

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

CURSO DE FÍSICA

Ismael Lucas de Paiva

Alguns Aspectos do Tempo na Mecânica Quântica

Belo Horizonte

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

CURSO DE FÍSICA

Ismael Lucas de Paiva

Alguns Aspectos do Tempo na Mecânica Quântica

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

Orientador: Maria Carolina Nemes

Doutora em Física - USP

Co-orientador: Augusto César Lobo

Doutor em Física - UFMG

Belo Horizonte

2014

Paiva, Ismael Lucas

Alguns Aspectos do Tempo na Mecânica Quântica / Ismael Lucas

Paiva - 2014

92.p

Ciências Exatas. I.Título.

CDU teste

Ismael Lucas de Paiva

Alguns Aspectos do Tempo na Mecânica Quântica

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Maria Carolina Nemes

Doutora em Física - USP

Pablo Lima Saldanha

Doutor em Física - UFMG

Reinaldo Oliveira Vianna

Doutor em Física - UFMG

Resumo

Este trabalho é fruto de um esforço para melhor compreender a natureza do tempo na mecânica quântica. Ele consiste principalmente do estudo de três assuntos: uma teoria quântica não linear, a possibilidade da existência de curvas fechadas do tipo tempo (chamadas simplesmente de CTCs, do inglês Closed Timelike Curves) em teorias quânticas e o formalismo de dois estados.

O exemplo de teoria não linear para a mecânica quântica que se estudou foi a teoria de Weinberg. Essa teoria é interessante porque parece ser suficientemente geral, isto é, parece que ela poderia ser, de alguma maneira, a teoria por trás de qualquer teoria não linear para a mecânica quântica. Por isso, quando Gisin mostrou que ela implica em comunicação com velocidade superluminal, muitos passaram a considerar esse resultado como evidência da absoluta impossibilidade de não linearidade na quântica.

Contudo, os estudos que supõem a existência de CTCs em teorias quânticas introduzem não linearidade de uma forma diferente. Apesar disso, como mostramos, o modelo de Deutsch para CTCs, que a princípio apresenta uma maneira consistente de se realizar viagens no tempo, também conduz à comunicação com velocidade superluminal. Por outro lado, o modelo de CTCs por pós-seleção, que também é estudado neste trabalho, parece não conduzir a isso, embora essa seja uma questão ainda debatida na literatura.

Como esse último tópico envolve pós-seleção, é natural se introduzir o formalismo de dois estados devido a Aharonov. Esse formalismo implica na noção de retrocausalidade na mecânica quântica e tem conduzido a importantes descobertas, como a do conceito de valor fraco e a de uma intrigante possibilidade teórica de se construir uma máquina de translação no tempo.

Abstract

This work is the result of an effort towards a better understanding of the nature of time in quantum mechanics. It consists mainly of a study of three distinct subjects: a non-linear quantum theory proposed originally by Weinberg, the study of some quantum mechanical models for closed timelike curves (CTCs) and also the two-state vector formalism of Aharonov and collaborators.

The Weinberg theory is interesting because it seems to be sufficiently general, in a sense that it could be thought as a model for any nonlinear quantum mechanical theory. Because of this, when Gisin showed that it implies signalling, many scientists has regarded this result as an evidence of the impossibility of any kind of nonlinearity in quantum theories.

However, there are models for quantum mechanical CTCs that introduce non-linearity in a different manner. Nevertheless, as we have shown, the Deutsch CTC model, which at first seems to present a consistent way to perform time travelling to the past, also leads to signalling. On the other hand, postselected CTCs model, which is also studied in this work, does not seem to lead to signaling, although this is an issue still debated in the literature.

As this last topic involves postselection, it is natural to introduce the two-state vector formalism due to Aharonov. This formalism implies the notion of retrocausality in quantum mechanics and has led to important discoveries, such as the concept of weak values and an intriguing theoretical possibility of building a quantum time-translation machine, that we shall also discuss.

Agradecimentos

Sozinho, com certeza, eu não chegaria até aqui. Muitas são as pessoas que, diretamente ou indiretamente, foram importantes para a realização deste trabalho.

Começo agradecendo aos meus pais, Geraldo e Nádia, por tudo que me ensinaram até hoje e pelo apoio incondicional. Agradeço também aos meus irmãos, Rafael e Miriã, com os quais posso contar sempre. Esse agradecimento se estende a todos os meus tios, primos... Enfim, a toda a minha família. Agradeço a Deus por ter colocado pessoas tão especiais em minha vida.

Outra pessoa que foi muito importante para a realização deste trabalho foi a professora Maria Carolina Nemes. Infelizmente ela não está mais conosco, mas ela sempre me deu total liberdade de estudo e me ajudou sempre que precisei. Nunca me esquecerei da empolgação jovial que ela tinha para discutir e aprender física.

Agradeço também ao professor Augusto César Lobo, que tem sido paciente para me ensinar desde a minha graduação. Os seus ensinamentos vão muito além da física e da matemática. Não tenho nem palavras para agradecer toda a dedicação em minha formação acadêmica.

Agradeço a todos os amigos, que sempre me apoiaram. Agradeço também aos colegas da pós-graduação. Em especial, agradeço ao Clyffe e ao Pedro, grandes companheiros de estudos que muito me ajudaram.

Agradeço aos membros da banca pelo tempo despendido na leitura deste trabalho. Também agradeço a todos os funcionários do departamento de física da UFMG.

Finalmente, agradeço à UFMG e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	6
1 Introdução	8
2 A Representação de Estados Quânticos	13
2.1 Desenvolvimento histórico	13
2.2 A esfera de Bloch	16
2.2.1 Dinâmica sobre a esfera	20
3 A mecânica quântica não linear de Weinberg	21
3.1 Uma breve introdução ao formalismo da teoria de Weinberg	21
3.2 A implicação em comunicação com velocidade superluminal	25
4 Mecânica quântica na presença de CTCs	29
4.1 Matriz Densidade	29
4.1.1 Misturas próprias	30
4.1.2 Misturas impróprias	31
4.1.3 Representação de estados mistos	32
4.2 Alguns conceitos relativísticos	34
4.2.1 Teoria da relatividade especial	34
4.2.2 Teoria da relatividade geral	40
4.3 O modelo de Deutsch	44
4.3.1 Distinção determinística entre estados não ortogonais	49
4.3.2 Não purificação de alguns estados mistos de sistemas CTC	51

4.3.3	Comunicação com velocidade superluminal e paradoxos no modelo de Deutsch	54
4.4	CTCs por pós-seleção	56
4.4.1	Teleporte Quântico	56
4.4.2	O modelo geral de funcionamento de P-CTCs	57
4.4.3	Distinção entre estados não ortogonais	59
5	Formalismo de Dois Estados	61
5.1	Introdução ao Formalismo	61
5.2	Medição Fraca e Valor Fraco	63
5.3	Simetria Temporal	73
5.4	Máquina de translação no tempo	74
6	Conclusão e perspectivas futuras	80
	Referências Bibliográficas	83

Lista de Figuras

2.1	Representação de um estado puro na esfera de Bloch	19
3.1	Comportamento de $\dot{\varphi}$ com $\epsilon = 0,0001$	24
3.2	Comportamento de $\dot{\varphi}$ com $\epsilon = 1$	24
3.3	Comportamento de $\dot{\varphi}$ com $\epsilon = 10000$	25
3.4	Comportamento da esfera de Bloch na presença de $\hat{h}_{ \psi\rangle}$ para altos valores de ϵ .	26
4.1	Representação de um estado misto na esfera de Bloch	33
4.2	Representação do cone de luz num diagrama de espaço-tempo bidimensional . .	39
4.3	Curva fechada num espaço-tempo de Minkowski	39
4.4	Representação pictórica de uma curva fechada do tipo tempo no espaço-tempo curvo	44
4.5	Porta lógica com acesso a uma CTC	45
4.6	Diagrama esquemático do modelo de Deutsch	47
5.1	Diagrama de Ven que explicita a construção da regra ABL	63
5.2	Distribuição de probabilidade do sistema medidor no caso de uma medição usual	67
5.3	Distribuição de probabilidade do sistema medidor no caso de uma medição fraca de um sistema único sem pós-seleção	67
5.4	Distribuição de probabilidade de uma medição fraca de 10 sistemas sem pós-seleção	68
5.5	Distribuição de probabilidade de uma medição fraca de 5000 sistemas sem pós- seleção	68
5.6	Distribuição de probabilidade do sistema medidor no caso de uma medição fraca de um sistema único com pós-seleção	70
5.7	Distribuição de probabilidade de uma medição fraca de 5000 sistemas com pós- seleção	71

5.8	Distribuição de probabilidade do sistema medidor no caso de uma medição fraca com $\sigma = 1$ de um ensemble com 100 sistemas com pós-seleção	72
-----	---	----

1 Introdução

Qual a natureza do tempo? Essa pergunta tem sido formulada por muitas pessoas ao longo da história. Isso porque o tempo assume papel central em nossas experiências do dia a dia. Entendemos a nossa vida basicamente como uma sucessão de momentos. Mesmo assim, pouco podemos dizer em resposta à pergunta que abre essa introdução. Santo Agostinho disse sobre a natureza do tempo: “*se ninguém me perguntar, eu sei o que é; porém, se quero explicá-lo a quem me pergunta, então não sei*” [1].

Para muitos filósofos e cientistas, o tempo não seria *real*. De fato, Einstein disse certa vez que: “*A distinção entre passado, presente e futuro não passa de uma ilusão teimosa e persistente*” [2].

Isso, por um lado, parece caminhar na mesma direção de alguns trabalhos de lógica matemática que mostraram que, em estruturas axiomáticas para as diversas *teorias clássicas* da física (inclusive para a termodinâmica), o tempo pode ser “eliminado” dos axiomas, no sentido de que ele pode ser definido em termo de outros elementos da teoria [3, 4, 5, 6]. Assim, o tempo pode ser realmente entendido como apenas um *parâmetro externo*. Esse tipo de abordagem encontra respaldo em trabalhos de muitos pesquisadores modernos em uma abordagem *relacional* da física, como, por exemplo, os trabalhos de Barbour [7, 8].

Porém, aparentemente ninguém conseguiu mostrar que o tempo é eliminável em um sistema axiomático para a mecânica quântica, que é possivelmente a teoria mais fundamental sobre a realidade física conhecida. Algumas especulações sobre o motivo disso e algumas possíveis consequências serão abordadas mais adiante nesta Introdução.

Continuando a abordagem sobre o tempo e atentando para o seu papel na física, observa-se uma tendência prática de os fenômenos ocorrerem numa certa direção ou sentido. Essa tendência é entendida como a existência de uma *seta do tempo*. Contudo as leis conhecidas que regem a maioria desses fenômenos naturais são reversíveis temporalmente. Como, então, compreender esse fato? Essa é uma pergunta que não possui respostas simples. A visão que prevalece entre a maioria dos físicos é a de que esse comportamento decorre pelo fato de que, no passado, o estado do Universo era muito mais

ordenado (ou tinha uma entropia mais baixa). Assim, a probabilidade do Universo evoluir para um estado de maior entropia seria muito maior do que o contrário. Por exemplo, se executarmos um experimento no qual N dados são inicialmente colocados com uma mesma face para cima dentro de uma caixa e, posteriormente, a caixa é fechada, agitada e aberta novamente, a probabilidade das faces de cima dos dados formarem uma distribuição desordenada é muito maior do que a possibilidade dos dados apresentarem uma ordenação especial. Assim, a seta do tempo seria consequência não de alguma lei mais fundamental, mas do fato de as condições do universo primordial serem de baixíssima entropia (ou um grau elevadíssimo de “ordem”). Uma explicação para esse último fato (as condições iniciais extremamente especiais do Universo), no entanto, requer ainda um modelo cosmológico mais completo [9].

Pode-se ainda perguntar a respeito da questão da *medição* do tempo. Ora, podemos dizer que o tempo é medido por relógios. Mas o que é um relógio? A resposta padrão seria: um *fenômeno periódico arbitrário*. Mas como classificar um fenômeno como periódico sem o uso de um relógio? O que se faz é escolher um fenômeno cíclico e usá-lo como referência. Pode-se tomar, por exemplo, o movimento de um pêndulo. Mas, nesse caso, os períodos nas diversas oscilações consecutivas são iguais somente em primeira aproximação, pois a temperatura, a resistência do ar e a pressão atmosférica, entre outros fatores, alteram o “ritmo” do movimento do pêndulo. Mesmo que se reduza drasticamente esses efeitos externos, ainda assim o resultado seria apenas uma aproximação. Como, então, definir a *duração* de um evento? Essa foi uma das questões levantadas em 1898 por Poincaré [10]. Não existe uma solução inequívoca desse problema até os dias de hoje. Assim, as medições de tempo com relógios (assim como a medição de distâncias através de “régua”) variam continuamente à medida que se adquire uma compreensão mais fundamental da ciência e com a subsequente criação de relógios (e régua) mais precisas.

No período Napoleônico, uma barra de platina em um museu em Paris era o estado-da-arte para definir um *metro*, enquanto hoje ele é definido como a fração $1/299.792.458$ da distância atravessada pela luz no vácuo em 1 segundo – enquanto um segundo é definido como a duração de 9.192.631.770 períodos de um fóton emitido na transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental de um átomo de Césio 133. O avanço incessante da ciência da metrologia, com o aprofundamento do entendimento da física (tanto no plano teórico como experimental), leva a crer que essa sequência converge

para uma definição absoluta dessas quantidades. Mas poderíamos inverter esse processo lógico e afirmar (em uma atitude quase cínica), como alguns autores, que o que se está realmente fazendo é definir (e redefinir) conceitos como *espaço* e *tempo* para que nossas teorias sejam as mais *simples* possíveis. Isso parece nos afastar da ideia de Kant de que conceitos como espaço e tempo fazem parte de uma categoria imutável de juízos *apriorísticos*, de qual não seria possível escapar antes de formular qualquer noção racional sobre a realidade. De fato, a maior evidência contrária a essa visão pode ser atribuída a Einstein com o desenvolvimento da teoria da relatividade. A primeira questão apresentada por ele foi a seguinte: como definir *simultaneidade entre eventos separados espacialmente*? A resposta que ele deu a essa questão em 1905, baseado nos postulados da relatividade do movimento entre sistemas inerciais e da invariância da velocidade da luz no vácuo, difere do que conduz a intuição clássica. Essa resposta levou à criação da teoria da relatividade restrita. Desde então sabe-se sobre a relatividade da simultaneidade de eventos, isto é, eventos simultâneos em alguns referenciais inerciais, não são simultâneos em outros, sendo que a própria ordem em que elas ocorrem também depende do referencial.

A teoria da relatividade especial também mostrou que a estrutura do espaço-tempo apresenta propriedades contra-intuitivas que implicam na possibilidade de realização de viagens ao *futuro*. Já a possibilidade de viagens ao *passado* parece ser fisicamente impossível de acordo com a relatividade restrita, pois isso implicaria necessariamente em atingir velocidades superluminais, o que leva a inconsistências na teoria. No entanto, Einstein formulou, em 1915, a teoria da relatividade geral, que incorpora a gravitação como resultante da curvatura do espaço-tempo. Mais tarde, a partir de 1949, surgiram soluções das equações dessa teoria, como o Universo de Gödel [11], que possuem curvas fechadas do tipo tempo (CTCs), isto é, caminhos fechados no espaço-tempo curvo que podem ser percorridos com velocidade (local) inferior à da luz. Portanto, tais soluções permitiriam, *a priori*, viagens ao passado.

Isso fez com que muitos físicos (inclusive Einstein) acreditassem que tais soluções seriam provavelmente não-físicas, pois viagens ao passado possuem inúmeros problemas paradoxais, sendo o mais famoso deles o célebre “paradoxo do avô”, em que um viajante do tempo retorna ao passado e mata seu avô antes de ele ter conhecido sua avó. O paradoxo é evidente: o viajante não poderá vir a existir, de modo que também não poderá se tornar um viajante do tempo. Esse tipo de inconsistência serve como forte argumento para se descartar a realidade física de viagens ao passado.

Contudo, em 1991, Deutsch realizou um estudo computacional (tanto clássico quanto quântico) do problema e propôs um modelo supostamente consistente de CTCs sob o ponto de vista da mecânica quântica (MQ) [12]. Um dos principais resultados do presente trabalho, apresentado em [13], será o de questionar essa suposta consistência. Além desse modelo, também existem estudos de CTCs via MQ baseados no conceito de pós-seleção [14, 15, 16, 17]. Nesse caso, um sistema interage com um estado maximamente emaranhado, que é, depois disso, *pós-selecionado* no mesmo estado inicial. Esta pós-seleção faz com que o par emaranhado se comporte efetivamente como uma CTC. Outro aspecto muito interessante sobre viagens no tempo foi levantado através dos estudos baseados no formalismo de dois estados de Aharonov e colaboradores [18, 19, 20, 21]. Esses estudos apresentaram uma proposta teórica de construção de uma “máquina de translação no tempo” via MQ [22, 23].

Assim, uma das justificativas que revelam a pertinência de estudos sobre assuntos como os que são tratados no presente trabalho envolve justamente a necessidade de se entender melhor a questão do tempo na MQ.

Foi dito anteriormente a respeito do caráter eliminável do tempo em estruturas axiomáticas para a física clássica, algo que ninguém demonstrou que também ocorre na física quântica. A razão para isso pode ser justamente a existência de um dos fenômenos fundamentais dessa teoria: a *medição*. Levando em conta somente a *evolução unitária*, que é outro ingrediente fundamental da teoria, o papel do tempo seria o mesmo apresentado na física clássica, o que permitiria a eliminação de seu conceito dos axiomas. Porém, a medição surge como um “fator complicador”. Seria essa uma evidência de que o tempo não pode ser eliminado e de que ele, na verdade, reflete uma realidade física subjacente mais profunda? Será também uma evidência de que o processo da medição é um fenômeno ontológico da Física Quântica?

Este trabalho não tem a pretensão de resolver essas difíceis questões levantadas aqui. O que se pretende, além da apresentação do resultado que obtivemos [13], é rediscutir algumas dessas questões à luz de resultados modernos e de chamar atenção para a necessidade de se entender melhor a questão do tempo (ou espaço-tempo) na MQ.

O trabalho começa com o estudo de representação de estados quânticos no capítulo 2. Nele, é apresentada a geometria da esfera de Bloch e um exemplo de dinâmica nessa esfera. A seção 4.1 também poderia estar inserida dentro desse capítulo, mas, como

o assunto estudado nela será mais discutido a partir do capítulo 4, optou-se por não apresentá-lo no capítulo 2.

Em seguida, no capítulo 3, introduz-se a mecânica quântica não linear de Weinberg e contrasta-se um exemplo de evolução de estado nessa teoria com o que foi apresentado no capítulo anterior. Ainda, explica-se como a teoria de Weinberg permite comunicação com velocidade superluminal.

No capítulo 4, além da já mencionada introdução do conceito de matriz densidade, apresenta-se algumas ideias relativísticas e estuda-se um pouco sobre MQ na presença de curvas fechadas do tipo tempo (CTCs). Nesse estudo, considerou-se dois modelos: o criado por Deutsch em 1991, baseado numa equação de consistência cinemática, e um que é implementado por pós-seleção. É mostrado que o primeiro deles é inconsistente da maneira originalmente proposta, enquanto não se pode afirmar isso sobre o segundo.

Já no capítulo 5, é apresentado o formalismo de dois estados, seguido pelo estudo do conceito de valor fraco e encerrando com a exposição de uma máquina de translação no tempo na MQ.

Por fim, uma última discussão é realizada no capítulo 6.

Quanto às convenções, adota-se em todo o texto (com exceção da seção 2.1) unidades tais que $\hbar = 1$. Ainda, se α é um número complexo, o seu conjugado é denotado por $\bar{\alpha}$. Além disso, os vetores de posição, que em geral são representados por $|x\rangle$, são denotados por $|q(x)\rangle$. A aplicação do observável de posição $\hat{Q}$ nesse vetor é, então, escrita como $\hat{Q}|q(x)\rangle = x|q(x)\rangle$.

Também, sempre que possível, omite-se o símbolo de somatório. Então, toda vez que aparecerem expressões com índices covariantes e contravariantes repetidos, deve-se subentender que existe uma soma sobre esses índices. Por exemplo, se ψ^i representa as componentes de um vetor numa certa base, então $\psi^i\bar{\psi}_i$ representa a soma do quadrado do módulo de todas as componentes (e não simplesmente o quadrado do módulo da i -ésima componente).

Para indicar que não existe soma em caso de índices covariantes e contravariantes repetidos, eles serão escritos entre parênteses. Dessa maneira, o módulo quadrado da componente ψ^i de um vetor é $\psi^{(i)}\bar{\psi}_{(i)}$.

As demais convenções adotadas estão explicadas ao longo do texto.

2 A Representação de Estados Quânticos

Neste capítulo, será realizada uma introdução às ideias e aos conceitos básicos do formalismo usual da mecânica quântica. Estes conceitos serão utilizados no desenvolvimento do nosso trabalho e serão discutidos de maneira mais aprofundada mais a frente, nos capítulos seguintes.

2.1 Desenvolvimento histórico

A mecânica quântica (MQ) foi desenvolvida ao longo das primeiras décadas do século passado, causando grande impacto na maneira de se pensar sobre a ciência e na forma de se compreender a natureza em geral.

A teoria foi criada (ou descoberta?) inicialmente por dois caminhos diferentes: a mecânica matricial de Heisenberg e a mecânica ondulatória de Schrödinger. Em 1900, Planck propôs a quantização da troca energética entre uma cavidade e o campo eletromagnético em equilíbrio térmico dentro dessa mesma cavidade para explicar o espectro radiativo de um corpo negro. Em 1905, Einstein propôs que a radiação eletromagnética é sempre quantizada (em qualquer situação) para explicar o efeito fotoelétrico. Foi utilizando dessas ideias que, mais tarde, em 1912, Bohr propôs o seu famoso modelo para o átomo de hidrogênio, no qual conjecturou que os elétrons possuíam níveis discretos de energia. Influenciado pelo trabalho de Bohr, Heisenberg, em 1925, revolucionou o estudo da mecânica atômica ao propôr que se substituisse a coordenada de posição (e momento) do elétron por uma matriz. Na época, não era tão comum os físicos estudarem álgebra de matrizes e, na realidade, foi Max Born, professor de Heisenberg, quem reconheceu que o objeto matemático ao qual o seu aluno se referia era uma matriz infinita.

Foi a partir dessa construção que Heisenberg foi capaz de deduzir a sua bem conhecida relação de comutação

$$[\hat{Q}(t), \hat{P}(t)] = i\hbar\hat{I}. \quad (2.1)$$

A mecânica matricial de Heisenberg foi a primeira forma com que surgiu a MQ

propriamente dita. De maneira muito similar à mecânica clássica analítica, a dinâmica do sistema, no caso em que o operador $\hat{Q}$ não depende explicitamente do tempo, é dada pela equação

$$\frac{d}{dt}\hat{Q}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{Q}(t)], \quad (2.2)$$

sendo $\hat{H}$ a matriz hamiltoniana associada ao sistema. Uma equação de dinâmica similar pode ser obtida substituindo-se $\hat{Q}$ por $\hat{P}$ na equação acima.

É interessante observar que essa construção enfatiza as transições entre os níveis de energia. Wolfgang Pauli utilizou essa formulação para calcular o espectro do átomo de hidrogênio. No entanto, essa formulação era demasiadamente complicada para computar o espectro de sistemas mais genéricos. O desenvolvimento por Schrödinger da mecânica ondulatória a partir da concepção da dualidade onda-partícula (proposta por de Broglie) garantiu aos físicos um formalismo mais fácil e com uma estrutura matemática mais familiar (equações diferenciais parciais lineares). De fato, em 1925, após apresentar um seminário a respeito das ideias de de Broglie e ao seguir a sugestão de um ouvinte de que poderia existir uma equação de onda cujas soluções seriam as “ondas de de Broglie”, Schrödinger encontrou a sua célebre equação. Primeiramente, ele obteve uma equação relativística (que mais tarde seria redescoberta por Klein e Gordon), para depois obter a sua conhecida equação não relativística para uma função de onda ψ

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{r}, t)\psi = \hat{H}\psi, \quad (2.3)$$

sendo $\hat{H}$ o hamiltoniano do sistema, o análogo quântico da função hamiltoniana da mecânica analítica, V o potencial ao qual o sistema é submetido e m a massa associada à partícula.

Inicialmente, Schrödinger pensou que essa equação retratava processos físicos vibratórios reais, que poderiam representar diretamente a densidade de carga dos elétrons nos átomos. Mesmo que a interpretação ainda não fosse a definitiva, a mecânica ondulatória de Schrödinger, ao contrário da teoria desenvolvida por Heisenberg, foi rapidamente difundida e muito aplicada.

No ano seguinte, em 1926, Max Born criou a interpretação probabilística para a função de onda. Não demorou muito para que Schrödinger demonstrasse que as duas abordagens (a matricial de Heisenberg e a ondulatória feita por ele mesmo) eram equivalentes. Ambos os formalismos descreviam os mesmos objetos e, portanto, poderiam ser considerados como diferentes linguagens para descrever os mesmos sistemas quânticos.

Dirac e Jordan criaram, então, um formalismo intrínseco muito elegante (conhecido como teoria das transformações), no qual a equivalência das duas abordagens ficava evidente. Essa formulação é utilizada pelos físicos até hoje. Dirac introduziu a sua célebre notação de “bras” e “kets” e os elementos principais da teoria passaram a ser os vetores de estado e os operadores hermitianos (que são os “observáveis” da teoria). Muito ainda foi discutido (discussão que perdura até os dias atuais) a respeito da *interpretação* dos objetos quânticos. Na maioria dessas interpretações, considera-se que o vetor de estado (ou a função de onda) é o objeto que contém o *máximo* de informação que se pode ter sobre um sistema quântico.

