 10. *Soient $(A_i, i \in I)$ et $(B_i, i \in I)$ deux familles de points distincts de $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n. Alors il existe $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ telle que pour tout i, $f(A_i) = B_i$ si, et seulement si pour tous indices i et j, $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$.*

Corollaire 11 (Cas d'égalité du triangle)**.** *Deux triangles sont isométriques si, et seulement si les longueurs de leurs côtés sont deux à deux égales.*

Lemme 12. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines euclidiens, $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et $(B_0, \dots, B_n) \in \mathcal{F}^{n+1}$ tels que pour tous i et j avec $0 \leq i < j \leq n$, $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$.*

Alors il existe une unique isométrie f telle que pour tout i, $f(A_i) = B_i$. De plus, les points $(B_0, \dots, B_n)$ sont affinement indépendants et $\dim(\mathcal{F}) \geq \dim(\mathcal{E})$.

Démonstration du lemme.
Unicité : Si une telle isométrie f existe, c'est une application affine, donc uniquement déterminée par son image sur un repère affine, d'où l'unicité.

Existence : Il existe une application $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ telle que pour tout indice i, $f(A_i) = B_i$. Il reste donc à montrer que f est une isométrie.

Si i, j et k sont trois indices, $\overrightarrow{A_iA_k} = \overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_j,A_k}$ et par polarisation, $2(\overrightarrow{A_iA_j}, \overrightarrow{A_kA_j}) = d(A_i,A_j)^2 + d(A_j,A_k)^2 - d(A_i,A_k)^2 = d(B_i,B_j)^2 + d(B_j,B_k)^2 - d(B_i,B_k)^2 = 2(\overrightarrow{B_iB_j}, \overrightarrow{B_kB_j})$.

Si P et Q sont deux points de $\mathcal{E}$, il existe $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^n x_i\overrightarrow{A_0A_i}$.

Alors $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \sum_{i=1}^n x_i\overrightarrow{B_0B_i}$ puisque f est affine, et

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i\overrightarrow{A_0A_i}\Big\|^2 = \sum_{i,j=0}^n x_ix_j(\overrightarrow{A_0A_i},\overrightarrow{A_0A_j}) = \sum_{i,j=0}^n x_ix_j(\overrightarrow{B_0B_i},\overrightarrow{B_0B_j}) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\|^2.$$

Ainsi, f est une isométrie. en particulier, f est injective et les points $(B_0,\dots,B_n)$ sont affinement libres. □

Corollaire 13. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines euclidiens avec $\dim(\mathcal{F}) \geq \dim(\mathcal{E}) = n$ et p un entier tel que $0 \leq p \leq n-1$.*

Si $(A_0,\dots,A_p) \in \mathcal{E}^{p+1}$ sont affinement indépendants et $(B_0,\dots,B_p) \in \mathcal{F}^{p+1}$ avec pour tous i et j, $d(A_i,A_j) = d(B_i,B_j)$, alors il existe une isométrie f telle que $B_i = f(A_i)$ pour tout i, et de plus les points $(B_0,\dots,B_p)$ sont affinement libres.

Lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, de plus on peut choisir $f \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$, et si $p = n-1$, ce choix est unique.

Démonstration.
Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}ff(A_0,\dots,A_p)$ la sous-variété affine de dimension p engendrée par les points $(A_0,\dots,A_p)$. Soit A sa direction et $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une base orthonormée de $A^\perp$. En notant pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ $A_i = A_0 + e_i$, on obtient un repère affine $(A_0,\dots,A_n)$ de $\mathcal{E}$.

De même, si $\mathcal{B} = \mathcal{A}ff(B_0,\dots,B_p)$, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de dimension au plus p. Si B est sa direction, il existe donc $(f_{p+1},\dots,f_n)$ une famille orthonormale de $B^\perp$ et on pose de même $B_i = B_0 + f_i$ pour tout $i \in [\![p+1,n]\!]$.

Vérifions que pour tous indices i et j avec $0 \leq i < j \leq n$, $d(A_i,A_j) = d(B_i,B_j)$.

Si $0 \leq i < j \leq p$, l'égalité est vraie par hypothèse.

Si $i \leq p$ et $j > p$, par le théorème de Pythagore, $d(A_i,A_j)^2 = d(A_0,A_i)^2 + \|e_j\|^2 = d(B_0,B_i)^2 + 1 = d(B_i,B_j)^2$.

Si $p < i < j \leq n$, $d(A_i,A_j)^2 = \|e_j - e_i\|^2 = 2 = d(B_i,B_j)^2$.

On applique alors le lemme précédent : il existe une isométrie f telle que pour tout i, $f(A_i) = B_i$. De plus, comme alors $(B_0,\dots,B_n)$ est affinement libre, $(B_0,\dots,B_p)$ l'est aussi.

A présent, si $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan engendré par $(B_0,\dots,B_{n-1})$. Si s est la réflexion orthogonale d'hyperplan $\mathcal{H}$, $s \circ f$ est encore une isométrie et pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, $s \circ f(A_i) = s(B_i) = B_i$ puisque $B_i \in \mathcal{H}$. Ainsi à la fois f et $s \circ f$ conviennent : on peut choisir l'isométrie directe ou indirecte.

Si $p = n-1$ et que f et g sont deux isométries convenant, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, $f \circ g^{-1}(B_i) = B_i$. Comme $\mathcal{H}$ est engendré par $(B_0,\dots,B_{n-1})$, $f \circ g^{-1}|_{\mathcal{H}} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

Si H est la direction de $\mathcal{H}$, $H^\perp$ est une droite, donc $\overrightarrow{f \circ g^{-1}}|_{H^\perp}$ est égale à $+\mathrm{id}_{H^\perp}$ ou $-\mathrm{id}_{H^\perp}$ et $f \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ ou $f \circ g^{-1} = s$, d'où l'unicité. □

Nous avons à présent tous les outils pour démontrer le théorème énoncé en début de paragraphe.

Démonstration du théorème.
Soient $(A_i,\, i \in I)$ et $(B_i,\, i \in I)$ deux familles de points distincts de $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n, tels que pour tous indices i et j, $d(A_i,A_j) = d(B_i,B_j)$.

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}ff(A_i,\, i \in I)$. On extrait de la famille $(A_i,\, i \in I)$ un repère affine de $\mathcal{A}$, noté pour plus de commodité $(A_0,\dots,A_r)$.

Il existe d'après le corollaire 13 une isométrie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que pour tout $i \in [\![0, r]\!]$, $f(A_i) = B_i$. Ainsi, $(B_0, \dots, B_r)$ est une famille affinement libre de $\mathcal{B} = \mathcal{A}ff(B_i,\, i \in I)$. En particulier, $\dim \mathcal{B} \geq \dim \mathcal{A}$.

Comme les points A_i et B_i jouent des rôles symétriques, si extrait de la famille des $(B_i,\, i \in I)$ une famille qui soit un repère affine de $\mathcal{B}$, on trouve une isométrie de $\mathcal{E}$ qui envoie ce repère sur les points A_i correspondants, et on en conclut que $\dim \mathcal{A} \geq \dim \mathcal{B}$. D'où finalement $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B}$ et la famille $(B_0, \dots, B_r)$ est un repère affine de $\mathcal{B}$.

