

Universidad Autónoma de Guerrero  
Unidad Académica de Matemáticas  
Centro de Investigación en  
Matemática Educativa



*La combinatoria en la  
educación primaria: una  
alternativa de enseñanza.*

**Tesis que presenta:**

Miriam Natividad Ramos Hernández

**Bajo la dirección de:**

M. C. Erika Suguey Maldonado Mejía

Dr. José Marcos López Mojica

Chilpancingo, Guerrero.

Enero de 2016







Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** que por medio del programa de becas me permitió desarrollar mis estudios de maestría.

No de becario: 298516



## **Agradecimiento...**

En la vida nos enfrentamos a una infinidad de retos, uno de ellos es nuestra educación.

El haber ingresado a la maestría hizo darme cuenta que más allá de ser un reto, es la base no sólo por el conocimiento del campo en que me desenvuelvo, sino para lo que de aquí en adelante concierne a mi vida.

Por ello es que agradezco a cada una de las personas que han destinado tiempo a enseñarme nuevas cosas, que indudablemente me servirán para toda la vida, a esas personas que estuvieron presentes a lo largo de estos dos años y presenciaron el desarrollo y evolución de mi tesis, les agradezco con creces.



## ÍNDICE

	Págs.
<b>Capítulo 1.</b> Planteamiento del problema, objetivo y antecedentes	1
1. Planteamiento del problema, objetivo y antecedentes	2
1.1.Planteamiento del problema y objetivo	3
1.2.Justificación	6
1.3.Antecedentes	7
1.3.1. Razonamiento combinatorio	7
1.3.2. Resolución de problemas combinatorios	10
1.3.2.1.Estrategias	10
1.3.2.2.Dificultades	12
1.4.Comentarios finales	13
<b>Capítulo 2.</b> Elementos teóricos y método	
2.1.Elementos teóricos	15
2.1.1. Eje epistemológico	15
2.1.1.1.Teoría combinatoria	15
2.1.1.2.La combinatoria: una de las diez ideas fundamentales	18
2.1.2. Eje cognitivo	19
2.1.2.1.Origen de la idea de azar en el niño en relación a las operaciones combinatorias	19
2.1.2.2.El efecto de la instrucción y las fuentes intuitivas en el razonamiento combinatorio	19
2.1.3. Eje social	20
2.1.3.1.Conocimiento y enseñanza: interacción entre la práctica de enseñar y concepciones teóricas	21
2.2.Método	22
<b>Capítulo 3.</b> La combinatoria en la propuesta institucional	
3. La combinatoria en la propuesta institucional	26
3.1.La formación del docente de Educación Primaria	26

3.1.1. Plan de estudios 1997	27
3.1.1.1. Programas de estudio	29
3.1.1.2. Matemáticas y su enseñanza I y II	29
3.1.1.3. Materiales del curso	32
3.1.2. Reforma curricular de la Educación Normal 2012	34
3.1.2.1. Procesamiento de la información	36
3.2. Formación del estudiante de Educación básica primaria	38
3.2.1. Programas de estudio	39
3.2.2. Desafíos matemáticos. Libros para el alumno	43
3.2.2.1. Segundo grado	44
3.2.2.2. Cuarto grado	45
3.2.3. Desafíos matemáticos. Libros de texto para el maestro	46
3.3. Comentarios finales	47
<b>Capítulo 4. Alternativa de enseñanza para la combinatoria en la escuela primaria.</b>	
4. Alternativa de enseñanza para la combinatoria en la escuela primaria	53
4.1. Consideraciones previas	53
4.2. Descripción de las actividades	55
4.2.1. Parejas de baile	55
4.2.2. Hora de receso	57
4.2.3. Torneo de fútbol	59
4.2.4. Comité escolar	60
4.2.5. La clausura	62
4.3. Comentarios sobre las actividades	63
<b>Capítulo 5. Conclusiones</b>	
5. Conclusiones	65
<b>Referencias bibliográficas</b>	68
<b>Anexos</b>	
<b>Anexo A</b>	69
<b>Anexo B</b>	71
<b>Anexo C</b>	72
<b>Anexo D</b>	73







## **Introducción**

La combinatoria es un campo de la matemática utilizado frecuentemente por diversas áreas de conocimiento, pues representa la base que permite dar solución a problemas que tienen que ver con la probabilidad. De ahí su importancia y que sea un componente necesario para el desarrollo de un pensamiento formal y por ende de la formación integral de un individuo. (Piaget e Inhelder, 1955).

Sin embargo el desarrollo de un correcto razonamiento combinatorio no es una tarea sencilla para quienes se encargan de su enseñanza, investigaciones como Roa (2000), Morales y Frisancho (2013}, English (2007), entre otras, señalan que la enseñanza de la combinatoria es utilizada sólo para ejercitar la aplicación de algoritmos, esto por ser considerada un campo de la matemática complicado e incluso, innecesario.

Dadas las diversas dificultades que la enseñanza-aprendizaje que este tópico estocástico genera en los estudiantes, resulta interesante que las Investigaciones que en torno a esta problemática se han desarrollado son relativamente escasas en comparación con otras ramas de la matemática, esto pese a una gran lista de razones que sugieren la necesidad de formar ciudadanos con un pensamiento crítico avanzado, para lo que se plantea la enseñanza de la probabilidad en general desde la educación básica partiendo de un plano intuitivo, hasta el nivel superior y dándole continuidad hasta aterrizar en un plano formal (Heitele, 1975).

Cabe señalar que los estudios realizados han enfatizado en indagar acerca de aspectos como el razonamiento, la resolución de problemas, errores y dificultades pero en estudiantes de niveles educativos superiores, siendo que varios de los problemas que en la edad adulta se presentan respecto a este contenido pueden abordados e incluso evitarse mediante una adecuada instrucción desde la educación básica (Heitele, 1975; Fischbein, 1975).

Por lo anterior es que nos hemos interesado por investigar cómo es que se presenta el contenido de la combinatoria para la formación del docente y en su quehacer diario. Para ello se realizó el análisis de la propuesta institucional bajo la que se forma al futuro docente y de la educación primaria, para así plantear una propuesta de enseñanza en la que se consideraron elementos propuestos propiamente para la enseñanza de la probabilidad (Steinbring, 2005).

Las actividades que se proponen son actividades alternas a las que se incluyen en los libro de texto, en ellas se plantea el uso de situaciones de contexto más cercanas a la realidad de los estudiantes y así captar su interés para dar solución a los problemas.

El estudio está organizada en cinco capítulos. En el primero de ellos se presenta a grosso modo la problemática que gira en torno a la enseñanza-aprendizaje de la combinatoria y se define la pregunta central a la que atiende nuestra investigación. Se presentan también algunos estudios que se han realizado acerca de la combinatoria, lo cuales se clasifican de acuerdo al interés por el que fueron desarrollados (razonamiento, resolución de problemas, etc).

En el segundo capítulo se describen los elementos teóricos y el método que se siguió para el desarrollo de la investigación. De los elementos teóricos se consideró el programa de investigación desarrollado por Ojeda (1994) en la que se interrelacionan tres ejes rectores: eje epistemológico, el eje cognitivo y el eje social.

Respecto al método se presentan los criterios de análisis que se siguieron para el análisis de los planes y programas de estudio así como de los libros de texto. Lo que nos permitió identificar el momento en que se propone el estudio de la combinatoria y la forma en como se plantea su tratamiento.

El capítulo tres corresponde al análisis de las propuestas institucionales, de la formación del profesor y de la escuela primaria. Para llevar a cabo el análisis se consideró la célula de análisis de Ojeda (2006) que comprende cinco criterios: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos empleados para organizar y tratar datos, tipos de situaciones planteadas para su enseñanza y términos utilizados para hacer referencia a conceptos estocásticos.

En el capítulo cuatro y como resultado de la revisión, se diseñaron cinco actividades en las que trabajan los principios básicos de conteo (aditivo y multiplicativo) y las técnicas de conteo (variación, permutación y combinación). En las actividades de plantea el uso de situaciones contextuales más cercanas a la realidad del niño y se enfatiza en el uso de material concreto por la edad de los niños en la que se planea sean resueltos.

Finalmente, el capítulo cinco se presentan las conclusiones del trabajo, en las que se indica, de acuerdo a la revisión realizada, que es limitado el tratamiento que de la combinatoria se

propone para la formación del futuro profesor. Siéndolo más aún en la educación básica pues ese identificó la ausencia de la combinatoria es este nivel de estudio, más bien, las dos lecciones que en segundo y cuarto grado se tratan, plantean un modo trabajo determinista al enfocarse sólo en la ejercitación de las operaciones aritméticas. De ahí la necesidad de proponer una alternativa de enseñanza que contemple algunas consideraciones como apoyo para el profesor.



# Capítulo 1

Planteamiento del  
problema, objetivo y  
antecedentes

## **1. Planteamiento del problema, objetivo y antecedentes.**

De acuerdo con Shulman (2005), para lograr el objetivo final de la enseñanza, es necesario que el docente cuente con conocimiento del contenido que va a enseñar y sepa además cómo enseñarlo, pues el proceso de enseñanza inicia bajo el supuesto de que el docente comprende lo que otros no, los estudiantes en este caso. Sin embargo, en lo que a contenido de la estadística y la probabilidad se refiere, estudios como el realizado por Serrado, Azcárate y Cardeñoso (2006) reportan que la mayoría de los docentes evitan su enseñanza debido a que lo consideran un contenido sin importancia y uno de los principales causantes de dificultades para el aprendizaje de los estudiantes; o bien, es omitido por la falta de preparación del docente mismo. Este resultado se ve reforzado con lo que reportan Inzunza y Guzmán (2011), que es frecuente que los profesores se refieran a la probabilidad como el área que resulta más difícil de enseñar, por lo que en determinadas ocasiones deciden omitir su enseñanza.

Sin embargo, de acuerdo con Bonilla (2011), el desarrollo del pensamiento probabilístico permitirá al estudiante en su vida futura, tomar decisiones en las que interviene de alguna manera el azar y la incertidumbre, este tipo de razonamiento tiene su base en el razonamiento combinatorio, pues como lo indica Roa (2000, en Bonilla, 2011), son diversas las investigaciones que reportan que las dificultades o sesgos que presentan las personas en edad adulta en su razonamiento probabilístico son resultado de un razonamiento combinatorio deficiente.

Como ejemplo, resultado importante en Inzunza y Guzmán (2011) es que los profesores muestran “...un razonamiento combinatorio endeble para apoyar el conocimiento de probabilidad y poco uso y dominio de representaciones con diagramas de árbol...”. De acuerdo con lo anterior, se puede decir que la enseñanza de la probabilidad en general, y la combinatoria en particular, representan un gran desafío para el docente por lo que debe afrontar una serie de retos para lograr que los estudiantes aborden con éxito situaciones de incertidumbre y azar. De esto surge el interés por realizar investigación que aporte a uno de los aspectos que influyen de manera directa en la práctica del profesor, y las propuestas institucionales.



## 1.1. Planteamiento del problema y objetivo

Educar en y para el siglo XXI representa un desafío para los sistemas educativos, pues con el propósito de elevar la calidad de la educación en México se han experimentado cambios tanto en el enfoque de la enseñanza como en el contenido.

De las ramas de la matemática que hoy día adquieren mayor relevancia por sus aplicaciones prácticas y teóricas en otros campos científicos, son la probabilidad y la estadística. Esto pone de manifiesto el hecho importante que resulta ser el desarrollo de un pensamiento probabilístico en el estudiante, pues este permite comprender y analizar información de fenómenos en los que intervienen el azar y la probabilidad. De ahí que desde hace más de 25 años que en las reformas de los diferentes niveles educativos se intente incorporar temas de estadística y probabilidad, argumentando que esto permitiría vincular la matemática escolar con los intereses de los estudiantes a través de aplicaciones significativas, de la construcción de modelos simples, etc., además de que los cálculos matemáticos necesarios en los niveles educativos básicos no son complicados (Steinbring, 1990).

Sin embargo, pese a las diferentes razones existentes en pro del tratamiento de la estadística y la probabilidad en el aula, el proceso de inclusión de este contenido ha sido lento. Rade (1968, citado en Steinbring, 1990) identificó algunas razones por las cuales esto ha sucedido, entre ellas, se encuentra el hecho de que los profesores no cuentan con una formación sólida de la probabilidad y la estadística, específicamente el tratamiento de la combinatoria es limitado. Por otro lado, está la opinión de los propios docentes respecto de la estadística y la probabilidad, que lo consideran un contenido distinto de la matemática que ellos conocen, una matemática no determinista que adquiere significado sólo al ser relacionado con situaciones extra-matemáticas, una matemática difícil de manejar que termina siendo tratada en el aula como un contenido totalmente desvinculado del azar. Esto es resultado también de la manera en cómo está planteado este contenido en los programas y libros de texto, caracterizando entonces a la enseñanza por ser promotora de un pensamiento determinista en el estudiante, limitando en consecuencia su capacidad de toma de decisiones respecto de todas las posibilidades de las que dispone. Esto último es campo de estudio de la *combinatoria*, la cual es una de las diez ideas fundamentales que Heitele (1975) sugiere para un currículo en espiral, y que serán de utilidad para la posterior formación de conceptos en

probabilidad. La idea de un currículo en espiral consiste en la enseñanza de las ideas fundamentales en los diferentes niveles educativos, difiriendo en cada uno de ellos sólo en el nivel cognoscitivo y lingüístico, llevando al estudiante desde el plano de la intuición hasta el plano formal y dotándolo de modelos explicativos propios de cada nivel de desarrollo.

El análisis combinatorio o de posibilidades, es parte importante de la teoría de las probabilidades, pues consiste en la identificación de todos los resultados posibles que pueden ocurrir en un fenómeno o experimento aleatorio.

No obstante, Inzunza y Guzmán (2011) reportan que la probabilidad es un área complicada para los profesores del nivel básico, particularmente la regla del producto de probabilidades, la suma de probabilidades y la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial, así también la mayoría de los profesores muestran un débil razonamiento combinatorio, siendo este de gran importancia para el desarrollo posterior de un razonamiento probabilístico y más aún, para el desarrollo de un pensamiento formal. Sin embargo, a pesar de la existencia de algunos argumentos importantes para el estudio de la combinatoria, en la propuesta institucional de educación básica en México el contenido de la combinatoria es limitado y hasta impreciso, pues de más de 300 lecciones que componen los libros de texto de la educación primaria, únicamente tres son dedicadas a la combinatoria, en las cuales se identifican problemas de permutación y sin embargo los resultados se indican como “todas las combinaciones” (Rivera, 2013).

Incluso desde el punto de vista de la investigación son pocos los trabajos sobre los problemas de aprendizaje de este contenido. En la revisión de literatura se observó en México, los estudios sobre este tópico matemático son aún escasos, y los que se han realizado se han enfocado en poblaciones con niveles de estudio superior.

Por ejemplo, Rivera (2013), indagó sobre el aprendizaje de los elementos de la combinatoria con estudiantes de primaria cuyos resultados en la prueba ENLACE 2011 los colocaron en el primer lugar. Reportando que al igual que los estudiantes de nivel universitario presentaban dificultades al abordar problemas de tipo combinatorio. Entonces, con base en los resultados de los estudiantes con mejor nivel de aprovechamiento en la prueba ENLACE 2011 alrededor de la combinatoria, ¿cuáles serán los conocimientos esperados de aquellos estudiantes con un aprovechamiento escolar promedio? Y más aún, ¿qué elementos de la combinatoria

manipula el profesor y de qué manera los aborda en el aula? (Rivera, 2013). Sin embargo, previo a esta última pregunta convendría indagar también sobre el proceso de formación del profesor para abordar estos contenidos pues el éxito de la enseñanza de la estadística, y particularmente de la probabilidad, representa para el docente el reto de apoyar a sus estudiantes en el desarrollo de su competencia ante el tratamiento de situaciones de incertidumbre. El reto es mayor cuando los niveles de educación son básicos, ya que está presente además el desafío de familiarizar al estudiante con este tipo de situaciones, iniciando el estudio de las nociones probabilísticas no a un nivel formal, sino de un modo intuitivo porque, como menciona Heitele (1975), son los modelos intuitivos los que permiten al estudiante entender su entorno con sus propios medios y permitirán, en niveles educativos posteriores, comprender la complejidad lingüística de la probabilidad y los modelos probabilísticos formales. Esto muestra que el profesor juega un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes, y en ese sentido surge el interés por realizar un trabajo referente al conocimiento que institucionalmente debería manejar el docente de primaria acerca de la combinatoria y cómo éste influye en su práctica docente, orientando entonces a que los resultados de la investigación deriven acciones que ayuden a mejorar la práctica del profesor a través de una propuesta de enseñanza, lo que a su vez consideramos que implicaría mejorar la formación de los estudiantes.

En este sentido, la pregunta de investigación que se plantea es ¿Cómo se plantean los conocimientos de combinatoria en la propuesta institucional de formación del docente de primaria y de su quehacer profesional? Para dar respuesta a esta pregunta se plantean como objetivos: identificar el conocimiento de combinatoria planteado en la propuesta institucional de la formación del docente de primaria y de la propuesta institucional de la educación primaria misma, que en teoría se moviliza para la enseñanza de la combinatoria, y proponer una alternativa de enseñanza de la combinatoria como apoyo para la práctica del profesor.