Uma questão muito debatida é a que diz respeito à ontologia do vetor de estado. Não existe consenso sobre se esse objeto é ontológico ou apenas uma ferramenta epistêmica, no sentido do vetor de estado descrever (ou não) a “realidade” de um sistema quântico (seja lá o que isso quiser dizer) ou se esse objeto matemático traduzir apenas a *informação* a respeito da probabilidade de se obter determinados resultados ao serem conduzidas determinadas medições sobre o sistema. Por mais interessante e ainda atual que seja esse assunto, ele *não* é o objeto de interesse principal do presente trabalho.

A evolução temporal de um vetor de estado é dada por

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle, \quad (2.4)$$

sendo que o operador unitário $\hat{U}(t)$ satisfaz a seguinte equação:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U} = \hat{H} \hat{U}. \quad (2.5)$$

A evolução descrita acima é equivalente à equação de Schrödinger e é determinística, assim como ocorre com sistemas clássicos, que são regidos pelas Leis de Newton. Contudo, existe um outro “ingrediente” na física quântica que altera drasticamente esse cenário: a medição de um observável. Isso porque, caso o sistema medido não esteja num estado que seja auto-vetor do observável, ocorre um fenômeno que ficou conhecido como “colapso da função de onda”, no qual o estado do sistema é alterado instantaneamente e de forma intrinsecamente aleatória para um dos auto-estados do observável em questão.

Isso parece introduzir uma assimetria temporal na evolução do sistema quântico. Novamente, dependendo da inclinação filosófica com a qual se interpreta a MQ, existem também diferentes interpretações para o fenômeno do colapso. Aqueles que acreditam que o vetor de estado representa a “realidade” do sistema quântico, tendem a pensar que o

colapso é real e que ele deve ser melhor explicado ou, então, postulado como elemento fundamental da teoria. Já para aqueles que acreditam na versão epistêmica para a função de onda, o colapso não representa nenhum tipo de problema, pois seria apenas uma mudança na informação que um observador tem sobre o sistema, não correspondendo, portanto, a nenhuma realidade física subjacente.

Novamente, deve-se frisar que o escopo deste trabalho não é debruçar sobre essas questões delicadas, a não ser para formular a opinião de que uma futura resolução dessas questões seria de extrema importância para o desenvolvimento de uma maior compreensão da MQ (e não somente de interesse filosófico, portanto). Em especial, isso virá à tona quando se discutir certas implicações relativísticas da MQ mais a frente.

Nas próximas seções, alguns objetos adicionais importantes para uma compreensão mais aprofundada da estrutura da MQ serão estudados.

2.2 A esfera de Bloch

Será, agora, feita uma pequena introdução à geometria de espaços de estados quânticos e, com isso, construir-se-á uma representação para sistemas de dois níveis.

Seja $W^{(n+1)}$ um espaço de Hilbert de dimensão complexa $n + 1$ (portanto isomórfo a um espaço real de dimensão $2n + 2$) e $\mathcal{O}$ a sua origem. Se $|\psi\rangle$ for um vetor de estado arbitrário pertencente a $W^{(n+1)}/\mathcal{O}$ e $\{|u_\sigma\rangle\}$ for uma base ortonormal desse espaço, pode-se escrever de maneira única

$$|\psi\rangle = |u_\sigma\rangle \langle u_\sigma|\psi\rangle = |u_\sigma\rangle \psi^\sigma. \quad (2.6)$$

Como cada coeficiente ψ^σ é um número complexo, existem $x^\sigma, y^\sigma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\psi^\sigma = x^\sigma + iy^\sigma, \quad (2.7)$$

sendo i a unidade imaginária.

Por causa da interpretação probabilística para as componentes dos vetores, um subconjunto de vetores de $W^{(n+1)}$ de grande interesse físico são os vetores *normalizados*, isto é, os vetores que satisfazem a condição: $\langle\psi|\psi\rangle = \bar{\psi}_\sigma\psi^\sigma = 1$. Utilizando a expressão (2.7), pode-se reescrever essa condição da seguinte maneira

$$x_\sigma x^\sigma + y_\sigma y^\sigma = 1. \quad (2.8)$$

Assim, vê-se claramente que esse subconjunto equivale a uma hipersfera de raio unitário de dimensão real $2n+1$, denotada por $S^{(2n+1)}$. Através dessa identificação pode-se denotar a inclusão: $S^{(2n+1)} \subset W^{(n+1)}$.

Ainda, sabe-se que dois estados normalizados que diferem apenas por uma fase complexa global são fisicamente equivalentes. Isso permite definir a seguinte relação de equivalência $\sim$ em todo o $W^{(n+1)}/\mathcal{O}$: $|\psi\rangle \sim |\varphi\rangle$ se $\exists \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ tais que $|\psi\rangle = \lambda e^{i\alpha} |\varphi\rangle$.

A existência dessa relação particiona o espaço de estados em partes disjuntas, denominadas *classes de equivalência*. O quociente de $W^{(n+1)}/\mathcal{O}$ pela relação $\sim$ é o espaço projetivo (ou o espaço de raios) $\mathbb{CP}(n)$, que tem dimensão complexa n (e dimensão *real* $2n$). Pode-se também restringir a atenção ao subconjunto de estados normalizados de $W^{(n+1)}$, ou, pela inclusão, restringir a atenção a S^{2n+1} . A relação de equivalência $\sim$ restrita a esse espaço (que será designada por $\sim_S$) torna-se apenas: $|\psi\rangle \sim_S |\varphi\rangle$ se $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\psi\rangle = e^{i\alpha} |\varphi\rangle$. Dessa maneira, o espaço de raios $\mathbb{CP}(n)$ pode também ser entendido como o quociente de S^{2n+1} por $\sim_S$.

Então, cada ponto no espaço projetivo representa todos os estados equivalentes a um estado normalizado $|\psi\rangle$ a menos de uma fase complexa global. Existe, portanto, uma projeção $\Pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}(n)$ que “leva” cada elemento de S^{2n+1} em sua respectiva classe de equivalência em $\mathbb{CP}(n)$. As fases complexas globais são interpretadas como fibras (com topologia circular) em cada ponto de $\mathbb{CP}(n)$. Assim, pode-se também pensar em S^{2n+1} como a união dessas fibras.

É possível mostrar [24] que o espaço $\mathbb{CP}(n)$ “herda” a estrutura do espaço vetorial hermitiano $W^{(n+1)}$, uma estrutura *simplética* e, portanto, com noção bem definida de “área” ou “hipervolume” formalmente idêntica à estrutura simplética que o espaço de fase da mecânica analítica clássica possui. Assim, surpreendentemente, a projeção da evolução temporal da dinâmica unitária sobre $\mathbb{CP}(n)$ é uma dinâmica hamiltoniana.

No entanto, diferentemente do caso clássico, o espaço de raios quântico herda também de $W^{(n+1)}$ uma estrutura euclideana. Isto é, existe uma métrica Riemanniana definida sobre $\mathbb{CP}(n)$ que induz uma noção bem definida de distância entre dois pontos arbitrários do espaço de raios, distância essa que é preservada pela evolução unitária. De fato, dadas duas curvas $|\psi(t)\rangle$ e $|\varphi(t)\rangle$ em $W^{(n+1)}$, segue da evolução unitária que o produto interno hermitiano é *preservado*, no sentido de que

$$\frac{d}{dt} (\langle \psi(t) | \varphi(t) \rangle) = 0. \quad (2.9)$$

Fisicamente, isso significa que a *probabilidade* de transição entre esses dois estados é também preservada. Em particular, fazendo $|\psi(t)\rangle = |\varphi(t)\rangle$, observa-se também que a *norma* dos vetores é mantida constante ao longo do “movimento”. Um outro ponto muito importante a ser destacado é o fato de que, embora a fase global de um vetor de estado não tenha sentido físico (isto é, não é passível de ser medida), a *diferença* de fase entre dois vetores *possui* sentido físico. De fato, dados vetores $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ projetados em diferentes pontos do espaço de raios, a diferença intrínseca de fases entre os dois vetores é dada por $\arg(\langle\psi|\varphi\rangle)$ [25]. Pode-se inclusive definir uma *conexão* no fibrado S^{2n+1} , estabelecendo que, dados dois vetores $|\psi\rangle$ e $|\psi + d\psi\rangle$ projetados sobre pontos infinitesimalmente próximos de $\mathbb{CP}(n)$, a diferença de fase entre eles é *nula* se

$$\arg(\langle\psi|\psi + d\psi\rangle) = 0. \quad (2.10)$$

A conexão permite, então, introduzir o conceito de *transporte paralelo* em S^{2n+1} ao longo de uma curva $|\psi(s)\rangle$ quando

$$\langle\psi(s)| \frac{d}{ds} |\psi(s)\rangle = 0 \quad (2.11)$$

ao longo da curva.

A última equação define uma família de *geodésicas* no fibrado S^{2n+1} , cada uma projetada em uma mesma curva de $\mathbb{CP}(n)$. Cada uma dessas curvas é denominada *levantamento geodésico* da curva no espaço de raios. Um levantamento geodésico não tem sentido físico intrínseco – apenas a família de levantamentos possui.

Ainda, nota-se que a equação (2.9) diz que a *fase relativa* é também preservada ao longo do movimento. Outro ponto importante a ser salientado é que, mesmo que a projeção de um movimento geodésico seja uma curva *fechada* no espaço de raios, em geral, o levantamento geodésico *não* é fechado. Essa falta de *holonomia* é medida em cada ponto do espaço de raios pela diferença de fase obtida ao se percorrer uma curva fechada infinitesimal em torno do ponto. Essa quantidade é exatamente a *curvatura* da conexão e é a estrutura matemática por traz da chamada *fase geométrica* ou *fase não-integrável* de Berry-Anandan-Aharonov-Pancharatnam [26, 27] e de teorias do tipo de Yang-Mills para o modelo padrão.

Realizada essa breve exposição sobre geometria de espaços de estado de dimensão arbitrária, voltar-se-á agora ao objetivo inicial de se construir uma representação para sistemas quânticos de dois níveis, que é o caso no qual $n = 1$.

Como foi visto, pode-se considerar apenas pontos sobre $\mathbb{CP}(1)$. Aqui, é conveniente substituir as coordenadas usuais, dadas pela expressão (2.6), por coordenadas projetivas, isto é, para $\psi^0 \neq 0$,

$$|\psi\rangle \sim |u_0\rangle + \xi |u_1\rangle, \quad (2.12)$$

com $\xi = \psi^1/\psi^0$. De outra forma, para se ficar restrito a S^3 , tem-se

$$|\psi\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}} (|u_0\rangle + \xi |u_1\rangle). \quad (2.13)$$

Seja como for, percebe-se que basta apenas um número complexo para se identificar o estado puro de um sistema quântico de dois níveis. O caso em que $\psi^0 = 0$ (e, portanto, $\psi^1 = 1$) é o único que não é definido neste plano complexo. Ele é o chamado “ponto no infinito”).

Existe uma bem conhecida bijeção entre os pontos de $\mathbb{CP}(1)$ e a superfície de uma esfera bidimensional conhecida como *projeção estereográfica*, que é expressa por

$$\xi = \tan(\theta/2) e^{i\varphi}, \quad (2.14)$$

sendo θ e φ as coordenadas esféricas usuais. Essa esfera é denominada de *esfera de Bloch* (e é também conhecida como esfera de Riemann ou esfera de Poincaré). Na figura a seguir, pode-se ver claramente como todos os pontos de um plano complexo (mais o ponto no infinito) podem ser projetados nela. Em particular, o ponto A é projetado no ponto B .

Com isso, um estado $|\psi\rangle$ de um sistema de dois níveis qualquer (que a partir

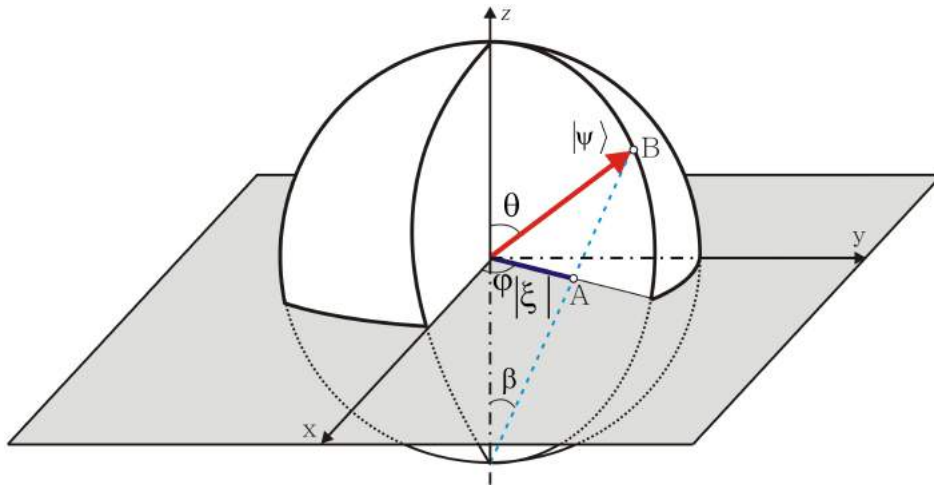


Figura 2.1: Representação de um estado puro na esfera de Bloch

de agora será denotado por $|n(\theta, \varphi)\rangle$ pode ser escrito como

$$|\hat{n}(\theta, \varphi)\rangle = \cos(\theta/2) |u_0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2) |u_1\rangle. \quad (2.15)$$

Ainda, não é difícil notar que estados ortogonais são pontos *antípodos* da esfera e também que $|u_0\rangle$ é o pólo norte e $|u_1\rangle$ o pólo sul. Será utilizada também a definição $|\hat{n}(\theta, \varphi)\rangle \equiv |\hat{n}(\pi - \theta, \varphi + \pi)\rangle$ para o vetor de estado antípoda ao vetor $|\hat{n}(\theta, \varphi)\rangle$.

Assim, construiu-se uma representação geométrica para sistemas de dois níveis em estados puros.

2.2.1 Dinâmica sobre a esfera

Agora, será estudado um exemplo de evolução simples para se observar como se dá a dinâmica na esfera de Bloch. Para começar, considere um hamiltoniano independente do tempo dado por

$$\hat{H} = E_0 |u_0\rangle \langle u_0| + E_1 |u_1\rangle \langle u_1|. \quad (2.16)$$

Esse hamiltoniano implementa evoluções cujas soluções, para consistência das equações de movimento, são do tipo $e^{i\alpha(t)} |\hat{n}(\theta(t), \varphi(t))\rangle$. Assim, a equação de Schrödinger implica que

$$i \frac{d}{dt} [e^{i\alpha} (\cos(\theta/2) |u_0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2) |u_1\rangle)] = e^{i\alpha} (E_0 \cos(\theta/2) |u_0\rangle + e^{i\varphi} E_1 \sin(\theta/2) |u_1\rangle). \quad (2.17)$$

Ao igualar as componentes dos vetores da base, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\dot{\alpha} \cos(\theta/2) - \frac{i}{2} \dot{\theta} \sin(\theta/2) = E_0 \cos(\theta/2) \\ -\dot{\alpha} \sin(\theta/2) - \dot{\varphi} \sin(\theta/2) + \frac{i}{2} \dot{\theta} \cos(\theta/2) = E_1 \sin(\theta/2) \end{cases} \quad (2.18)$$

Esse sistema é facilmente resolvido e possui a seguinte solução:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -E_0 \\ \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\varphi} = E_1 - E_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Observe que a “frequência global” é dada somente pelo valor da energia E_0 , que não possui significado físico independente, uma vez que o hamiltoniano é determinado fisicamente a menos de uma constante (e, portanto, somente a diferença dos autovalores é mensurável). Assim, é possível dizer que, mesmo que o movimento se dê de fato na esfera S^3 , a física (seja lá o que isso queira dizer) de alguma maneira acontecerá na projeção desse espaço em $\mathbb{CP}(1)$.

3 A mecânica quântica não linear de Weinberg

Como pode-se perceber pelo capítulo anterior, a equação de Shrödinger é uma equação diferencial linear. Isso quer dizer que uma combinação de duas soluções de um certo problema também é uma solução dele. Esse é justamente o significado do princípio da superposição. Para testar os limites desse conceito, Weinberg apresentou em 1989 uma teoria que pode ser considerada uma extensão minimamente não linear da MQ usual [28]. Assim, ele introduziu uma não linearidade, que poderia ser tão pequena quanto se quisesse, com o intuito de verificar o seu efeito em experimentos que poderiam, então, determinar com maior exatidão, a veracidade ou não, desse caráter da teoria.

Neste capítulo, será feita uma breve introdução a essa mecânica proposta por Weinberg, seguida de um estudo de um artigo publicado por Gisin em 1990, que mostrou que essa teoria não linear permitiria a realização de comunicação com velocidade superluminal [29].

3.1 Uma breve introdução ao formalismo da teoria de Weinberg

Weinberg introduziu a seguinte equação de movimento, que se parece formalmente com a equação de Schrödinger em um espaço de estados $W^{(n+1)}$ [28, 30]:

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = h(|\psi\rangle), \quad (3.1)$$

sendo que, em substituição a um operador hamiltoniano, tem-se uma aplicação *não-linear* $h : W^{(n+1)} \longrightarrow W^{(n+1)}$ dada por

$$h(|\psi\rangle) \equiv \hat{h}_{|\psi\rangle} |\psi\rangle. \quad (3.2)$$

Isso quer dizer que esse mapa não linear h pode ser escrito como um operador linear hermitiano que *depende explicitamente* do vetor no qual está sendo aplicado (daí segue

sua não linearidade). Como a evolução *não* é unitária, como na MQ usual, o produto interno *não* é preservado, em geral. Isto é,

$$\frac{d}{dt} (\langle \psi | \varphi \rangle) \neq 0 \quad \text{para} \quad |\psi\rangle \neq |\varphi\rangle. \quad (3.3)$$

No entanto, a dinâmica *preserva a norma*, como pode ser facilmente percebido:

$$\frac{d}{dt} (\langle \psi | \psi \rangle) = i \langle \psi | \left(\hat{h}_{|\psi\rangle}^\dagger - \hat{h}_{|\psi\rangle} \right) | \psi \rangle = 0. \quad (3.4)$$

Uma das vantagens dessa propriedade é o fato de a dinâmica poder ser estudada naturalmente na geometria da esfera $S^{2n+1} \supset \mathbb{CP}(n)$, ao invés de em todo o espaço $W^{(n+1)}$. No entanto, diferentemente da MQ linear, a métrica euclidiana *não* é preservada, por causa da não unitariedade da evolução no modelo de Weinberg. Fisicamente, isso significa que a distância entre dois pontos do espaço de raios não permanece, em geral, a mesma, o que, por sua vez, implica que as probabilidades de transições entre estados *não* são preservados. Esse fenômeno foi denominado de *mobilidade* na literatura [31, 32, 33].

Como exemplo, consideremos a função $h(|\psi\rangle)$ definida através do seguinte operador dependente de $|\psi\rangle$ para um único q-bit:

$$h(|\psi\rangle) = \hat{h}_{|\psi\rangle} |\psi\rangle = \left[\hat{\sigma}_3 + \epsilon \left(\frac{2\hat{\sigma}_3 \hat{\Pi}_{|\psi\rangle} \hat{\sigma}_3}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \hat{\sigma}_3 | \psi \rangle^2 \hat{I}}{\langle \psi | \psi \rangle^2} \right) \right] |\psi\rangle, \quad (3.5)$$

na qual se tem o projetor $\hat{\Pi}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle \langle \psi|$ e $\hat{\sigma}_3$ é uma das matrizes de Pauli, que serão vistas no próximo capítulo. Essa matriz, em especial, é dada por

$$\hat{\sigma}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

É interessante observar que, para pequenos valores de ϵ , $\hat{h}_{|\psi\rangle}$ nada mais é do que uma pequena perturbação não linear da evolução estudada no final do capítulo anterior com $\hat{H} = \hat{\sigma}_3$. Esse é, inclusive, o motivo da escolha de tal Hamiltoniano.

Ainda, nota-se que, expressando em uma base arbitrária $\{|u_\sigma\rangle\}$ um vetor $|\psi\rangle = |u_\sigma\rangle \psi^\sigma$, verifica-se que a função $h(\bar{\psi}_\sigma, \psi^\sigma)$ é claramente homogênea de grau zero. Weinberg demonstrou que equações desse tipo conduzem naturalmente a um movimento do tipo hamiltoniano em $W^{(n+1)}$. No entanto, como já observamos, a norma é preservada e, portanto, uma vez que o estado inicial seja normalizado, ele permanecerá sempre normalizado. Assim, o movimento *hamiltoniano* fica confinado sobre S^{2n+1} e pode-se

efetivamente escrever o hamiltoniano não linear de Weinberg de maneira mais simples como

$$h(|\psi\rangle) = \hat{h}_{|\psi\rangle} |\psi\rangle = \left[\hat{\sigma}_3 + \epsilon \left(2\hat{\sigma}_3 \hat{\Pi}_{|\psi\rangle} \hat{\sigma}_3 - \langle \psi | \hat{\sigma}_3 | \psi \rangle^2 \hat{I} \right) \right] |\psi\rangle. \quad (3.6)$$

Como $|\psi\rangle$ é normalizado, pode-se escrever $|\psi\rangle = |\hat{n}(\theta, \varphi)\rangle$. Também é possível escrever a matriz densidade do estado puro representado pelo projetor $\hat{\Pi}_{|\psi\rangle}$ como (ver seção 4.1 para maiores esclarecimentos):

$$\hat{\Pi}_{|\hat{n}(\theta, \varphi)\rangle} = |\hat{n}(\theta, \varphi)\rangle \langle \hat{n}(\theta, \varphi)| = \frac{1}{2} \left(\hat{I} + \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \right). \quad (3.7)$$

Com isso, $\hat{h}_{|\psi\rangle}$ pode ser facilmente apresentado na base das matrizes de Pauli:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{|\hat{n}(\theta, \varphi)\rangle} &= \hat{\sigma}_3 + \epsilon \left[\hat{\sigma}_3 \left(\hat{I} + \hat{\sigma}_j n^j \right) \hat{\sigma}_3 - \cos^2 \theta \hat{I} \right] \\ &= \hat{\sigma}_3 + \epsilon \left[\hat{I} + \hat{\sigma}_3 \left(i\hat{\sigma}_k \epsilon_{j3}^k + \hat{I} \delta_{j3} \right) n^j - \cos^2 \theta \hat{I} \right] \\ &= \hat{\sigma}_3 + \epsilon \left[(1 - \cos^2 \theta) \hat{I} + \hat{\sigma}_3 n^3 + i \left(i\hat{\sigma}_l \epsilon_{3k}^l + \hat{I} \delta_{k3} \right) \epsilon_{j3}^k n^j \right] \\ &= \hat{\sigma}_3 + \epsilon \left[\sin^2 \theta \hat{I} + \hat{\sigma}_3 n^3 - \hat{\sigma}_l \left(\delta_j^l \delta_{33} - \delta_3^l \delta_{3j} \right) n^j \right] \\ &= \hat{\sigma}_3 + \epsilon \left[\sin^2 \theta \hat{I} + 2\hat{\sigma}_3 n^3 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right] \\ &= \epsilon \sin^2 \theta \hat{I} - \epsilon \sin \theta (\hat{\sigma}_1 \cos \varphi + \hat{\sigma}_2 \sin \varphi) + (1 + \epsilon \cos \theta) \hat{\sigma}_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora, deve-se procurar soluções para a equação de evolução. Uma solução deve ser do tipo:

$$|\psi\rangle = e^{i\alpha} \left[\cos(\theta/2) |z_+\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2) |z_-\rangle \right]. \quad (3.9)$$

Com isso, pode-se, agora, resolver a equação de evolução do sistema. Igualando os coeficientes de cada elemento da base $\{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}$ e as partes real e imaginária de cada uma dessas partes, obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \epsilon \sin \theta \tan(\theta/2) - \epsilon \sin^2 \theta - \epsilon \cos \theta - 1 \\ \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\varphi} = 3\epsilon \cos \theta + 2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Comparando com (2.19), observa-se que, apesar de também poder ser projetada na esfera de Bloch, essa dinâmica parece ocorrer em S^3 , pois a fase global α de fato possui significado aqui, uma vez que agora a sua derivada temporal está relacionada a θ .

Apesar disso, a projeção sobre a esfera de Bloch mantém certa similaridade com a evolução dada pela quântica usual, com θ se mantendo constante durante o “movimento”. Contudo, $\dot{\varphi}$ passa a ser função de θ aqui. Para ilustrar, vê-se a seguir o

comportamento dessa frequência com $\epsilon = 0,0001$. Observe que a curva é somente decrescente no intervalo em que θ é definido. Isso não se trata de coincidência. De fato, no gráfico seguinte, em que se considerou $\epsilon = 1$, o mesmo é observado.

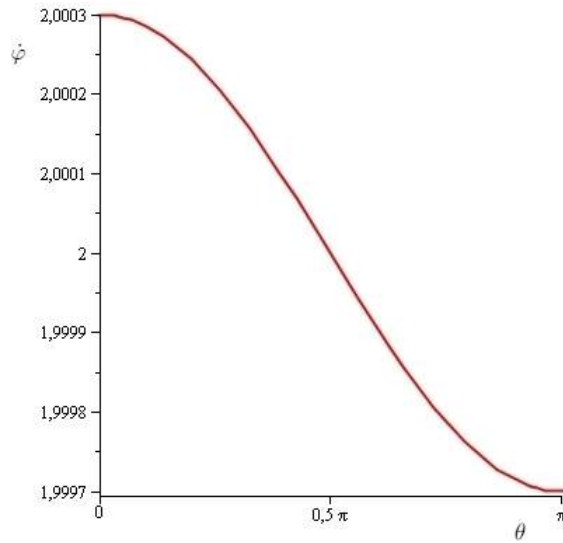


Figura 3.1: Comportamento de $\dot{\varphi}$ com $\epsilon = 0,0001$

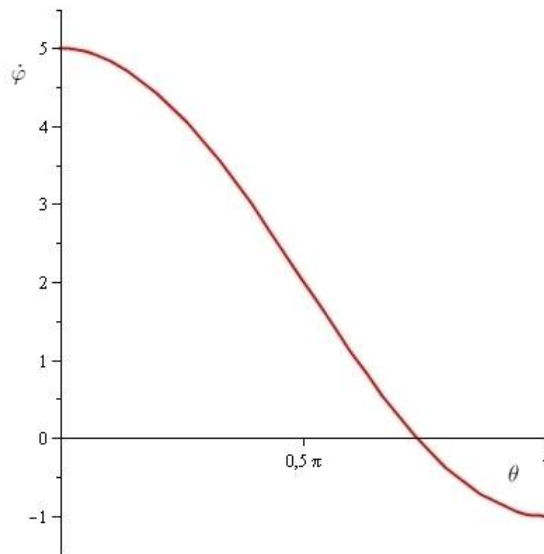


Figura 3.2: Comportamento de $\dot{\varphi}$ com $\epsilon = 1$

A diferença desse último gráfico para o anterior é o aumento da amplitude de variação da função, mas ela continua sendo decrescente no intervalo de definição.