Reste à montrer que pour tout indice $j \in I \setminus [\![0, r]\!]$, $f(A_j) = B_j$. Supposons par l'absurde qu'il existe un tel indice j avec $f(A_j) \neq B_j$. Remarquons que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ d'après ce qui précède : ainsi, $f(A_j) \in \mathcal{B}$. De plus, pour tout $i \in [\![0, r]\!]$, $d\big(B_i, f(A_j)\big) = d\big(f(A_i), f(A_j)\big) = d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$. Ainsi, les points $(B_0, \dots, B_r)$ sont sur l'hyperplan médiateur de B_j et $f(A_j)$ dans $\mathcal{B}$. Mais comme $(B_0, \dots, B_r)$ est un repère affine de $\mathcal{B}$, il ne peut pas être contenu dans un sous-espace affine strict de $\mathcal{B}$, d'où la contradiction. □

4 Étude du groupe des isométries

Comme pour l'étude du groupe affine, on a la suite exacte scindée :

$$\{1\} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}s(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{O}(E) \longrightarrow \{1\}$$

L'application $E \to \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est $\vec{u} \mapsto t_{\vec{u}}$, et l'application $\mathcal{I}s(\mathcal{E}) \to \mathcal{O}(E)$ est $f \mapsto \overrightarrow{f}$. Comme pour le groupe affine, si l'on choisit un point A de $\mathcal{E}$, il fournit une section $s_A : v \mapsto (f : M \mapsto A + v(\overrightarrow{AM}))$. Autrement dit, à v une isométrie vectorielle, s_A associe l'unique isométrie affine ayant A pour point fixe et de direction v.

Si l'on considère le sous-groupe des déplacements, cela fournit deux suites exactes également scindées, la première étant $\{1\} \longrightarrow \mathcal{I}s^+(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{I}s(\mathcal{E}) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\} \longrightarrow \{1\}$. Si r est une réflexion hyperplane ou un élément quelconque de $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$, une section est donnée par l'application qui à -1 associe r.

L'autre suite exacte scindée est la restriction à $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ de la première suite de ce paragraphe : $\{1\} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}s^+(\mathcal{E}) \longrightarrow SO(E) \longrightarrow \{1\}$, et une section s_A est obtenue de la même manière que pour la suite du groupe des isométries correspondantes pour tout choix d'un point $A \in \mathcal{E}$.

• **Centre**

Si $f \in Z\big(\mathcal{I}s(\mathcal{E})\big)$, alors comme l'application $\mathcal{I}s(\mathcal{E}) \to \mathcal{O}(E)$ est surjective, $\overrightarrow{f} \in Z\big(\mathcal{O}(E)\big) = \{\pm \mathrm{id}_E\}$.

Si $\overrightarrow{f} = -\mathrm{id}_E$, f est une symétrie centrale, de centre $A \in \mathcal{E}$. En particulier, $f^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et $f^{-1} = f$. Mais pour tout vecteur $\vec{u} \in E$, si $t = t_{\vec{u}}$, $t \circ f \circ t^{-1}$ est la symétrie centrale de centre $A + \vec{u}$. Ainsi, si $t \neq id_{\mathcal{E}}$, $t \circ f \circ t^{-1} \neq f$ et f n'est pas dans le centre de $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$.

De même, si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$, f est une translation de vecteur $\vec{u} \in E$. De même, si $\vec{u} \neq \overrightarrow{0}$, f ne commute pas avec les symétries centrales, et n'est donc pas dans le centre.

On obtient ainsi que $Z\big(\mathcal{I}s(\mathcal{E})\big) = \{\mathrm{id}_{\mathcal{E}}\}$. Un raisonnement analogue prouve que $Z\big(\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})\big) = \{\mathrm{id}_{\mathcal{E}}\}$ dès que $\dim\, \mathcal{E} \geq 2$; il faut cependant travailler un peu plus en dimension 2, car $SO(2)$ est commutatif.

• **Composantes connexes**

Le groupe des isométries de $\mathcal{E}$ se décompose en produit semi-direct $E \rtimes \mathcal{O}(E)$. Ainsi, $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ a deux composantes connexes, $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E}) = \det^{-1}(\{1\})$ et $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E}) = \det^{-1}(\{-1\})$. Le sous-groupe des déplacements $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes SO(E)$ est connexe par arcs. Si $r \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$, l'application $f \mapsto r \circ f$ est un homéomorphisme entre $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$ et $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$.

• **Générateurs du groupe des isométries et du groupe des déplacements.** ([T] et [RDO])

Proposition 14. *Soit $v \in \mathcal{O}(E)$ et $\sigma = \operatorname{codim} \ker(v - \mathrm{id}_E)$. Alors v est produit de σ réflexions hyperplanes, et ce nombre est minimal.*

<u>Démonstration.</u>

Cette proposition est un résultat d'algèbre linéaire. On sait qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de v s'écrit $M = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$ où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, et $p + q + 2r = n$ la dimension de E.

Avec ces notations, $\sigma = \operatorname{codim} \ker(v - \mathrm{id}_E) = q + 2r$.

Si pour $i \in [\![1, q]\!]$, s_i est la réflexion d'hyperplan $(e_{p+i})^\perp$, sa matrice s'écrit dans la base considérée $\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_{i-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & I_{q-i} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_{2r} \end{pmatrix}$. De même, si $j \in [\![1, r]\!]$, soit r_j la rotation d'angle θ_j dans le plan engendré par $e_{p+q+2j-1}$ et e_{p+q+2j}, *i.e.* dont la matrice s'écrit $\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & I_{2j-2} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & R_{\theta_j} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_{2r-2j} \end{pmatrix}$.

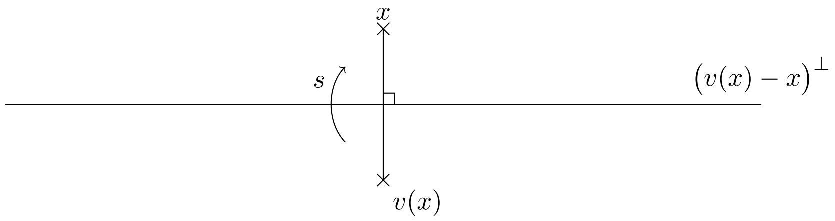
Cette rotation r_j est la composée de deux réflexions hyperplanes s'_j et s''_j.

Ainsi, $v = s_1 \circ \ldots \circ s_q \circ s'_1 \circ s''_1 \circ \cdots \circ s'_r \circ s''_r$ est la composée de $q + 2r = \sigma$ réflexions hyperplanes.

Autre démonstration : par récurrence sur σ.

Si $\sigma = 0$, $v = \mathrm{id}_E$ est produit de 0 réflexions hyperplanes et ce nombre est bien entendu minimal !

Si $\sigma > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $v(x) \neq x$. Puisque v est une isométrie, $v(x) - x$ et $v(x) + x$ sont orthogonaux ; en effet, $\big(v(x) - x, v(x) + x\big) = \|v(x)\|^2 - \|x\|^2 = 0$. Soit donc s la réflexion par rapport à $(v(x) - x)^\perp$. $s\big(v(x) - x\big) = x - v(x)$ et puisque $v(x) + x \in \big(v(x) - x\big)^\perp$, $s\big(v(x) + x\big) = v(x) + x$. Donc $s\big(v(x)\big) = x$.



Ainsi, $\operatorname{codim} \ker(s \circ v - \mathrm{id}_E) = \operatorname{codim} \ker(v - \mathrm{id}_E) - 1 = \sigma - 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe $s_1, \ldots, s_{\sigma-1}$ réflexions hyperplanes telles que $s \circ v = s_1 \circ \cdots \circ s_{\sigma-1}$, et donc $v = s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_{\sigma-1}$ est produit de σ réflexions hyperplanes.

