UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

TEOREMA DEL BINOMIO Y APLICACIONES

Camilo Humberto Cohecha Torres

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2014

TEOREMA DEL BINOMIO Y APLICACIONES

Camilo Humberto Cohecha Torres

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Profesor Ph.D., Agustín Moreno Cañadas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2014

A mi esposa Liliana, y mis hijos Alejandro, Nick, Danilo y Santiago por su comprensión, paciencia y apoyo recibido en la realización de la maestría.

Agradecimientos

Al profesor Agustín Moreno Cañadas por sus orientaciones, consejos, y tiempo dedicado en la dirección del presente documento.

A mi familia y amigos por estar presentes con su animo y confianza.

Resumen

En este trabajo se emplean unas herramientas combinatorias denominadas trayectorias reticulares, para describir las entradas del Triángulo de Pascal y para obtener el Teorema del Binomio. De hecho este teorema y las trayectorias descritas previamente permiten definir los números de Catalan y algunas de sus propiedades. Finalmente se proponen actividades que permitan acercar a los estudiantes a la comprensión y aplicación del Teorema del Binomio.

Palabras clave: Teorema del Binomio, Teorema de Newton, números de Catalan, trayectorias reticulares, conjuntos ordenados, Triángulo de Pascal, coeficiente binomial, combinaciones.

Abstract

In this work, some combinatorial tools called lattice paths are used in order to define entries in the Pascal's Triangle. Furthermore, a proof of the Binomial Theorem by using lattice paths is described as well, this theorem and lattice paths allow to define Catalan numbers and there are presented some of its properties. Finally, we presented activities to allow students a better understanding of Binomial Theorem and some of its applications.

Keywords: Binomial Theorem, Theorem of Newton, Catalan numbers, lattice paths, ordered sets, Pascal's Triangle, binomial coefficient, combinations

Índice general

.

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

La historia de las matemáticas comienza con la aparición del hombre y su evolución, puesto que ambos han influido recíprocamente en su avance. Las matemáticas son el impulso al desarrollo científico y tecnológico de la humanidad.

Un tópico fundamental en la enseñanza de la matemática básica es el relacionado con el álgebra, donde se desarrollan aspectos tales como la introducción del lenguaje formal simbólico y el significado y estructura de las expresiones algebraicas.

El desarrollo del pensamiento algebraico se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente [12]. Así mismo, un aspecto importante en el aprendizaje del álgebra, corresponde a la utilización con sentido y al consecuente estudio de los objetos algebraicos, haciendo que el cálculo algebraico surja como una generalización del trabajo aritmético. A este respecto, en el grado octavo de educación media, se plantea la enseñanza del Teorema del Binomio y aplicaciones.

Generalmente en las instituciones de educación media, la presentación de las potencias de los binomios se lleva a cabo en dos etapas, siendo la primera de ellas la realización del producto aplicando la ley distributiva, conmutando y reduciendo términos semejantes para finalmente conseguir el resultado. La segunda etapa consiste en reconocer el resultado obtenido como un producto notable del álgebra, enunciando una propiedad, en el caso del cuadrado y el cubo del binomio. Luego para situaciones similares, se recomienda la aplicación de estas reglas de manera memorística, empleando como ayuda nemotécnica el parafraseo, reducción que desconoce su razón y aplicabilidad y desaprovecha la presencia de elementos geométricos y contextos que la motiven. La forma de presentar el tema, descrita anteriormente no incluye su generalización, es decir, no se plantea como determinar la enésima potencia del binomio, $(a+b)^n$, resultado que es conocido como Teorema del Binomio o Binomio de Newton.

Desde la antigüedad el Teorema del Binomio era conocido, el caso de $n = 2$ se encuentra en los Elementos de Euclides (300 a. C.), en el libro II, en el cual se tratan geométricamente 6 proposiciones. El teorema fue descubierto por primera vez por Al-Karaji alrededor del año 1000, hacia el año 1544 Stiefel introdujo el término "coeficiente binomial" y mostró como calcular $(1 + a)^n$ a partir de $(1 + a)^{n-1}$. Más adelante Pascal, (1654), obtuvo los coeficientes del desarrollo del binomio empleando el arreglo triangular que lleva su nombre; aunque este arreglo ya era conocido en la India, China y Arabia desde mucho antes. En 1665, Newton mostró como calcular $(1 + a)^n$ directamente sin hacer referencia a $(1 + a)^{n-1}$. [27].

El objetivo de este trabajo es el de realizar una revisión del Teorema del Binomio desde el punto de vista histórico y epistemológico, analizando su desarrollo, para finalmente realizar una propuesta didáctica para su enseñanza. Para tal fin, el documento se ha organizado en 4 capítulos.

En el capítulo 1, se muestra el desarrollo histórico que ha tenido el Teorema del Binomio y el Triángulo de Pascal; se inicia con los registros desde el siglo IV antes de Cristo, continuando con su desarrollo en los siglos V, VII al XI, y finalmente se concluye con el aporte en los siglos XV al XVIII.

En el capítulo 2, se presentan inicialmente algunas definiciones y propiedades referentes a conjuntos ordenados y trayectorias reticulares. Luego se realiza una interpretación combinatoria del coeficiente binomial estableciendo y demostrando propiedades, así como la generación del Triángulo de Pascal para finalmente obtener y demostrar la fórmula del Teorema del Binomio.

El capítulo 3, se inicia explorando algunos problemas, cuya solución conduce a la misma sucesión numérica, conocida como números de Catalan. A partir de los escenarios propuestos y de la solución obtenida, se proponen fórmulas explícitas y por recurrencia para estos números. Además se explora la obtención de los números de Catalan a partir del Triángulo de Pascal, y algunas maneras prácticas para generarlos mediante el empleo de arreglos triangulares, conjeturando propiedades. El capítulo se finaliza deduciendo la fórmula cerrada de los números de Catalan a partir de una función generatriz y la aplicación del Teorema del Binomio.

En el capítulo 4 se realiza una aproximación teórica al Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) dentro de un ambiente constructivista, referentes teóricos en los cuales está soportada la propuesta didáctica. En la parte final del capítulo se proponen cinco guías de aprendizaje enmarcadas en esta metodología.

Capítulo 1

Reseña histórica

"La historia de la matemática debe ser, realmente,
el núcleo de la historia de la cultura"
George Sarton.

En este capítulo se presenta el desarrollo histórico que han tenido el Teorema del Binomio y el Triángulo de Pascal. Se inicia con los registros desde el siglo IV antes de Cristo, continuando con su desarrollo en los siglos V, VII al XI, y finalmente se concluye con el aporte en los siglos XV al XVIII.

1.1. Antigüedad

1.1.1. Babilonia (2000 a.C al 1600 a.C)

Los documentos matemáticos de Babilonia datan del tercer milenio a.C., en ellos se evidencia una escritura cuneiforme y un sistema de numeración sexagesimal, con una ligera mezcla del sistema decimal. Las matemáticas estaban dominadas por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos, donde las reglas eran establecidas por la prueba y el error, con sustento en la experiencia práctica sin mención de conceptos matemáticos como axiomas o demostraciones formales.[5]

El legado matemático de los babilonios quedó plasmado en tablillas de arcilla, de las cuales, la mayoría de las recuperadas datan del 1800 al 1600 a. C. y abarcan tópicos que incluyen fracciones, álgebra, tablas de multiplicar y métodos para resolver ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas. La tablilla babilónica YBC 7289, la cual se encuentra en la Universidad de Yale, da una aproximación de $\sqrt{2}$, con una exactitud de cinco posiciones decimales.[7]

Siguiendo a Bell, se resalta la reacción de los algebristas babilonios ante los números irracionales, para los cuales sus tablas y ecuaciones les decían que no todos los racionales que figuraban en ellas tenían una raíz cuadrada tabulada. Ante este hecho procedieron a obtener valores aproximados por medio de la regla

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{b^2}{2a}$$

la cual reaparece unos dos mil años después con Herón de Alejandría. [5]

Por otra parte, en la técnica empleada por los babilonios para multiplicar dos números se aplica de manera implícita el desarrollo del cuadrado del binomio. JJ O'Connor y EF Robertson describen la expresión empleada en Babilonia para hacer más fácil la multiplicación al aplicar $ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$ y aún mejor es su fórmula $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ para la cual solo requerían de una tabla de cuadrados, luego tomar su diferencia y a continuación, hallar la cuarta parte de la respuesta.[31].

1.1.2. Grecia (600 a.C al 300 d.C)

Los griegos tomaron elementos de las matemáticas de los babilonios y de los egipcios. La innovación más importante fue la invención de las matemáticas abstractas, basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones. Este avance comenzó en el siglo VI a.C. con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos; este último enseñó la importancia del estudio de los números para poder entender el mundo. Algunos de sus discípulos hicieron importantes descubrimientos sobre la teoría de números y la geometría, que se atribuyen al propio Pitágoras.[28]

Euclides, hacia el año 300 a.C., escribió el texto los *Elementos*, compuesto por trece libros los cuales contienen la mayor parte del conocimiento matemático existente hasta finales del siglo IV a.C., en áreas tan diversas como la geometría de polígonos y del círculo, la teoría de números, la teoría de los inconmensurables, la geometría del espacio y la teoría elemental de áreas y volúmenes. Es precisamente en dicho tratado donde se encuentra el primer registro del Teorema del Binomio, aunque no aparece en el sentido estricto del término. Específicamente en en libro II, denominado *"Algebra geométrica"* en el cual se tratan geométricamente 14 proposiciones, se presenta el desarrollo para $n = 2$ en la proposición 4, la cual dice: *"Si se divide mediante un punto cualquiera una recta dada, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo que tiene a esas partes como lados"*[27].

Si la expresión anterior, se representa algebraicamente, asignando a y b a los segmentos, se tiene que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En el mismo libro II, la proposición 7 presenta la fórmula correspondiente para el cuadrado de una diferencia, la cual se enuncia así: *"Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera y el de uno de los segmentos tomados conjuntamente son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por la recta entera y el segmento conocido más el cuadrado del segmento restante"*[4].

Para la representación algebraica se toma a a como el segmento total, y b como una parte de ese segmento, entonces se cumple que

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$$

de donde

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Se resalta el hecho de que en la obra de Euclides no se menciona el cubo de un binomio y tampoco se da una generalización del resultado.

Otra situación donde se usa el desarrollo binomial, además del realizado por Euclides, fue para descubrir los valores aproximados de las raíces de números.

Uno de estos métodos se le atribuye a Herón de Alejandría (126 a.C - 50 a.C) en el cual para hallar $\sqrt{C}$, se parte de un valor aproximado a_1 y se halla un segundo valor aplicando la fórmula

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{C}{a_1}\right)$$

continuando con este procedimiento se obtiene un valor aproximado de la raíz buscada[7]. Sin embargo, actualmente este procedimiento corresponde a un caso particular, tomado $f(x) = x^2 - C$, del método desarrollado para calcular las raíces de una función, y que curiosamente tiene el nombre de método de Newton, conocido también como el método de Newton-Raphson o el método de Newton-Fourier, el cual consiste en encontrar los ceros de una función $f(x)$, partiendo de un valor aproximado x_0, mediante la expresión recursiva,

$$\mathrm{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

donde $n \in \mathrm{N}$ y $f'(x)$ denota la derivada de $f(x)$.

1.1.3. India Antigua (900 a. C. al 200 d. C.)

Los *Sulba Sutras* (Siglo VIII a.C. y II d.C), apéndices de textos religiosos, corresponden a los registros más antiguos de la India y en ellos se observa un origen de las matemáticas a partir de los rituales religiosos, ya que se dan reglas para construir templos y altares de diversas formas. Además en ellos se encuentran métodos aproximados de la cuadratura del círculo, lo cual los llevó a lograr aproximaciones del número π. También, obtuvieron el valor de la raíz cuadrada de 2 con varias cifras de aproximación, listas de ternas pitagóricas y el enunciado del teorema de Pitágoras.[26] Según Dutta [23], profesor asociado de matemáticas en el Indian Statiscal Institute: Kolkata, para las construcciones religiosas aplicaron implícitamente identidades algebraicas tales como:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad na^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 a^2$$

1.2. Edad Media

1.2.1. India Clásica (Hacia 400 - 1600)

Aryabhata (476 – 550 d. C) escribió un tratado matemático y astronómico en versos llamado *Aryabhatiyam*; en él se hace referencia a temas de aritmética, álgebra, trigonometría plana y trigonometría esférica. Uno de sus versos dice: *"hay que sustraer la suma de los cuadrados del cuadrado de la suma; la mitad de eso es el producto de los factores"*[27]. Al expresar algebraicamente el enunciado se tiene que:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$$

lo cual efectivamente es correcto y para llegar a tal resultado debe realizarse el desarrollo del cuadrado del binomio.

En la china, el origen y desarrollo del Teorema del Binomio para potencias enteras positivas se dio más a partir de la extracción de raíces, que al cálculo de potencias.

1.2.2. Arabia (Hacia 642 - 1258)

El conocimiento algebraico en Arabia comienza en la segunda mitad del siglo IX a partir de la obra de Al-Khuwarizmi (780-850), quien realizó tareas que incluían la traducción de manuscritos científicos griegos y estudios sobre álgebra, geometría y astronomía [30]. Escribió un texto sobre astronomía y el famoso tratado de álgebra *Hisab al-jabr w'al-muqabala*. A partir del título de esta obra es que tenemos la palabra *álgebra* y se le considera el primer libro escrito sobre esta rama de la matemática. Al-Khuwarizmi en su texto proporcionó una descripción exhaustiva de la solución de ecuaciones polinómicas de segundo grado, aplicando el método geométrico, consistente en considerar que tanto la variable como la constante son lados de un rectángulo. La multiplicación de variable por variable, variable por número o número por número, es considerada como un área. Para la solución de las ecuaciones se parte de un cuadrado, anexando o restando áreas según corresponda y aplicando el procedimiento inverso al desarrollo del cuadrado de un binomio, (factorización de un trinomio) a partir de la representación geométrica.[7, 19]

Siguiendo a O'Connor y Robertson [30] se tiene que Al-Karaji (953 – 1029) escribe un tratado sobre álgebra llamado *Al-Fakhri fi'l-jabr wa'l-muqabala (glorioso en álgebra)* en el cual utiliza una forma de inducción matemática en sus argumentos y la aplica en su trabajo sobre el Teorema del Binomio, los coeficientes binomiales y el Triángulo de Pascal. En *Al-Fakhri* realiza el desarrollo de $(a+b)^3$ y en otro de sus textos, *Al-Badi*, calcula $(a-b)^3$ y $(a+b)^4$.

Según Rashed y Ahmad (citado en O'Connor y Robertson) la construcción general del Triángulo de Pascal fue dada por Al-Karaji, lo cual se menciona en los últimos escritos de Al-Samawal, quien recopila parte del trabajo de Al-Karaji y presenta una descripción de la construcción general del Triángulo de Pascal el cual se parece al de este, sólo que es construido sobre uno de sus lados.[29]

Col1	Col2	Col3	Col4	Col5	...
1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
	1	3	6	10	...
		1	4	10	...
			1	5	...
				1	...

Figura 1-1: Triángulo construido por Al-Karaji.

Otro matemático árabe que contribuyó notablemente en el desarrollo del tema que nos ocupa fue Omar Khayyam (1048 – 1122) quien en su libro *Maqalat fi al-Jabr wa al-Muqabil' on Algebra* proporciona avances en este campo, desarrollando la expansión binomial para el caso en que el exponente es un número entero positivo y afirmó, aunque no dio la ley, que podía encontrar las raíces cuartas, quintas, sextas y mayores, aplicando una ley que había descubierto, la cual no dependía de figuras geométricas, haciendo referencia a lo que hoy conocemos como Triángulo de Pascal.[36, 32]

1.3. Edad Moderna

1.3.1. China y el Triángulo de Pascal (500 a.C al 1300 d.C)

Se llama Triángulo de Pascal, a un arreglo triangular de números, los cuales representan los coeficientes binomiales. Su nombre es en honor al matemático francés Blaise Pascal (1623 - 1662), quien introdujo esta notación en su libro *Tratado sobre el triángulo aritmético*, obra que se editó en 1665, después del fallecimiento de su creador.[40].

El nombre de Triángulo de Pascal fue dado por Pierre Raymond de Montmort (1708), quien lo llamó: *Tabla del Sr. Pascal para las combinaciones* y por Abraham de Moivre (1730), quien lo llamó: *Triangulum Arithmeticum Pascalianum* (del latín: *Triángulo aritmético de Pascal)*, que se convirtió en el nombre con el que hoy lo conocemos.[16]

En su texto Pascal define una matriz rectangular ilimitada, como una matriz en la que el número en cada celda es igual a la suma del número en la celda anterior de la misma columna, con el número la celda anterior de la misma fila, y donde la primera fila y la primera columna están conformadas por números unos. Simbólicamente se ha definido

$$f_{i,1} = f_{1,j} = 1 \qquad i, j = 2, 3, 4, ...$$

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-1} \quad i, j = 2, 3, 4, ...$$

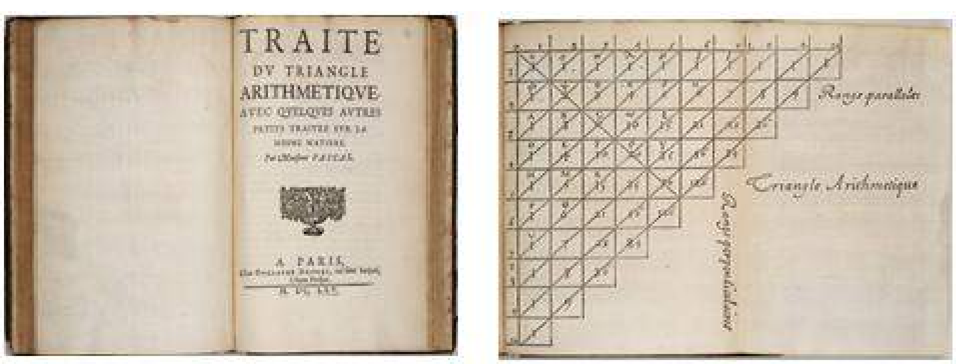


Figura 1-2: Triángulo de Pascal en el escrito original de Pascal

Las propiedades y aplicaciones del triángulo ya eran conocidas con anterioridad a Pascal por matemáticos indios, chinos y persas, pero fue Pascal quien desarrolló muchas de sus aplicaciones y el primero en organizar la información de manera conjunta, mostrando la relación existente con la fórmula del binomio.[17]

La primera representación explícita del triángulo de coeficientes binomiales data del siglo X, en los comentarios de los *Chandas Shastra*, un antiguo libro indio de prosodia del sánscrito, escrito por Pingala alrededor del año 200 A.C.[15]. De este trabajo solo se tienen fragmentos, lo que se conoce, corresponde a los comentarios realizados por Halayudha, aproximadamente hacia el año 975, quien menciona el interés que se tenía en establecer el número de métricas que tenían n notas largas y k notas cortas, lo que fue equivalente a encontrar los coeficientes binomiales. Halayudha se refiere al Triángulo de Pascal como Meru-prastara *"la escalera al Monte Meru"*, dice lo siguiente: *"Dibuja un cuadrado, a partir de la mitad del cuadrado, dibuja otras dos cuadrados similares por debajo de él; debajo de estos dos, otros tres cuadrados, y así sucesivamente. En el cuadrado superior se debe comenzar por poner 1. Poner 1 en cada uno de los dos cuadrados de la segunda línea. En la tercera línea poner 1 en los dos cuadrados extremos y, en la casilla central, la suma de los dígitos de los dos cuadrados situados encima de ella. En la cuarta línea poner 1 en los dos cuadrados extremos. En los del medio poner la suma de los dígitos de los dos cuadrados que están por encima de cada uno, continuar de este modo. De estas líneas, la segunda proporciona las combinaciones con una sílaba, la tercera con las combinaciones de dos sílabas"*[23]

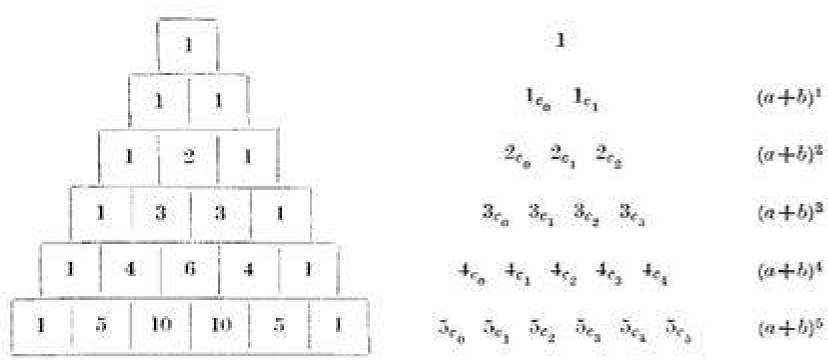


Figura 1-3: Representación esquemática del Meru-prastara

Para Kumar es evidente la identidad entre el *Meru-prastara* con el Triángulo de Pascal, resaltando que en la última línea del texto de Halayudha, citado anteriormente, claramente se señala que la segunda línea es la expansión de una métrica con una silaba, es decir $(a+b)^1$, la tercera línea una métrica con dos silabas, equivalente a $(a+b)^2$, y así sucesivamente. Concluye que de esta manera, la expansión general del binomio $(a+b)^n$ se obtuvo fácilmente para una métrica de n sílabas.[23]

Las propiedades del triángulo fueron discutidas por los matemáticos persas Al-Karaji (953–1029) y Omar Khayyám (1048–1131), por lo que en Irán es conocido como el triángulo *Khayyam-Pascal*, o simplemente *el triángulo Khayyam*.[29]

En China se tenía conocimiento de este triángulo desde el siglo XI, el matemático Jia Xian (1010–1070) lo expone en su libro titulado *Shi Suo Suan Shu*. Sin embargo, el método de Jia fue explicado en detalle por Yang Hui (1238–1298), quien reconoció explícitamente su fuente: *"Mi método para encontrar raíces cuadradas y cúbicas se basó en el método de Jia Xian en Shi Suo Suan Shu"* [16]. En China se le llama *triángulo de Yang Hui*.

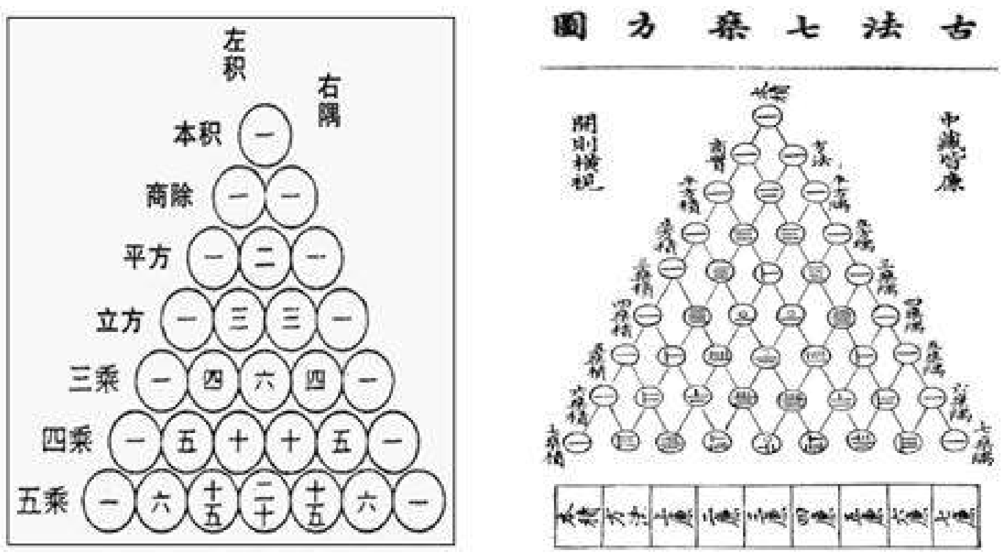


Figura 1-4: Triángulos de Jia Xian y Yang Hui

El triángulo aparece en la portada del libro *Espejo precioso de los cuatro elementos* (Ssu Yuan Yü Chien) de Chu Shi-Chieh, escrito en 1303. Los cuatro elementos a que se refiere el título son: el cielo, la tierra, el hombre y la materia y representan incógnitas de una ecuación. En el diagrama figuran los coeficientes para el desarrollo del binomio hasta la octava potencia, escritos con toda claridad en el sistema de números a base de varillas y con un símbolo redondo para el cero. Chu no pretende ser el autor del triángulo, sino que se refiere a él como el *"diagrama del viejo método para hallar potencias octavas e inferiores"*; en algunos textos se menciona que hace referencia a él como: *"El Viejo Método del Diagrama de los Siete Cuadrados Multiplicativos"*.[9]

1.3.2. Europa y el Triángulo de Pascal

El primer registro que se tiene en Europa se debe a Petrus Apianus (1495–1552) quien publicó el triángulo en el frontispicio de su libro sobre *cálculos comerciales* en 1527. [36]

Figura 1-5: Frontispicio del libro Cálculos Comerciales

En Italia se menciona como el *Triángulo de Tartaglia*, llamado así en honor al algebrista italiano Niccolò Fontana apodado *Tartaglia* (1499 – 1577), quien en 1556 publica su obra *Trattato*, donde se refiere al descubrimiento del triángulo aritmético y al desarrollo del binomio. [36]

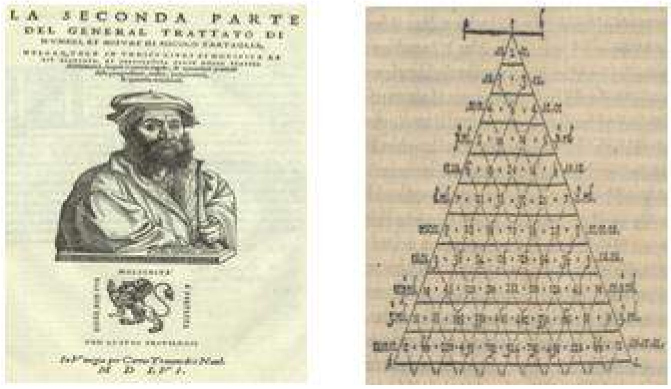


Figura 1-6: Imágenes del libro Trattato

El monje alemán Michael Stifel (1487-1567), publica en 1544 su libro *Arithmetica Integra* en el cual abarcó los conceptos básicos de álgebra, usando los símbolos alemanes para potencias de los exponentes negativos desconocidos y presentó el Triángulo de Pascal (un siglo antes de Pascal) como una herramienta para encontrar las raíces de números.

Figura 1-7: Imágenes del libro Arithmetica Integra

Otros autores además de los mencionados, escribieron sobre el triángulo aritmético tales como Viète (1540-1603), Stevin en 1625 o Herigone en 1634, razón por la cual Boyer [1996] afirma que el nombre de Triángulo de Pascal le parece inadecuado, ya que se evidencia que éste existía varios siglos antes de que Pascal se ocupara de él. El mismo autor resalta el hecho de que su aparición se dio al relacionarlo con el cálculo de raíces y no con el de potencias. [7]

El primer escritor en tener un acercamiento al desarrollo del binomio con potencias fraccionarias fue James Gregorio, que dio la fórmula en 1670. Su método aproximado se dio de forma indirecta, en el aparente deseo de encontrar un antilogaritmo.[10]

1.3.3. Newton y el Teorema del Binomio

Mención especial debemos hacer de Isaac Newton (1642-1727) de quien se dice ha sido uno de los más grandes científicos de la historia de la humanidad. Su trabajo más conocido y admirado es *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) en el que establece las leyes del movimiento de los cuerpos y las leyes de la gravitación universal sobre bases geométricas; también hizo contribuciones fundamentales en óptica y por eso la idea que se tiene de él es la de un físico-matemático. Sin embargo, su contribución a las "matemáticas puras" y en particular al desarrollo del álgebra, son suficientes para asegurarle un lugar junto a los más grandes matemáticos de todos los tiempos. [5]

Newton manifiesta que sus avances académicos los ha obtenido a partir de los grandes genios históricos de su época, en los que se apoyó para lograr sus deducciones. En una carta enviada a Hooke, le escribe la famosa frase de Chartres (siglo XII) *"Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes"*. Se sabe que estudió la filosofía de Descartes, Gassendi, Hobbes y en particular, a Boyle. Le atrajo la mecánica de la astronomía copernicana de Galileo y también estudió la óptica de Kepler. Registró sus pensamientos en un libro que tituló *Quaestiones Quaedam Philosophicae* (Cuestiones Filosóficas Ciertas) en 1664. Otras obras que leyó fueron el Clavis Mathemática de Oughtred, la Geometría de René Descartes traducida al latín por Frans Van Schooten, la nueva geometría algebraica y analítica de Viète. Además estudió la Opera mathematica de Viète, editada por Van Schooten y, en 1664, la Aritmética de John Wallis, que le serviría como introducción a sus investigaciones sobre las series infinitas, el Teorema del Binomio y ciertas cuadraturas, las cuales realizó en el período determinante en su vida, de 1664 a 1667.[6, 14, 28]

El desarrollo del binomio fue descubierto por Newton el invierno de 1664. Aparece expuesto en dos cartas, la Epístola prior de Junio de 1676 y la Epístola posterior de Octubre de 1676, que mandó al secretario de la Royal Society of London, Henry Oldenburg, para que se las transmitiera a Leibniz; posteriormente apareció publicado por primera vez en el *Tratado de Álgebra* de Wallis (1685), atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Dice Newton:
"*La extracción de raíces cuadradas se simplifica con este teorema*

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \cdots \tag{1}$$

donde A, B, C, D $\cdots$ son los términos inmediatos que les preceden en el desarrollo"

Lo anterior significa que los coeficientes están dados así,

$$\begin{aligned}
A =& P^{\frac{m}{n}} \\
B =& \frac{m}{n}AQ = \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q \\
C =& \frac{m-n}{2n}BQ = \frac{m-n}{2n}\left(\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q\right)Q = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}P^{\frac{m}{n}}Q^2 \\
D =& \frac{m-2n}{3n}CQ = \frac{m-2n}{3n}\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}P^{\frac{m}{n}}Q^2\right)Q = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3\cdot 2}P^{\frac{m}{n}}Q^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Reemplazando los coeficientes en (1),

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = \left(P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}P^{\frac{m}{n}}Q^2 + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3\cdot 2}P^{\frac{m}{n}}Q^3 + \cdots\right)$$

factorizando

$$P^{\frac{m}{n}}\left(1+Q\right)^{\frac{m}{n}} = \ P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}Q+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}Q^2+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3\cdot 2}Q^3+\cdots\right)$$

simplificando se tiene

$$\left(1+Q\right)^{\frac{m}{n}} = \left(1+\frac{m}{n}Q+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}Q^2+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3\cdot 2}Q^3+\cdots\right) \tag{2}$$

que corresponde a una expresión más familiar y usada actualmente.