## **1.2. Justificación**

Respondiendo la interrogante que pudiera surgir sobre el porqué de la enseñanza de la combinatoria desde los primeros años de educación, puede decirse que además de representar un conocimiento base para la futura comprensión de conceptos probabilísticos formales,

Kapur (1970, en Navarro, Pelayo, Batanero y Godino, 1996) señala algunas razones que en la actualidad podemos considerar válidas, que reflejan las ventajas que acarrearía para el aprendizaje el abordar este tipo de contenido desde la escuela primaria, así como la importancia de su estudio tanto en la misma matemática como en otras áreas de la ciencia, estas razones son:

- ✓ Dado que la combinatoria no depende del cálculo, es posible plantear problemas que se adecuen a cualquier nivel.
- ✓ Puede ser utilizada para entrenar a los estudiantes en la enumeración, elaboración de conjeturas, generalización, etc.
- ✓ Ayuda el desarrollo de conceptos como: relaciones de orden y equivalencia, función, muestra, conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etc.
- ✓ Pueden presentarse aplicaciones de diferentes campos científicos (Química, Biología, Física, **Probabilidad**, Grafos, entre otras).

Agregando a esta lista que los conceptos matemáticos escolares convencionales adquieren un significado distinto cuando son usados dentro de estas ramas del conocimiento, por ejemplo, Rivera (2013) reporta que uno de los elementos de la combinatoria que son aprendidos por el estudiante de primaria es el *principio multiplicativo*, sin embargo este es utilizado por el docente en problemas que contribuyen a ejercitar y dar sentido a la multiplicación cuando, por el contrario, es la multiplicación la que adquiere un significado distinto del tradicional cuando es usada en la combinatoria.

Lo anterior muestra, en parte, las consecuencias positivas que consigo traería la introducción de la enseñanza de la estadística y probabilidad en la escuela, más particularmente el estudio de la combinatoria. Sin embargo, es importante recalcar que el escenario de cambios en los que se ve inmersa la educación con la implementación de una nueva reforma educativa trae consigo el desafío para los encargados de la enseñanza, los docentes, pues es a ellos a quienes corresponde poner en marcha los nuevos currículos dentro del aula. Respecto a esta situación, en los planes y programas de estudio vigentes se establece que para elevar la calidad de la educación en México es necesario mejorar también todos los elementos del sistema, incluido el profesor, de los cuales es importante *fortalecer la capacitación y actualización permanente y, reconocer y estimular la calidad del docente, entendida esta como su preparación para*

*enseñar* (Plan de estudios, 2011). Se trata ahora de una enseñanza centrada en los procesos de aprendizaje del estudiante cayendo en el profesor la responsabilidad de evaluar tales aprendizajes y darles seguimiento, esto a través del planteamiento de problemas en los que el estudiante aplique su conocimiento, transformando el salón de clases en un espacio de construcción de conocimiento. Es por tanto importante que los profesores cuenten con un sólido conocimiento del contenido que se va a enseñar y además, de cómo enseñarlo, es así como inicia el proceso de enseñanza (Shulman, 2005), siendo estos dos de los factores de mayor influencia en las acciones del docente en clase, y a la larga sobre aquello que los estudiantes aprenden.

### **1.3. Antecedentes.**

Investigaciones hechas en torno a la enseñanza-aprendizaje de la combinatoria no son tan numerosas como sucede con otras áreas de la matemática como el álgebra y el cálculo por mencionar algunas. A continuación presentaremos los resultados que se reportan en algunos estudios, siendo de importante mención que en su mayoría fueron realizados en el extranjero y en niveles educativos superiores. Por esto último es que consideramos importante realizar un estudio en el que intentamos atender las necesidades de la educación básica a través del trabajo con el docente.

#### **1.3.1. Razonamiento combinatorio**

El pensamiento probabilístico tiene su base en el razonamiento combinatorio. De acuerdo con lo que reporta Roa (2000), un gran número de investigaciones muestran que un razonamiento combinatorio deficiente puede ser la causa de que las personas adultas presenten dificultades o sesgos en su razonamiento probabilístico. Sobre esto, Bonilla y Rueda (2011) aplicaron un instrumento, con situaciones que requerían del uso de la combinatoria, a estudiantes universitarios que cursaban el primer semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) en Colombia. El propósito era determinar el nivel de razonamiento combinatorio en el que se encontraban (*Tabla 1*), considerándolo como la vinculación de distintos conceptos y procedimientos que emergen frente a una situación combinatoria, como son: etiquetación o enumeración, distinción o indistinción, obtención del espacio muestral y el uso de las técnicas de conteo.

Los resultados que reportan es que la mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel de razonamiento 2 dado que proceden determinando todos los posibles eventos para utilizar la regla de la suma, o bien, descomponen el problema en sub-problemas para utilizar la regla del producto.

**Tabla 1.** Niveles de razonamiento combinatorio.

Nivel 0 <b>No realiza el proceso debido</b>	<b>Categoría 1. No lo hace, no responde</b> <b>Categoría 2. El sujeto busca dar solución a la situación por medio de un único objeto matemático, que no guarda relación con el objeto de estudio.</b>
Nivel 1 <b>Reconocimiento de variables distinguibles e indistinguibles</b>	<b>Categoría 1.</b> Asigna letras o números a los elementos que involucra la situación. <b>Categoría 2.</b> Etiqueta cada elemento sin establecer los distinguibles o los indistinguibles. <b>Categoría 3.</b> Asignación simbólica de cada elemento diferenciando los distinguibles y los indistinguibles.
Nivel 2 <b>Contar ordenadamente mediante símbolos y gráficos</b>	<b>Categoría 1.</b> Utiliza un procedimiento incompleto para construir los eventos o identifica un evento repetido como diferente. <b>Categoría 2.</b> Construye todos los eventos del espacio muestral para identificarlos. <b>Categoría 3.</b> Puede construir todos los eventos del espacio muestral identificando algunos de los eventos. <b>Categoría 4.</b> Puede construir todos los eventos del espacio muestral identificando sólo un evento-
Nivel 3 <b>Principios básicos de suma y producto.</b>	<b>Categoría 1.</b> Partiendo de las configuraciones elaboradas en el <i>nivel 2</i> , <i>categoría 2</i> , el sujeto cuenta cada evento e identifica el número total de eventos. <b>Categoría 2.</b> Aunque utiliza procesos multiplicativos básicos no se expresan las configuraciones posibles. <b>Categoría 3.</b> Utiliza procesos multiplicativos básicos y/o sumas reiteradas para expresar el total de posibles eventos.
Nivel 4 <b>Generalización</b>	<b>Categoría 1.</b> Pese a que utiliza las anteriores categorías generaliza de manera inadecuada los procesos realizados. <b>Categoría 2.</b> Mediante los anteriores procesos de multiplicación y/o suma reiterada llega a utilizar procesos multiplicativos más complejos, es decir, expresa los resultados utilizando la expresión factorial o sumatoria. <b>Categoría 3.</b> El sujeto expresa el resultado con un lenguaje matemático adecuado para el concepto.

Por su parte Morales y Frisancho (2013), teniendo como referencia el método clínico-crítico de Piaget, realizaron un estudio para evaluar la capacidad combinatoria de 12 estudiantes de entre 16 y 20 años de edad de la Universidad privada de la ciudad de Lima. Para ello propusieron una categorización (*Tabla 2*) de los niveles de logro y niveles de razonamiento que mostraron los estudiantes en la resolución de cuatro tareas con estructura combinatoria.

En sus resultados señalan que los estudiantes mostraron una variedad de desempeños en las diferentes tareas que explican por la acción de los procesos vinculados al uso y construcción del esquema operatorio formal de la combinatoria. Sin embargo, advierten una relación entre los niveles de logro con los niveles de razonamiento pues los estudiantes que resolvieron correctamente la mayoría de las tareas fueron quienes lograron explicar adecuadamente su actividad identificando similitudes y diferencias estructurales en las tareas. Caso contrario a los estudiantes que fallaron en la solución de las tareas planteadas, pues la verbalización de su acción fue simple y desarticulada, mostrando una aplicación mecánica de los algoritmos y sin una justificación de su uso.

**Tabla 2.** Niveles de logro y razonamiento.

Nivel de logro	Nivel de razonamiento
<p><b>Categoría 1. Resuelve la tarea sin ayuda.</b></p> <p>El participante usa un método adecuado, por ejemplo, registros o pruebas de combinaciones sistemáticas o una fórmula matemática apropiada que le permite resolver la tarea sin la intervención del evaluador.</p>	<p><b>Categoría A. Razonamiento apropiado.</b></p> <p>La explicación vinculada a la resolución de la tarea evidencia que el participante ha conceptualizado, en diferentes grados, las estructuras de pensamiento necesarias para comprender y resolver el problema. Logra verbalizar sus estrategias de sistematización y verificación, así como las razones de su uso, y comprende la lógica subyacente a la tarea.</p>
<p><b>Categoría 2. Resuelve la tarea con ayuda.</b></p> <p>En este caso el participante logra usar un método adecuado para resolver la tarea gracias al apoyo u orientación del evaluador por medio de preguntas, contra sugerencias o sugerencias.</p>	<p><b>Categoría B. Razonamiento en desequilibrio.</b></p> <p>La explicación que da el participante es demasiado general, parcial o incompleta. La verbalización es simple, poco reflexiva y no da cuenta completamente de las acciones desplegadas y el proceso lógico que implican, especialmente si este ha sido usado.</p>
<p><b>Categoría 3. No resuelve la tarea.</b></p> <p>El participante no usa el método adecuado para resolver la tarea y falla en resolverla, aun cuando el evaluador hubiera intervenido con alguna pregunta, apoyo o contra sugerión.</p>	<p><b>Categoría C. Razonamiento mecánico.</b></p> <p>El participante explica su acción verbalizando aspectos de un cálculo aditivo o multiplicativo de posibilidades. Sin embargo, no ahonda en la lógica de la fórmula o el porqué de su uso.</p> <p><b>Categoría D. Razonamiento inapropiado o ausente.</b></p> <p>El participante no da una explicación o la que da es claramente errónea. Ofrece una verbalización de un procedimiento que no es la tarea demandada.</p>

## 1.3.2. Resolución de problemas combinatorios

### 1.3.2.1. Estrategias

English (2007) estudió en el estudio los cambios de estrategias de los niños para resolver problemas combinatorios. Participaron noventa y seis niños de una escuela estatal y tres más no estatales de Brisbane, Australia, los cuales estaban distribuidos en grupos de 12 niños desde los siete años y en rangos de seis meses. Cabe mencionar que ninguno de los niños había tenido instrucción previa sobre la combinatoria en la escuela y por tanto no tenían experiencia en la resolución de problemas de este tipo. A cada niño se le proporcionó de forma individual una serie de seis problemas combinatorios divididos en dos grupos; tres problemas eran bidimensionales y los tres restantes, tridimensionales. Todos ellos correspondían a la formación de combinaciones de prendas de vestir, difiriendo en el número de objetos en cada conjunto (camisas, pantalones y raquetas). De acuerdo con los resultados (Tabla 3) se indica que la experiencia con la solución de ejemplos bidimensionales facilitaron el desarrollo de estrategias para resolver problemas de mayor complejidad (tridimensionales). Pues en la solución de los problemas tridimensionales destacó su capacidad de adaptar las estrategias de los problemas bidimensionales dando cabida a las crecientes demandas de los problemas tridimensionales.

**Tabla 3.** Estrategias de solución de problemas bidimensionales y tridimensionales.

	<b>Estrategias de problemas combinatorios bidimensionales</b>	<b>Estrategias de problemas combinatorios tridimensionales</b>
<b>Estrategia 1</b>	Ensayo y error.	Ensayo y error
<b>Estrategia 2</b>	Se caracterizan por la aparición de un patrón de la selección de opciones, sin embargo los niños terminan por volver a la estrategia 1.	Los niños adoptan un patrón de selección de opciones y dejan de aplicarla durante la ejecución del problema.
<b>Estrategia 3</b>		Los niños adoptan un patrón para la solución del problema, pero a diferencia de la estrategia 2 la mejora se observa en la eficiencia de sus explicaciones.
<b>Estrategia 4</b>	Se caracterizan por la presencia de un patrón para la selección de opciones, e incorporan la característica de utilizar un objeto pivotal o constante.	Se caracteriza por el agotamiento de los elementos del mayor número de conjuntos posibles como constantes.
<b>Estrategia 5</b>		



Por su parte, Sainza y Figueiras (2009) realizaron un estudio experimental estudiantes españoles, 23 de 6° de primaria y 15 de 1° de bachillerato, con la finalidad de comparar las estrategias utilizadas por cada uno de los grupos en la resolución de un mismo problema combinatorio, considerando uno de los núcleos que comprende la transición de etapas educativas (el alumno y su relación con la matemática). Solicitó a los estudiantes argumentar su procedimiento en cada uno de los reactivos de un cuestionario semi-abierto diseñado para los fines del estudio. Para el análisis se consideraron tres categorías de estrategias (*Tabla 4*): manipulativas (ensayo-error, patrón inicial, patrón consistente), mixtas y numéricas (fórmulas, regla del producto).

**Tabla 4.** Estrategias empleadas por los alumnos de ambas clases

	<b>Estrategia manipulativa 1</b> Ensayo-error	<b>Estrategia manipulativa 2</b> Patrón inicial	<b>Estrategia manipulativa 3</b> Patrón consistente	<b>Estrategia mixta</b>	<b>Estrategia numérica 1</b> Fórmula	<b>Estrategia numérica 2</b> Regla del producto
<b>Bachillerato</b>	0%	16,67%	3,33%	43,33%	36,67%	0%
<b>Primaria</b>	20%	48,89%	13,33%	2,22%	4,44%	11,11%

De los resultados mostrados en la tabla, los autores señalan que la ausencia de estrategias numéricas en la primaria puede ser a causa de la escasa experiencia previa que permita dar sentido de conteo a la multiplicación y por tanto concluir con el uso de la regla del producto. Por tanto proponen nuevos diseños que puedan asegurar tal relación. Con los estudiantes de bachillerato los resultados no varían mucho, pues las estrategias numéricas que utilizan se limitan a fórmulas que en muchos casos son incorrectas. Por otro lado, debe señalarse que los alumnos de primaria superan a los de nivel medio superior respecto a la variedad de recursos y estrategias utilizadas.

Los estudiantes de bachillerato se muestran renuentes frente a los problemas que no impliquen para su solución el uso de una fórmula, lo cual resulta ser un aspecto preocupante y un llamado de atención para los docentes de la educación básica.

### **1.3.2.2. Dificultades**

Roa (2003) elaboró un estudio que tuvo como fin caracterizar y explicar las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas elementales de combinatoria para, así dar pie a

la elaboración de propuestas curriculares sobre la combinatoria. Los participantes de la investigación fueron estudiantes de penúltimo y último curso de la licenciatura en matemáticas (91 estudiantes, 29 del 4° y 62 del 5° curso) de la Universidad de Granada. Se desarrolló en cinco fases. La primera fue la fase piloto. La segunda fase consistió en una reestructuración del cuestionario y su nueva aplicación. En la tercera fase se realizó un análisis a priori de dos tipos de razonamiento posibles de ser aplicados para dar solución a los problemas planteados. La cuarta fase consistió en la aplicación del cuestionario definitivo. Finalmente, la quinta fase consistió en la selección de cuatro estudiantes para ser entrevistados. Los resultados obtenidos muestran la dificultad de los problemas para ser resueltos pese a la madurez y alta preparación de los estudiantes, mostrando mayor número de errores cuando se trata de permutaciones y variaciones con repetición.

Rivera (2013), exploró la forma en cómo eran aprendidos lo que en el estudio denominan elementos de la combinatoria (las nociones conjunto, relación y orden, así como las de combinatoria, permutación, variación y el principio multiplicativo). En sus resultados muestra que la mayoría de los alumnos de primaria logra identificar el o los conjuntos con los que debe trabajarse, incluso etiquetan cada uno de sus elementos. Respecto de las relaciones, logran identificarlas en problemas donde se trabaja únicamente con un conjunto, pero tienen dificultades cuando se trabaja con dos o más conjuntos (principio multiplicativo) en un mismo problema. Para la determinación de todas las posibilidades, utilizan mayormente el listado de pares, ternas, cuaternas, etc., según sea el caso. Otras de las formas a las que recurren los estudiantes de sexto grado son: el diagrama de árbol, la construcción de tablas, construcción de objetos (dibujos o pintar), y la multiplicación.

#### **1.4. Comentarios finales.**

De manera general, se puede decir que si bien se ha atendido el trabajo con la combinatoria, la mayoría de estas investigaciones se han desarrollado en otros países y atendiendo niveles educativos superiores. Tales investigaciones evidencian las dificultades serias que existen en los estudiantes de nivel superior, y por tanto, de su limitado razonamiento combinatorio.

Uno de los trabajos realizados en México que es antecedente importante para esta investigación, se desarrolló en el nivel básico y da muestra de que en ese nivel se abordan elementos necesarios para la comprensión de la combinatoria, sin embargo también muestran el escaso razonamiento combinatorio desarrollado.