Ce nombre est minimal : si $v = s_1 \circ \cdots \circ s_k$ est la composée de k réflexions hyperplanes, pour tout i, soit H_i l'hyperplan de s_i. Alors $\ker(v - \mathrm{id}_E) \supseteq \bigcap_{i=1}^k H_i$ et donc $\sigma = \operatorname{codim} \ker(v - \mathrm{id}_E) \leq \operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^k H_i \leq k$. □

Théorème 15. *Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$. Notons $Fix = \{M \in \mathcal{E},\ f(M) = M\}$ l'ensemble des points fixes de f et $\sigma = \operatorname{codim} \ker\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big)$.*

• *Si $Fix \neq \varnothing$, alors f est le produit de σ réflexions hyperplanes affines, dont l'intersection des hyperplans est Fix. De plus, ce nombre est minimal.*

• *Si $Fix = \varnothing$, alors f est produit de $\sigma + 2$ réflexions hyperplanes.*

Dans tous les cas, f est produit d'au plus $\dim \mathcal{E} + 1$ réflexions hyperplanes, et c'est optimal (dans le sens où il existe des isométries qui ne sont pas le produit de moins de $\dim \mathcal{E} + 1$ réflexions).

<u>*Démonstration.*</u>

• Si $Fix \neq \varnothing$, on applique le résultat obtenu dans le cas vectoriel. Si $A \in Fix$, nous avons vu que $\mathcal{O}(E)$ est en bijection avec $Is_A(\mathcal{E})$, l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ fixant le point A.

• Si $Fix = \varnothing$, d'après la décomposition en forme réduite, il existe une translation $t = t_{\vec{u}}$ non triviale et une isométrie $h \in Is_A(\mathcal{E})$ fixant un point A de $\mathcal{E}$ avec $f = t \circ h$.

Comme $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{h}$, d'après ce qui précède, il existe $s_1, \ldots, s_\sigma$ réflexions hyperplanes telles que $h = s_1 \circ \ldots \circ s_\sigma$ (et ce nombre est minimal pour h).

Une translation est le produit de deux réflexions hyperplanes. En effet, si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine orthogonal à $\vec{u}$ et $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{1}{2}\vec{u}$, si s est la réflexion d'hyperplan $\mathcal{H}$ et s' celle d'hyperplan $\mathcal{H}'$, $t_{\vec{u}} = s' \circ s$.

Ainsi, $f = s' \circ s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_\sigma$ est produit de $\sigma + 2$ réflexions hyperplanes.

Puisque si $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right) = \{0\}$, f admet un unique point fixe, si $Fix = \varnothing$, nécessairement $\sigma < n = \dim E$ et f est le produit d'au plus $(n+1)$ réflexions hyperplanes.

Par exemple en dimension 2, une symétrie glissée n'est pas le produit de moins de 3 réflexions (si elle pouvait s'écrire comme un produit de moins de trois réflexions, comme c'est un antidéplacement, elle serait nécessairement égale à une réflexion ; mais une symétrie glissée n'a pas de point fixe alors qu'une réflexion admet toute une droite de points fixes, c'est donc absurde). De même, un vissage en dimension 3 n'est pas le produit de moins de 4 réflexions : $\dim \mathcal{E} + 1$ est optimal. □

Corollaire 16. *Les réflexions hyperplanes engendrent $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ le groupe des isométries de $\mathcal{E}$.*

Question : Qu'en est-il du groupe des déplacements ? Les réflexions hyperplanes étant des antidéplacements, il faut les remplacer par des déplacements. C'est la notion de retournement.

Définition 17 (Retournements)**.** *Un* ***retournement*** *est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace affine de codimension 2 de $\mathcal{E}$. En particulier, c'est un déplacement.*

En dimension 2, un retournement est une symétrie centrale. Comme la composée de deux symétries centrales est une translation, le sous-groupe engendré par les retournements en dimension 2 ne contient pas les rotations.

En dimension 3, un retournement est une symétrie par rapport à une droite, ou symétrie axiale. Une rotation peut s'écrire comme le produit de deux symétries axiales, ainsi qu'une translation (les axes sont alors parallèles). Un vissage s'obtient alors immédiatement comme produit de 4 symétries axiales.

Proposition 18. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 3$. Soit $v \in SO(E)$. Notons $\sigma = \operatorname{codim} \ker(v - \mathrm{id}_E)$. Si $\ker(v - \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$, v est le produit de σ retournements, et ce nombre est minimal. Si $\ker(v - \mathrm{id}_E) = \{0\}$, v est produit d'au plus $(n-1)$ retournements.*

Dans tous les cas, v est produit d'au plus $(n-1)$ retournements.

Lemme 19. *Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E tels que $H_1^\perp \perp H_2^\perp$. Alors $s_{H_1} \circ s_{H_2} = s_{H_2} \circ s_{H_1} = s_{H_1 \cap H_2}$.*

<u>*Démonstration du lemme.*</u>

La condition d'orthogonalité implique que pour $i \neq j$, $H_i^\perp \subseteq H_j$. Ainsi, il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E avec $H_1 = Vect(e_1, \ldots, e_{n-1})$, $H_2 = Vect(e_2, \ldots, e_n)$, $e_1 \in H_1 \cap H_2^\perp$ et $e_n \in H_2 \cap H_1^\perp$. Dans cette base, la matrice de s_{H_1} s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et celle de s_{H_2} s'écrit

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui démontre le résultat par calcul matriciel. $\square$

<u>*Démonstration de la proposition.*</u>

• Cas où $\ker(v - \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.

Il existe donc une droite vectorielle $D \subseteq \ker(v - \mathrm{id}_E)$. Soit s la symétrie hyperplane d'hyperplan $D^\perp$.

D'après ce qui précède, il existe $s_1, \dots, s_{2\ell}$ des réflexions hyperplanes, où $2\ell = \sigma = \operatorname{codim} \ker(v - \mathrm{id}_E)$ telles que $v = s_1 \circ \dots \circ s_{2\ell}$.

Pour tout i, s_i est une réflexion d'hyperplan $D_i^\perp$ où D_i est une droite vectorielle. $D_i^\perp \supseteq \ker(v - \mathrm{id}_E) \supseteq D$ donc les droites D et D_i sont orthogonales. D'après le lemme, $s \circ s_i = s_i \circ s = s_{(D+D_i)^\perp} = r_i$ est un retournement.

Il vient $v = (s_1 \circ s) \circ (s \circ s_2) \circ \dots \circ (s_{2\ell-1} \circ s) \circ (s \circ s_\ell) = r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{2\ell}$ est une décomposition de v en produit de $2\ell = \sigma$ retournements.

• Cas où $\ker(v - \mathrm{id}_E) = \{0\}$.

Cela implique nécessairement que $n = \dim E$ est pair : avec les notations de la démonstration de la proposition 14, on a $p = 0$ donc $\dim E = q + 2r$, tandis que $1 = \det v = (-1)^q$.

Soit $x \in E$ unitaire. Par hypothèse, $v(x) \neq x$. Comme $n \geq 3$, il existe un hyperplan H contenant à la fois x et $v(x)$. Soit V l'orthogonal de la droite dirigée par $\big(v(x) - x\big)$ dans H. Comme V est un sous-espace de codimension 2 de E, $r = s_V$ est un retournement et comme précédemment, $r\big(v(x)\big) = x$.

En posant $v' = r \circ v$, $v' \in SO(E)$ et $v'(x) = x$, donc $\operatorname{codim} \ker(v' - \mathrm{id}_E) \leq n - 2$. Montrons qu'on a exactement $\operatorname{codim} \ker(v' - \mathrm{id}_E) = n - 2$.

