Introdução à Análise Real

Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Prólogo

As ideias básicas contidas nos cursos de Cálculo, tais como Derivada e Integral, têm suas gêneses em conceitos e problemas geométricos que a Matemática Grega colocava entre as suas principais preocupações. Dentre esses destacam-se o traçado de retas tangentes e a quadratura de figuras. Muito embora essas construções geométricas estejam relacionadas com ideias aparentemente simples, o seu entendimento perfeito somente se tornou possível com o advento do Cálculo Diferencial e Integral cuja criação remonta ao século XVII associada às pessoas de Fermat, Newton, Leibniz, entre outros, que começaram a associar tais noções geométricas às de *derivada* e *integral* que, por sua vez, estão associadas ao conceito de limite. A ausência desse último foi exatamente o que impediu que os matemáticos gregos se antecipassem aos do séculos XVII e subsequentes na criação do Cálculo. A Quadratura da Parábola, efetuada por Arquimedes, é um exemplo típico de quanto os matemáticos da Grécia Antiga se aproximaram da criação do Cálculo. Muito embora os criadores do Cálculo tenham preenchido certas lacunas deixadas pelos gregos, havia ainda muitas deficiências no que se refere ao formalismo e o rigor. Os conceitos estavam repletos de motivações geométricas e físicas, o que não é uma coisa ruim, mas o rigor que se impunha na Matemática, principalmente a partir do século XVIII, exigia que os conceitos do Cálculo, baseados em interpretações geométricas, fossem devidamente aritmetizados. Isso foi feito por vários matemáticos entre os quais se destacam Cauchy, Riemann, Bolzano, Weierstrass, entre outros, que colocaram em bases firmes e rigorosas os conceitos de limite, continuidade etc. Até mesmo o corpo dos números reais teve que ser construído de maneira formal para justificar passagens cruciais de certas demonstrações que, no Cálculo, eram consideradas intuitivamente óbvias. Na verdade, mantidas as devidas proporções, o início do Cálculo, com suas motivações e interpretações geométricas, assemelhava-se aquilo que desenvolvemos no Cálculo Diferencial e Integral, ao passo que a Análise Matemática, que ora iniciamos, está próxima daquilo que os matemáticos dos séculos XVIII e XIX fizeram com o Cálculo (veja Ávila[1]).

[1] Geraldo Ávila, O Ensino do Cálculo e da Análise, Matemática Universitária, N. 33, Dezembro (2002), 83-95.

Deve-se ressaltar que a divisão Cálculo / Análise se impõe por questões históricas como também por motivações pedagógicas e psicológicas. Faz-se necessário considerar o amadurecimento progressivo do(a) estudante que apreende os conceitos do Cálculo de maneira intuitiva para, em um estágio posterior, retornar aos mesmos conceitos, dessa vez vestidos a rigor. Será esse o objetivo desse curso. Começaremos introduzindo o Corpo dos Reais, via Postulado de Dedekind, para, a seguir, elaborar formalmente os conceitos de limite, continuidade, diferenciabilidade e integração. Dito isso, comecemos a apreciar o Cálculo Diferencial e Integral em traje de gala.

Agradecimento. Gostaria de externar o meu profundo agradecimento ao Prof. Daniel Cordeiro de Morais Filho, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Campina Grande, e à Profª Joelma Morbach, da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, por suas valiosas sugestões que contribuíram para a melhoria deste livro. Além disso, e como não poderia deixar de ser, agradeço à Graça, ao Junior e Hilda Maria por tudo de bom que me deram.

Finalmente, agradeço, antecipadamente, a todos aqueles que venham a contribuir com sugestões para a melhoria deste texto. Sugestões podem ser enviadas aos endereços eletrônicos fjsacorrea@pq.cnpq.br ou fjsacorrea@gmail.com

Sumário

Capítulo 1

Corpos Ordenados e o Postulado de Dedekind

Neste capítulo, introduziremos de maneira formal, mas evitando certos detalhes técnicos, o corpo dos números reais. Você já trabalhou, desde o ensino fundamental, com vários tipos de números tais como os naturais, inteiros, racionais e reais. Entretanto, muitas das propriedades desses números foram omitidas, ou usadas sem justificativas rigorosas, o que é perfeitamente natural em estágios iniciais e até mesmo em cursos de Cálculo. Aqui, introduziremos formalmente o conjunto dos números reais, sempre comparando-os com o dos racionais, ressaltando suas semelhanças e suas diferenças fundamentais.

1 Corpos Ordenados

Começaremos com algumas considerações sobre certas propriedades que os conjuntos dos racionais e dos reais têm em comum.

Definição 1. *Um corpo é um conjunto não-vazio F no qual se acham definidas duas operações*

$$+ : F \times F \to F,$$

que a cada $(x, y) \in F \times F$ associa um elemento $x + y \in F$ e

$$\cdot : F \times F \to F,$$

que a cada $(x, y) \in F \times F$ associa um elemento $x \cdot y \in F$ chamadas, respectivamente, adição e multiplicação que satisfazem as seguintes propriedades:

(A_1) *A adição é comutativa, $x + y = y + x$, para quaisquer $x, y \in F$.*

(A_2) *A adição é associativa,* $x + (y + z) = (x + y) + z$, *para quaisquer* $x, y, z \in F$.

(A_3) *Existe um único elemento* $0 \in F$ *(chamado zero ou elemento neutro da adição) tal que* $x + 0 = x$, *qualquer que seja* $x \in F$.

(A_4) *A cada* $x \in F$ *corresponde um único* $-x \in F$ *(chamado inverso aditivo do número* x*), tal que* $x + (-x) = 0$.

(M_1) *A multiplicação é comutativa,* $x \cdot y = y \cdot x$, *para quaisquer* $x, y \in F$.

(M_2) *A multiplicação é associativa,* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, *para quaisquer* $x, y, z \in F$.

(M_3) *Existe um único elemento* $1 \in F$ *(chamado "um" ou elemento neutro da multiplicação), tal que* $x \cdot 1 = x$, *para todo* $x \in F$.

(M_3) *A cada* $x \in F$, $x \neq 0$, *corresponde um único elemento* $x^{-1} \in F$, *também designado por* $\frac{1}{x}$, *tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$.

(MD) *A multiplicação é distributiva com relação à adição,* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, *para quaisquer* $x, y, z \in F$.

Doravante, quando tivermos um corpo $(F, +, \cdot)$ a multiplicação de dois elementos $x, y \in F$ será designada simplesmente por xy.

Exemplo 1. *O exemplo típico de corpo é o conjunto dos números racionais*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

munido com as operações usuais de adição e multiplicação de frações. O(A) leitor(a) pode verificar isso facilmente como exercício.

O conjunto dos números reais, com suas conhecidas operações usuais, é também um corpo, porém isso é mais delicado de ser estabelecido e o faremos mais adiante.

Quando você efetua as divisões expressas em uma fração, uma outra forma de representar os números racionais, chamada *representação decimal de números racionais*, é obtida. Dessa maneira, o sistema de representação decimal posicional nos permite expressar os números naturais usando somente dez inteiros

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ e } 9$$

os quais são chamados dígitos. Relembremos alguns fatos básicos sobre a representação decimal de números racionais.