Com o aumento da amplitude, um fenômeno curioso começa a acontecer: $\dot{\varphi}$ passa a assumir valores negativos a partir de um certo valor de θ . Isso quer dizer que,

enquanto uma parte da esfera gira num sentido, a outra gira no sentido contrário! Os casos extremos disso acontecem quando $\epsilon \gg 1$. Nesses casos, pode-se dizer que a parte linear de $\hat{\sigma}_3$ para de influenciar o movimento. O resultado disso pode ser visto no gráfico a seguir, em que $\epsilon = 10000$.

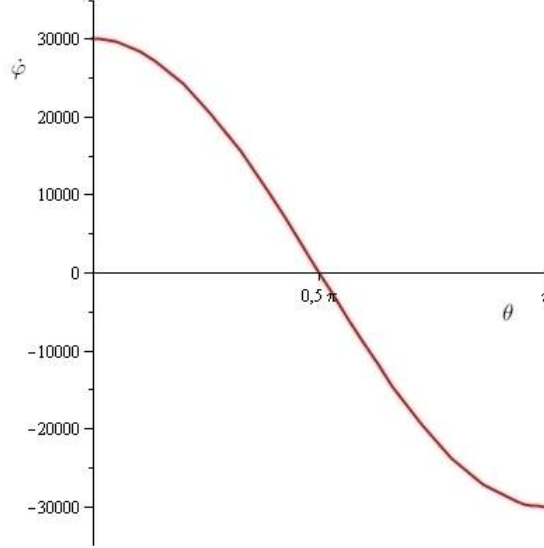


Figura 3.3: Comportamento de $\dot{\varphi}$ com $\epsilon = 10000$

O que se vê é que, enquanto a parte superior da esfera gira num sentido, a parte inferior gira no sentido contrário. Isso evidencia claramente a diferença entre uma dinâmica implementada pela teoria quântica usual e outra, pela teoria de Weinberg.

3.2 A implicação em comunicação com velocidade superluminal

Como se sabe, o fenômeno EPR costuma ser discutido como um jogo entre duas partes (Alice e Bob) que, juntas, criam um par de q-bits maximamente emaranhados e depois se separam, cada um carregando seu próprio q-bit e mantendo idealmente as correlações não-locais do sistema global. Apesar disso, na mecânica quântica usual, é bem conhecido o fato de que *não* é possível a realização de comunicação com velocidade superluminal. Contudo, em 1990, Gisin mostrou (para surpresa inclusive de Weinberg) que, se a mecânica não linear de Weinberg fosse válida, a realização de comunicação com velocidade superluminal *seria* possível [29]!

Para ver isso, será observado um resultado que segue ao se considerar a evolução implementada por $\hat{h}_{|\psi\rangle}$, aquele que foi apresentado na seção anterior. O que se concluirá independe do valor de ϵ , mas, para simplificar os cálculos, será considerado o caso em que $\epsilon \gg 1$. Com isso, pode-se desprezar a contribuição da parcela $\hat{\sigma}_3$. Assim, substitui-se a expressão de $\hat{h}_{|\psi\rangle}$ por

$$\hat{h}_{|\psi\rangle} = 2\hat{\sigma}_3\hat{\Pi}_{|\psi\rangle}\hat{\sigma}_3 - \langle\psi|\hat{\sigma}_3|\psi\rangle^2\hat{I}. \quad (3.11)$$

Assim, a dinâmica passa a ser dada simplesmente por

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = \sin\theta \tan(\theta/2) - \sin^2\theta - \cos\theta \\ \dot{\varphi} = 3\cos\theta \end{cases} \quad (3.12)$$

Então, como já foi discutido, a parte superior da esfera de Bloch “gira” num sentido, enquanto a parte inferior gira no outro.

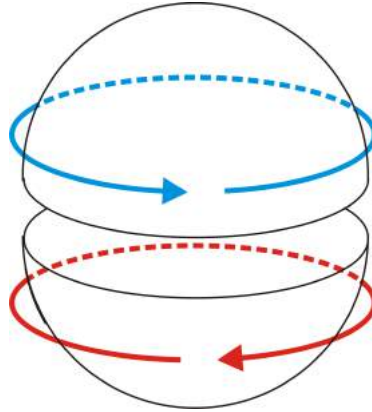


Figura 3.4: Comportamento da esfera de Bloch na presença de $\hat{h}_{|\psi\rangle}$ para altos valores de ϵ

É importante notar que pontos antípodas, apesar de girarem em sentidos contrários, evoluem com mesmo módulo de frequência:

$$\dot{\varphi}(\pi - \theta) = 3\cos(\pi - \theta) = -3\cos\theta = -\dot{\varphi}(\theta). \quad (3.13)$$

Voltando ao EPR, será suposto que Alice e Bob, antes de se separarem, criaram um protocolo para a transmissão de um bit clássico: eles concordaram entre si que medições no eixo $\hat{z}$ representarão o bit 0 e medições na direção $\hat{n}(\pi/4, 0)$ representarão o bit 1. Assim, se Alice quiser transmitir o bit 0, ela deverá medir a sua parte do estado emaranhado na direção do eixo $\hat{z}$ e, obviamente, o seu estado colapsará aleatoriamente

com igual probabilidade em $|z+\rangle$ ou $|z-\rangle$. Analogamente, se ela resolver enviar o bit 1, ela fará uma medição na direção $\hat{n}(\pi/4, 0)$ e obterá como resultado o estado $|+\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle$ ou o estado $|-\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle$, também com 50% de chance para cada um.

Além disso, será suposto que Alice e Bob compartilham não somente um sistema único, mas todo um *ensemble* de estados do mesmo tipo. Depois de escolher qual bit deseja enviar, Alice mede todo o *ensemble* na direção associada a ele. Assim, Bob estará com os seus q-bits nos estados $|z+\rangle$ e $|z-\rangle$ ou $|\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle$ e $|-\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle$.

Em seguida, ele aplica a evolução não linear dada por $\hat{h}_{|\psi\rangle}$ nas condições discutidas anteriormente. Ele deve aplicar o operador somente por um tempo igual a 1/4 do período de “movimento” de φ para $\theta = \pi/4$, ou seja, por

$$\Delta t = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\dot{\varphi}(\pi/4)} = \frac{\pi}{12\sqrt{2}}. \quad (3.14)$$

É fácil ver que os estados $|z+\rangle$ e $|z-\rangle$ são *pontos fixos* do movimento, enquanto os estados $|\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle$ e $|-\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle$ irão “girar” cada um em um sentido diferente e terminarão, respectivamente, após o período Δt , nos estados $|\hat{n}(\pi/4, \pi/2)\rangle$ e $|\hat{n}(3\pi/4, \pi/2)\rangle$. Esse é um exemplo do fenômeno da mobilidade na MQ não-linear.

Então, Bob deve medir o spin de seu seu ensemble na direção $\hat{y}$. Vamos observar o que acontece em cada uma das duas situações possíveis:

- Se ele tiver metade de seus sistemas no estado $|z+\rangle$ e metade no estado $|z-\rangle$, ele deverá obter 0 como resultado médio de suas medições. De fato, não é difícil perceber pela geometria da esfera de Bloch que qualquer um desses estados possui probabilidade igual a 1/2 de colapsar em $|y+\rangle$ ou $|y-\rangle$, o que resulta numa média de 0 para cada um.
- No caso de ele possuir, após a evolução, metade de seus sistemas no estado

$$|\hat{n}(\pi/4, \pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] |y+\rangle + \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] |y-\rangle \right\} \quad (3.15)$$

e metade no estado

$$|\hat{n}(3\pi/4, \pi/2)\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) |y+\rangle - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) |y-\rangle, \quad (3.16)$$

o valor médio das medições já não será 0. De fato, o valor médio das medições de $|\hat{n}(\pi/4, \pi/2)\rangle$ será:

$$\frac{1}{4} \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right]^2 - \frac{1}{4} \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right]^2 = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

enquanto o valor média das medições de $|\hat{n}(3\pi/4, \pi/2)\rangle$ será:

$$\frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Com isso, o valor médio esperado da medição do ensemble total será:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \approx 0,35$$

Assim, é possível distinguir as duas situações e, portanto, Alice consegue transmitir um bit clássico para Bob com velocidade superluminal. Isso torna a teoria *inconsistente*, porque faz com que ela apresente paradoxos típicos de viagens no tempo para o passado, como o caso do paradoxo do avô (já mencionado na Introdução). Um outro tipo de paradoxo que parece pertencer a uma classe de contradições de natureza diferente é aquele no qual parece surgir informação de maneira “espontânea”. Por exemplo, suponha que se envia a demonstração de um importante teorema para o matemático que o provou. Porém, ele recebe a mensagem antes de ter realizado a demonstração. Com isso, ele a aprende e a divulga. Dessa forma, a informação necessária para a prova do teorema teria surgido “do nada”.

O resultado de Gisin impressionou Weinberg bastante, de modo que ele passou a crer que qualquer elemento de não-linearidade na MQ levaria a inconsistências. Weinberg cunhou essa característica *meta-teórica* da MQ como “rigidez” axiomática da teoria, característica que ele considera *positiva*, pois demonstraria que o sistema axiomático fundamental da MQ seria suficientemente “rígido”, de maneira que, ao modificar algum axioma, toda a teoria passaria a ser inconsistente. Para ele, quanto mais “rígida” uma teoria, melhor ela seria. Isso significaria que a natureza não poderia ter “seguido” outra escolha lógica.

Vale a pena lembrar que Weinberg é historicamente um dos maiores proponentes da ideia de que seria possível uma “teoria final” da natureza [34].

4 Mecânica quântica na presença de CTCs

Em 1991, David Deutsch apresentou um estudo sobre circuitos computacionais na presença de CTCs, que é conhecido como D-CTC. Nesse trabalho, ele apresentou um modelo no qual viagens no tempo em MQ ocorrem (ao menos a princípio) de maneira consistente. Depois disso, surgiu também um modelo para CTCs baseado em pós-seleção. Esses modelos tem sido bastante estudados na literatura.

Neste capítulo, serão apresentados os supracitados modelos para CTCs em MQ. Mostrar-se-á também alguns resultados que seguem ao se assumir a validade deles. Antes disso, uma apresentação do conceito de matriz densidade e de algumas ideias relativísticas que serão úteis para um maior entendimento dos assuntos aqui tratados será feita.

4.1 Matriz Densidade

O conceito de matriz (ou operador) densidade surge quando existe, num sentido que ficará claro mais a frente, algum tipo de *ignorância* em relação ao sistema que está sendo estudado. Os estados representados por elas são denominados *estados misturados* ou, simplesmente, *misturas*.

Existem duas maneiras distintas de se apresentar o conceito de matriz densidade. A primeira é desenvolvida a partir do estudo de um *ensemble* quântico. Nessa construção, probabilidades “clássicas” são utilizadas juntamente com probabilidades “quânticas”. Já a segunda é realizada de maneira puramente quântica. Nela, considera-se o sistema a ser estudado como um subsistema do sistema “universo”, que é, então, fatorado como o produto tensorial do sistema objeto das investigações com um outro sistema inacessível fisicamente.

Assim, a representação mais genérica de um estado quântico é realizada através de matrizes densidade. Essa frase parece contradizer a afirmação de que os vetores de estado é que possuem a máxima informação que se pode ter sobre um sistema quântico, mas mostraremos que não é bem assim. Tanto a apresentação das duas abordagens para

os operadores densidade quanto a explicação da frase anterior serão apresentadas a seguir.

4.1.1 Misturas próprias

A matriz densidade própria foi um conceito introduzido por von Neumann em 1927 para estudos de *ensembles* cujos processos de produção não são bem conhecidos. Por exemplo, considere uma máquina que produz com probabilidade p_α um sistema no estado $|\psi_\alpha\rangle \in W^{(M)}$, com $\alpha \in \{0, 1, \dots, P-1\}$ e $W^{(M)}$ um espaço de Hilbert com dimensão M . Assim, suponha que um observador tenha acesso a um *ensemble* com um número N de sistemas produzidos por uma máquina desse tipo. Se N for suficientemente grande, a interpretação frequencista para a probabilidade diz que o número n_α de sistemas no estado $|\psi_\alpha\rangle$ é dado por $n_\alpha = p_\alpha N$. Então, nessas condições, o ensemble do tal observador estará particionado em P subconjuntos com n_α elementos cada. Seja $\hat{O} = |o_j\rangle o_j \langle o^j|$ um observável em $W^{(M)}$ escrito na base composta por seus autoestados. Ao se medir a grandeza associada ao observável $\hat{O}$ um número muito grande de vezes em sistemas do *ensemble* descrito acima, qual será a *média dos valores obtidos*? É imediato que será a média (ponderada pelas probabilidades “clássicas” p_α) dos *valores esperados* (“puramente quânticos”) de $\hat{O}$ para os estados $|\psi_\alpha\rangle$, dada por

$$\sum_{\alpha=0}^{P-1} p_\alpha \langle \hat{O} \rangle_{\psi_\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{P-1} p_\alpha \langle \psi_\alpha | \hat{O} | \psi_\alpha \rangle = \sum_{\alpha=0}^{P-1} p_\alpha \text{tr}(|\psi_\alpha\rangle \langle \psi_\alpha| \hat{O}), \quad (4.1)$$

sendo que $\text{tr} \hat{M}$ é definido como o traço do operador $\hat{M}$.

Introduz-se, então, o conceito de matriz (ou operador) densidade do ensemble:

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha=0}^{P-1} p_\alpha |\psi_\alpha\rangle \langle \psi_\alpha|. \quad (4.2)$$

Consequentemente, define-se o *valor esperado de ensemble* como:

$$[\hat{O}]_{\hat{\rho}} = \sum_{\alpha=0}^{P-1} p_\alpha \langle \hat{O} \rangle_{\psi_\alpha} = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{O}) \quad (4.3)$$

Com a construção realizada acima, é imediato que a matriz densidade apresenta as três seguintes propriedades:

- (Unitariedade do traço) $\text{tr} \hat{\rho} = 1$
- (Hermiticidade) $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$

- (Semipositividade) $\langle \hat{\rho} \rangle_{|\psi\rangle} \equiv \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle \in W^{(M)}$

Como $\hat{\rho}$ é hermitiano, o teorema espectral garante que existe uma base na qual ele pode ser escrito em forma diagonal, isto é, existe uma base $\{|\rho_i\rangle\}$ tal que

$$\hat{\rho} = |\rho_i\rangle \rho_i \langle \rho_i|. \quad (4.4)$$

Um *estado puro* $|\psi\rangle$ é representado pela matriz densidade $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$. Nesse caso, $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ e, então, $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$. Já para estados misturados, $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ e, utilizando a equação (4.4), $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_i (\rho_i)^2 < 1$.

4.1.2 Misturas impróprias

Nesta seção, a matriz densidade será introduzida por meio de uma construção puramente quântica.

Imagine uma situação na qual um observador tenha acesso a um sistema de dimensão N , representado por $W^{(N)}$. Será suposto, então, que exista um sistema quântico “universal” W_U de dimensão $M \cdot N$ que possa ser escrito como $W_U = W^{(M)} \otimes W^{(N)}$, sendo $W^{(M)}$ um sistema auxiliar que, por algum motivo, *não* pode ser acessado fisicamente pelo observador. Se $\hat{O}$ for um observável arbitrário em $W^{(N)}$ e $|\Psi\rangle$ for um estado puro arbitrário do sistema universal W_U , pode-se pensar no *valor esperado de $\hat{O}$ restrito ao sistema $W^{(N)}$* como $\langle \Psi | \hat{I} \otimes \hat{O} | \Psi \rangle$. Com isso, é possível introduzir o conceito de matriz densidade $\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}$ associada a cada estado puro em W_U restrito ao sistema $W^{(N)}$ como

$$\text{tr}(\hat{\rho}_{|\Psi\rangle} \hat{O}) \equiv \langle \Psi | \hat{I} \otimes \hat{O} | \Psi \rangle, \quad (4.5)$$

sendo que, numa certa base $\{|v_i\rangle\}$ de $W^{(N)}$, pode-se escrever

$$\rho_{|\Psi\rangle} = |v_i\rangle \rho_j^i \langle v^j|. \quad (4.6)$$

Definido dessa forma, o operador densidade também possui as três propriedades citadas na seção anterior, pois:

- (Unitariedade do traço) Para $\hat{O} = \hat{I}$, conclui-se da (4.5) que $\text{tr}(\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}) = 1$.
- (Hermiticidade) Como o traço é um *produto interno hermitiano* no espaço dos operadores, $\text{tr}(\hat{\rho}_{|\Psi\rangle} \hat{O})^\dagger = \text{tr}(\hat{\rho}_{|\Psi\rangle} \hat{O})$. Então: $\text{tr}(\hat{\rho}_{|\Psi\rangle} \hat{O}) = \text{tr}(\hat{O} \hat{\rho}_{|\Psi\rangle}^\dagger) = \text{tr}(\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}^\dagger \hat{O})$. Como $\hat{O}$ é um operador arbitrário, conclui-se que $\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}^\dagger = \hat{\rho}_{|\Psi\rangle}$.

- (Semipositividade) Seja $\{|u_\sigma\rangle\}$ uma base de $W^{(M)}$. Pode-se, então, escrever: $|\Psi\rangle = |u_\sigma\rangle \otimes |v_i\rangle \Psi^{\sigma i}$, sendo $\{|v_i\rangle\}$ a mesma base de $W^{(N)}$ utilizada na equação (4.6). Escolhendo $\hat{O} = |v_s\rangle \langle v^r|$, pode-se escrever, utilizando as equações (4.5) e (4.6) que $\rho_s^r = \bar{\Psi}_{\sigma s} \Psi^{\sigma r}$. Isso implica que $\rho_{(s)}^{(s)} = \sum_\sigma |\Psi^{\sigma s}|^2 \geq 0$. Como o traço é unitário, têm-se – em qualquer base:

$$0 \leq \rho_{(s)}^{(s)} \leq 1. \quad (4.7)$$

Seja $|\varphi\rangle$ um estado arbitrário de $W^{(N)}$. Então, na base que diagonaliza $\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}$, têm-se:

$$\langle \hat{\rho}_{|\Psi\rangle} \rangle_{|\varphi\rangle} = \langle \varphi | \rho_i \rangle \rho_i \langle \rho^i | \varphi \rangle = \rho_i |\langle \rho^i | \varphi \rangle|^2 \geq 0. \quad (4.8)$$

Portanto, $\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}$ é semipositivo definido.

Para mostrar que $\hat{\rho}_{|\Psi\rangle}$ está bem definido, basta notar que o procedimento acima sugere a seguinte aplicação que associa a cada operador que age em W_U um outro operador cuja ação se dá somente em $W^{(N)}$:

$$\begin{aligned} W_U \otimes \bar{W}_U &\longrightarrow W^{(N)} \otimes \bar{W}^{(N)} \\ \sum_i \lambda_i \hat{A}_i \otimes \hat{B}_i &\longmapsto \sum_i \lambda_i (\text{tr} \hat{A}_i) \hat{B}_i \end{aligned}$$

sendo que $\{\hat{A}_i\}$ e $\{\hat{B}_i\}$ são bases de $W^{(M)} \otimes \bar{W}^{(M)}$ e $W^{(N)} \otimes \bar{W}^{(N)}$, respectivamente, e $\bar{W}$ é o espaço dual de W . Define-se, então, o chamado *traço parcial*¹:

$$\sum_i \lambda_i (\text{tr} \hat{A}_i) \hat{B}_i \equiv \text{tr}_1 \left(\sum_i \lambda_i \hat{A}_i \otimes \hat{B}_i \right). \quad (4.9)$$

Enquanto no conceito de mistura própria a ignorância se apresenta em termos de probabilidades “clássicas”, aqui a ignorância está associada às correlações quânticas do sistema quântico total. De qualquer forma, como na MQ usual não é possível distinguir os dois tipos de matriz operacionalmente, sempre pode-se considerar que o estado misto (próprio ou impróprio) pode ser considerado como resultante de um traço parcial sobre um sistema com dimensão superior. Assim, a seguinte frase ainda é válida: o vetor de estado é a representação mais geral de um sistema quântico.

4.1.3 Representação de estados mistos

Pode-se também ampliar a representação geométrica da esfera de Bloch para estados misturados de sistemas de dois níveis. O estado de um sistema desse tipo é

¹De maneira similar, pode-se introduzir o conceito de traço parcial sobre o segundo subsistema.

identificado por um operador em $W^{(2)}$ (ou, simplesmente, uma matriz 2×2) que obedece as três propriedades citadas nas subseções anteriores. Qualquer operador hermitiano para um q-bit pode ser escrito como uma combinação linear (com coeficientes reais) das matrizes de Pauli mais o operador identidade:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0 &= \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Podemos escrever, então, que $\hat{\rho} = \rho^\alpha \hat{\sigma}_\alpha$. Mas, sabendo que $\text{tr} \hat{\rho} = 1$ e que as matrizes de Pauli possuem traço nulo, conclui-se que $\rho^0 = \frac{1}{2}$. Logo:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \hat{I} + \rho^k \hat{\sigma}_k,$$

com $k \in \{1, 2, 3\}$.

Como foi visto anteriormente, o fato de $\hat{\rho}$ ser semipositivo definido implica que os autovalores são não-negativos. Esse fato, por sua vez, implica que o determinante também é não-negativo. Portanto: $\rho^k \rho_k \leq \frac{1}{4}$. Se escolhermos, então, coeficientes r^k tais que $r^k = 2\rho^k$, conclui-se que

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left(\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \right), \quad (4.10)$$

com $\vec{r} \cdot \vec{\sigma} = r^k \hat{\sigma}_k$ e $\|\vec{r}\| \leq 1$. Além disso, $\vec{r}$ “localiza” na esfera de Bloch o ponto que representa o estado $\hat{\rho}$.

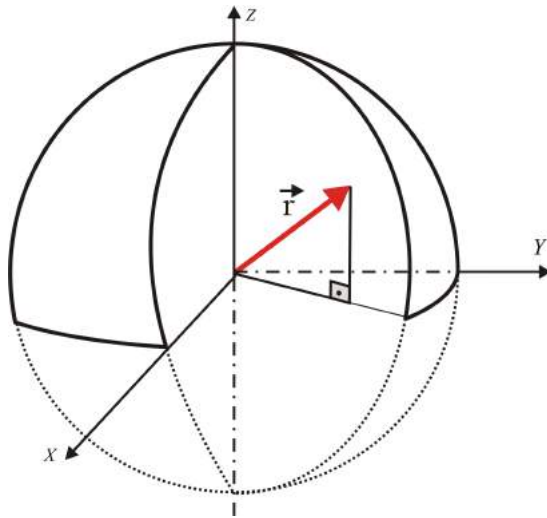


Figura 4.1: Representação de um estado misto na esfera de Bloch

Nessa extensão da representação de estados na esfera de Bloch, portanto, todos os pontos da esfera (e não somente os pontos sobre a superfície) representam estados de um qubit.

4.2 Alguns conceitos relativísticos

Aqui, são apresentados alguns conceitos relativísticos que são importantes para se ter uma melhor compreensão sobre o conceito de *curva fechada do tipo tempo* (CTC). A principal referência para toda esta seção é [35].

4.2.1 Teoria da relatividade especial

Em 1905, Einstein publicou um artigo que mudou completamente a maneira de se entender o tempo e o espaço. Ao invés de conceitos independentes, eles passaram a ser entendidos como partes de um todo, que é o espaço-tempo. Surgiu aí o que ficou conhecido como *teoria da relatividade especial* (ou restrita).

Nessa nova maneira de entender esses conceitos tão básicos da física, os eventos passaram a ser identificados por pontos $\vec{X} = \hat{e}_\mu x^\mu \in \mathbb{R}^4$, sendo $x^0 = ct$ e $\hat{e}_i x^i = \vec{x}$ ($i = 1, 2, 3$). Além disso, a maneira de se realizar transformações entre os referenciais inerciais teve que ser alterada. Isso porque observou-se que a equação de movimento de uma “partícula de luz” (um fóton) no vácuo deveria ser a mesma em qualquer um desses referenciais. Para que isso acontecesse, foi introduzida a seguinte métrica não-euclidiana:

$$\eta_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

sendo $\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu$ o produto interno entre $\hat{e}_\mu$ e $\hat{e}_\nu$. Essa é a conhecida *matriz de métrica de Minkowski*. O espaço $\mathbb{R}^4$ munido dessa métrica será denotado por M^4 .

A mudança de sistema de coordenada é realizada por meio de uma *Transformação de Lorentz*, que é qualquer operador linear $\Lambda : M^4 \rightarrow M^4$ que *preserva* a métrica de Minkowski, isto é, para quaisquer eventos $\vec{X}, \vec{Y} \in M^4$, deve-se ter:

$$\Lambda(\vec{X}) \cdot \Lambda(\vec{Y}) = \vec{X} \cdot \vec{Y}. \quad (4.12)$$

Os elementos de matriz podem ser facilmente determinados através de

$$\Lambda(\hat{e}_\mu) \cdot \Lambda(\hat{e}_\nu) = \hat{e}_\sigma \Lambda_\mu^\sigma \cdot \hat{e}_\tau \Lambda_\nu^\tau = \eta_{\sigma\tau} \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\tau = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

Ou seja:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (4.14)$$

A teoria da relatividade especial prediz dois curiosos fenômenos: a dilatação do tempo e a contração do espaço. A dilatação do tempo será particularmente interessante para este trabalho e, assim, será abordada aqui. Antes, será observado mais atentamente o caso em que o espaço-tempo é bidimensional, pois, com isso, os estudos mais a frente se tornarão mais simples.