Sinon, $\dim \ker(v' - \mathrm{id}_E) \geq 3$ et donc comme V est de codimension 2 dans E, il existe $y \neq 0$ tel que $y \in V \cap \ker(v' - \mathrm{id}_E)$. Mais c'est absurde car alors $r \circ v(y) = y$ et comme $y \in V$, $v(y) = r^2 \circ v(y) = r(y) = y$ donc $y \in \ker(v - \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.

Ainsi, $\operatorname{codim} \ker(v' - \mathrm{id}_E) = n - 2$ et $v' = r_1 \circ \dots \circ r_{n-2}$ où les r_i sont des retournements. On a bien alors $v = r \circ r_1 \circ \dots \circ r_{n-2}$: v est le produit de $n - 1$ retournements. $\square$

Théorème 20. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n \geq 3$.*

Si $f \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$ est un déplacement autre qu'une translation, alors f est le produit de ρ retournements, avec $\rho \leq \min(\sigma, n-1)$, où $\sigma = \operatorname{codim} \ker\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big)$.

Dès que $n \geq 3$, le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$ est engendré par les retournements.

<u>*Démonstration.*</u>

Soit Fix l'ensemble des points fixes de f.

• Si $Fix \neq \varnothing$, alors on se ramène comme précédemment au cas vectoriel et f est le produit de $\rho = \min(\sigma, n-1)$ retournements.

• Si $Fix = \varnothing$, on écrit $f = t_{\vec{u}} \circ h$ sous forme réduite. En décomposant t et h en produit de réflexions hyperplanes, on obtient $f = (s_{\mathcal{H}_1'} \circ s_{\mathcal{H}_2'}) \circ (s_{\mathcal{H}_1} \circ s_{\mathcal{H}_2} \circ \dots \circ s_{\mathcal{H}_\sigma})$. Comme $\vec{u} \in \ker\big(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\big) = \ker(\overrightarrow{h} - \mathrm{id}_E)$, si l'on considère les directions, $H_1'^\perp$ et $H_2'^\perp$ sont orthogonaux à $H_1^\perp$ et $H_2^\perp$. Ainsi, $f = (s_{\mathcal{H}_1'} \circ s_{\mathcal{H}_1}) \circ (s_{\mathcal{H}_2'} \circ s_{\mathcal{H}_2}) \circ (s_{\mathcal{H}_3} \circ \dots \circ s_{\mathcal{H}_\sigma}) = r_1 \circ r_2 \circ g$, avec $r_1 = s_{\mathcal{H}_1'} \circ s_{\mathcal{H}_1}$ et $r_2 = s_{\mathcal{H}_2'} \circ s_{\mathcal{H}_2}$ des retournements (car pour $i = 1$ et 2, $H_i + H_i' = E$ et donc $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_i'$ est un sous-espace affine de codimension 2) et $g = s_{\mathcal{H}_3} \circ \dots \circ s_{\mathcal{H}_\sigma}$. Comme $\ker\big(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}_E\big) \supseteq H_3 \cap \dots \cap H_\sigma$, $\operatorname{codim} \ker\big(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}_E\big) \leq \sigma - 2$. De plus, h admet un point fixe $A \in \mathcal{H}_1 \cap \dots \cap \mathcal{H}_\sigma \subseteq \mathcal{H}_3 \cap \dots \cap \mathcal{H}_\sigma$ et donc g admet aussi des points fixes. D'après le premier cas, g est alors produit d'au plus $(\sigma - 2)$ retournements, ce qui permet de conclure.

Comme une translation est le produit de deux retournements, ceci achève la démonstration du théorème. $\square$

5 Angles en géométrie

Les références pour ce paragraphe sont [F] et [B].

5.1 Comment définir un angle ?

Les angles sont utilisés en géométrie affine euclidienne, mais concernent en réalité les directions des sous-espaces affines considérés. Aussi nous plaçons-nous dans le cadre vectoriel.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geq 2$. On définit un **demi-sous espace vectoriel** de E comme l'intersection d'un sous-espace vectoriel avec un ensemble de la forme $\{x \in E,\, \varphi(x) \geq 0\}$, où φ est une forme linéaire de E^*.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels et des demi-sous espaces vectoriels de E. Le groupe linéaire $GL(E)$ agit sur $\mathcal{F}$ via l'action naturellement définie par $g \cdot F = g(F)$ si $g \in GL(E)$ et $F \in \mathcal{F}$. Les orbites sont uniquement déterminées par la dimension du sous-espace et par le fait qu'il soit ou non un demi-espace (c'est le théorème de la base incomplète !).

En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, l'action de $\mathcal{O}(E)$ et de $SO(E)$ par restriction de celle de $GL(E)$ sur $\mathcal{F}$ déterminent les mêmes orbites.

Que se passe-t-il à présent si l'on étudie les orbites de ces actions sur les couples d'éléments de $\mathcal{F}$? Comme on est en géométrie, on ne conservera que des couples dont les bords s'intersectent de manière «raisonnable» s'ils sont des demi-espaces. C'est la définition d'une figure. Un couple $(F, G) \in \mathcal{F}^2$ est une **figure** si le bord de l'un est contenu dans le bord de l'autre (avec la convention que le bord d'un sous-espace vectoriel est vide). Ainsi, $Fig = \{(F, G) \in \mathcal{F}^2,\, \partial F \subseteq \partial G \,\text{ou}\, \partial G \subseteq \partial F\}$. En pratique, on regarde les figures constituées par deux sous-espaces vectoriels ou deux demi-sous espaces vectoriels (par exemple pour considérer des angles de demi-droites).

Le groupe $GL(E)$ agit sur Fig par $g \cdot (F, G) = \big(g(F), g(G)\big)$. Les orbites de cette action pour les sous-espaces vectoriels sont caractérisées par $(\dim F, \dim G, \dim F \cap G)$. Par restriction, les sous-groupes $\mathcal{O}(E)$ et $SO(E)$ agissent encore sur Fig. Quelles sont les orbites ?

Définition 21 (Angles). *Soit $(F, G) \in Fig$. L'**angle non orienté** de (F, G) est l'orbite de (F, G) sous l'action de $\mathcal{O}(E)$.*

*L'**angle orienté** de (F, G) est l'orbite de (F, G) sous l'action de $SO(E)$.*

But : Caractériser les angles par des fonctions (à valeurs réelles ? continues ?) injectives sur une orbite ; ceci passe comme souvent par une recherche d'invariants.

5.2 Le cas des angles de (demi-)droites en dimension au moins égale à 3

Soient (D, D') deux droites de E et (Δ, Δ') deux demi-droites de E. Ce sont des éléments de Fig.

On définit $\overline{(D, D')} = \arccos \frac{|(x,x')|}{\|x\| \cdot \|x'\|} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour x un vecteur directeur de D et x' de D' (le résultat est indépendant du choix de ces vecteurs).