Definição 2. *Uma decimal é uma expressão da forma*

$$\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

onde a_0 *um número inteiro não-negativo e* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *são dígitos*

As expressões $3,272727\ldots, 9,144444\ldots, 5,768500000\ldots$ são exemplos de decimais. No último caso, a expressão é representada apenas por 5,7685 e chama-se *representação decimal finita*. Em geral, se apenas um número finito de dígitos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é não nulo, então a decimal é chamada finita e escrevemos $a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n000\ldots$ simplesmente como $a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n$.

O número $3,272727\ldots$ é uma *dízima periódica simples*, representada por $3,\overline{27}$, cujo período é 27. No caso do número $9,144444\ldots$, ele é uma *dízima periódica composta* representada por $9,1\overline{4}$, cujo período é 4.

É importante observar que toda fração, ou seja, todo número racional, possui uma representação decimal que é finita ou é uma dízima periódica. A recíproca desse fato também é válida: toda representação decimal finita ou toda dízima periódica pode ser representada por uma fração e, portanto, é um número racional. Essa observação é bem simples de ser verificada para números cujas representações decimais sejam finitas. Por exemplo,

$$5,7685 = 5 + \frac{7}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4}$$

é um número racional por ser soma de frações.

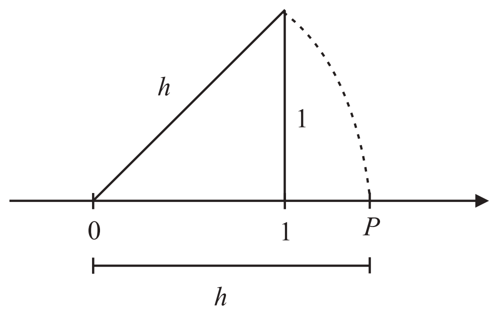
Em geral, decimais finitas podem ser usadas para representar números racionais, da seguinte maneira:

$$\pm a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n = \pm\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right).$$

Consequentemente, decimais finitas definem números racionais. Caso a decimal não seja finita não podemos executar o procedimento acima. No capítulo 4 voltaremos a esse tópico, haja vista que ele nos levará a estudar as chamadas *Séries Infinitas*.

Outro fato que deve ser enfatizado é que a cada número racional $\frac{p}{q}$ corresponde um único ponto sobre a reta numérica. No entanto, sua recíproca não é verdadeira, ou seja, não é verdade que a cada ponto da reta esteja associado um número real. Isso já era conhecido na Grécia Antiga e, segundo se comenta, a descoberta desse fenômeno teria causado grande impacto nas estruturas da Matemática Pitagórica. Mostremos que existem números não-racionais correspondentes a pontos da reta, isto é, números que não podem ser representados por uma fração de números inteiros com denominador não-nulo. Faremos isso no próximo exemplo.

Exemplo 2. *Consideremos a figura seguinte na qual temos um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1. Usando esse triângulo e um compasso, é fácil marcar na reta numérica um segmento cujo comprimento é representado por um número não-racional que é o conhecido* $\sqrt{2}$.



Suponhamos, por contradição, que o comprimento da hipotenusa desse triângulo seja um número racional $\frac{p}{q}$ *com* p *e* $q \neq 0$ *números primos entre si, isto é, eles não possuem fatores comuns. Suponhamos* p *e* q *positivos. Usando o teorema de Pitágoras, obtém-se*

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

e daí

$$p^2 = 2q^2.$$

Isso nos diz que o número p^2 *é par e assim (verifique como exercício)* p *é par, ou seja,* $p = 2k$*, para algum inteiro positivo* k*. Donde* $4k^2 = 2q^2$*. Logo* $q^2 = 2k^2$ *e então* q^2 *é par, e daí* q *é par. Portanto,* p *e* q *são pares. Sendo* p *e* q *supostos primos entre si eles não podem ser simultaneamente pares e isso é uma contradição. Assim,*

> *O número que mede a hipotenusa do triângulo representado na figura anterior, associado ao ponto* P *da reta, não é racional.*

Esse número é a raiz quadrada de 2, sendo indicada por $\sqrt{2}$*.*

Isso mostra que existem outros números além dos racionais. Eles são os chamados *números irracionais*. Existem outros números irracionais como, por exemplo, $\sqrt[3]{2}$. Esse é o número positivo x tal que $x^3 = 2$. Na verdade, pode-se provar que se m e n forem números naturais e $x^m = n$ não possuir soluções inteiras, então $\sqrt[m]{n}$ é irracional. Provavelmente, π seja o número irracional mais famoso. Ele representa a área de um círculo unitário ou a metade do comprimento de uma circunferência de raio 1.

Johann Heinrich Lambert- (1728-1777) matemático francês, provou, em 1770, que π é irracional.

Voltando à representação decimal de números, deve-se observar que os números irracionais possuem representações decimais que não são finitas nem dízimas periódicas. Por exemplo, números tais como $0,1213141516\ldots$, $2,112123123412345\ldots$ são representações decimais de números não-racionais.

Em vista do fato de que nem todo ponto da reta representa um número racional, torna-se necessário construir um conjunto, na verdade um corpo, que esteja em correspondência biunívoca com a reta. Em virtude dos objetivos deste curso não faremos a sua construção, optando por apresentá-lo via um postulado. Pessoas interessadas nessa construção deverão consultar, por exemplo, Dedekind[1] ou Rudin[2].

Definição 3. *Diz-se que um corpo F é ordenado se existe um conjunto não-vazio $K \subset F$ que goze das seguintes propriedades:*

(i) se $x, y \in K$, então $x + y \in K$ e $xy \in K$;

(ii) dado qualquer $x \in F$, apenas uma das alternativas abaixo é satisfeita:

$$x \in K, \quad -x \in K, \quad x = 0.$$

O conjunto K é chamado conjunto dos elementos positivos de F.

O conjunto $-K = \{-x; x \in K\}$ é chamado conjunto dos elementos negativos de de F e $K \cup \{0\}$ é chamado conjunto dos elementos não-negativos de F.

Exemplo 3. *O exemplo típico de corpo ordenado é o dos racionais $\mathbb{Q}$ com as operações de adição e multiplicação referidas anteriormente no exemplo 1. Para ordenarmos $\mathbb{Q}$ basta considerarmos K como sendo o conjunto dos racionais positivos. Deve-se observar que um racional da forma $\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, é positivo se $p.q > 0$. Vê-se facilmente que esse conjunto satisfaz as propriedades (i) e (ii) na definição de corpo ordenado.*

O termo corpo ordenado é motivado pelo seguinte fato. Se F for um corpo ordenado por um subconjunto K e se x e y forem elementos quaisquer em F dizemos que

$$x > y \text{ se, e somente se, } x - y \in K.$$

Temos que $>$ é uma relação de ordem total pois, dados $x, y \in K$, apenas uma das alternativas abaixo ocorre:

$$x - y \in K, \;\; -(x - y) = y - x \in K, \;\; x - y = 0.$$

No primeiro caso, teríamos $x > y$, no segundo $y > x$ e no terceiro $x = y$, ou seja, dois elementos quaisquer de um corpo ordenado F são sempre comparáveis. No caso $x > y$ diz-se que *x é maior do que y*. Usa-se a notação $x \geq y$ para indicar que x pode ser maior ou pode ser igual a y e lê-se *x maior do que ou igual a y*.