A métrica de Minkowski em M^2 pode ser escrita como

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Considere, então, um sistema S' que possui velocidade v em relação a um sistema S na direção dos eixos coincidentes x e x' . É razoável supor que Λ dependa somente de *um parâmetro* ϕ relacionado *bijetivamente* com a velocidade v , isto é, $\phi = \phi(v)$, com $\phi(0) = 0$ e $\Lambda(0) = I$. Dessa maneira, a matriz $\Lambda(\phi)$ é uma função contínua e diferenciável do parâmetro ϕ . Com isso, ao se diferenciar a equação (4.14) no ponto $\phi = 0$, obtém-se

$$X^T \eta + \eta X = 0, \quad (4.16)$$

sendo que X é o gerador infinitesimal da transformação de Lorentz, dado por

$$X \equiv \left(\frac{d\Lambda}{d\phi} \right)_{\phi=0}. \quad (4.17)$$

Não é difícil, então, perceber que:

$$X = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

sendo b uma constante real *arbitrária*, que será escolhida convenientemente como sendo igual a 1.

É possível, ainda, provar que as transformações de Lorentz formam um *grupo de Lie a um parâmetro*. Sejam, por exemplo, Λ_1 e Λ_2 duas transformações de Lorentz. Então, pela equação (4.14), tem-se:

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T \eta \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta. \quad (4.19)$$

Ou de outra maneira: a matriz $\Lambda_1 \Lambda_2$ é *também* uma transformação de Lorentz. Além disso, a matriz identidade $\Lambda = I$ claramente obedece a equação (4.14). Também é possível ver, por essa mesma equação, que $\det \Lambda \neq 0$, isto é, as transformações de Lorentz são inversíveis. E, para finalizar, dado um Λ arbitrário, é fácil verificar, também pela equação (4.14), que Λ^{-1} é uma transformação de Lorentz, pois

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1} \Rightarrow \eta = (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1}. \quad (4.20)$$

Portanto, está provado que as transformações de Lorentz de fato formam um *grupo de Lie a um parâmetro*.

Como tal grupo é *abeliano* (comutativo), as transformações de Lorentz obedecem as seguintes propriedades:

1. $\Lambda(0) = I$
2. $\Lambda(\phi)\Lambda(\phi') = \Lambda(\phi + \phi')$
3. $\Lambda^{-1}(\phi) = \Lambda(-\phi)$

Com essas propriedades, não é difícil perceber que uma transformação de Lorentz genérica é escrita como

$$\Lambda(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} (I + \frac{\phi}{N} X)^N = e^{\phi X} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Portanto, a mudança de coordenada de um sistema S para um S' que se move com velocidade v em relação a ele é

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

É possível também escrever explicitamente ϕ em termos de v . Basta notar, por exemplo, que a equação de movimento da origem do sistema de coordenadas de S' neste mesmo sistema é $x' = 0$, enquanto no sistema S a equação é $x = vt$. Substituindo isso em (4.22), uma das equações resultante diz que:

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = -\tanh \phi \quad (4.23)$$

Com um pouco de trigonometria hiperbólica, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \cosh \phi &= (1 - \beta^2)^{-1/2} \equiv \gamma \\ \sinh \phi &= -\beta (1 - \beta^2)^{-1/2} = -\beta \gamma \end{aligned} \quad (4.24)$$

Então:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Pode-se, agora, estudar com facilidade o fenômeno da dilatação do tempo. Considere um relógio em *repouso* no sistema S' e seja $\Delta t'$ um intervalo de tempo observado nesse referencial. A pergunta que se pretende responder é: qual será o intervalo medido no sistema S ? Considerando-se que se começou a medir $\Delta t'$ em $t = t' = 0$ e $x = x' = 0$, a origem do sistema S' será identificada após o período $\Delta t'$ por

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

No sistema S , esse ponto possuirá as coordenadas

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ w\Delta t \end{pmatrix}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ v\Delta t \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

o que implica que $\Delta t = \gamma\Delta t'$.

Esse resultado revela justamente a dilatação do tempo, pois $\gamma > 1$ para todo v e, portanto, o intervalo de tempo Δt observado em S é maior do que o que se observou em S' no “mesmo período”. E é exatamente por isso que ocorre efetivamente uma “viagem para o futuro”.

Para exemplificar, imagine dois gêmeos. Logo após eles nascerem, eles são separados. Um é colocado num foguete que viaja em linha reta numa velocidade constante próxima à da luz ($\gamma \gg 1$), enquanto o outro fica na Terra. De acordo com a escolha da velocidade do foguete e com o tempo em que o primeiro ficará viajando, é possível que, quando ele retornar, o segundo já tenha morrido ou esteja com idade já avançada. Dessa maneira, pode-se dizer que o gêmeo que viajou no foguete fez, também, uma viagem para o futuro.

Vale observar que esse experimento mental, numa análise errônea, pode ser entendido como um paradoxo. Isso porque, como o foguete viaja em linha reta e velocidade constante, conclui-se precipitadamente que se tem uma simetria na análise do

experimento, de modo que num certo referencial inercial o gêmeo que é colocado no foguete é quem fica parado e o gêmeo que fica na Terra é quem viaja numa alta velocidade constante. Contudo, essa aparente simetria não existe de fato. Basta observar que um o gêmeo que é colocado na nave necessariamente estará sujeito à ação de uma força, por exemplo, no momento em que se inicia o retorno para a Terra. Portanto, um referencial no qual o foguete está sempre em repouso não pode ser considerado inercial.

Mas, se é possível a realização de tais viagens para o futuro, seria também possível viajar para o passado, isto é, voltar no tempo? A resposta da teoria da relatividade especial é não. Observa-se o porquê disso através do estudo de diagramas de espaço-tempo.

Em um diagrama bidimensional, por exemplo, é feita a representação dos eixos x e t de um sistema S . Esses eixos são colocados como ortogonais no “sentido euclideo”. Essa ortogonalidade é escolhida apenas por conveniência, pois não possui sentido físico. Um movimento de uma partícula nesse diagrama é representado por uma curva, chamada de *linha de universo*. É importante notar que a linha de universo de uma partícula em repouso é dada por uma reta paralela ao eixo t .

Ainda, o diagrama de espaço-tempo (bidimensional ou não) pode ser dividido em duas regiões distintas pelo que é conhecido como cone de luz. Esse cone nada mais é do que a região delimitada pelas “trajetórias” de feixes de luz a partir da origem do espaço-tempo. Isso porque a norma de Minkowski de vetores nessa trajetória é nula. Como exemplo, observe novamente o caso bidimensional. Nele, as linhas de universo de feixes de luz são dadas por $x = \pm ct$. Esses vetores são chamados de *vetores do tipo luz*.

Não é difícil notar que, entre os vetores com origem coincidente com a origem do diagrama de espaço-tempo, os que se encontram contidos no cone de luz são os únicos que possuem o módulo quadrado da norma negativo. Eles são denominados *vetores do tipo tempo*. Vetores cujo módulo quadrado é positivo, por sua vez, ficam fora do cone de luz. Eles são denominados *vetores do tipo espaço*.

A região fora do cone é uma região “proibida” fisicamente, no sentido de que nenhuma trajetória que passe pela origem será observada nessa região do diagrama de espaço-tempo, uma vez que seria necessário que se viajasse numa velocidade superior à da luz para isso. Pelo mesmo motivo, a linha de universo de qualquer sistema é descrita por uma curva cujos vetores tangentes são todos do tipo tempo. Consequentemente, fica

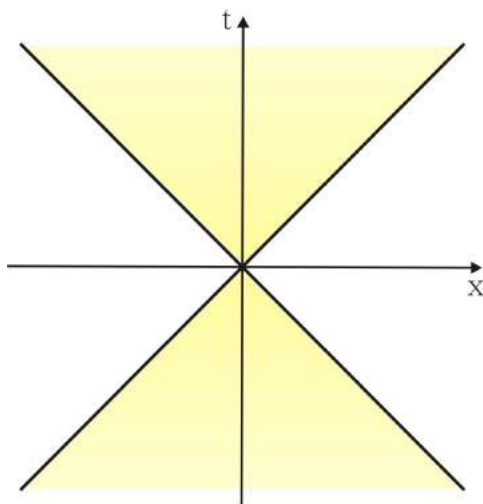


Figura 4.2: Representação do cone de luz num diagrama de espaço-tempo bidimensional

claro, então, que não é fisicamente possível a existência de uma *curva fechada do tipo tempo* (CTC) no espaço-tempo de Minkowski, uma vez que uma curva fechada teria ao menos um vetor tangente do tipo espaço.

Para exemplificar essa última afirmação, observe o diagrama de espaço-tempo com uma curva fechada a seguir:

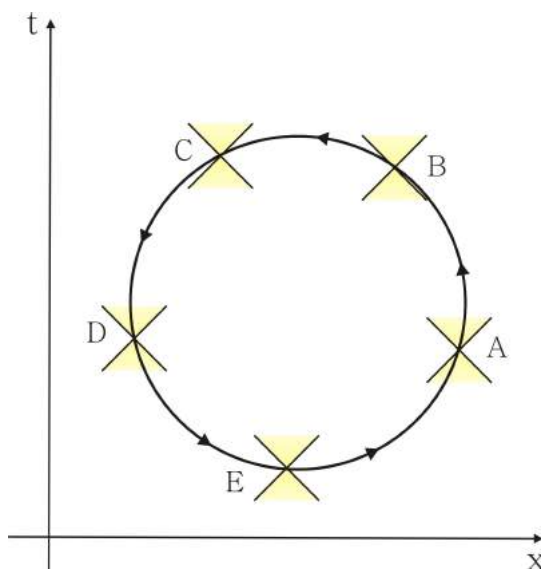


Figura 4.3: Curva fechada num espaço-tempo de Minkowski

Nota-se, nesse caso, que, entre os pontos destacados na curva, as tangentes em B , C e E não estão dentro do cone de luz. Assim, a curva acima não é uma curva do tipo tempo e, portanto, não representa uma linha de universo possível.

4.2.2 Teoria da relatividade geral

Dez anos após o surgimento da teoria da relatividade especial, Einstein apresentou uma generalização da teoria que abrangia o fenômeno da gravitação. Assim, surgiu a *teoria da relatividade geral*.

Nessa teoria, a gravidade passou a ser interpretada de maneira análoga a que os geômetras definem a curvatura intrínseca de uma superfície ou de uma variedade riemanniana de dimensão arbitrária. Esse fato decorre do princípio da equivalência, no qual Einstein percebeu que o fato da massa inercial e gravitacional serem proporcionais estava longe de ser um fato incidental, mas era sim um fato de natureza fundamental. Para exemplificar, suponha que um físico esteja em um laboratório dentro de um elevador muito alto. Se o elevador “despencar” em queda livre por um curto espaço de tempo e por curtas distâncias espaciais, será impossível para o físico determinar (em 1ª ordem) através de experimentos se ele está em uma região “livre de gravidade” ou em um elevador em queda livre. Geometricamente isso significa que o espaço-tempo é, em geral, curvo e apenas localmente minkowskiano.

De fato, Riemann, em 1854, desenvolveu o que é conhecido como *Geometria Riemaniana*, onde ele generalizou ideias desse tipo para dimensões arbitrárias. Uma variedade riemaniana pode ser pensada como uma estrutura geométrica com N dimensões tal que existam coordenadas locais nas quais um elemento de distância ds pode ser expresso como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.27)$$

sendo que $g_{\mu\nu}$ é a matriz da métrica, que deve ser *simétrica*, *positiva definida* e *não-degenerada*, ou seja, ela pode ser diagonalizada em todos os pontos e seus autovalores são números reais positivos.

Para formalizar essas ideias, pode-se enunciar mais rigorosamente o princípio de equivalência da seguinte maneira: existe um sistema local de coordenadas ξ^α (chamado de sistema de referência *localmente inercial*) tal que partículas submetidas somente a forças gravitacionais possuem equação de movimento dada por

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (4.28)$$

com

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (4.29)$$

Ainda, seja $x^\mu = x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ um sistema de coordenadas arbitrário. Utilizando a expressão para o tempo próprio, pode-se escrever também nesse novo sistema de coordenadas:

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.30)$$

sendo que se introduziu a métrica $g_{\mu\nu}$, dada por:

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (4.31)$$

Também:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \quad (4.32)$$

Isso implica que:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.33)$$

sendo que agora se introduziu os coeficientes (ou símbolos) de *Christoffel*, que são dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (4.34)$$

Os coeficientes de Christoffel podem também ser escritos em termos da métrica.

Observe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} &= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \right) \\ &= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \right) \\ &= g_{\lambda\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda + g_{\mu\lambda} \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para escrever explicitamente, pode-se fazer a *permutação cíclica* dos índices μ, ν e σ na equação acima. Ou seja:

$$\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\lambda\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + g_{\sigma\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} = g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + g_{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (4.37)$$

Somando a equação (4.35) com a equação (4.36) e subtraindo pela (4.37), tem-se:

$$2g_{\mu\lambda} \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}. \quad (4.38)$$

Definindo a *matriz inversa* da métrica $g^{\mu\tau}$ tal que

$$g_{\mu\lambda} g^{\mu\tau} = \delta_\mu^\tau, \quad (4.39)$$

pode-se finalmente escrever:

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} \right) g^{\mu\tau}. \quad (4.40)$$

Para baixas velocidades, pode-se aproximar a equação (4.30) da seguinte maneira:

$$d\tau = dt \sqrt{- \left(g_{00} + g_{0i} \frac{v^i}{c} + g_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2} \right)} \approx dt \sqrt{-g_{00}}. \quad (4.41)$$

Nesse mesmo limite, as componentes da equação (4.33) são

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} = -c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\Gamma_{00}^{\lambda} + 2\Gamma_{0i}^{\lambda} \frac{v^i}{c} + \Gamma_{ij}^{\lambda} \frac{v^i v^j}{c^2} \right) \approx -c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \Gamma_{00}^{\lambda}. \quad (4.42)$$

Como $dt/d\tau = 1/\sqrt{-g_{00}}$, é possível escrever ainda:

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{g_{00}} \Gamma_{00}^{\lambda}. \quad (4.43)$$

Ainda, utilizando a equação (4.40) e supondo um campo estático, pode-se escrever:

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\mu}} g^{\mu\lambda} \quad (4.44)$$

Além do limite de baixas velocidades, será considerado que a partícula esteja sob ação de um campo gravitacional “fraco”. Isso será representado da seguinte maneira:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (4.45)$$

Assim, a equação anterior pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \eta^{ji} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\vec{\nabla} h_{00} \right)^i \\ \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Mas, considerando que

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \right), \quad (4.47)$$

pode-se reescrever a primeira equação do sistema acima da seguinte maneira:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{00} \quad (4.48)$$

Comparando com o análogo newtoniano, que é

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (4.49)$$

sendo ϕ o potencial gravitacional newtoniano, obtém-se:

$$g_{00} + 1 = h_{00} = -\frac{2}{c^2}\phi. \quad (4.50)$$

Note que, com isso, é possível escrever a equação (4.41) da seguinte maneira:

$$d\tau = dt\sqrt{1 + 2\phi/c^2} \quad (4.51)$$

Esse último resultado será importante para a construção teórica da máquina de translação temporal, que será abordada no próximo capítulo. É interessante observar que, diferentemente da relatividade restrita, na qual a partícula teria que se mover com alta velocidade para “viajar para o futuro”, aqui isso acontece simplesmente por causa do potencial gravitacional (deve-se lembrar que se está trabalhando no limite de baixas velocidades).

Mas e com relação a viagens ao passado? Seria possível a existência de CTCs nessa teoria?

Como foi visto, existe em cada ponto um sistema de referência que é localmente minkowskiano (o espaço-tangente). Para comparar dois sistemas de coordenadas, é preciso transportar um sistema de coordenadas local paralelamente por uma geodésica entre os dois pontos. Ao contrário do espaço de Minkowski plano, onde esse transporte paralelo é trivial, em um espaço curvo, o transporte ao longo de uma curva fechada apresenta, em geral, uma não-holonomia, medida pela curvatura local do espaço. De fato, estruturalmente, essa curvatura é essencialmente análoga à curvatura que surge nas teorias do tipo de Yang-Mills para o modelo padrão, conforme já foi discutido na seção 2.2. A diferença é que as fibras desse tipo carregam propriedades internas das partículas, como carga ou cor, enquanto aqui a fibra sobre cada ponto do espaço-tempo curvo consiste no espaço-tangente àquele ponto.

Por causa disso, seria sim possível a existência de CTCs nessa teoria. Como exemplo, observe a figura a seguir:

Pode-se perceber que ela retrata um espaço-tempo curvo, pois cada cone de luz foi obtido através de transporte paralelo uns dos outros, mantendo a velocidade local da partícula que percorre essa linha de universo sempre menor do que a da luz.

De fato, em 1949 Gödel [11] apresentou uma solução das equações de Einstein que possui CTCs. Depois da solução apresentada por ele, outras também surgiram na

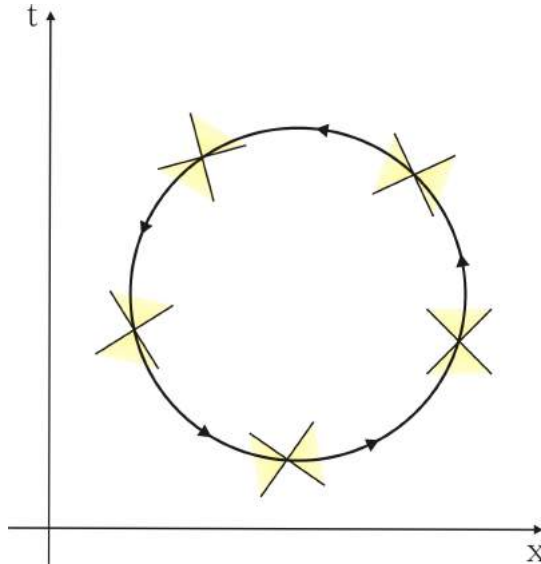


Figura 4.4: Representação pictórica de uma curva fechada do tipo tempo no espaço-tempo curvo

literatura [36, 37]. Tais soluções permitiriam, *a priori*, viagens ao passado e poderiam existir na natureza na proximidade de buracos-negros. Porém, por causa de problemas, como paradoxos de viagens no tempo, acredita-se que essas soluções sejam não-físicas.

4.3 O modelo de Deutsch

Para entender e tratar melhor a questão da possibilidade de existência de CTCs, Deutsch fez, em 1991, um estudo via circuitos computacionais do problema [12]. Ele considerou tanto o funcionamento de circuitos clássicos com acesso a CTCs quanto o funcionamento de circuitos quânticos. Desse trabalho, surgiu o que ficou conhecido como modelo de Deutsch (ou, simplesmente, D-CTCs).

Para introduzir esse modelo, será apresentado um exemplo simples. Nele, o funcionamento das D-CTCs é ligeiramente diferente do que será visto mais adiante. Ainda assim, esse exemplo deve ajudar no entendimento, além de servir para se realizar o estudo clássico do problema.

Deve-se ter em mente a seguinte história, que é análoga ao paradoxo do avô: um homem constrói uma máquina do tempo e a utiliza para viajar, digamos, cinco minutos para o passado; feito isso, ele destrói a máquina *antes* de ter tido a oportunidade de usá-la. Pode-se “traduzir” esse paradoxo em termos de circuitos computacionais clássicos da

seguinte forma: seja $x \in \{0, 1\}$ o bit de um sistema que entra numa região de violação cronológica na qual sofre a ação de uma porta lógica, conforme o diagrama a seguir:

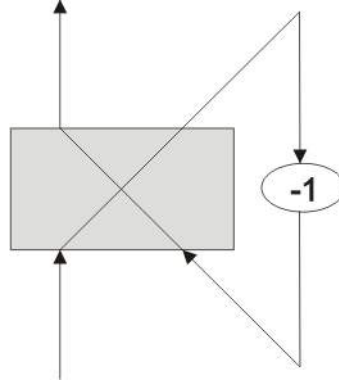


Figura 4.5: Porta lógica com acesso a uma CTC

Ao passar por essa porta, então, o bit sofre a seguinte evolução:

$$(x, y) \longrightarrow (x + y, y), \quad (4.52)$$

sendo que a primeira e a segunda entradas se referem, respectivamente, às versões jovem e velha do bit, com respeito ao tempo próprio do sistema e x e y são elementos de $\mathbb{Z}_2$. O símbolo “ $\longrightarrow$ ” (lido como “evolui para”) indica que as duas versões do bit nos estados à esquerda interagem, evoluindo para os estados à direita. Observe, pelo diagrama, que a versão velha do bit somente volta ao passado (fato indicado pelo -1 na figura), tornando-se a versão jovem após a evolução. Então, a condição de consistência imposta por essa cinemática é

$$x + y = y. \quad (4.53)$$

Isso quer dizer que a evolução só será consistente se o estado inicial do bit for $x = 0$ ao entrar na porta. Esse é um exemplo de como a física clássica impõe restrições altamente artificiais sobre as condições iniciais para realizações de viagens ao passado.

Este mesmo exemplo pode ser estudado em circuitos computacionais quânticos análogos. Para isso, os estados clássicos devem ser substituídos por sistemas quânticos. O bit de entrada, que estava no estado x , é, então, substituído por um qubit num estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in W^{(2)}$, com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. A versão mais velha do qubit será representada pela matriz densidade $\hat{\rho}$. Com isso e com

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \sum_{x,y \in \{0,1\}} |x+y\rangle \langle x| \otimes |y\rangle \langle y| \\ &= \hat{I} \otimes |0\rangle \langle 0| + \hat{\sigma}_1 \otimes |1\rangle \langle 1|, \end{aligned} \quad (4.54)$$

o análogo da evolução implementada pela porta é:

$$|\psi\rangle \langle\psi| \otimes \hat{\rho} \longrightarrow \hat{U} (|\psi\rangle \langle\psi| \otimes \hat{\rho}) \hat{U}^\dagger \quad (4.55)$$

e a condição de consistência se torna $\hat{\rho} = \text{tr}_2 \left[\hat{U} (|\psi\rangle \langle\psi| \otimes \hat{\rho}) \hat{U}^\dagger \right]$. Isso, por sua vez, implica que:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle |\psi\rangle \langle\psi| + \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle \hat{\sigma}_1 |\psi\rangle \langle\psi| \hat{\sigma}_1 \\ &= (|\alpha|^2 \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle + |\beta|^2 \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle) |0\rangle \langle 0| + (|\beta|^2 \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle + |\alpha|^2 \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle) |1\rangle \langle 1| + \\ &\quad + (\alpha\bar{\beta} \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle + \bar{\alpha}\beta \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle) |0\rangle \langle 1| + (\bar{\alpha}\beta \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle + \alpha\bar{\beta} \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle) |0\rangle \langle 1| \end{aligned} \quad (4.56)$$

Mas, como $\hat{\rho}$ também é dada pela expressão (4.10) ou, mais explicitamente,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} [(1+r^3) |0\rangle \langle 0| + (1-r^3) |1\rangle \langle 1| + (r^1 - ir^2) |0\rangle \langle 1| + (r^1 + ir^2) |1\rangle \langle 0|], \quad (4.57)$$

pode-se reescrever a equação anterior substituindo-se a identidade acima em seu lado direito. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{2} \{ [|\alpha|^2 (1+r^3) + |\beta|^2 (1-r^3)] |0\rangle \langle 0| + \\ &\quad + [|\beta|^2 (1+r^3) + |\alpha|^2 (1-r^3)] |1\rangle \langle 1| + \\ &\quad + [\alpha\bar{\beta} (1+r^3) + \bar{\alpha}\beta (1-r^3)] |0\rangle \langle 1| + \\ &\quad + [\bar{\alpha}\beta (1+r^3) + \alpha\bar{\beta} (1-r^3)] |0\rangle \langle 1| \} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Agora, substituindo a expressão para $\hat{\rho}$ do lado esquerdo e comparando com o resultado obtido do lado direito, constrói-se-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (1+r^3) = |\alpha|^2 (1+r^3) + |\beta|^2 (1-r^3) \\ (1-r^3) = |\beta|^2 (1+r^3) + |\alpha|^2 (1-r^3) \\ (r^1 - ir^2) = \alpha\bar{\beta} (1+r^3) + \bar{\alpha}\beta (1-r^3) \\ (r^1 + ir^2) = \bar{\alpha}\beta (1+r^3) + \alpha\bar{\beta} (1-r^3) \end{cases} \quad (4.59)$$

Mas a primeira equação desse sistema (assim como a segunda) mostra que $r^3 = 0$. Com isso, as duas últimas equações podem ser reescritas:

$$\begin{cases} (r^1 - ir^2) = \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta \\ (r^1 + ir^2) = \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} \end{cases} \quad (4.60)$$

Facilmente, então, conclui-se que $r^1 = \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 2\text{Re}(\alpha\bar{\beta})$ e que $r^2 = 0$. Logo, a solução da condição de consistência é

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \hat{I} + \text{Re}(\langle 0|\psi\rangle \langle\psi|1\rangle) \hat{\sigma}_1. \quad (4.61)$$

Percebe-se, portanto, que a evolução acontece de maneira consistente qualquer que seja o estado inicial $|\psi\rangle$ do sistema, inclusive para o estado proibido classicamente ($|\psi\rangle = |1\rangle$). Isso parece indicar que, caso existam CTCs na MQ e elas possam ser descritas de forma similar a que foi feita aqui, a realização de viagens ao passado seria possível na MQ.