# Capítulo 2

Elementos Teóricos y  
método

## **2.1. Elementos teóricos**

Inmersos en la investigación del proceso enseñanza-aprendizaje de la estadística y la probabilidad en la educación básica e interesados en aportar a la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos de los estudiantes mexicanos, se retoma el programa de investigación desarrollado por Ojeda (1994) en la que se interrelacionan tres ejes rectores: el eje epistemológico referente al conocimiento sobre el azar, la probabilidad y la estadística. El eje cognitivo, en el que se incluyen las etapas de desarrollo cognitivo del niño en cuanto a la idea de azar en relación a las operaciones combinatorias. Y el eje social, en el que se considera al individuo en interacción con la comunidad y la institución escolar en referencia al conocimiento de estocásticos (Ojeda, 2006).

### **2.1.1. Eje epistemológico**

#### **2.1.1.1. Teoría combinatoria**

La combinatoria es una de las diez ideas fundamentales propuestas para la enseñanza de estocásticos que fueron enlistadas por Heitele (1975), a la cual, según indica, no debe considerarse sólo como una herramienta auxiliar de la probabilidad, ya que es la que proporciona una explicación clara de la estructura de los experimentos aleatorios; experimentos a través de los cuales se pueden definir las operaciones combinatorias (extracción con o sin reemplazo, ordenada o no ordenada) que son básicas para la comprensión de los fenómenos de azar y por tanto necesarias para el desarrollo de un pensamiento formal que opere mediante combinaciones de las posibilidades de las que dispone (Heitele, 1975).

Para efectos de esta investigación la combinatoria será entendida como la enumeración de todas las formas posibles en que un número de elementos pueden ser organizados satisfaciendo condiciones dadas, sin perder algún resultado posible (Cameron, 1994 en Rivera, 2013). Se pueden distinguir cinco maneras de llevar a cabo tales arreglos: principio aditivo, principio multiplicativo, permutaciones, variaciones y combinaciones.

**Principio aditivo:** Si una situación puede ocurrir de  $m$  maneras diferentes y otra de  $k$  maneras diferentes, incompatibles las unas con las otras, entonces existen  $m + k$  maneras en las cuales puede ocurrir la primera o la segunda, mas no ambas.

**Principio multiplicativo:** Si una situación puede ocurrir de  $m$  maneras y otra de  $k$  maneras, entonces ambas situaciones pueden ocurrir de  $m \cdot k$  maneras.

**Permutaciones:** Permutar es “*variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas*” (Wilhelmi, 2004, p. 45). Este tipo de arreglos precisa hacer explícito el hecho de que si las cosas son o no indistinguibles, a fin de tener la certeza de que la nueva disposición es distinta a la antigua.

- a) Permutaciones ordinarias o sin repetición ( $P_n$ ): son los distintos arreglos que se pueden formar, de manera que en cada grupo entren los  $n$  elementos y que un grupo se diferencie de los demás en el orden de colocación de los elementos. Además se tiene que  $P_n = n!$ .
- b) Permutaciones con repetición: Se llaman permutaciones con repetición de  $n$  elementos, distribuidos en  $k$  grupos de  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$  elementos indistinguibles, respectivamente, de tal forma que  $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k = n$ , a las distintas configuraciones que se pueden formar con los  $n$  elementos, de tal forma que cada una de ellas pueda diferenciarse de las demás en el orden de colocación de sus elementos, excluyendo las reordenaciones de elementos indistinguibles (es decir, que pertenecen a un mismo grupo). Si se denota por  $PR_n^{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k}$  a este número se tiene que:  $PR_n^{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{k-1}! \cdot a_k!}$
- c) Permutaciones circulares (sin repetición): Se denotan por  $PC_n$  y son los distintos grupos que se pueden formar, de tal manera que en cada grupo entren los  $n$  elementos y que un grupo se diferencie de otro en la posición relativa de los elementos unos respecto a los otros. Se tiene que  $PC_n = (n - 1)!$ .

**Variaciones:** En el lenguaje cotidiano, variar significa “*hacer que una cosa sea diferente en algo de lo que antes era*” (Wilhelmi, 2004, p. 50). Matemáticamente una variación de una familia de elementos se refiere a la modificación de algunos de sus elementos o del orden en que se presentan.

- a) Variaciones ordinarias o sin repetición: Se llaman variaciones ordinarias o sin repetición de  $n$  elementos, tomados de  $k$  en  $k$ , a los distintos grupos que se pueden formar con los  $n$  elementos, de tal forma que en cada grupo entren  $k$  elementos distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en alguno de sus elementos, bien en su orden de colocación. Se denota por  $V_{n,k}$ , y se tiene que  $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ .
- b) Variaciones con repetición: Se llaman variaciones con repetición de  $n$  elementos, tomados de  $k$  en  $k$ , a los distintos grupos que se pueden formar con los  $n$  elementos, de tal forma que en cada grupo entren  $k$  elementos iguales o distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en algún elemento, bien en su orden de colocación. Se denota por  $VR_{n,k}$ , y se tiene  $VR_{n,k} = n^k$ .

**Combinaciones:** De manera cotidiana, utilizamos la palabra combinar para referirnos al hecho de “*unir cosas diversas, de manera que formen un compuesto*” (Wilhelmi, 2004, p. 53). En el campo de la matemática hace referencia al número de conjuntos de un determinado número de elementos que se pueden formar con un universo de objetos, sin importar el orden de selección sino los elementos que se toman.

- a) Combinaciones ordinarias o sin repetición. Se llaman combinaciones ordinarias o sin repetición de  $n$  elementos, tomados de  $k$  en  $k$ , a los distintos conjuntos de  $k$  elementos distintos, entonces un conjunto se diferenciará de otro en al menos un elemento, no importando el orden de colocación o selección. Se denota por  $C_{n,k}$  y se tiene que:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- b) Combinaciones con repetición: Se llaman combinaciones con repetición de  $n$  elementos, tomados de  $k$  en  $k$ , a las distintas agrupaciones de  $k$  elementos (indistinguibles o no), de tal manera que una agrupación sea diferente de otra en al menos un elemento sin importar el orden. Se denota por  $CR_{n,k}$ , y se tiene que

$$CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n,k-1} \text{ si } k \neq 1, n \neq 1$$

$$CR_{1,k} = 1 \text{ y } CR_{n,1} = n$$

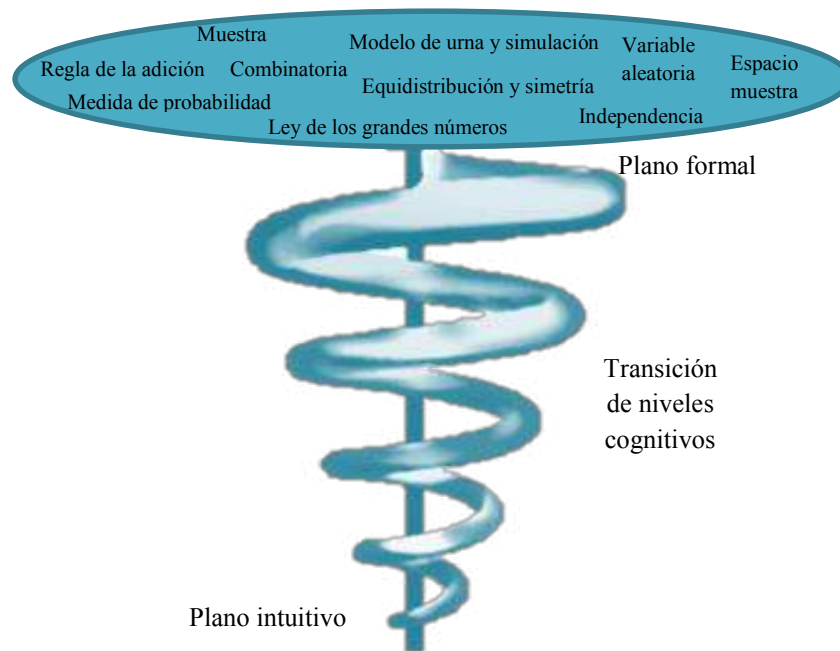
- c) Combinaciones con repetición de dos en dos. Se llaman combinaciones con repetición de  $n$  elementos, tomados de 2 en 2, a las distintas agrupaciones de 2 elementos (no necesariamente distintos), esto es, un conjunto se diferencia de los demás en, al menos, un elemento sin importar el orden de colocación o selección. Se denota por  $CR_{n,2}$ , y se tiene que  $CR_{n,2} = n + C_{n,2}$ .

### **2.1.1.2. La combinatoria: una de las diez ideas fundamentales**

La idea de un currículo en espiral, los resultados de la psicología sobre las etapas de desarrollo de la idea de azar en el niño (Piaget e Inhelder, 1951), las dificultades de personas adultas en el tratamiento de situaciones de incertidumbre, y la historia de la probabilidad, son las cuatro consideraciones a partir de las cuales Heitele (1975) propone una lista de diez ideas fundamentales para un currículo en espiral (*Figura 1*), entendiendo por ideas fundamentales en el sentido de Bruner como "... aquellas que proveen al individuo de modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que son tan eficientes como es posible y que se distinguen en los distintos niveles cognoscitivos no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y niveles de elaboración" (Heitele, 1975, p. 3).

Las ideas fundamentales por el autor son: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, modelo de urna y simulación, combinatoria, variable aleatoria, Ley de los grandes números y Muestra. Indica que están interrelacionadas, por lo que no se les puede estudiar de manera separada. Se trata pues de partir desde un nivel de comprensión intuitiva, factible de ser cultivado en la educación primaria, que facilite el tránsito hacia un nivel cognoscitivo más alto propio de niveles educativos superiores donde ya es posible separar las ideas fundamentales para su estudio.





**Figura 1.** Esquema de las ideas estocásticas bajo la idea de un currículum en espiral

## **2.1.2. Eje cognitivo**

### **2.1.2.1. Origen de la idea de azar en el niño en relación a las operaciones combinatorias**

Las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) realizadas en el campo de la psicología respecto del origen de la idea de azar en el niño en relación a las operaciones de proporción y las operaciones combinatorias. Sus resultados indican que no es sino hasta la última etapa, de las tres que identifican (etapa pre-operacional, etapa de las operaciones concretas y etapa de las operaciones formales), que el niño adquiere la capacidad de proceder sistemáticamente en la obtención de las combinaciones, permutaciones y variaciones de un conjunto de elementos, por lo que señalan que es hasta esta tercera etapa del desarrollo cognitivo que tiene lugar la comprensión de las operaciones combinatorias.

### **2.1.2.2. El efecto de la instrucción y las fuentes intuitivas en el razonamiento combinatorio**

Fischbein (1975), expresa su desacuerdo con los resultados reportados por Piaget e Inhelder (1951) e indica que con ayuda de la instrucción el niño es capaz de asimilar los esquemas probabilísticos incluso en edades inferiores a los 10 años.

Considera las intuiciones como un componente importante de la inteligencia y las define como procesos cognitivos que surgen en el niño a través de su experiencia física. Son creencias cognitivas inmediatas que son adaptables y por tanto susceptibles de ser modificadas mediante un adecuado proceso de instrucción. Se puede distinguir entre dos tipos de intuiciones:

- Intuiciones primarias, son aquellas que se forman previo e independientemente del proceso de instrucción.
- Intuiciones secundarias, son las que surgen posterior a un proceso sistemático de enseñanza y por tanto sucede una transición de las adquisiciones primarias.

Una parte importante del trabajo realizado por Fischbein (1975), centra su atención en el efecto de la instrucción en el desarrollo de la capacidad combinatoria del niño, indica que ésta es necesaria ya que las operaciones combinatorias no son adquiridas de manera espontánea. Comparte con Bruner la hipótesis de que las estructuras pueden presentarse de tres maneras: inactiva, icónica y simbólica, sin perder sus características esenciales, y que un adecuado uso de ellas facilita el tránsito hacia la abstracción. De entre las estructuras importantes para la enseñanza de la combinatoria, Fischbein (1975) destaca el diagrama de árbol, pues este representa un modelo generativo, es decir, que a través de repetidas iteraciones (solución de problemas similares) permite llegar a la generalización.

### **2.1.3. Eje social**

López-Mojica (2013) señala que el proceso de enseñanza-aprendizaje se traduce en la interacción profesor-estudiante dentro del aula, donde se dota de un significado socialmente construido a los conceptos matemáticos. Y bajo el entendido de que el contenido estocástico no debe ser enseñando de la misma manera que la matemática escolar convencional indica, según Von Harten y Steinbring (1988 citado por Steinbring, 1990, p. 210), “el conocimiento profesional del docente está alineado, en primer término, con la actividad concreta de enseñar, pero al mismo tiempo, debe reflejar la posibilidad de variar y de modificar las formas de enseñar. Ese conocimiento es, en consecuencia, una “mezcla” de reglas efectivas en la práctica, recetas y experiencias, comprendiendo los aspectos más amplios y necesarios del conocimiento, bajo forma de relaciones sistemáticas,

explicaciones teóricas, posibilidades de variación, tanto del tema como de las posibilidades educativas”.

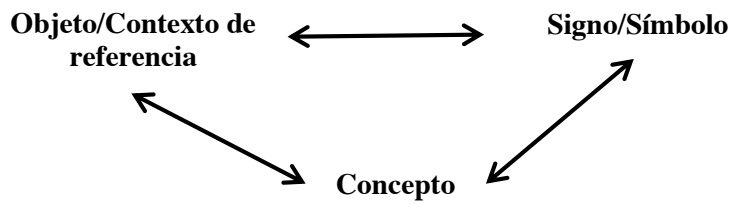
Dentro de este eje se considera también la enseñanza de la combinatoria desde el plano institucional, es decir, considerando las propuestas institucionales entendidas como organizaciones sociales cuyo fin último es la educación de las nuevas generaciones (Mojica, 2013).

### **2.1.3.1. Conocimiento y enseñanza: interacción entre la práctica de enseñar y concepciones teóricas**

De acuerdo con Shulman (2005), el proceso de enseñanza inicia en un punto en que el profesor comprende lo que va a enseñar y cómo enseñarlo. Propone la existencia de un conocimiento base para la enseñanza, entendido esto como “*un conjunto codificado de conocimiento, destrezas, comprensión y tecnología, de ética y disposición, de responsabilidad colectiva*” (Shulman, 2005, p. 5), y un medio para representarlo y comunicarlo.

Por tanto, el contenido de la formación del docente y de la capacitación cuando se encuentra en servicio no puede consistir de sólo la teoría formal de la estadística y la probabilidad, sino que se deben considerar tres ejes epistemológicos. Para ello, Steinbring (2005) presenta un modelo de interrelación entre la estructura del contenido, el alumno y el docente (*Figura 2*). Es un esquema conceptual que explica la naturaleza epistemológica de la apropiación de los conceptos a través de la relación entre sus vértices, de manera que el significado del conocimiento no puede deducirse de uno de sus vértices sino que se trata de un sistema equilibrado y de apoyo que requiere de un balance entre ellos (Steinbring, 1991, p. 4).

El triángulo epistemológico es una relación funcional para la constitución del conocimiento, constituido por tres componentes: *Objeto*, aquello que es producto de la actividad intelectual del sujeto, *Signo*, la representación de esa abstracción. *Concepto*, lo que apela a la descripción específica de esa cosa y va de nociones, a ideas, a conceptos en interrelación constante con el objeto y el signo (López-Mojica, 2013).

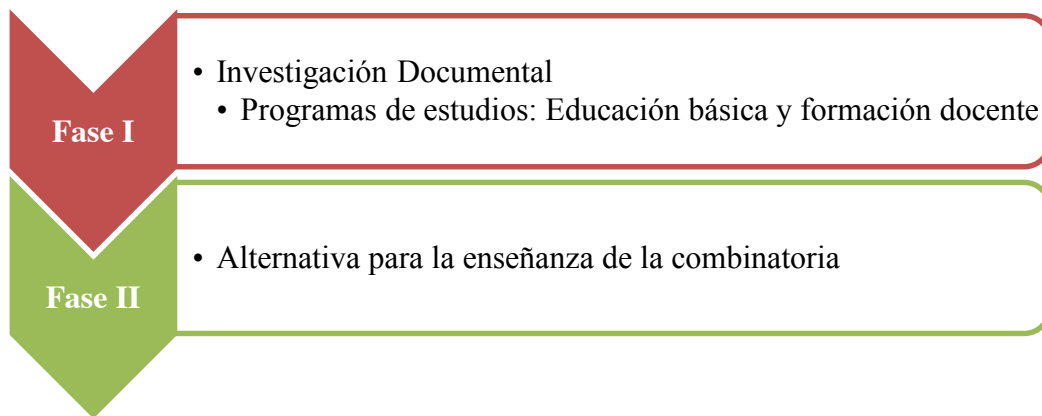


**Figura 2.** Triángulo epistemológico

Se señala además que la introducción de estocásticos debe hacerse dentro de un contexto práctico, sin ser necesario el desarrollo completo de las técnicas que se presentan por primera vez ni una justificación teórica de las mismas, pues estas han de presentarse en momentos posteriores.