[1] Richard Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, Dover Publications, 1963.

[2] Walter Rudin, Princípios de Análise Matemática, Livro Técnico e Ed. Universidade de Brasília, 1976.

Supremo e Ínfimo

Veremos, a seguir, algumas definições que nos levarão aos importantes conceitos de supremo e ínfimo de subconjuntos de corpos ordenados.

Definição 4. *Sejam F um corpo ordenado e $A \subset F$. Diz-se que $\beta \in F$ é uma cota superior do conjunto A se $a \leq \beta$, para todo $a \in A$.*

Consideremos o subconjunto $A = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ do corpo ordenado $\mathbb{Q}$. É claro que 0, 2 e 17 são cotas superiores de A. Na verdade, qualquer número não-negativo é uma cota superior de A. Observemos que 0 é a menor das cotas superiores de A. O subconjunto $B = \{1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{Q}$ não possui cota superior. Qualquer número maior do que ou igual a 1 é cota superior de $C = \{x \in \mathbb{Q}; 0 < x \leq 1\}$. Por outro lado, $D = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0\}$ não possui cota superior.

Definição 5. *Diz-se que um subconjunto A de um corpo ordenado F é limitado superiormente se ele possuir uma cota superior.*

O subconjunto $A = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ de $\mathbb{Q}$ é limitado superiormente, enquanto que os subconjuntos $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0\}$ de $\mathbb{Q}$ não são limitados superiormente.

Definição 6. *Sejam F um corpo ordenado e $A \subset F$. Diz-se que $\alpha \in F$ é uma cota inferior do conjunto A se $\alpha \leq a$, para todo $a \in A$.*

O número 1 e qualquer número não-positivo são cotas inferiores do subconjunto $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de $\mathbb{Q}$. O 1 é a maior das cotas inferiores de B. O subconjunto $A = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ não possui cotas inferiores.

Definição 7. *Diz-se que um subconjunto A de um corpo ordenado F é limitado inferiormente se ele possuir uma cota inferior.*

O subconjunto $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de $\mathbb{Q}$ é limitado inferiormente, enquanto o subconjunto $A = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ de $\mathbb{Q}$ não é limitado inferiormente.

Definição 8. *Um subconjunto A de um corpo ordenado F é limitado se ele for limitado superiormente e inferiormente.*

Por exemplo, o subconjunto $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ de $\mathbb{Q}$ é limitado, mas os subconjuntos $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ e $\{1, 2, 3, \ldots\}$ de $\mathbb{Q}$ não são limitados.

Definição 9. *Seja A um subconjunto de um corpo ordenado F. Diz-se que $x \in F$ é o supremo (quando existir) do conjunto A se ele for a menor de suas cotas superiores. Nesse caso, usa-se a notação*

$$x = \sup A.$$

Por conseguinte, a fim de que $x \in F$ seja o supremo do conjunto A as seguintes condições devem ser satisfeitas:

($\sup_1$) x deve ser cota superior do conjunto A.

($\sup_2$) Se y for cota superior de A então $x \leq y$.

Definição 10. *Seja A um subconjunto de um corpo ordenado F. Diz-se que $x \in F$ é o ínfimo (quando existir) do conjunto A se ele for a maior de suas cotas inferiores. Usa-se a notação*

$$x = \inf A.$$

Portanto, a fim de que $x \in F$ seja o ínfimo do conjunto A as seguintes condições devem ser satisfeitas:

(inf_1) x deve ser cota inferior do conjunto A.

(inf_2) Se y for cota inferior de A então $x \geq y$.

Para que os conceitos de supremo e ínfimo fiquem mais claros, analisemos o exemplo a seguir.

Exemplo 4. *Consideremos o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ e seja $A \subset \mathbb{Q}$ dado por*

$$A = \{y \in \mathbb{Q}\,;\ a < y \leq b\}$$

em que a e b são números racionais tais que $a < b$. Obviamente, a é uma cota inferior de A, assim como qualquer número racional menor do que a. Analogamente, b é cota superior de A assim como qualquer número racional maior do que b. Mostremos que

$$a = \inf A \ \ e \ \ b = \sup A.$$

Para mostrar que $a = \inf A$, suponhamos que $y \in \mathbb{Q}$ seja uma cota inferior de A. Não podemos ter $y > a$ pois, se assim fosse, o número racional $\frac{a+y}{2}$ pertenceria a A e seria menor do que y, de modo que y não poderia ser cota inferior de A. Portanto, $y \leq a$ e desse modo $a = \inf A$. Analogamente, mostra-se que $b = \sup A$.

Conseguintemente, infere-se que o supremo ou ínfimo, quando existirem, podem ou não pertencer ao conjunto. O(A) leitor(a) está convidado(a) a determinar, quando existirem, o ínfimo e o supremo dos conjuntos descritos a seguir:

(a) $A_1 = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

(b) $A_2 = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, \cdots, n\}$

(c) $A_3 = \{r \in \mathbb{Q}; -1 < r < 1\}$

(d) $A_4 = \mathbb{Z}$ em que $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos inteiros.

(e) $A_5 = \mathbb{N}$ em que $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos naturais, isto , $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(f) $A_6 = \{x \in \mathbb{Q}; 0 \leq x \leq 2\}$.

(g) $A_7 = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 2\}$.

(h) $A_6 = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 2\}$.

Julius Wilhelm Richard **Dedekind**, matemático alemão, nasceu a 6 de outubro de 1831 em Braunschweig e faleceu a 12 de fevereiro de 1916 em Braunschweig. Idealizou os *Cortes de Dedekind* que garantem a existência de um corpo ordenado completo.

2 Postulado de Dedekind

O exemplo 2 nos mostra, de maneira elementar, que o conjunto dos racionais possui uma deficiência muito grave:- ele não consegue preencher a reta, pois, $\sqrt{2}$ corresponde a um ponto da reta numérica, mas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Esse fato, de natureza bastante geométrica, traduz-se de forma aritmética por meio do seguinte exemplo.

Exemplo 5. *O conjunto*

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2, x > 0\right\}$$

não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Inicialmente, observemos que não existe, conforme exemplo 2, um número racional x tal que $x^2 = 2$. Segue-se que se $x > 0$ for um número racional deve-se ter $x^2 < 2$ ou $x^2 > 2$. Suponhamos que $x \in \mathbb{Q}$ seja positivo e $x^2 < 2$. Afirmamos que existe um número natural n tal que

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Observemos que $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ se, e somente se, $x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$ e essa desigualdade é equivalente a $n^2x^2 + 2xn + 1 < 2n^2$ que, por sua vez, é verdadeira se, e somente se,

$$(x^2 - 2)n^2 + 2xn + 1 < 0$$

sendo que na última expressão temos o polinômio do segundo grau em n, $(x^2 - 2)n^2 + 2xn + 1$, cujo coeficiente do termo de segundo grau, $x^2 - 2$, é negativo e daí, existe n suficientemente grande, de modo que tal polinômio se torne negativo. Basta tomar n maior do que a sua maior raiz. Para esses valores de n tem-se

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

e como x e $\frac{1}{n}$ são racionais positivos sua soma também é um racional positivo e, em virtude dessa última desigualdade, $x+\frac{1}{n}$ pertence ao conjunto A. Então, nenhum elemento de A pode ser cota superior de A. Seja $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x > 0$ e $x^2 > 2$. Assim, x é cota superior de A. Mostremos que podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 > 2.$$

Observemos que $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ se, e somente se,

$$(x^2 - 2)n^2 + 2xn + 1 > 0$$

donde segue-se, em virtude de $x^2 - 2 > 0$, que existe $n \in \mathbb{N}$ para o qual a desigualdade prévia é satisfeita. Conclui-se, então, que qualquer $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 > 2$ não pode ser supremo do conjunto A.