Aunque el binomio para enteros positivos era conocido desde hacía tiempo, tal como se expuso en las secciones anteriores, el interés del descubrimiento de Newton está en que lo usa para exponentes fraccionarios y negativos y en que aparece una suma infinita en vez del desarrollo finito.

En nuestra notación actual escribimos comúnmente

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \tag{3}$$

donde a, b y n pueden ser cualquier número real y los coeficientes llamados *coeficientes binomiales*, están dados por la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{4}$$

siendo $n!$ el *factorial* de un número n natural, el cual se define como

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ n(n-1)! & \text{si } n\geq 1 \end{cases} \tag{5}$$

Si n es un entero positivo se obtiene en la Fórmula (3) un desarrollo finito ya que $\binom{n}{k} = 0$ para $k > n$, al ser cero uno de los factores del numerador que define el coeficiente binomial. En el caso de no ser n entero positivo aparecen series infinitas.

Es de aclarar que Newton no dio una demostración rigurosa del teorema sino que llegó a su formulación después de sus investigaciones sobre el cálculo de áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^n$.[7]

Newton, al concluir que la fórmula del binomio podía extenderse a cualquier exponente racional obtuvo una gran ayuda en su formulación del cálculo infinitesimal, pues con ella logró hacer desarrollos en serie de algunas funciones y generalizaciones de operaciones con series de potencias, integrar o derivar funciones racionales y obtener la cuadratura de algunas curvas como la cicloide.[34]. También concluyó que mediante su aplicación, el cálculo de las raíces se hace más corto.[7, 9]

Las demostraciones rigurosas del teorema del binomio las realizaron después: McLaurin, para valores racionales de n; Salvemini y Kästner, para valores enteros de n; Euler para valores fraccionarios de n y Niels para exponentes complejos. [36]

Capítulo 2

Teorema del Binomio

"Mientras el Álgebra y la geometría tomaron caminos distintos, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando las dos ciencias se complementaron, se contagiaron una a la otra de vitalidad y de ahí en adelante marcharon mas rápido hacia la perfección"
Joseph-Louis Lagrange.

En este capítulo se presentan inicialmente algunas definiciones y propiedades referentes a conjuntos ordenados y trayectorias reticulares. Luego se realiza una interpretación combinatoria del coeficiente binomial, estableciendo y demostrando propiedades. Finalmente se obtiene y se demuestra la fórmula del Teorema del Binomio.

2.1. Preliminares

Se presentan a continuación algunas definiciones básicas y notaciones concernientes a conjuntos parcialmente ordenados, retículos y trayectorias reticulares.

Definición 2.1. Conjuntos parcialmente ordenados
Un *conjunto ordenado (o conjunto parcialmente ordenado o poset)* es una pareja ordenada de la forma $(P, \leq)$, donde P es un conjunto y $\leq$ una relación binaria de *orden parcial* en P; lo cual significa que la relación $\leq$ es *reflexiva, antisimétrica* y *transitiva*, es decir, para todo x, y y z en P se tiene que: [11].

(1) $x \leq x$ (reflexividad).

(2) Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$ (antisimetría).

(2) Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (transitividad)

Los elementos de P son llamados los *puntos* del conjunto ordenado. Se escribirá $x < y$ para $x \leq y$ y $x \neq y$, en este caso diremos que *x es estrictamente menor que y.*
Un conjunto ordenado se llama *finito (infinito)* si y sólo si el conjunto P es *finito (infinito)*. Usualmente, simplemente se dirá que P es un *conjunto ordenado.*

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Se dice que *y cubre a x* si

$$x < y \text{ y } x \leq z < y \text{ implica } z = x.$$

Un conjunto finito ordenado P se puede representar mediante una configuración de círculos (representando los elementos de P) y líneas que los interconectan (muestran la relación de cubrimiento). La construcción de un diagrama de este tipo es la siguiente:

(1) A cada punto $x \in P$, asociarle un punto $p(x)$ del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, representado por un pequeño círculo con centro en $p(x)$.

(2) Para cada par cubierto $x < y$ en P, tomamos un segmento de línea *l(x, y)* uniendo el círculo de $p(x)$ con el círculo de $p(y)$.

(3) Llevar a cabo (1) y (2) de tal forma que

   (a) Si $x < y$, entonces $p(x)$ está más abajo que $p(y)$.

   (b) El círculo de $p(z)$ no intersecta el segmento de línea *l(x, y)* si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Una configuración que satisface (1)-(3) es llamada un *diagrama de Hasse o diagrama de P*. Por otra parte, un diagrama puede ser utilizado para definir un conjunto finito ordenado.

En la Figura 2-1 se presenta el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado correspondiente al conjunto de partes de $\{a, b, c\}$ con el orden parcial $\subseteq$ (inclusión de conjuntos).

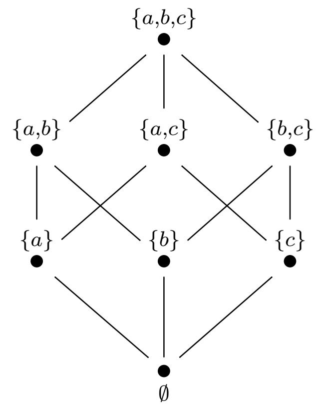


Figura 2-1: Diagrama de Hasse para el conjunto de partes de {a,b, c}

En general, no es posible representar totalmente un conjunto infinito ordenado con un diagrama, pero si su estructura es suficientemente regular, entonces puede ser sugerido mediante un diagrama.
Un conjunto ordenado C es llamado una *cadena* (o un *conjunto linealmente ordenado* o $(C, \leq)$ es un *conjunto totalmente ordenado*) si y sólo si para todo $p, q \in C$ se tiene $p \leq q$ o $q \leq p$ (es decir, p y q son comparables). Por otra parte, un conjunto ordenado P es llamado una *anticadena* si $x \leq y$ en P, solamente si $x = y$ [11].

Una cadena C, en un conjunto ordenado P, se llamará una *cadena maximal* si y sólo si para toda cadena $K \subseteq P$ con $C \subseteq K$, se tiene que $C = K$.

Nota 2.2. El conjunto de los números naturales, con el orden usual ($m \leq n$ si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$) es un conjunto totalmente ordenado. De la misma forma, también lo son $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$.

El siguiente teorema resulta útil en ciertas ocasiones, ya que muestra la forma de construir un nuevo conjunto parcialmente ordenado a partir de dos conjuntos parcialmente ordenados dados.

Teorema 2.3. Producto cartesiano de dos conjuntos ordenados
Si $(P, \leq)$ y $(Q, \trianglelefteq)$ son conjuntos parcialmente ordenados, entonces el producto cartesiano o directo de P y Q, es el conjunto ordenado $(P \times Q, \preceq)$ sobre el conjunto $P \times Q = \{(x, y) : x \in P, y \in Q\}$ tal que $(x, y) \preceq (x', y')$, si $x \leq x'$ (en P) y $y \trianglelefteq y'$ (en Q).

Demostración. Verificaremos que la relación binaria $\preceq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva sobre el conjunto $P \times Q$.

1. Si $(x, y) \in P \times Q$, entonces $(x, y) \preceq (x, y)$ ya que $x \leq x$ en P y $y \trianglelefteq y$ en Q; de este modo $\preceq$ satisface la *propiedad reflexiva*.

2. Sean (x, y); $(x', y') \in P \times Q$ y supongamos que $(x, y) \preceq (x', y')$ y $(x', y') \preceq (x, y)$. Entonces

   $$x \leq x' \text{ y } x' \leq x \text{ en P } \text{ y } y \trianglelefteq y' \text{ y } y' \trianglelefteq y \text{ en Q.}$$

   Como P y Q son conjuntos parcialmente ordenados, la antisimetría de los órdenes parciales en P y Q implica que

   $$x = x' \text{ y } y = y'$$

   de donde $(x, y) = (x', y')$. Por lo tanto $\preceq$ satisface la *propiedad antisimétrica*.

3. Por último supóngase que

   $$(x, y) \preceq (x', y') \text{ y } (x', y') \preceq (x'', y''),$$

   donde $x, x', x'' \in P$ y $y, y', y'' \in Q$. Entonces $x \leq x'$ y $x' \leq x''$, de modo que $x \leq x''$, por la propiedad transitiva del orden parcial en P. De manera análoga,

   $$y \trianglelefteq y' \text{ y } y' \trianglelefteq y'',$$

   de modo que $y \trianglelefteq y''$, por la propiedad transitiva del orden parcial en Q. Por lo tanto

   $$(x, y) \preceq (x'', y'').$$

   En consecuencia, la *propiedad transitiva* es válida para $\preceq$ y se concluye que $(P \times Q, \preceq)$ **es un conjunto parcialmente ordenado**. $\square$

Si x y y pertenecen a un poset P entonces una *cota superior* de x y y es un elemento $z \in P$, el cual satisface que $x \leq z$ y $y \leq z$. La *mínima cota superior* de x y y es una cota superior z de x y y, tal que cada cota superior w de x y y satisface que $z \leq w$. Si existe una mínima cota superior de x y y, entonces ésta es única y se denota por $x \vee y$. De manera análoga se definen: *cota inferior* y *máxima cota inferior* que se nota: $x \wedge y$.

Definición 2.4. Retículos
Un *retículo* es un poset $\mathbf{L}$, para el cual cada par de elementos tiene una mínima cota superior (sup) y una máxima cota inferior (inf). Se dice que un poset P tiene un mínimo (notado $\hat{0}$), si existe un elemento $\hat{0} \in P$, tal que $\hat{0} \leq x$ para todo $x \in P$. De manera similar, se dice que P tiene un máximo (notado $\hat{1}$), si existe un elemento $\hat{1} \in P$, tal que $x \leq \hat{1}$ para todo $x \in P$. Toda trayectoria finita tiene $\hat{0}$ y $\hat{1}$.

Nota 2.5. Dado que el conjunto de los números naturales es un conjunto totalmente ordenado con el orden usual, entonces de acuerdo al Teorema 2.3 se tiene que $\mathbf{L} = (\mathbb{N}^2, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en donde $\preceq$ se define por $(x, y) \preceq (x', y')$ si y sólo si $x \leq x'$ y $y \leq y'$. Se cumple que $\mathbf{L} = (\mathbb{N}^2, \preceq)$ es un retículo.

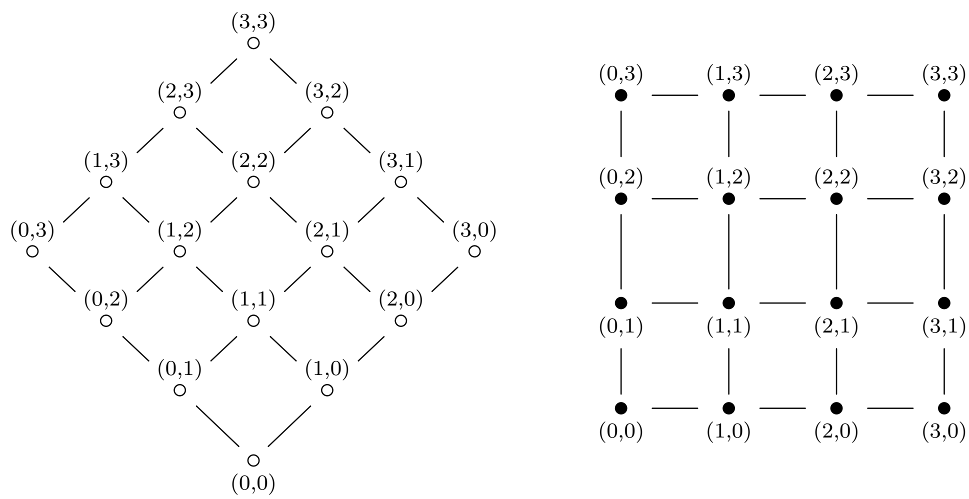


Figura 2-2: Representaciones del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$

Definición 2.6. Trayectorias reticulares
Stanley en [38] define y cuenta un gran número de trayectorias; de manera similar a la allí realizada, definimos una *trayectoria reticular* finita no negativa en el plano, con pasos unitarios a la izquierda y abajo como una secuencia $L = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, donde $v_i \in \mathbb{N}^2$ y $v_{i+1} - v_i$ es $(-1, 0)$ o $(0, -1)$.

2.2. Una interpretación combinatoria del coeficiente binomial

La solución de la siguiente situación nos llevará a establecer una fórmula para el coeficiente binomial.

Problema 1: *Determinar el número de trayectorias reticulares existentes para mover un objeto desde un punto inicial, situado en el retículo* $(\mathbb{N}^2, \preceq)$*, hasta el origen* $(0,0)$*, de tal forma que los movimientos permitidos para el objeto corresponden solo a pasos unitarios a la izquierda o hacia abajo.*

De acuerdo con la condición dada, los desplazamientos permitidos son una secuencia $L = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, donde $v_i \in \mathbb{N}^2$ y $v_{i+1} - v_i$ es $(-1,0)$ o $(0,-1)$. Así, al partir de un punto P_i de coordenadas (x,y) y efectuar un desplazamiento unitario se llega al punto P_{i-1} de coordenadas $(x-1,y)$ o $(x,y-1)$. Esto significa que partiendo del punto (n,k), la cantidad de trayectorias asociadas a él para llegar a $(0,0)$, está determinada por la suma de dos valores correspondientes al número de trayectorias de los puntos que se obtienen al disminuir en 1, cada una de las coordenadas del punto, y así sucesivamente hasta que una de las componentes sea igual a cero, caso en el cual se tiene una sola trayectoria asociada a dicho punto, la cual corresponde a la recta vertical en el evento que la abscisa del punto sea cero, y a una recta horizontal en el evento que la ordenada sea cero.

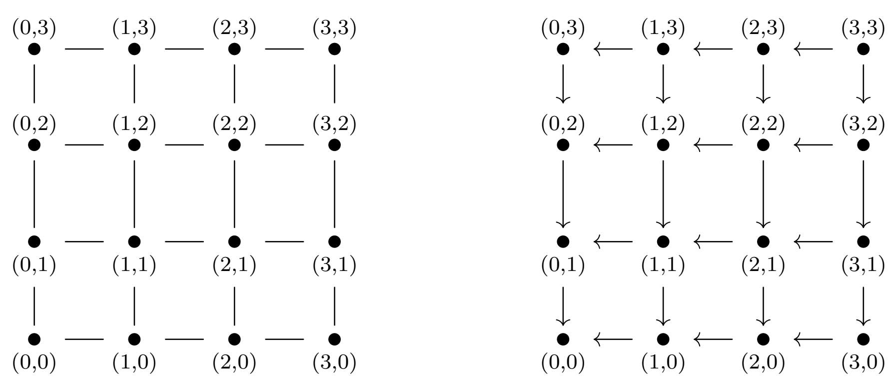


Figura 2-3: Retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ y trayectorias reticulares

La observación anterior nos lleva a establecer la siguiente definición, con la cual se tiene la solución al problema, aplicando un procedimiento recursivo.

Definición 2.7. Número de trayectorias
El número de trayectorias desde el punto (n, k) al origen se simboliza por $T_{(n,\ k)}$ y se obtiene recursivamente así

$$T_{(n,\ k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \ \text{ o } k = 0 \\ T_{(n-1,k)} + T_{(n,k-1)} & \text{si } n \neq 0 \ \text{ y } k \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1. Trayectorias reticulares partiendo del punto $(2, 2)$.

Si el punto inicial es $(2, 2)$ al aplicar la Definición 2.7 se determina que el número de trayectorias existentes desde él hasta el origen es seis. Veamos por que

$$\begin{aligned} T_{(2,2)} &= T_{(1,2)} + T_{(2,1)} \\ &= \{T_{(0,2)} + T_{(1,1)}\} + \{T_{(1,1)} + T_{(2,0)}\} \\ &= T_{(0,2)} + \{T_{(0,1)} + T_{(1,0)}\} + \{T_{(0,1)} + T_{(1,0)}\} + T_{(2,0)} \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Este procedimiento recursivo, se muestra en la Figura 2-4 y finaliza cuando alguna de las componentes del punto es igual a cero, caso en el cual por definición, se le asocia el número 1.

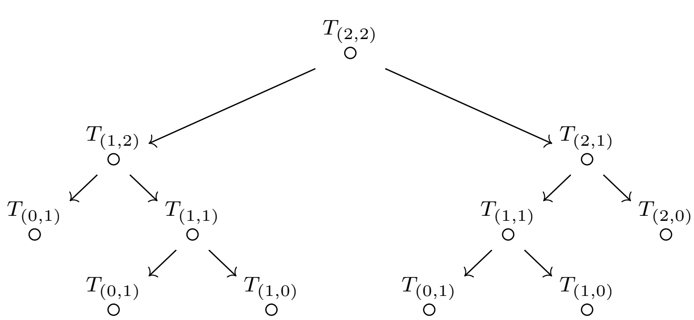


Figura 2-4: Procedimiento recursivo para $T_{(2,2)}$

El número de trayectorias reticulares asociado a cada punto de la trayectoria desde $(2,2)$ al origen se presenta en la Figura 2-5

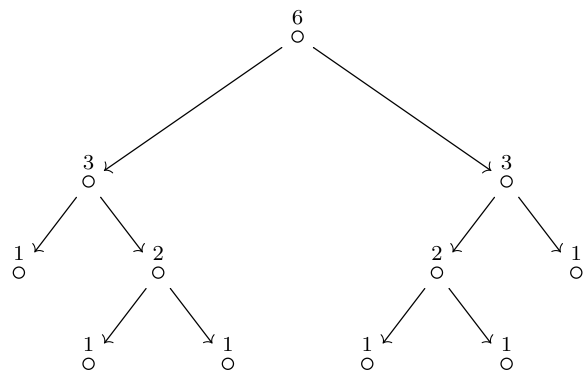


Figura 2-5: Número de trayectorias para $T_{(2,2)}$

A continuación se presentan las 6 trayectorias obtenidas, partiendo de $(2,2)$ y una representación gráfica de ellas se da en la Figura 2-6.

$$(2,2) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (0,2) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (2,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,0)$$

Definición 2.8. Longitud de una trayectoria reticular
Se denomina longitud de una trayectoria a la cantidad total de pasos unitarios horizontales y verticales que se realizan. Para el punto (n,k) la longitud de la trayectoria es $m = n + k$.

Teorema 2.9. Número de trayectorias reticulares de longitud m
El número de trayectorias reticulares de longitud m es 2^m

Demostración. Para construir una trayectoria de longitud m partiendo del punto (n,k) se debe eligir el punto P_{i-1} de coordenadas $(n-1,k)$ o $(n,k-1)$. Se tiene entonces dos posibilidades. Una vez elegido P_i hay dos posibilidades de elegir P_{i-2} y así sucesivamente, al aplicar el *principio de multiplicación* (nota 2.10) entonces pueden construirse 2^m trayectorias de longitud m. $\square$

Nota 2.10. Los conteos de las posibilidades que se pueden dar al considerar una serie de alternativas u opciones relacionadas con una circunstancia particular, se fundamentan en dos principios que son: *Principio de multiplicación* y *Principio de adición* [25]. En los dos principios se considera que, si una primera acción puede concluir de n_1 formas diferentes; una segunda acción puede concluir de n_2 formas diferentes y así sucesivamente, hasta llegar a una acción k que puede concluir de n_k formas diferentes; entonces, según el *Principio de multiplicación* las k acciones pueden concluir conjuntamente de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3, \ldots, n_k$ formas diferentes, y según el *Principio de adición*, si sólo una de estas k acciones se puede realizar, entonces el número de formas como puede concluir la primera, o la segunda, ..., o la acción k está dado por $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$.

Teorema 2.11. Número de puntos con trayectorias asociadas de longitud m
El número de puntos en el retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ *que tienen asociada una trayectoria de longitud* m *es* $m + 1$ *y son* $\{(m, 0), (m-1, 1), \ldots, (1, m-1), (0, m)\}$.

Demostración. De acuerdo a la Definición 2.8, los puntos (n, k) para los cuales la longitud de la trayectoria asociada es m, son aquellos que cumplen la condición $n + k = m$, como $n \geq 0 \wedge k \geq 0$; entonces los puntos son $\{(m, 0), (m-1, 1), (m-2, 2), \ldots, (2, m-2), (1, m-1), (0, m)\}$ siendo en total $m + 1$. $\square$

Corolario 2.12. *Existe una cantidad impar de puntos en el retículo* $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ *que tienen asociada una trayectoria de longitud* m*, con* m *un número par y una cantidad par de puntos cuya trayectoria asociada sea de longitud un número impar* p.

Definición 2.13. Relación de equivalencia.
Una relación binaria R definida sobre un conjunto no vacío M, es una relación de equivalencia si cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: Si $x \in M$ entonces xRx.

2. Simétrica: Si x, $y \in M$ y xRy entonces yRx.

3. Transitiva: Si $x, y, z \in M$, xRy y yRz entonces xRz.

Definición 2.14. Partición
Se llama partición de un conjunto M a una colección de subconjuntos de M tal que:

1. Los elementos de esa colección son "disyuntos" entre sí.
2. Todo elemento de M pertenece a algún elemento de dicha colección.
3. La unión de la colección es el conjunto M.

El siguiente teorema, fácilmente demostrable, evidencia la relación existente entre las relaciones de equivalencia y las particiones.

Teorema 2.15. Toda relación de equivalencia implica una partición
Una relación de equivalencia en el conjunto no vacío M determina una partición de éste y toda partición de M determina una relación de equivalencia en M.

Teorema 2.16. Partición de trayectorias de longitud n
Los puntos de $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ que tienen trayectorias de igual longitud inducen una partición en el retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$.

Demostración. Sea la relación de equivalencia "Puntos de $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ que tienen trayectorias de igual longitud". De la Definición 2.8 se sabe que un punto (x, y) tiene asociada una trayectoria de longitud n si y sólo si $x + y = n$. Sean (a, b) y (c, d) puntos de $(\mathbb{N}^2, \preceq)$, definimos la relación $(a, b) \sim (c, d)$ si y solo si $a + b = c + d$, la cual es de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ya que cumple las siguientes propiedades:

1. Reflexividad: $(a, b) \sim (a, b)$ ya que $a + b = a + b$.
2. Simetría: si $(a, b) \sim (c, d)$ entonces $a + b = c + d$, es decir, $c + d = a + b$ lo cual significa que $(c, d) \sim (a, b)$ por la simetría de la igualdad.
3. Transitividad: Si $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$ entonces $a + b = c + d$ y $c + d = e + f$ por lo tanto $a + b = c + d = e + f$ de donde $a + b = e + f$ lo cual significa que $(a, b) \sim (e, f)$.

Así la relación definida es de equivalencia y por el Teorema 2.15 se sabe que induce una partición en $\mathbb{N}^2$, con lo cual queda probado el enunciado. $\square$

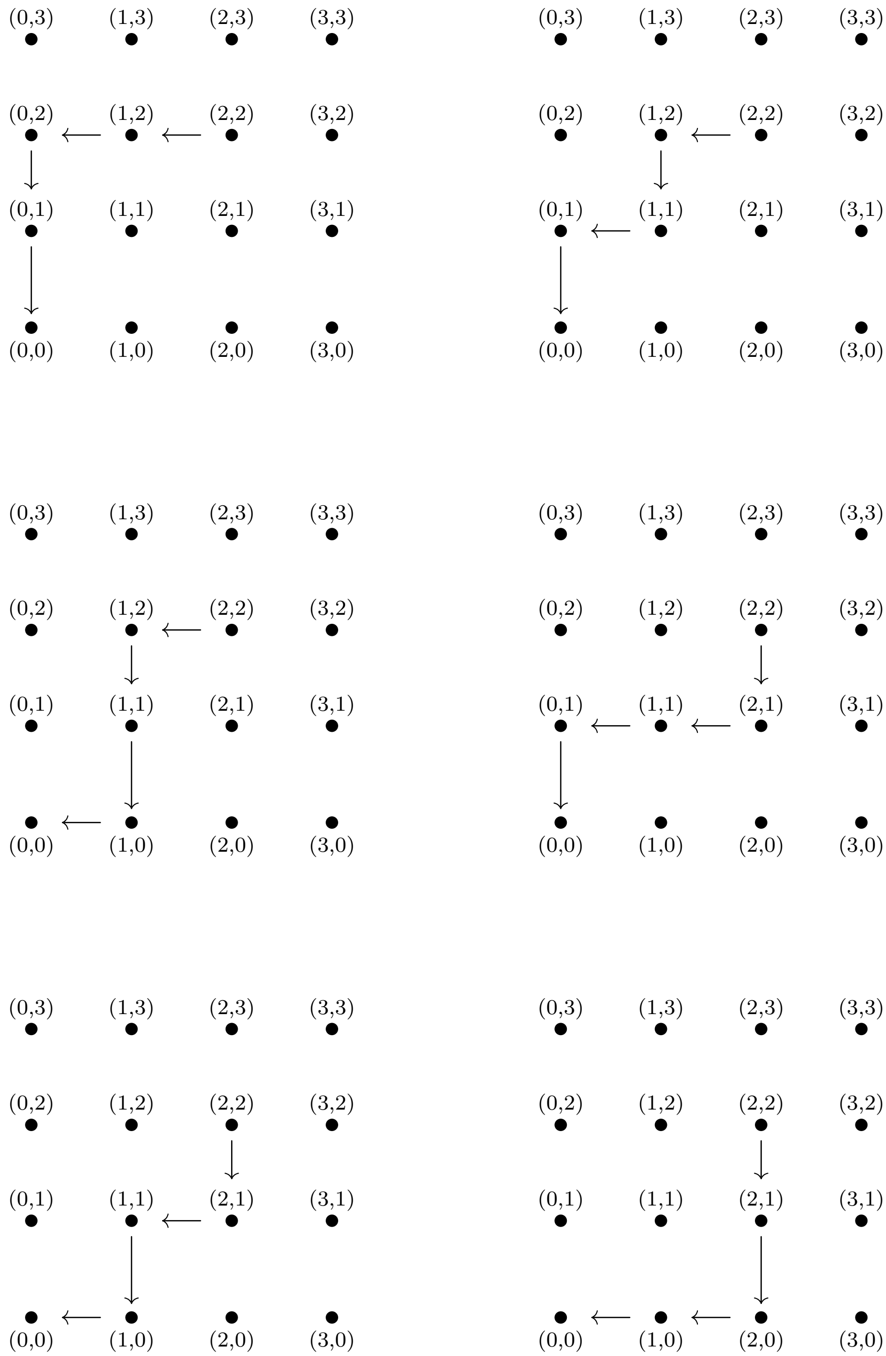


Figura 2-6: Trayectorias reticulares desde $(2,2)$

Ejemplo 2. Trayectorias de longitud 3

Por el Teorema 2.9 se tiene que el número de trayectorias de longitud 3 es $2^3 = 8$; además, por el Teorema 2.11 se sabe que existen 4 puntos que tienen asociada una trayectoria de longitud 3, siendo ellos $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,0)$. Estas trayectorias se pueden observar en la Figura 2-7.