De même, si x et x' sont des vecteurs directeurs de Δ et Δ' (au sens évident où $\Delta = \mathbb{R}_+ x$ et $\Delta' = \mathbb{R}_+ x'$), on définit $\overline{(\Delta, \Delta')} = \arccos \frac{(x,x')}{\|x\| \cdot \|x'\|} \in [0, \pi]$

Proposition 22. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soient (D, D') et (D_1, D_1') quatre droites de E (respectivement (Δ, Δ') et (Δ_1, Δ_1') quatre demi-droites de E).*

- ***Angles non orientés :** les angles non orientés (D, D') et (D_1, D_1') coïncident si, et seulement si $\overline{(D, D')} = \overline{(D_1, D_1')}$. De même pour les demi-droites : les angles non orientés (Δ, Δ') et (Δ_1, Δ_1') coïncident si, et seulement si $\overline{(\Delta, \Delta')} = \overline{(\Delta_1, \Delta_1')}$.*

- ***Angles orientés :** ATTENTION si $n \geq 3$, alors les angles orientés (D, D') et (D_1, D_1') coïncident si, et seulement si $\overline{(D, D')} = \overline{(D_1, D_1')}$. De même pour les demi-droites : les angles orientés (Δ, Δ') et (Δ_1, Δ_1') coïncident si, et seulement si $\overline{(\Delta, \Delta')} = \overline{(\Delta_1, \Delta_1')}$.*

En particulier, on a toujours $(D, D') = (D', D)$ et $(\Delta, \Delta') = (\Delta', \Delta)$ si ces angles sont vus comme non-orientés, ou lorsque $\dim E \geq 3$.

ATTENTION : le résultat est faux en dimension 2 pour les angles orientés.

<u>*Démonstration.*</u>

La démonstration est faite dans le cas des droites, mais n'est pas très différente pour des demi-droites (cf [B]).

• **Cas des angles non orientés.**

Tout d'abord, remarquons que le réel $\overline{(D,D')}$ est constant sur les orbites sous l'action de $\mathcal{O}(E)$. En effet, si $g \in \mathcal{O}(E)$, comme g préserve le produit scalaire, $\overline{\big(g(D),g(D')\big)} = \overline{(D,D')}$.

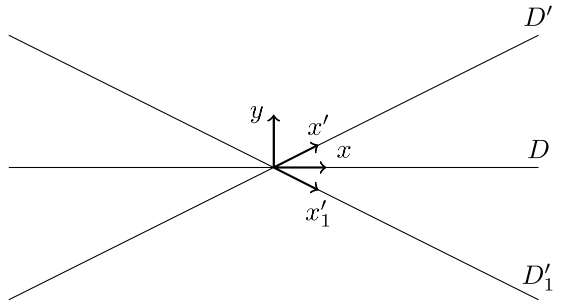
Soient x et x' des vecteurs directeurs unitaires de D et D', et x_1 et x_1' des vecteurs directeurs unitaires pour D_1 et D_1'. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe y et y_1 unitaires tels que (x,y) soit une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(D,D')$ et (x_1,y_1) soit une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(D_1,D_1')$. Il existe alors un élément $g \in \mathcal{O}(E)$ envoyant (x_1,y_1) sur (x,y).

On peut donc se ramener au cas où $\mathrm{Vect}(D_1,D_1') = \mathrm{Vect}(D,D')$ et $D_1 = D$.

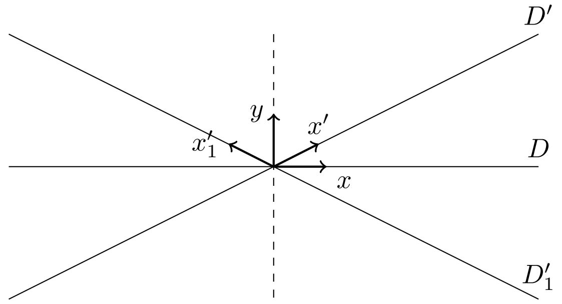
Ainsi, $x_1 = x$, $x' = (x',x)x + (x',y)y$ et $x_1' = (x_1',x)x + (x_1',y)y$. Or $\overline{(D,D')} = \overline{(D,D_1')}$, donc $|(x',x)| = |(x_1,x)|$ et $|(x',y)| = |(x_1,y)|$ puisque $(x',y)^2 = 1-(x',x)^2$. Il existe donc $(\epsilon_x,\epsilon_y) \in \{\pm 1\}$ avec $(x_1',x) = \epsilon_x(x',x)$ et $(x_1',y) = \epsilon_y(x',y)$. Il y a donc quatre cas à distinguer.

♢ Si $(\epsilon_x,\epsilon_y) \in \{(1,1),(-1,-1)\}$, $x_1' = x'$ ou $x_1' = -x'$. Dans ces deux cas, $D_1' = D'$ et les deux couples de droite sont bien dans la même orbite sous l'action de $\mathcal{O}(E)$.

♢ Si $\epsilon_x = 1$ et $\epsilon_y = -1$, soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite D. Alors $x_1' = s(x')$ et $D_1' = s(D')$, $D = s(D)$. Ainsi, les deux couples de droites sont dans la même orbite.



♢ Si $\epsilon_x = -1$ et $\epsilon_y = 1$, le raisonnement est identique avec s' la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par y.



Ainsi, dans tous les cas, les couples (D,D') et (D_1,D_1') sont dans la même orbite sous l'action de $\mathcal{O}(E)$, ce qui montre le résultat pour les angles non orientés.

• **Cas des angles orientés lorsque** $\dim E \geq 3$.

En reprenant le raisonnement précédent, on peut de plus choisir $g \in SO(E)$ tel que $g(x_1) = x$ et $g\big(\mathrm{Vect}(D_1,D_1')\big) = \mathrm{Vect}(D,D')$, donc on peut supposer que $x_1 = x$. Si de plus $x_1' = \pm x'$, alors $D_1' = D'$ et il n'y a rien à prouver.

Sinon, puisque $\dim E \geq 3$, si l'on considère la symétrie orthogonale dans le plan engendré par D et D' qui envoie D_1' sur D', on peut la prolonger en un retournement de E et donc les couples de droites (D,D') et (D_1,D_1') sont bien dans la même orbite sous l'action de $SO(E)$. Ceci devient donc faux lorsque $\dim E = 2$ puisque l'on ne peut pas prolonger la réflexion en retournement. □

En toute dimension, l'ensemble des demi-droites de E s'identifie naturellement à l'ensemble des vecteurs unitaires, ou sphère unité, de E, soit $\mathbb{S}(E) = \{x \in E, \|x\| = 1\}$. Dès que $\dim E \geq 3$, l'angle orienté entre deux vecteurs x et x' est caractérisé par $\arccos(x, x')$.

Ainsi, si (x, x') et $(y, y') \in \mathbb{S}(E)^2$, il existe $g \in SO(E)$ tel que $g(x) = y$ et $g(x') = y'$ si, et seulement si $(x, x') = (y, y')$, ce qui équivaut encore à $\|x - x'\| = \|y - y'\|$ puisque tous les vecteurs sont de norme 1. Cette propriété est utilisée par D. Perrin lors de la démonstration de la simplicité de SO_3 [P, p. 149].

Remarque 23. *Les angles entre droites permettent aussi de caractériser les angles entre hyperplans de E : (D, D') et (D_1, D_1') sont dans la même orbite sous l'action de $\mathcal{O}(E)$ (respectivement $SO(E)$) si, et seulement si $(D^\perp, D'^\perp)$ et $(D_1^\perp, D_1'^\perp)$ le sont. Ainsi peut-on caractériser les angles non orientés et les angles orientés d'hyperplans par leur mesure dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. En particulier, cela permet de définir les angles entre plans de l'espace euclidien.*

5.3 Angles du plan

5.3.1 Cas des demi-droites

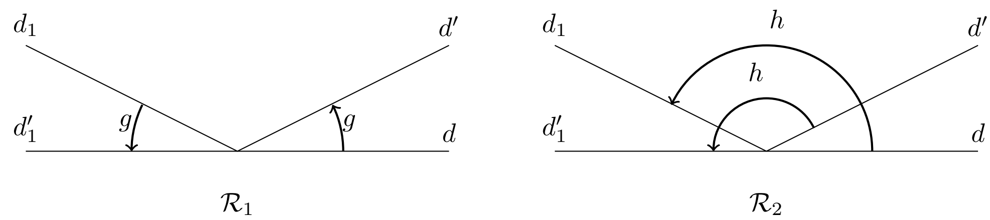
On sait que l'ensemble X des demi-droites de $\mathbb{R}^2$ s'identifie au cercle unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^2$, et le groupe $G = SO_2$ agit sur X de façon simple et transitive. (La transitivité est immédiate, pour la simplicité, si $g \in SO_2$ est telle qu'il existe $v \in \mathbb{S}^1$ avec $g(v) = v$, alors $+1$ est valeur propre de g et donc $g = \mathrm{id}$.)