Conclusão: o conjunto A não possui supremo em $\mathbb{Q}$.

Corpos ordenados F que, como o corpo $\mathbb{Q}$, padecem dessa deficiência, isto é, subconjuntos limitados superiormente de F podem não ter supremo em F ou subconjuntos limitados inferiormente podem não ter ínfimo em F, são ditos *não-completos*.

Em virtude da não-completeza do conjunto $\mathbb{Q}$, faz-se necessário construir um novo conjunto que preencha aquilo que está faltando em $\mathbb{Q}$ e seus elementos estejam em correspondência biunívoca com a reta. Essa construção foi efetuada de maneira rigorosa, pela primeira vez, por Richard Dedekind, matemático alemão, usando os chamados *Cortes de Dedekind*. Essa construção é bastante técnica e sua exposição completa tornaria este capítulo muito extenso e fugiria dos reais objetivos de um primeiro curso de Análise Real. Em vista disso, optamos por introduzir o corpo dos reais por meio de um postulado, o que nos poupará tempo, remetendo o leitor para as referências citadas nas notas de rodapé da página 11.

> **Postulado de Dedekind.** Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$, chamado *corpo dos números reais*, com $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tal que todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{R}$.

Esse postulado garante a completeza do corpo dos reais, em um sentido que será esclarecido oportunamente. Além disso, $\mathbb{R}$ é determinado de maneira única, a menos de isomorfismos de corpos. Tornemos clara a última afirmação.

Sejam $(F_1, +, \cdot)$ e $(F_2, +, \cdot)$ corpos para os quais estamos designando pelos mesmos símbolos $+$ e $\cdot$ as operações de adição e multiplicação em ambos os corpos. Diz-se que $(F_1, +, \cdot)$ e $(F_2, +, \cdot)$ são *isomorfos* se existir uma função bijetiva $\phi : F_1 \to F_2$ tal que

(i) $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$,

(ii) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$,

para todos $x, y \in F_1$. A função ϕ é chamada *isomorfismo* entre corpos.

A unicidade, a menos de isomorfismos de corpos, significa que se $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ for outro corpo ordenado completo, então $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ serão isomorfos.

Façamos algumas aplicações do postulado de Dedekind.

Proposição 1. *A equação $x^2 = 2$ possui uma única solução positiva em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Consideremos o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 < 2, x > 0\}$, introduzido no exemplo 5. A é limitado superiormente. Basta observar que o número real 2 é cota superior de A. Portanto, pelo Postulado de Dedekind, A possui supremo em $\mathbb{R}$. Designemo-lo por b. Afirmamos que o número b é solução da equação $x^2 = 2$, ou seja, $b^2 = 2$. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, o número $b^2 - 2$ deve satisfazer uma, e somente uma, das relações abaixo:

$$b^2 - 2 > 0, \quad b^2 - 2 < 0, \quad b^2 - 2 = 0.$$

Mostremos que as duas primeiras alternativas não podem ocorrer. Comecemos supondo que $b^2 > 2$ e observemos que

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$$

se, e somente se,

$$(b^2 - 2)n^2 - 2bn + 1 > 0.$$

Como $b^2 - 2 > 0$ a desigualdade acima é satisfeita se n for suficientemente grande. Para esses valores de n, tem-se $\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ e assim $b - \frac{1}{n}$ seria uma cota superior do conjunto A menor que o seu supremo b o que é impossível. Lembremos que o supremo de um conjunto é a menor de suas cotas superiores. Desse modo, a desigualdade $b^2 - 2 > 0$ não pode ocorrer. De modo análogo, pode-se mostrar a impossibilidade de termos $b^2 - 2 < 0$. Resta a alternativa $b^2 = 2$, ou seja, b é solução da equação em estudo. Isso mostra a existência de solução. A unicidade é provada da seguinte maneira: sejam b_1 e b_2 soluções positivas da equação $x^2 = 2$, isto é,

$$b_1^2 = 2 \ \text{ e } \ b_2^2 = 2,$$

Logo, $b_1^2 = b_2^2$ e de $b_1^2 - b_2^2 = 0$ segue-se que $(b_1 - b_2)(b_1 + b_2) = 0$. Como $b_1 + b_2 > 0$, teremos $b_1 - b_2 = 0$ e então $b_1 = b_2$. Isso mostra que a solução obtida é única. $\square$

Proposição 2. *Se um subconjunto de $\mathbb{R}$ for limitado inferiormente então ele possui ínfimo.*

Demonstração. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente e x uma cota inferior de A. Assim, $x \leq a$, para todo $a \in A$, e daí $-x \geq -a$, para todo $a \in A$. Designando por $-A$ o conjunto

$$-A = \{-a\,;\ a \in A\}$$

observa-se, em virtude de $-x \geq -a$, que $-A$ é limitado superiormente. Pelo Postulado de Dedekind, $-A$ possui supremo. Mostremos que

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

De fato, chamando $\alpha = \sup(-A)$, teremos $\alpha \geq -a$, para todo $a \in A$ e daí $-\alpha \leq a$, para todo $a \in A$, o que implica que $-\alpha$ é cota inferior do conjunto A. Deve-se mostrar que ela é a maior de suas cotas inferiores. Seja β uma cota inferior de A, isto é, $\beta \leq a$, para todo $a \in A$. Logo, $-\beta \geq -a$ e assim $-\beta$ é cota superior do conjunto $-A$ e pela definição de supremo $-\beta \geq \alpha$ e então $\beta \leq -\alpha$, isto é, $-\alpha$ é a maior das cotas inferiores de A. Portanto, todo conjunto limitado inferiormente, diferente do conjunto vazio, possui ínfimo. □

Proposição 3. *O conjunto dos números naturais não é limitado superiormente.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais seja limitado superiormente. Pelo Postulado de Dedekind $\mathbb{N}$ possui supremo, digamos α, e assim, $n \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O conjunto dos naturais possui a propriedade de que se $n \in \mathbb{N}$ então $n+1 \in \mathbb{N}$ o que acarreta $n+1 \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $n \leq \alpha - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta última desigualdade nos diz que $\alpha - 1$ é cota superior de $\mathbb{N}$, o que é impossível pois α é o supremo de $\mathbb{N}$. Esta contradição nos mostra que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. □

Proposição 4. (A Propriedade Arquimediana). *Dados números reais $0 < a < b$, existe um número natural n tal que $b < na$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $na \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que o conjunto $A = \{na\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente (b é uma de suas cotas superiores). Invocando o Postulado de Dedekind, A possui supremo, digamos α. Assim, $na \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(n+1)a \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $n \leq \alpha - a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $a > 0$, $\alpha - a$ seria cota superior de A, menor que o seu supremo α o que é impossível. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$. □

Para a próxima aplicação do Postulado de Dedekind precisaremos da seguinte definição.