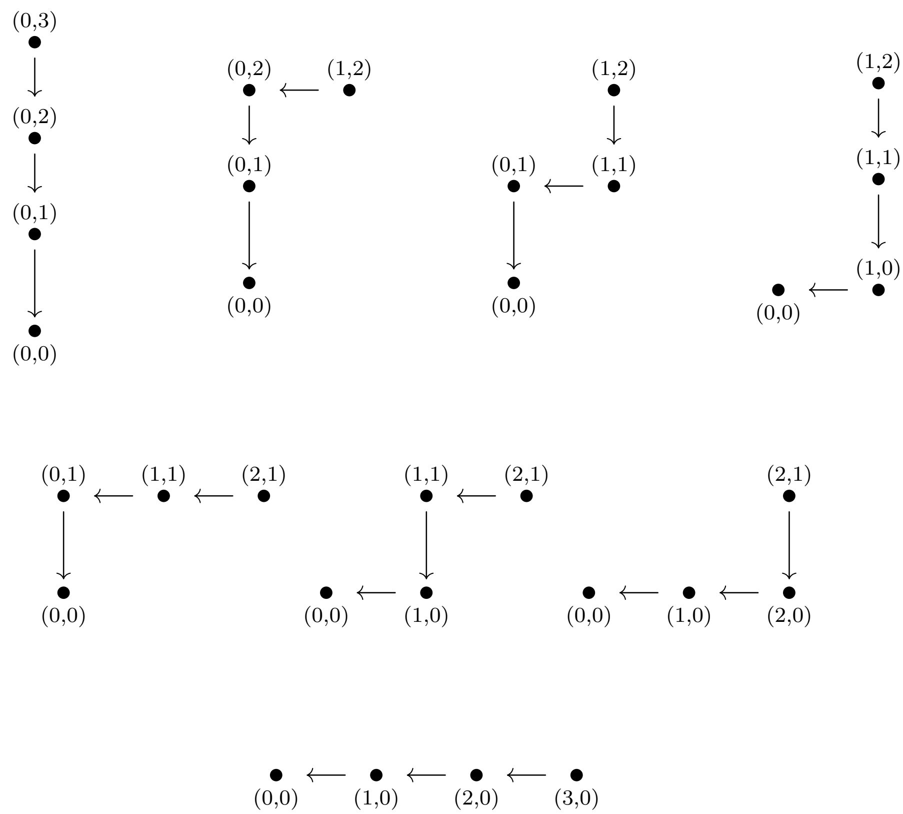


Figura 2-7: Trayectorias de longitud 3

En la página 26 se propuso el problema de contar las trayectorias reticulares desde un punto al origen; apoyándonos en la Definición 2.4 se dio la solución mediante la Definición recursiva 2.7 y se revisaron detalladamente las trayectorias asociadas al punto $(2,2)$. Aplicando un razonamiento parecido al realizado con $T_{(2,2)}$ se determina el número de trayectorias de los primeros puntos del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$; el resultado se presenta en la Figura 2-8 .

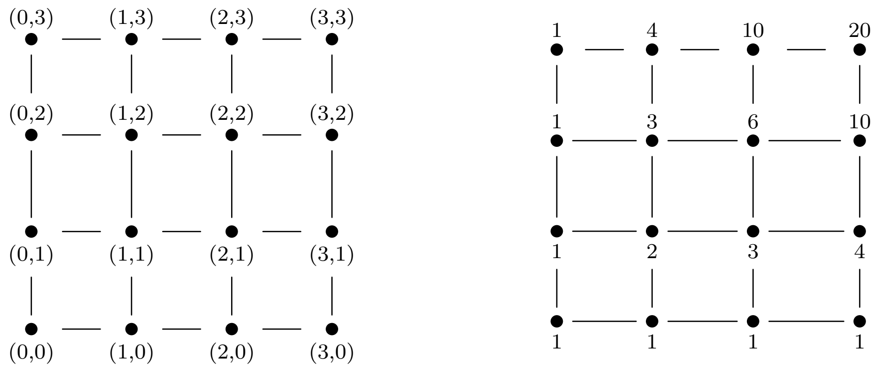


Figura 2-8: Trayectorias asociadas a los primeros puntos del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$

Los números obtenidos corresponden al arreglo triangular conocido como *Triángulo de Pascal*. Para observarlo mejor, basta con rotar la figura 135° en sentido negativo (en el sentido de las manecillas del reloj).

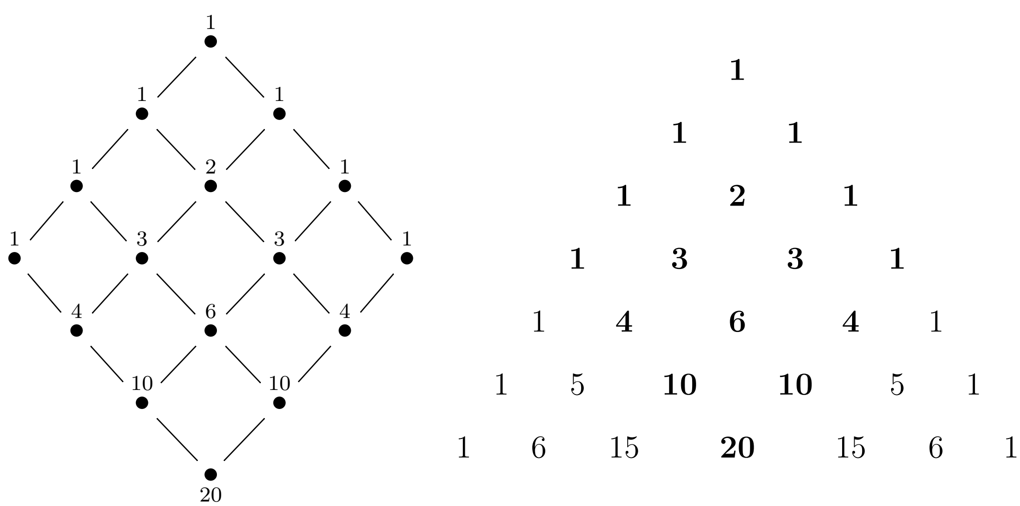


Figura 2-9: Triángulo de Pascal

La solución dada al problema 1 no es eficiente ya que, aunque la Definición 2.7 permite determinar el número de trayectorias asociadas a cada punto del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$, requiere conocer los términos precedentes, siendo extenso el procedimiento para puntos distantes del origen. Sin embargo, al aplicarla reiteradamente se obtuvo el Triángulo de Pascal, ante lo cual, se plantea un segundo problema.

Problema 2: *Determinar una fórmula explícita que permita expresar los elementos del Triángulo de Pascal y con ello solucionar el problema 1 directamente y no de forma recursiva.*

Debido a la relación existente entre el número de trayectorias reticulares asociadas a los puntos de $\mathbb{N}^2$ y el Triángulo de Pascal, la cual se manifestó en la página 33, es posible representar dicho arreglo de forma rectangular y no necesariamente de manera triangular.

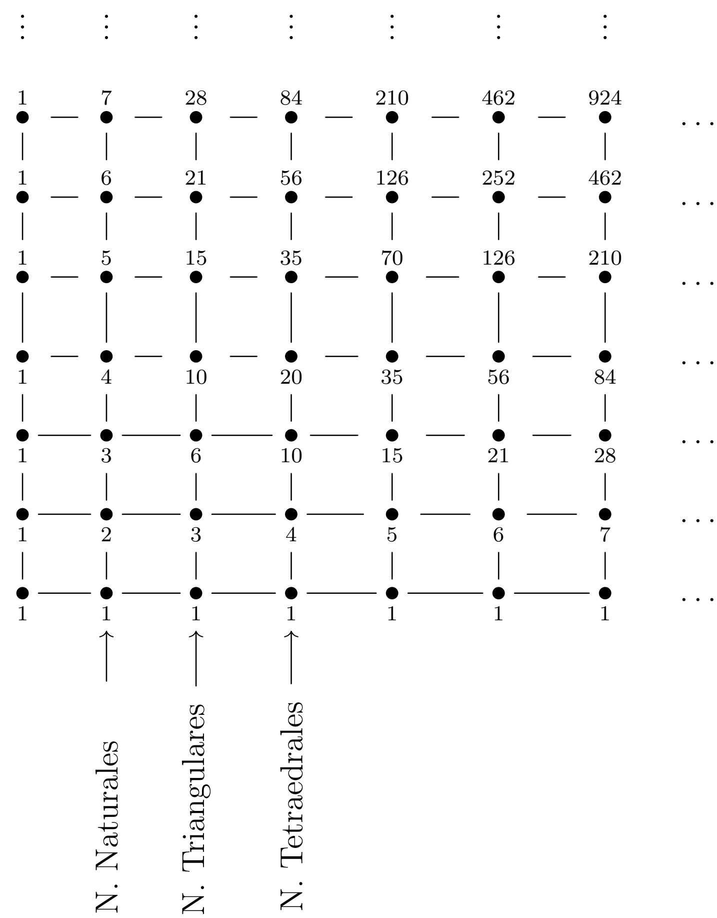


Figura 2-10: Distribución rectangular de los números del Triángulo de Pascal

Para llegar a la solución del problema 2, se listarán algunas conclusiones obtenidas al observar las columnas de la Figura 2-10, las cuales corresponden a diagonales en el evento de tomar el arreglo de forma triangular, tal como se presenta en la Figura 2-9.

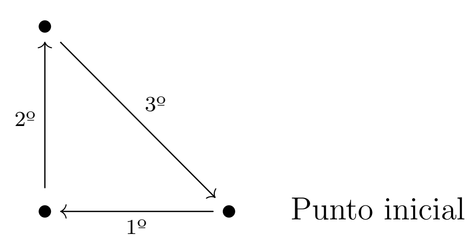
1. La primera columna esta conformada por solo unos, ya que tenemos una única trayectoria para llegar al origen, estando en el punto $(0, k)$ entonces

$$T_{(0,k)} = 1 \tag{1}$$

2. La siguiente columna corresponde a los números naturales y se obtienen para todos los puntos de coordenadas $(1, k)$. El número de trayectorias correspondiente esta dado por $k + 1$. Lo podemos representar así,

$$T_{(1,k)} = k + 1 \tag{2}$$

3. Para los puntos (n, k) de las columnas posteriores se aplicara la siguiente regla:
   Realizar un primer desplazamiento horizontal desde la posición inicial hacia la izquierda, hasta llegar a la columna de los números naturales, una vez allí, se efectúa un desplazamiento ascendente en sentido vertical, de longitud igual a la del desplazamiento horizontal realizado previamente, finalmente un desplazamiento diagonal, para volver al punto de partida, formando así un triángulo rectángulo isósceles. Para obtener el número de trayectorias correspondiente a ese punto, efectuar el producto de los números que están sobre el cateto vertical y dividirlos entre el producto de los factores $1, 2, \ldots, n$.



4. En la tercera columna se observa la secuencia correspondiente a los números triangulares $1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots$, los cuales se han obtenido de las trayectorias asociadas a los puntos de la forma $(2, k)$. Empleando la

Figura 2-10 y la regla descrita anteriormente en 3, al punto $(2,3)$, se tiene que $T_{(2,3)} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$; similarmente, para el punto $(2,5)$ se tiene que $T_{(2,5)} = \frac{7\cdot6}{1\cdot2} = 21$. El proceso anterior permite inferir que un punto de la forma $(2,k)$ tendrá asociado un número $T_{(2,k)}$ obtenido así:

$$T_{(2,k)} = \frac{(k+2)\cdot(k+1)}{1\cdot2} \tag{3}$$

5. En la cuarta columna tenemos la sucesión de números tetraedrales $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$, los cuales provienen de contar las trayectorias reticulares de los puntos de la forma $(3,k)$. Al aplicar la regla descrita en el ítem 3, a los puntos $(3,0)$ y $(3,4)$ se tiene que $T_{(3,0)} = \frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3} = 1$ y $T_{(3,4)} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35$. De acuerdo a los resultados se infiere que los números tetraedrales tienen asociado el número $T_{(3,k)}$ dado por

$$T_{(3,k)} = \frac{(k+3)\cdot(k+2)\cdot(k+1)}{1\cdot2\cdot3} \tag{4}$$

6. Se infiere, a partir de los procedimientos anteriores, que para los puntos de la forma $(4,k)$, se tiene asociado el valor

$$T_{(4,k)} = \frac{(k+4)\cdot(k+3)\cdot(k+2)\cdot(k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \tag{5}$$

7. A partir de las observaciones anteriores se tiene que el número $T_{(n,k)}$ asociado al punto (n,k) esta determinado por

$$T_{(n,k)} = \frac{(k+n)\cdot(k+(n-1))\ldots(k+2)\cdot(k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n} \tag{6}$$

Al aplicar la expresión (6) al punto $(6,4)$ se tiene

$$T_{(6,4)} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 210$$

Resultado que puede observarse en la Figura 2-10.

Con la fórmula (6) se tiene la solución al Problema 2 y por lo tanto al Problema 1 que previamente se había solucionado, pero de forma recursiva. Por lo tanto, la fórmula anterior, además de permitirnos calcular los valores en el Triángulo de Pascal, representa el número de trayectorias reticulares en $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ existentes desde un punto de coordenadas (n, k) hasta el origen.

Aplicando el *factorial* del número k, el cual se presentó en la página 18 se tiene que

$$(k+n) \cdot (k+(n-1)) \ldots (k+2) \cdot (k+1) = \frac{(n+k)!}{k!},$$

y reemplazando esta expresión en la fórmula (6) se obtiene

$$T_{(n,k)} = \frac{(n+k)!}{n! \cdot k!} \tag{7}$$

Este número se escribe frecuentemente como $\binom{n+k}{k}$ o de la forma $C_{(n+k,\ k)}$ y se denomina ***Número combinatorio***, con lo cual el número de trayectorias reticulares está dado por

$$T_{(n,k)} = C_{(n+k,\ k)} = \binom{n+k}{k} \tag{8}$$

Asumiendo que $k \leq n$, como $n = (n-k)+k$ entonces el número combinatorio $C_{(n,k)}$ es igual a

$$C_{(n,k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \tag{9}$$

Al aplicar la fórmula (8) al punto $(2, 2)$ se tiene

$$T_{(2,2)} = \binom{2+2}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

siendo el mismo resultado obtenido en el ejemplo 1 al aplicar la Definición 2.7.

La expresión determinada en (8) pone a disposición una fórmula que permite encontrar cualquier término del Triángulo de Pascal o de trayectorias asociadas a cualquier punto del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$.

Los resultados de la aplicación de la expresión (8) a otros puntos de $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ y una rotación de estos valores se presenta a continuación.

$$
\begin{array}{cccc}
\binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} \\[2ex]
\binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} \\[2ex]
\binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} \\[2ex]
\binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} & & & \\
 & & \binom{\mathbf{1}}{\mathbf{0}} & & \binom{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} & & \\
 & \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{0}} & & \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} & & \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} & \\
\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{0}} & & \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} & & \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} & & \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{3}} \\
 & \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{1}} & & \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} & & \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} & \\
 & & \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} & & \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} & & \\
 & & & \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} & & &
\end{array}
$$

Figura 2-11: Números combinatorios asociados a los primeros puntos del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$

Nota 2.17. Los números $\dbinom{n}{k}$ obtenidos en (9) se conocen como *coeficientes binomiales*, *números combinatorios* o *combinaciones*, pero es frecuente referirse a ellos como el número de combinaciones n en k o simplemente n en k, debido a otro enfoque con el cual se obtienen, el cual consiste en asociarlo al número de subconjuntos de k elementos escogidos de un conjunto con n elementos.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{6} & & \mathbf{15} & & \mathbf{20} & & \mathbf{15} & & \mathbf{6} & & \mathbf{1}
\end{array}
$$

Figura 2-12: Coeficientes binomiales

Aplicando 2.17 es posible demostrar el resultado obtenido en (8)

Teorema 2.18. Número de trayectorias reticulares
El número de trayectorias reticulares que parten del punto de coordenadas (n, k) *es* $\binom{n+k}{k}$

Demostración. Para contar las trayectorias $P_m P_{m-1} \dots P_0$ con $P_m = (n, k)$ y $P_0 = (0, 0)$ se observa que $m = n + k$, (Definición 2.8) ya que cada vértice $P_i (1 \leq i \leq m)$ tiene su abscisa o su ordenada una unidad menor que la del vértice anterior P_{i+1}. Por lo tanto, para ir desde (n, k) hasta $(0, 0)$ una trayectoria debe tener n segmentos horizontales y k segmentos verticales, siendo su longitud $m = n + k$. También se tiene que, el camino queda determinado si conocemos cuáles de sus $n+k$ segmentos son horizontales, pues los restantes serán necesariamente verticales. La situación se reduce entonces a escoger n elementos en un total de $n+k$, lo cual puede hacerse de $C(n+k, n)$ maneras, de acuerdo a la definición de coeficiente binomial (2.17). □

Corolario 2.19. *El número de trayectorias reticulares que parten del punto* (r, s) *hasta* (p, q)*, con* $p \leq r$ *y* $q \leq s$ *está dado por* $\binom{(r-p)+(s-q)}{s-q}$

Nota 2.20. Es interesante el proceso de generar *secuencias numéricas* a partir de las trayectorias reticulares asociadas a cada punto del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$. Para tal fin se van a tomar los números que estén sobre las diagonales, esto se puede apreciar en la Figura 2-13, donde para aquellos puntos cuyas componentes son iguales, se tiene la secuencia: $1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, \cdots$. Si se traza lineas paralelas a aquella que contiene los números anteriores y se listan los números sobre ella, se obtiene las secuencias, $1, 3, 10, 35, 126, 462, 1716, 6435, 24310, \cdots$ correspondiente a los puntos cuya segunda componente difiere en una unidad de la primera. Para los puntos cuya segunda componente difiere en dos unidades de la primera se tiene la secuencia $1, 4, 15, 56, 210, 792, 3003, 11440, \cdots$; este proceso se puede continuar indefinidamente, las primeras seis secuencias numéricas obtenidas de la forma descrita se presentan el la tabla 2-1.

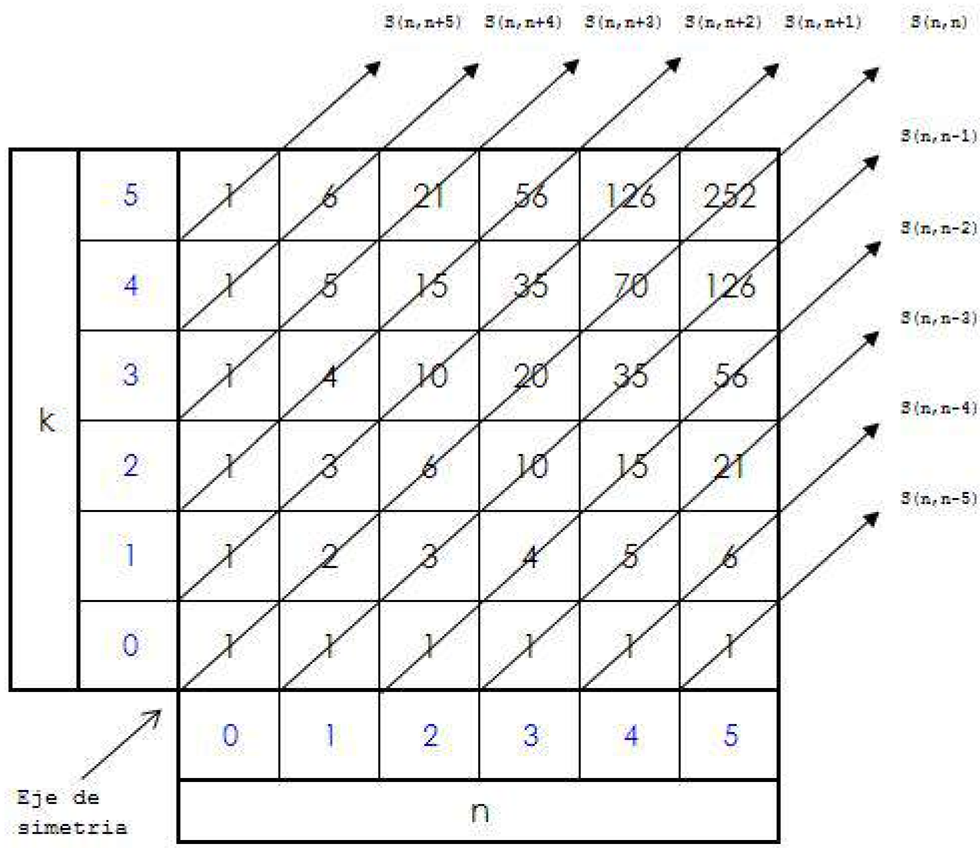


Figura 2-13: Trayectorias reticulares

$$
\begin{array}{lcc}
S_{(n,n)} & = & 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, \cdots \\
S_{(n,n-1)} = S_{(n,n+1)} & = & 1, 3, 10, 35, 126, 462, 1716, 6435, 24310, \cdots \\
S_{(n,n-2)} = S_{(n,n+2)} & = & 1, 4, 15, 56, 210, 792, 3003, 11440, \cdots \\
S_{(n,n-3)} = S_{(n,n+3)} & = & 1, 5, 21, 84, 330, 1287, 5005, \cdots \\
S_{(n,n-4)} = S_{(n,n+4)} & = & 1, 6, 28, 120, 495, 2002, \cdots \\
S_{(n,n-5)} = S_{(n,n+5)} & = & 1, 7, 36, 165, 715, \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Tabla 2-1: Secuencias numéricas generadas a partir de las trayectorias reticulares asociadas a puntos sobre diagonales del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$

2.3. Propiedades y teoremas básicos

Con el fin de lograr la comprensión del Teorema del Binomio es necesario considerar una serie de proposiciones relativas al coeficiente binomial, las cuales permitirán obtener el conocido Triángulo de Pascal y el desarrollo de binomios, así como solucionar situaciones específicas.

Para la realización de las demostraciones emplearemos una estrategia combinatoria, consistente con el razonamiento realizado en la sesión 2.2, interpretando $\binom{n}{k}$ como el número de trayectorias reticulares desde $(n-k,k)$ hasta $(0,0)$.

Teorema 2.21. Suma de los coeficientes binomiales
Para todo $n \geq 1$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Demostración:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Aplicando que $C_{(n,k)} = T_{(n-k,k)}$, (fórmula (8)), se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = T_{(n,0)} + T_{(n-1,1)} + T_{(n-2,2)} + \cdots + T_{(1,n-1)} + T_{(0,n)} = \sum_{k=0}^{n} T_{(n-k,k)}$$

Por la Definición 2.8, la longitud de la trayectorias consideradas en cada uno de los sumandos es n, y se tiene $n+1$ sumandos (correspondientes a la totalidad de puntos que tienen asociada una trayectoria de longitud n, (Teorema 2.11)), además por el Teorema 2.9 se tiene que el cardinal del conjunto de trayectorias de longitud n es 2^n, por lo tanto $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. □

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k} =&\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\\ =&T_{(3,0)}+T_{(2,1)}+T_{(1,2)}+T_{(0,3)}\\ =&1+3+3+1\\ =&8\\ =&2^3\end{aligned}$$

Esta situación corresponde a determinar el número de trayectorias de longitud 3, el cual fue realizado en el ejemplo 2 y las 8 trayectorias se pueden apreciar en la Figura 2-7. Allí se observa que el número de trayectorias de longitud 3, partiendo de los puntos $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$ y $(3,0)$ es 1, 3, 3, y 1 respectivamente.

El Teorema 2.21, visto en el retículo $(\mathbb{N}^2,\preceq)$ corresponde a la suma de las trayectorias asociadas a los puntos, que requieren n movimientos para llegar a $(0,0)$ y son aquellos que están sobre una misma diagonal, lo cual en el Triángulo de Pascal, es justamente la suma de los elementos de la fila n.

Teorema 2.22. Simetría
Para todo $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n$, se cumple que

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Demostración:
La simetría respecto a la bisectriz del retículo $(\mathbb{N}^2,\preceq)$ (es decir la recta $y=x$) establece una correspondencia biyectiva entre el número de trayectorias reticulares que parten de $(n-k,k)$ y el número de ellas que parten del punto simétrico $(k,n-k)$. Al aplicar la fórmula (8) se tiene que

$$\binom{n}{k}=\binom{(n-k)+k}{k}=T_{(n-k,k)}=T_{(k,n-k)}=\binom{k+(n-k)}{n-k}=\binom{n}{n-k}$$

$\square$

En el Triángulo de Pascal, Figura 2-9, el eje de simetría corresponde a la recta perpendicular a la filas y que pasa por los números $1,\ 2,\ 6,\ 20,\ldots$, siendo éstos los *coeficientes centrales.*

Nota 2.23. Los *coeficientes centrales* están determinados por las trayectorias asociadas a los puntos del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ cuyas componentes son iguales.
Al aplicar la expresión (8) se tiene una fórmula para determinar los números centrales, la cual es

$$T_{(n,n)} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$$

Teorema 2.24. Fórmula de Pascal

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Demostración:
El número de trayectorias reticulares partiendo del punto $(n-k,k)$ es $\binom{(n-k)+k}{k} = \binom{n}{k}$, pero también se puede determinar al sumar las trayectorias asociadas a los dos puntos que le preceden en la fila y columna respectiva, siendo ellos $(n-k-1,k)$ y $(n-k,k-1)$, debido a que ellas constituyen dos clases disyuntas. Las trayectorias desde $(n-k-1,k)$ son $\binom{(n-k-1)+k}{k} = \binom{n-1}{k}$, mientras que las del punto $(n-k,k-1)$ son a su vez $\binom{(n-k)+(k-1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$; por lo tanto $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. $\square$

Nota 2.25. La fórmula dada en el Teorema 2.24 se conoce también con el nombre fórmula de Stifel o fórmula de recurrencia y permite calcular los coeficientes binomiales recursivamente, si estos se organizan en una tabla triangular (*"Triángulo de Pascal"*) como en la Figura 2-14, entonces cada uno de ellos es igual a la suma de los dos que están en la fila inmediatamente anterior, a su izquierda y a su derecha.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \swarrow & & \searrow & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Figura 2-14: Aplicación de la fórmula de Pascal

Teorema 2.26. Paridad del coeficiente binomial central.
Los Coeficientes Binomiales Centrales son números pares.

Demostración:
Al aplicar la fórmula de Pascal (Teorema 2.24) y la simetría del coeficiente binomial (Teorema 2.22) es posible reescribir el coeficiente binomial central $\binom{2n}{n}$, así:

$$
\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} \\
&= \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n} \\
&= 2\binom{2n-1}{n}
\end{aligned}
$$

Como cada coeficiente binomial es un número entero, se concluye que el coeficiente binomial central es un número par. $\square$

2.4. Fórmula del desarrollo de la potencia de un binomio

Obtendremos la fórmula del desarrollo de la potencia de un binomio y se realizará la respectiva demostración.
Sean n y m enteros positivos fijos y $(D, \preceq)$ el subretículo de $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ tal que: $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq m\}$. $(x, y) \preceq (x', y')$ si y sólo si $x \leq x'$ y $y \leq y'$ en donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales y $\leq$ el orden usual de $\mathbb{N}$.

Cada punto $(i, j) \in D$ tiene asociadas un par de funciones denotadas $\varepsilon_1^{(i,j)}$ y $\varepsilon_2^{(i,j)}$, tales que $\varepsilon_1^{(i,j)}(i, j) = (i + 1, j)$ y $\varepsilon_2^{(i,j)}(i, j) = (i, j + 1)$ por lo que cada trayectoria reticular P con punto inicial $(0, 0)$ y punto final (i, j) se puede escribir en la forma:

$$(0,0) \parallel \varepsilon_h^{(0,0)}(0,0) \parallel \varepsilon_h^{\varepsilon_h^{(0,0)}(0,0)}(\varepsilon_h^{(0,0)}(0,0)) \parallel \varepsilon_h^{\varepsilon_h^{\varepsilon_h^{(0,0)}(0,0)}(\varepsilon_h^{(0,0)}(0,0))}(\varepsilon_h^{\varepsilon_h^{(0,0)}(0,0)}(\varepsilon_h^{(0,0)}(0,0))) \parallel \cdots \tag{10}$$

donde $h \in \{1, 2\}$

Denotamos con $\mathcal{L}$ el conjunto de todos las trayectorias reticulares que empiezan en $(0, 0)$ y finalizan en un punto de D. Entonces sobre $\mathcal{L}$ se puede definir una relación de equivalencia denotada $\sim$ tal que si $P, Q \in \mathcal{L}$ entonces $P \sim Q$ si y sólo si el punto final de P es igual al punto final de Q.

Sea $\overline{\mathcal{L}}$ el conjunto de sumas formales de representantes de clases de $\mathcal{L}$ tal que:

$$\overline{\mathcal{L}} = \left\{ \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha P_\alpha : a_\alpha \in k, P_\alpha \text{ es representante de una clase de elementos } \mathcal{L} \right\}$$

donde l es el cardinal o tamaño de $\mathcal{L}$, $\{P_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq l\}$ es un conjunto fijo de representantes y k es un campo (de hecho k puede ser un anillo conmutativo con unidad). Se cumple que

$$\sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{l} a_\beta P_\beta \text{ si sólo si } a_\alpha = a_\beta \text{ para todo } \alpha \text{ y } \beta.$$

En $\overline{\mathcal{L}}$ existe el elemento

$$[0] = \sum_{\alpha=1}^{l} 0P_\alpha$$

correspondiente a la clase de la trayectoria sin vértices ni flechas.

Como cada trayectoria reticular que comienza en $(0,0)$ está determinada por el vértice terminal, cada representante P_α de una clase en $\mathcal{L}$ se puede denotar de la forma

$$P_\alpha = [(m,n)]$$

en donde (m,n) es el punto final de los elementos de la clase P_α. Por lo que un elemento de $\overline{\mathcal{L}}$ se puede escribir de la forma

$$\sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha, n_\alpha)]$$

En particular $0 \cdot [(m,n)] = [(0,0)] = [0]$ para todo $(m,n) \in \mathcal{L}$.