Agora, não será difícil entender o modelo criado por Deutsch. Consideremos dois sistemas quânticos num local no universo que contém uma região de violação cronológica. Um desses sistemas (o de violação cronológica, que será chamado simplesmente de sistema CTC) segue uma CTC e é, então, confinado nessa região. Já o outro (o de respeito cronológico, que será chamado de sistema CR) surge de seu passado assintótico, passa pela região de violação cronológica sem ser confinado pela CTC e prossegue em seu futuro assintótico. Ao passar pela região de violação cronológica, o sistema CR interage com o sistema CTC por meio de uma operação unitária arbitrária $\hat{U}$. Como já foi dito, somente os graus de liberdade internos serão tratados como quânticos, desprezando-se evoluções espaciais. Seja W_{CR} o espaço de estados do sistema CR e W_{CTC} o espaço de estados do sistema CTC. Com isso, será denotado por $\hat{\rho}_{(i)} \in W_{CR} \otimes \bar{W}_{CR}$ o estado inicial do sistema CR, que surge de seu passado assintótico, e por $\hat{\rho}_{CTC} \in W_{CTC} \otimes \bar{W}_{CTC}$ o estado inicial do sistema CTC antes da interação.

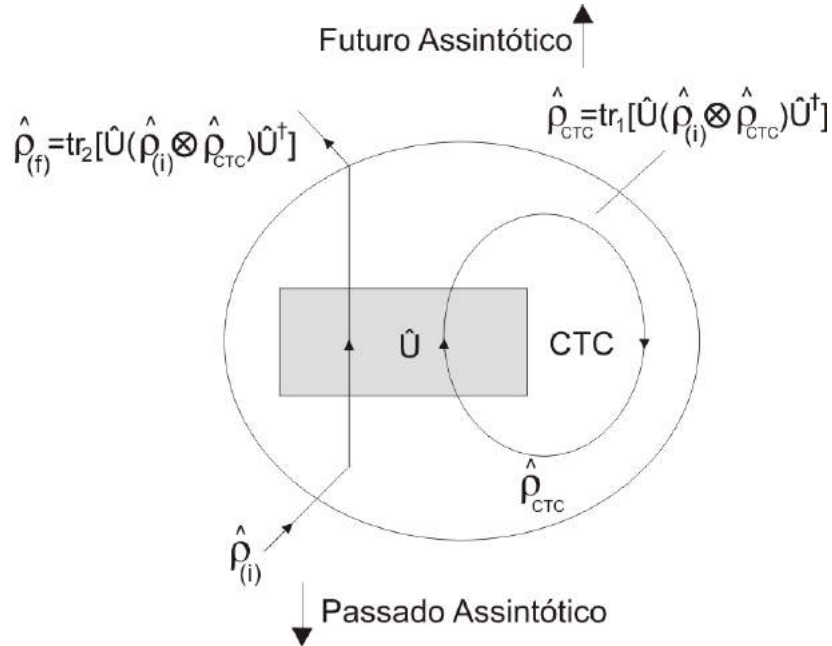


Figura 4.6: Diagrama esquemático do modelo de Deutsch

Uma vez que ocorra a interação entre as partes, o estado global dos sistemas

será dado por

$$\hat{U} (\hat{\rho}_{(i)} \otimes \hat{\rho}_{CTC}) \hat{U}^\dagger. \quad (4.62)$$

Na sequência, as partes são separadas. Poder-se-ia dizer que, em geral, os dois sistemas terminam o processo emaranhados. Assim, uma medição realizada no sistema CR em seu futuro alteraria o estado do sistema CTC. Mas isso alteraria a maneira com a qual o sistema CTC pode ser modificado, into é, o sistema CTC mudaria o seu estado sem que essa mudança fosse dada pela equação de consistência. Para resolver esse problema, Deutsch considerou que o fato de os dois sistemas serem separados e um deles continuar na CTC causa uma mudança instantânea em ambos os estados finais dos sistemas, que é traduzida por:

$$\hat{\rho}_{(f)} = tr_2 \left[\hat{U} (\hat{\rho}_{(i)} \otimes \hat{\rho}_{CTC}) \hat{U}^\dagger \right] \quad (4.63)$$

$$\hat{\rho}'_{CTC} = tr_1 \left[\hat{U} (\hat{\rho}_{(i)} \otimes \hat{\rho}_{CTC}) \hat{U}^\dagger \right] \quad (4.64)$$

O traço parcial, que comumente é usado para se estudar subsistemas, é visto aqui efetivamente como um mecanismo físico não-local e os sistemas, ao final de todo o processo, não estarão emaranhados.

Outro fator que é levado em conta vem de uma análise bem plausível: como, na concepção de Deutsch, o sistema CTC é um elemento da realidade (portanto, ontológico), os estados de saída e de entrada desse sistema devem ser os mesmos, isto é, $\hat{\rho}'_{CTC} = \hat{\rho}_{CTC}$. Assim, obtém-se a expressão conhecida como *equação de consistência do modelo de Deutsch*:

$$\hat{\rho}_{CTC} = tr_1 \left[\hat{U} (\hat{\rho}_{(i)} \otimes \hat{\rho}_{CTC}) \hat{U}^\dagger \right]. \quad (4.65)$$

Com isso, verificar que nesse modelo viagens no tempo ocorrem sempre sem paradoxos é equivalente a mostrar que a equação (4.65) possui solução para qualquer operação unitária arbitrária $\hat{U}$ e para todo estado CR inicial $\hat{\rho}_{(i)}$. De fato, isso pode ser mostrado utilizando o teorema do ponto fixo de Schauder [38]. Esse teorema garante a existência de *pelo menos* uma solução para a equação.

Mas nem sempre a equação de consistência possui solução única. Por isso, levanta-se a questão: qual das possíveis soluções é a que ocorreria na natureza? Deutsch responde essa pergunta conjecturando o *princípio evolutivo*, segundo o qual o estado que representaria o sistema seria o que maximizasse a entropia de von Neumann, que é dada

por $S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho})$ – ver [39, 40, 41] para uma introdução a essa entropia. Já Politzer sugere que um princípio igualmente válido é um que diz que o estado que a natureza “escolheria” é o que minimizasse a entropia [42]. Contudo, não é difícil perceber que existem casos nos quais o estado que minimiza a entropia não é único. Também, mas talvez seja menos intuitivo, pode-se observar que nem sempre existe apenas um estado que maximiza a entropia – o estado é único apenas se o conjunto de soluções for estritamente côncavo. Por sua vez, Bacon apresenta uma interpretação segundo a qual a não unicidade não é um “problema a ser resolvido”: pode-se assumir que essa liberdade sobre as matrizes densidade de sistemas CTC está associada a condições de liberdade iniciais [43]. De fato, não parece errado assumir que algumas das liberdades nas condições iniciais que produzem o estado do sistema CTC são justamente as liberdades existentes no conjunto de soluções da equação de consistência. Uma compreensão sobre tais condições iniciais poderia ajudar a elucidar algo a respeito da tão procurada teoria gravitacional quântica consistente, se o modelo de Deutsch realmente for válido.

Vale observar ainda que a dinâmica $\hat{\rho}_{(i)} \rightarrow \hat{\rho}_{(f)}$ implementada pelo circuito é não linear, pois, como se vê em (4.63), $\hat{\rho}_{(f)}$ depende tanto de $\hat{\rho}_{(i)}$ quanto de $\hat{\rho}_{CTC}$, que também depende de $\hat{\rho}_{(i)}$.

4.3.1 Distinção determinística entre estados não ortogonais

Um teorema fundamental da mecânica quântica usual afirma que estados que podem ser diferenciados são ortogonais entre si [44]. Contudo, Brun *et al.* mostraram que, utilizando um circuito computacional com acesso a CTCs e que funcione segundo a prescrição do modelo de Deutsch, é *possível* fazer *distinção* determinística entre estados *não ortogonais* [45].

Seja $C = \{|\psi_k\rangle\}$ um conjunto de N vetores de um espaço de Hilbert $W^{(N)}$ não necessariamente ortogonais entre si. Pode-se, então, construir de maneira não única operadores unitários $\hat{O}_k$ tais que $\hat{O}_k |\psi_k\rangle = |u_k\rangle$, sendo $\{|u_k\rangle\}$ uma base ortonormal de $W^{(N)}$. De fato, pode-se conseguir tal resultado se o circuito de Deutsch implementar a seguinte operação unitária $\hat{U}$:

$$\hat{U} = \hat{V} \hat{S}, \quad (4.66)$$

sendo $\hat{S}$ a operação de *swap* (isto é, $\hat{S}(|u_i\rangle \otimes |u_j\rangle) = |u_j\rangle \otimes |u_i\rangle$) e $\hat{V}$ a seguinte operação:

$$\hat{V} = \sum_k |u_k\rangle \langle u^k| \otimes \hat{O}_k. \quad (4.67)$$

O estado inicial do sistema CR deve ser $\hat{\rho}_{CR} = |\psi_{(s)}\rangle \langle \psi^{(s)}|$ para algum $s \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Seja $\hat{\rho}_{CTC} \in W^{(N)} \otimes \bar{W}^{(N)}$ a matriz densidade que representa o sistema CTC. Da equação de consistência (4.65), obtém-se: $\rho_n^m = \sum_k \rho_k^k \langle u^m | \hat{O}_k | \psi_j \rangle \langle \psi^j | \hat{O}_k^\dagger | u_n \rangle$. Portanto, os elementos da diagonal são

$$\rho_{(s)}^{(s)} = \rho_{(s)}^{(s)} + \sum_{k \neq s} \rho_k^k \left| \langle u^s | \hat{O}_k | \psi_j \rangle \right|^2. \quad (4.68)$$

Para se realizar a distinção determinística entre os estados do conjunto C , quer-se que o estado de saída seja $\hat{\rho}'_{CR} = |u_{(s)}\rangle \langle u^{(s)}|$. Então, a solução da equação de consistência também deve ser $\hat{\rho}_{CTC} = |u_{(s)}\rangle \langle u^{(s)}|$. Observando a (4.68), percebe-se que essa condição pode ser satisfeita se $\langle u^s | \hat{O}_k | \psi_j \rangle \neq 0$ para todo k .

Operadores $\hat{O}_k$ que satisfaçam essa condição (além da condição exigida inicialmente de que $\hat{O}_k |\psi_k\rangle = |u_k\rangle$) existem. Para mostrar isso, será exibida a construção de um entre os possíveis conjuntos desses operadores realizada em [45]. A ideia dos autores foi a de construir duas bases ortonormais de $W^{(N)}$, $\{|r_i\rangle\}$ e $\{|t_j\rangle\}$, de maneira que $\hat{O}_k = |t_m\rangle \langle r^m|$. As instruções para tal construção estão a seguir:

- (1) Escolhe-se $|r_1\rangle = |\psi_s\rangle$ e $|t_1\rangle = |u_s\rangle$. Denotar-se-á, a partir de agora, $|\psi_s\rangle$ também por $|\psi_{1,1}\rangle$ e $|u_s\rangle$ também por $|u_{1,1}\rangle$.
- (2) Seleciona-se um outro elemento de C , que será denotado por $|\psi_{2,1}\rangle$. Então, constrói-se $|r_2\rangle$:

$$|r_2\rangle = \frac{1}{N} (|\psi_{2,1}\rangle - |r_1\rangle \langle r^1 | \psi_{2,1} \rangle). \quad (4.69)$$

- (3) Agora, encontra-se todos os elementos de C (digamos n_2 vetores, que serão denotados por $|\psi_{2,1}\rangle, |\psi_{2,2}\rangle, \dots, |\psi_{2,n_2}\rangle$) que são linearmente dependentes a $|r_1\rangle$ e $|r_2\rangle$, incluindo $|\psi_{2,1}\rangle$, mas excluindo $|\psi_{1,1}\rangle$. Constrói-se, então, $|t_2\rangle$:

$$|t_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_2}} \left(\sum_{a=1}^{n_2} |u_{2,a}\rangle \right). \quad (4.70)$$

- (4) Repete-se, então, o processo da seguinte maneira:

Se já foram construídos $|r_1\rangle, |r_2\rangle, \dots, |r_w\rangle, |t_1\rangle, |t_2\rangle, \dots$ e $|t_w\rangle$, então $|r_{w+1}\rangle$ é dado por

$$|r_{w+1}\rangle = \frac{1}{N} \left(|\psi_{w+1,1}\rangle - \sum_{a=1}^w |r_a\rangle \langle r^a | \psi_{t+1,1} \rangle \right). \quad (4.71)$$

Encontrando-se todos os elementos em C (digamos n_{w+1} vetores, que serão denotados por $|\psi_{w+1,1}\rangle, \dots, |\psi_{w+1,n_{w+1}}\rangle$) que pertencem ao subespaço gerado por $|r_1\rangle, |r_2\rangle, \dots, |r_{w+1}\rangle$. Contrói-se, então, $|t_{w+1}\rangle$:

$$|t_{w+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{w+1}}} \left(\sum_{a=1}^{n_{w+1}} |u_{w+1,a}\rangle \right). \quad (4.72)$$

As bases devem ser completadas livremente se a implementação dessa última etapa não produzir bases completas. Com isso, os operadores $\hat{O}_k = |t_m\rangle \langle r^m|$ são tais que a equação de consistência possui solução única, $\hat{\rho}_{CTC} = |u_{(l)}\rangle \langle u^{(l)}|$, para a interação dada por $\hat{U} = \hat{V}\hat{S}$.

Portanto, está provado que, segundo o modelo de Deutsch, é possível fazer distinção determinística entre estados não ortogonais (linearmente dependentes ou não) na presença de CTCs, o que, como será visto mais a frente, leva a comunicação com velocidade superluminal.

4.3.2 Não purificação de alguns estados mistos de sistemas CTC

Conforme foi visto na seção anterior, por apresentarem as mesmas propriedades, os conceitos de misturas própria e imprópria são tratados como equivalentes. Por isso, considera-se que todo estado misturado que representa um sistema quântico único (e não um *ensemble*) pode ser purificado. Contudo, assumindo que o modelo de Deutsch seja válido, foi mostrado por Pati *et al.* [46] que, se $\hat{\rho}_{CTC} \in W_{CTC}$ for um estado misto resultante da equação de consistência, então ele não pode ser purificado, no sentido de que não existe um sistema auxiliar W_{Aux} tal que, para um certo $|\Phi\rangle \in W_{CTC} \otimes W_{Aux}$, $\hat{\rho}_{CTC} = \text{tr}_{Aux}(|\Psi\rangle \langle \Psi|)$. Dessa maneira, diferentemente do que acontece na MQ usual, misturas próprias e impróprias não são equivalentes para um sistema CTC. Isso foi mostrado por meio de dois teoremas, sendo o primeiro deles:

Teorema 4.3.1 (Pati). *Seja $\hat{\rho}_{CTC} = |\rho_k\rangle \rho^k \langle \rho^k|$ a matriz densidade que representa o estado misturado de um sistema CTC que interage com um sistema quântico CR num estado puro através de uma operação unitária não trivial $\hat{U}$. Se $\hat{\rho}_{CTC}$ satisfizer a equação de*

consistência, então **não** existe um sistema auxiliar (*Aux*) tal que $\hat{\rho}_{CTC} = \text{Tr}_{Aux} [|\Phi\rangle\langle\Phi|]$, com $|\Phi\rangle \in W_{CTC} \otimes W_{Aux}$. Ou seja, não é possível purificar o estado $\hat{\rho}_{CTC}$.

Demonstração. Seja $\hat{\rho}_{CR} = |\psi\rangle\langle\psi|$ a matriz densidade que representa o sistema quântico CR inicial. Suponhamos que seja possível purificar o sistema CTC. Então, existe um estado $|\Phi\rangle \in W_{CTC} \otimes W_{Aux}$ tal que $\hat{\rho}_{CTC} = \text{Tr}_{Aux} [|\Phi\rangle\langle\Phi|]$. Seja $\{|u_k\rangle\}$ uma base ortonormal de W_{Aux} que permite escrever $|\Phi\rangle$ utilizando a decomposição de Schmidt da seguinte maneira: $|\Phi\rangle = \sqrt{\rho^k} |\rho_k\rangle \otimes |u_k\rangle$. A evolução implementada num circuito segundo o modelo de Deutsch é equivalente a $|\psi\rangle \otimes |\Phi\rangle \longrightarrow (\hat{U} \otimes \hat{I}) (|\psi\rangle \otimes |\Phi\rangle) = \sqrt{\rho^k} \hat{U} (|\psi\rangle \otimes |\rho_k\rangle) \otimes |u_k\rangle$. Utilizando a decomposição de Schmidt, pode-se escrever: $\hat{U} (|\psi\rangle \otimes |\rho_k\rangle) = \sqrt{\lambda^j} |v_j(\psi)\rangle \otimes |t_{jk}\rangle$. Assim

$$(\hat{U} \otimes \hat{I}) (|\psi\rangle \otimes |\Phi\rangle) = \sqrt{\rho^k \lambda^j} |v_j(\psi)\rangle \otimes |t_{jk}\rangle \otimes |u_k\rangle \quad (4.73)$$

e a equação de consistência passa a ser

$$\hat{\rho}_{CTC} = \text{Tr}_{CR, Aux} \left[(\hat{U} \otimes \hat{I}) (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\Phi\rangle\langle\Phi|) (\hat{U}^\dagger \otimes \hat{I}) \right]. \quad (4.74)$$

Portanto, para os coeficientes ρ^k não nulos, conclui-se que

$$|\rho_{(k)}\rangle\langle\rho^{(k)}| = \lambda^j |t_{j(k)}\rangle\langle t^{j(k)}|. \quad (4.75)$$

A condição imposta pela equação acima só pode ser satisfeita se $\hat{U} = \hat{I}$, que é o caso trivial no qual não ocorre interação entre os sistemas CR e CTC. Portanto, se há interação entre um sistema puro CR e um sistema CTC num estado misto resultante da equação de consistência, o sistema CTC é uma mistura própria. $\square$

Em vista disso, pode-se perguntar: o teorema exclui a possibilidade de existência de sistemas CTC em estados mistos representados por misturas impróprias? A resposta é não. Se $|\Omega\rangle$ for um estado emaranhado entre dois sistemas CTCs, então o estado em cada um dos sistemas é uma mistura imprópria. Porém, cada um desses estados não pode interagir separadamente com um sistema CR, pelo menos não de maneira consistente com o modelo de Deutsch. Outra possibilidade seria a de $|\Omega\rangle$ ser um estado emaranhado entre um sistema CTC e um sistema CR, que denominaremos de CR', por exemplo, $|\Omega\rangle = \sqrt{\rho^k} |a_k\rangle \otimes |\rho_k\rangle \in W_{CR'} \otimes W_{CTC}$.

Mas é possível produzir um estado puro emaranhado desse tipo? É possível, mas não é tão simples. Por exemplo, se $\hat{\rho}_{CR}$ for um estado puro e $\hat{\rho}_{CTC}$ for um estado misturado, a interação entre os sistemas (dada pelo operador *unitário* $\hat{U}$) não produziria

um estado puro. Igualmente, se $\hat{\rho}_{CR}$ e $\hat{\rho}_{CTC}$ fossem estados puros, a equação de consistência não seria satisfeita, pois $\hat{\rho}_{CTC} = |\rho_k\rangle \rho^k \langle \rho^k|$ segundo ela. Nessas duas situações, não seria possível produzir o estado $|\Omega\rangle$. Para produzi-lo, é necessário construir antes um emaranhamento entre o sistema CR' com um outro sistema CR: $|\Psi\rangle = \sqrt{\rho^k} |a_k\rangle \otimes |\rho_k\rangle \in W_{CR'} \otimes W_{CR}$. Seja $\hat{\rho}_{CTC} = |\rho_k\rangle \rho^k \langle \rho^k|$. O sistema CR interage, então, com o sistema CTC por meio da operação unitária de swap. No final desse processo, produziu-se o estado $|\Omega\rangle$. De fato, conforme o teorema que será exibido a seguir, se $\hat{\rho}_{CR}$ for um estado misturado e $\hat{\rho}_{CTC}$ for uma mistura imprópria, somente interações triviais (identidade ou swap) são possíveis entre eles.

Teorema 4.3.2. *Sejam $\hat{\rho}_{CR} = |\chi_i\rangle \chi^i \langle \chi^i|$ e $\hat{\rho}_{CTC} = |\rho_k\rangle \rho^k \langle \rho^k|$ as matrizes densidades dos sistemas CR e CTC, respectivamente. Esses sistemas interagem segundo uma interação unitária não-trivial $\hat{U}$. Se $\hat{\rho}_{CTC}$ satisfizer a equação de consistência, então ele não pode ser purificado, ou seja, não existe um sistema auxiliar (Aux) tal que $\hat{\rho}_{CTC} = \text{Tr} [|\Phi\rangle \langle \Phi|]$, com $|\Phi\rangle = \sqrt{\rho^k} |\rho_k\rangle \otimes |d_k\rangle \in W_{CTC} \otimes W_{Aux}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\hat{\rho}_{CTC}$ possa ser purificado. Então, existe o estado $|\Phi\rangle$ citado no enunciado do teorema. Seja $|\Lambda\rangle = \sqrt{\chi^i} |a_i\rangle \otimes |\chi_i\rangle \in W_{Aux'} \otimes W_{CR}$ tal que $\hat{\rho}_{CR} = \text{Tr}_{Aux'} [|\Lambda\rangle \langle \Lambda|]$. Assim, a evolução implementada num circuito segundo o modelo de Deutsch é equivalente a

$$|\Lambda\rangle \otimes |\Phi\rangle \longrightarrow (\hat{I} \otimes \hat{U} \otimes \hat{I}) (|\Lambda\rangle \otimes |\Phi\rangle) = \sqrt{\chi^i \rho^k} |a_i\rangle \otimes \hat{U} (|\chi_i\rangle \otimes |\rho_k\rangle) \otimes |d_k\rangle. \quad (4.76)$$

Com a decomposição de Schmidt, pode-se escrever: $\hat{U} (|\chi_i\rangle \otimes |\rho_k\rangle) = \sqrt{\lambda^j} |b_{ji}\rangle \otimes |c_{jk}\rangle$. Assim,

$$(\hat{I} \otimes \hat{U} \otimes \hat{I}) (|\Lambda\rangle \otimes |\Phi\rangle) = \sqrt{\chi^i \rho^k \lambda^j} |a_i\rangle \otimes |b_{ji}\rangle \otimes |c_{jk}\rangle \otimes |d_k\rangle. \quad (4.77)$$

Logo, a equação de consistência passa a ser

$$\hat{\rho}_{CTC} = \text{Tr}_{Aux', CR, Aux} \left[(\hat{I} \otimes \hat{U} \otimes \hat{I}) (|\Lambda\rangle \langle \Lambda| \otimes |\Phi\rangle \langle \Phi|) (\hat{I} \otimes \hat{U}^\dagger \otimes \hat{I}) \right] \quad (4.78)$$

e, portanto, para os coeficientes ρ^k não nulos, conclui-se que

$$|\rho_{(k)}\rangle \langle \rho^{(k)}| = \lambda^j |c_{j(k)}\rangle \langle c^{j(k)}|. \quad (4.79)$$

A condição imposta pela equação acima só pode ser satisfeita se $\hat{U} = \hat{I}$ ou se $\hat{U}$ for a operação de swap (de onde segue que $\hat{\rho}_{CTC} = \hat{\rho}_{CR}$). Portanto, para interações genéricas, se $\hat{\rho}_{CR}$ e $\hat{\rho}_{CTC}$ forem estados misturados, também não é possível purificar o sistema CTC. $\square$

Com esses dois teoremas, percebe-se claramente que, para sistemas CTC, existe uma diferença intrínseca que torna inequivalente os conceitos de mistura própria e mistura imprópria.

4.3.3 Comunicação com velocidade superluminal e paradoxos no modelo de Deutsch

Como já foi dito, o modelo de Deutsch assume uma interpretação particular da MQ na qual os estados mistos são tratados como ontológicos. Esse detalhe é bastante interessante, haja vista que, na MQ usual, as diferentes interpretações dadas aos estados podem coexistir, cada uma sendo consistente em sua maneira de ver. Mas, na presença de CTCs (caso elas realmente existam), pode ser que seja possível decidir qual dessas descrições seria a correta em cada situação. Ainda, se as interações acontecerem segundo o modelo de Deutsch, já foi mostrado que se deve atribuir status ontológico aos estados em geral [47].

Mas, assumindo essa interpretação, o modelo é realmente consistente? Isso será discutido a partir de agora, com a apresentação do resultado original deste trabalho [13].

O protocolo EPR foi exposto na seção 3.2. Nesse procedimento, observa-se o acontecimento de um fenômeno não-local. Apesar disso, na mecânica quântica usual não é possível a realização de comunicação com velocidade superluminal. Mas pergunta-se: o que aconteceria se Bob tivesse acesso a uma CTC? Algo mudaria?

Para responder essas perguntas, será proposto um “teste” para se descobrir o que aconteceria nesse caso. Com esse propósito, suponha que Alice e Bob tenham, previamente, de maneira similar a que foi vista na seção 3.2, combinado um código, “construindo” um bit clássico, associando, por exemplo, 0 e 1 às medidas realizadas nas direções x e z , respectivamente. Assim, para transmitir uma certa informação para Bob, Alice mede o seu qubit numa dessas duas direções. Bob, então, estará com o seu qubit num estado $|\xi_j\rangle$, para algum $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, sendo $|\xi_0\rangle = |z+\rangle$, $|\xi_1\rangle = |z-\rangle$, $|\xi_2\rangle = |x+\rangle$ e $|\xi_3\rangle = |x-\rangle$. Se ele possuir acesso a um CTC e decidir compor o seu qubit com um outro num estado conhecido, digamos $|z+\rangle$, ele pode colocar o sistema total (que estará no estado $|\xi_j, z+\rangle$) num circuito que realiza a distinção de estados não ortogonais, como o exibido na seção 4.3.1, ou seja, num circuito que realize a operação de *swap* entre o seu sistema e

um sistema CTC de dimensão quatro e, depois, aplique a operação unitária (4.67), com $|u_0\rangle = |z+, z+\rangle$, $|u_1\rangle = |z-, z+\rangle$, $|u_2\rangle = |z+, z-\rangle$, $|u_3\rangle = |z-, z-\rangle$ e $\hat{O}_i |\xi_i, z+\rangle = |u_i\rangle$. Dessa maneira, Bob pode receber com velocidade superluminal a informação que Alice deseja transmitir a ele.