Cette action détermine deux relations d'équivalence.

• La première est associée à $\Phi : X \times X \to G$ qui à un couple (d, d') de demi-droites associe l'unique rotation $g \in G$ telle que $g(d) = d'$. Soit $\mathcal{R}_1$ la relation d'équivalence associée à Φ. Par définition, $(d, d')\mathcal{R}_1(d_1, d_1')$ si, et seulement s'il existe une rotation $g \in SO_2$ telle que $d' = g(d)$ et $d_1' = g(d_1)$.

Comme dans le chapitre de géométrie affine, Φ permet de munir l'ensemble ${X \times X}/{\mathcal{R}_1}$ d'une structure de groupe isomorphe à G par transfert de structure.

• D'autre part, l'action de G sur X fournit une action de G sur $X \times X$ définie par $g \cdot (d, d') = \big(g(d), g(d')\big)$. Soit $\mathcal{R}_2$ la relation d'équivalence associée. Par définition, (d, d') et (d_1, d_1') sont dans la même orbite si, et seulement si ces couples de demi-droites forment le même angle orienté.



Définition 24. *Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations d'équivalence sur un ensemble Y, on dit que $\mathcal{R}_1$ est **plus fine** que $\mathcal{R}_2$ si pour tous x et $y \in Y$ tels que $x\mathcal{R}_1 y$, noté $\mathcal{R}_1 \implies \mathcal{R}_2$, alors $x\mathcal{R}_2 y$.*

Ceci équivaut à dire que le graphe de $\mathcal{R}_1$ peut se plonger comme un sous-graphe du graphe de $\mathcal{R}_2$, ou encore que si pour $i = 1$ et 2, $\pi_i : Y \to {Y}/{\mathcal{R}_i}$, π_2 se factorise par π_1. Cette relation sur les relations d'équivalence de Y est une relation d'ordre.

Lemme 25. *Soit G un groupe agissant simplement et transitivement sur un ensemble X, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ les deux relations d'équivalence sur $X \times X$ définies plus haut. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{R}_2 \implies \mathcal{R}_1$.
(ii) $\mathcal{R}_1 \implies \mathcal{R}_2$.
(iii) $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.
(iv) Le groupe G est commutatif.

Démonstration.

$(ii) \implies (iv)$. Soient g et $h \in G$, $x \in X$.

On a $\big(x, g(x)\big)\mathcal{R}_1\big(h(x), gh(x)\big)$, donc par hypothèse aussi $\big(x, g(x)\big)\mathcal{R}_2\big(h(x), gh(x)\big)$. Il existe donc $k \in G$ tel que $h(x) = k(x)$ et $gh(x) = kg(x)$. Comme l'action est simple, $k = h$ et $gh = hg$, montrant que G est abélien.

$(iv) \implies (ii)$. Supposons G abélien. Si $(x, y)\mathcal{R}_1(x', y')$, il existe $g \in G$ tel que $y = g(x)$ et $y' = g(x')$. Comme l'action est transitive, il existe en outre $h \in G$ tel que $x' = h(x)$. Ainsi, $y' = g(x') = gh(x) = hg(x) = h(y)$ puisque le groupe est abélien. Ceci montre bien que $(x, y)\mathcal{R}_2(x', y')$.

Pour $(i) \implies (iv)$ et $(iv) \implies (i)$, on applique les mêmes idées. Enfin, comme la relation «être plus fine» est une relation d'ordre, (i) et (ii) impliquent (iii). □

Comme dans le cadre des angles, le groupe étudié est SO_2, commutatif, les propriétés du lemme sont vérifiées. Ainsi, si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des angles orientés de demi-droites du plan, par définition $\mathcal{A} = X \times X/\mathcal{R}_2 \simeq X \times X/\mathcal{R}_1 \simeq SO_2$.

La bijection $\mathcal{A} \to SO_2$ est de façon explicite l'application qui au couple (d, d') de demi-droites du plan associe l'unique rotation $g \in SO_2$ telle que $d' = g(d)$, notée $\widehat{(d, d')}$.

Comme une rotation $g \in SO_2$ est uniquement caractérisée par un angle θ défini modulo 2π tel que la matrice de g dans une base orthonormée directe est $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on identifie souvent $g = \widehat{(d, d')}$ et l'angle θ défini modulo 2π. Ainsi, il n'y a pas besoin d'orienter l'espace $\mathbb{R}^2$ pour parler d'angles orientés de demi-droites, par contre pour les mesurer dans $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ il faut choisir une orientation de l'espace $\mathbb{R}^2$ pour considérer la matrice de g dans une base orthonormée directe. Par exemple, le plan complexe est isomorphe au corps de rupture $\mathbb{R}[X]/_{(X^2+1)}$. Cette écriture ne permet pas de distinguer les deux racines du polynôme $X^2 + 1$. Choisir laquelle sera i revient à choisir une orientation du plan complexe.

La loi de groupe sur $\mathcal{A}$ héritée de celle de SO_2 est souvent notée $+$, et est commutative. La structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}$ conduit à un certain nombre de propriétés utiles.

(i) Relation de Chasles : $\widehat{(d_1, d_2)} + \widehat{(d_2, d_3)} = \widehat{(d_1, d_3)}$.

(ii) L'angle $\widehat{(d, d')}$ est nul si, et seulement si $d = d'$.

(iii) $\widehat{(d', d)} = -\widehat{(d, d')}$.

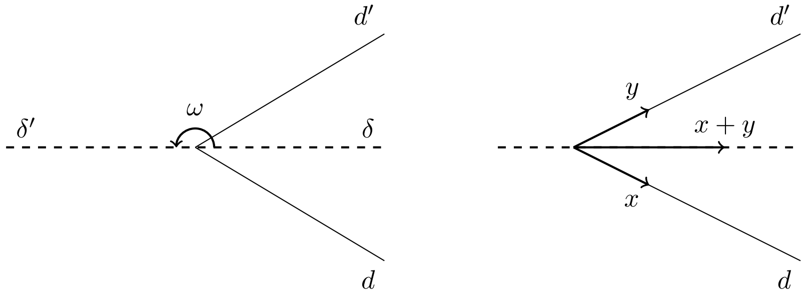
(iv) Règle du parallélogramme : $\widehat{(d, d')} = \widehat{(d_1, d_1')}$ si, et seulement si $\widehat{(d, d_1)} = \widehat{(d', d_1')}$. Ceci équivaut encore à dire qu'il existe une demi-droite δ telle que $\widehat{(\delta, d)} + \widehat{(\delta, d')} = \widehat{(\delta, d_1)} + \widehat{(\delta, d_1')}$, ou encore que cette dernière propriété est vraie pour toute demi-droite δ.

(v) Si $\sigma \in \mathcal{O}_2^-$, $(\widehat{\sigma(d), \sigma(d')}) = -\widehat{(d, d')}$.