Asumiendo la notación descrita, definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\overline{\mathcal{L}}$ de la siguiente forma:

$+ : \overline{\mathcal{L}} \times \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathcal{L}}$ se define de forma tal que:

$$\sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha, n_\alpha)] + \sum_{\beta=1}^{l} b_\beta[(m_\beta, n_\beta)] = \sum_{\alpha=1}^{l} (a_\alpha + b_\alpha)[(m_\alpha, n_\alpha)]$$

$\cdot : \overline{\mathcal{L}} \times \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \overline{\mathcal{L}}$ se define por la siguiente regla:

$$\sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha, n_\alpha)] \cdot \sum_{\beta=1}^{l} b_\beta[(m_\beta, n_\beta)] = \sum_{\beta=1}^{l}\sum_{\alpha=1}^{l} (a_\alpha \cdot b_\beta)[(m_\alpha + m_\beta, n_\alpha + n_\beta)]$$

Se observa que $+$, está bien definida ya que si

$$\sum_{\alpha=1}^{l} (a_\alpha + b_\alpha)[(m_\alpha, n_\alpha)] = \sum_{\gamma=1}^{l} c_\gamma[(m_\gamma, n_\gamma)]$$

entonces por definición $c_\gamma = (a_\alpha + b_\alpha)$, para todo α y γ. De manera similar se tiene que que $\cdot$ también está bien definido, por lo que podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2.27. Anillo $(\overline{\mathcal{L}}, +, \cdot)$
La estructura $(\overline{\mathcal{L}}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Demostración:

Sean $x, y, z \in \overline{\mathcal{L}}$, con $x = \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha, n_\alpha)]$, $y = \sum_{\beta=1}^{l} b_\beta[(m_\beta, n_\beta)]$ y $z = \sum_{\gamma=1}^{l} c_\gamma[(m_\gamma, n_\gamma)]$ entonces:

(a) $+$ es asociativa. En efecto,

$$\begin{aligned}
x + (y + z) &= \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha, n_\alpha)] + \sum_{\beta=1}^{l}(b_\beta + c_\beta)[(m_\beta, n_\beta)] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}(a_\alpha + (b_\alpha + c_\alpha))\,[(m_\alpha, n_\alpha)] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}((a_\alpha + b_\alpha) + c_\alpha)\,[(m_\alpha, n_\alpha)] \\
&= \sum_{\beta=1}^{l}(a_\alpha + b_\alpha)[(m_\alpha, n_\alpha)] + \sum_{\gamma=1}^{l} c_\gamma[(m_\gamma, n_\gamma)] \\
&= (x + y) + z
\end{aligned}$$

(b) El elemento neutro de $\overline{\mathcal{L}}$ es $[0]$ ya que se cumple que

$$\begin{aligned}
x + [0] &= \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha, n_\alpha)] + \sum_{\beta=1}^{l} 0[(m_\beta, n_\beta)] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}(a_\alpha + 0)[(m_\alpha, n_\alpha)] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha, n_\alpha)] \\
&= x
\end{aligned}$$

(c) Definimos $-x$ de forma tal que $-x = \sum_{\alpha=1}^{l}(-a_\alpha)[(m_\alpha, n_\alpha)]$ y se cumple que

$$\begin{aligned} x + (-x) &= \sum_{\alpha=1}^{l}(a_\alpha + (-a_\alpha))[(m_\alpha, n_\alpha)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^{l} 0[(m_\alpha, n_\alpha)] \\ &= [0] \end{aligned}$$

Por lo que cada $x \in \overline{\mathcal{L}}$ tiene un inverso aditivo.

(d) Como $\sum_{\alpha=1}^{l}(a_\alpha + b_\alpha)[(m_\alpha, n_\alpha)] = \sum_{\alpha=1}^{l}(b_\alpha + a_\alpha)[(m_\alpha, n_\alpha)]$ entonces $+$ es claramente conmutativa.

(e) $\cdot$ es asociativo ya que

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &= \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha, n_\alpha)] \cdot \left(\sum_{\gamma=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l}(b_\beta \cdot c_\gamma)[(m_\beta + m_\gamma, n_\beta + n_\gamma)] \right) \\ &= \sum_{\gamma=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l}\sum_{\alpha=1}^{l} \left(a_\alpha \cdot (b_\beta \cdot c_\gamma)\right) \left[(m_\alpha + (m_\beta + m_\gamma), n_\alpha + (n_\beta + n_\gamma))\right] \\ &= \sum_{\gamma=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l}\sum_{\alpha=1}^{l} \left((a_\alpha \cdot b_\beta) \cdot c_\gamma\right) \left[((m_\alpha + m_\beta) + m_\gamma, (n_\alpha + n_\beta) + n_\gamma)\right] \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l}(a_\alpha \cdot b_\beta)[(m_\alpha + m_\beta, n_\alpha + n_\beta)] \right) \cdot \sum_{\alpha=1}^{l} c_\gamma[(m_\gamma, n_\gamma)] \\ &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}$$

(f) $\cdot$ es distributivo respecto de la suma. En efecto,

$$\begin{aligned}
x\cdot(y+z) &= \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha,n_\alpha)]\cdot\left(\sum_{\beta=1}^{l}(b_\beta+c_\beta)[(m_\beta,n_\beta,)]\right)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l} a_\alpha\cdot(b_\beta+c_\beta)[(m_\alpha+m_\beta,n_\alpha+n_\beta)]\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l}(a_\alpha\cdot b_\beta+a_\alpha\cdot c_\beta)[(m_\alpha+m_\beta,n_\alpha+n_\beta)]\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l} a_\alpha\cdot b_\beta[(m_\alpha+m_\beta,n_\alpha+n_\beta)]+\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l}(a_\alpha\cdot c_\beta[(m_\alpha+m_\beta,n_\alpha+n_\beta)]\\
&= xy+xz
\end{aligned}$$

(g) Si definimos ahora el elemento 1 tal que $1=\sum_{\delta=1}^{l}u_\delta[(m_\delta,n_\delta)]$, en donde

$$u_\delta=\begin{cases}1 & \text{si } \delta=1\\ 0 & \text{de otro modo}\end{cases}$$

con $(m_1,n_1)=(0,0)$. Entonces para todo $x\in\overline{\mathcal{L}}$ se cumple la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
x\cdot 1 &= \sum_{\delta=1}^{l}\sum_{\alpha=1}^{l}(a_\alpha\cdot u_\delta)\,[(m_\alpha+m_\delta,n_\alpha+n_\delta)]\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha+0,n_\alpha+0)]\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l} a_\alpha[(m_\alpha,n_\alpha)]\\
&= x
\end{aligned}$$

Como la conmutatividad de $\cdot$ se prueba de forma análoga al caso de la suma, se concluye que $\overline{\mathcal{L}}$ con las operaciones definidas es un anillo conmutativo con unidad.

Nota 2.28. De hecho $\overline{\mathcal{L}}$ se puede ver como un álgebra cuya base consta de las trayectorias reticulares o representantes de clases de ellas, por lo que un problema interesante consiste en estudiar los módulos sobre esta álgebra.

Si para $P \in \mathcal{L}$ notamos cada flecha del tipo $(i,j) \parallel (i+1,j)$ con x y cada flecha del tipo $(i,j) \parallel (i,j+1)$ con el símbolo y entonces por la Fórmula (10), P puede escribirse en la forma $x^{\alpha}y^{\beta}$, para unos enteros no negativos α y β. En particular, se tiene para $[(0,0)]$, $[(m_\alpha,0)]$ y $[(0,n_\alpha)]$ en $\overline{\mathcal{L}}$, las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} x^0 &= y^0 = [(0,0)] = 1 \\ x^{m_\alpha} &= [(m_\alpha,0)] \\ y^{n_\alpha} &= [(0,n_\alpha)] \end{aligned} \tag{11}$$

Además, un elemento $P \in \overline{\mathcal{L}}$ tiene la forma:

$$P = \sum_{\alpha} a_\alpha [(m_\alpha,0)][(0,n_\alpha)] = \sum_{\alpha} a_\alpha x^{m_\alpha} y^{n_\alpha}$$

De acuerdo a las consideraciones realizadas se tiene en $\overline{\mathcal{L}}$, que:

1. La suma de x con y esta dada por $x+y = [(1,0)] + [(0,1)]$
2. El producto de x con y es $x \cdot y = [(1,0)] \cdot [(0,1)] = [(1,1)]$
3. El producto $x \cdot (x+y) es$

$$\begin{aligned} x \cdot (x+y) &= [(1,0)] \cdot ([(1,0)] + [(0,1)]) \\ &= [(1,0)] \cdot [(1,0)] + [(1,0)][(0,1)]) \\ &= [(2,0)] + [(1,1)] \\ &= x^2 + xy \end{aligned}$$

4. El producto $y \cdot (x+y)$ es

$$\begin{aligned} y \cdot (x+y) &= [(0,1)] \cdot ([(1,0)] + [(0,1)]) \\ &= [(0,1)] \cdot [(1,0)] + [(0,1)][(0,1)]) \\ &= [(1,1)] + [(0,2)] \\ &= xy + y^2 \end{aligned}$$

5. El producto $(x+y)\cdot(x+y)$

$$\begin{aligned}(x+y)\cdot(x+y) &= ([(1,0)]+[(0,1)])\cdot([(1,0)]+[(0,1)])\\ &= [(1,0)]\cdot([(1,0)]+[(0,1)])+[(0,1)]\cdot([(1,0)]+[(0,1)])\\ &= [(2,0)]+[(1,1)]+[(1,1)]+[(0,2)]\\ &= [(2,0)]+2[(1,1)]+[(0,2)]\\ &= x^2+2xy+y^2\end{aligned}$$

Se concluye que el *cuadrado de un binomio*, satisface la igualdad, $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

Este proceso podría continuarse indefinidamente para cualquier n, con el fin de determinar $(x+y)^n$.

Al aplicar los resultados alcanzados en la sección 2.2, se observa que es posible reescribir las igualdades obtenidas, en términos de las trayectorias asociadas a cada punto, ya que los coeficientes en estos desarrollos coinciden.

Se aprecia la igualdad entre los coeficientes obtenidos en cada uno de los productos y los elementos en las filas del Triángulo de Pascal.

n	Desarrollo del binomio	Triángulo de Pascal
0	$(x+y)^0 = 1$	1
1	$(x+y) = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$	1 1
2	$(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$	1 2 1
3	$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$	1 3 3 1
4	$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$	1 4 6 4 1
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$

Tabla 2-2: Desarrollo del binomio y Triángulo de Pascal

En la sección 2.2, en la solución del problema 2 se obtuvo una expresión que permite determinar los coeficientes binomiales (números en el arreglo triangular), entonces podemos conjeturar la siguiente generalización:

Teorema 2.29. Teorema del Binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Demostración:
La expresión $(x+y)^n$ es el número de trayectorias reticulares con n flechas, el cual corresponde a la suma de todos los productos de trayectorias reticulares de la forma $[(n-k,0)][(0,k)] = x^{n-k}y^k$, $0 \leq k \leq n$. Cada producto aparece tantas veces como *trayectorias reticulares* se tengan desde el punto $(n-k,k)$ a $(0,0)$; por la fórmula (8) este número es justamente $\binom{n}{k}$. Así, el término $x^{n-k}y^k$ tiene coeficiente $\binom{n}{k}$, por lo tanto $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ □

Nota 2.30. Generalmente se demuestra el Teorema del Binomio por inducción, aplicando la fórmula de Pascal (Teorema 2.24). Preferimos esta sencilla demostración combinatoria pues además de su brevedad, permite obtener la fórmula para el desarrollo del binomio, mientras que las demás demostraciones requieren conocer la fórmula previamente.

El Teorema 2.9 afirma que el número de trayectorias de longitud n es 2^n, y el Teorema 2.11 permite determinar todos los puntos sobre $(\mathbb{N}^2, \preceq)$, para los cuales su trayectoria reticular esta compuesta de n movimientos. El Teorema 2.29 nos permite determinar la naturaleza de esas trayectorias.

Ejemplo 4. Caracterización de las trayectorias de longitud 3

1. Por el Teorema 2.9, sabemos que el número de trayectorias de longitud 3 es $2^3 = 8$, la representación gráfica de ellas se puede observar en la Figura 2-7.

2. El Teorema 2.11 nos indica que existen 4 puntos para los cuales las trayectorias reticulares asociadas son de longitud 3 siendo ellos $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ y $(0,3)$.

3. Al aplicar la Fórmula (8) se obtiene el número de trayectorias asociadas a cada punto, siendo 1, 3, 3, y 1, para los puntos $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$ y $(3,0)$ respectivamente.

4. Al aplicar el Teorema 2.29, se tiene

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 =& \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^{n-k} y^k \\
=& \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 \\
=& 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3 \\
=& x^3 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + y^3
\end{aligned}$$

5. Es decir, que
   a) partiendo del punto $(3,0)$ se tiene una trayectoria, del tipo x^3.
   b) partiendo del punto $(2,1)$ se tienen tres trayectorias, del tipo x^2y.
   c) partiendo del punto $(1,2)$ se tienen tres trayectorias, del tipo xy^2.
   d) partiendo del punto $(0,3)$ se tiene una trayectoria, del tipo y^3.

6. En resumen,

Punto	Número de trayectorias	Desplazamientos horizontales	Desplazamientos verticales
(3, 0)	1	3	0
(2, 1)	3	2	1
(1, 2)	3	1	2
(0, 3)	1	0	3
Total	8	6	6

Tabla 2-3: Caracterización de las trayectorias de longitud 3

Ejemplo 5.Caracterización de las trayectorias reticulares en $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ **para las cuales la longitud es** n.

Un razonamiento similar al realizado en el ejemplo 4, nos permite caracterizar todas las trayectorias de longitud n, esto se ha resumido en la Tabla 2-4 y por el Teorema 2.29, es posible expresarlas así

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Punto	Número de trayectorias	Desplazamientos horizontales	Desplazamientos verticales
$(n,0)$	$\binom{n}{0}$	n	0
$(n-1,1)$	$\binom{n}{1}$	$n-1$	1
$(n-2,2)$	$\binom{n}{2}$	$n-2$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(2,n-2)$	$\binom{n}{n-2}$	2	$n-2$
$(1,n-1)$	$\binom{n}{n-1}$	1	$n-1$
$(0,n)$	$\binom{n}{n}$	0	n
Total	2^n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$

Tabla 2-4: Caracterización de las trayectorias de longitud n

Capítulo 3

Números de Catalan

"Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano, independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad"
Albert Einstein

En este capítulo se exploran algunos problemas conducentes a la sucesión numérica conocida como números de Catalan. También se deducen fórmulas explícitas y recursivas, junto con arreglos triangulares que permiten conjeturar diversas propiedades de estos números. Finalmente se deduce la fórmula cerrada de los números de Catalan a partir de una función generatriz y la aplicación del Teorema del Binomio.

Los números de Catalan son muy apropiados en el contexto del presente documento, por su relación con los coeficientes binomiales. Además, para su enseñanza permiten la exploración, la experimentación y el establecer conjeturas, sirviendo para modelar problemas de combinatoria en disciplinas como el álgebra, la informática, la teoría de grafos y la geometría [21].

Se denomina números de Catalan a la secuencia 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, $\cdots$, la cual corresponde a la sucesión A000108 en la base de datos *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) [35]. Estos números deben su nombre al matemático belga *Eugène Charles Catalan* $(1814 - 1894)$ quien los relacionó en uno de sus trabajos en 1838, mientras estudiaba formaciones gramaticales con paréntesis. Sin embargo, ya eran conocidos por *Euler* alrededor de 1751, al asociarlos a triangulaciones de polígonos convexos [21].

3.1. Situaciones conducentes a los números de Catalan

Los números de Catalan aparecen en diversos problemas de enumeración aparentemente inconexos. Algunos de estos problemas están relacionados con la enumeración de las maneras en que un polígono con n lados se puede cortar en n triángulos, el número de formas de colocar parejas de paréntesis en una secuencia de números, para ser multiplicados de dos en dos; el número de árboles, con raíces trivalentes con $n+1$ nodos, caminos de Dyck y escrutinios electorales, donde el candidato ganador siempre va a la cabeza (o empatado) y termina con exactamente un voto más que el perdedor. Stanley en su página en internet [37], en la versión del 25 de Mayo de 2013, presenta 207 interpretaciones combinatorias conducentes a la secuencia de Catalan, dentro de ellas, las primeros 66 están propuestas en el ejercicio 6,19 de su libro de combinatoria [38], las demás conforman el *"Catalan Addendum"* el cual es actualizado permanentemente. Aquí se presentan algunas situaciones, con ilustraciones para una mayor comprensión.

3.1.1. Triangulaciones de polígonos

Se plantea la situación de *contar el número de formas distintas de triangular un polígono regular convexo de $n+2$ lados.*

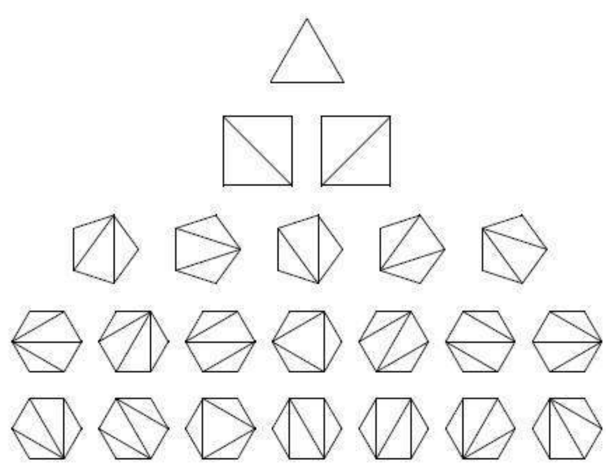


Figura 3-1: Triangulaciones de un polígono

El proceso de triangular un polígono consiste en dividirlo en triángulos, conectando los vértices con líneas rectas sin que ellas se intersecten. La figura 3-1 ilustra las triangulaciones de los polígonos de 3, 4, 5 y 6 lados; se observa que existen 1, 2, 5 y 14 maneras, respectivamente, de llevar a cabo este proceso.

Esta situación fue desarrollada por Euler quien, aplicando un proceso de inducción que él mismo calificó de "francamente laborioso" [18] obtuvo la siguiente fórmula para determinar las triangulaciones (T_n) de un polígono de n lados, con $n \geq 3$

$$T_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n-10)}{(n-1)!} \tag{1}$$

3.1.2. Cadenas bien formadas con paréntesis

En 1938, Catalan resolvió el problema referente a *determinar el número de formas en que se pueden introducir paréntesis en una cadena de n letras, dadas en orden fijo, para dividirla en* $n-1$ *pares de paréntesis, de modo que en el interior de cada par de paréntesis izquierdo y derecho, haya dos "términos". Estos dos términos emparejados pueden ser dos letras adyacentes cualesquiera, o una letra y un agrupamiento adyacente encerrado en paréntesis o dos agrupamientos contiguos.* [18]

n	Cadenas bien formadas	maneras
1	(a)	1
2	$(a \cdot b)$	1
3	$(a \cdot b) \cdot c$, $a \cdot (b \cdot c)$	2
4	$[(a \cdot b) \cdot c] \cdot d$, $[a \cdot (b \cdot c)] \cdot d$, $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$, $a \cdot [b \cdot (c \cdot d)]$, $a \cdot [(b \cdot c) \cdot d]$,	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabla 3-1: Cadenas bien formadas para $n = 1, 2, 3, 4$

3.1.3. Trayectorias reticulares monótonas

Hallar el número de trayectorias monótonas de longitud $2n$ *a través del retículo* $(\mathbb{N}^2, \preceq)$*, de orden* n*.*

Se entiende por trayectoria monótona aquella trayectoria reticular (página 25) que nunca cruza la diagonal (recta $y = x$), es decir aquellas trayectorias que quedan por debajo de la recta $y = x$.

El número de trayectorias reticulares desde el punto (n, n) hasta $(0, 0)$ es $\binom{2n}{n}$ (nota 2.23), pero sólo se desea contar aquellas que quedan bajo la diagonal $y = x$, para tal fin se determinará la cantidad de trayectorias que están por encima de la diagonal y aquellas que cortan la diagonal.

En las figuras 3-2 y 3-3 se presenta las trayectorias reticulares para $n = 1, 2, 3, 4$. En estos gráficos se ha representado con color negro las trayectorias monótonas y con color rojo las no monótonas. Al observar los diagramas se tiene que, para $n = 1$ hay 2 trayectorias reticulares de las cuales 1 está por encima de la recta $y = x$. Si $n = 2$ se tienen 6 trayectorias, 4 no son monótonas. Cuando $n = 3$, hay 15 trayectorias de un total de 20, que están por encima de la diagonal o que cortan la diagonal. Para $n = 4$ existen 70 trayectorias reticulares, de las cuales 56 no son monótonas. Al realizar la diferencia entre el total de trayectorias reticulares y aquellas que no son monótonas se tiene la cantidad de trayectorias monótonas, para los cuatro casos discutidos, estas son 1, 2, 5 y 14, respectivamente.

Se resalta el hecho de que por cada trayectoria monótona existe una trayectoria simétrica, respecto a $y = x$, que no lo es. Similarmente el número de trayectorias restantes que no son monótonas se obtienen como la suma de dos cantidades iguales. Así, para $n = 1$ hay una trayectoria monótona y la respectiva simétrica que no lo es; si $n = 2$ se tiene 2 trayectorias monótonas, 2 simétricas que no lo son y dos restantes, simétricas entre sí, que tampoco lo son; cuando $n = 3$ existen 5 trayectorias monótonas, por lo tanto, hay 5 simétricas a ellas que no lo son y las 10 restantes que no son monótonas se pueden obtener como la suma de dos veces 5; en el evento de $n = 4$ hay 14 trayectorias monótonas, 14 simétricas a las monótonas que no lo son y otras 42, no monótonas, las cuales se pueden obtener como la suma de dos grupos simétricos cada uno con 21 trayectorias.

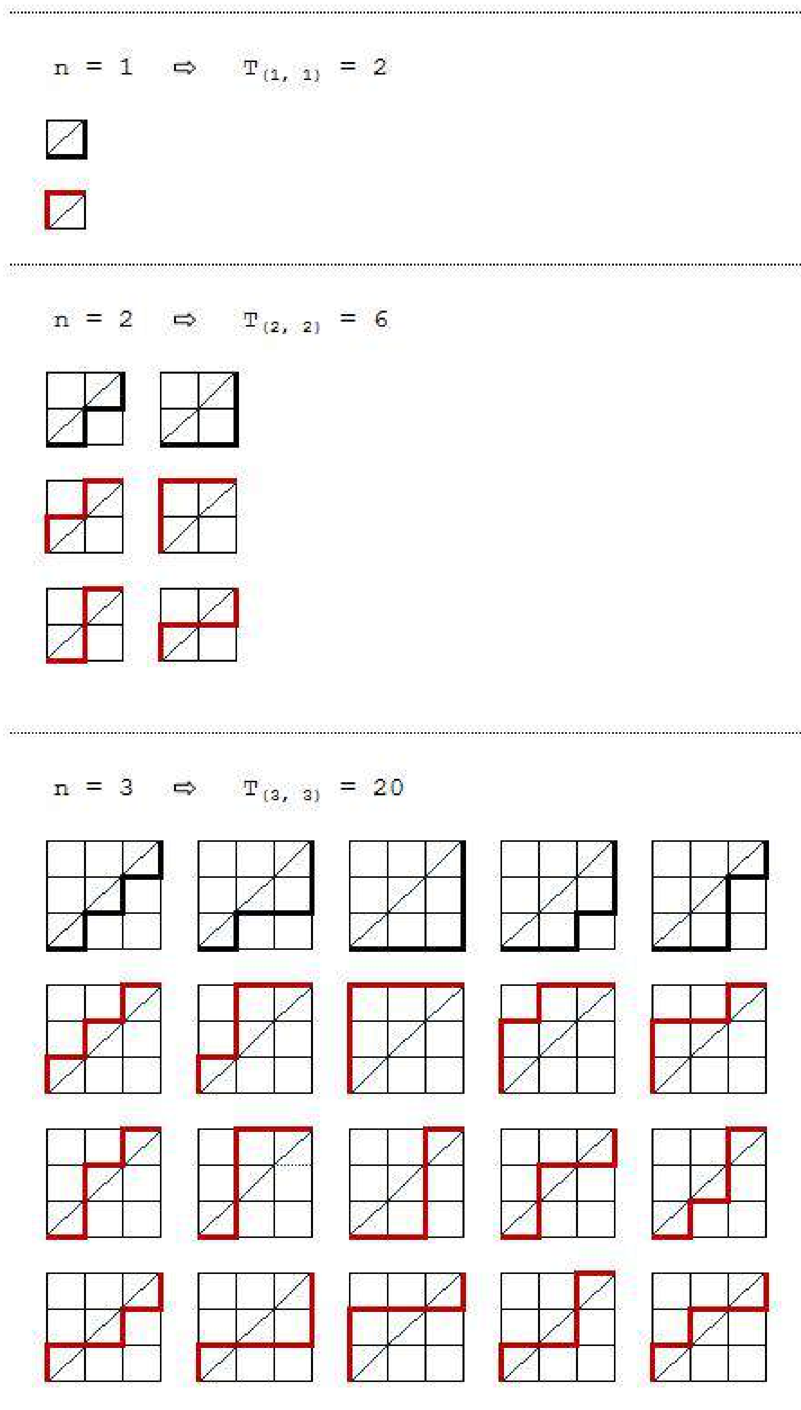


Figura 3-2: Trayectorias Reticulares y monótonas con $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$

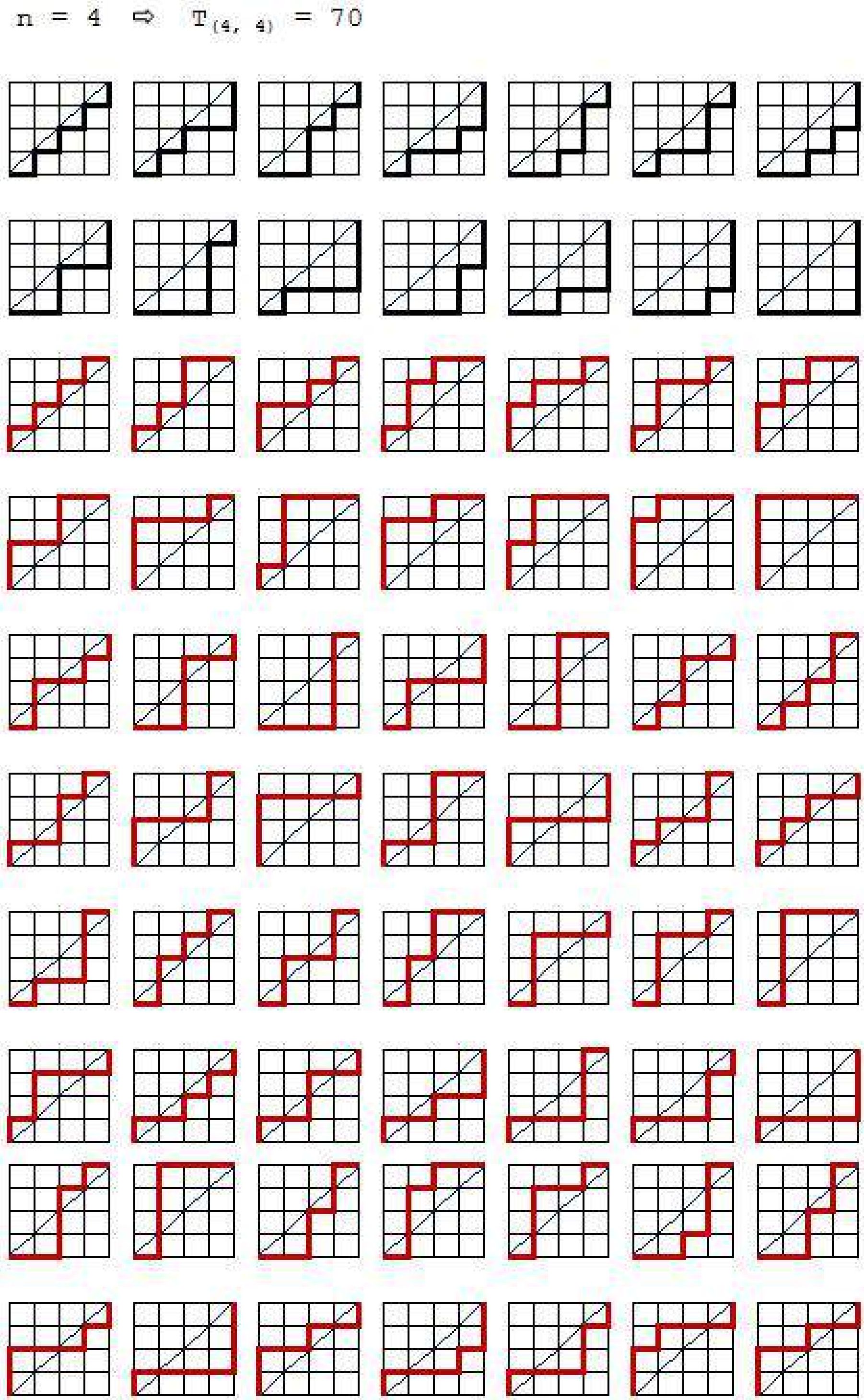


Figura 3-3: Trayectorias Reticulares y monótonas con $n = 4$

El resultado de continuar con el proceso descrito previamente se presenta en la tabla 3-2, hasta $n = 10$. Se ha empleado el símbolo C_n para representar el número de trayectorias reticulares monótonas y se observa que los números correspondientes a aquellas *"otras trayectorias no monótonas"* se pueden expresar como un múltiplo de la cantidad de trayectorias monótonas. En la parte final de la tabla se da una generalización de los resultados obtenidos.

n	Punto	Trayectorias Reticulares	Trayectorias Monótonas	Trayectorias no monótonas	
				Simétricas	otras
1	$(1,1)$	2	1	1	0
2	$(2,2)$	6	2	2	$1+1$
3	$(3,3)$	20	5	5	$5+5$
4	$(4,4)$	70	14	14	$21+21$
5	$(5,5)$	252	42	42	$84+84$
6	$(6,6)$	924	132	132	$330+330$
7	$(7,7)$	3432	429	429	$1287+1287$
8	$(8,8)$	12870	1430	1430	$5005+5005$
9	$(9,9)$	48620	4862	4862	$19448+19448$
10	$(10,10)$	184756	16796	16796	$75582+75582$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n	(n,n)	$\binom{2n}{n}$	C_n	C_n	$\frac{C_n}{2}\cdot(n-1)+\frac{C_n}{2}\cdot(n-1)$

Tabla 3-2: Trayectorias reticulares y monótonas

Al igual que el procedimiento aplicado en la sección 2.2 con los números combinatorios, a continuación se explorará la obtención de una regla de recurrencia o de una fórmula explícita que facilite la obtención, o que permita determinar directamente los números de Catalan.