Por conseguinte, vê-se que a implementação de comunicação com velocidade superluminal é possível com o modelo de Deutsch. Essa possibilidade retorna com uma série de paradoxos que Deutsch supunha contornar com o seu modelo. Assim sendo, apesar de parecer permitir viagens no tempo de forma consistente, o modelo de Deutsch não extingue realmente os paradoxos.

A situação fica ainda pior se for considerada a descrição realizada a partir de alguns referenciais específicos nos quais a medição realizada por Alice e a distinção de estado realizada por Bob ocorrem na ordem contrária a que foi exposta anteriormente. Nesses referenciais, o sistema que entra no circuito de Bob é uma mistura imprópria. Então, segundo os teoremas apresentados na seção 4.3.2, após a realização da operação de *swap* nesse circuito, não será possível que o restante da operação ocorra de maneira consistente com o modelo de Deutsch. Para manter a “consistência” do modelo, a interpretação dada para isso, inclusive no artigo original de Deutsch, é de que o restante da operação não ocorre. Com isso, o resultado obtido por Bob ao medir o sistema quando ele sai do circuito é aleatório. Logo, a descrição nesses referenciais conduz a resultados distintos, o que evidencia um paradoxo inerente ao modelo de Deutsch.

Isso significa que o modelo deve ser completamente descartado? A nossa resposta é imediata: não necessariamente! Pode-se admitir que o modelo como foi originalmente apresentado precise de modificações. Uma delas seria a restrição dos tipos de operações unitárias $\hat{U}$ que poderiam ser implementadas entre sistemas CR e sistemas CTC. É fisicamente razoável supor que em condições extremas, tais como em regiões de violação cronológica, as evoluções unitárias quânticas podem ser restritas (por regras de uma futura teoria gravitacional quântica).

Mas por que tentar “salvar” um modelo que aparenta ser tão especulativo quanto o modelo de Deutsch? A resposta também é simples: porque podemos aprender muito com ele. Foi visto nesta seção um argumento não favorável ao modelo, mas, ainda assim, ele exhibe diversas características interessantes, como o mecanismo final do processo, que utiliza o traço parcial como uma operação física. Sobre isso, pode-se con-

siderar inclusive a afirmação feita por Wallman e Bartlett em [47]: “Sem analisar tal mecanismo em detalhe, nota-se as suas similaridades com algumas descrições quânticas de processos de evaporação de buraco negro”.

Assim sendo, o resultado apresentado aqui expõe a necessidade de alterações da maneira originalmente proposta por Deutsch para a interação de sistemas quânticos na presença de CTCs, mas não descarta por completo o modelo.

4.4 CTCs por pós-seleção

Já foi estudado o modelo criado por Deutsch para a interação de sistemas quânticos na presença de CTCs. Agora, será apresentado um modelo alternativo apresentado originalmente por Bennett e Schumacher [14] – e independentemente por Svetlichny [15]. Este modelo foi desenvolvido posteriormente por Lloyd *et al.* [16, 17] e é conhecido como P-CTC. Mas, antes de apresentá-lo, será estudado o teleporte quântico.

4.4.1 Teleporte Quântico

O teleporte quântico [48] é um exemplo de canal quântico ideal e, como o nome diz, é usado para se teletransportar estados. No protocolo utilizado para a sua implementação, faz-se uso de duas partes, Alice e Bob. Eles, assim como no protocolo EPR, compartilham de um par de estados correlacionados no qual cada estado reduzido pode ser representado por um ponto no centro da esfera de Bloch. Em particular, pode-se escrever

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \in W_A \otimes W_B, \quad (4.80)$$

sendo W_A representa o espaço de estados do sistema de Alice e W_B , o de Bob.

Após cada um possuir a sua parte do sistema total, eles se separam espacialmente. Depois disso, deve-se supor que Alice queira teleportar um estado desconhecido $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ para Bob. Para esse propósito, ela deve primeiramente compor o seu sistema com o estado. Assim, o sistema total pode ser representado por:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle). \quad (4.81)$$

Feito isso, Alice deve medir a sua parte do sistema na base de Bell, cujos

elementos são:

$$|B_{jk}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\sigma}_z^j \hat{\sigma}_x^k \otimes \hat{I} \right) (|00\rangle + |11\rangle), \quad (4.82)$$

sendo que j e k podem assumir os valores 0 e 1. Após a medição, ter-se-á:

$$\begin{aligned} \left(\langle B^{jk} | \otimes \hat{I} \right) |\Phi\rangle &= \frac{1}{2} \left[\alpha (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \hat{\sigma}_x^k \hat{\sigma}_z^j |0\rangle + \beta (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \hat{\sigma}_x^k \hat{\sigma}_z^j |1\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \hat{\sigma}_x^k \hat{\sigma}_z^j [\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle] = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_x^k \hat{\sigma}_z^j |\varphi\rangle. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Isso significa que, independente de qual será o resultado $|B_{jk}\rangle$ obtido por Alice, Bob sempre terá, no final do processo, o estado $|\varphi\rangle$ se ele aplicar a operação unitária $\hat{U}(j, k) = \hat{\sigma}_z^j \hat{\sigma}_x^k$. Por causa disso, basta Alice enviar por um canal clássico de comunicação dois bits (j e k) para Bob. Dessa maneira, ele saberá qual operação fazer sobre o seu sistema para obter o estado que Alice queria teleportar para ele.

Um caso interessante acontece quando o resultado obtido por Alice é $|B_{00}\rangle$. Nessa situação, após receber os dois bits de comunicação clássica, Bob não precisa aplicar nenhuma operação sobre o seu sistema, pois $\hat{U} = \hat{I}$. Então, mesmo que Bob não saiba disso, pode-se dizer que ele já possui o estado $|\varphi\rangle$ desde o momento em que Alice realizou a medição em seu sistema. Diz-se, portanto, que esse estado realizou uma viagem efetiva no tempo [15]. Na próxima seção, essa ideia ficará mais clara.

4.4.2 O modelo geral de funcionamento de P-CTCs

O estudo do protocolo para teleportes, bem como a discussão apresentada no final da seção anterior, é muito importante para o entendimento de CTCs pós-selecionados (P-CTCs). Isso porque foi estudando-o que Bennett, Schumacher e Svetlichny introduziram esse modelo.

A diferença de uma P-CTC para um teleporte comum acontece justamente no momento em que é realizada a medição na base $\{|B_{jk}\rangle\}$. No caso do teleporte, todos os estados da base possuem possibilidade de serem o resultado da medição. Já no modelo para viagens no tempo, tem-se simplesmente uma projeção no estado $|B_{00}\rangle$ seguida de uma renormalização do estado, que introduz a não linearidade na CTC.

Mas, como já foi dito, o teleporte com essa pós-seleção é apenas um exemplo específico para CTCs por meio de pós-seleção. O modelo geral apresenta algumas diferenças, como será visto a seguir. O mais importante é perceber através desse exemplo

que o par emaranhado, adicionado de pós-seleção, parece “criar” uma CTC, no sentido de permitir viagens no tempo.

Para a introdução de uma P-CTC geral [49, 16, 17], serão considerados estados de dimensão arbitrária N . O sistema CTC será, então, dado pelo seguinte estado de dimensão N^2 :

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |u_k, u_k\rangle. \quad (4.84)$$

Seja $\hat{\rho} = \rho_i |\rho_i\rangle \langle \rho_i|$ o estado do sistema de respeito cronológico (CR) que interagirá com o sistema CTC . Assim, o estado inicial total é dado por

$$\hat{\rho} \otimes |\Phi\rangle \langle \Phi|. \quad (4.85)$$

O sistema total entra então numa porta lógica. Nessa porta, acontece uma interação unitária $\hat{U}$ entre o sistema CR e o primeiro subsistema do sistema CTC . Por fim, faz-se a pós-seleção do sistema CTC no mesmo estado de entrada. O estado final do sistema CR após a saída da porta lógica é, portanto:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \left(\hat{I} \otimes \langle \Phi| \right) \left[\left(\hat{U} \otimes \hat{I} \right) \left(\hat{\rho} \otimes |\Phi\rangle \langle \Phi| \right) \left(\hat{U}^\dagger \otimes \hat{I} \right) \right] \left(\hat{I} \otimes |\Phi\rangle \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\hat{I} \otimes \langle \Phi| \right) \left[\hat{U} \left(\hat{\rho} \otimes |u_k\rangle \langle u^k| \otimes \hat{\rho} \right) \hat{U}^\dagger \otimes |u_k\rangle \langle u^k| \right] \left(\hat{I} \otimes |\Phi\rangle \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \text{tr}_2 \left(\hat{U} \right) \hat{\rho} \text{tr}_2 \left(\hat{U}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Assim, após a renormalização, o sistema CR terá sofrido a seguinte evolução:

$$\hat{\rho} \rightarrow \frac{1}{\text{tr} \left(\hat{O} \hat{\rho} \hat{O}^\dagger \right)} \hat{O} \hat{\rho} \hat{O}^\dagger, \quad (4.87)$$

com $\hat{O} \equiv \text{tr}_2 \left(\hat{U} \right)$.

Uma situação “problemática” ocorre nos casos em que $\hat{O} \equiv 0$. Isso parece sugerir que o sistema que interage com o CTC de alguma maneira é aniquilado. Então, essa solução não é consistente e, portanto, pelo princípio de Novikov, também utilizado para D-CTCs, não aconteceria na natureza. Mesmo sem levar esse princípio em conta, como evoluções não ocorrem com precisão arbitrária na prática, pode-se considerar que a não linearidade da P-CTC amplificaria drasticamente o erro, impedindo que situações desse tipo aconteçam.

4.4.3 Distinção entre estados não ortogonais

Assim como no caso das D-CTCs, é possível se apresentar uma interação entre um sistema CR e um sistema CTC que torna possível a distinção entre estados não ortogonais. Porém, diferentemente do modelo de Deutsch, as P-CTCs não podem ser usadas para distinção entre elementos de um conjunto de estados linearmente dependentes. Esse resultado foi apresentado por Brun e Wilde [49].

Para provar o que foi dito no parágrafo anterior, considere o seguinte conjunto de N vetores de dimensão N :

$$C = \left\{ |\psi_k\rangle; |\psi_j\rangle \neq \sum_{i \neq j} \alpha^i |\psi_i\rangle, \forall j \right\}. \quad (4.88)$$

Pode-se associar a cada elemento arbitrário $|\psi_j\rangle$ desse conjunto um vetor $|\varphi_j\rangle$ tal que

$$\langle \varphi^j | \psi_i \rangle = 0, \forall i \neq j. \quad (4.89)$$

Assim, $|\langle \varphi^{(j)} | \psi_{(j)} \rangle| > 0$. Portanto, o que se quer agora é mostrar que existe um circuito que implementa a seguinte operação $\hat{O}$ sobre o sistema CR :

$$\hat{O} = |u_j\rangle \langle \varphi^j|, \quad (4.90)$$

sendo $\{|u_j\rangle\}$ uma base ortonormal de $W^{(N)}$. Isso porque, após a normalização, ter-se-ia a seguinte evolução:

$$|\psi_j\rangle \rightarrow |u_j\rangle. \quad (4.91)$$

Uma unitária $\hat{U}$ tal que $\hat{O} = tr_2(\hat{U})$ surge da composição da operação de *swap* ($\hat{S} = |u_j\rangle \langle u^k| \otimes |u_k\rangle \langle u^j|$) com a seguinte operação controlada:

$$|u_k\rangle \langle u^k| \otimes \hat{T}_k, \quad (4.92)$$

sendo que cada operador $\hat{T}_k$ é escolhido de modo que satisfaça a seguinte condição:

$$\langle u^{(k)} | \hat{T}_{(k)} = \langle \varphi^{(k)}|. \quad (4.93)$$

Com essas considerações:

$$\hat{U} = \left(|u_k\rangle \langle u^k| \otimes \hat{T}_k \right) \hat{S} = |u_j\rangle \langle u^k| \otimes \hat{T}_j |u_k\rangle \langle u^j|. \quad (4.94)$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \hat{O} &= |u_j\rangle \langle u^k| \langle u^j| \hat{T}_j |u_k\rangle \\
 &= |u_j\rangle \langle u^j| \hat{T}_j |u_k\rangle \langle u^k| \\
 &= |u_j\rangle \langle u^j| \hat{T}_j \\
 &= |u_j\rangle \langle \varphi^j|.
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Está provado, portanto, que os elementos do conjunto C podem ser distinguidos em P-CTCs.

Será agora mostrado que vetores linearmente dependentes não podem ser distinguidos. Para isso, basta notar que um operador de duas partes qualquer, em especial uma unitária $\hat{U}$ que age em dois sistemas, pode ser decomposto, sem perda de generalidade, da seguinte maneira para numa certa base $\{|u_k\rangle\}$:

$$\hat{U} = \hat{A}_k^j \otimes |u_j\rangle \langle u^k|. \tag{4.96}$$

Assim:

$$\hat{O} = \hat{A}_k^k. \tag{4.97}$$

Então, $\hat{O}$ é sempre um simples operador linear. Portanto, se para um certo conjunto de vetores tem-se que $\hat{O}|\psi_0\rangle = C_0|u_0\rangle \rightarrow |u_0\rangle$ e $\hat{O}|\psi_1\rangle = C_1|u_1\rangle \rightarrow |u_1\rangle$, não é possível que exista um elemento $|\psi_k\rangle = \alpha|\psi_0\rangle + \beta|\psi_1\rangle$, para um certo k , tal que $\hat{O}|\psi_k\rangle \rightarrow |u_k\rangle$. Isso porque valeria a igualdade:

$$\hat{O}|\psi_k\rangle = \alpha C_0|u_0\rangle + \beta C_1|u_1\rangle. \tag{4.98}$$

Com isso, está provado que P-CTCs não distinguem elementos de um conjunto de estados linearmente dependentes.

5 Formalismo de Dois Estados

No capítulo 1, estudou-se um pouco sobre o formalismo usual da MQ, no qual o máximo de informação que se pode ter sobre um sistema quântico está contido no vetor de estado. Agora, será apresentado um formalismo alternativo proposto por Aharonov, Bergmann e Lebowitz em 1964 [18, 19, 20, 21]. A ideia, que ficará clara adiante, era remover a assimetria temporal presente no formalismo usual, pois, para eles, essa não é uma característica inerente da teoria, mas somente uma consequência da *escolha das condições temporais de contorno*.

5.1 Introdução ao Formalismo

Nessa construção, ao invés de se considerar que num certo instante t o sistema é totalmente descrito apenas por um único vetor de estado $|\psi\rangle$, como no formalismo usual, ele será totalmente representado por dois vetores de estado (e é daí que vem o nome do formalismo):

$$\langle\varphi| \otimes |\psi\rangle. \quad (5.1)$$

Esse bi-vetor, além de conter o estado $|\psi\rangle$ pertencente a um espaço de estados W , é constituído também pelo vetor $\langle\varphi| \in \bar{W}$. Este último estado é obtido, na prática, por meio de uma medição num instante de tempo $t_1 > t$, apesar de ser considerado uma informação já existente no tempo t . Enquanto a evolução de $|\psi\rangle$ é regida pela equação apresentada no final da seção 2.1, a evolução temporal de $\langle\varphi|$ é dada por

$$\langle\varphi(t)| = \langle\varphi(t_1)| \hat{U}^\dagger(t, t_1), \quad (5.2)$$

com $t_1 > t$. O estado $|\psi\rangle$ é chamado de pré-seleção e $\langle\varphi|$ é denominado como pós-seleção.

As predições desse formalismo são as mesmas que surgem com o formalismo usual. Porém, como era de se esperar de um novo formalismo, ele muda drasticamente a maneira como se interpreta os fenômenos. O que contribui para essa mudança é justamente a presença de $\langle\varphi|$. Observe que se pode interpretá-lo como um estado “viajando” do futuro para o passado. Por isso que, nesse formalismo, é suposto que, mesmo que ainda inacessível na prática, de alguma maneira o futuro do estado já existe.

Com isso, precisa-se criar uma nova regra para se obter a probabilidade de se medir um determinado estado num instante t entre t_1 e t_2 , já que deve-se usar uma expressão que envolva o estado do sistema no futuro. Para criar essa regra, imagina-se a seguinte situação:

1. Um sistema, no instante t_0 , encontra-se no estado $|\psi\rangle$;
2. Deste instante até t , ele sofre uma evolução dada por $\hat{U}(t_0, t)$, quando, ao final do período, é medido na base $\{|u_i\rangle\}$;
3. Após essa medição, o estado do sistema passa a ser $|u_j\rangle$, para um j específico;
4. O sistema evolui até o instante t_1 segundo o operador de evolução dado por $\hat{U}(t, t_1)$;
5. No instante t_1 , o sistema é medido numa base que contenha o estado $|\varphi\rangle$, passando a se encontrar nesse estado.

Utilizando o formalismo usual, a probabilidade deste evento acontecer é dada por (lembrando que $\hat{U}(t, t') = \hat{U}^\dagger(t', t)$):

$$P_j = \left| \langle \varphi | \hat{U}(t, t_1) | u_{(j)} \rangle \langle u^{(j)} | \hat{U}(t_0, t) | \psi \rangle \right|^2. \quad (5.3)$$

Mas o valor que se queria obter inicialmente não é esse. Isso porque o caso no qual se está interessado, apesar de ser muito parecido com a situação apresentada acima, não é exatamente idêntico a ela. Não é difícil perceber que a diferença está no fato de que, na situação acima, a probabilidade medida considera que $|\varphi\rangle$ é apenas um dos possíveis estados do sistema no final do processo. No formalismo de dois estados, como foi visto, considera-se que, mesmo que inacessível na prática, a informação de que o sistema estará no estado $|\varphi\rangle$ no instante t_1 já existe. Assim, o estado $|\varphi\rangle$ é a única opção de medição no final do processo.

Para “corrigir” o valor obtido na situação hipotética acima, deve-se dividir P_j pela probabilidade de ocorrência de todos os eventos possíveis nos quais $|\varphi\rangle$ é o estado do sistema após a etapa 5, isto é, devemos dividir P_j por $\sum_i P_i$. Dessa forma, obtém-se a regra ABL, que é a probabilidade de se medir um dado estado $|u_j\rangle$ no formalismo de dois estados:

$$P_{ABL}(u_j) = \frac{\left| \langle \varphi | \hat{U}(t, t_1) | u_{(j)} \rangle \langle u^{(j)} | \hat{U}(t_0, t) | \psi \rangle \right|^2}{\sum_i \left| \langle \varphi | \hat{U}(t, t_1) | u_i \rangle \langle u^i | \hat{U}(t_0, t) | \psi \rangle \right|^2}. \quad (5.4)$$

Para ser mais rigoroso, conceitos de probabilidade condicional estão sendo usados no raciocínio acima. A ligação com essas ideias matemáticas fica clara com a seguinte análise: seja um *ensemble* cujos elementos estejam no estado $|\psi\rangle$ em t_0 . Cada um dos sistemas evolui segundo um operador $\hat{U}$ até um certo instante t , quando são medidos na base $\{|u_i\rangle\}$. Depois, eles sofrem novamente a ação do operador $\hat{U}$ até t_1 , quando, enfim, são medidos numa base que contenha o estado $|\varphi\rangle$. Se A é o conjunto dos sistemas que se encontravam no estado $|u_j\rangle$ após a etapa intermediária e B é o conjunto dos sistemas que terminaram no estado $|\varphi\rangle$, então pode-se construir o seguinte diagrama de Ven:

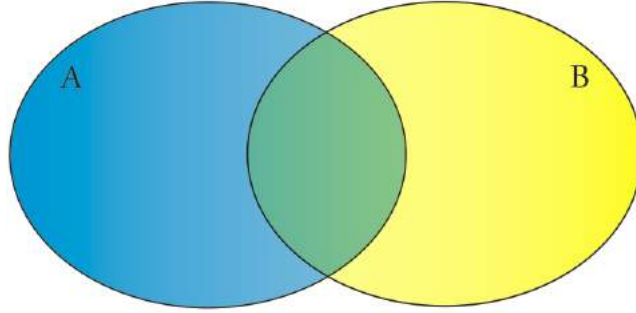


Figura 5.1: Diagrama de Ven que explicita a construção da regra ABL

O que se quer é calcular a probabilidade de ocorrência da parte verde no conjunto B . Não é difícil perceber que isso é dado pela seguinte expressão:

$$P = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (5.5)$$

Essa expressão coincide com (5.4).

Foi a partir da regra ABL que Aharonov e o seu grupo foram levados às ideias de *medição fraca* e de *valor fraco*, que deixaram clara a importância do formalismo de dois estados.

A seguir, será feita uma introdução a essas ideias, onde será discutido o significado de (5.4).

5.2 Medição Fraca e Valor Fraco

A ideia de retrocausalidade é encarada por muitos como ficção científica. Assim, para essas pessoas, o Formalismo de Dois Estados poderia ser visto como um meio de esconder a assimetria temporal da mecânica quântica. Mas esse formalismo conduz

ao conceito de Valor Fraco, que está sendo amplamente estudado e testado experimentalmente [20, 21, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58]. Alguns podem argumentar que é possível falar em valor fraco sem citar o formalismo de dois estados. Isso é até verdade, mas, com o formalismo, esse conceito surge de maneira bem natural. De qualquer maneira, a existência do valor fraco é uma forte evidência da realidade da retrocausalidade. Para deixar isso mais claro, será feita uma introdução ao valor fraco.

Vamos imaginar uma situação (experimento de Stern-Gerlach) na qual a pre-seleção é identificada pelo estado $|z+\rangle$ e a pós-seleção, pelo estado $|x+\rangle$. Usando a expressão (5.4), não é difícil perceber que a probabilidade de obtenção de $|z+\rangle$ ou $|x+\rangle$ como resultado de medições nas direções $\hat{z}$ e $\hat{x}$, respectivamente, em algum instante intermediário entre a realização da pré e da pós-seleção é 1. Aqui, já se tem uma característica interessante: é esperado que uma medição na direção $\hat{z}$ mantivesse o sistema no estado $|z+\rangle$, mas o que surpreende é uma medição na direção $\hat{x}$ resultar necessariamente em $|x+\rangle$. É verdade que, se isso não ocorresse, algo não estaria consistente, pois haveria possibilidade de o sistema colapsar no estado $|x-\rangle$, o que obrigaria a medição seguinte (a pós-seleção) a “colocar” o sistema no estado $|x+\rangle$ – mas sabe-se que isso não é possível. Contudo, mesmo assim, é curioso observar que o resultado para a probabilidade desse caso parece indicar que o sistema já “sabe” não só a escolha do observável a ser medido como o resultado da próxima medição.

Mais ainda, pode-se pensar sobre qual seria a probabilidade de obtenção do estado $|\hat{n}(\theta, \varphi)\rangle$, que é dado pela expressão 2.15, por meio de uma medição realizada (numa direção arbitrária $\hat{n}$) entre a pré e a pós-seleção. Sem perda de generalidade, pode-se considerar $\varphi = 0$ para simplificar. Novamente, usando (5.4), não é difícil concluir que

$$P_{ABL}(n(\theta, 0)) = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[1 + \sin\theta]}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[1 + \sin\theta] + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[1 - \sin(\theta + \pi)]}. \quad (5.6)$$

Assim, de modo geral, observa-se a existência de um tipo de polarização da possibilidade de colapso em um dos auto-estados do observável medido. Talvez a expressão acima não deixe isso suficientemente claro. Então, como exemplo, vamos observar o caso $\theta = \frac{\pi}{4}$. Nele,

$$P_{ABL}\left(n\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}. \quad (5.7)$$

Como é sabido, no formalismo usual haveria 50% de chance de o sistema ser encontrado no estado $|\hat{n}(\frac{\pi}{4}, 0)\rangle$. Mas a expressão acima mostra a existência de

um acréscimo de $\sqrt{2}/4$ na possibilidade de obtenção desse estado, em detrimento de $|\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle$. Isso confirma a existência da tal polarização de resultados numa medição entre outras duas, que, por sua vez, parece indicar a existência de retrocausalidade.

Mas, à essa altura, pode-se perguntar: qual o real significado dessa probabilidade? É realmente possível considerar uma medição entre a pre e pos-seleção? Esses questionamentos são pertinentes, e são justificados pelo fato de que uma medição intermediária geralmente perturbaria o sistema – inclusive apagando a informação sobre a pre-seleção. Então, será que não faz sentido o raciocínio inicial que levou à dedução da probabilidade ABL? Na verdade, a ideia usada não está errada, mas deve sofrer uma pequena (mas importante) modificação. Quando a expressão (5.4) é utilizada, obtém-se a resposta para o seguinte questionamento: realizando-se uma medição que não perturbasse (ou quase não perturbasse) o sistema, qual a chance de se obter um determinado resultado?

Essa medição é chamada de *medição fraca*. Vamos entender, então, como é possível modelá-la. Para isso, continuar-se-á o estudo do experimento de Stern-Gerlach da maneira proposta anteriormente nesta seção. Então, o observável de interesse pode ser representado por

$$\hat{S}_{\pi/4} = \hat{S}_x \cos \frac{\pi}{4} + \hat{S}_z \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{S}_x + \hat{S}_z). \quad (5.8)$$

Ainda, o hamiltoniano efetivo para a realização de medições, que representa a interação entre o sistema a ser medido e o sistema medidor, pode assumir a seguinte forma, de acordo com o modelo de medição de von Neuman:

$$\hat{H}_{int}(t) = g(t) \hat{O} \otimes \hat{P}, \quad (5.9)$$

sendo $\hat{O}$ o observável associado à propriedade que se deseja medir, $\hat{P}$ é o operador momento conjugado do ponteiro e $g(t)$ descreve o comportamento temporal da medição. No caso de uma medição ideal realizada no instante t_0 , $g(t) \propto \delta(t - t_0)$, isto é, $g(t)$ é proporcional à conhecida *delta de Dirac*. Para simplificar, pode-se considerar $g(t) = \delta(t - t_0)$.