Definição 11. *Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ existe $x \in A$ tal que $a < x < b$.*

Proposição 5. *O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Sejam $a < b$ números reais. Então $b-a > 0$ e podemos usar a propriedade arquimediana dos números reais para $b - a$ e 1 para garantir a existência de um número natural q de modo que $q(b - a) > 1$. Isso nos diz que o intervalo cujos extremos são os pontos qa e qb possui comprimento maior do que 1 e assim existe um inteiro p com $qa < p < qb$. Daí $a < \frac{p}{q} < b$ e o número racional procurado é $\frac{p}{q}$. □

Proposição 6. *O conjunto dos irracionais, $\mathbb{Q}^c$, é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Sejam $a < b$ dois números reais. Pela proposição precedente, existem racionais q_1, q_2 tais que

$$a < q_1 < q_2 < b.$$

Definamos

$$t = q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 - q_1).$$

Claramente, t é irracional e $q_1 < t < q_2$. Assim, $a < t < b$. □

3 Princípio da Indução Finita

Completaremos este capítulo enunciando e fazendo algumas aplicações do importante *Princípio da Indução Finita*. Esse princípio é utilizado quando surgem afirmações que envolvam números naturais. Defrontamo-nos, então, com a questão de saber se tais afirmações são verdadeiras para todo número natural $n \geq n_0$, em que $n_0 \in \mathbb{N}$.

Princípio da Indução Finita. *Seja P uma propriedade satisfeita por um conjunto de números $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que:*

(i) o número n_0 satisfaz a propriedade P;

(ii) se um número natural $n \geq n_0$ satisfaz a propriedade P, então $n+1$ também satisfaz a propriedade P.

Então todos os números naturais $n \geq n_0$ satisfazem a propriedade P.

Observação 1. *O princípio acima é equivalente ao:*

Segundo Princípio da Indução Finita. *Suponhamos que a cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos uma proposição $P(n)$. Se, para cada $m \in \mathbb{N}$, a hipótese de que $P(k)$ é verdadeira para todo $k < m$ implica que $P(m)$ é verdadeira, então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observação 2. *Deve-se observar que, desde o início desse curso, estamos a admitir a existência do conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$ *o qual foi colocado em bases rigorosas por Giuseppe Peano em sua obra* Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita, *onde propõe a axiomatização da Aritmética e faz o seu primeiro desenvolvimento rigoroso. Formalmente, Peano introduziu o conjunto dos números naturais por intermédio dos seguintes axiomas:*

Giuseppe Peano (27 de agosto de 1858 - 20 de abril de 1932) foi um matemático e filósofo italiano, conhecido por suas contribuições à Teoria dos Conjuntos. Peano publicou mais de duzentos livros e artigos, a maioria em Matemática.

Axioma 1. 1 *é um número natural.*

Axioma 2. *Todo número natural* n *possui um único sucessor, designado por* n'.

Axioma 3. *O número natural* 1 *não é sucessor de nenhum número natural. Isso significa que* $n' \neq 1$, *para todo número natural* n.

Axioma 4. *Se* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1' = n_2'$, *então* $n_1 = n_2$

Axioma 5. *Se* $X \subset \mathbb{N}$ *satisfizer*

(i) $1 \in X$;

(ii) $n \in X$ *implica* $n' \in X$,

então $X = \mathbb{N}$.

Observemos que esse último axioma é exatamente o Princípio da Indução. Além disso, o sucessor n' *do número natural* n *é o nosso conhecido* $n+1$.

Façamos algumas aplicações do *Princípio da Indução.*

Aplicação 1. *Para todo número natural* n *e todo número real* $x \neq 1$, *tem-se*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}\cdot$$

Demonstração. Claramente, a propriedade acima é válida quando $n = 1$ pois, nesse caso, ambos os membros dessa última expressão serão iguais a 1.

Suponhamos que a propriedade seja válida para $n \in \mathbb{N}$. Essa é a chamada hipótese de indução. Assim,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}\cdot$$

e adicionando x^n a ambos os membros dessa igualdade, obtém-se

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x} + x^n.$$

Daí

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

o que mostra a validez da propriedade para $n + 1$. Pelo Princípio da Indução, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aplicação 2. (**Desigualdade de Bernoulli**) *Seja* $r \in \mathbb{R}, r > -1$. *Então*

$$1 + nr \leq (1 + r)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A desigualdade é trivialmente satisfeita se $n = 1$. Suponhamos que ela se verifique para um certo $n \in \mathbb{N}$ (hipótese de indução). Assim, $1 + nr \leq (1 + r)^n$ e multiplicando ambos os seus membros por $1 + r > 0$, obtém-se

$$(1 + nr)(1 + r) \leq (1 + r)^n(1 + r)$$

Portanto, $(1+r)^{n+1} \geq 1+r+nr+nr^2 > 1+(n+1)r$, pois $nr^2 > 0$. Logo, $(1 + r)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)r$ que é a desigualdade para $n + 1$. Pelo Princípio da Indução, a desigualdade de Bernoulli é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aplicação 3. *Se* $r \geq 0$, *então*

$$(1 + r)^n \geq 1 + nr + \frac{n(n-1)r^2}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Inicialmente, observemos que a desigualdade é válida quando $n = 1$. Suponhamos que ela seja válida para $n \in \mathbb{N}$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade

$$(1 + r)^n \geq 1 + nr + \frac{n(n-1)r^2}{2}$$

por $1 + r$, obtemos

$$(1+r)^{n+1} \geq 1+(n+1)r+\frac{(n+1)nr^2}{2} = 1+(n+1)r+\frac{(n+1)(n+1-1)r^2}{2}$$

e assim a desigualdade é válida para $n+1$. Usando o Princípio da Indução, obtemos a validez da desigualdade para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

4 Exercícios Propostos

1. Mostre que $p \in \mathbb{N}$ é par se, e somente se, p^2 é par.

2. Mostre que se p é um número primo e positivo, então $\sqrt{p}$ é irracional.

3. Mostre, por indução, que

   (a) $1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r} \leq 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^r} \leq \frac{1-(\frac{1}{2})^{(r-1)n}}{1-(\frac{1}{2})^{r-1}}$.

   (b) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots n)^2$.

   (d) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$.

   (e) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

4. Use a *Desigualdade de Bernoulli* com $r = -\frac{1}{2n}$ para provar que

$$2^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{2n-1}, \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N}.$$

5. Um tópico importante em Análise são as desigualdades. Elas são usadas, entre outras coisas, nas questões de convergência, estimativas etc. Este exercício abordará algumas desigualdades importantes que surgirão em várias situações ao longo destes capítulos. Comecemos definindo *módulo* ou *valor absoluto* de um número real. Dado um número real x, define-se seu *módulo* ou *valor absoluto*, designado por $|x|$, por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

   Feito isso, demonstre as seguintes desigualdades.

   (a) Desigualdade triangular:

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

   para quaisquer $a,\, b \in \mathbb{R}$.

   (b) Desigualdade triangular generalizada:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

   para quaisquer $a_1,\, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

   (c) Segunda desigualdade triangular:

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|,$$

   para quaisquer $a,\, b \in \mathbb{R}$.