3.2. Fórmulas explicitas para los números de Catalan

De la tabla 3-2 se infiere que *la suma de las Trayectorias Monótonas, las trayectorias simétricas no monótonas y las otras trayectorias no monótonas es igual al número de trayectorias reticulares, para un n dado.* De acuerdo con los símbolos dados, la expresión algebraica correspondiente es,

$$C_n + C_n + \frac{C_n}{2} \cdot (n-1) + \frac{C_n}{2} \cdot (n-1) = \binom{2n}{n}$$

despejando C_n, con el fin de encontrar una fórmula explícita para el número de trayectorias reticulares monótonas, se tiene

$$\begin{aligned} C_n + C_n + \frac{C_n}{2} \cdot (n-1) + \frac{C_n}{2} \cdot (n-1) &= \binom{2n}{n} \\ 2C_n + C_n \cdot (n-1) &= \binom{2n}{n} \\ C_n \cdot (n+2-1) &= \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

de donde

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \tag{2}$$

Al número C_n, que para esta situación corresponde a la cantidad de trayectorias monótonas asociadas al punto (n, n), se le conoce con el nombre de *número de Catalan* y la expresión obtenida es válida incluso para $n = 0$. En la tabla se presentan los valores de C_n para $n \leq 10$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Tabla 3-3: Los primeros 10 números de Catalan

Una forma alterna para determinar C_n consiste en clasificar las trayectorias reticulares como monótonas y no monótonas, esto se puede observar en la tabla 3-4.

n	Punto	Trayectorias Reticulares	Trayectorias monótonas	Trayectorias no monótonas
1	$(1,1)$	2	1	1
2	$(2,2)$	6	2	4
3	$(3,3)$	20	5	15
4	$(4,4)$	70	14	56
5	$(5,5)$	252	42	210
6	$(6,6)$	924	132	792
7	$(7,7)$	3432	429	3003
8	$(8,8)$	12870	1430	11440
9	$(9,9)$	48620	4862	43758
10	$(10,10)$	184756	16796	167960
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	(n,n)	$T_{(n,n)}$	C_n	$T_{(n,n+2)}$

Tabla 3-4: Trayectorias reticulares monótonas y no monótonas

La última columna corresponde a las trayectorias no monótonas y coincide justamente con la secuencia $S_{(n,n+2)}$ (con $n \geq 2$), la cual fue presentada en la Tabla 2-1, correspondiente a las secuencias numéricas generadas por las trayectorias reticulares asociadas a puntos pertenecientes a diagonales del retículo $(\mathbb{N}^2, \preceq)$. La secuencia $S_{(n,n+2)}$ es equivalente a la secuencia $S_{(n-1,n+1)}$ (con $n \geq 1$).

Se cumple que *el número de trayectorias reticulares asociado a un punto* (n,n) *es igual a la suma de las trayectorias monótonas,* (C_n)*, y las trayectorias no monótonas*, entonces

$$T_{(n,n)} = C_n + T_{(n-1,n+1)}$$

aplicando las fórmulas (8), y (9) del capítulo 2

$$\begin{aligned} C_n &= T_{(n,n)} - T_{(n-1,n+1)} \\ C_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \end{aligned}$$

por la propiedad de simetría del coeficiente binomial entonces,

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \tag{3}$$

siendo ésta, una fórmula alterna para calcular los números de Catalan C_n.

Nota 3.1. La expresión (3) muestra que C_n es un número natural, ya que se trata de la diferencia de dos números naturales. Ésto no es evidente en la Fórmula (2).

Aplicando la fórmula (9) del capitulo 2, fácilmente se demuestra la equivalencia entre las expresiones (2) y (3)

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{n(2n)!}{(n+1)(n!)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

$\square$

Nota 3.2. Una expresión equivalente a las ya planteadas se puede obtener de la fórmula (2), así

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)} \frac{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{n! \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2} \\ &= \frac{(n+2)(n+3) \cdots (2n-1)2n}{2 \cdot 3 \cdots n} \end{aligned}$$

esta expresión se puede escribir en forma sintética

$$C_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k} \tag{4}$$

Nota 3.3. La fórmula hallada por Euler, en el problema de triangular un polígono convexo permite calcular los números de Catalan de manera explícita, haciendo $C_n = T_{n+2}$ y asumiendo que $C_0 = 1$. Al sustituir n por $n+2$ en la fórmula (1) se obtiene la siguiente fórmula, válida para $n \geq 1$

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{(n+1)!} \tag{5}$$

3.3. Fórmulas recursivas para los números de Catalan

Una fórmula de recurrencia para una sucesión es una expresión que relaciona cada término con sus términos anteriores.
A continuación se presentan algunas expresiones recursivas, las cuales permiten obtener formas interesante de calcular cada término en la secuencia de Catalan, conociendo previamente los anteriores.

En la sección 3.1.1 se enunció el problema planteado por Euler respecto a la triangulación de un polígono convexo. En la figura 3-1 se muestra que se puede triangular un triángulo de una única manera, un cuadrado de dos y un pentágono de cinco maneras diferentes. El problema se complica cada vez que se aumenta el número de lados del polígono. Se buscará una expresión recursiva que permita calcular estos valores fácilmente. Sea C_n el número de maneras de descomponer un polígono utilizando exactamente n triángulos es decir, C_n es el número de maneras de triangular un polígono de $n-2$ lados. Procediendo por inducción en n para calcular C_n, se supone que se sabe triangular todos los polígonos con un máximo de $n+2$ lados y con esta información se triangula un polígono con $n+3$ lados. Para un triángulo el problema es trivial. Para un n mayor se procede de la siguiente manera. Primero se escoge un lado favorito del polígono de vértices 1, 2, $\cdots$, $n+3$. Se tomará como lado favorito el que une a los vértices 1 y $n+3$. Este lado pertenece a un único triángulo en la triangulación, T_i, cuyo tercer vértice i pertenece al conjunto $\{2, 3, \cdots, n+2\}$; si se elimina el triángulo T_i del polígono, se obtienen dos nuevos polígonos que se encuentran triangulados ó un polígono de $n+2$ lados. El primero de ellos tiene como vértices a los números $1, 2, \cdots, i$, y en consecuencia, puede ser triangulado de C_{i-2} maneras diferentes. El segundo polígono tiene como vértices a los números $i, i+1, \cdots, n+3$, y en consecuencia puede ser triangulado de C_{n-i+2} maneras distintas. Las dos elecciones son independientes, por lo tanto el número de maneras de triangular el polígono, que contienen al triángulo T_i es $C_i C_{n-i+2}$. Al variar el tercer vértice del triángulo T_i sobre todos los valores posibles, $2, 3, \cdots, n+2$, y considerar que $C_0 = 1$, se obtiene la *secuencia de Catalan*

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0 \tag{6}$$

La cual se puede expresar de manera sucinta, así

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \tag{7}$$

Esta expresión fue obtenida en 1761 por Segner(1704-1777), por lo que los números de Catalan también reciben el nombre de números de Segner[3]. Mediante un razonamiento similar al realizado, y partiendo de alguno de los otros problemas planteados inicialmente se llega a deducir la secuencia (6).

Por otra parte, partiendo de la fórmula explícita (5), es posible obtener otra fórmula recursiva, la cual es conocida como *fórmula recursiva de Euler*, así

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{(n+1)!} \\ &= \frac{4n-2}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-6)}{n!} \\ &= \frac{4n-2}{n+1} \cdot T_{n+1} \end{aligned}$$

obteniendo, la fórmula recursiva, válida para $n \geq 1$, con $C_0 = 1$

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot C_{n-1} \tag{8}$$

al sustituir n por $n+1$, se tiene una expresión equivalente

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot C_n \tag{9}$$

La expresión (9), también se puede obtener a partir de la fórmula explícita de los números de Catalan (2), al considerar la razón $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ y despejar C_{n+1} en términos de C_n.

3.4. Triangulo de Pascal y Números de Catalan

Las fórmulas explícitas (2) y (3), halladas para determinar los números de Catalan están dadas en términos de coeficientes binomiales, en consecuencia, se explorará el Triángulo de Pascal con el fin de extraer de él, los números de Catalan . Koshy [22] presenta otras maneras de obtener los números de Catalan a partir del triángulo de Pascal.

1. La manera obvia de calcular los números de Catalan es usando la fórmula explicita $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$, la cual, de acuerdo a la nota 2.23 equivale a dividir el coeficiente central binomial por $n+1$. Por lo tanto, dividiendo los números de los rectángulos sombreados, en la figura 3-4, entre la mitad de los números de la fila más uno. Ejemplo, para hallar el tercer número de Catalan, de la sexta fila de triángulo de Pascal se lee $\binom{6}{3} = 20$; entonces dividiendo a 20 entre $3+1=4$, se tiene $C_3 = \frac{20}{4} = 5$

Fila 0 $\longrightarrow$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&\boxed{1}&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&\boxed{2}&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&\boxed{6}&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&\boxed{20}&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&\boxed{70}&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

Figura 3-4: Triángulo de Pascal y Números de Catalan -1

2. En la sección 3.2 se obtuvo la fórmula $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ la cual permite calcular C_n al restar del coeficiente binomial central, el número inmediato a su izquierda o a su derecha. En la figura 3-5, corresponde a la diferencia entre los números de los rectángulos sombreados y los de los rectángulos de línea doble. Ejemplo, el tercer número de Catalan, $C_3 = \binom{6}{3} - \binom{6}{2} = 20 - 15 = 5$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&\boxed{\boxed{0}}&&\boxed{1}&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&\boxed{\boxed{1}}&&\boxed{2}&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&\boxed{\boxed{4}}&&\boxed{6}&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&\boxed{\boxed{15}}&&\boxed{20}&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&\boxed{\boxed{56}}&&\boxed{70}&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

Figura 3-5: Triángulo de Pascal y Números de Catalan -2

3. Otra forma de obtener los números de Catalan a partir del Triángulo de Pascal se obtiene al reescribir la fórmula explícita (2), así

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{(2n)!}{n(n+1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$$

lo cual corresponde a dividir el término inmediatamente a la izquierda o a la derecha del coeficiente central binomial, entre la mitad del número de la fila respectiva. Por ejemplo, para calcular C_3, se lee el número 15 de la sexta fila y se divide entre 3, $C_3 = \frac{1}{3}\binom{6}{2} = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$.

Fila 0 $\longrightarrow$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \boxed{\mathbf{1}} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbf{1} & & \boxed{\mathbf{2}} & & \boxed{\boxed{\mathbf{1}}} & & & & & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \boxed{\mathbf{6}} & & \boxed{\boxed{\mathbf{4}}} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{6} & & \mathbf{15} & & \boxed{\mathbf{20}} & & \boxed{\boxed{\mathbf{15}}} & & \mathbf{6} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{7} & & \mathbf{21} & & \mathbf{35} & & \mathbf{35} & & \mathbf{21} & & \mathbf{7} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{8} & & \mathbf{28} & & \mathbf{56} & & \boxed{\mathbf{70}} & & \boxed{\boxed{\mathbf{56}}} & & \mathbf{28} & & \mathbf{8} & & \mathbf{1}
\end{array}$$

Figura 3-6: Triángulo de Pascal y Números de Catalan -3

4. Los números de Catalan también se pueden obtener al sumar los cuadrados de los los números en cada fila del Triángulo de Pascal y dividir entre el número de elementos de la fila.

Ejemplo,

$$C_5 = \frac{1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2}{6} = \frac{252}{6} = 42$$

3.5. Arreglos triangulares de Catalan

A continuación se presentan arreglos rectangulares y triangulares con los cuales se pueden obtener fácilmente los números de Catalan, de manera similar a la forma como se determinan los coeficientes binomiales a partir del Triángulo de Pascal. Es interesante la gran posibilidad que brindan estos arreglos para formular conjeturas, establecer propiedades y determinar patrones en su formación.

1. Triángulo de Catalan

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\boxed{1}$							
1	1	$\boxed{1}$						
2	1	2	$\boxed{2}$					
3	1	3	5	$\boxed{5}$				
4	1	4	9	14	$\boxed{14}$			
5	1	5	14	28	42	$\boxed{42}$		
6	1	6	20	48	90	132	$\boxed{132}$	
7	1	7	27	75	165	297	429	$\boxed{429}$

Tabla 3-5: Triángulo de Catalan

En la tabla 3-5 se presenta el llamado triángulo de Catalan, ya que en la diagonal se pueden leer dichos números. En la base OEIS [35] corresponde a la secuencia A009766, al ser leídos de izquierda a derecha.

Propiedades del triángulo de Catalan.

- Cada fila comienza con un 1.
- Todas las fila terminan en un número Catalan.
- El elemento en la fila n y la columna k, $C_{(n,k)}$, se puede obtener mediante la suma del número a la izquierda y el número que

está justamente encima de él; es decir $C_{(n,k)} = C_{(n,k-1)} + C_{(n-1,k)}$, para $n, k \geq 1$. Por ejemplo, $C_{(6,3)} = C_{(6,2)} + C_{(5,3)} = 20 + 28 = 48$.

- La suma de los primeros m elementos en la fila $n-1$ es igual al elemento de la fila n, columna m Ejemplo, $1 + 6 + 20 + 48 = 75$.
- Los dos últimos elementos de cada fila, excepto la fila 0, son iguales; es decir $C_{(n,n)} = C_{(n,n-1)}$.
- A partir de las observaciones anteriores es posible obtener una fórmula recursiva para cada elemento $C_{(n,k)}$, así

$$C_{(n,k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ n & \text{si } k = 1 \\ C_{(n,k-1)} + C_{(n-1,k)} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \tag{10}$$

- Aún más interesante es el determinar una fórmula explícita para cada elemento $C_{(n,k)}$ en el triángulo, la cual es

$$C_{(n,k)} = \frac{n-k+1}{n+1}\binom{n+k}{k} \tag{11}$$

2. Matriz de Catalan.
   Con este nombre Aigner [3] presenta el arreglo triangular de la Tabla 3-6. En la base OEIS [35] corresponde a la secuencia A053121 al ser leídos de izquierda a derecha.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\boxed{1}$								
1	0	1							
2	$\boxed{1}$	0	1						
3	0	2	0	1					
4	$\boxed{2}$	0	3	0	1				
5	0	5	0	4	0	1			
6	$\boxed{5}$	0	9	0	5	0	1		
7	0	14	0	14	0	6	0	1	
8	$\boxed{14}$	0	28	0	20	0	7	0	1

Tabla 3-6: Matriz de Catalan

Propiedades de la Matriz de Catalan.

- Se inicia con un 1.
- Las filas impares inician con un 0.
- Todas las filas terminan en 1.
- El elemento en la fila n y la columna k, $C_{(n,k)}$ es igual a cero si $n+k$ es impar.
- El elemento en la fila n y la columna k, $C_{(n,k)}$, se puede obtener mediante la suma del número a la izquierda y el número a la derecha, de la fila inmediatamente superior; es decir, se cumple que $C_{(n,k)} = C_{(n-1,k-1)} + C_{(n-1,k+1)}$, para $n, k \geq 1$. Por ejemplo, $C_{(7,3)} = C_{(6,2)} + C_{(6,4)} = 9 + 5 = 14$.
- Todas las filas pares inician con un número de Catalan, es decir se cumple que $C_n = C_{(2n,0)}$.
- Es posible obtener una fórmula recursiva que resume las propiedades enunciadas y que permite construir la matriz triangular inferior.

$$C_{(n,k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ y } k = 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ y } k > 0 \\ C_{(n-1,k-1)} + C_{(n-1,k+1)} & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases} \tag{12}$$

3. Otro arreglo triangular de Catalan.
   Gracias al proceso seguido de explorar y conjeturar resultados, se llegó al arreglo triangular de la Tabla 3-7, el cual es llamativo por su sencilla construcción y las múltiples propiedades que presenta. Al leer los números de cada diagonal de forma consecutiva, coincide con la secuencia A078391 en la base OEIS [35].

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{14}$	$\boxed{42}$	$\boxed{132}$	$\boxed{429}$	$\boxed{1430}$
1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{14}$	$\boxed{42}$	$\boxed{132}$	$\boxed{429}$	
2	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	4	10	28	84	264		
3	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	10	25	70	210			
4	$\boxed{14}$	$\boxed{14}$	28	70	196				
5	$\boxed{42}$	$\boxed{42}$	84	210					
6	$\boxed{132}$	$\boxed{132}$	264						
7	$\boxed{429}$	$\boxed{429}$							
8	$\boxed{1430}$								

Tabla 3-7: Otro arreglo de Catalan

Su construcción se puede llevar a cabo fácilmente a partir de las siguientes reglas:

- Se inicia con un 1, en la posición $C_{(0,0)}$.
- El primer elemento de cada fila o columna esta dado por la suma de los elementos de la diagonal anterior.
- Los elementos que no pertenecen a la fila cero o a la columna cero, se hallan multiplicando el primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna respectiva. Por ejemplo,

$$C_{(0,1)} = C_{(1,0)} = C_{(0,0)} = 1$$

$$C_{(2,0)} = C_{(0,2)} = C_{(0,1)} + C_{(1,0)} = 1 + 1 = 2$$

$$C_{(3,0)} = C_{(0,3)} = C_{(2,0)} + C_{(1,1)} + C_{(0,2)} = 2 + 1 + 2 = 5$$

donde $C_{(1,1)} = C_1 \cdot C_1 = 1 \cdot 1 = 1$

Propiedades de este arreglo triangular.

- Las reglas dadas para su construcción permiten enunciar una fórmula recursiva, para generar la matriz triangular superior hallada.

$$C_{(n,k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ y } k = 0 \\ C_{(n,0)} \cdot C_{(0,k)} & \text{si } n > 0 \text{ o } k > 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_{(n-i,i)} & \text{si } n = 0 \text{ o } k = 0 \end{cases} \tag{13}$$

- Es simétrico respecto a la diagonal $1, 1, 4, 25, 196, 1764 \cdots$, es decir se cumple que $C_{(n,k)} = C_{(k,n)}$ y los elementos del eje de simetría corresponden a los cuadrados de los números de Catalan, ya que

$$C_{(n,n)} = C_{(0,n)} \cdot C_{(0,n)} = C_n \cdot C_n = (C_n)^2$$

- En las filas cero y uno, así como en la columnas cero y uno aparecen los números de Catalan, ya que se cumple que,

$$C_{(0,n)} = C_0 \cdot C_n = 1 \cdot C_n = C_n = C_n \cdot 1 = C_n \cdot C_0 = C_{(n,0)}$$

$$C_{(1,n)} = C_1 \cdot C_n = 1 \cdot C_n = C_n = C_n \cdot 1 = C_n \cdot C_1 = C_{(n,1)}$$

  Por ejemplo,

$$C_{(1,6)} = C_1 \cdot C_6 = 1 \cdot 132 = 132 = 132 \cdot 1 = C_6 \cdot C_1 = C_{(6,1)}$$

- En la segunda fila, así como en la segunda columna se tiene el doble cada número de Catalan,

$$C_{(2,n)} = C_2 \cdot C_n = 2 \cdot C_n = 2C_n = C_n \cdot 2 = C_n \cdot C_2 = C_{(n,2)}$$

- En la tercera fila, así como en la tercera columna se tiene el producto de 5 por cada número de Catalan,

$$C_{(3,n)} = C_3 \cdot C_n = 5 \cdot C_n = 5C_n = C_n \cdot 5 = C_n \cdot C_3 = C_{(n,3)}$$

- En general en la fila i , así como en la columna i se tiene el producto del *i_ésimo* número de Catalan por cada número de Catalan,

$$C_{(i,n)} = C_i \cdot C_n = C_iC_n = C_n \cdot C_i = C_{(n,i)}$$

- A partir de las observaciones realizadas es posible obtener una fórmula explícita para cada elemento en la fila n y la columna k, $C_{(n,k)}$ del arreglo, la cual está dada por el producto de los números de Catalan C_n y C_k, los cuales se encuentran en las posiciones $C_{(n,0)}$ y $C_{(0,k)}$ respectivamente, es decir, se cumple que

$$C_{(n,k)} = C_n \cdot C_k \tag{14}$$

3.6. Obtención de la formula explícita a partir de una función generatriz

Una de las técnicas empleadas para determinar una fórmula cerrada, a partir de una secuencia de números $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ es expresarlos como una serie de potencias, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la cual se conoce como función generatriz. A continuación se utiliza este procedimiento con el fin de obtener la fórmula explícita de los números de Catalan, de forma elegante; para ello se aplica la recurrencia de Catalan planteada por Segner's (6) y el Teorema 2.29 del binomio de Newton.

Se considera la función

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n + \cdots \tag{15}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
[C(x)]^2 &= (C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots) \cdot (C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots) \\
&= (C_0C_0) + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \cdots \\
&\quad + (C_0C_n + C1C_{n-1} + \cdot + C_nC_0)x^n + \cdots \\
&= (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)x + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1)x^2 + \cdots \\
&= 1 + 2x + 5x^2 + \cdots \\
&= C_1x^0 + C_2x + C_3x^2 + \cdots + C_{n+1}x^n + \cdots \\
&= \frac{C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n + \cdots}{x} \\
&= \frac{(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n + \cdots) - C_0}{x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[C(x)]^2 = \frac{C(x) - C_0}{x}$$

de donde

$$xC(x)^2 = C(x) - C_0$$

obteniendo la expresión cuadrática

$$xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

Solucionándola, para $C(x)$, se obtiene la función generatriz de Catalan,

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \tag{16}$$

Se utilizó el signo $-$ en lugar del signo $\pm$ habitual en la fórmula cuadrática, ya que se sabe que $C(0) = 1$, y si se tomara el signo $+$ cuando $x \to 0$, $C(x) \to \infty$. A continuación se aplica la fórmula (2) del capítulo 1, referente a la generalización del Teorema del Binomio realizada por Newton, con el fin de obtener el desarrollo de $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$, así

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{(\frac{1}{2})}{1}4x + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2\cdot 1}(4x)^2 - \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3\cdot 2\cdot 1}(4x)^3 \\
&+ \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(4x)^4 - \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(4x)^5 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{1!}2x - \frac{1}{2!}4x^2 - \frac{3\cdot 1}{3!}8x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}16x^4 - \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}32x^5 - \cdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión (16) se puede escribir de la forma

$$C(x) = 1 + \frac{1}{2!}2x + \frac{3\cdot 1}{3!}4x^2 + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}8x^3 + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}16x^4 + \cdots$$

El producto de los factores impares, tales como $7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$ presentan una similitud con el factorial, excepto que faltan los números pares, pero observando que, $2^2\cdot 2! = 4\cdot 2$, $2^3\cdot 3! = 6\cdot 4\cdot 2$, $2^4\cdot 4! = 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$, y así sucesivamente, entonces se cumple que $(7\cdot 5\cdot 3\cdot 1)\cdot 2^4\cdot 4! = 8!$, aplicando esta idea a la expresión anterior, se tiene

$$C(x) = 1 + \frac{1}{2}(\frac{2!}{1!1!})x + \frac{1}{3}(\frac{4!}{2!2!})x^2 + \frac{1}{4}(\frac{6!}{3!3!})x^3 + \frac{1}{5}(\frac{8!}{4!4!})x^4 + \cdots$$

de donde,

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n \qquad (17)$$

Igualando los coeficientes de x^n de las expresiones (15) y (17) se obtiene la fórmula explícita de los números de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}$$

$\square$

Así, en este capítulo se han presentado los números de Catalan como una aplicación del binomio de Newton, donde la exploración realizada a partir de situaciones concretas ha permitido obtener fórmulas explícitas y expresiones recursivas que los generan. De igual manera el proceso realizado permitió obtener arreglos triangulares similares a las del triángulo de Pascal, para los cuales se establecieron propiedades. Se finalizó obteniendo los números de Catalan a partir de una función generatriz.

Capítulo 4

Propuesta didáctica para la enseñanza del Teorema del Binomio

"El principal objetivo de la educación consiste en formar personas que sean capaces de hacer cosas nuevas y no simplemente de repetir lo que otras generaciones han realizado "

Jean Piaget.

La propuesta metodológica para la enseñanza del Teorema del Binomio está centrada en el aprendizaje basado en problemas, dentro de un ambiente constructivista; referentes para los cuales a continuación se realiza una aproximación teórica. En la parte final del capítulo se proponen cinco guías de aprendizaje enmarcadas en esta metodología, las cuales están dirigidas a estudiantes del grado octavo.

4.1. Modelo pedagógico constructivista.

El constructivismo educativo propone un paradigma en donde el proceso de enseñanza se percibe y se lleva a cabo como un proceso dinámico, participativo e interactivo del sujeto, de modo que el conocimiento sea una auténtica construcción operada por la persona que aprende [33]. En este modelo el supuesto principal es que el conocimiento es activamente construido por el sujeto, partiendo de las nociones previas para generar uno nuevo. Involucrando procesos de adaptación, acomodamiento, asimilación y equilibrio de la nueva información.

Los individuos son capaces de crear nuevos conocimientos mediante la reflexión sobre sus acciones físicas y mentales. Este proceso de construcción del conocimiento conlleva conflictos cognitivos, reflexión y reorganización conceptual.

Dos representantes del constructivismo son Piaget y Vygotski, quienes coinciden en que el estudiante organiza de forma activa sus experiencias; sin embargo, sus perspectivas presentan algunas diferencias según el énfasis puesto en la dimensión social y cultural del desarrollo. Piaget se centra en cómo se construye el conocimiento partiendo desde la interacción con el medio. Por el contrario, Vygotski se centra en cómo el medio social permite una reconstrucción interna [33]. Los dos enfatizan que la realidad social juega un papel principal en la determinación del funcionamiento intelectual. En esencia, su teoría relaciona los fenómenos sociales y cognitivos. A través de la interacción social, los individuos crean las interpretaciones de las situaciones, resuelven los propios conflictos, toman una u otra perspectiva y negocian los significados compartidos.

Finalmente, todo conocimiento es construido, por ello el conocimiento matemático es edificado, al menos en parte, por medio de un proceso de atracción reflexiva, donde las estructuras cognitivas de los estudiantes se activan en los procesos de construcción, porque ellas están en desarrollo cognitivo, lo que lleva a una trasformación de las existentes. Es decir que constantemente el que aprende está construyendo su propio conocimiento.

4.1.1. Postulados del constructivismo

Los siguientes son algunos de los postulados formulados por el profesor Lafrancesco, referente a las bases teóricas para el paradigma constructivista y su didáctica y son tomados de [24].

1. Lo que hay en la mente de quien aprende tiene importancia para facilitar nuevos aprendizajes.
2. La mente no es una tabla rasa sobre la que se puede ir grabando información.

3. El comportamiento inteligente de una persona no depende de unos procesos abstractos, sino que está íntimamente ligado a la clase de conocimientos e ideas que dicha persona posee sobre la situación particular planteada.
4. Las preconcepciones de los estudiantes no solo influyen en sus interpretaciones, sino que también determinan incluso qué datos sensoriales han de ser seleccionados y a cuáles hay que prestarles mayor atención.
5. El aprendizaje previo y los esquemas conceptuales preexistentes son importantes para el aprendizaje significativo ya que los conceptos son estructuras evolutivas.
6. Es necesario definir la influencia del contexto sociocultural sobre los aprendizajes y contextualizar estos últimos en los primeros.
7. El que aprende es porque construye activamente significado.
8. Las personas cuando aprenden tienden a generar significados consistentes y consecuentes con sus propios aprendizajes anteriores.
9. Los aprendizajes implican procesos dinámicos y no estáticos, pues se producen cuando las estructuras de conocimiento ya existentes se pueden modificar y reorganizar en mayor o menor medida.
10. Los estudiantes son responsables de su propio aprendizaje; solo ellos pueden dirigir su atención hacia la tarea del aprendizaje y realizar un esfuerzo para generar relaciones entre los estímulos y la información acumulada, y poder construir por sí mismos los significados.
11. El maestro debe ser creador, inventor y diseñador de situaciones de aprendizaje adecuadas. No debe enseñar, debe facilitar el aprendizaje.
12. En un ambiente generalizado de actitudes negativas de rechazo al aprendizaje no es posible la construcción de conocimientos.
13. Los maestros no deben esperar recetas infalibles para mejorar las condiciones didácticas; deben estar atentos y en disposición de aplicar la imaginación y la creatividad sin caer en reduccionismos.