## 2.2. Método

Esta investigación de tipo cualitativa, se desarrollará en dos fases (*Figura 3*). La primera Fase tiene como fin la documentación sobre el estado de la combinatoria en los agentes participantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la educación primaria. La segunda Fase se interesa por el diseño de una alternativa de enseñanza como apoyo para la labor del docente, que promueve en el estudiante el desarrollo de razonamiento combinatorio.



**Figura 3.** Proceso de la investigación.

Las acciones que se llevarán a cabo para alcanzar los objetivos de la investigación y responder a la pregunta planteada son:

- ✓ Revisión de la propuesta institucional (Planes y Programas vigentes, así como libros de texto y materiales de apoyo para el profesor) de Educación Básica, específicamente del nivel primaria. Esto con el fin de identificar en ellos la propuesta de enseñanza para la combinatoria.
- ✓ Revisión del Plan de Estudios de la licenciatura en Educación Primaria, así como de libros propuestos. La revisión se hará del plan anterior y el vigente dado que los profesores que se encuentran actualmente en servicio, y que representan la población de estudio, fueron formados bajo los lineamientos de ese plan. El propósito de ello es identificar el contenido que sobre probabilidad y combinatoria se plantea para la formación de profesores. Posteriormente, se revisará el plan vigente, considerando que si están cambiando las reformas educativas para la formación del estudiante, debieran entonces cambiar también los programas de formación para el profesor.

Para el análisis de las propuestas institucionales de educación básica y de la licenciatura en educación primaria, se consideran los criterios derivados de la célula de análisis de la enseñanza, propuestos por Ojeda (2006):

- a) Ideas fundamentales de estocásticos.
  - b) Otros conceptos matemáticos, aritméticos por ejemplo.
  - c) Recursos semióticos empleados para organizar y tratar datos como tablas, figuras, gráficas, simbología matemática, lengua natural.
  - d) Tipos de situaciones planteadas para la enseñanza de la combinatoria.
  - e) Términos utilizados para hacer referencia a conceptos estocásticos.
- ✓ La revisión de la propuesta curricular, así como de más artículos e investigaciones sobre el tema, conducirá al diseño de actividades que, de acuerdo a la teoría que

sustenta la investigación, favorezca el desarrollo del razonamiento combinatorio en estudiantes de educación primaria.

Para el diseño de las actividades de enseñanza se sigue la propuesta de tratamiento del concepto de Steinbring (2005), quien en primera instancia considera que la estructura de la probabilidad y estadística gira en torno a la terna: parte matemática, alumno y profesor. El triángulo epistemológico (figura 2) va a permitir analizar el concepto matemático de tal manera que se pueda interpretar para llevarlo a la matemática escolar.

# Capítulo 3

La combinatoria en la  
propuesta institucional

### **3. La combinatoria en la propuesta institucional**

Para indagar acerca del conocimiento/comprensión del docente de primaria respecto de la combinatoria, se consideró necesario revisar las propuestas institucionales tanto de la Licenciatura en Educación Primaria (LEP) como de la propia Educación Primaria. Esto para conocer la formación de los profesores y compararla con las exigencias de la Educación Básica, en este caso específicamente de la combinatoria.

Se analizaron el plan y los programas de estudio de la Reforma Curricular de la Educación Normal 2012 y el plan y programas de estudio 1997 (SEP, 2002) para el caso de la LEP, esto último para tener un antecedente de la formación del docente. Se revisaron también, para el caso específico de la escuela primaria, el plan y programas de estudio de la Reforma Integral de la Educación Básica 2011 (SEP, 2011), y los libros de texto tanto del alumno como para el maestro.

#### **3.1. La formación del docente de Educación Primaria**

La formación que reciben los futuros docentes que atenderán a la población estudiantil de educación básica debe corresponder con la transformación social, científica y tecnológica que se vive hoy día en el país y en el mundo. Es bien conocido que un factor que influye de manera directa en la mejora de los niveles de logro educativo es precisamente la práctica docente. Es por ello que en México se han desarrollado programas e implementado iniciativas con el fin de mejorar las capacidades y habilidades de los docentes, así como abastecerlos de materiales que les permitan desarrollar una práctica más pertinente y eficiente (Diario Oficial de la Federación, 2012).

Los Planes de Estudio para la Formación de Maestros de Primaria es el documento en el que se establecen los lineamientos que rigen el proceso que sigue el futuro docente en su formación.



### 3.1.1. Plan de estudios 1997

Con la reforma curricular de la educación básica, iniciada en 1993, se volvió necesario un cambio en el esquema de la formación de profesores para que estos pudieran responder a las nuevas exigencias educativas. Las nuevas características del entonces vigente plan de estudios de la educación básica, requerían del futuro profesor “una intervención sensible a las condiciones distintas de alumnos y grupos escolares, creatividad y adaptabilidad y, evidentemente, el dominio sólido de las mismas competencias que debe fomentar en sus alumnos” (SEP, 2002; p. 20), esto para estimular el “desarrollo de las capacidades de pensamiento del niño, a sus posibilidades de expresión y de aplicación de lo que aprende” (SEP, 2002; p. 20), pues el sistema educativo nacional se rige bajo el entendido de que existe un conjunto básico de conocimientos, habilidades y valores que todo niño debe adquirir independientemente de la región y de las condiciones sociales en las que se encuentre (SEP, 2002; p. 38).

Al final del programa de formación se esperaba que el futuro docente de primaria hubiera desarrollado las competencias agrupadas en cinco campos: habilidades intelectuales específicas, dominio de los contenidos de enseñanza, competencias didácticas, identidad profesional y ética, y capacidad de percepción y respuesta a las condiciones de sus alumnos y del entorno de la escuela. Además, al desarrollarse en un ambiente de constante transformación, debían ser capaces de manejar adecuadamente fuentes de información y recursos tecnológicos, con el propósito de que posterior a su formación pudieran continuar aprendiendo con autonomía a través de su experiencia y el intercambio con sus colegas (crítica y autocrítica).

El plan de estudios de la Licenciatura en Educación Primaria estuvo basado en el enfoque de enseñanza de resolución de problemas. En él se establece un mapa curricular (*Figura 4*) para desarrollar en ocho semestres, considerando tres tipos de actividades: escolarizadas, de acercamiento a la práctica escolar, y la práctica intensiva en condiciones reales de trabajo. Es decir, se iniciaba al estudiante (en la actualidad docente de primaria) en el análisis de los contenidos que se abordarían en la educación primaria y las características tanto del enfoque para su enseñanza como del aprendizaje de los niños, para luego integrar estos elementos en el trabajo en el aula a través de estancias con grupos de diferentes grados.

Primer semestre	Segundo semestre	Tercer semestre	Cuarto semestre	Quinto semestre	Sexto semestre	Séptimo semestre	Octavo semestre	Horas/ Créditos
11. Bases Filosóficas, Legales y Organizativas del Sistema Educativo Mexicano	21. La Educación en el Desarrollo Histórico de México I	31. La Educación en el Desarrollo Histórico de México II	41. Seminario de Temas Selectos de Historia de la Pedagogía y la Educación I	51. Seminario de Temas Selectos de Historia de la Pedagogía y la Educación II	61. Seminario de Temas Selectos de Historia de la Pedagogía y la Educación III	71. Trabajo Docente I	81. Trabajo Docente II	28/49.0
12. Problemas y Políticas de la Educación Básica	22. Matemáticas y su Enseñanza I	32. Matemáticas y su Enseñanza II	42. Ciencias Naturales y su Enseñanza I	52. Ciencias Naturales y su Enseñanza II	62. Asignatura Regional II			6/10.5
13. Propósitos y Contenidos de la Educación Primaria	23. Español y su Enseñanza I	33. Español y su Enseñanza II	43. Geografía y su Enseñanza I	53. Geografía y su Enseñanza II	63. Planeación de la Enseñanza y Evaluación del Aprendizaje			4/7.0
14. Desarrollo Infantil I	24. Desarrollo Infantil II	34. Necesidades Educativas Especiales	44. Historia y su Enseñanza I	54. Historia y su Enseñanza II	64. Gestión Escolar			6/10.5
15. Estrategias para el Estudio y la Comunicación I	25. Estrategias para el Estudio y la Comunicación II	35. Educación Física I	45. Educación Física II	55. Educación Física III	65. Educación Artística III			4/7.0
19. Escuela y Contexto Social	29. Iniciación al Trabajo Escolar	39. Observación y Práctica Docente I	49. Observación y Práctica Docente II	59. Observación y Práctica Docente III	69. Observación y Práctica Docente IV	79. Seminario de Análisis del Trabajo Docente I	89. Seminario de Análisis del Trabajo Docente II	4/7.0
Horas/semana	32	32	32	32	32	32	32	32
Actividades principalmente escrituradas								
Actividades de acercamiento a la práctica escolar								
Práctica intensiva en condiciones reales de trabajo								

Figura 4. Mapa Curricular de la Licenciatura en Educación Primaria. Plan 1997.

Bien, enfatizando en el tema de interés, la revisión del plan y el programa de estudios revelaron que a lo largo de los ocho semestres del programa de formación del profesorado, se proponía el estudio de únicamente dos asignaturas en las que se proponía el trabajo con las matemáticas: *Matemáticas y su enseñanza I* y *Matemáticas y su enseñanza II*, en el segundo y tercer semestre respectivamente.

Su estudio tiene como fin “que los alumnos de las escuelas normales ampliaran y consolidaran sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos que el maestro de educación primaria requería dominar, y comprendieran en qué consistía el enfoque para la enseñanza de esta disciplina” (SEP, 1997; pág. 72), además de “diseñar y aplicar estrategias didácticas para la enseñanza de algunos contenidos propuestos en el currículum de la escuela primaria...” (SEP, 2002; pág. 72).

### 3.1.1.1. Programas de estudio

Matemáticas y su enseñanza I y II son los cuadernos que se distribuyeron gratuitamente a profesores y estudiantes, compuestos de dos partes: el programa de estudios, y los materiales de apoyo para el estudiante.

El trabajo de estas asignaturas fue planteado de seis horas semanales durante un semestre cada uno, en segundo y tercer grado respectivamente.

### 3.1.1.2. Matemáticas y su enseñanza I y II

En los cursos de Matemáticas y su enseñanza I y II se pretendía consolidar en el estudiante los conocimientos básicos de las matemáticas, así como el aprendizaje de las formas de enseñanza para propiciar la construcción de aprendizajes permanentes y significativos (Manteca, 2001).

Cada uno de los cursos estuvo organizado en cuatro bloques temáticos:

Matemáticas y su enseñanza I (108 horas)	Matemáticas y su enseñanza II (108 horas)
<b>Bloque I.</b> Aprender matemáticas al resolver problemas.	<b>Bloque I.</b> La medición.

---

**Bloque II.** Los números naturales y el sistema decimal de numeración.

**Bloque II.** Los números racionales

**Bloque III.** Las cuatro operaciones básicas con números naturales.

**Bloque III.** Proceso de cambio

**Bloque IV.** La geometría.

**Bloque IV.** Tratamiento de la información, predicción y azar

---

En cada bloque se proponían dos tipos de actividades: aquellas que tienen como fin la formación matemática del futuro docente de primaria, y aquellas cuyo propósito es la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje en ese nivel educativo, para lo cual se propone la consulta de otros textos básicos para el desarrollo del curso, los cuales se encuentran en el apartado *bibliografía básica*; además de la *bibliografía complementaria* para ampliar la información de temas específicos.

Los propósitos generales del curso *Matemáticas y su enseñanza I* fueron que los estudiantes: “consolidaran el conocimiento de los contenidos matemáticos fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y comprendieran los distintos significados que adquieren al aplicarlos en distintas situaciones y en la resolución de problemas, que conocieran las características del enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas que enfatiza la construcción de significados a partir de la resolución de situaciones problemáticas, y que conocieran y aplicaran elementos de didáctica de las matemáticas para analizar situaciones de enseñanza y su relación con los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos en los niños” (Manteca, 2001; p. 18)

Mientras que los propósitos generales del curso *Matemáticas y su enseñanza II* fueron que los estudiantes: “adquirieran el dominio de los contenidos matemáticos fundamentales de la educación primaria, así como de los vínculos con los contenidos de la escuela secundaria, a partir de los problemas y de los contextos en los que cobran significado; que conocieran algunas características relevantes de distintos enfoques didácticos para la enseñanza, el estudio y el aprendizaje de las matemáticas. En particular las que destacan la construcción de conocimientos mediante la resolución de problemas; que conocieran y aplicaran aspectos de didáctica de las matemáticas para analizar situaciones de estudio de los distintos temas considerados en los currículos, en particular las propuestas didácticas

contenidas en los materiales que la SEP ha puesto a disposición de los maestros; que conocieran la evolución de ciertas nociones matemáticas en los niños al interpretar los procedimientos que usan para resolver problemas; y que adquirieran los conocimientos necesarios para planear y conducir adecuadamente las actividades en un grupo escolar” (Manteca, 2002; p.16).

Los dos cursos el plan 1997 que se proponían para el estudio de la matemática, se interesaban en el tratamiento del número y dedicaron sólo un bloque en el segundo curso al contenido de la estadística y la probabilidad, se trata del **bloque IV. Tratamiento de la información, predicción y azar**. Para el cual se plantearon 24 horas de trabajo, y tenían como propósitos que el estudiante:

1. Identifique en diversos medios (periódicos, revistas especializadas) la utilización de razones para el tratamiento de la información como son los porcentajes, las tasas, los índices de uso frecuente.
2. Conozca las aplicaciones y limitaciones de las medidas de tendencia central.
3. Analice las oportunidades de ganar en situaciones de probabilidad (volados, lanzamiento de dados, ruletas, rifas, extracciones de urna, etcétera).
4. *Describa los posibles desarrollos de juegos y experimentos aleatorios mediante el uso de diagramas de árbol y otras representaciones intuitivas.*
5. Conozca, de manera general, los contenidos correspondientes a “Tratamiento de la información y predicción y azar”, así como su relación con otros temas de matemáticas o de otras asignaturas de la educación primaria.

Y para lograrlos, se plantean el estudio de los siguientes temas:

- Formas usuales de tratamiento de la información.
- Uso de porcentajes y otros tipos de razones en el tratamiento de la información.
- El promedio (media aritmética), la moda y la mediana.
- Los contenidos del eje Tratamiento de la información a lo largo de la escuela primaria.
- Observación, registro y tratamiento estadístico de los resultados de juegos o experimentos de azar; primeros ejemplos sencillos de simulación.

- La noción frecuencial de la probabilidad y sus aplicaciones a la solución de problemas diversos. La noción de muestra. La proyección a toda una población de los resultados observados en una muestra.
- La fórmula clásica de probabilidad y sus aplicaciones.
- *Diagramas y representaciones intuitivas para la enumeración de casos posibles en el análisis de juegos y experimentos de azar. Aplicaciones de la regla del producto de probabilidades.*
- Tratamiento estadístico de los resultados obtenidos en problemas de probabilidad por simulación.
- Los datos bivariados y su representación por medio de una tabla de contingencia; uso de los datos y de la tabla para estimar diversas probabilidades.
- Los contenidos del eje Predicción y azar en la escuela primaria.
- Sesión de práctica.

### 3.1.1.3. Materiales del curso

*La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* es el paquete didáctico que incluía parte de las actividades de estudio, las cuales podían profundizarse mediante la bibliografía sugerida. En este material, constituido de dos partes, en la segunda es en donde se encontró el contenido de interés para este trabajo.

En el material de apoyo se indica que “para aprender matemáticas, los alumnos necesitan *hacer matemáticas*, es decir, precisan enfrentar numerosas situaciones que les presenten un problema, un reto, y generar sus propios recursos para resolverlas utilizando los conocimientos que ya poseen” (Block, 1997; p. 9). Por tanto, el curso “ofrecía experiencias para ampliar los conocimientos matemáticos que se trabajan en educación primaria y se exploraban problemas que daban sentido y mostraban su utilidad (Block, 1997; p. 9)”.

Los capítulos con referencia a contenido estadístico y de probabilidad en el texto *la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* son:

**Capítulo III.** Tratamiento de la información. En él se abordan los contenidos de recolección, organización y análisis de la información, y

**Capítulo IV.** La predicción y el azar, en el que “se plantean algunas situaciones que permiten analizar las posibilidades de ganar un juego o de que ocurra un determinado evento... Este tipo de situaciones permite una introducción a la probabilidad, sin llegar a cuantificarla.” (Block, 1997; p. 163).

Es en este último capítulo que se identificó una actividad con la que se abordaba la idea de combinatoria, específicamente la **actividad 3**, llamada *juegos combinatorios*. Con la actividad, a través de la resolución de problemas de combinatoria con distintos grados de complejidad, se pretendía que los estudiantes “mejoraran sus procedimientos para determinar todos los casos que se puedan presentar en un juego de azar o en un experimento aleatorio, y de esta manera desarrollen gradualmente la noción de que es más probable o no es probable que ocurra en dichas situaciones. A la vez que los alumnos enfrenten un tipo de problemas poco común que implica la multiplicación” (Block, 1997; p.168).

La actividad se constituye de dos partes: en la primera se proponía a los estudiantes, futuros docentes de primaria, una serie de problemas; en la segunda se les solicitaba clasificar los problemas según su grado de complejidad.

A continuación se presenta una caracterización de los problemas con base en los criterios de análisis.