(d) Se $a, b \geq 0$ então
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$
Esta desigualdade expressa o fato de que a média geométrica de dois números nunca excede a sua média aritmética.

(e) Generalização da desigualdade no item (d). Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais não-negativos, então
$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots a_n}{n}.$$

(f) Sejam a e b números reais positivos. Mostre que a média harmônica
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$
é menor do que ou igual à média geométrica $\sqrt{ab}$.

(g) Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ números reais. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

(h) Se a, b e c são números reais satisfazendo $a < b < c$ então
$$|b| < |a| + |c|.$$

(i) Dados números reais a e b tem-se
$$a^2 + ab + b^2 \geq 0.$$

6. Escreva as expressões seguintes em formas equivalente que não envolvam valores absolutos.

   (a) $a + b + |a - b|$
   (b) $a + b - |a - b|$
   (c) $a + b + 2c + |a - b| + |a + b - 2c + |a - b||$

7. Use a desigualdade triangular para provar que
$$|x| \leq 1 \Longrightarrow |x - 3| \geq 2.$$

8. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfaçam

   (a) $|x + 1| < 3$
   (b) $|x| + |x - 1| > 1$

(c) $\max\{x, 1-x\} < 3$

(d) $|x-2| \cdot |x+1| = 3$

(e) $\frac{x-1}{x^2+4} < \frac{x+1}{x^2-4}$

(f) $\sqrt{4x-3} > x$

(g) $|x+1| + |x-1| < 4$

9. Se x, $y \in \mathbb{R}$, mostre que $|x+y| = |x| + |y|$ se, e somente se, $xy \geq 0$.

10. Mostre que, dado $\varepsilon > 0$, tem-se $|x-a| < \varepsilon$ se, e somente se,
$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

11. Mostre que se $x, y \in \mathbb{R}$ então
    (a) $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$
    (b) $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$

12. (a) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $\sup A - \varepsilon \leq a_\varepsilon \leq \sup A$.
    (b) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $\inf A \leq a_\varepsilon \leq \inf A + \varepsilon$.

13. Seja $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Se existir uma cota superior α de A, com $\alpha \in A$, então $\alpha = \sup A$.

14. Seja $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Se existir $\beta \in A$ tal que β é uma cota inferior de A, então $\beta = \inf A$.

15. Encontre o supremo e o ínfimo do conjunto
$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \, ; \; n = 1, 2, \cdots \right\}.$$

16. Sejam A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos os conjuntos αA e $A + \alpha$ por
$$\begin{aligned} \alpha A &= \{\alpha a \, ; \; a \in A\} \\ A + \alpha &= \{a + \alpha \, ; \; a \in A\} \end{aligned}$$
    (a) Se $\alpha > 0$ então $\inf(\alpha A) = \alpha \inf A$ e $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$.
    (b) Se $\beta < 0$ então $\inf(\beta A) = \beta \sup A$ e $\sup(\beta A) = \beta \inf A$.
    (c) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\inf(A + \alpha) = \inf A + \alpha$ e $\sup(A + \alpha) = \sup A + \alpha$.

17. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que $x \leq y$, sempre que $x \in A$ e $y \in B$. Então $\sup A \leq \inf B$.

18. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ conjuntos limitados. Definamos

$$C := \{ab; a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Mostre que C é limitado e $\sup C = (\sup A)(\sup B)$ e $\inf C = (\inf A)(\inf B)$.

19. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere os intervalos $I_n = \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$, para cada $n = 1, 2, \ldots$. Mostre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}.$$

20. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere os intervalos $J_n = (a, a + \frac{1}{n})$, para cada $n = 1, 2, \ldots$ Mostre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset.$$

21. Sejam A e B subconjuntos não-vazios de números reais tais que todo número real pertence a A ou a B e se $a \in A$ e $b \in B$, então $a < b$. Prove que existe um único número real x tal que todo número real menor do que x está em A e todo número real maior do que x está em B. Uma decomposição de $\mathbb{R}$ em dois conjuntos A e B com essas propriedades é um *Corte de Dedekind*. O resultado contido nesse exercício é conhecido como *Teorema de Dedekind*.

22. Mostre que se $0 \leq \epsilon < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\epsilon = 0$.

23. Seja $A = \{a; a \in \mathbb{Q} \text{ e } a^3 < 2\}$.

    (a) Mostre que se $a \in A$ e $b < a$, então $b \in A$.

    (b) Mostre que se $a \notin A$ e $b > a$, então $b \notin A$.

5 Apêndice I

A Análise e a Física

Neste apêndice, transcreveremos alguns trechos do artigo de Henri Poincaré, A Análise e a Física, que está contido em *O Valor da Ciência*, tradução de Maria Helena Franco Martins, Ed. Contraponto. Vejamos alguns parágrafos nos quais Poincaré tece alguns comentários sobre a importância da Análise Matemática.

Jules Henri *Poincaré*, proeminente matemático francês, nasceu a 29 de abril de 1854 em Nancy e faleceu a 17 de julho de 1912 em Paris. Poincaré se dedicou a várias áreas da Matemática e da Física. Formulou a famosa *conjectura de Poincaré*, problema matemático que só nos dias atuais foi resolvido. Também escreveu obras de divulgação científica que atingiram grande popularidade tais como Ciência e Hipótese de 1901, O Valor da Ciência de 1904 e Ciência e Método de 1908.

Sem dúvida já lhes perguntaram muitas vezes para que serve a Matemática, e se essas delicadas construções que tiramos inteiras de nosso espírito não são artificiais, concebidas por nosso capricho.

Entre as pessoas que fazem essa pergunta, devo fazer uma distinção; as pessoas práticas reclamam de nós apenas um meio de ganhar dinheiro. Estes não merecem resposta; a eles, antes, é que conviria perguntar para que serve acumular tantas riquezas e se, para ter tempo de adquiri-las, preciso negligenciar a arte e a ciência, as únicas que podem nos proporcionar espíritos capazes de usufruí-las,

et propter vitam vivendi perdere causas

E por causa da vida perdem-se as razões de viver.

Aliás, uma ciência unicamente feita tendo em vista aplicações é impossível; as verdades só são fecundas se forem ligadas umas às outras. Se nos prendemos somente àquelas das quais se espera um resultado imediato, faltarão os elos intermediários, e não haverá mais cadeia.

...

Mas basta de nos ocupar dos práticos intransigentes. Ao lado deles, há aqueles que, apenas curiosos quanto à natureza, nos perguntam se temos condições de fazer com que a conheçam melhor.

Para responder-lhes, só temos que lhes mostrar os dois monumentos já esboçados da mecânica celeste e da física matemática.

A Matemática tem um tríplice objetivo. Deve fornecer um instrumento para o estudo da natureza.

Mas não é só isso: tem um objetivo filosófico e, ouso dizer, um objetivo estético.

Deve ajudar o filósofo a aprofundar as noções de número, espaço e tempo.

Seus adeptos, sobretudo, encontram nela fruições análogas às proporcionadas pela pintura e a música. Admiram a delicada harmonia dos números e das formas; maravilham-se quando uma nova descoberta lhes abre uma perspectiva inesperada; e a alegria que assim experimentam não tem o caráter estético, embora os sentidos não tenham nela nenhuma participação? Poucos privilegiados são chamados a gozá-la plenamente, é verdade, mas não acontece o mesmo com as mais nobres artes?