4.1.2. Beneficios del enfoque metodológico constructivista

Algunos de los beneficios del enfoque metodológico constructivista son:

1. El estudiante aprende más y disfruta el aprendizaje porque está más activamente involucrado en el mismo, en lugar de ser un ente pasivo.

2. La educación trabaja mejor cuando se concentra en el pensamiento crítico y el entendimiento, en lugar de dedicarse a la memorización. El constructivismo se concentra en el aprendizaje de cómo pensar y entender.

3. El aprendizaje constructivista es transferible. En aquellos salones donde se usa el enfoque constructivista, los estudiantes crean patrones de aprendizaje que pueden transferirlos a otros escenarios educativos.

4. El constructivismo le da apotestamiento al estudiante de su aprendizaje, debido a que el mismo está basado en la exploración y las preguntas hechas por el estudiante. Generalmente el estudiante tiene acceso al diseño y evaluación del proceso.

5. Por medio de actividades de aprendizaje ricas y dentro del contexto de un mundo real y auténtico el constructivismo envuelve al estudiante. Los estudiantes en salones constructivistas aprenden a cuestionar cosas y aplicar su curiosidad natural del mundo.

6. El constructivismo promueve destrezas sociales y de comunicación creando un ambiente que enfatiza la colaboración e intercambio de ideas.

4.2. Aprendizaje basado en problemas (ABP)

El método del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) se origina en la escuela de medicina en la Universidad de Case Western Reserve en los Estados Unidos y en la Universidad de McMaster en Canadá en la década de los 60's. La metodología se desarrolló con el objetivo de mejorar la calidad de la educación médica cambiando la orientación de un currículum que se basaba en una educación tradicional, a uno más integrado y organizado en problemas de la vida real y donde confluyen las diferentes áreas del conocimiento que se ponen en juego para dar solución al problema.

El ABP se sustenta en el enfoque de la teoría constructivista, y está fundamentado en tres principios básicos:

- El entendimiento con respecto a una situación de la realidad surge de las interacciones con el medio ambiente.
- El conflicto cognitivo al enfrentar cada nueva situación estimula el aprendizaje.
- El conocimiento se desarrolla mediante el reconocimiento y aceptación de los procesos sociales y de la evaluación de las diferentes interpretaciones individuales del mismo fenómeno.

En la educación tradicional los estudiantes se encuentran desmotivados y siguen procesos de memorización de una gran cantidad de información, la mayoría de ella irrelevante en situaciones reales fuera de la escuela, presentando dificultades al asumir responsabilidades correspondientes a sus cargos y con problemas al realizar trabajos de forma colaborativa. En la tabla 4-1 se presentan algunas diferencias entre el aprendizaje tradicional y el aprendizaje basado en problemas.

Aprendizaje tradicional	Aprendizaje basado en problemas
El profesor asume el rol de experto o autoridad formal.	Los profesores tienen el rol de facilitador, tutor, guía, coaprendiz, mentor o asesor.
Los profesores transmiten la información a los alumnos.	Los alumnos son responsables en su proceso de aprender y crear alianzas con los alumnos.
El profesor presenta el contenido de sus asignaturas en exposiciones magistrales.	Los profesores diseñan su curso basado en problemas abiertos.
Los alumnos son vistos como "recipientes vacíos" o receptores pasivos de información.	Los alumnos son vistos como sujetos que pueden aprender por cuenta propia.
La comunicación es unidireccional.	Los alumnos localizan recursos y los profesores los guían en este proceso.
Los alumnos absorben, transcriben, memorizan y repiten la información para actividades específicas como pruebas o exámenes.	Los estudiantes participan activamente, en identificación y solución de problemas.
La evaluación es sumatoria. El único evaluador es el docente.	Los estudiantes evalúan su proceso, y el de los demás.

Tabla 4-1: Aprendizaje tradicional y ABP

4.3. Guías de trabajo y actividades

En la metodología propuesta del ABP, se resalta la importancia de que los alumnos trabajen en equipos para hallar la solución a problemas propuestos, ante lo cual se proponen cinco guías de trabajo, las cuales son:

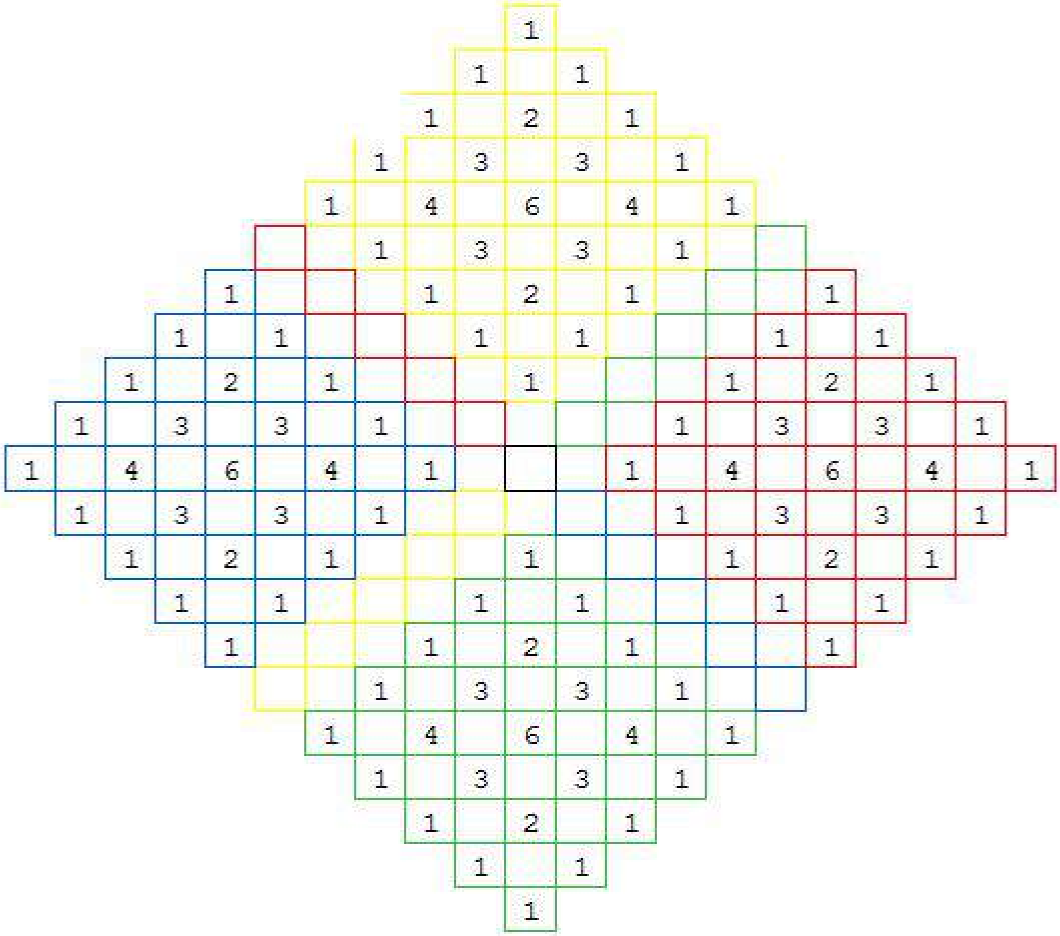
1. Factorial de un número.
2. Triángulo de Pascal.
3. Coeficiente binomial.
4. Teorema del Binomio.
5. Aplicaciones del Teorema del Binomio.

Cada una de las guías se ha organizado en tres etapas:

1. Actividad introductoria.
   Corresponde a la parte de motivación o introducción a la temática; para ésto se propone una actividad interesante o una lectura llamativa, la cual permite realizar algunos ejercicios y contestar unas preguntas sencillas, buscando disponer positivamente al estudiante para abordar el problema a solucionar.

2. Actividad principal.
   Se propone un problema, el cual puede ser analizado, discutido y solucionado en equipos de trabajo. Para llegar a su solución se han formulado unas preguntas que van conduciendo al estudiante a la obtención de unas respuestas a situaciones particulares, para finalmente llegar a obtener una fórmula general y así la solución al problema planteado. La respuesta obtenida debe ser validada a partir de los valores obtenidos en las situaciones previamente desarrolladas y luego aplicada para otros valores distintos.

3. Actividad complementaria.
   Las situaciones y preguntas finales buscan el reforzar la solución dada al problema, complementándola y obteniendo algunas propiedades. En esta sección se ha incluido a manera de información una breve reseña histórica relacionada con la situación desarrollada. Además, estas preguntas pueden ser empleadas como mecanismo de autoevaluación.



"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento."

GEORGE POLYA

4.3.1. Guía 1. Factorial de un número

1. **Actividad introductoria. Lectura ¡Un signo de admiración!**

Tomado de: De los números y su historia, Isaac Asimov

Aunque brevemente, voy a cambiar drásticamente de tema. ¿Alguno de ustedes leyó la obra de Dorothy Sayers, Nine Tailors (Nueve sastres)? La leí hace muchos años. Es la historia de un crimen misterioso, pero no recuerdo nada ni del crimen, ni de los personajes, ni del argumento, ni de nada de nada, con excepción de un punto. Ese punto tiene que ver con lo que se denomina "tocar las distintas variaciones" posibles. Según parece (por lo que logré entender lentamente cuando leí el libro), al tocar las distintas variaciones, usted comienza con una serie de campanas que están afinadas para dar notas distintas, encargando a un hombre la tarea de tocar cada campana. Se tañen las campanas en orden: do, re, mi, fa, etc. Luego se las tañe nuevamente en un orden distinto. Después se las vuelve a tañer en otro orden diferente. Luego se las vuelve a tañer...Usted sigue así hasta haber hecho sonar a las campanas en todos los ordenes (o "variaciones") posibles. Para hacerlo uno debe seguir ciertas reglas de modo, por ejemplo, que ninguna campana pueda correrse en más de un lugar con respecto al orden que haya ocupado en la variación anterior. Hay muy diversas maneras de cambiar el orden en las distintas formas de "tocar las variaciones", y estas maneras son interesantes en sí mismas. Pero todo lo que me interesa aquí es el número total de variaciones posibles que se pueden lograr con un número prefijado de campanas. Simbolicemos una campana por medio de un signo de admiración (!) que representará el badajo, y así podremos hablar de una campana como 1!, de dos campanas como 2!, etcétera. Si no tenemos ninguna campana habrá una sola forma de sonar ... no sonando, de manera que $0! = 1$. Si suponemos que toda campana que exista deberá sonar, entonces una campana sólo puede sonar de una manera (bong), así que $1! = 1$. Está claro que dos campanas, a y b, pueden sonar de dos maneras: ab y ba, así que $2! = 2$. Tres campanas, a, b y c, pueden sonar de seis formas distintas: abc, acb, bac, bca, cab y cba, y de ninguna otra forma, de modo que $3! = 6$.

De acuerdo a la lectura y la notación allí empleada, completar la siguiente tabla.

Número de campanas	Símbolos	Formas diferentes de sonar	Total
0			1
1	a		
2		ab , ba	
3			
4			24
5	a, b, c, d, e		

2. **Actividad principal**

a. A partir del procedimiento realizado en la tabla anterior, pero sin que sea necesario listar todas las formas, continuar con el proceso para $6, 7, 8, 9$ y 10 campanas, empleando el símbolo ! mencionado en la lectura.

Número de campanas	*Símbolos*	*Formas diferentes de sonar*
6	6!	
7		
8		40320
9	9!	
10		

b. El símbolo ! representa el factorial del número, así $8! = 40320$. (Se lee "ocho factorial"). Revisar los valores obtenidos en la última columna y establecer su relación con el número de campanas. Enuncie el procedimiento o regla aplicado para determinar el factorial de un número.

___

___

___

___

c. Observe que: $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; en general para cualquier número entero positivo se tiene que $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. De acuerdo a los desarrollos obtenidos complete la definición del factorial de un número n:

$$n! = \begin{cases} \boxed{} & \text{Si } n = \underline{} \\ n.(n-1)! & \text{Si } n > \underline{} \end{cases}$$

d. Verifique la fórmula obtenida, hallando el factorial de los primeros 10 números naturales y comparar los resultados obtenidos con las respuestas dadas en las tablas anteriores.

3. **Actividad complementaria**

Algo de historia ...

La operación de factorial aparece en muchas áreas de las matemáticas, particularmente en combinatoria y análisis matemático. De manera fundamental, el factorial de n representa el número de formas distintas de ordenar n objetos distintos (elementos sin repetición). Este hecho ha sido conocido desde hace varios siglos. La notación actual $n!$ fue usada por primera vez por Christian Kramp en 1803.

a. Célula maligna.

Una extraña célula se reproduce por división de la siguiente manera:

Primera generación: La célula se divide en dos formando nuevas células.
Segunda generación: Cada una de las dos células de la primera generación se divide en tres, para un total de seis nuevas células.
Tercera generación: Cada una de las seis células de la segunda generación se divide en cuatro ...

- ¿Cuántas células malignas habrá en la quinta generación? ______________________

- La menor cantidad de generaciones que se requieren para que el número de células malignas sobrepase el millón de ejemplares es ______________________

b. Escribir Verdadero o falso.

- $3! \cdot 4! = 7!$ ______________________
- $2! \cdot 3 = 3!$ ______________________
- $3! + 4! = 7!$ ______________________
- $3! \cdot 4! = 12!$ ______________________
- $7! \cdot 5! = 2!$ ______________________
- $10! \div 5! = 7!$ ______________________

c. Ordene de menor a mayor:
$3! \cdot 5!$
$4! \cdot 4!$
$1! \cdot 6!$
$2! \cdot 4!$
$10! \div 5!$
$1! \cdot 6!$

d. Ordene de mayor a menor:
$(5!)^2$
$\sqrt{3! \cdot 3!}$
$3! + 6!$
$(2+4)!$
$3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 6!$

4.3.2. Guía 2. Triángulo de Pascal

1. **Actividad introductoria, lectura Plan hipodámico**

   Un plan hipodámico, trazado hipodámico o trazado en damero, es el tipo de planeamiento urbanístico que organiza una ciudad mediante el diseño de sus calles en ángulo recto, creando manzanas (cuadras) rectangulares.

   El apelativo hipodámico proviene del nombre del arquitecto griego Hipodamo de Mileto (en griego: Hippodamos), considerado uno de los padres del urbanismo, cuyos planes de organización se caracterizaban por un diseño de calles rectilíneas que se cruzaban en ángulo recto. Se utiliza un plano urbano llamado plano ortogonal, equirrectangular, en cuadrícula o en damero. Las ciudades que presentan este tipo de planeamiento urbano tienen una morfología urbana perfectamente distinguible en su trazado vial.

   Este tipo de planeamiento tiene la ventaja de que su parcelamiento es más fácil por la regularidad de la forma de sus manzanas. Pese a esta simplicidad aparente, este tipo de plan presenta algunos inconvenientes, pues prolonga la longitud de los trayectos. Para evitarlo se puede completar con calles diagonales. Para aumentar la visibilidad en los cruces de las calles estrechas, se pueden diseñar edificaciones con chaflanes. Aunque no es un trazado adecuado en ciudades de abrupta topografía, sin embargo, la fuerte pendiente de las calles de San Francisco (un ejemplo de los más conocidos), es un inconveniente que constituye, precisamente, uno de los encantos de esta ciudad.

   Hay ejemplos de planos ortogonales en Antiguo Egipto y Babilonia. En la Edad Antigua destacan las ciudades helenísticas y las que surgieron de un campamento romano; en la Edad Media las bastidas francesas y las nuevas ciudades aragonesas siguiendo las ideas de Eiximenes; en la Edad Moderna la ciudad colonial española; y en la Edad Contemporánea el Plan Haussmann en París o los ensanches urbanos españoles.

   Generalmente, en las ciudades diagramadas según el diseño de damero, miden 100 metros, aunque en muchas ciudades, especialmente en Europa, las cuadras son totalmente irregulares. En Manhattan (Nueva York) y

Bogotá (Colombia), es conocido el diseño urbano en manzanas regulares. Las dimensiones de las manzanas en Colombia son de $80m$ x $80m$.

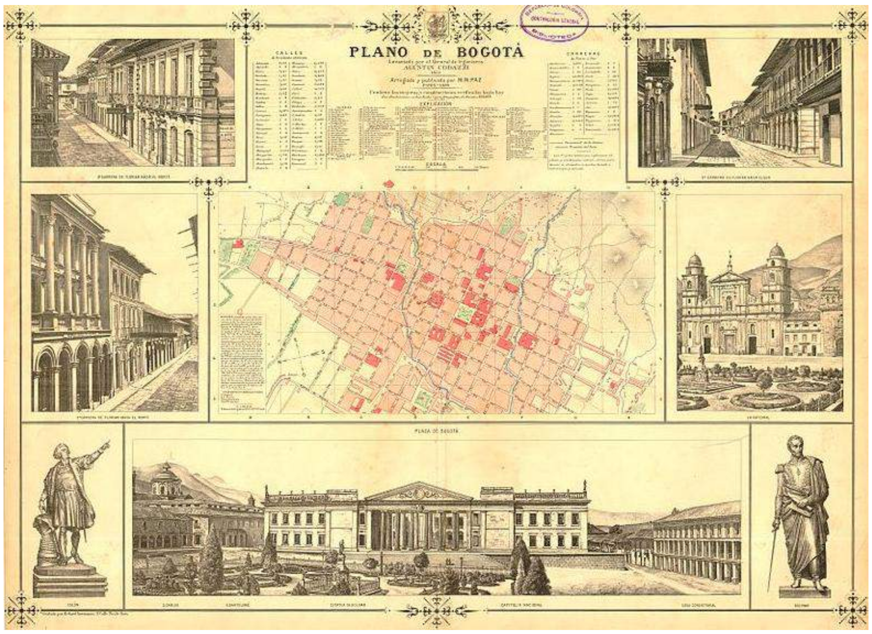


Figura 4-1: Plano de Bogota 1890

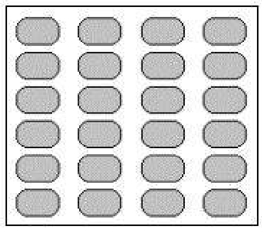
A partir de la lectura realizada previamente, responder las siguientes preguntas:

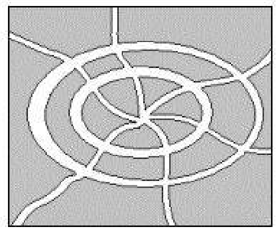
a. ¿En qué consiste el tipo de planeamiento urbanístico denominado, plan hipodámico, trazado hipodámico o trazado en damero?

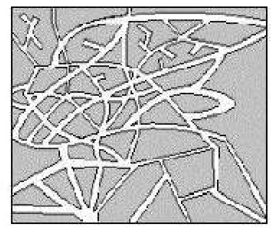
b. ¿De dónde proviene el nombre de plan hipodámico?

c. Mencione algunas ciudades cuyo ordenamiento sea ortogonal.

d. Además del modelo urbanístico mencionado en la lectura, existen otras formas de organizar las ciudades. De acuerdo a cada diagrama presentado, escriba el que considera es el nombre más indicado para cada uno de ellos.







______________ ______________ ______________

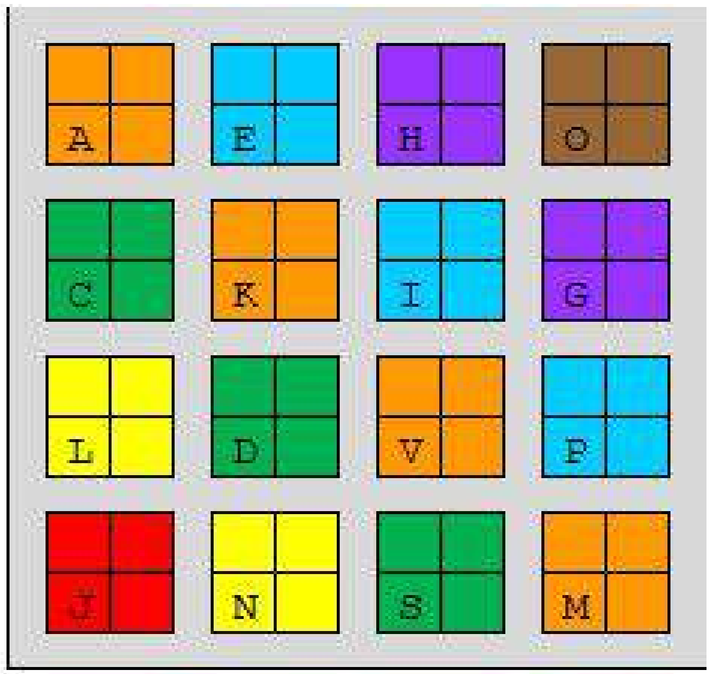
e. Si un arquitecto en Bogotá dispone de un lote cuya área utilizable es cuadrada de lado 350 metros y desea urbanizar, dejando un espacio entre cuadras de 6 metros de ancho para la construcción de vías, ¿cuál es el máximo de manzanas que puede proyectar, bajo las condiciones mencionadas? Argumente su respuesta. __________

____

____

____

2. **Actividad principal**
El conjunto residencial *Casas de la Sabana* en Bogotá está organizado por manzanas, cada una de ellas de $80m$ por $80m$.



En cada manzana se han construido 4 casas. La casa (esquina inferior) de la cuadra inferior izquierda se ha destinado para la parte social, allí se tiene el salón de juegos. Algunos de los niños y niñas que viven allí son, Liliana y NicK, en las casas amarillas; Camilo, Danilo y Santiago, en las casas verdes; Aurita, Katherine, Valentina y María, en las casas color Naranja; Esteban, Iván y Pedro en las casas azules; Humberto y Genaro en las casas de color violeta; y en la casa de color café vive Orlando.

a. Completar la siguiente tabla, donde se han listado los niños y niñas, el color de la casa que habitan y el mínimo de cuadras que deben caminar para llegar a la sala de juegos.

Nombre	Color de la casa que habita	Distancia en cuadras a la sala de juegos
Liliana		
Nick		
Camilo		
Danilo		
Santiago		
Aurita		
Katherine		
Valentina		
María		
Esteban		
Iván		
Pedro		
Humberto		
Genaro		
Orlando		

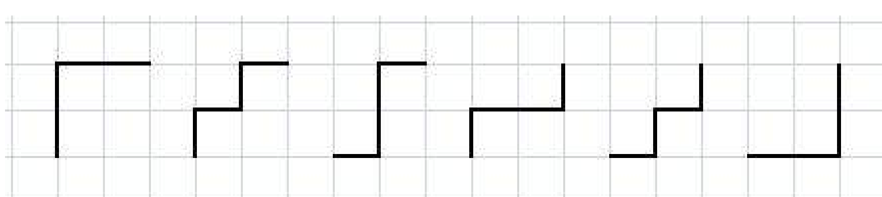
b. Observando la tabla realizada, ¿que se puede concluir? ____________

____

____

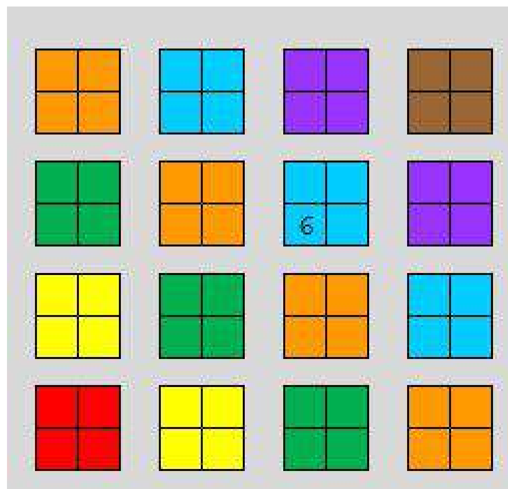
____

c. Para dirigirse a la sala de juegos, algunos jóvenes tienen más de una forma de realizar el recorrido, por ejemplo Iván tiene 6 opciones para su desplazamiento, todas ellas de longitud 4 cuadras, veamos cuales son,

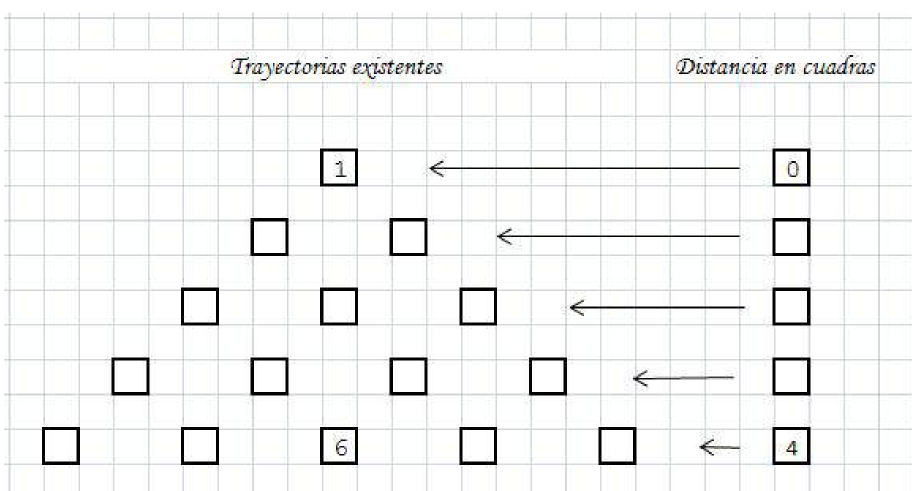


Para cada uno de los jóvenes graficar las trayectorias posibles para realizar su desplazamiento de la casa a la sala de juegos.

d. Completar el esquema con el número de opciones que tiene cada joven para llegar a la sala de juegos. Recordando que dichos recorridos se realizan considerando solo aquellos de longitud mínima. En el diagrama, en lugar de la inicial del nombre se colocará el número de trayectorias obtenido, así en lugar de la I de Iván tenemos un 6; a la sala de juegos por defecto se le asignara el número 1.

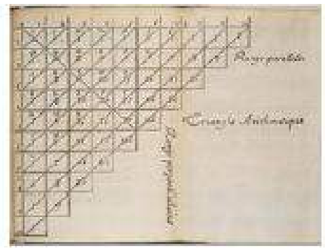


e. El esquema obtenido anteriormente se puede simplificar dejando sólo los números. Rotarlo 135° en sentido negativo (en el sentido de las manecillas del reloj) y relacionar las trayectorias existentes, con la distancia en cuadras hasta la sala de juegos.



3. **Actividad complementaria**

Algo de historia ...



La primera representación explícita de un triángulo de coeficientes binomiales, hoy conocido como Triángulo de Pascal, data del siglo X, en los comentarios de los Chandas Shastra, un libro antiguo de prosodia del sánscrito escrito por Pingala en la India alrededor del año 200 a.C. Las propiedades del triángulo fueron discutidas por los matemáticos persas Al-Karaji (953–1029) y Omar Khayyám (1048–1131); de aquí que en Irán sea conocido como el triángulo Khayyam-Pascal o simplemente el triángulo Khayyam. Se conocían también muchos teoremas relacionados, incluyendo el Teorema del Binomio.

En China, este triángulo era conocido desde el siglo XI por el matemático chino Jia Xian (1010–1070). En el siglo XIII, Yang Hui (1238–1298) presenta el triángulo aritmético, equivalente al Triángulo de Pascal, de aquí que en China se le llame triángulo de Yang Hui.

Petrus Apianus (1495–1552) publicó el triángulo en el frontispicio de su libro sobre cálculos comerciales Rechnung (1527). Este es el primer registro del triángulo en Europa. En Italia, se le conoce como el triángulo de Tartaglia, en honor al algebrista italiano Niccolò Fontana Tartaglia (1500–1577). También fue estudiado por Michael Stifel (1486 – 1567) y François Viète (1540 – 1603).

En el Traité du triangle arithmétique (Tratado del triángulo aritmético) publicado en 1654, Blaise Pascal reúne varios resultados ya conocidos sobre el triángulo y los emplea para resolver problemas ligados a la teoría de la probabilidad; demuestra 19 de sus propiedades, deducidas en parte de la definición combinatoria de los coeficientes. Algunas de estas propiedades eran ya conocidas y admitidas, pero sin demostración. Para demostrarlas, Pascal pone en práctica una versión acabada de inducción matemática. Demuestra la relación entre el triángulo y la fórmula del binomio.