**Tabla 5.** Análisis de los problemas propuestos para la formación de los futuros profesores en el texto *la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*.

<b>Criterios de análisis</b>	<b>Pareja de niños</b>	<b>Animales extraños</b>	<b>Vestir a la muñeca</b>	<b>Torres de cubos</b>	<b>Llegar de A a B</b>	<b>Placas</b>
<b>Ubicación</b>	Capítulo IV. La predicción y el azar.	Capítulo IV. La predicción y el azar.	Capítulo IV. La predicción y el azar.	Capítulo IV. La predicción y el azar.	Capítulo IV. La predicción y el azar.	Capítulo IV. La predicción y el azar.
<b>Situación</b>	Combinación de parejas	Combinación de partes de animales	Combinación de prendas de vestir	Construcción de torres con cubos	Determinar caminos para ir de un punto a otro	Fabricación de placas
<b>Ideas Fundamentales</b>	Combinatoria	Combinatoria	Combinatoria	Combinatoria	Combinatoria	Combinatoria

<b>Otros conceptos matemáticos</b>	Conteo, número natural, multiplicación	Conteo, número natural, multiplicación	Conteo, número natural, multiplicación	Orden, número natural, conteo	conteo	Número natural
<b>Recursos semióticos</b>	Lengua natural escrita	Lengua natural escrita, dibujos	Lengua natural escrita	Lengua natural escrita	Lengua natural escrita, diagrama	Lengua natural escrita, dibujos
<b>Términos empleados</b>	diagrama de árbol, Cantidad de parejas diferentes	Todos los posibles, Cuántos animales distintos, combinando	Diagrama de árbol, dibujos, de cuántas formas	Más torres diferentes, cuántas torres diferentes, mismos colores, repetir colores, diagrama de árbol	Cuántos caminos, sin pasar dos veces por el mismo punto	Cuántas placas, cuatro cifras

### 3.1.2.Reforma Curricular de la Educación Normal 2012






El diseño curricular está basado en competencias y “...atiende a la imperiosa necesidad de incrementar la calidad y equidad de la educación y asume el reto de formar docentes capaces de responder a los requerimientos que le planteen la educación básica en los tres niveles que la integran” (Diario Oficial de la Federación, 2012, p. 3).

En el mapa curricular (Figura 5) se considera a los cursos en su totalidad como una red en la que se articulan saberes, propósitos, metodologías y prácticas que dan sentido a los procesos formativos. La reforma curricular de la educación normal 2012 estructurada en ocho semestres con cincuenta y cinco cursos, organizados estos en cinco trayectos formativos y un espacio asignado al trabajo de titulación.

Los cursos formativos son: El trayecto pisco-pedagógico, el trayecto preparación para la enseñanza y el aprendizaje, el trayecto lengua adicional y tecnologías de la información y la comunicación, el trayecto de cursos operativos y, el trayecto práctica profesional.



1° Semestre	2° Semestre	3° Semestre	4° Semestre	5° Semestre	6° Semestre	7° Semestre	8° Semestre
El sujeto y su formación profesional como docente 4.4.5	Planeación educativa 4.4.3	Adecuación curricular 4.4.5	Teoría pedagógica 4.4.3	Herramientas básicas para la investigación educativa 4.4.5	Filosofía de la educación 4.4.5	Planeación y gestión educativa 4.4.5	Trabajo de titulación 4.3.6
Psicología del desarrollo infantil (0-12 años) 4.4.5	Bases psicológicas del aprendizaje 4.4.5	Ambiente de aprendizaje 4.4.5	Evaluación para el aprendizaje 4.4.5	Atención a la diversidad 4.4.5	Diagnóstico e intervención socioeducativa 4.4.5	Atención educativa para la inclusión 4.4.5	
Historia de la educación en México 4.4.3		Educación histórica en el aula 4.4.5	Educación histórica en diversos contextos 4.4.5	Educación física 4.4.5	Formación cívica y ética 4.4.5	Formación ciudadana 4.4.5	
Panorama actual de la educación básica en México 4.4.5	Prácticas sociales del lenguaje 6.6.7.5	Proceso de alfabetización inicial 6.6.7.5	Estrategias didácticas con propósitos comunicativos 6.6.7.5	Producción de textos escritos 6.6.7.5	Educación geográfica 4.4.5	Aprendizaje y enseñanza de la geografía 4.4.5	
Aritmética: su aprendizaje y enseñanza 6.6.7.5	Álgebra: su aprendizaje y enseñanza 6.6.7.5	Geometría: su aprendizaje y enseñanza 6.6.7.5	Procesamiento de información estadística 6.6.7.5	Educación artística (música, expresión corporal y danza) 4.4.5	Educación artística (arte: visual y teatro) 4.4.5		Práctica profesional 20.6.4
Desarrollo físico y salud 4.4.5	Acercamiento a la ciencia: natural, en la primaria 6.6.7.5	Ciencia: naturales 6.6.7.5	Optativo 4.4.3	Optativo 4.4.5	Optativo 4.4.5	Optativo 4.4.5	
Las TIC en la educación 4.4.5	Las tecnologías informáticas aplicadas a los centros escolares 4.4.3	Inglés: A1 4.4.5	Inglés: A2 4.4.3	Inglés: B1- 4.4.5	Inglés: B1 4.4.5	Inglés: B1- 4.4.5	
Observación y análisis de la práctica educativa 6.6.7.5	Observación y análisis de la práctica escolar 6.6.7.5	Iniciación al trabajo docente 6.6.7.5	Estrategias de trabajo docente 6.6.7.5	Trabajo docente e innovación 6.6.7.5	Proyecto de intervención socioeducativa 6.6.7.5	Práctica profesional 6.6.7.5	
36 hrs.	36 hrs.	40 hrs.	38 hrs.	36 hrs.	34 hrs.	30 hrs.	24 hrs.
						274 horas	291 créditos

 Psicopedagógico
 Preparación para la Enseñanza y el Aprendizaje
 Lengua Adicional y Tecnologías de la Información y la Comunicación
 Práctica Profesional
 Optativos

**Figura 5.** Mapa curricular de la licenciatura de Educación Primaria. Reforma Curricular 2012.

El conocimiento matemático se encuentra incluido en el trayecto Preparación para la enseñanza y el aprendizaje, el cual está constituido por 20 cursos con actividades teóricas y prácticas.

Con relación al conocimiento matemático se consideran cuatro cursos con una carga de seis horas semanales:

- Aritmética: su aprendizaje y enseñanza.
- Álgebra: su aprendizaje y enseñanza.
- Geometría: su aprendizaje y enseñanza.
- Procesamiento de información estadística.

### **3.1.2.1. Procesamiento de información estadística**

El curso *Procesamiento de información estadística* corresponde al cuarto semestre de los ocho que comprende de la licenciatura en Educación Primaria y está constituido por cuatro unidades de aprendizaje:

1. Estadística. Con este curso se espera la comprensión por parte de los futuros docentes de los conceptos básicos de la estadística que le permitan construir marcos explicativos sobre la realidad educativa, la incorporación de conceptos complejos y la toma de decisiones estadísticas en problemas de la práctica docente.
2. **Probabilidad y Muestreo.** Aborda el estudio de la probabilidad como recurso para dar solución a problemas del campo profesional del docente. Favorece la comprensión de las condiciones que permiten generalizar resultados obtenidos del trabajo con muestras y poblaciones. Los contenidos de esta unidad son los siguientes:
  - 2.1. *Principio fundamental de conteo (permutaciones, combinaciones y ordenaciones).*
  - 2.2. Concepto de probabilidad clásica.
  - 2.3. Bases teóricas del muestro.
  - 2.4. Técnicas de muestreo.
3. Inferencia estadística. Se abordan los conceptos básicos de la estadística inferencial y algunas aplicaciones al ámbito educativo, lo cual permitirá la toma de decisiones basado en un análisis sistemático de datos.

4. Vinculación con el eje manejo de la información. Se pretende el análisis de los programas de la educación básica con base en los conceptos y técnicas estadísticas abordadas durante el curso, y propongan así estrategias didácticas pertinentes al eje manejo de la información. Los contenidos propuestos son: Análisis de los conceptos del eje *manejo de la información* y la estadística en la educación *primaria*: su importancia y retos., y Desarrollo de estrategias didácticas para la enseñanza del eje *manejo de la información*.

Para el tema 2.1. *Principio fundamental de conteo (permutaciones, combinaciones y ordenaciones)*, las estrategias didácticas que se plantean para su estudio son:

Estrategias didácticas	Productos
<p>2.1.1. Realice lecturas críticas de diversos textos con la finalidad de conocer el principio fundamental del conteo: permutaciones, combinaciones y ordenaciones. Se sugiere consultar algunos de los siguientes textos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Batanero, M. C., et al. (1994), Págs. 17-28.</li> <li>- Elorza, H. (2008). Págs. 161-177.</li> <li>- Vilenkin, N. (1972). Págs. 7-8.</li> <li>- Wisniewski, M. y Velasco, G. (2001). Págs. 23-54.</li> </ul>	<p>2.1.1. Resumen sobre el principio fundamental del conteo: permutaciones, combinaciones y ordenaciones, con base en algunos textos sugeridos en la estrategia 2.1.</p> <p>El resumen debe: incluir título y autor, abordar el desarrollo del tema, las conclusiones y las fuentes utilizadas por el autor; debe destacar la relevancia del artículo con relación al tema que se aborda en el curso.</p> <p>Excepto la cita del nombre del autor y el título del artículo, cada uno de los cuatro últimos aspectos se valoran con: 1, baja calidad; 2, calidad media; 3, calidad buena; 4, calidad excelente.</p>
<p>2.1.2. Elabore diagramas de árbol derivados de problemas de conteo. Se sugiere consultar algunos de los siguientes textos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Batanero, M.C., et al. (1994). Págs. 54-56, 140-142, 151-195.</li> <li>- Cruz, M., et al. (1994). Pág. 67</li> </ul>	<p>2.1.2. Colección de problemas resueltos de conteo que involucren el uso de diagrama de árbol.</p> <p>La colección de problemas resueltos debe ser una selección que incluya distintos niveles de dificultad (baja, media y alta).</p> <p>Esta actividad se valora de acuerdo con la siguiente escala: 1, si sólo clasifica, plantea y resuelve correctamente el 50% de los problemas; 2, si sólo clasifica, plantea y resuelve correctamente el 70% de los problemas; 3, si clasifica, plantea y resuelve correctamente el 85% de los problemas; 4, si clasifica, plantea, argumenta y valida diferentes formas de resolución, y resuelve correctamente más del 85% de los problemas.</p>

<p>2.1.3. Resuelva problemas de conteo por medio de permutaciones, combinaciones y ordenaciones. Utilice <i>software</i> para realizar los cálculos en los problemas de conteo que lo requieran. Se sugiere consultar algunos de los siguientes textos:</p> <p>- Batanero, M.C. et al. (1994). Págs. 105-229.</p> <p>- Vilenkin, N. (1972). Págs. 133-147.</p>	<p>2.1.3. A partir de la bibliografía sugerida en la estrategia presentar una colección de problemas de conteo resueltos que involucren el uso de permutaciones, combinaciones y ordenaciones, además de considerar el uso de <i>software</i> para resolver dichos problemas. La colección de problemas resueltos debe ser una selección que incluya distintos niveles de dificultad (baja, mediana y alta).</p> <p>Esta actividad se valora de acuerdo con la siguiente escala: 1, si sólo clasifica, plantea y resuelve correctamente el 50% de los problemas; 2, si sólo clasifica, plantea y resuelve correctamente el 70% de los problemas; 3, si clasifica, plantea y resuelve correctamente el 85% de los problemas; 4, si clasifica, plantea, argumenta y valida diferentes formas de resolución y resuelve correctamente más del 85% de los problemas.</p>
<p>2.1.4. Presentación en equipo sobre el proceso de rendimiento utilizado en la resolución de los problemas de conteo del apartado anterior.</p>	<p>2.1.4. Presentación por equipos del procedimiento de la resolución de los problemas de conteo del apartado anterior con una explicación clara y detallada de los procesos matemáticos utilizados.</p> <p>La presentación debe: describir con claridad los procesos matemáticos para resolver problemas de conteo. Además, la presentación debe contener: los enunciados de los problemas, los distintos procedimientos que se hayan empleado, la identificación de los conceptos matemáticos que se emplean y las conclusiones.</p> <p>Cada uno de los aspectos se valoran con: 1, baja calidad; 2, calidad media; 3, calidad buena; 4, calidad excelente.</p>

### 3.2. Formación del estudiante de Educación básica primaria.

Se analizó la propuesta institucional de la escuela primaria básica, regida actualmente por el Plan de Estudios 2011. El cual, a fin de contribuir en la formación integral del ciudadano mexicano, “define las competencias para la vida, los Estándares Curriculares y los aprendizajes esperados que constituirán el trayecto formativo de los estudiantes.” (SEP, 2011; p. 25). Entendiendo por competencia como “la capacidad de responder a diferentes situaciones, e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como a valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)” (SEP, 2011; p. 29). Por Estándares Curriculares se refiere a descriptores de logro que definen lo que los alumnos demostrarán al finalizar el periodo escolar (SEP,

2011). Y los Aprendizajes esperados, son indicadores de logro que “definen lo que se espera de cada alumno en términos de saber, saber hacer y saber ser...” (SEP, 2011; p. 29).

El mapa curricular está organizado en cuatro campos formativos, los cuales “organizan, regulan y articulan los espacios curriculares” (SEP, 2011; p. 43) y son: Lenguaje y comunicación, Pensamiento matemático, Exploración y comprensión del mundo natural y social, y Desarrollo personal y para la convivencia.

Particularmente, el campo Pensamiento matemático “articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico, el razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para representarla” (SEP, 2011; p. 48).

Para el caso de la educación primaria, el estudio de las matemáticas “considera el conocimiento y el uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición” (SEP, 2011, p. 49), y plantea entre otras cosas desarrollar en el estudiante un pensamiento no determinista al pretender que éstos encuentren diferentes formas de resolver problemas, manejen técnicas de manera diferente, entre otras.

Un aspecto importante marcado en el plan, y que atañe a la práctica del profesor, es la planificación. Pues es un elemento importante de la práctica docente que permite potenciar el aprendizaje del estudiante mediante la organización de actividades que representen para ellos un reto para formular alternativas de solución (SEP, 2011; p.27).

A continuación se muestran los resultados de la revisión de la propuesta institucional de la educación primaria, específicamente lo referente a las matemáticas.

### **3.2.1. Programas de estudio**

A lo largo de la educación básica, la matemática se organizan en tres niveles: primero por ejes temáticos, luego por temas y finalmente por contenidos.

Para la educación primaria, se consideran los ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida y, manejo de la información.

Con el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico se hace alusión al estudio de la aritmética y el álgebra (SEP, 2011a; p. 73)

- La modelización de situaciones mediante el uso del lenguaje aritmético.
- La exploración de propiedades aritméticas, que podrán generalizarse con el álgebra en secundaria.
- La puesta en práctica de diferentes formas de representar y efectuar cálculos.

El eje Forma, espacio y medida integra aspectos de la geometría y la medición (SEP, 2011a; p. 73):

- La exploración de las características y propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos.
- La generación de condiciones para el tránsito a un trabajo con características deductivas.
- El conocimiento de los principios básicos de la ubicación espacial y el cálculo geométrico.

Finalmente, el eje Manejo de la información, en relación con el análisis de la información para la toma de decisiones se orienta a (SEP, 2011a; p. 74):

- La búsqueda, organización y análisis de información para responder preguntas.
- El uso eficiente de la herramienta aritmética que se vincula de manera directa con el manejo de la información.
- La vinculación con el uso de otras asignaturas.

Particularmente, el estudio de la combinatoria, se debiera incluir en el eje Manejo de la información. Ya que es en este eje que se abordan los temas de estadística y probabilidad. En el Tabla 6 presentamos los contenidos de este eje en los grados de tercero a sexto, pues en primero y segundo no se identificó contenido para el eje manejo de la información.

**Tabla 6.** Organización de los contenidos del eje Manejo de la información

Grado	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
<b>Bloque</b>				
<b>I</b>	<p><b>Análisis y representación de datos.</b></p> <p>Representación e interpretación en tablas de doble entrada, o pictogramas de datos cuantitativos o cualitativos recolectados en el entorno.</p>	<p><b>Análisis y representación de datos.</b></p> <p>Lectura de información explícita o implícita contenida en distintos portadores dirigidos a un público en particular.</p>	<p><b>Proporcionalidad y funciones.</b></p> <p>Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario).</p>	<p><b>Proporcionalidad y funciones.</b></p> <p>Cálculo del tanto por ciento de cantidades mediante diversos procedimientos (aplicación de la correspondencia “por cada 100, n”, aplicación de una fracción común o decimal, uso de 10% como base).</p> <p><b>Análisis y representación de datos.</b></p> <p>Lectura de datos contenidos en tablas, gráficas circulares, para responder a diversos cuestionarios.</p>
<b>II</b>	<p><b>Análisis y representación de datos.</b></p> <p>Lectura de información contenida en gráficas de barras.</p>		<p><b>Proporcionalidad y funciones.</b></p> <p>Identificación y aplicación del valor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos.</p>	<p><b>Proporcionalidad y funciones.</b></p> <p>Resolución, mediante diferentes procedimientos, de problemas que impliquen la noción de porcentaje: aplicación de porcentajes, determinación, en casos sencillos, del porcentaje que representa una cantidad (10%, 20%, 50%, 75%); aplicación de porcentajes mayores que 100%.</p> <p><b>Análisis y representación de datos.</b></p> <p>Lectura de datos, explícitos o implícitos, contenidos en diversos portadores para responder preguntas.</p>

III	<b>Análisis y representación de datos.</b>	<b>Análisis y representación de datos.</b>	<b>Proporcionalidad y funciones.</b>	<b>Proporcionalidad y funciones.</b>
	Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información explícita de diversos portadores.	Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información de tablas o gráficas de barras.	Análisis de procedimientos para resolver problemas del tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del factor constante).	Comparación de razones en casos simples. <b>Análisis y representación de datos.</b> Uso de la media (promedio), la mediana y la moda en la resolución de problemas

IV			<b>Proporcionalidad y funciones.</b>	<b>Proporcionalidad y funciones.</b>
			Análisis de las convenciones para la construcción de gráficas de barras.	Comparación de razones del tipo “por cada $n$ , $m$ , mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.