Para a medição de spin que se tem interesse e considerando-se uma medição ideal, o hamiltoniano de interação é

$$\hat{H}_{int}(t) = \delta(t - t_0) \hat{S}_{\pi/4} \otimes \hat{P}. \quad (5.10)$$

Como o estado inicial do sistema a ser medido é

$$|z+\rangle = |n(0, 0)\rangle = \cos(\pi/8) |\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle + \sin(\pi/8) |-\hat{n}(\pi/4, 0)\rangle, \quad (5.11)$$

pode-se representar o sistema composto inicial (sistema a ser medido + sistema medidor) da seguinte maneira:

$$|\psi_i\rangle = \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \left| \hat{n}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \right\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \left| -\hat{n}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \right\rangle \right] \otimes |\varphi\rangle, \quad (5.12)$$

sendo que $|\varphi\rangle$ representa o estado inicial do sistema medidor.

Segue da equação de Schrödinger que o estado do sistema total após a medição é

$$|\psi_f\rangle = e^{-i \int_{t_A}^{t_B} \hat{H}_{int}(t') dt'} |\psi_i\rangle, \quad (5.13)$$

com $t_A < t_0 < t_B$.

Uma boa escolha para representar a função de onda inicial do sistema medidor $\varphi(x) = \langle q(x) | \varphi \rangle$ (sendo $|q(x)\rangle$ o auto-estado do operador posição) é dada por

$$\varphi(x) = (\sigma^2 \pi)^{-1/4} e^{-x^2/2\sigma^2}. \quad (5.14)$$

Como se pode perceber, ela nada mais é do que uma distribuição gaussiana, que pode ser considerada suficientemente geral, já que todas as outras distribuições probabilísticas tendem a coincidir com ela num caso limite. É possível notar ainda que a função não está totalmente definida, uma vez que se deve escolher o valor de σ . E é justamente aqui que aparecerá a diferença da medição fraca que pretendemos realizar com a medição usual. Nessa última, o aparato de medida pode perturbar completamente o sistema, mas obtém informação precisa. Isso pode ser entendido como $\sigma \ll |o_i|$ para todo autovalor não nulo o_i de um observável $\hat{O}$. Já no caso de medições fracas, a consequência de praticamente não se perturbar o sistema é a não obtenção de resultados tão fortes como usualmente se consegue. Assim, $\sigma \gg o_i$ para todo autovalor o_i do observável.

Com essa escolha, é possível escrever (ver [55] para mais detalhes):

$$\begin{aligned} (\hat{I} \otimes \langle q(x) |) |\psi_f\rangle &= (\sigma^2 \pi)^{-1/4} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-(x-1/2)^2/2\sigma^2} \left| \hat{n}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \right\rangle + \\ &+ (\sigma^2 \pi)^{-1/4} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-(x+1/2)^2/2\sigma^2} \left| -\hat{n}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Assim, a distribuição de probabilidade da posição do sistema medidor (a menos de normalização) é dada por

$$P(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-(x-1/2)^2/\sigma^2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-(x+1/2)^2/\sigma^2}. \quad (5.16)$$

No gráfico a seguir, vê-se um exemplo dessa distribuição no caso de uma medição usual. No caso, escolheu-se $\sigma = 0,1$. Observe que a gaussiana é bem localizada em torno dos autovalores do observável.

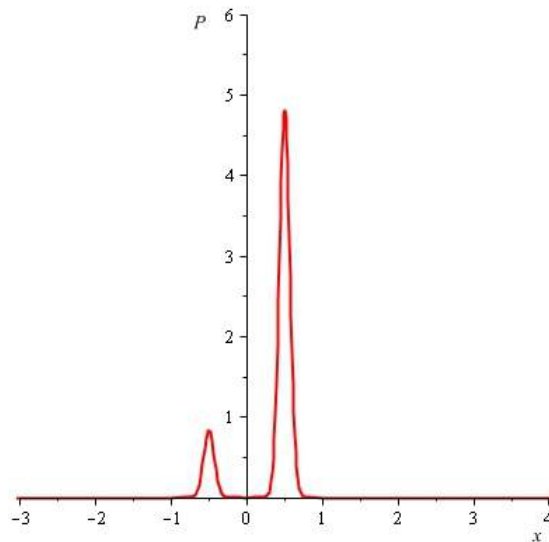


Figura 5.2: Distribuição de probabilidade do sistema medidor no caso de uma medição usual

Já no próximo, fez-se $\sigma = 10$. Nele, é possível, então, observar a distribuição de probabilidade do sistema medidor após uma medição fraca, cuja gaussiana não é bem localizada.

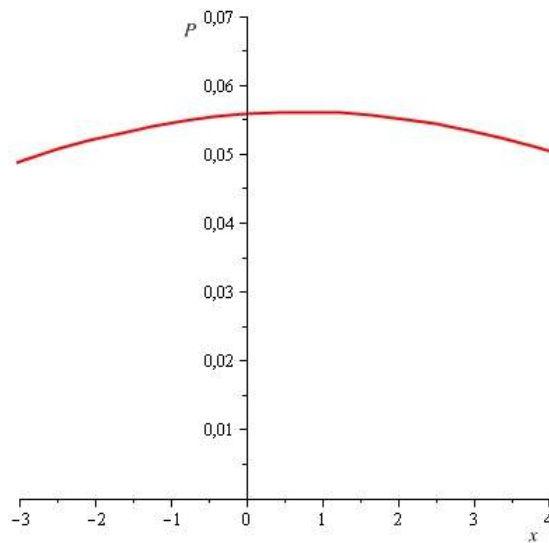


Figura 5.3: Distribuição de probabilidade do sistema medidor no caso de uma medição fraca de um sistema único sem pós-seleção

Essa falta de localização da gaussiana revela que quase não se obtém informação com a realização de uma medição fraca sobre um sistema único. Mas e se fosse observada a probabilidade de se medir fracamente N sistemas desse tipo na posição x ? Nesse caso, a menos de normalização, ter-se-ia o produto das probabilidades $P(x)$

obtidas anteriormente, isto é,

$$P_N(x) = \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) e^{-(x-1/2)^2/\sigma^2} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) e^{-(x+1/2)^2/\sigma^2} \right]^N. \quad (5.17)$$

A seguir, vê-se dois gráficos. Em ambos, fez-se $\sigma = 10$. Porém, no primeiro considerou-se $N = 10$ e, no segundo, $N = 5000$. Observe:

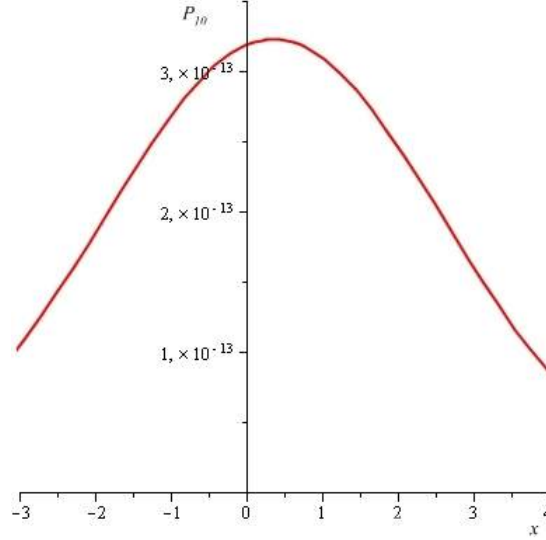


Figura 5.4: Distribuição de probabilidade de uma medição fraca de 10 sistemas sem pós-seleção

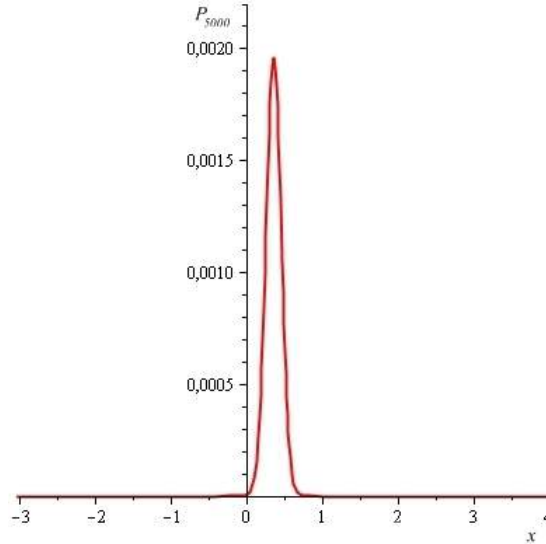


Figura 5.5: Distribuição de probabilidade de uma medição fraca de 5000 sistemas sem pós-seleção

Observa-se, então, que o acréscimo do número de sistemas observados tende a “fortalecer” o valor fraco. Além disso, o pico dessas curvas não coincidem com nenhum

autovalor do sistema. Na verdade, o valor se encontra próximo a $\langle z+ | \hat{S}_{\frac{\pi}{4}} | z+ \rangle = \sqrt{2}/4$.

Isso não se trata de uma coincidência. Numa situação geral na qual o hamiltoniano de interação é dado por (5.9), o estado inicial do sistema medidor é (5.14) e o do sistema a ser medido é $|\lambda\rangle = \lambda^i |o_i\rangle$ e $\hat{O} |o_i\rangle = o_i |o_i\rangle$, tem-se:

$$\left(\hat{I} \otimes \langle q(x) | \right) |\Psi_f\rangle = (\sigma^2 \pi)^{-1/4} e^{-(x-o_i)^2/2\sigma^2} \lambda^i |o_i\rangle. \quad (5.18)$$

Para $\sigma \gg 1$, a distribuição de probabilidade (a menos de normalização) é:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_i e^{-(x-o_i)^2/\sigma^2} |\lambda^i|^2 \\ &\cong \sum_i \left(1 - \frac{(x-o_i)^2}{\sigma^2} \right) |\lambda^i|^2 \\ &\cong 1 - \frac{\left(x - \sum_i |\lambda^i|^2 o_i \right)^2}{\sigma^2} \\ &\cong e^{-(x - \sum_i |\lambda^i|^2 o_i)^2/\sigma^2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Portanto, observa-se que a gaussiana será de fato centrada próxima a $\langle \lambda | \hat{O} | \lambda \rangle = \sum_i |\lambda^i|^2 o_i$, o que caracteriza um resultado diferente do obtido com medições “fortes”.

Como já está claro que o valor fraco se torna “forte” ao se analisar medições em *ensembles*, isto é, pode-se obter um resultado mais apurado ao se observar a probabilidade de se medir N sistemas na posição x , retornar-se-á ao experimento com um sistema único, agora com uma pequena modificação. Ao invés de se verificar o estado do sistema medidor logo após a medição fraca, ele só será observado após a realização da pós-seleção, que, como já foi dito anteriormente, acontece no estado

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] \left| \hat{n}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \right\rangle + \left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] \left| -\hat{n}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \right\rangle \right\}. \quad (5.20)$$

Nesse caso, o estado final do sistema medidor passa a ser

$$\begin{aligned} \varphi_f &= (\langle x+ | \otimes \langle q(x) |) |\psi_f\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] e^{-(x-1/2)^2/2\sigma^2} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] e^{-(x+1/2)^2/2\sigma^2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Então, a distribuição de probabilidade P_f (a menos de normalização) será dada

por

$$P_f(x) = |\varphi_f|^2 = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] e^{-(x-1/2)^2/2\sigma^2} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] e^{-(x+1/2)^2/2\sigma^2} \right\}^2 \quad (5.22)$$

No gráfico a seguir, escolheu-se novamente $\sigma = 10$.

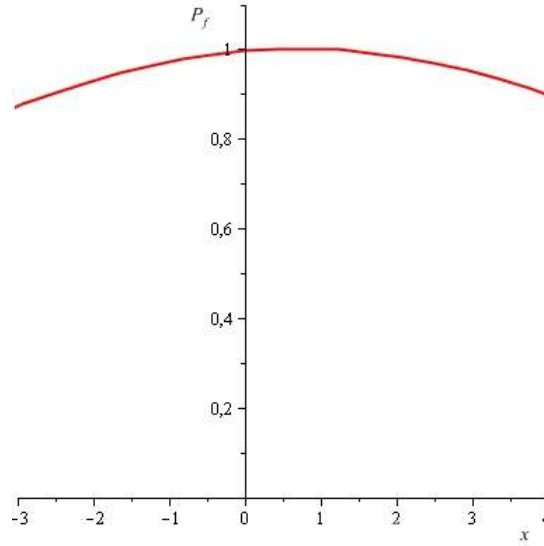


Figura 5.6: Distribuição de probabilidade do sistema medidor no caso de uma medição fraca de um sistema único com pós-seleção

Observe que, agora, o pico da gaussiana se encontra sobre outro valor de x . Para isso ficar claro, observe o gráfico a seguir, no qual, além de $\sigma = 10$, também se considerou a probabilidade de se medir fracamente $N = 5000$ sistemas na posição x .

Desta vez, o maior valor da distribuição de probabilidade se dá quando $x = \langle x+ | \hat{S}_{\frac{\pi}{4}} | z+ \rangle / \langle x+ | z+ \rangle = \sqrt{2}/2$. Esse resultado, novamente, não é uma coincidência. De fato, observe que o valor máximo da distribuição de probabilidade do sistema medidor acontece sempre em $x = O_w$, quando um observável $\hat{O}$ é medido e com O_w dado por

$$O_w = \frac{\langle \beta | \hat{O} | \alpha \rangle}{\langle \beta | \alpha \rangle}, \quad (5.23)$$

sendo $|\alpha\rangle$ o estado inicial (pré-seleção) do sistema quântico e $|\beta\rangle$ o estado final (pós-seleção). Para isso, seja $\varphi(x) = \langle q(x) | \varphi \rangle$ dada por (5.14) a função de onda inicial do

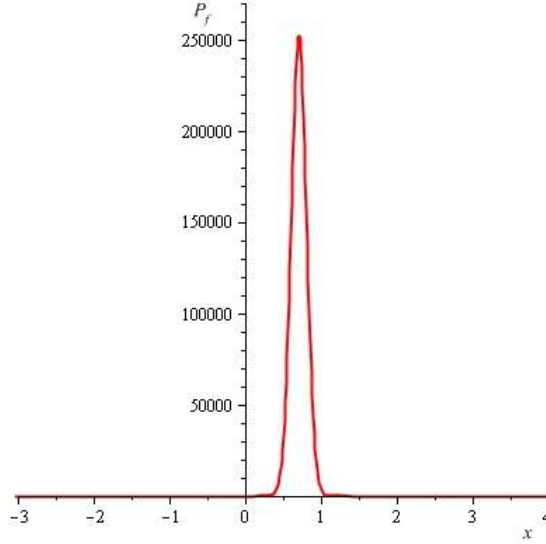


Figura 5.7: Distribuição de probabilidade de uma medição fraca de 5000 sistemas com pós-seleção

sistema medidor. Então, a função de onda após a pós-seleção é

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= (\langle \beta | \otimes \langle q(x) |) \left[(\sigma^2 \pi)^{-1/4} e^{-i\hat{O} \otimes \hat{P}} |\alpha\rangle \otimes |\varphi\rangle \right] \\
 &\cong (\sigma^2 \pi)^{-1/4} \langle \beta | \alpha \rangle \langle q(x) | \left(1 - iO_w \hat{P} \right) |\varphi\rangle \\
 &\cong (\sigma^2 \pi)^{-1/4} \langle \beta | \alpha \rangle \langle q(x) | e^{-iO_w \hat{P}} |\varphi\rangle \\
 &\cong (\sigma^2 \pi)^{-1/4} \langle \beta | \alpha \rangle e^{-(x-O_w)^2/2\sigma^2}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Portanto, a distribuição de probabilidade (normalizada) do sistema medidor é

$$|\varphi(x)|^2 \cong (\sigma^2 \pi)^{-1/2} e^{-(x-O_w)^2/\sigma^2}. \tag{5.25}$$

É importante ressaltar que tanto esse resultado quanto o apresentado para valores fracos sem pós-seleção é sempre válido, independentemente da função que modela o sistema medidor [55].

Outra maneira de se descrever a medição fraca com pós-seleção em *ensembles* que também será interessante se estudar é a seguinte: o observável medido na medição fraca é substituído por

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\hat{S}_i \right)_{\frac{\pi}{4}}.$$

sendo que $\left(\hat{S}_i \right)_{\frac{\pi}{4}}$ indica que será aplicado o operador $\hat{S}_{\frac{\pi}{4}}$ no i -ésimo sistema a ser medido e o operador identidade nos demais sistemas do ensemble. Assim, o hamiltoniano de

interação do ensemble com o sistema medidor é dado por

$$\hat{H}_{int}(t) = \frac{1}{N} \delta(t - t_0) \sum_{i=1}^N \left(\hat{S}_i \right)_{\frac{\pi}{4}} \otimes \hat{P}. \quad (5.26)$$

Seja $|\Psi_i\rangle$ o estado inicial do sistema total (ensemble + sistema medidor). Então

$$|\Psi_f\rangle = e^{-i \int_{t_A}^{t_B} \hat{H}_{int}(t') dt'} |\Psi_i\rangle. \quad (5.27)$$

Se o estado inicial do sistema medidor é dado por (5.14), o estado do ensemble é 5.12 e $|\Psi_f\rangle$ é o estado do sistema total (ensemble + sistema medidor) após a medição fraca, a função de onda do sistema medidor ao final do processo será

$$\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \alpha^{(N-j)} \beta^j e^{-[x-1/2+j/N]^2/2\sigma^2}, \quad (5.28)$$

com $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right]$ e $\beta = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right]$. Então, a distribuição de posição do sistema medidor é

$$P_f(x) = \left(\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \alpha^{(N-j)} \beta^j e^{-[x-1/2+j/N]^2/2\sigma^2} \right)^2. \quad (5.29)$$

O gráfico $P_N \times x$ está plotado a seguir com $\sigma = 1$ e $N = 100$.

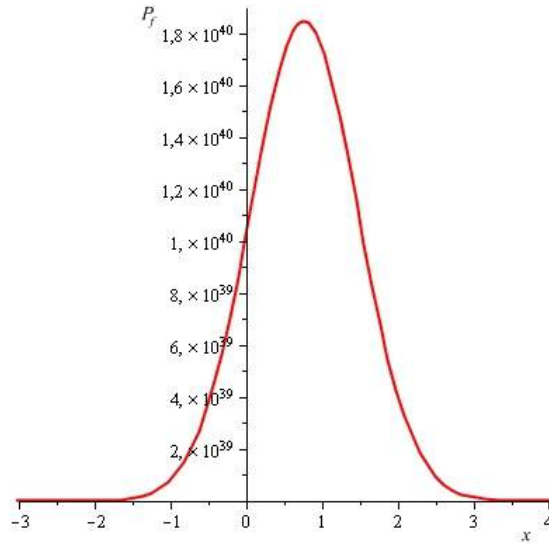


Figura 5.8: Distribuição de probabilidade do sistema medidor no caso de uma medição fraca com $\sigma = 1$ de um ensemble com 100 sistemas com pós-seleção

No estudo realizado aqui, o valor fraco com pós-seleção medido é somente um pouco diferente do valor encontrado em medições usuais. Contudo, nem sempre isso

acontece. Em alguns casos, o valor fraco O_w é suficientemente distante de qualquer um dos auto-valores o_i do observável. Observando essa última descrição do experimento, observa-se que a interferência da combinação de pequenos shifts o_i (ou, no caso, $1/2 - j/N$) “geram” essa translação maior O_w no sistema medidor, isto é,

$$\xi^i \psi(x - o_i) \cong \psi(x - O_w). \quad (5.30)$$

Para encerrar essa seção, vale lembrar que todas as ideias e conceitos que seguem de estudos do formalismo de dois estados podem ser entendidas sem esse formalismo. Porém, reforçamos que a escolha de um formalismo é feita visando-se uma maneira mais simples de entender os fenômenos e até de conseguir “enxergar” algum que ainda não é conhecido. Esse é o caso do conceito de valor fraco, cujo entendimento se torna bastante natural com o formalismo de dois estados.

5.3 Simetria Temporal

Como já foi dito, o formalismo de dois estados foi construído visando a obtenção de um caminho temporalmente simétrico para se entender a mecânica quântica. Mas o que de fato se quer dizer quando se afirma que uma teoria é temporalmente simétrica? A resposta é imediata e parece ser facilmente entendida. Dizer que uma teoria possui simetria temporal é equivalente a afirmar que, se ela admite um certo processo, então ela também admite o processo inverso.

Mas, tendo isso em mente, vamos analisar o porquê de o formalismo usual da mecânica quântica ser temporalmente assimétrico nas interpretações que consideram o colapso como uma mudança física no sistema. Considere um sistema preparado no estado $|\psi\rangle$ no instante t_0 . A partir daí, ele sofre a ação de um operador unitário $\hat{U}(t_0, t)$, até que sofre uma medição no instante t_1 e colapsa no estado $|\varphi\rangle$. Observa-se que a teoria não admite o processo inverso. O sistema até poderia iniciar no estado $|\varphi\rangle$, sofrer a ação da unitária e finalizar no estado $|\psi\rangle$, mas essa situação não é a simétrica da descrita anteriormente. A situação simétrica seria: o sistema inicia no estado $|\varphi\rangle$, num certo instante t_1 ; imediatamente após isso, ele passa a ser descrito pelo estado $\hat{U}(t_0, t_1)|\varphi\rangle$; a partir daí, ele é representado por $\hat{U}(t_0, t)|\varphi\rangle$ até o instante t_0 , quando ele passa a ser identificado simplesmente por $|\psi\rangle$. Pode-se dizer que, no caso desse exemplo, tem-se um processo cujo reverso também é admitido pela teoria? À primeira vista, pode-se pensar

que sim.

Então, com o exemplo simples acima, prova-se que, em interpretações que admitem o colapso, o formalismo usual da mecânica quântica é temporalmente assimétrico. Porém, o Formalismo de Dois Estados surgiu para “salvar” a propriedade de simetria temporal da teoria. Para antigir esse propósito, foi necessária a introdução de retrocausalidade, admitindo-se, portanto, que o estado futuro do sistema “viaja” no sentido contrário ao tempo, exercendo influência sobre o estado presente. Não é difícil perceber que essa maneira de pensar na mecânica quântica é temporalmente simétrica, basta observar que obtém-se exatamente a situação inversa a um processo fazendo a troca de “papéis” entre a pré e a pós-seleção (que é o mesmo que substituir t por $-t$ na expressão para o bi-vetor).

Vamos ver isso aplicado ao exemplo utilizado anteriormente. Nele, o formalismo de dois estados diz que o sistema é descrito inicialmente, no instante t_0 , pelo bi-vetor $\langle \varphi | \hat{U}^\dagger(t_0, t_1) \otimes |\psi\rangle$. Após isso, ele passa a ser representado por $\langle \varphi | \hat{U}^\dagger(t, t_1) \otimes \hat{U}(t_0, t) |\psi\rangle$, até que, em t_1 , ele passa a ser descrito simplesmente por $\langle \varphi | \otimes \hat{U}(t_0, t_1) |\psi\rangle$. Os passos anteriores podem ser colocados em ordem inversa pois, ainda assim, o processo será admitido pela teoria. Portanto, observa-se que, de fato, o formalismo de dois estados apresenta uma formulação temporalmente simétrica para a física quântica.

5.4 Máquina de translação no tempo

Nesta seção, será exibida uma ideia proposta por Aharonov *et al.* em 1990 [22] e elaborada por Vaidman em 1991 [23]. Como ficará claro ao final dessa seção, é possível idealizar a construção de máquinas que permitiriam viagens no tempo tanto para o futuro quanto para o passado. Essas viagens aconteceriam sem paradoxos porque elas aconteceriam de uma maneira um pouco diferente da que se costuma imaginá-las.

Antes de partir para a “confecção” da máquina, a seguinte relação matemática será observada:

$$\sum_{k=0}^N c_k f(t - \alpha_k) \cong f(t - \xi). \quad (5.31)$$

Essa expressão pode ser entendida como uma generalização de (5.30). O que ela diz é que uma combinação linear de $N + 1$ termos da função f deslocada por pelos valores dados por elementos de $\{\alpha_k\}$ é aproximadamente igual a essa mesma função deslocada por um ξ . Não é difícil perceber que isso é válido em alguns casos, mas é interessante notar que

alguns valores de c_k e α_k tornam a expressão válida para toda uma classe de funções. Em especial, será mostrado que, com

$$\alpha_k = \frac{k}{N} \quad (5.32)$$

e

$$c_k = \binom{N}{k} \xi^k (1 - \xi)^{N-k}, \quad (5.33)$$

a expressão (5.31) é válida sempre que a transformada de Fourier $\tilde{f}$ de f for tal que

$$|\tilde{f}(w)| < e^{-a|w|}, \quad (5.34)$$

com $a > |\xi(\xi - 1)|$ e $|w| \gg 1$. A transformada de Fourier de (5.31) é dada por:

$$\sum_{k=0}^N c_k e^{-iw\alpha_k} \tilde{f}(w) \cong e^{-iw\xi} \tilde{f}(w). \quad (5.35)$$

Substituindo os valores de α_k e c_k , isto é, escrevendo

$$\tilde{f}(w) \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (\xi e^{-iw/N})^k (1 - \xi)^{N-k} \cong e^{-iw\xi} \tilde{f}(w), \quad (5.36)$$

percebe-se que

$$[1 + \xi(e^{-iw/N} - 1)]^N \cong e^{-iw\xi}. \quad (5.37)$$

Mas observe que é possível escrever a seguinte aproximação do logaritmo do termo à esquerda dessa última expressão:

$$\ln [1 + \xi(e^{-iw/N} - 1)]^N = -iw\xi + \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \frac{w^2}{N} + \dots \quad (5.38)$$

Assim,

$$\ln [1 + \xi(e^{iw/N} - 1)]^N \cong -iw\xi \Rightarrow [1 + \xi(e^{-iw/N} - 1)]^N \cong e^{-iw\xi}, \quad (5.39)$$

que é exatamente o que se queria mostrar.