El triángulo fue bautizado Triángulo de Pascal por Pierre Raymond de Montmort (1708) quien lo llamó: Tabla del Sr. Pascal para las combinaciones, y por Abraham de Moivre (1730) quien lo llamó: "Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM" (del latín: "Triángulo aritmético de Pascal"), que se convirtió en el nombre occidental moderno.

a. Continuar el triángulo obtenido hasta la fila 11.

b. Pares e impares.
   En el Triángulo de Pascal, usar 2 colores distintos uno para colorear los números pares y otro para los impares. El patrón obtenido se denomina *Triángulo de Sierpinski*.

c. En el Triángulo de Pascal, obtener la suma de los elementos de cada una de las filas (o reglones) y completar la secuencia con los resultados: 1, 2, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ...
Redactar una conclusión, con la cual se pueda obtener la suma de cada una de las filas. ______________________________

____

____

____

d. En el Triángulo de Pascal, traza una línea vertical por los números $1, 2, 6, 20, 70, \ldots,$ observa los números que se encuentran a la izquierda de esta línea y compáralos con los de la derecha; ¿qué se puede concluir? ______________________________

____

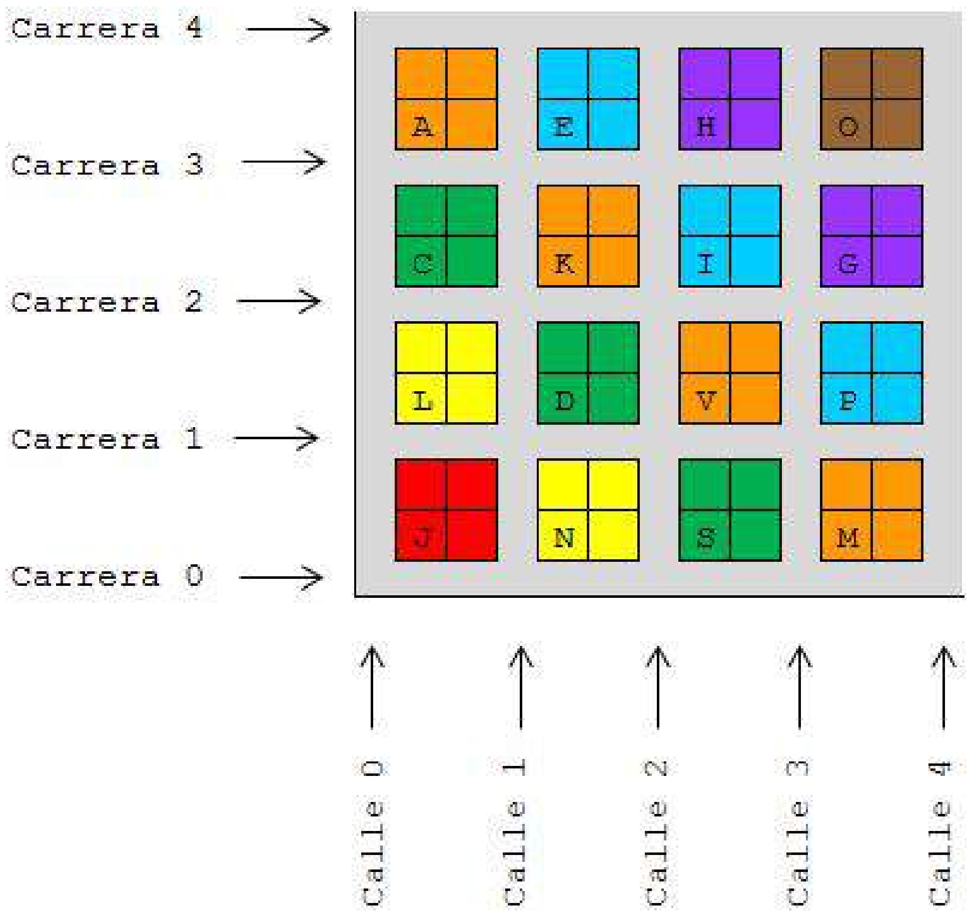
____

____

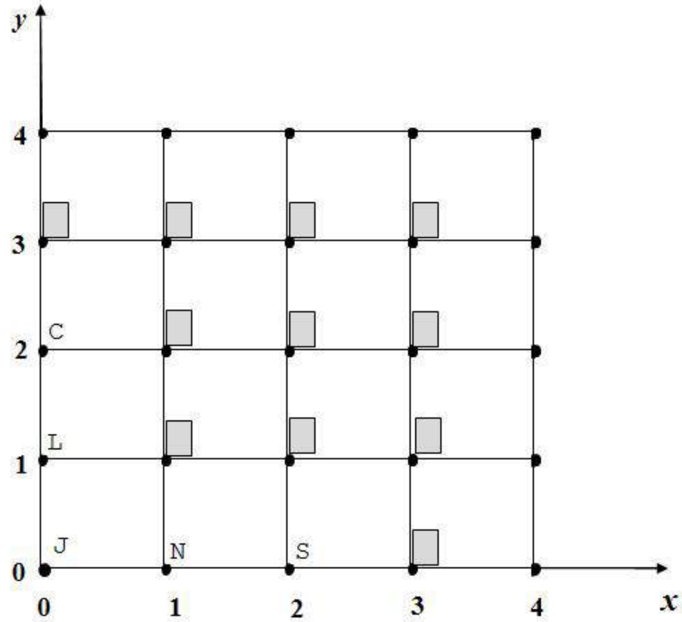
4.3.3. Guía 3. Coeficiente binomial

1. **Actividad introductoria,**

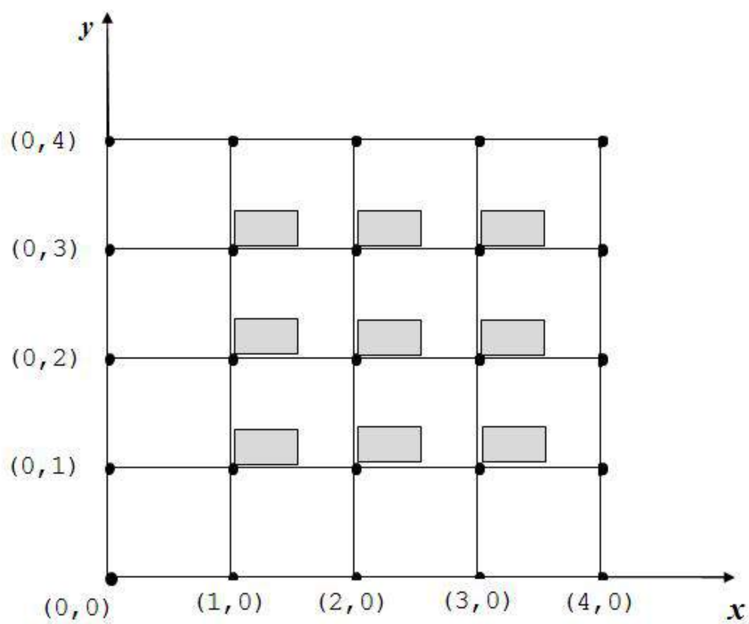
   a. Con el fin de tener una ubicación más precisa de los habitantes de la urbanización *Casas de la Sabana* se introduce una nomenclatura de calles y carreras la cual se puede apreciar en la figura.



   b. Es posible realizar la representación en un sistema coordenado. Completar la información presentada en él.

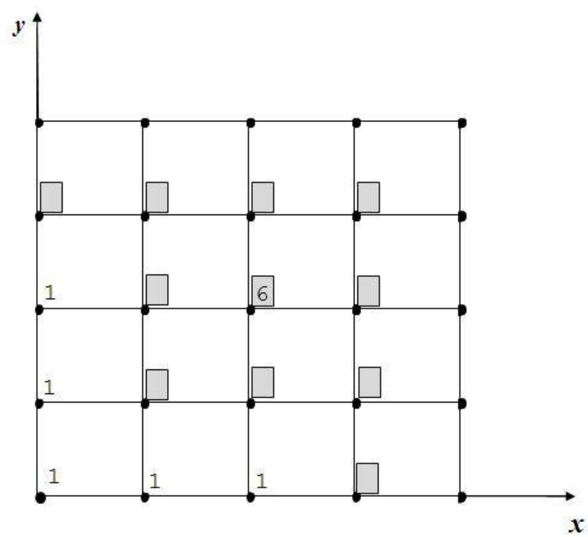


c. Ahora en el lugar donde se encontraba la inicial de cada uno de los nombres, ubicar las coordenadas del punto correspondiente.



d. En la guía 2 se halló el número de opciones disponibles por cada joven, para llegar a la sala de juegos, considerando sólo aquellas trayectorias de longitud mínima. De acuerdo a lo realizado completar el siguiente parrafo:
Aurita, Camilo, Liliana, Nick, Santiago y María disponen de ________ manera de realizar el recorrido; Danilo de ________; Katherine y Valentina de ________ maneras; Esteban y Pedro tienen ________ formas; Iván ________ posibilidades; Humberto y Genaro ________ y Orlando puede realizar el recorrido de ________ maneras.

Esta información nos permite determinar el número de trayectorias posibles desde cada punto hasta el origen del sistema coordenado. Escribir la información faltante en el siguiente diagrama.



e. Note que la primera fila y la primera columna están formadas solamente por unos. Enuncie una regla que permita determinar los elementos de la figura anterior, a partir de la primera fila y la primera columna. ____
____
____

2. **Actividad principal**
   Se pretende obtener una fórmula que permita hallar los elementos del arreglo rectangular anterior. La expresión a determinar corresponde al número de trayectorias asociadas a cada uno de los puntos de la figura, hasta el punto (0, 0).

   Para indicar las trayectorias que se tienen desde un punto (n, k) se empleará el símbolo $T_{(n,k)}$.

   a. Completar el siguiente listado de conclusiones obtenidas al observar las dos primeras columnas de la figura.

      - La primera columna está conformada solamente por números __________, ya que tenemos una única trayectoria para llegar al origen.

      - Estando en punto $(0, k)$, el número de las trayectorias existentes al origen es

      $$T_{(0,k)} = \rule{3cm}{0.4pt} \tag{1}$$

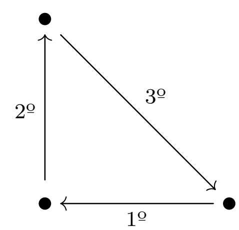
      - La siguiente columna corresponde a los números __________, y se obtienen para todos los puntos de coordenadas $(1, k)$.

      - El número de trayectorias correspondiente al punto de la forma $(1, k)$ está dado por __________, es decir,

      $$T_{(1,k)} = \rule{3cm}{0.4pt} \tag{2}$$

   b. Para los puntos (n, k) de las columnas siguientes se aplicará la regla del *"triángulo rectángulo isósceles"* dada a continuación:
      Realizar un primer desplazamiento horizontal, desde la posición inicial, hacia la izquierda hasta llegar a la columna de los números naturales, una vez allí, se efectúa un desplazamiento ascendente en sentido vertical, de longitud igual a la del desplazamiento horizontal realizado previamente, finalmente un desplazamiento diagonal, para volver al punto de partida, formando así un triángulo rectángulo

isósceles. Para obtener el número de trayectorias correspondiente a ese punto, efectuar el producto de los números que están sobre el cateto vertical y dividirlos entre el producto de los factores $1, 2, \ldots, n$.

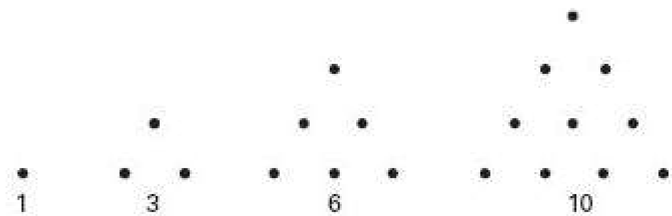


Punto inicial

Aplicando el procedimiento descrito, completar la siguiente tabla, en la cual se busca determinar el número de trayectorias asociadas a algunos puntos; de igual manera en la última fila proponga una posible fórmula que permita determinar el número de trayectorias asociadas a un punto (n, k), hasta el punto $(0, 0)$.

Punto (n, k)	Números en el cateto vertical	Factores 1, 2, . . . , n	Producto números del cateto vertical	Producto Factores 1, 2, . . . , n	Número de trayectorias
(2, 2)	3, 4	1, 2	12	2	6
(2, 3)	4, 5	1, 2	20	2	
(2, 4)		1, 2			
(3, 2)	3, 4, 5	1, 2, 3			10
(3, 3)				6	
(3, 4)			210		
(4, 2)		1, 2, 3, 4			
(4, 3)	4, 5, 6, 7				
(4, 4)					70
(5, 2)					
(5, 3)					
(4, 4)					
(n, k)					

c. En la tercera columna del diagrama obtenido en d) se observa la secuencia $1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots$. Estos números se pueden representar así,



- Al seguir la secuencia, ¿cuáles serán los primeros diez números?
  ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______.

- ¿Qué nombre cree que reciben estos números? ______________

- ¿por qué se llamarán así? ______________________________
  ____
  ____
  ____

Los números $1, 3, 6, 10, 15, 21\ldots$ se han obtenido de las trayectorias asociadas a los puntos de la forma $(2, k)$.

Empleando la regla del "triángulo rectángulo isósceles" (descrita anteriormente en b.) al punto $(2, 3)$ debió obtener en la tabla que $T_{(2,3)} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$.

- Similarmente, para el punto $(2, 4)$ se tiene que el número de trayectorias asociadas está dado por $T_{(2,4)} = \underline{\qquad\qquad} = 15$.

- Para el punto $(2, 5)$ se tiene que $T_{(2,5)} = \underline{\qquad\qquad} = 21$.

- Dado el punto $(2, 6)$ se tiene que $T_{(2,6)} = \underline{\qquad\qquad} =$

- El proceso anterior permite inferir que un punto de la forma $(\underline{\quad}, \underline{\quad})$ tendrá asociado un número $T_{(\underline{\ },\underline{\ })}$ obtenido así:

$$T_{(2,k)} = \frac{(k+2)\cdot(k+1)}{1\cdot 2} \tag{3}$$

d. En la cuarta columna tenemos la sucesión ___, ___, ___, ___, ... denominados *números tetraedrales*, los cuales provienen de contar las trayectorias reticulares de los puntos de la forma $(3, k)$.

   Al aplicar la regla descrita al punto $(3, 0)$, se tiene solo una trayectoria asociada, $T_{(3,0)} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3} = 1$.

   - De manera similar, para el punto $(3, 2)$ se tiene que $T_{(3,2)} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = \qquad$.

   - Para el punto $(3, 4)$ se cumple que $T_{(3,4)} = \underline{\qquad} = 35$.

   - Dado el punto $(3, 5)$ se cumple que $T_{(3,4)} = \underline{\qquad} = \qquad$.

   - De acuerdo a los resultados se infiere que los números de la forma ______________ tienen asociado el número $T_{(3,k)}$ dado por

$$T_{(3,k)} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{4}$$

e. A partir de los procedimientos anteriores, ¿cómo se puede expresar el número de trayectorias asociado a los puntos de la forma $(4, k)$?

$$T_{(4,k)} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{5}$$

f. De acuerdo a lo realizado anteriormente se tiene que el número de trayectorias $T_{(n,k)}$ asociado al punto (n, k) está determinado por

$$T_{(n,k)} = \frac{(k+n)\cdot(k+(n-1))\ldots(k+2)\cdot(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} \tag{6}$$

   - Aplicar la expresión (6) al punto $(6, 4)$,

$$T_{(6,4)} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} =$$

Obtener el resultado en cada caso,

- $T_{(5,1)} = \rule{3cm}{0.4pt} = \qquad .$

- $T_{(7,3)} = \rule{3cm}{0.4pt} = \qquad .$

- $T_{(8,10)} = \rule{3cm}{0.4pt} = \qquad .$

g. En la primera guía se obtuvo el *factorial* del número k, el cual está definido como

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

con $0! = 1$. El numerador de la expresión (6) se puede reescribir como

$$(k+n) \cdot (k+(n-1)) \ldots (k+2) \cdot (k+1) = \frac{(n+k)!}{k!}.$$

- Reemplazar esta expresión en la fórmula (6)

$$T_{(n,k)} = \rule{3cm}{0.4pt} \tag{7}$$

h. Este número $T_{(n,k)}$ se escribe frecuentemente como $\binom{n+k}{k}$ o de la forma $C_{(n+k,\ k)}$ y se denomina ***Número combinatorio***,o ***Coeficiente binomial*** con lo cual, el número de trayectorias del punto (n,k) al origen está dado por

$$T_{(n,k)} = C_{(n+k,\ k)} = \binom{n+k}{k} \tag{8}$$

Al igualar lo obtenido en (7) con lo expresado en (8) se tiene $\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{k! \cdot n!}$ cuando $k \leq n$ y ya que $n = (n-k)+k$ entonces

$$C_{(n,k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \tag{9}$$

3. **Actividad complementaria**

a. Hallar:

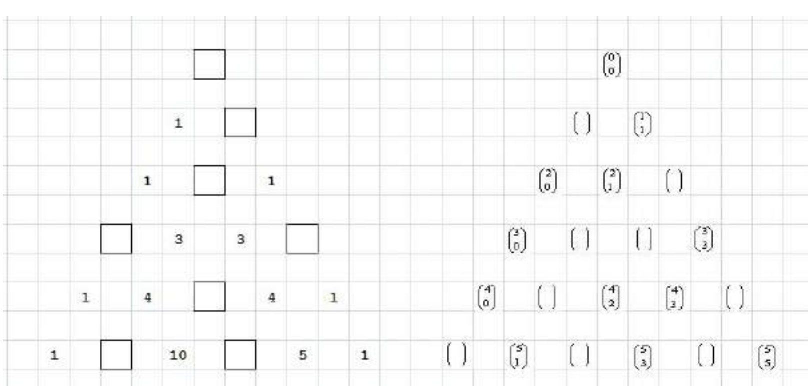
- $\binom{4}{0} =$
- $\binom{4}{1} =$
- $\binom{4}{2} =$
- $\binom{4}{3} =$
- $\binom{4}{4} =$

b. De acuerdo a los resultados obtenidos en el ítem a. contestar,

- ¿Qué tienen en común estos coeficientes binomiales? __________

- ¿A qué corresponden los coeficientes obtenidos? __________

c. Completar el Triángulo de Pascal, y el triángulo de coeficientes binomiales.



d. Hallar:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}=\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}=\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }=$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}=\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }+\binom{\ }{\ }=$

e. Teniendo como referente los anteriores ejercicios, escribir el valor de las siguientes sumas

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}=$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}=$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}=$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}=$

f. Generalizando,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=$
- Formule una conclusión, ____

____

____

____

____

g. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, se denomina *conjunto de partes de A* y se denota por $P(A)$. Cuando el conjunto A tiene n elementos, se dice que el cardinal de A es n.

- Complete la siguiente tabla,

Cardinal del conjunto A	Conjunto A	Subconjuntos de A	Cardinal de partes de A
0	{ }	{ }	1
1	{a}		
2	{a, b}	{ } {a} {b} {a, b}	
3	{a, b, c}		
4	{a, b, c, d}		16
5	{a, b, c, d, e}		

- Compare los resultados de la tabla anterior con los datos del Triángulo de Pascal. Encuentre una (o varias) relación (es) entre el cardinal del conjunto de partes de un conjunto de n elementos y el Triángulo de Pascal. ______________________________

____

____

____

h. Hallar,

- $\binom{3}{1} =$

  $\binom{3}{2} =$

- $\binom{5}{3} =$

$\binom{5}{2} =$

- $\binom{7}{4} =$

  $\binom{7}{3} =$

- $\binom{10}{6} =$

  $\binom{10}{4} =$

i. A partir de los resultados obtenidos en el ejercicio anterior formule una propiedad, y mencione como se cumple en el Triángulo de Pascal. ____

____

____

____

____

____

j. Escriba otros coeficientes binomiales y verifique que se cumple la propiedad obtenida en el ejercicio anterior.

k. Complete las siguientes igualdades

- $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \underline{\hspace{1.5cm}} + \underline{\hspace{1.5cm}} = 10 = \binom{5}{2}$
- $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \underline{\hspace{1.5cm}} + \underline{\hspace{1.5cm}} = \underline{\hspace{1.5cm}} = \binom{6}{4}$
- $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \underline{\hspace{1.5cm}} + \underline{\hspace{1.5cm}} = \underline{\hspace{1.5cm}} = \binom{\ }{\ }$
- $\binom{9}{5} + \binom{\ }{6} = \underline{\hspace{1.5cm}} + \underline{\hspace{1.5cm}} = \underline{\hspace{1.5cm}} = \binom{\ }{\ }$

l. Ubique los tres coeficientes binomiales de cada ítem del ejercicio anterior en el Triángulo de Pascal y encuentre otra propiedad del Triangulo de Pascal y los coeficientes binomiales. ________________

____

____

____

____

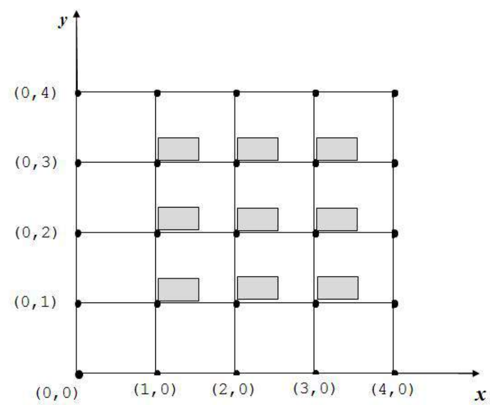
m. Escriba otros coeficientes binomiales y verifique que se cumple la propiedad anterior.

4.3.4. Guía 4. Teorema del Binomio

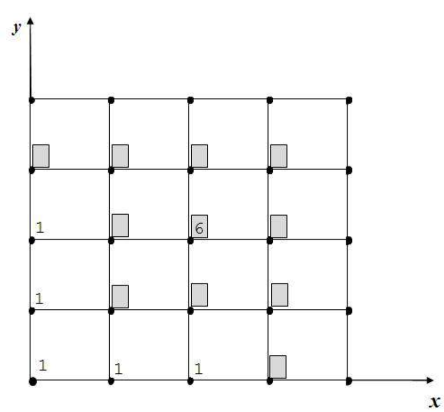
1. **Actividad introductoria**

   Retomando la situación ya trabajada referente a la ubicación de las casas de los jóvenes en el conjunto residencial *Casas de la Sabana*.

   a. Ubicar las coordenadas de cada uno de los puntos en el plano.



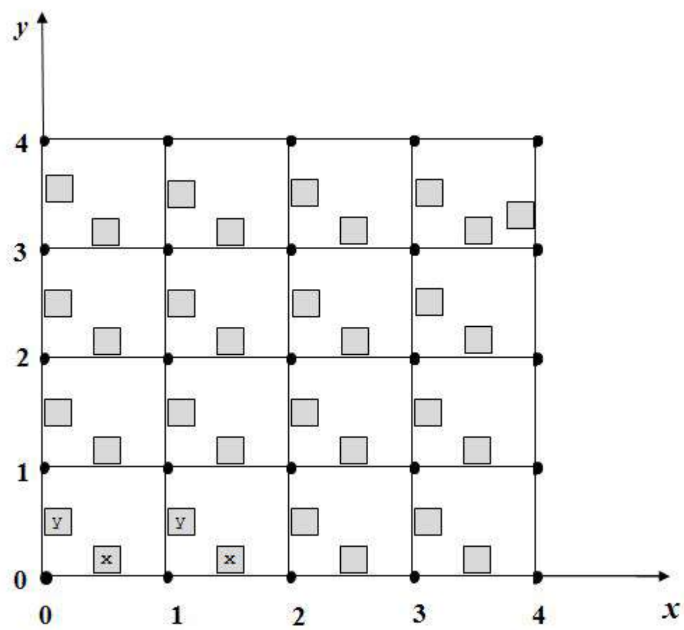
   b. Escribir el número correspondiente a la cantidad de trayectorias posibles existentes para desplazarse desde cada punto hasta el origen del sistema coordenado. Recuerda que en la Guía 3, se halló la fórmula del coeficiente binomial que permite hacer estos cálculos rápidamente.



2. **Actividad principal**

Vamos a codificar las trayectorias definidas previamente así: *los desplazamientos horizontales en cada cuadra se representaran con una "x" y los desplazamientos verticales en cada cuadra con una "y"*

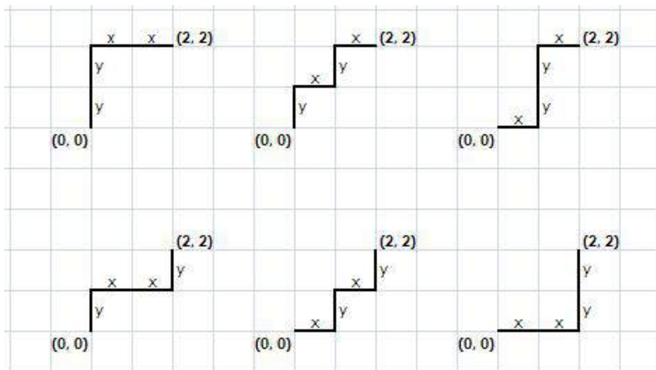
a. De acuerdo con la convención planteada, completar el siguiente diagrama,



b. Cada trayectoria se escribirá como el producto de los símbolos empleados en el desplazamiento desde el punto hasta el origen. Así, para el punto $(2,2)$ se tiene 6 trayectorias, las cuales están dadas por

$$(2,2) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (0,2) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,0)$$
$$(2,2) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (2,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,0)$$

Realizando la asociación descrita en el ítem a, su representación es



Las 6 trayectorias $xxyy$, $xyxy$, $xyyx$, $yxxy$, $yxyx$, $yyxx$ que parten del punto $(2, 2)$ son equivalentes y la podemos denotar de la forma x^2y^2.
Realizar el gráfico de las trayectorias respectivas de cada punto dado, asociándoles los símbolos x y y a los desplazamientos. Luego denotar esas trayectorias de la forma $x^{\bigcirc}y^{\bigcirc}$.

- Punto inicial $(2, 0)$

- Punto inicial $(1, 1)$

- Punto inicial $(0, 2)$

- Punto inicial $(3, 0)$

- Punto inicial $(2, 1)$

- Punto inicial $(1, 2)$

- Punto inicial $(0, 3)$

c. Completar la siguiente información:

- Los puntos $(2, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 2)$ son los únicos que requieren __________ movimientos para llegar al origen.
- partiendo del punto $(2, 0)$ se tiene __________ trayectoria(s), del tipo x^2.
- partiendo del punto $(1, 1)$ se tiene __________ trayectoria(s), del tipo xy.
- Partiendo del punto $(0, 2)$ se tiene __________ trayectoria(s), del tipo y^2.

d. Resumir en una tabla la información obtenida en el ítem anterior,

Punto	Trayectorias	Desplazamientos horizontales	Desplazamientos verticales	Tipo
(2, 0)				x^2
(1, 1)				xy
(0, 2)				y^2
Total	4			

e. Completar

- Los puntos $(3, 0)$, $(2, 1)$ $(1, 2)$ y $(0, 3)$ son los únicos que requieren ____________ movimientos para llegar al origen.
- partiendo del punto $(3, 0)$ se tiene ____________ trayectoria, del tipo x^3.
- partiendo del punto $(2, 1)$ se tiene ____________ trayectorias, del tipo x^2y.
- partiendo del punto $(1, 2)$ se tiene ____________ trayectorias, del tipo ____________.
- Partiendo del punto $(0, 3)$ se tiene ____________ trayectoria, del tipo ____________.

f. Resumir en una tabla la información obtenida en el item anterior,

Punto	*Trayectorias*	*Desplazamientos horizontales*	*Desplazamientos verticales*	*Tipo*
(3, 0)				x^3
(2, 1)				
(1, 2)				xy^2
(0, 3)				
Total	8			

g. De acuerdo a lo realizado en c. y d. podemos "contar" todas las trayectorias que requieren dos movimientos para llegar al origen. Estas trayectorias son del tipo x^2, xy y y^2, entonces obtenemos la siguiente igualdad :

$$x(x+y)+y(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

Con la información obtenida en e. y f. es posible "contar" todas las trayectorias que requieren tres movimientos para llegar al origen. Estas trayectorias son del tipo x^3, x^2y, xy^2 y y^3, entonces obtenemos la igualdad

$$x(x+y)^2+y(x+y)^2=(x+y)^3=\underline{\hspace{5cm}}.$$

Realizando un procedimiento similar al llevado previamente obtener el desarrollo de cada uno de los siguientes binomios

- $(x+y)^1=$

- $(x+y)^4 =$

- $(x+y)^5 =$

- $(x+y)^6 =$

h. • Completar la siguiente tabla,

n	Desarrollo del binomio	Triángulo de Pascal
0	$(x+y)^0=1$	1
1	$(x+y)=\binom{1}{0}x+\binom{1}{1}y=1x+1y$	
2	$(x+y)^2=\binom{2}{0}x^2+\binom{2}{1}xy+\binom{2}{2}y^2=$	1 2 1
3	$(x+y)^3=$	
4	$(x+y)^4=$	
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$

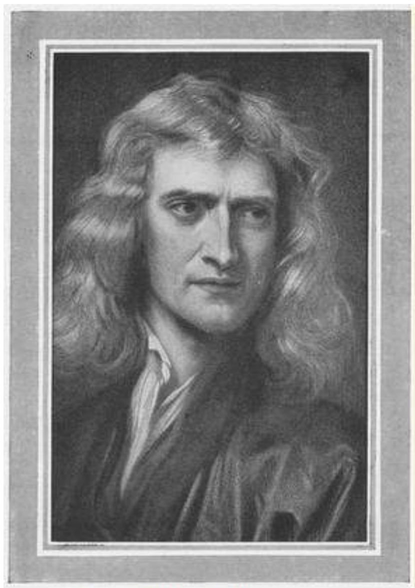
- Se observa la relación existente entre los coeficientes en el desarrollo del binomio y el Triángulo de Pascal. Completar la conclusión: Los __________ en la expansión binomial de $(x+y)^n$ se encuentran en la línea __________ del ____________________.

i. La expresión general que permite hallar la expansión de $(x+y)^n$ es conocido como Teorema del Binomio o Binomio de Newton. De acuerdo al trabajo realizado previamente formular una expresión que permita hallar en general el desarrollo de $(x+y)^n$.