La seule propriété qui n'est pas immédiate est la propriété (v). Soit $r \in SO_2$ la rotation telle que $r(d) = d'$. La rotation qui envoie $\sigma(d)$ sur $\sigma(d')$ est $\sigma \circ r \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ r \circ \sigma$ puisque comme $\sigma \in \mathcal{O}_2^-$, $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Or également, $\sigma \circ r \in \mathcal{O}_2^-$. Ainsi, $(\sigma \circ r)^2 = \sigma \circ r \circ \sigma \circ r = \mathrm{id}$ et donc $\sigma \circ r \circ \sigma = r^{-1}$. Cela signifie bien que $\big(\widehat{\sigma(d), \sigma(d')}\big) = -\widehat{(d, d')}$.

Définition 26. *Si d et d' sont deux demi-droites, une* ***bissectrice*** *de $\widehat{(d, d')}$ est une demi-droite δ telle que $\widehat{(d, \delta)} = \widehat{(\delta, d')}$.*

Remarque 27. *Dire que δ est la bissectrice de $\widehat{(d, d')}$ équivaut à dire que δ vérifie l'équation $\widehat{(d, d')} = 2\widehat{(d, \delta)}$, ou encore que si s_δ est la réflexion orthogonale d'axe contenant δ, $s_\delta(d) = d'$.*



En effet, $\widehat{\big(d, s_\delta(d)\big)} = \widehat{(d,\delta)} + \widehat{\big(\delta, s_\delta(d)\big)} = \widehat{(d,\delta)} + \widehat{\big(s_\delta(\delta), s_\delta(d)\big)} = \widehat{(d,\delta)} - \widehat{(\delta,d)} = 2\widehat{(d,\delta)}$.

Ainsi, chercher une bissectrice, c'est résoudre dans $\mathcal{A}$ l'équation $2x = \alpha$, ou encore l'équation $h^2 = g$ dans SO_2.

Comme ces deux groupes sont abéliens, s'il existe une solution x_0, les autres solutions sont toutes de la forme $x_0 + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation $2y = 0$. Dans SO_2, cette équation se réécrit $h^2 = \mathrm{id}$, donc h est une réflexion orthogonale, et comme $h \in SO_2$, $h = \pm id$. La solution dans $\mathcal{A}$ associée à $h = -\mathrm{id}$ dans SO_2 est notée ω et appelée l'**angle plat**. Ainsi, s'il existe une bissectrice δ de $\widehat{(d,d')}$, l'autre est $-\delta$ et l'angle $\widehat{(\delta,-\delta)}$ est égal à ω.

Pour montrer l'existence, il suffit de trouver une réflexion orthogonale s telle que $s(d) = d'$. Or, si $d = \mathbb{R}_+ x$ et $d' = \mathbb{R}_+ y$ avec x et y unitaires, la réflexion s par rapport à la droite dirigée par $x+y$ vérifie bien $s(x) = y$ et donc $s(d) = d'$.

5.3.2 Cas des droites

L'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ s'identifie à $P^1(\mathbb{R})$, la droite projective réelle. On peut aussi décrire $P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 / x \sim -x$, le cercle quotienté par la relation d'antipodie. L'action reste transitive, mais n'est plus simple car $-\mathrm{id}$ agit aussi trivialement sur $P^1(\mathbb{R})$.

Si $\varphi : SO_2 \to \mathfrak{S}_{P^1(\mathbb{R})}$ est le morphisme définissant l'action de SO_2, son noyau est l'ensemble des éléments $g \in SO_2$ tels que pour tout $x \in P^1(\mathbb{R})$, $g(x) = x$. Comme un endomorphisme laissant toute droite globalement invariante est une homothétie, on en déduit que $\ker \varphi = \{\pm \mathrm{id}\}$. De plus, comme SO_2 est abélien, pour tout point $x \in P^1(\mathbb{R})$, le stabilisateur de x est également $\{\pm \mathrm{id}\}$.

En posant $PSO_2 = SO_2 / \{\pm \mathrm{id}\}$, ce groupe est encore abélien et agit sur $P^1(\mathbb{R})$ de façon simple et transitive. Le même raisonnement qu'en 5.3.1 montre alors que si $\widetilde{\mathcal{A}}$ est l'ensemble des angles orientés des droites du plan, $\widetilde{\mathcal{A}}$ est en bijection avec PSO_2. Pour tout couple de droites (D, D') du plan, il existe un unique élément $g \in PSO_2$ tel que $g(D) = D'$.

Ainsi, les raisonnements et résultats pour les angles orientés de demi-droites s'adaptent dans le cas des angles orientés de droites. Notamment, on a existence de deux bissectrices, orthogonales.

5.4 Les similitudes

Une similitudes conserve les angles (non orientés lorsque la dimension de l'espace est 2), mais dilate les longueurs. Cela paraît naturel de considérer ces transformations car dans notre espace physique il n'y a pas de longueur unité bien définie et qu'il faudrait préserver. Plutôt que de conserver les longueurs, il paraît plus naturel de conserver seulement les *rapports* entre les longueurs.

Définition 28 (Similitudes vectorielles)**.** *Soit $v \in GL(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. L'application v est appelée* ***similitude*** *de* ***rapport*** *$\mu > 0$ si pour tout $x \in E$, $\|v(x)\| = \mu\|x\|$.*

Le groupe des similitudes est noté $GO(E)$, c'est un sous-groupe de $GL(E)$. On note $GO^+(E) = GO(E) \cap GL^+(E)$ le groupe des ***similitudes directes*** *et $GO^-(E) = GO(E) \cap GL^-(E)$ l'ensemble des* ***similitudes indirectes****.*

Une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est une similitude de rapport $|\lambda|$. D'autre part, si $v \in GO(E)$ est de rapport μ, alors en posant $g = \mu^{-1} v$, $g \in O(E)$ est une isométrie et $v = g \circ (\mu \cdot \mathrm{id}_E) = (\mu \cdot \mathrm{id}_E) \circ g$. Ainsi le groupe $GO(E)$ est isomorphe au produit direct $O(E) \times \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 29. (i) *Les similitudes conservent les angles non orientés de droites et de demi-droites, ainsi que les angles orientés lorsque* $n = \dim(E) \geq 3$.

(ii) *Lorsque* $\dim(E) = 2$, *les similitudes directes conservent les angles orientés de droites et de demi-droites, les similitudes indirectes les renversent.*

(iii) *Les similitudes conservent l'orthogonalité : si* $v \in GO(E)$ *et* D *et* D' *sont deux droites orthogonales, alors* $v(D)$ *et* $v(D')$ *sont orthogonales.*

(iv) *Réciproquement, si* $n = \dim(E) \geq 2$ *et* $v \in GL(E)$ *conserve l'orthogonalité des droites, alors* v *est une similitude.*

Démonstration.

Seul le point (iv) n'est pas une conséquence immédiate de la décomposition en produit direct $GO(E) \simeq O(E) \times \mathbb{R}_+^*$.

Soit donc $v \in GL(E)$ conservant l'orthogonalité. Cela signifie que pour tous x et $y \in E$ tels que $(x, y) = 0$, $\big(v(x), v(y)\big) = 0$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ fixé. La forme linéaire $\varphi_x : y \mapsto \big(v(x), v(y)\big)$ s'annule sur l'hyperplan $x^\perp$. Par dualité, cela implique qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi_x = \lambda_x x^*$ où $x^* : y \mapsto (x, y)$; en effet, si $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de $H = x^\perp$, $(e_1, \ldots, e_{n-1}, x)$ est une base de E et donc $(e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*, x^*)$ est une base de E^* et les $(n-1)$ premières coordonnées de φ_x sont nulles sur cette base.)