Por isso, não hesito em dizer que a Matemática merece ser cultivada por si mesma, e que as teorias que não têm aplicação na física devem sê-lo, tanto como as outras.

Mesmo que o objetivo físico e o objetivo estético não fossem solidários entre si, não deveríamos sacrificar nenhum dos dois.

Mas não é só isso: esses dois objetivos são inseparáveis, e o melhor meio de atingir um é visar o outro, ou ao menos jamais perdê-lo de vista. É o que vou me esforçar por demonstrar, precisando a natureza das relações entre a ciência pura e suas aplicações.

O matemático não deve ser para o físico um simples fornecedor de fórmulas; é preciso que haja entre eles uma colaboração mais íntima.

A Física Matemática e a Análise Pura não são apenas potências limítrofes, que mantêm relações de boa vizinhança; penetram-se mutuamente, e seu espírito é o mesmo.

...

Todas as leis, pois, provém da experiência, mas para enunciá-las é preciso uma língua especial; a linguagem corrente é demasiado pobre, e aliás muito vaga para exprimir relações tão delicadas, tão rica e tão preciosa.

Eis portanto uma primeira razão pela qual o físico não pode prescindir da Matemática; ela lhes fornece a única língua que ele pode falar.

E uma língua bem-feita não é uma coisa indiferente; para nos limitarmos à física, o homem desconhecido que inventou a palavra *calor* destinou muitas gerações ao erro. O calor foi tratado como uma substância, simplesmente porque era designado por um substantivo, e foi julgado indestrutível.

...

Pois bem, continuando a comparação, os escritores que embelezam uma língua, que a tratam como um objeto de arte, fazem dela ao mesmo tempo um instrumento mais flexível, mais apto a transmitir as nuanças do pensamento.

Compreendemos então como o analista, que persegue um objetivo puramente estético, por isso mesmo contribui para criar uma língua mais apta a satisfazer o físico.

Mas não é só isso; a lei provém da experiência, mas não imediatamente. A experiência individual, e a lei que dela se tira é geral; a experiência é apenas aproximada e a lei é precisa, ou ao menos pretende sê-lo. A experiência se realiza em condições sempre complexas, e o enunciado da lei elimina essas complicações. É o que chamamos "corrigir erros sistemáticos".

Em uma palavra, para extrair da experiência a lei, preciso generalizar; uma necessidade que se impõe ao mais circunspecto observador.

...

Quem nos ensinou a conhecer as analogias verdadeiras e profundas, aquelas que os olhos não vêem, e que a razão adivinha?

O espírito matemático, que desdenha a matéria, para só se ater à forma pura. Foi ele que nos ensinou a chamar pelo mesmo nome seres que só diferem pela matéria, a chamar pelo mesmo nome, por exemplo, a multiplicação dos quatérnios e a dos números inteiros.

...

São esses os serviços que o físico deve esperar da Análise, mas para que essa ciência possa prestar-lhe esses serviços, é preciso que ela seja cultivada do modo mais amplo, sem preocupação imediata de utilidade; é preciso que o matemático tenha trabalhado como artista.

O que lhe pedimos é que nos ajude a ver, a discernir nosso caminho no labirinto que se nos oferece. Ora, quem vê melhor é aquele que mais ascendeu.

...

O único objeto natural do pensamento matemático é o número inteiro. Foi o mundo exterior que nos impôs o contínuo; sem dúvida o inventamos, mas esse mundo nos forçou a inventá-lo.

Sem ele não haveria análise infinitesimal; toda a ciência matemática se reduziria à aritmética ou à teoria das substituições.

Ao contrário, dedicamos quase todo o nosso tempo e todas as nossas forças ao estudo do contínuo. Quem será capaz de lamentá-lo, quem julgará que esse tempo e essas forças foram perdidos?

A Análise nos abre perspectivas infinitas, que a aritmética não suspeita; num breve olhar mostra-nos um conjunto grandioso, cuja ordem é simples e simétrica; ao contrário, na teoria dos números, onde reina o imprevisto, a visão é, por assim dizer, tolhida a cada passo.

...

6 Apêndice II

Conjuntos Enumeráveis

No presente capítulo, estudamos alguns fatos sobre o conjunto dos números naturais. Estudamos o *Princípio da Indução* e, de forma apenas superficial, condizente com os objetivos do curso, fizemos uma abordagem dos *Axiomas de Peano*. Neste Apêndice, trataremos das questões de enumerabilidade, que estão relacionadas com a cardinalidade de conjuntos que é, *grosso modo*, a "quantidade" de elementos de um dado conjunto.

Definição 12. *Diz-se que os conjuntos A e B possuem a mesma* cardinalidade *se existir uma aplicação bijetiva $f : A \to B$, isto é, f é injetiva e sobrejetiva. Se esse for o caso, escreve-se $|A| = |B|$.*

Definição 13. *A cardinalidade de $|A|$ é menor do que ou igual à cardinalidade de $|B|$ se existir uma aplicação injetiva $f : A \to B$.*

Nesse caso, escreve-se $|A| \leq |B|$.

O seguinte resultado é devido a Cantor:

Teorema 1. *Qualquer que seja o conjunto A tem-se $|A| < |\mathcal{P}(\mathcal{A})|$, em que $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de A.*

Em particular, não existe aplicação sobrejetiva de A em $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Isso nos diz que, dado um conjunto A sempre existe outro com cardinalidade maior do que a cardinalidade de A.

Para uma demonstração desse resultado consulte Lebl[3] [14].

Definição 14. *Um conjunto A é* finito *se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |I_n|$, em que $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Nesse caso, a cardinalidade de A é n. O conjunto A é* infinito *se não for finito, ou seja, se ele contém um subconjunto que está em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$.*

Definição 15. *Um conjunto A é dito* enumerável *se $|A| = \mathbb{N}$, isto é, A pode ser colocado em correspondência biunívoca com $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Nesse caso, diz-se que A possui cardinalidade $\aleph_0$.*

O símbolo $\aleph$, cujo nome é *Aleph*, é a primeira letra do alfabeto hebraico.

Devemos observar que se A e B forem conjuntos finitos, $A \subset B, A \neq B$, então $|A| < |B|$. No entanto, isso não se verifica no campo infinito. Vejamos o exemplo a seguir.

[3] Jiří Lebl, Basic Analysis, Introduction to Real Analysis, http://www.jirka.org/ra/ , 2010.

Exemplo 6. *Sejam* $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ *e* $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}, \mathbb{P} \neq \mathbb{N}$*, dado por*

$$\mathbb{P} = \{2, 4, \ldots\}.$$

Observemos que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$*, definida por* $f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$*, é uma bijeção. Isso significa que, no âmbito dos conjuntos infinitos, podemos ter* $A \subset B, A \neq B$*, com* $|A| = |B|$*.*

Vejamos um outro exemplo em que esse fenômeno ocorre.

Exemplo 7. *Observemos, inicialmente, que* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *é enumerável. Definindo* $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ *por:*

$$f(0) = 0,\ f(2n) = n,\ f(2n-1) = -n,$$

verifica-se, facilmente, que f *é uma bijeção. Assim,* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$*.*

A seguir enunciaremos, sem demonstração, alguns resultados sobre enumerabilidade.