V		<b>Análisis y representación de datos.</b>	<b>Proporcionalidad y funciones.</b>	<b>Proporcionalidad y funciones.</b>
		Identificación y análisis de la utilidad del dato más frecuente de un conjunto de datos (moda)	Relación del tanto por ciento con la expresión “ $n$ de cada 100”. Relación de 50%, 25%, 20%, 10% con las fracciones $1/2, 1/4, 1/5, 1/10$ , respectivamente. <b>Análisis y representación de datos.</b> Cálculo de la meda (promedio). Análisis de su pertinencia respecto a la moda como dato representativo en situaciones diversas.	Resolución de problemas de comparación de razones, con base en equivalencia



El análisis de los programas de estudio no proporciona evidencia tratamiento de la idea de combinatoria en la educación primaria. Por lo que a continuación se presenta los resultados de analizar los libros de texto tanto del alumno como del profesor.

### **3.2.2. Desafíos matemáticos. Libros para el alumno.**

Una herramienta de suma importancia para la enseñanza de las matemáticas, es el libro de texto, ya que representa para el estudiante su principal fuente de información, y complementa para el docente una guía de enseñanza. Por ello es que se revisaron los libros de texto gratuitos utilizados en el presente ciclo escolar de los seis grados, pues a pesar de que en los programas no se refleje el estudio en la combinatoria dentro del eje Manejo de la información, esto no deja excentos los contenidos de los ejes restantes, pues de acuerdo con la revisión realizada por Rivera (2013), hay evidencia de actividades en los que se trabaja la idea de combinatoria desde el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico. Los textos que se analizaron fueron los siguientes:

- Balbuena (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el estudiante. Primer grado.* Segunda edición. México. SEP.
- Balbuena (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el estudiante. Segundo grado.* Segunda edición. México. SEP.
- Balbuena (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el estudiante. Tercero grado.* Segunda edición. México. SEP.
- Balbuena (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el estudiante. Cuarto grado.* Segunda edición. México. SEP.
- Balbuena (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el estudiante. Quinto grado.* Segunda edición. México. SEP.
- Balbuena (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el estudiante. Sexto grado.* Segunda edición. México. SEP.

A continuación se muestra los resultados de la revisión de los libros de texto de educación primaria, para lo cual fue considerada la célula de análisis de la enseñanza de Ojeda (2006), en la que se proponen cinco criterios de análisis:

- a) Ideas fundamentales de estocásticos.
- b) Otros conceptos matemáticos, aritméticos por ejemplo.
- c) Recursos semióticos empleados para organizar y tratar datos como tablas, figuras, gráficas, simbología matemática, lengua natural.
- d) Tipos de situaciones planteadas para la enseñanza de la combinatoria.
- e) Términos utilizados para hacer referencia a conceptos estocásticos.

### **3.2.2.1. Segundo grado**

Pese a que en el programa de estudio el eje manejo de la información se encuentra ausente para este grado escolar, se identificó una lección que hace referencia al trabajo con combinaciones.

**Lección 46. Trajes.** La lección se encuentra ubicada en el bloque IV (Anexo A) y tiene la intención de que “los alumnos usen la multiplicación como una forma de resolver problemas que implican arreglos rectangulares” (Balbuena, 2014b; p. 140). La lección consta de dos consignas propuestas para el estudiante con dos actividades cada una. Tres actividades consisten en realizar diferentes arreglos con dos conjuntos de objetos dados: faldas y blusas, focos y lámparas, shorts y playeras; y una cuarta actividad consiste en que dadas tres fichas con un número diferente en cada una, los estudiantes deben formar todas las posibles cantidades de dos cifras con ellas.

En esta lección se encuentran implicadas las ideas de principio multiplicativo y variación de tres elementos tomados dos a la vez.

En la tabla 7 se presenta el análisis de la lección bajo los criterios de la célula de análisis (Ojeda, 2006).

**Tabla 7.** Caracterización de la lección 46 del bloque IV “Trajes”, del libro de texto de segundo grado

<b>Situación</b>	<b>Ideas fundamentales</b>	<b>Otros conceptos matemáticos</b>	<b>Recursos semióticos</b>	<b>Términos empleados</b>
<b>Combinación de prendas de vestir</b>	Combinatoria	Conjunto, conteo, multiplicación, número natural	Lengua natural escrita, dibujos	Cuántas maneras diferentes, cuántas formas
<b>Combinación de lámparas y focos</b>	Combinatoria	Conjunto, conteo, multiplicación, número natural	Lengua natural escrita, dibujos	Cuántas combinaciones
<b>Determinación de cantidades diferentes de dos cifras dados tres números</b>	Combinatoria	Conjunto, orden, número natural	Lengua natural escrita, dibujos	Cuántos números diferentes.

### 3.2.2.2. Cuarto grado

El libro de texto de cuarto grado está compuesto por 85 lecciones y un anexo de material recortable. Del total de lecciones propuestas para este grado sólo una lección aborda ideas de la combinatoria.

**Lección 13. Combinaciones.** La lección corresponde al bloque I (Anexo B) y se compone de una sola consigna con tres problemas. El primero demanda al estudiante determinar el número de casas distintas que se pueden formar dados cuatro triángulos y tres rectángulos, todos de diferentes colores. El segundo problema consiste en determinar cuántos postres diferentes se pueden servir, sabiendo que hay ocho frutas sobre las cuales elegir y dos acompañamientos distintos (nieve de limón o chile piquín). La tercer y última actividad, ubica al estudiante en determinar el número de parejas diferentes que pueden formarse con 18 mujeres y 15 hombres.

En la tabla 8 se muestran las características de la lección de acuerdo con los criterios de la célula de análisis Ojeda (2006).

**Tabla 8.** Caracterización de la lección 13 del bloque I “Combinaciones”, del libro de texto de cuarto grado.

<b>Situación</b>	<b>Ideas fundamentales</b>	<b>Otros conceptos matemáticos</b>	<b>Recursos semióticos</b>	<b>Términos empleados</b>
<b>Combinación de figuras geométricas para formar casas, combinación de frutas y acompañamientos para posibles menús, y combinación de personas para formar parejas.</b>	Combinatoria	Conjunto, conteo, multiplicación, número natural	Lengua natural escrita, dibujos	Cuántas maneras diferentes, cuántas formas.

### **3.2.3. Desafíos matemáticos. Libros de texto para el maestro.**

Una vez que fueron identificadas las lecciones en los libros de texto para el alumno en los que, si no de manera explícita, implícitamente puede el docente advertir la presencia de la combinatoria y así motivar y orientar al alumno hacia su estudio, se revisaron también los libros para el maestro.

Para el caso de la lección 46 del libro de segundo grado (Anexo C), en el apartado de *consideraciones previas* se propone que sea el docente quien aclare desde el principio que cualquier blusa puede usarse con cualquier falda. Se prevén también algunos posibles razonamientos que los estudiantes pudieran utilizar para la solución de las consignas planteadas: uso de material manipulable o bien uso de una tabla de doble entrada. Se señala que el profesor debe observar al estudiante mientras trabaja a fin de poder indicar qué procedimientos son los que se pueden llevar a discusión. Se recomienda también, en caso de no utilizarla como procedimiento, proponer la multiplicación como estrategia para resolver el problema.

En las consideraciones hechas al profesor en el libro de cuarto grado se indica que las consignas establecidas en la lección 13 “combinaciones” (Anexo D) se pueden establecer una doble relación de proporcionalidad. Se señala que se espera que los estudiantes

descubran que el problema se resuelve con una multiplicación y muestran algunas posibles estrategias que los estudiantes pueden utilizar:

- Dibujar todas las combinaciones de casas.
- Sumar  $4 + 4 + 4$ , pensando en las cuatro combinaciones diferentes que se pueden armar con cada uno de los tres rectángulos.
- Sumar  $3 + 3 + 3 + 3$ , considerando que con cada triángulo se pueden formar tres casas diferentes.
- Multiplicar  $3 \times 4$  (o  $4 \times 3$ )

En el libro también se prevé que un primer acercamiento puede ser a través de una representación gráfica (diagrama de árbol), sin embargo no se pierde de vista el interés de que el problema sea resuelto por medio de una operación aritmética.

Es importante señalar que en todas las lecciones se indica poner especial atención en los procedimientos de los estudiantes a fin de poder identificar errores y dificultades. De igual modo lo invitan a la reflexión de acciones que permitan alumno avanzar en las actividades y proponer mejoras para las consignas.

### **3.3. Comentarios finales**

En los programas de estudio de los seis grados no se identificó evidencia que nos lleve a pensar que se abordan ideas de la combinatoria en la educación primaria. Más bien, el contenido comprendido en el eje Manejo de la información, como su nombre lo dice, hace referencia al tratamiento y representación de datos obtenidos de diversas fuentes. Debemos mencionar que se prestó mayor atención a este eje temático debido a que es el que comprende nociones estadísticas y probabilidad.

En contraposición a los programas de estudio, en los libros de texto de segundo y cuarto se identificaron dos lecciones, una por grado, que no perteneciendo al eje Manejo de la información (por el tratamiento que se propone para las consignas) sino al eje Sentido numérico y pensamiento algebraico, mostraban en su estructura requerimientos de la combinatoria para poder ser resueltos, sin embargo y como ya lo hemos mencionado, al ser una lección que pertenece a un eje ajeno al que incumben los temas de la probabilidad y la

estadística, da pie a pensar que lo que se busca con ese tipo de actividades, más que intentar desarrollar en el estudiante un pensamiento no determinista, es la práctica de operaciones aritméticas con números naturales, tales como la suma y la multiplicación.

Es importante hacer hincapié acerca de lo último mencionado, pues si bien la teoría indica que es factible el trabajo de la combinatoria, siendo esta una de las diez ideas fundamentales que permiten la posterior formalización de la probabilidad y siendo que la probabilidad adquiere cada vez mayor importancia por el papel que juega en el desarrollo tecnológico, esto no se ve reflejado en la manera en cómo se propone la formación de un estudiante respecto a este contenido. Pues lo que en la propuesta institucional se refleja es una matemática determinista que fija su atención sólo en la ejercitación de las operaciones elementales, dejando de lado lo importante que resulta para el educando el esclarecer la razón por la que la estadística y la probabilidad requieren de un tratamiento diferente del álgebra, la geometría y demás campos de la matemática.

Sin embargo, la ausencia de contenido explícito de la combinatoria en la propuesta institucional, no significa que durante su formación en la educación primaria, el estudiante no aborde nociones que resultan necesarias para la comprensión de la combinatoria, tales como orden; aunque con otro significado la operación de multiplicación, la adición, y la idea de conjunto son algunas de ellas.

De acuerdo con el análisis realizado de los libros de texto, podemos señalar que las situaciones en las que se ubica al estudiante en las lecciones identificadas son situaciones que si bien pudieran estar relacionadas con aspectos de la cotidianidad de los niños, se trata de situaciones típicas de los libros de texto que poco o nada atraen la atención, como lo son la combinación de prendas de vestir y las distintas formas de servir un postre.

Los recursos semióticos utilizados son, en general, la lengua natural escrita, los dibujos, y tablas en algunos casos.

Respecto a los términos utilizados que facilitaron identificar la idea de combinatoria están relacionados con el tipo de cuestionamientos de las consignas para los estudiantes, tales como: de cuántas formas, formas diferentes, combinaciones, etc.

En este punto debemos enfatizar en lo importante que resulta el uso correcto de los términos, o bien, aclarar a lo que se refieren; pues son varios los términos que usados en la

matemática, tienen un significado distinto para el uso de la vida cotidiana. Por ejemplo, en las lecciones identificadas, si bien una de ellas se llama “combinaciones”, lo que realmente se debiera trabajar en las consignas es el principio multiplicativo. Lo cual puede dar pie a futuras confusiones.

Ahora bien, de la revisión de la propuesta institucional de la Licenciatura en Educación Primaria, tanto el programa de estudios del segundo curso de *Matemáticas y su enseñanza*, como el material propuesto para el estudiante se corresponden. Pues en ambos documentos se contempla el estudio de la combinatoria como tema de trabajo en la escuela primaria. Sin embargo, es importante hacer énfasis en que, al igual que en reformas de educación básica anteriores, el espacio que se le dedica es mínimo, distribuyendo la lección en únicamente dos hojas. Además de que su tratamiento se propone para el último de los bloques en que se organiza el contenido matemático, reflexionando sobre esta situación reconocemos que esto representa una desventaja para la estadística y la probabilidad, ya que por factores que muchas veces son ajenos a la institución y profesores, son temas que no se logran abordar, y si se hace, es de manera muy superficial.

Caso diferente el que se pretende con la reforma para la formación de los docentes, pues hoy en día se dedica un curso completo para el tratamiento de la probabilidad y la estadística al que denominan “Procesamiento de información estadística”, del cual, una de las cuatro unidades temáticas que lo comprenden se dedica al trabajo de los Principios y técnicas de conteo.

Haciendo una comparación (Tabla 9) entre el contenido de la combinatoria de la formación que recibe el docente en su camino como futuro profesor y las exigencias de su práctica en la escuela primaria, centrándonos primero el plan 1997 que es la formación que recibieron los docentes que actualmente se encuentran en servicio, podemos señalar que no hay una total correspondencia con lo que actualmente rige la educación primaria, pues como ya se mencionó, en ninguno de los programas de estudio correspondientes a este nivel, se identificó evidencia explícita del trabajo con la combinatoria; más bien, las lecciones en los libros de texto que en segundo y cuarto grado se identificaron, pertenecen al eje Sentido numérico y pensamiento algebraico, lo que indica que las actividades propuestas se abordan desde una perspectiva aritmética, es decir, totalmente determinista.

Realizando la comparación respecto del plan 2012, la falta de correspondencia se da en otro sentido, pues si bien en la formación del profesor se da mayor importancia al estudio de la combinatoria, en la propuesta institucional para la escuela primaria actualmente es mínima la actividad que para el alumno se propone. Esto se refleja en la reducción de las lecciones para abordar este contenido. Rivera (2013) identificó más de tres lecciones en las que se abordaba el principio multiplicativo, combinaciones, permutaciones, etc, siendo que en la revisión recientemente realizada únicamente se identificaron dos, donde además se sigue enfatizando en el uso de las operaciones aritméticas, dejando de lado las representación gráfica (diagrama de árbol) como modelo explicativo para lograr un razonamiento con mayor grado de formalización.

**Tabla 9.** La combinatoria en las propuestas institucionales.

<b>Combinatoria en la formación del profesor</b>		<b>Combinatoria en la escuela primaria</b>
Plan 1997	Plan 2012	Plan 2011
<p><b>Propósito:</b> describir los posibles desarrollos de juegos y experimentos aleatorios mediante el uso de diagramas de árbol y otras representaciones intuitivas.</p> <p>Tema: diagramas y representaciones intuitivas para la enumeración de casos posibles en el análisis de juegos y experimentos de azar. Aplicaciones de la regla del producto de probabilidades.</p> <p>Actividad propuesta: “juegos combinatorios”.</p> <p>Consiste en un listado de problemas con distinto grado de complejidad.</p>	<p><b>Unidad temática:</b> Principio fundamental de conteo (permutaciones, combinaciones y ordenaciones), concepto de probabilidad clásica, bases teóricas del muestro y, técnicas de muestreo.</p> <p><b>Actividades planteadas:</b> lecturas para conocer el principio fundamental del conteo, resolución de problemas por medio de la elaboración de diagramas de árbol y resolución de problemas por medio de las técnicas de conteo, describiendo claramente los procedimientos matemáticos llevados a cabo para la solución.</p>	<p>Se identificó una lección en los libros de segundo y cuarto grado respectivamente.</p> <p>En las consignas se aborda generalmente el principio multiplicativo pero en un sentido determinista, es decir, las consignas son utilizadas sólo para el ejercicio de técnicas que pudieran facilitar la operación multiplicación.</p>



La situación resulta aún más grave cuando en el libro de apoyo para el profesor se continúa proponiendo un tratamiento determinista para las consignas, señalando que es el profesor quien debe inducir al estudiante al uso de alguna operación, ya sea suma o multiplicación, para resolver los problemas planteados. Quitando así al estudiante la opción de error y la capacidad de reflexión sobre su acción que le permita mejorar su desempeño.