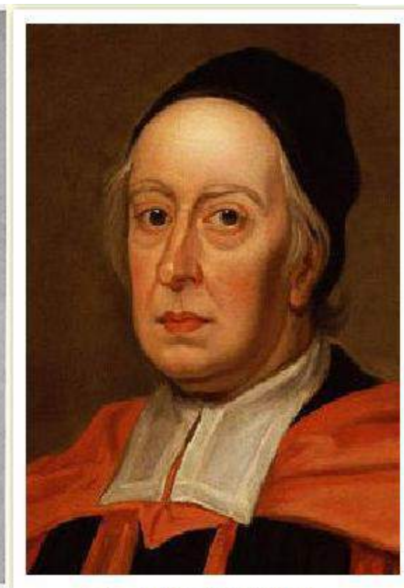
- $(x+y)^n =$

3. **Actividad complementaria**

Algo de historia ...



Isaac Newton (1642 – 1727)



John Wallis (1616- 1703)

El Teorema del Binomio es atribuido a Isaac Newton, aunque en realidad ya se tenía conocimiento de él previamente. El teorema fue descubierto por primera vez por el ingeniero y matemático persa Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji alrededor del año 1000, quien además definió la manera de operar los polinomios, tal como lo hacemos actualmente.

Newton no publicó nunca el teorema del binomio. Lo hizo el matemático John Wallis por primera vez en 1685 en su Álgebra, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

El Teorema del Binomio para $n = 2$ se encuentra en los Elementos de Euclides (300 a. C.), así mismo el término “coeficiente binomial” fue introducido por Michel Stifer en el siglo XVI.

a. De acuerdo al trabajo adelantado previamente, completar las siguientes conclusiones respecto al desarrollo de $(x+y)^n$.

- El desarrollo de $(x+y)^n$ tiene __________ términos.
- Las potencias de x empiezan con _____, en el primer término y van _______________ en cada término, hasta llegar a cero en el último.
- Las potencias de y empiezan con exponente _____ en el primer término y van _______________ en uno en cada término, hasta n en el último.
- Para cada término la _______________ de los exponentes de x y y es ________.
- Los coeficientes de cada uno de los términos se pueden obtener del ____________________ al seleccionar los elementos de la fila ________.

b. Obtener el desarrollo en cada caso:

- $(3x+2y)^5$ ____
- $(x^2+y^3)^3$ ____
- $(2x-3y)^4$ ____
- $(4x^3+2y^5)^2$ ____

c. Completar cada uno de los enunciados

- El término central en el desarrollo de $(4x+7y)^6$ es __________
- El número de términos de $(\frac{2}{5}x^2+\sqrt[3]{4y})^{11}$ es ________________
- El octavo término en el desarrollo de $(2x^2-\frac{1}{x})^7$ es __________
- El coeficiente del término central en el desarrollo de la expresión $(5x^4-10y^5)^8$ es ____

4.3.5. Guía 5. Aplicaciones del Teorema del Binomio

1. **Actividad introductoria.**

   Lectura: Palíndromos numéricos y verbales

De manera general, se llaman «palíndromas» a palabras, números, frases e incluso grupos de frases que pueden leerse, con idéntico resultado, tanto en el sentido progresivo, de izquierda a derecha, el habitual, como en sentido retrógrado, de derecha a izquierda. En algunos países, los números palindrómicos suelen llamarse «capicúas».

Los aficionados a charadas y juegos de palabras, así como los numerólogos de todo pelaje, se han interesado desde siempre por la palindromía de todo tipo, seguramente a causa del profundo y semi-inconsciente placer estético que nos causa la peculiar simetría de los palíndromos.

Los palíndromos tienen homólogos en otros campos: hay melodías que pueden ejecutarse desde el final hacia adelante; hay dibujos y pinturas concebidos con simetría axial; casi todos los animales muestran simetría bilateral, simetría con respecto a un plano.

a. Algunas ejemplos de palabras palíndromas son *ama, elle, radar, narran, anilina, acurruca, reconocer*, las cuales tienen 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 letras respectivamente.

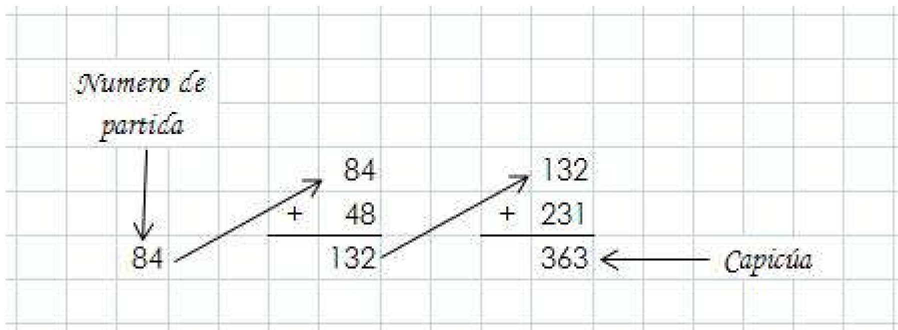
Escribir 5 palabras palíndromas.

b. Dos ejemplos de frases palíndromas son "dábale arroz a la zorra el abad" y "Anita lava la tina".

Escribir 2 frases palíndromas.

c. Una clásica conjetura de origen desconocido, sobre palíndromos es como sigue. Se toma un número entero positivo cualquiera. El número se escribe entonces en orden inverso; los dos números se suman. El proceso se repite con el número suma, obteniéndose entonces una segunda suma, y se prosigue de igual forma hasta lograr un capicúa.

La conjetura afirma que luego de un número finito de adiciones terminará por obtenerse un capicúa. Por ejemplo, 84 genera un capicúa en tres pasos,



Partiendo del número 89 y siguiendo el proceso anterior es necesario realizar 24 pasos para llegar al número 8,813,200,023,188.

Para cada uno de los números hallar el capicúa asociado.

- 69

- 143

2. **Actividad principal**

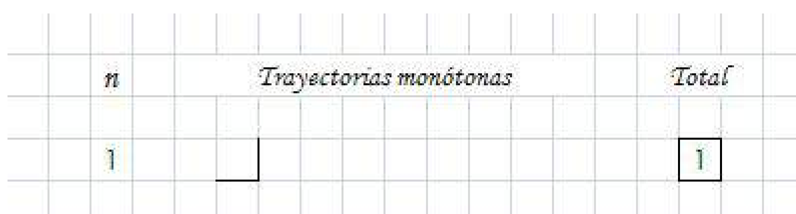
A continuación se proponen 3 situaciones con el fin de realizar el conteo de las opciones indicadas en cada una de ellas y formar una sucesión.

a. *Hallar el número de caminos monótonos que se pueden trazar a través de las líneas de una malla de $n \times n$ celdas cuadradas.*

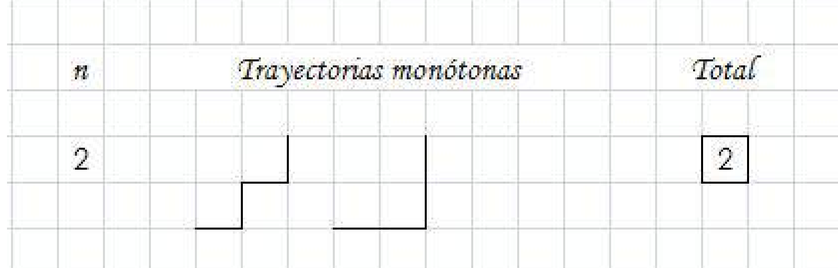
Un camino monótono es aquél que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha y quedan por abajo de la diagonal $y = x$.

Como ejemplo se presenta el gráfico de las trayectorias monótonas para $n = 1$ y $n = 2$.

- Si $n = 1$



- Si $n = 2$



- Si $n = 3$

n	*Trayectorias monótonas*	*Total*
3		$\square$

- Si $n = 4$

n	*Trayectorias monótonas*	*Total*
4		$\square$

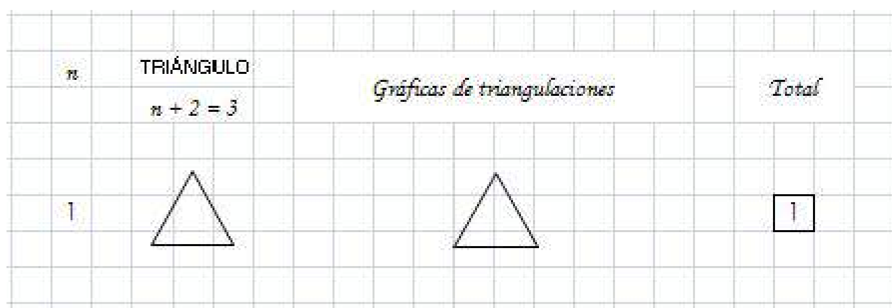
- Completar la tabla con los resultados obtenidos

n	1	2	3	4
Trayectorias monótonas	1	2		

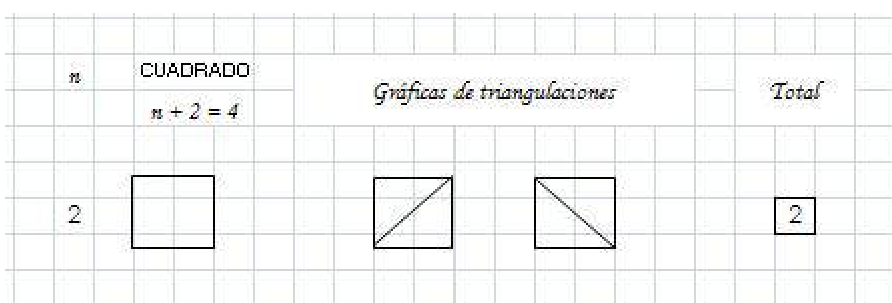
b. *Contar el número de formas distintas de triangular un polígono regular convexo de $n + 2$ lados.*

Triangular un polígono consiste en dividirlo en triángulos, conectando los vértices con líneas rectas sin que ellas se intercepten. Cuando $n = 1$ se tiene un triángulo, si $n = 2$ un cuadrado. Estos dos polígonos ya se han triangulado como ejemplo.

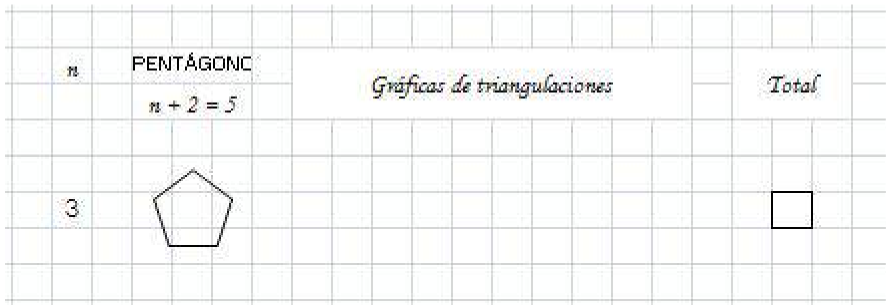
- Triángulo (Si $n = 1$)



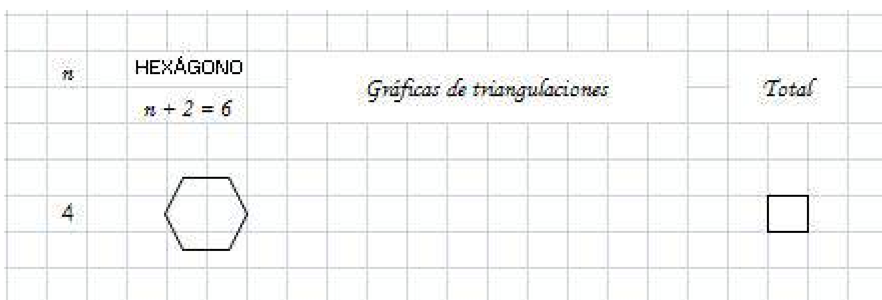
- Cuadrado (Si $n = 2$)



- Pentágono (Si $n = 3$)



- Hexágono (Si $n = 4$)



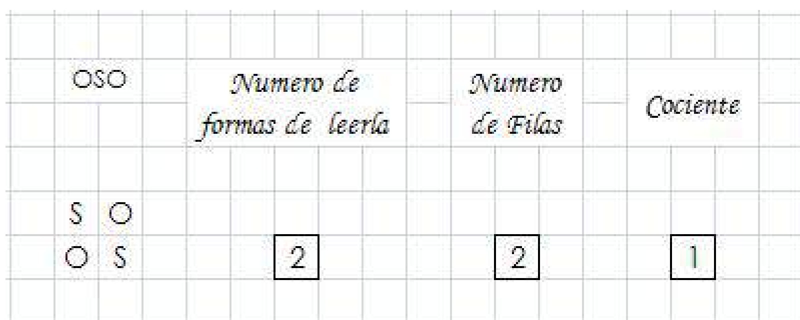
- Completar la tabla con los resultados obtenidos

n	1	2	3	4
Total triangulaciones	1	2		

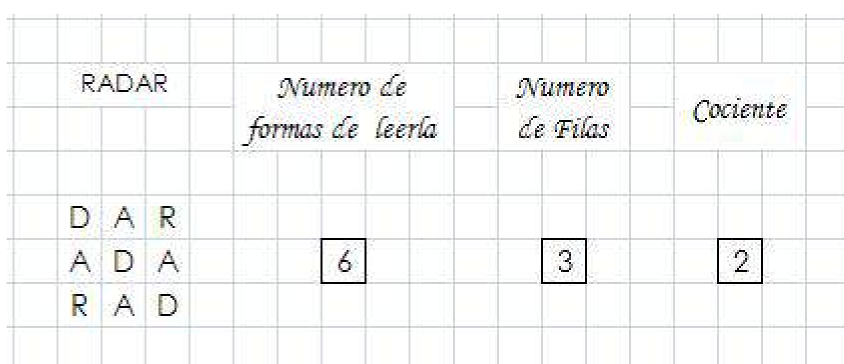
c. *Determinar el número de maneras en que se puede leer la palabra o frase propuesta en cada uno de los arreglos. Luego dividir el número obtenido entre el número de filas del arreglo.*

La lectura se realizará iniciando en la parte inferior izquierda, y finalizando en la parte superior derecha. Las dos primeras situaciones ya se han desarrollado a manera de ejemplo.

- Oso



- Radar



- Anilina

ANILINA

L	I	N	A
I	L	I	N
N	I	L	I
A	N	I	L

Numero de formas de leerla	Numero de Filas	Cociente
$\square$	$\square$	$\square$

- Reconocer

RECONOCER

N	O	C	E	R
O	N	O	C	E
C	O	N	O	C
E	C	O	N	O
R	E	C	O	N

Numero de formas de leerla	Numero de Filas	Cociente
$\square$	$\square$	$\square$

- Amad a la dama

AMAD A LA DAMA

L	A	D	A	M	A
A	L	A	D	A	M
D	A	L	A	D	A
A	D	A	L	A	D
M	A	D	A	L	A
A	M	A	D	A	L

Numero de formas de leerla	Numero de Filas	Cociente
$\square$	$\square$	$\square$

- Completar la siguiente tabla donde se resumen los resultados obtenidos.

Número de filas	Filas menos una	Formas de leer la palabra o frase	Cociente obtenido
2	1	2	1
3	2	6	
4	3		
5	4		
6			

Recuerde el Triángulo de Pascal y en él observe donde aparecen los números $1, 2, 6, 20, 70, 252, \ldots$ correspondientes a las formas de leer la palabra o la frase, en la solución del tercer problema.

d. Los números $1, 2, 6, 20, 70, 252, \ldots$ se denominan *Coeficientes centrales* y se pueden obtener al aplicar la expresión $\binom{2n}{\ }$.

e. Los números obtenidos en la solución de los tres problemas anteriores, corresponden a los primeros términos de una secuencia denominada *Números de Catalan*, los cuales sirven para modelar diversos problemas de combinatoria en disciplinas como el álgebra, la informática, teoría de grafos y geometría.

Empleando el coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ y los resultados obtenidos en la última tabla, escribir una fórmula que permita determinar el n-ésimo número de Catalan,

$$c_n =$$

f. Verificar que la fórmula hallada para determinar los números de Catalan es la correcta, comprobando los resultados dados en la siguiente tabla y calcular los que hacen falta.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42					

3. **Actividad complementaria**

Algo de historia ...

Los números de Catalan son la secuencia 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, $\cdots$, la cual corresponde a la sucesión A000108 en la base de datos *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) desarrollada por Sloane. Estos números deben su nombre al matemático belga *Eugène Charles Catalan* $(1814 - 1894)$ quien los relacionó en uno de sus trabajos en 1838, mientras estudiaba formaciones gramaticales con paréntesis. Sin embargo, ya eran conocidos por *Leonhard Paul Euler* alrededor de 1751, al asociarlos a triangulaciones de polígonos convexos [21].

Se plantean 3 aplicaciones del Teorema del binomio y en cada una de ellas algunos ejercicios.

a. Cálculo de raíces.

Una de las aplicaciones que tiene el desarrollo del binomio es para el cálculo de raíces, dado que,

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{1+a} &= (1+a)^{\frac{1}{n}} \\
&= 1^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}(1)^{\frac{1-n}{n}}a + \frac{1-n}{n^2(2!)}(1)^{\frac{1-2n}{n}}a^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3(3!)}(1)^{\frac{1-3n}{n}}a^3 \\
&\quad + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n^4(4!)}(1)^{\frac{1-4n}{n}}a^4 + \ldots \\
&= 1 + \frac{1}{n}a + \frac{1-n}{n^2(2!)}a^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3(3!)}a^3 \\
&\quad + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n^4(4!)}a^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Para calcular la raíz enésima de un número cualquiera, se descompone el número en dos sumandos, de forma tal que el primero sea la mayor potencia perfecta del orden de la raíz y posteriormente se expresa como factor común.

Ejemplo: Cálculo de la raíz cuadrada de 30.

$$\begin{aligned}
\sqrt{30} &= \sqrt{25+5} \\
&= \sqrt{25(1+\frac{5}{25}} \\
&= 5\sqrt{1+\frac{5}{25}} \\
&= 5\left(1+\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 5\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1-2}{2^2(2!)}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{(1-2)(1-2(2))}{2^3(3!)}\left(\frac{1}{5}\right)^3 \ldots\right) \\
&= 5\,(1+0{,}1-0{,}005+0{,}0005\ldots) \\
&\approx 5\,(1{,}0955) \\
&\approx 5{,}4775
\end{aligned}$$

Determinar la raíz indicada en cada caso,

- $\sqrt{80}$

- $\sqrt[3]{35}$

- $\sqrt{145}$

b. Interés compuesto.

El *interés compuesto*, llamado también interés sobre interés, es aquel que al final del período capitaliza los intereses causados en el período inmediatamente anterior. En el interés compuesto el capital cambia al final de cada período, debido a que los intereses se adicionan al capital y sobre este nuevo monto se calculan los intereses para el siguiente período.

- Completar la siguiente tabla

Período n	Capital Inicial p	Interés I	Capital Final F
0	P	0	$F_0 = P + 0 = P$
1	P	iP	$F_1 = P + iP$ $F_1 = P\,(1+i)$
2	$P(1+i)$	$iP(1+i)$	$F_2 = P(1+i) + iP(1+i)$ $F_2 = P(1+i)(1+i)$ $F_2 = P(1+i)^2$
3			
4			

- La expresión general que permite determinar el valor futuro F, para un valor presente p, con una tasa de interés periódica i, luego de n períodos es ____________.

Ejemplo: Cálculo del valor futuro de una inversión.

Mercedes hace los siguientes depósitos en una cuenta de ahorros que le reconoce una tasa del $2,5\,\%$ efectiva trimestral: \$500000 dentro de 6 meses y $\$1'000000$ dentro de 9 meses. Determinar el saldo en la cuenta al final del segundo año.

Se determina el valor futuro de los dos depósitos, el primero genera unos intereses durante 6 trimestres y el segundo durante cinco trimestres, por lo tanto es valor futuro es igual a

$$\begin{aligned}
F &= 500000 \cdot (1+0{,}025)^6 + 1'000000 \cdot (1+0{,}025)^5 \\
&\approx 500000 \cdot (1{,}159693418) + 1'000000 \cdot (1{,}131408213) \\
&\approx 579846{,}7091 + 1'131408{,}213 \\
&\approx 1'711254{,}922
\end{aligned}$$

Por lo tanto el valor disponible en la cuenta al cabo de los dos años bajos las condiciones planteadas es de \$ 1'711.254,92

- Se realiza un depósito de \$ 2'500.000 en una entidad financiera que reconoce una tasa de interés del $1,1\,\%$ efectiva mensual. Determinar el saldo al final de un año.

- Determinar el valor de un depósito único el día de hoy para tener un saldo dentro de año y medio de \$ 5'000.000 si la tasa de interés es del $2\,\%$ efectiva trimestral.

- ¿Cuánto tiempo se debe esperar para que una inversión al $1,89\,\%$ mensual se incremente en un $40\,\%$?

- ¿Qué tiempo debe transcurrir para que una inversión se duplique con una tasa de interés del $3\,\%$ semestral?

c. El número $\boldsymbol{e}$

(Esta aplicación se propone para grado 11 de educación media)

La constante de Euler $\boldsymbol{e}$ es un número irracional de gran aplicabilidad en matemáticas, el cual aproximadamente es igual a 2,718281828.

El número e, conocido a veces como número de Euler o constante de Napier, fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático.

Es considerado el número por excelencia del cálculo, así como π lo es de la geometría y el número i, del análisis complejo. El simple hecho de que la función e^x coincida con su derivada hace que la función exponencial se encuentre frecuentemente en el resultado de ecuaciones diferenciales sencillas. Como consecuencia de ésto, describe el comportamiento de acontecimientos físicos regidos por leyes sencillas, como pueden ser la velocidad de vaciado de un depósito de agua, el giro de una veleta frente a una ráfaga de viento, el movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil o el cimbreo de un edificio metálico en caso de terremoto. De la misma manera, aparece en muchos otros campos de la ciencia y la técnica, describiendo fenómenos eléctricos y electrónicos (descarga de un condensador, amplificación de corrientes en transistores BJT, etc.), biológicos (crecimiento de células, etc.), químicos (concentración de iones, períodos de semidesintegración, etc.), y muchos más.

El número e, al igual que el número π y el número áureo φ, es un irracional, no expresable por la razón de dos enteros; o bien, no puede ser expresado con un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos. Además, es un número trascendente, es decir, que no puede ser obtenido mediante la resolución de una ecuación algebraica con coeficientes racionales.

El número e es un número real que se puede obtener al calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

donde n es un número natural.

Al desarrollar la potencia del binomio, aplicando el Teorema del Binomio se tiene:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}\\ &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1(1-\frac{1}{n})}{2!}+\frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\ldots\\ &\quad+\frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})}{n!}\end{aligned}$$

Cuando n tiende a infinito, los productos que están en los numeradores tienden a 1, por lo que se obtiene

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\ldots+\frac{1}{k!}\ldots$$

a. Determinar cada uno de los siguientes valores:

- $a_1 = (1+\frac{1}{1})^1 = 2,0$
- $a_2 = (1+\frac{1}{2})^2 =$
- $a_3 = (1+\frac{1}{3})^3 =$
- $a_4 = \qquad\qquad =$
- $a_5 = \qquad\qquad =$

b. Calcular el valor aproximado de e en cada caso,

- $1+\frac{1}{1!} = 2,0$
- $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!} =$
- $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} =$
- $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} =$
- $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} =$

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

El desarrollo del Teorema del Binomio pone en evidencia, una vez más, como la Matemática se ha ido construyendo a lo largo del tiempo a partir de inquietudes y contribuciones de diversas culturas.

El determinar el número de trayectorias reticulares existentes entre dos puntos de un retículo permite generar el Triángulo de Pascal, llegar a la fórmula del desarrollo del binomio y obtener los números de Catalan, así como generar una propuesta didáctica.

El Triángulo de Pascal es uno de los modelos numéricos más famosos en la historia de la Matemática, el cual se construye de forma sencilla pero provee una fuente, aparentemente inagotable, de propiedades que permiten establecer una hermosa correspondencia con las trayectorias reticulares y los coeficientes del desarrollo del Binomio de Newton.

Es deber de los docentes proponer alternativas que posibiliten el mejoramiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, que lleven al estudiante a despertar el interés por la matemática y a apropiarse del conocimiento de una manera amena y eficaz, un proceso en el que prevalezca el aprendizaje significativo y se vea la aplicabilidad de lo estudiado.

A partir del Triángulo de Pascal es posible generar otros arreglos numéricos que permiten conjeturar propiedades y relacionarlos con la solución de diversos problemas. Uno de ellos es el Triángulo Armónico de Leibniz.

Pueden elaborarse futuros trabajos de grado siguiendo la línea de este documento, realizando un enfoque combinatorio diferente al de trayectorias reticulares y desarrollando como aplicación otros números como lo son los de Stirling, o los números de Bell.

La estrategia metodológica del aprendizaje basado en problemas demanda planeación, tiempo y esfuerzo por parte del docente. Al finalizar las actividades, es conveniente evaluar el proceso realizado y reflexionar sobre los aciertos y los errores cometidos, llevando una bitácora de ello, para lograr un mayor éxito en las próximas aplicaciones.

Al aplicar la propuesta didáctica el docente no se debe limitar a ser un facilitador de la actividad, sino que a partir de su experiencia, debe intervenir con sus orientaciones, explicaciones y ejemplos oportunos, respetando los tiempos y creatividad de los estudiantes.

Bibliografía

[1] A. M. Cañadas, M. A. O. Angarita, A. N. Pulido and A. M. S. Arcos. On some linear extensions of a poset and compositions of multipartite numbers. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 18(2):97–123, 2010.

[2] M. Acevedo and M. Falk. *Recorriendo el Algebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Universidad Nacional- Colciencias, Santafé de Bogotá, 1997.

[3] M. Aigner. *A Course in Enumeration*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2007.

[4] J. Allen. *The First six book of the Elements of Euclid with notes*. Cushing y Jewett J Robinson, Baltimore, 1822.

[5] E. Bell. *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica, México, 2010.

[6] E. Bell. *Los grandes Matemáticos*. Losada, 2010.

[7] C. Boyer. *Historia de la Matemática*. John Wiley, New York, 1986.

[8] J. Casey. *The first six books of the Elements of Euclid*. Proyecto Gutenberg, London, 1885.

[9] J. Collette. *Historia de las Matemáticas*. Number v. 2. Siglo XXI de España Editores, 1993.

[10] J. Coolidge. The story of the binomial theorem. *The American Mathematical Monthly*, 56(3):147–157, Marzo 1949.

[11] B. Davey and H. Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, 2nd ed edition, 2002.

[12] M. de Educación Nacional. *Estándares Básicos de comprensión en Matemáticas.* MEN, 2006.

[13] L. Dickson. *History of the theory of numbers*, volume 2. Canegie Institution of Washington, Washington, 1920.

[14] W. Dunham. *Journey Throungh Genius: The Great Theorems of Mathematics*. Wiley Science Editions, 1990.

[15] A. Edwards. *Pascal's arithmetical triangle: the story of a mathematical idea*. JHU Press, 2002.

[16] D. Fowler. The binomial coefficient function. 103(1):1–17, Jan. 1996.

[17] P. Fox. *Cambridge University Library: The great collections.* Press syndicate of the university Cambridge, 1998.

[18] M. Gardner. *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. RBA Coleccionables, S. A., primera edition edition, 2007.

[19] V. Katz. *A History of Mathematics: An Introduction*. Featured Titles for History of Mathematics Series. Addison-Wesley, 2009.

[20] V. Katz and J. Silva. *Historia de la Matemática*. Calouste Gulbenkian.

[21] T. Koshy. *Catalan Numbers with Applications.* Elsevier, second edition edition, 2007.

[22] T. Koshy. *Elementary Number Theory with Applications.* Oxford University Press, 2009.

[23] A. Kumar. Mathematics in ancient india. *Resonance*, 7(4), Abril 2002.

[24] G. Lafrancesco. *Aportes a la didactica construtivista de las ciencias Naturales*. Libros y Libres S. A, 1997.

[25] C. Lincoln. *Estadística para las Ciencias Administrativas.* McGraw-Hill, 1999.

[26] C. Maza. Matemáticas en mesopotamia. www.bubok.es/libros/10528/.

[27] K. Morris. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, volume 1. Alianza, Madrid, 1972.

[28] J. Newman. *SIGMA El mundo de las Matemáticas*. Number v. 1. Ediciones Grijalbo, 1979.

[29] J. O'Connor and E. Robertson. Biografía de abu bekr ibn muhammad ibn al-husayn al-karaji. The MacTutor History of Mathematics archive. Universidad de Saint Andrews Scotland.

[30] J. O'Connor and E. Robertson. Indexes of biographies. The MacTutor History of Mathematics archive. Universidad de Saint Andrews Scotland.

[31] J. O'Connor and E. Robertson. The mactutor history of mathematics archive. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html.

[32] J. O'Connor and E. Robertson. The mactutor history of mathematics archive.
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Khayyam.html.

[33] J. Piaget. *Aprendizaje significativo: Un concepto subyacente*. Zahar Editores, 1971.

[34] M. Pérez. Una historia de las matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes, 2008.

[35] N. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences, 1964.

[36] D. Smith. *History of Mathematics*, volume I, II. Dover Publications Inc, 1906.

[37] R. Stanley. Catalan addendum. http://www-math.mit.edu/∼rstan/ec/.

[38] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press, 1997.

[39] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 1. Cambridge University Press, 1997.

[40] V. Uspensky. *Lecciones populares de matemáticas: Triángulo de Pascal*. Editorial MIR.