Ainsi, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi_x = \lambda_x x^*$. Montrons que ce réel est indépendant de x.

Si x et $x' \in E$ sont linéairement indépendants, $\big(v(x+x'), v(y)\big) = \lambda_{x+x'}(x+x', y) = \big(v(x), v(y)\big) + \big(v(x'), v(y)\big) = \lambda_x(x, y) + \lambda_{x'}(x', y)$, et donc $(\lambda_{x+x'} - \lambda_x)x^* + (\lambda_{x+x'} - \lambda_{x'})x'^* = 0$. Comme les formes linéaires x^* et x'^* sont linéairement indépendantes, $\lambda_{x+x'} = \lambda_x = \lambda_{x'} = \lambda$. Ainsi v est une similitude, de rapport λ. □

Proposition et Définition 30 (Similitudes affines)**.** *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace affine euclidien de dimension* $n \geq 2$ *et* $f : \mathcal{E} \to E$ *une application non constante telle que pour tous points* $(M, N, M', N') \in \mathcal{E}^4$, *si* $M \neq N$ *et* $f(M) \neq f(N)$, *alors* $f(M')f(N')/f(M)f(N) = M'N'/MN$ *(autrement dit* f *préserve les rapports des longueurs).*

Cela équivaut à dire que f *est une application affine de* $\mathcal{E}$ *et que* $\overrightarrow{f}$ *est une similitude vectorielle.*

Dans ce cas, f *est appelée* ***similitude affine****. Son rapport est celui de* $\overrightarrow{f}$. *C'est une* ***similitude directe*** *si* $\overrightarrow{f} \in GO^+(E)$, ***indirecte*** *sinon.*

Nous noterons $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$, $\mathcal{S}im^+(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}im^-(\mathcal{E})$ les groupes des similitudes et similitudes directes, et l'ensemble des similitudes indirectes.

Démonstration.

Si f est non constante, il existe $A \neq B$ tels que $f(A) \neq f(B)$. Alors pour tout autre couple de points $(M, N) \in \mathcal{E}^2$, $f(M)f(N) = \big(f(A)f(B)/AB\big) \cdot MN$. Ainsi, en posant $\mu = \big(f(A)f(B)/AB\big) \in \mathbb{R}_+^*$, pour tous points M et $N \in \mathcal{E}$, $f(M)f(N) = \mu MN$, et f est bijective. Si h est une homothétie de rapport μ^{-1}, $h \circ f$ est une isométrie de $\mathcal{E}$, et donc f est affine et $\overrightarrow{f} \in GO(E)$ est une similitude vectorielle (de rapport μ). □

Le sous-groupe des dilatations (les homothéties et translations) et celui des translations sont distingués dans le groupe des similitudes. De plus, on a comme pour le groupe affine une structure de produit semi-direct : le groupe des similitudes affines est isomorphe au produit semi-direct $E \rtimes GO(E)$, où E correspond au sous-groupe des translations. Si A est un point de $\mathcal{E}$, une section est donnée par l'application qui à $v \in GO(E)$ associe la similitude affine f telle que $f(A) = A$ et $\overrightarrow{f} = v$.

L'ensemble des similitudes de rapport 1 est exactement l'ensemble des isométries, et c'est aussi un sous-groupe distingué. Cela correspond à la suite exacte $\{1\} \to \mathcal{I}s(\mathcal{E}) \to Sim(\mathcal{E}) \to (\mathbb{R}_+^*, \times) \to \{1\}$. Un point $A \in \mathcal{E}$ fournit une section via l'application qui à $\mu > 0$ associe l'homothétie de centre A et de rapport μ.

Proposition 31. *Soit* $f \in \mathcal{S}im(\mathcal{E})$.

Si f n'est pas une isométrie, alors f admet un unique point fixe.

Réciproquement, si f admet un unique point fixe A, il existe un unique couple (h, g) où h une homothétie de rapport positif et g une isométrie avec $f = h \circ g = g \circ h$. De plus, h est l'homothétie de centre A et de rapport μ le rapport de f.

<u>*Démonstration.*</u>

Si f n'est pas une isométrie, alors $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E\right) = \{0\}$ (car $\overrightarrow{f}$ est une similitude vectorielle de rapport $\mu > 0$, et $\mu \neq 1$). Par suite f admet un unique point fixe.

Une autre démonstration est de considérer $\mu > 0$ le rapport de f. Si f n'est pas une isométrie, $\mu \neq 1$. Si $\mu < 1$, f est une application contractante de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, $\mathbb{R}$-espace métrique complet, et donc f admet un unique point fixe. Si $\mu > 1$, f^{-1} est contractante.

Pour montrer la réciproque, si A est l'unique point fixe de f, en posant h l'homothétie de centre A et de rapport μ, $g = h^{-1} \circ f$ est une isométrie et $f = h \circ g$. Comme f et h^{-1} fixent A, g fixe également A et donc g et h commutent si, et seulement si $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ commutent, ce qui est le cas puisque $\overrightarrow{h} = \mu \cdot \mathrm{id}_E \in Z\big(GL(E)\big)$.

Si $f = h' \circ g' = g' \circ h'$ est une autre décomposition de f en une homothétie de rapport positif et une isométrie, nécessairement le rapport de h' est μ. Soit A' le centre de h'. Alors $g' \circ h' \circ g'^{-1}$ est l'homothétie de rapport μ et de centre $g'(A')$. Comme $g' \circ h' \circ g'^{-1} = h'$, $g'(A') = A'$ et A' est aussi un point fixe de g'. Par suite, A' est aussi un point fixe de $f = h' \circ g'$ et donc $A' = A$. Finalement $h' = h$ puisque ces deux homothéties ont même centre et même rapport, et donc $g' = g$, d'où l'unicité d'une telle décomposition. $\square$

Exemple : En identifiant le plan affine euclidien réel à $\mathbb{C}$, une similitude directe est une application de la forme $f : z \mapsto az + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Si $a = 1$, c'est une translation. Sinon, f admet un unique point fixe d'affixe $\omega = b/(1 - a)$ et c'est la composée de l'homothétie de centre ω et de rapport $|a|$ avec la rotation de centre ω et d'angle $\arg(a)$.

Les similitudes indirectes sont de la forme $f : z \mapsto a\bar{z} + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Si $|a| = 1$, c'est une réflexion orthogonale ou une symétrie glissée. Si $|a| \neq 1$, f admet un unique point fixe, qui est aussi celui de la similitude directe f^2, d'affixe $\omega = (a\bar{b} + b)/(1 - |a|^2)$; f est alors la composée de l'homothétie de centre ω et de rapport $|a|$ et d'une symétrie ou symétrie glissée dont l'axe passe par ω.

Application : si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant z, une fonction $f\ U \to \mathbb{C}$ est holomorphe en z si, et seulement si elle est $\mathbb{R}$-différentiable, et sa différentielle en z est une similitude directe.

Références

[B] Marcel Berger. *Géométrie. Vol. 2.* CEDIC, Paris, 1977. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères. [Euclidian spaces, triangles, circles and spheres].

[F] Jean Frenkel. *Géométrie pour l'élève-professeur. 2e éd. rev. et corr.* 1977.

[P] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*, volume 18 of *Collection de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles.* École Normale Supérieure de Jeunes Filles, Paris, 1982. Edité en collaboration avec Marc Cabanes et Martine Duchene.

[RDO] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 2.* Masson, Paris, 1979. Algèbre et applications à la géométrie.

[T] Patrice Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson, Paris, second edition, 1997.