Toda esta situación que se refleja en las propuestas institucionales, tanto de la formación del futuro profesor como de los estudiantes de educación primaria, da evidencia de la necesidad de proponer material para el profesor que sirva de apoyo para abordar estos temas dentro del aula de clases. Desde la perspectiva de nuestros elementos teóricos podemos señalar que hoy día el tratamiento que se da a la combinatoria en la primaria no es del todo correcto, es necesario que los problemas que se propongan al estudiante dejen clara la diferencia entre los fenómenos que se pueden abordar desde la combinatoria y los fenómenos que se abordan desde otras áreas de la matemática, y puedan entonces mirar el significado diferente que adquiere la multiplicación, siendo que es el principio multiplicativo de mayor concurrencia.

Es por ello que en el siguiente capítulo se propone, desde la postura teórica de Steinbring (2005), planeaciones que puedan servir al docente como guía para abordar las actividades.

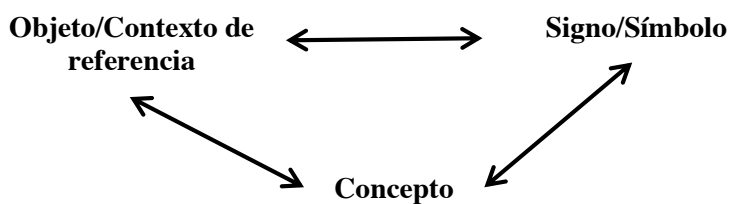
# Capítulo 4

Alternativa de enseñanza  
para la combinatoria en la  
escuela primaria

#### 4. Alternativa de enseñanza para la combinatoria en la escuela primaria

Las actividades que a continuación se describen fueron pensadas para la construcción intuitiva de la combinatoria en el aula de la escuela primaria, en ellas se abordan los principios básicos de conteo: aditivo y multiplicativo y las técnicas de conteo: combinaciones, variaciones y permutaciones.

La estructura de las actividades se adecua a lo propuesto por Steinbring (2005) en el triángulo epistemológico (Figura 6) sobre lo necesario para la constitución de un concepto matemático. Es por ello que se presentan los elementos del triángulo correspondientes a cada actividad.



**Figura 6.** Triángulo epistemológico de Steinbring.

Por otro lado, debido a que las actividades están pensadas para implementarse en la educación primaria se retoma lo que señala Fischbein (1975) acerca de las intuiciones, de manera que se sugiere el uso de material concreto.

Cabe señalar que las actividades son una propuesta alterna a las que se presentan en los libros de texto. En ellas, a diferencia de las establecidas institucionalmente, no prevalece el ejercicio de la multiplicación sino que se prioriza el trabajo con las técnicas de conteo aunque no de un modo sistemático.

##### 4.1. Consideraciones previa

**Contenido:** Principio y técnicas de conteo.

**Tiempo requerido:** El que se considere conveniente

**Objetivo:**

- Que el estudiante distinga la diferencia entre situaciones azarosas y deterministas.

- Que el estudiante de educación básica desarrolle su pensamiento combinatorio a nivel intuitivo.

**Estrategia didáctica:**

A manera de actividad introductoria se plantearán al estudiante las siguientes situaciones:

- ¿Qué pasa si lanzamos una pelota al aire?
- ¿Qué pasa si lanzamos un dado? ¿Qué cara del dado quedará en la parte superior?

El objetivo de invitar a la reflexión a los estudiantes con este tipo de interrogantes es que analicen la diferencia que existe entre situaciones en las que es posible predecir el resultado que se obtendrá antes de realizar la acción: fenómenos deterministas, y aquellas situaciones en las que no es posible determinar el resultado, pues este depende del azar: fenómenos aleatorios.

Corresponde entonces al profesor esclarecer que no es posible conocer con exactitud el resultado que se obtendrá al ejecutar un fenómeno aleatorio, que el conocer las condiciones en las que se lleva a cabo nos permite determinar cuáles son los resultados posibles de obtener.

Luego se ha de proceder presentando fenómenos aleatorios explicitando todos los posibles resultados, como por ejemplo el lanzamiento de una y dos monedas, de un dado y una moneda, extracción de una ficha o pelota, etc.

Un vez distinguido tal diferencia, se proponen desarrollar estas cinco actividades. En cada una de ellas se trabaja algún principio o técnica de conteo específico. Estas actividades pueden ser adaptadas a cualquiera de los dos grados en que se identificó el contenido de combinatoria, modificando las cantidades y el nivel de razonamiento alcanzado.

## 4.2. Descripción de las actividades:

### 4.2.1. Parejas de baile

Se acerca el festival del día de las madres en la escuela primaria José Martí y la maestra de danza desea colaborar en el programa organizando con sus estudiantes un baile tradicional del estado de Guerrero.



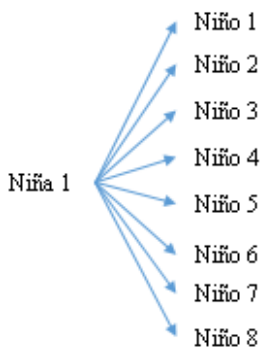
La maestra tiene dudas sobre cómo formar las parejas de baile, pues de la elección que realizó quedó un grupo de 9 niñas y 8 niños.

¿Cuántas parejas de baile diferentes se podrán formar con los integrantes del grupo de danza?

El propósito de la actividad es abordar el principio multiplicativo. La situación consiste en formar parejas de baile con los integrantes del grupo de danza para participar en el programa del festival que con motivo de celebrar el día de las madres se está organizando en la escuela.

Se puede iniciar la interacción con los niños suponiendo que el grupo está integrado por solo un niño y una niña, preguntando entonces ¿cuántas parejas de baile se podrán formar? Luego aumentar la cantidad de niños o niñas, o bien ambas, y continuar con la misma discusión.

**Tabla 9.** Elementos del triángulo epistemológico correspondientes al problema “parejas de baile”

Objeto	Concepto	Signo
Parejas de baile	Principio multiplicativo	$9 \times 8$
		Aplicación reiterada del siguiente diagrama:  <p style="text-align: center;">Niña 1</p> <p style="text-align: right;">Niño 1 Niño 2 Niño 3 Niño 4 Niño 5 Niño 6 Niño 7 Niño 8</p>
		Niña 1-Niño1, Niña 1-Niño2, Niña 1-Niño 3, Niña 1-Niño 4, Niña 1-Niña 5, Niña 1-Niño 6, Niña 1-Niño 7, Niña 1-Niño8...

Para resolver el problema es importante considerar el hecho de que cada niño puede bailar con todas las niñas, o bien que cada niña puede formar una pareja de baile con cada niño. De tal forma que puedan percatarse que con cada niño en el grupo de danza pueden formarse tantas parejas de baile como niñas haya, o bien, que con cada mujer pueden formarse tantas parejas de baile como niños en el grupo haya. Cabe señalar que de ser necesario y para evitar confusiones, el docente debe aclarar que cada pareja debe estar formada por un niño y una niña.

La solución al problema sugiere varias representaciones, puede representarse mediante un diagrama de árbol, mediante un dibujo de todas las parejas posibles antecediendo a esto la asignación de un número o una letra a cada niño o niña o mediante la multiplicación del número de niños por el de niñas.

La actividad puede trabajarse por equipos de dos o tres alumnos. Se propone el uso de fichas de diferentes colores para representar a cada uno de los integrantes del grupo de danza. La

tarea del docente consistiría en orientar a los alumnos a encontrar una forma que les permita llevar un registro para poder tener control de todas las combinaciones y no repetirlas.

Otra manera de abordar el problema promoviendo la participación de los alumnos es eligiendo un determinado número de niños y de niñas del mismo grupo, pedirles pasen al frente y en la interacción con el grupo registrar y encontrar todas las posibilidades.

#### 4.2.2. Hora de receso

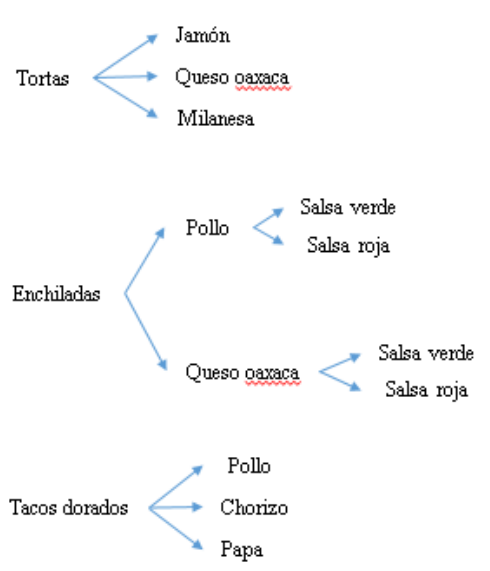
*En la escuela primaria Emiliano Zapata, a la hora de recreo tres señoras venden antojitos para almorzar.*

*Doña Mari prepara tortas de Jamón, queso oaxaca y milanesa. Doña Rosa prepara unas ricas enchiladas de pollo y queso oaxaca en salsas verde y roja. Y Doña Bety vende deliciosos tacos dorados de pollo, chorizo y papa.*

*¿Cuántas maneras diferentes tienen los niños de la escuela de elegir su almuerzo?*



**Tabla 10.** Elementos del triángulo epistemológico correspondientes al problema “Hora e receso”

Objeto	Concepto	Signo
Elección del almuerzo	Principio multiplicativo y principio aditivo	$(1 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 3) = 3 + 4 + 3 = 10$
		 <pre> graph LR     Tortas --&gt; Jamon     Tortas --&gt; QuesoOaxaca     Tortas --&gt; Milanesa     Enchiladas --&gt; Pollo     Enchiladas --&gt; QuesoOaxaca     Pollo --&gt; SalsaVerde1[Salsa verde]     Pollo --&gt; SalsaRoja1[Salsa roja]     QuesoOaxaca --&gt; SalsaVerde2[Salsa verde]     QuesoOaxaca --&gt; SalsaRoja2[Salsa roja]     TacosDorados --&gt; Pollo2     TacosDorados --&gt; Chorizo     TacosDorados --&gt; Papa     </pre>

El propósito de la actividad es tratar el principio aditivo en una situación en la que se requiere de hacer una elección que tiene formas alternativas de ser realizada, y estas a su vez pueden efectuarse de maneras distintas.

La solución a este problema puede abordarse con el trabajo en equipo o de manera individual. Igual que en la actividad anterior, puede sugerirse abordar la el problema inicialmente con una cantidad menor de elementos, por ejemplo: un solo antojito que puede ser preparado con dos ingredientes distintos.

Una vez abordadas estas dos actividades se podrá discutir con los estudiantes lo conveniente de resolver la solución con otro tipo de representaciones como lo son el diagrama de árbol, el cual sugerirá a su vez dar solución a este tipo de problemas mediante una multiplicación y posteriormente una suma.



### 4.2.3. Torneo de futbol.

En el Barrio de San Mateo se llevará a cabo un torneo de futbol. Se inscribieron cuatro equipos con los siguientes nombres: Chivas, Avispones, Pumitas y Aguilitas. Cada equipo debe jugar con cada uno de los otros equipos un partido de ida y otro de vuelta, es decir, uno en su cancha y otro en la cancha del equipo contrario, ¿cuántos partidos se jugarán en el torneo?



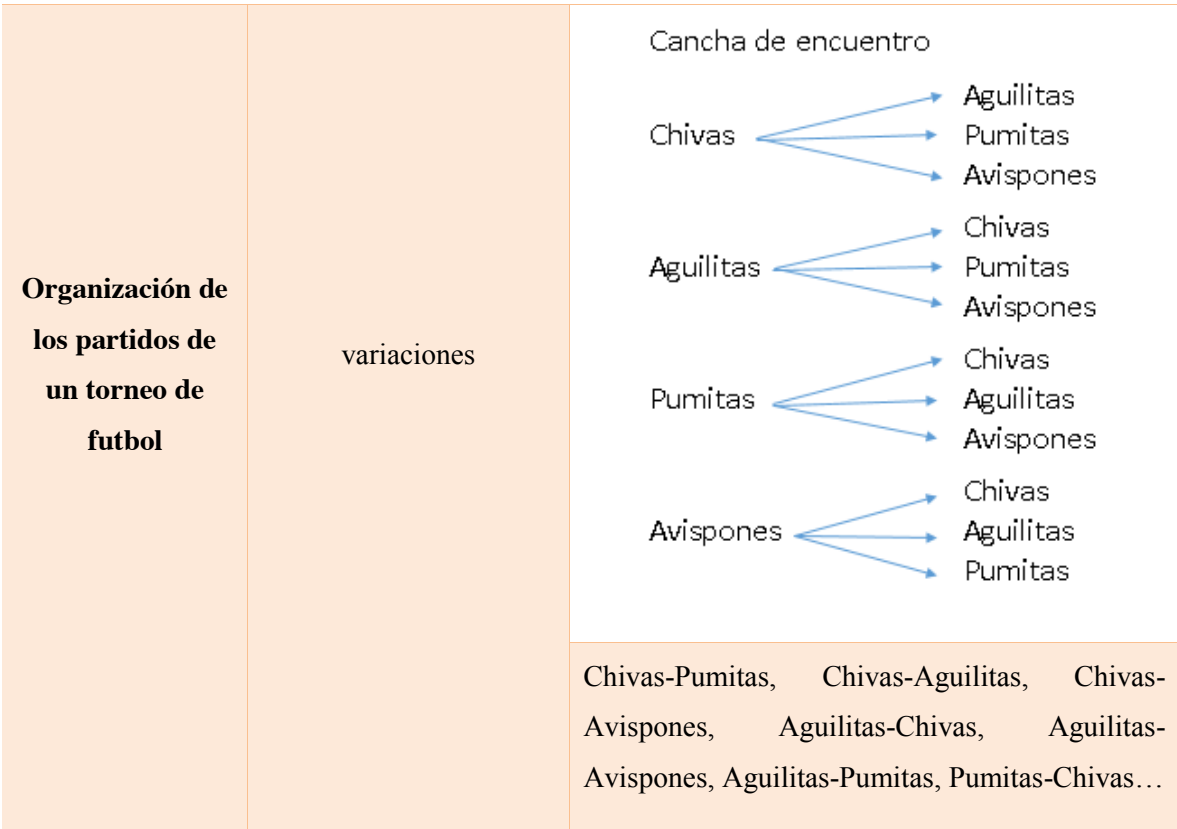
El problema fue retomado de Rivera (2013), está planteado para abordar la técnica de conteo de las variaciones.

La discusión ahora ha de centrarse la importancia del orden en que han de elegirse los equipos que protagonizarán los encuentros en cada cancha y cómo es que esta nueva condición afecta el número de posibles encuentros que se puedan organizar.

Como material físico que los estudiantes puedan manipular se sugiere tarjetas suficientes con las camisetas de los equipos plasmadas.

**Tabla 12.** Elementos del triángulo epistemológico correspondientes al problema “Torneo de Futbol”

Objeto	Concepto	Signo
		$V_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 4 \times 3 = 12$



**4.2.4. Comité es colar.**

*Al iniciar el curso la profesora de 5° “B” ha decidido formar un comité de tres estudiantes para que represente al grupo en las actividades escolares. Para seleccionarlo, los mismos miembros del grupo han propuesto a cinco de sus compañeros (Alejandra, Sara, Ricardo, Diego y Valeria).*

*¿Cuántos comités podrían formarse con los candidatos propuestos si uno de ellos ocupará el papel de jefe de grupo, otro de secretario y otro de tesorero?*



Con la solución y discusión de las actividades anteriores, el estudiante tendrá noción de cómo resolver este tipo de problemas. Para promover la interacción entre iguales y la interacción alumno-profesor. Puede solicitarse a cinco de los estudiantes pasar al frente de tal manera que expresen sus opiniones sobre cómo podrían quedar conformados los distintos comités, o bien que sean ellos quienes representen la propuesta para poder formarlos.

Esta actividad también permite el uso de material manipulable identificando a cada estudiante con fichas de diferente color. De igual manera que en la actividad anterior, se debe recalcar en la importancia del orden en que se consideren los elementos.

**Tabla 13.** Elementos del triángulo epistemológico correspondientes al problema “Comité escolar”

Objeto	Concepto	Signo
Elección de los representantes del grupo	Permutaciones	$P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$
		<p>Alejandra-Sara-Ricardo, Alejandra-Sara-Diego,                      Alejandra-Sara-Valeria, Alejandra-Ricardo-Sara,                      Alejandra-Ricardo-Diego, Alejandra-Ricardo-Valeria,                      Alejandra-Diego-Sara, Alejandra-Diego-Ricardo,                      Alejandra-Diego-Valeria, Alejandra-Valeria-Sara,                      Alejandra-Valeria-Ricardo, Alejandra-Valeria-Diego...</p> <p>Doce posibles comités fijando el primer elemento, por tanto en total podrían fijarse <math>12 \times 5 = 60</math>.</p>

#### 4.2.5. La clausura

Alejandra sabe hacer cinco diferentes tipos de flores de papel como las siguientes:



Este año termina la primaria y ha decidido regalarles a sus compañeras un ramito de tres flores diferentes como recuerdo de su clausura. Quiere saber ¿Cuántos ramos diferentes podría formar? Ayúdale

Retomado de Rivera (2013), con el problema se pretende trabajar la idea de combinaciones. Es importante distinguir que a diferencia de los problemas anteriores las distintas agrupaciones que se pueden formar con todos los elementos dados y en el que sólo utilizan tres para cada agrupación, la diferencia radica en los elementos que componen cada arreglo y no la colocación de éstos.