Vale ressaltar que esse resultado é válido mesmo para $w > \sqrt{N}$, pois $\sum_k c_k = [\xi + (1 - \xi)]^N = 1$ e o maior valor de α_k é 1. Assim, como $|\tilde{f}(w)| < e^{-a|w|}$,

$$\left| \sum_{k=0}^N c_k e^{-iw\alpha_k} \tilde{f}(w) \right| \leq \left| e^{-iw} \tilde{f}(w) \sum_{k=0}^N c_k \right| = |\tilde{f}(w)| < e^{-a|w|}. \quad (5.40)$$

Portanto, os termos de ordem w^2/N não podem contribuir de fato na expressão (5.38). Com esse argumento, está provado de fato a validade geral de (5.30) nas condições de interesse.

Mas como usar esse resultado para a confecção de uma máquina que realize *shifts* no tempo? Relembrando o que foi visto na seção 4.2, uma das maneiras é devida à teoria da relatividade restrita, mas, para se evitar a necessidade de se controlar diretamente a nave, será apresentada uma maneira de se construir uma máquina que funcione somente por causa da presença de potenciais externos. Usar-se-á, portanto, o fenômeno de dilatação gravitacional do tempo.

A relação entre o tempo próprio de um sistema colocado numa região que está sob influência de um potencial gravitacional ϕ e o tempo de um observador externo ($\phi = 0$) é

$$d\tau = dt\sqrt{1 + 2\phi/c^2}. \quad (5.41)$$

Se o sistema estiver dentro de uma casca esférica de raio R e massa M , o potencial agindo sobre ele será $\phi = -GM/R$, sendo G a constante gravitacional. Assim, a diferença entre um período de tempo T medido por um observador suficientemente distante da esfera e o período de evolução do sistema sob o potencial é

$$\delta t = T \left(1 - \sqrt{1 - 2GM/Rc^2} \right). \quad (5.42)$$

Essa diferença δt é muito pequena e, portanto, somente ela não serve classicamente para se realizar viagens no tempo (vale ressaltar novamente que, mesmo assim, as translações só poderiam acontecer no sentido positivo do tempo, ou seja, isso não permitiria viagens para o passado).

Contudo, o resultado que acabou de se provado mostra exatamente que pequenas translações numa função podem ser combinadas de modo a obter-se aproximadamente a mesma função transladada por um valor maior. Como funções de onda $\psi(\vec{x}, t) = \langle q(\vec{x}) | \psi(t) \rangle$ em geral possuem transformada de Fourier que decrescem rapidamente para altas frequências, pode-se fazer uso desse resultado na mecânica quântica. Assim, uma combinação (poderada pelos coeficientes c_k) dessas funções, cada uma deslocada de um pequeno $\delta t_k = \alpha_k \delta t$, é aproximadamente igual a uma única função de onda deslocada de $\Delta t = \xi \delta t$, isto é,

$$\sum_{k=0}^N c_k \psi(\vec{x}, t - \delta t_k) \cong \psi(\vec{x}, t - \Delta t). \quad (5.43)$$

Nesse ponto, resta somente apresentar uma maneira prática de se obter o resultado acima. E a maneira é a seguinte:

- A máquina é constituída de três parte: uma casca esférica de massa M , um dispositivo mecânico (o motor) com um *sistema quântico de operação* (SQO) e um dispositivo de medição, que pode preparar e verificar estados do SQO.
- A casca esférica cerca o sistema que viajará no tempo. Ela, inicialmente, possui raio $R = R_0$, mas pode assumir os valores $R_0, R_1, \dots, R_N$, sendo que os valores de $R_1, \dots, R_N$ são dados por

$$\delta t_k = \frac{n\delta t}{N} = T \left(\sqrt{1 - 2GM/R_0 c^2} - \sqrt{1 - 2GM/R_k c^2} \right). \quad (5.44)$$

Ainda, R_0 será considerado suficientemente grande. Com isso, a expressão anterior pode ser substituída por

$$\delta t_k = T \left(1 - \sqrt{1 - 2GM/R_k c^2} \right). \quad (5.45)$$

- O motor altera o raio da casca esférica no instante $t = 0$ e espera um período (medido externamente) T , quando faz com que o raio volte a ser R_0 .
- O SQO possui $N + 1$ graus de liberdade e controla o raio que a casca possuirá durante o período T . Se o estado do SQO for $|k\rangle$, a casca assumirá o raio R_k .
- O dispositivo de medição prepara o SQO no estado

$$|\varsigma_{(i)}\rangle = \gamma \sum_{k=0}^N c_k |k\rangle, \quad (5.46)$$

com $\gamma = \left(\sum_{k=0}^N |c_k|^2 \right)^{-1/2}$ e os coeficientes c_k dados por (5.33). O dispositivo também pós-seleciona o sistema após o período T . A máquina funcionará somente se o estado final do SQO for

$$|\varsigma_{(f)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{k=0}^N |k\rangle. \quad (5.47)$$

Agora, será mostrado como uma máquina com as características apresentadas acima poderia funcionar. Inicialmente, o sistema composto pelo estado que viajará no tempo, a esfera e o SQO é

$$|\psi(0)\rangle \otimes |R_0\rangle \otimes |\varsigma_{(i)}\rangle, \quad (5.48)$$

sendo que $|R_0\rangle$ simplesmente indica que a casca esférica possui raio R_0 e, apesar de ser um objeto macroscópico, assume-se que ela pode ser tratada pela mecânica quântica.

Assim, o estado do sistema assim que o motor atua sobre ele no instante $t = 0$ é

$$\gamma |\psi(0)\rangle \otimes \sum_{k=0}^N c_k |R_k\rangle \otimes |k\rangle. \quad (5.49)$$

Ou seja, a esfera assumirá um valor R_k para cada componente k do SQO. Por sua vez, isso acarretará em diferentes relações entre o fluxo de tempo do sistema e o fluxo de tempo externo. Portanto, após a passagem do período (externo) T , o sistema total estará no estado

$$\gamma \sum_{k=0}^N c_k |\psi(T - \delta t_k)\rangle \otimes |R_k\rangle \otimes |k\rangle. \quad (5.50)$$

Exatamente nesse instante, o motor faz com que a casca esférica volte a ficar com o seu raio original. Então, o sistema passa a ser representado pelo seguinte estado:

$$\gamma \sum_{k=0}^N c_k |\psi(T - \delta t_k)\rangle \otimes |R_0\rangle \otimes |k\rangle. \quad (5.51)$$

Por fim, caso a pós-seleção do estado do SQO retorne com o resultado desejado, o estado final do sistema será

$$\left(\sum_{k=0}^N c_k |\psi(T - \delta t_k)\rangle \right) \otimes |R_0\rangle \otimes |\zeta(f)\rangle. \quad (5.52)$$

Mostrou-se então que o sistema que viajará no tempo de fato termina no estado $\sum_{k=0}^N c_k \psi(\vec{x}, T - \delta t_k)$, que é arbitrariamente (com o aumento de N) próximo de $\psi(\vec{x}, T - \Delta t)$.

Uma característica interessante dessa máquina de viagens no tempo é que os sistemas devem permanecer isolados, isto é, sem interagir com o mundo externo. Assim, caso $\Delta t < 0$, o sistema será movido para o estado em que ele iria estar se permanecesse isolado. Ainda, no caso em que $\Delta t > T$, o sistema volta para o seu passado anterior à sua entrada na máquina de viagens no tempo. Mas, antes disso, ele pode ter interagido com o ambiente. Assim, para garantir que o sistema voltará exatamente para o seu passado, deve-se manter ele isolado desde o instante para o qual ele retornará. Essa característica pode parecer uma limitação da máquina. Contudo, ela conduz a uma possibilidade interessante: ainda no caso em que $\Delta t > T$, se o sistema não estivesse isolado no instante para o qual retornou, ele seria movido para o seu *passado contrafactual*, isto é, para o estado em que ele supostamente estaria no passado se estivesse isolado.

Ainda não existem demonstrações experimentais dessa máquina de translação no tempo. Em 1994, Suter [59] afirmou ter conseguido tal feito, mas, na verdade, o seu experimento pode ser entendido como uma interessante medição de valor fraco [20, 60].

O maior “problema” dessa máquina do tempo é a necessidade de um resultado específico para o estado final do SQO. A probabilidade de sucesso da operação é dada pelo quadrado da norma da projeção do vetor (5.51) no subespaço definido por (5.47), isto é,

$$P = \left\| \frac{\gamma}{\sqrt{N+1}} \sum_{k=0}^N c_k |\psi(T - \delta t_k)\rangle \otimes |R_0\rangle \right\|^2. \quad (5.53)$$

Como os valores de δt_k são pequenos para todo k , pode-se considerar que

$$\langle \psi(T - \delta t_k) | \psi(T - \delta t_j) \rangle \cong 1. \quad (5.54)$$

Então, estima-se

$$P \cong \frac{\gamma^2}{N}. \quad (5.55)$$

Como γ decresce muito rapidamente com o aumento de N , pode-se perceber que as chances de sucesso de funcionamento da máquina são baixíssimas.

6 Conclusão e perspectivas futuras

Neste trabalho, continuou-se os estudos iniciados em [61], com o intuito de compreender melhor o papel do tempo na mecânica quântica.

Os modelos para CTCs estudados aqui possuem importância muito maior do que simplesmente se considerar a existência de tais elementos ou do que a possibilidade de viagens no tempo. Eles podem contribuir para o desenvolvimento de uma teoria quântica de gravitação ainda inexistente, através de um entendimento maior de alguns fenômenos. Um argumento a favor disso foi visto no capítulo 3, quando se disse que o processo de se tomar o traço parcial para se definir o estado final do sistema que interage com a D-CTC é semelhante ao método usado na teoria de evaporação de buracos negros [47]. Essa semelhança também pode ser vista no estudo dos P-CTCs [49]. Assim, o teste dos limites desses modelos, com a identificação de possíveis problemas e de características peculiares, podem ajudar a criar a compreensão necessária para a construção de uma teoria quântica de gravitação satisfatória.

Em particular, os P-CTCs são bastante interessantes por poderem ser simulados em laboratório. Assim, pode-se testar muitas das predições feitas a respeito deles. Por outro lado, o modelo de Deutsch tem fornecido interessantes resultados e levantado algumas questões importantes. Uma dessas discussões está relacionada ao tipo de solução que de fato aconteceria no caso de existir mais de uma solução consistente para o sistema CTC. Como foi visto, uma das interpretações apresentadas para isso afirma que a resposta para essa questão pode estar ligada a características locais da região com a CTC.

Além disso, o modelo de Deutsch, como mostramos originalmente em [13], precisa sofrer modificações. Para que ele seja de fato consistente, é necessário restringir as operações unitárias de interação entre o sistema CR e o sistema CTC. Uma das operações que não poderiam ocorrer é a que permitiria distinção de elementos de um conjunto de estados linearmente dependentes (apresentada no capítulo 3). Outro tipo de operação que conduziria também a comunicação com velocidade superluminal foi apresentada recentemente por Ahn *et al.* [62] e por Brun *et al.* [63], mostrando que D-CTCs permitem clonagens. Essa necessidade de restrições talvez seja a maior fraqueza do modelo de

Deutsch. Ou não: elas podem estar indicando que em certas regiões do espaço-tempo não é possível se realizar qualquer tipo de operação.

Outro tópico interessante sobre viagens no tempo é a máquina de translação no tempo que pode ser construída na mecânica quântica usual. Ainda não está muito clara a maneira prática de se utilizar essa ideia, mas, ainda assim, não deixa de ser curioso o fato de uma teoria tão bem aceita, como é a mecânica quântica, admitir esse tipo de processo. Tudo bem que não se trata de uma máquina que realiza viagens no tempo da maneira com que comumente se imagina, contudo isso não a torna menos intrigante e/ou interessante.

É importante ressaltar a importância do formalismo de dois estados para a descoberta dessa possibilidade. Sem ele, muito provavelmente se demoraria ainda vários anos para que essa ideia pudesse vir à tona. E é justamente este o papel de um bom formalismo: fornecer uma maneira mais natural de se entender os fenômenos, de modo que eles fiquem mais evidentes e mais fáceis de serem descobertos. De fato, o formalismo proposto por Aharonov e seu grupo tem conduzido a importantes descobertas – além da máquina de translação no tempo e do valor fraco, que foram estudados neste trabalho, pode-se citar as variáveis modulares [50, 55, 57, 58, 64, 65, 66] e o fenômeno de super-oscilações [51, 57, 67, 68, 69].

Esse último é particularmente interessante porque é o que está por trás da máquina de translação no tempo e do fato de o valor fraco poder ser tão maior do que qualquer autovalor do observável medido. Para ser mais exato, é esse conceito que torna possível equações do tipo da equação (5.31). Ainda existe muito para se estudar sobre o fenômeno de super-oscilações.

Outro conceito advindo do formalismo de dois estados são as variáveis modulares. Esse conceito foi introduzido em 1969 por Aharonov, Pendelton e Petersen para tentar explicar a não localidade de fenômenos topológicos, como o efeito Aharonov-Böhm. Para o estudo desse efeito, por exemplo, introduzem-se interações não locais entre as partículas e o campo eletromagnético. Dentro desse tópico, as variáveis modulares de posição e momento são as que mais renderam trabalhos e resultados. Já se propôs, inclusive, uma descrição via o formalismo de Schwinger para explicar o conceito de variável modular de posição e momento explicitamente em uma representação de Schrödinger [70]. Contudo, as variáveis de energia e tempo, apesar de já terem sido mencionadas pelo próprio

Aharonov, ainda são pouco estudadas. Um problema em aberto é o de como introduzir uma descrição para elas análoga ao proposto com o formalismo de Schwinger para as variáveis de posição e momento. Obviamente, essa tarefa não é simples, uma vez que é fato conhecido que na MQ não-relativística o espaço e o tempo são tratados de maneira intrinsecamente diferentes, já que o tempo é um parâmetro externo e a posição das partículas é um observável quântico.

Além de tudo isso, observou-se também a aparente rigidez da mecânica quântica, por meio do estudo da teoria não linear de Weinberg. Viu-se um exemplo que mostra que de fato existe dinâmica na esfera S^3 (ou S^{2n+1} de modo geral). Claro que na mecânica quântica usual é necessária a adição de uma fase global no estado (2.15). Porém, ela a sua solução, como foi visto no exemplo estudado, não possui significado físico. Assim, de modo geral, pode-se dizer que a física num sistema único acontece somente na esfera de Bloch no caso usual. Já na teoria de Weinberg, como foi visto, a dinâmica até pode ser projetada na esfera de Bloch, mas existe “movimento” de fato acontecendo em S^3 . Uma ideia a ser investigada no futuro é se existe possibilidade de medir esse “movimento” no caso de um sistema único. Assim, ficaria clara a diferença para a quântica usual, pois, nela, até existe maneira de se observar efeitos gerados pela fase global, mas somente quando se observa interferência dessa fase de um sistema com a de outro (é isso, inclusive, que está por trás de teorias de Gauge, por exemplo).

Para finalizar, vale dizer que, apesar de já ser bem conhecido e aceito que o tempo possui caráter fundamental na física, ficou claro com este trabalho o quanto esse conceito está de fato ligado a várias outras ideias fundacionais. Por causa disso mesmo, acredita-se que um estudo mais aprofundado dos tópicos aqui tratados, bem como de outros que estão relacionados a eles, poderá conduzir a uma grande mudança na maneira que se entende a física, podendo (vale ressaltar novamente) contribuir inclusive para a construção de uma teoria gravitacional quântica satisfatória.

Referências Bibliográficas

- [1] Agostinho. *Confissões*, volume XI. Paulus, segunda edição edition, 1997. Trad. Maria Luiza Jardim Amarante. Rev. Antônio da Silveira Mendonça e H. Dalbosco.
- [2] Freeman J Dyson. *Disturbing the University*. Basic Books, 1979.
- [3] N.C.A. Costa and A.S. Sant’Anna. The mathematical role of time and space-time in classical physics. *Foundations of Physics Letters*, 14:553–563, 2001.
- [4] N.C.A. Costa and A.S. Sant’Anna. Time in thermodynamics. *Foundations of Physics*, 32:1785–1796, 2002.
- [5] A.S. Sant’Anna. *O que é uma Definição*. Barueri, 2005.
- [6] A.S. Sant’Anna. An axiomatic framework for classical particle mechanics without space-time. arXiv preprint physics/9904068, 1999.
- [7] Julian Barbour. *The End of Time: The Next Revolution in Physics: The Next Revolution in Physics*. Oxford University Press, 2000.
- [8] J. Barbour. The nature of time. arxiv preprint arXiv:0903.3489, 2009.
- [9] R. Penrose. *The road to reality*. Jonathan Cape, 2004.
- [10] H. Poincaré and G.B. Halsted. *The value of science*. Science Press, 1907.
- [11] K. Gödel. An example of a new type of cosmological solutions of einstein’s field equations of gravitation. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):447–450, 1949.
- [12] D. Deutsch. Quantum mechanics near closed timelike lines. *Physical Review D*, 44(10):3197–3217, 1991.
- [13] A. C. Lobo, I. L. Paiva, and P. R. Dieguez. Proper and improper density matrices and the consistency of the deutsch model for local closed timelike curves. arXiv preprint arXiv:1110.6361, 2011.

- [14] Charles H. Bennett. Talk at QUPON, Wien. (<http://www.research.ibm.com/people/b/bennetc/>), May 2005.
- [15] George Svetlichny. Effective quantum time travel. arXiv preprint arXiv:0902.4898, 2009.
- [16] Seth Lloyd, Lorenzo Maccone, Raul Garcia-Patron, Vittorio Giovannetti, and Yutaka Shikano. Quantum mechanics of time travel through post-selected teleportation. *Phys. Rev. D*, 84:025007, Jul 2011.
- [17] Seth Lloyd, Lorenzo Maccone, Raul Garcia-Patron, Vittorio Giovannetti, Yutaka Shikano, Stefano Pirandola, Lee A. Rozema, Ardavan Darabi, Yasaman Soudagar, Lynden K. Shalm, and Aephraim M. Steinberg. Closed timelike curves via postselection: Theory and experimental test of consistency. *Phys. Rev. Lett.*, 106:040403, Jan 2011.
- [18] Y. Aharonov, P.G. Bergmann, and J.L. Lebowitz. Time symmetry in the quantum process of measurement. *Physical Review*, 134:1410–1416, 1964.
- [19] Y. Aharonov, S. Popescu, and J. Tollaksen. A time-symmetric formulation of quantum mechanics. *Physics Today*, 63:27–32, 2010.
- [20] Yakir Aharonov and Lev Vaidman. The two-state vector formalism: an updated review. In *Time in Quantum Mechanics*, pages 399–447. Springer, 2007.
- [21] Yakir Aharonov and Lev Vaidman. Properties of a quantum system during the time interval between two measurements. *Physical Review A*, 41(1):11, 1990.
- [22] Yakir Aharonov, Jeeva Anandan, Sandu Popescu, and Lev Vaidman. Superpositions of time evolutions of a quantum system and a quantum time-translation machine. *Physical review letters*, 64:2965–2968, 1990.
- [23] Lev Vaidman. A quantum time machine. *Foundations of physics*, 21(8):947–958, 1991.
- [24] Vladimir Igorevich Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer, 1989.
- [25] Dariusz Chruściński and Andrzej Jamiołkowski. *Geometric phases in classical and quantum mechanics*, volume 36. Springer, 2004.

- [26] Michael V Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.
- [27] Shivaramakrishnan Pancharatnam. Generalized theory of interference, and its applications. In *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A*, volume 44, pages 247–262. Springer, 1956.
- [28] Steven Weinberg. Testing quantum mechanics. *Annals of Physics*, 194(2):336–386, 1989.
- [29] Nicolas Gisin. Weinberg’s non-linear quantum mechanics and supraluminal communications. *Physics Letters A*, 143(1):1–2, 1990.
- [30] Marek Czachor. *Aspects of nonlinear quantum mechanics*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Center for Theoretical Physics, Polish Academy of Sciences, Warszawa (May 1994), 1993.
- [31] Bogdan Mielnik. Mobility of nonlinear systems. *Journal of Mathematical Physics*, 21:44, 1980.
- [32] Bogdan Mielnik. Phenomenon of mobility in non-linear theories. *Communications in Mathematical Physics*, 101(3):323–339, 1985.
- [33] Marek Czachor. Mobility and non-separability. *Foundations of Physics Letters*, 4(4):351–361, 1991.
- [34] Steven Weinberg. *Dreams of a final theory: The scientist’s search for the ultimate laws of nature*. Random House Digital, Inc., 1992.
- [35] A. C. Lobo. Notas de aula de teoria da relatividade. 2010.
- [36] William B Bonnor. The rigidly rotating relativistic dust cylinder. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13(6):2121, 1980.
- [37] J Richard Gott III. Closed timelike curves produced by pairs of moving cosmic strings: Exact solutions. *Physical Review Letters*, 66(9):1126, 1991.
- [38] J.B. Conway. *A course in functional analysis*. Springer, 1990.

-
- [39] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2011.
- [40] J. Preskill. *Lecture notes for Physics 229: Quantum information and computation*. California Institute of Technology, 1998.
- [41] Pedro Ruas Dieguez. Descoerência e o problema da medida na mecânica quântica, 2011. Monografia de final de curso.
- [42] H.D. Politzer. Path integrals, density matrices, and information flow with closed timelike curves. *Physical Review D*, 49(8):3981, 1994.
- [43] D. Bacon. Quantum computational complexity in the presence of closed timelike curves. *Physical Review A*, 70(3):032309, 2004.
- [44] J. J. Sakurai and S. F. Tuan. *Modern quantum mechanics*, volume 1. Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1985.
- [45] T.A. Brun, J. Harrington, and M.M. Wilde. Localized closed timelike curves can perfectly distinguish quantum states. *Physical Review Letters*, 102(21):210402, 2009.
- [46] Arun K. Pati, Indranil Chakrabarty, and Pankaj Agrawal. Purification of mixed states with closed timelike curve is not possible. *Phys. Rev. A*, 84:062325, Dec 2011.
- [47] Joel J Wallman and Stephen D Bartlett. Revisiting consistency conditions for quantum states of systems on closed timelike curves: an epistemic perspective. *Foundations of Physics*, 42(5):656–673, 2012.
- [48] Charles H Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical Review Letters*, 70(13):1895, 1993.
- [49] Todd A Brun and Mark M Wilde. Perfect state distinguishability and computational speedups with postselected closed timelike curves. *Foundations of Physics*, 42(3):341–361, 2012.
- [50] Yakir Aharonov and Daniel Rohrlich. *Quantum paradoxes*. Wiley. com, 2008.
- [51] MV Berry and Pragya Shukla. Pointer supershifts and superoscillations in weak measurements. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(1):015301, 2012.

- [52] Augusto Cesar Lobo and Clyffe Assis Ribeiro. Weak values and the quantum phase space. *Physical Review A*, 80(1):012112, 2009.
- [53] Augusto Cesar Lobo and Clyffe Assis Ribeiro. The geometry of von-neumann's pre-measurement and weak values. arXiv preprint arXiv:1111.4205, 2012.
- [54] Graeme Mitchison, Richard Jozsa, and Sandu Popescu. Sequential weak measurement. *Physical Review A*, 76(6):062105, 2007.
- [55] Clyffe Assis Ribeiro. Valores fracos, variáveis modulares e o espaço de fase quântico. Master's thesis, UFMG, 2011.
- [56] J. Tollaksen. Pre and post-selection, weak measurements and the flow of time in quantum mechanics. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1327, page 240, 2011.
- [57] Jeff Tollaksen. Novel relationships between superoscillations, weak values, and modular variables. *Journal of Physics: Conference Series*, 70:012016, 2007.
- [58] Jeff Tollaksen, Yakir Aharonov, Aharon Casher, Tirzah Kaufherr, and Shmuel Nussinov. Quantum interference experiments, modular variables and weak measurements. *New Journal of Physics*, 12(1):013023, 2010.
- [59] Dieter Suter. "weak measurements" and the "quantum time-translation machine" in a classical system. *Physical Review A*, 51(1):45, 1995.
- [60] Lev Vaidman. There is no classical analog of a quantum time-translation machine. *Physical Review A*, 52(5):4297, 1995.
- [61] Ismael Lucas Paiva. Sobre o modelo de deutsch para ctcs, 2011. Monografia de final de curso.
- [62] D. Ahn, C. R. Myers, T. C. Ralph, and R. B. Mann. Quantum-state cloning in the presence of a closed timelike curve. *Phys. Rev. A*, 88:022332, Aug 2013.
- [63] Todd A. Brun, Mark M. Wilde, and Andreas Winter. Quantum state cloning using deutschian closed timelike curves. *Phys. Rev. Lett.*, 111:190401, Nov 2013.
- [64] Yakir Aharonov, Hugh Pendleton, and Aage Petersen. Modular variables in quantum theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 2(3):213–230, 1969.

- [65] Augusto Cesar Lobo and Clyffe Assis Ribeiro. Modular variables and schwinger's finite phase space. arXiv preprint arXiv:1007.1685, 2010.
- [66] Sandu Popescu. Dynamical quantum non-locality. *Nature Physics*, 6(3):151–153, 2010.
- [67] Y Aharonov. Some mathematical properties of superoscillations pdf. *J. Phys. A*, 44:365304, 2011.
- [68] Yakir Aharonov, David Z Albert, and Lev Vaidman. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. *Physical review letters*, 60(14):1351, 1988.
- [69] MV Berry and S Popescu. Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(22):6965, 2006.
- [70] Augusto Cesar Lobo and Clyffe Assis Ribeiro. An explicit schrödinger picture for aharonov's modular-variable concept. *Journal of Russian Laser Research*, 32(5):422–430, 2011.