**Tabla 14.** Elementos del triángulo epistemológico correspondientes al problema “Comité escolar”

Objeto	Concepto	Signo
Elaboración de ramitos de flores	Combinaciones	$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)} = \frac{60}{6} = 10$
		<p>Con la previa etiquetación de los elementos:</p> <p>1-2-3, 1-2-4, 1-2-5, 1-3-4, 1-3-5, 1-4-5, 2-3-4, 2-3-5, 2-4-5, 3-4-5.</p>

#### 4.1. Comentarios sobre las actividades

- Para el nivel educativo que se plantean las actividades no es necesario formalizar términos o enunciar resultados, pues como ya se ha mencionado, y de acuerdo con lo que señala Fischbein (1975), es más conveniente ofrecer a los estudiantes que permitan desarrollar intuitivamente las estructuras mentales que posteriormente le permitan comprender y formalizar los principios básicos de conteo y las técnicas de conteo.
- Lo importante es ofrecer a los estudiantes la oportunidad de desarrollar por cuenta propia técnicas y métodos para resolver problemas combinatorios.

# Capítulo 5

Conclusiones

## 5. Conclusiones

Hoy día en el desarrollo de los avances tecnológicos que en la actualidad nos permiten reconocer y transformar aquello que nos rodea, intervienen fenómenos que se pueden modelar a través de la probabilidad, es por ello que hoy día el aprendizaje de la estadística y la probabilidad se ha convertido en componente necesario para la formación integral de cualquier ser humano.

Dentro de la matemática, la base para la comprensión de los conceptos probabilísticos formales la representa el desarrollo de un razonamiento combinatorio correcto. Sin embargo, estudios sobre el aprendizaje de los principios y técnicas de conteo arrojan una serie de errores y dificultades en estudiantes de niveles educativos superiores. Cabe entonces preguntarse qué se aprende en la educación básica para tener esos resultados en el nivel superior.

Rivera (2013) reporta que en la educación primaria, en México, se atiende a elementos que contribuyen al aprendizaje de la combinatoria, sin embargo las dificultades para identificar tales elementos en los problemas combinatorios evitan que sean solucionados convenientemente. Esto da muestra del limitado nivel de razonamiento combinatorio que es desarrollado por los estudiantes de educación básica, lo cual lleva a preguntarnos ¿Cómo se plantean los conocimientos de combinatoria en la propuesta institucional de formación del docente de primaria y de su quehacer profesional? Atendiendo a esta interrogante, en este estudio se identificaron algunas cuestiones importantes:

- De la revisión de la propuesta institucional de la formación del docente podemos concluir que a pesar de que en la nueva reforma se propone dedicar más tiempo para su estudio a diferencia del plan anterior (plan 1997), las actividades para los futuros profesores se plantean con muy poca profundidad al pretender que éstos solamente conozcan y resuelvan problemas combinatorios, enfocándose más en el producto que en la acción de reflexión.
- En la propuesta institucional de educación primaria, pese a la importancia que señala la literatura especializada de formar ciudadanos críticos con una adecuada formación estadística y probabilística, en las reformas educativas de la educación básica no se presta el mayor interés, pues en los últimos años las lecciones dedicadas al estudio

específico de la combinatoria se ha reducido únicamente a dos temas en los seis años que comprende la primaria, además de solo atender dos o tres temas de la combinatoria.

- Las lecciones identificadas en los libros de texto atenderían el trabajo del principio multiplicativo y las variaciones, sin embargo, incluso en las consideraciones presentadas para el docente en el libro para el profesor, se propone para estas actividades un tratamiento determinista que sirva sólo para la ejercitación de la multiplicación en sus diferentes formas de ser realizada (como suma reiterada por ejemplo).
- Las situaciones contextuales que se manejan en los libros de texto responden a situaciones típicas que poco o nada llaman la atención de los estudiantes para que los problemas sean reflexionados y solucionados.
- Consideramos importante atender el tema del lenguaje utilizado, pues la combinatoria no se trata únicamente de realizar combinaciones en el sentido estrictamente matemático, sino que abarca dos principios fundamentales (multiplicativo y aditivo), y tres importantes técnicas de conteo (permutación, variación y combinación). Entonces, el llamar “combinaciones” a una lección en la que no se trabajan únicamente combinaciones o bien, llamar combinaciones a todos los arreglos puede ser causa de confusiones en los niveles educativos avanzados.
- Debemos mencionar que el contenido encontrado no se refleja en el plan y los programas de estudio, pues resultado del análisis no se encontró evidencia del trabajo de la combinatoria en la escuela. Era de esperarse que el contenido de este tópico estocástico se viera reflejado en el eje temático “manejo de la información” dado que es ese eje que consideran los temas de la estadística y la probabilidad. Sin embargo, la ausencia del contenido fue un factor que ayudó a deducir que las lecciones indicadas (núm. 46 de 2° y núm. 13 de 4°) no asumían más que un tratamiento aritmético y por tanto, determinista.

Por tanto, de manera general podemos concluir que tanto en documentos oficiales de formación de profesores como de enseñanza en la escuela primaria el tratamiento de la combinatoria es limitado y poco profundo, incluso determinista en la escuela primaria.



Ahora bien, contrastando la formación que recibe el docente de primaria con su quehacer profesional, se puede decir que existe una desvinculación entre los mismos, pues mientras el docente recibe una formación que manera general le permite conocer las técnicas de conteo y el diagrama de árbol, en su quehacer diario no enfrentará el reto de proponer para sus estudiantes actividades que los saquen de su zona de confort y los obliguen a razonar de una manera no determinista.

Entonces, desde la perspectiva teórica que sustenta esta investigación consideramos importante la reflexión de los docentes respecto de la enseñanza de este contenido, ya que más que la práctica de las operaciones aritméticas (suma y multiplicación) se requiere que el estudiante relacione las situaciones contextuales de la vida diaria que desde la combinatoria puede atender presentadas de manera correcta a través de la acción conjunta del estudiante con el profesor. Desde esta perspectiva se diseñaron cinco actividades en las que se atiende a los principios y técnicas de conteo que proponen el uso de material concreto y se señalan algunas consideraciones para el profesor que apoyen su labor de guiar a los estudiantes en su camino de dar sentido a sus acciones.

La investigación podría continuar por el camino de la puesta en escena de la alternativa de enseñanza planteada o bien, profundizando en el análisis de la formación del futuro profesor. Pues queda clara la importancia y necesidad de la enseñanza de la estadística y la probabilidad para una formación integral básica y ésta puede ser en parte mejorada a través de la investigación acerca del profesor.

# Anexos

# 46 Trajes

## Consigna 1

En parejas resuelvan los siguientes problemas.

- a) Pety tiene 2 faldas y 4 blusas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir?



- b) ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer con 3 diferentes lámparas y 3 focos de diferentes formas?



### Consigna 2

En parejas resuelvan los siguientes problemas.

- a) Un equipo de fútbol tiene 2 shorts diferentes y 3 playeras diferentes. ¿Cuántos uniformes puede formar?
  
- b) ¿Cuántos números diferentes de dos cifras pueden formar con las siguientes tarjetas? Escriban los.



Anexo B.

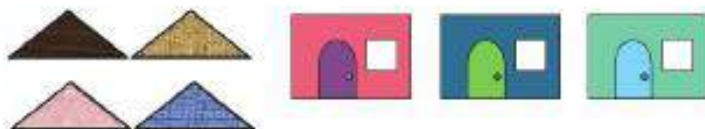
# 13

## Combinaciones

### Consigna

En equipos, resuelvan los problemas:

1. ¿Cuántas casas diferentes entre sí, pero similares a las del modelo, se pueden formar con estos triángulos y rectángulos?



---

2. El postre de hoy es alguna de estas frutas: sandía, melón, piña o mango, acompañada con nieve de limón o chile piquín. ¿Cuántos postres diferentes se pueden servir?

---

3. Para la fiesta de cumpleaños de Antonio asistirán 18 mujeres y 15 hombres. ¿Cuántas parejas de baile diferentes se podrán formar con los invitados?

---



### Consideraciones previas

Es necesario aclarar a los alumnos que cualquier blusa se puede usar con cualquier falda. Los alumnos pueden recurrir a diversas estrategias; por ejemplo, unir con líneas faldas y blusas para encontrar las combinaciones posibles. Quizás algunos sientan la necesidad de dibujar, recortar y mover las prendas para buscar las combinaciones. También pueden hacer una tabla donde registren con dibujos o con palabras las maneras en que puede vestirse Paty, por ejemplo:

	Blusa amarilla	Blusa morada	Blusa rosa	Blusa azul turquesa
Falda azul	X			
Falda verde				

Otro razonamiento que los alumnos pueden expresar es: "La blusa amarilla con la falda verde o azul son dos maneras. La blusa morada con la falda verde o azul son otras dos maneras; llevamos cuatro...", y así sucesivamente. En estos momentos todavía es poco probable que los alumnos relacionen este tipo de problemas con la multiplicación.

Mientras ellos trabajan, hay que observarlos para detectar los procedimientos que utilizan y decidir cuáles pueden discutir en el momento de la confrontación. Si a ningún equipo se le ocurrió usar la multiplicación, se les puede preguntar si multiplicando el número de faldas por el número de blusas hubieran llegado al mismo resultado.

Es conveniente revisar este problema con todo el grupo antes de plantear el segundo problema, pues así se podrá observar el grado de comprensión entre este tipo de situaciones y la multiplicación.

#### Observaciones posteriores

1. ¿Cuáles fueron las dudas y los errores más frecuentes de los alumnos?
2. ¿Qué hizo para que los alumnos pudieran avanzar?
3. ¿Qué cambios deben hacerse para mejorar las consignas?

### Consideraciones previas

A diferencia de los problemas del desafío anterior, en los que se establece una relación de proporcionalidad, en éstos no hay tal, no hay de por medio un valor unitario explícito o implícito y el resultado del problema no es ninguna de las dos dimensiones que se relacionan. Por ejemplo, en el problema 1 se relacionan triángulos y rectángulos, mientras que el resultado es casas. En el problema 2 se relacionan frutas con nieve o chile y el resultado es postres, y en el problema 3 se relacionan hombres con mujeres y el resultado es parejas.

En este tipo de problemas se puede establecer una doble relación de proporcionalidad. Por ejemplo, el número de parejas es proporcional al número de hombres cuando el número de mujeres permanece constante, o bien, el número de parejas es proporcional al número de mujeres cuando el número de hombres permanece constante.

Este desafío incluye tres problemas en los que se trata de combinar cada uno de los elementos de un conjunto, con cada uno de los elementos de otro conjunto. Pueden resolverse usando diferentes representaciones en las que el problema principal consiste en controlar que no sobren o falten combinaciones. Después de probar con tales representaciones se espera que los alumnos descubran que una multiplicación puede ser suficiente para llegar a la solución.

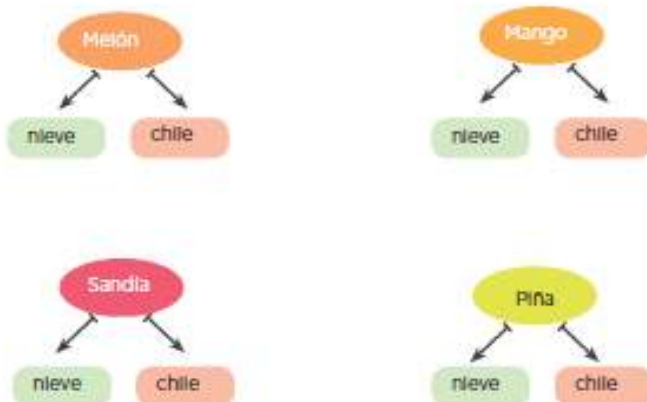
Para el primer problema es importante que los alumnos se den cuenta de que cada rectángulo puede combinarse con todos los triángulos, o bien, que cada triángulo puede combinarse con todos los rectángulos; de tal manera que concluyan que con cada rectángulo se harían cuatro casas diferentes, o bien, que con cada triángulo se harían tres casas diferentes. Para encontrar la respuesta los alumnos pueden:

- Dibujar todas las combinaciones de casas.
- Sumar  $4 + 4 + 4$ , pensando en las cuatro combinaciones diferentes que se pueden armar con cada uno de los tres rectángulos.
- Sumar  $3 + 3 + 3 + 3$ , considerando que con cada triángulo se pueden formar tres casas diferentes.
- Multiplicar  $3 \times 4$ , o multiplicar  $4 \times 3$ .

Si a los alumnos no se les ocurre utilizar operaciones para llegar al resultado, se les puede preguntar directamente, ¿qué operación te ayuda a llegar directamente al resultado? Si las respuestas son  $4 + 4 + 4$ , o  $3 + 3 + 3 + 3$ , hay que relacionar éstas con las operaciones  $3 \times 4$  o  $4 \times 3$ , y que identifiquen qué representa cada número.

Cuando los alumnos estén relacionando cada rectángulo con los triángulos o cada triángulo con los rectángulos, a manera de reflexión se les preguntaría: si ya se relacionó cada triángulo con todos los rectángulos para encontrar todas las combinaciones posibles, ¿también es necesario relacionar cada rectángulo con todos los triángulos?, ¿por qué? La idea es que se den cuenta si se repite o no alguna combinación.

La diferencia entre los problemas 1 y 2 es que en el segundo la información viene en un texto y, precisamente, un primer acercamiento de los alumnos podría ser una representación gráfica como la siguiente:



A partir de esta representación se pretende que los alumnos lleguen a utilizar operaciones, en particular, la multiplicación, para llegar al total de combinaciones que es 8, resultado de  $4 \times 2$  y de  $2 \times 4$ .

El tercer problema incluye números más grandes con la idea de que los alumnos busquen alternativas más eficaces que las representaciones gráficas, para encontrar todas las combinaciones posibles. Se espera que determinen que con la multiplicación  $18 \times 15$  o  $15 \times 18$  se llega a la solución.

Respecto a los procedimientos de cálculo, en el tercer problema se pueden aplicar algunas estrategias previamente elaboradas como las siguientes:

- $18 \times 15 = 18 \times 10 + 18 \times 5 = 180 + 90 = 270$
- $18 \times 15 = (15 \times 10) \times 2 - (2 \times 15) = 300 - 30 = 270$

### Observaciones posteriores

1. ¿Cuáles fueron las dudas y los errores más frecuentes de los alumnos?
2. ¿Qué hizo para que los alumnos pudieran avanzar?
3. ¿Qué cambios deben hacerse para mejorar la consigna?



## Referencias bibliográficas.

- Bonilla, D. y Rueda, M (2011). Niveles de razonamiento combinatorio que demuestran estudiantes universitarios. Recuperado de [http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/1272/994](http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1272/994)
- English, Lyn D. (2007) Children's strategies for solving two - and three – dimensional combinatorial problems. In: Leder, Gilah C. and Forgasz, Helen J., (eds.) Stepping stones for the 21st century : Australasian mathematics education research. Sense Publishers, The Netherlands, pp. 139-156.
- Fischbein, E. (1975). Combinatorial Analysis. En Fischbein, E. The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. (pp. 99-116). Dordrecht:Reidel.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. Educational Studies in Mathematics, núm 6, pp. 187-205.
- Inzunza, S. y Guzmán, M. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, pp. 63-95.
- Morales, J. y Frisancho, S. (2013). Operaciones combinatorias en estudiantes universitarios de ciclo inicial. *Revista electrónica de Psicología e Epistemología Genéticas*, Vol. 5, núm. 2, 130-156.
- Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa, treinta años (257-281)*. México: Santillana.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). La Génèse de l'idee de Hasard Chez l'enfant. París: PUF. Caps. 7, 8 y 9.
- Rivera, M. (2013). *Elementos de la combinatoria en la Educación Primaria*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.
- Roa, F. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis Doctoral de la Universidad de Granada, Granada, España. Recuperada de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/TesisRoa.pdf>

- Sainza Fernández C., Figueiras L. (2009). Identificación de diferencias en la resolución de problemas de conteo entre alumnos de primaria y bachillerato. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 473-485). Santander: SEIEM.
- Serrado, A., Azcárate P. y Cardeñoso, J. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh international Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahía, Brasil.
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza. Fundamentos de la nueva reforma. . Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*. Vol. 9 N° 2. Universidad de Granada – España. Recuperado el 9 de febrero de 2009, en <http://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>
- Steinbring, H. (1990). La interacción entre la práctica de la enseñanza y las concepciones teóricas. En R. Morris (Ed). *Estudios en Educación Matemática. La enseñanza de la estadística* (209-220). Francia: UNESCO (1990).
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer
- Wilhelmi, R. (2004). *Combinatoria y Probabilidad*. Grandas: GEEUG. Caps. 2 y 3.