(a) Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

(b) Se A e B forem conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável.

(c) Se A é finito e B é enumerável, então $A \cup B$ é enumerável.

(d) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos enumeráveis, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ é enumerável.

(e) Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \times B$ é enumerável.

(f) Se A é um conjunto enumerável e $f : A \to B$ é uma aplicação sobrejetiva, então B é finito ou enumerável.

Segue-se do item (f) que o conjunto dos racionais $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ é enumerável. Com efeito, basta observar que a aplicação $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, definida por $f(p, q) = \frac{p}{q}$, é sobrejetiva. Ou seja, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ mas é enumerável. Mostraremos que o conjunto dos irracionais $\mathbb{Q}^c$ não é enumerável. Isso decorre do:

Teorema 2. *O conjunto dos números reais é não-enumerável.*

Demonstração. Usaremos o *Método Diagonal de Cantor*. Mostraremos que o intervalo $(0, 1)$ é não-enumerável. Decorrerá daí a não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$. Suponhamos, por contradição, que o intervalo $(0, 1)$ seja enumerável. Escrevamos uma enumeração de $(0, 1)$ como a seguir:

$$0, a_{11}a_{12}a_{13} \cdots a_{1n} \cdots ;$$

$$0, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots;$$

$$\ldots$$

$$0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots;$$

$$\ldots,$$

em que os a_{ij} são algarismos que podem assumir os valores $0, 1, \ldots, 9$. A seguir, construímos uma decimal $0, b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ da seguinte maneira: $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \cdots, b_n \neq a_{nn}, \cdots$. Observemos que $0, b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ não se encontra na lista precedente. Portanto, $(0, 1)$ é não-enumerável de onde segue-se a não-enumerabilidade de $\mathbb{Q}^c$. $\square$

Capítulo 2

Sequências de Números Reais

1 Noções Preliminares

Este capítulo será dedicado ao estudo de uma classe particular, mas nem por isso menos importante, de funções reais: as chamadas *sequências (ou sucessões)* reais. Na verdade, o(a) leitor(a) já travou conhecimento com esse assunto ao estudar, no ensino médio, as *progressões aritméticas e geométricas*. Aqui, faremos um estudo mais formal dando ênfase, principalmente, às questões de convergência e divergência. Nesse sentido, a noção de limite terá uma posição de destaque haja vista que ele será utilizado, também, nas questões concernentes a limites de funções reais.

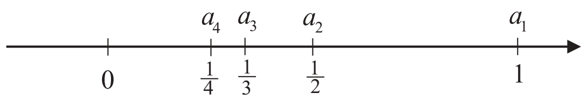
Definição 16. *Uma sequência numérica real (ou simplesmente* sequência*) é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número real $a(n)$ designado por a_n.*

Os números a_n são chamados termos da sequência e a sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ será designada por (a_n) ou $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$. O conjunto formado por seus termos será representado por $\{a_n\}$ ou $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. Na grande maioria dos casos aqui tratados, a_n será dado por uma expressão matemática em função de n; ela será chamada *termo geral* da sequência (a_n).

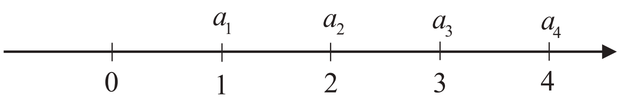
No estudo do comportamento das sequências é bastante esclarecedor imaginar os seus termos representados na reta numérica. Neste texto essa postura será fortemente adotada.

Exemplo 8. *Os exemplos dados a seguir ilustram os conceitos vistos até agora.*

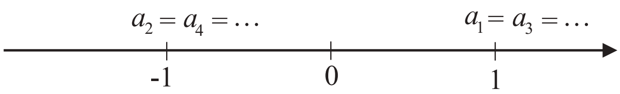
(i) A sequência dada por $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$ possui como termo geral $a_n = \frac{1}{n}$ e $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ é seu conjunto de valores.



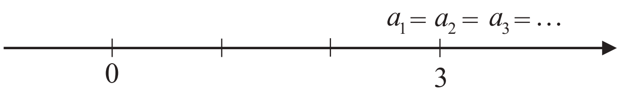
(ii) A sequência $(1, 2, 3, \cdots)$ *possui* $a_n = n$ *como termo geral e* $\{1, 2, 3, \cdots\}$ *é seu conjunto de valores.*



(iii) A sequência $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots)$ *tem como termo geral* $a_n = (-1)^{n+1}$ *e seu conjunto de valores é* $\{-1, 1\}$.



(iv) A sequência $(3, 3, 3, \cdots)$ *tem como termo geral* $a_n = 3$ *e como conjunto de valores* $\{3\}$.



Observação 3. *Algumas vezes, as sequências não iniciam com o termo correspondente a* $n = 1$. *Por exemplo, na sequência* $\left(\frac{1}{n!-n}\right)$ *não há sentido fazer* $n = 1$ *ou* $n = 2$. *Nesse caso, pode-se indicá-la por* $\left(\frac{1}{n!-n}\right)_{n=3}^{\infty}$.

Vários outros exemplos surgirão em nosso estudo à medida em que formos avançando no curso.

2 Limites de Sequências

Nesta seção vamos distinguir um tipo especial de sequência. São aquelas para as quais existe um número real que funciona como uma espécie de atrator de todos os seus termos, ou seja, os seus termos se aproximam indefinidamente desse número, que será chamado o seu limite. Nem toda sequência terá limite e as que o possuem serão chamadas convergentes; as outras de divergentes. Essas noções serão de fundamental importância.

Sequências Convergentes

Comecemos definindo formalmente as sequências convergentes.

Definição 17. Diz-se que uma sequência (a_n) é *convergente* se existir um número real l tal que, dado qualquer número positivo ε, existe um índice $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|a_n - l| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Nesse caso, diz-se que l é o *limite* de (a_n) (ou que a sequência (a_n) converge para l) e escreve-se

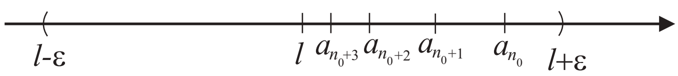
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ ou } \lim a_n = l \text{ ou } a_n \to l.$$

Alguns autores definem como *nulas* aquelas sequências que convergem para zero.

A definição de convergência pode ser refraseada como: A sequência (a_n) converge para l se, dado $\epsilon > 0$, existir um número K tal que $|a_n - l| < \epsilon$ se $n > K$.

Observemos que a condição de convergência de uma sequência pode ser reescrita como:

> Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
>
> $$a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \text{ se } n \geq n_0$$
>
> ou seja, para qualquer intervalo aberto centrado em torno do limite l, sempre pode-se encontrar um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir do qual todos os termos de (a_n) estarão dentro desse intervalo, conforme mostra a seguinte figura.



Uma sequência que não converge será chamada *divergente*.

A convergência ou a divergência de uma sequência não se altera se adicionarmos, suprimirmos ou alterarmos um número finito de seus termos.

Observação 4. Se (a_n) for uma sequência convergente, então o seu limite será único. Com efeito, suponhamos que a e b sejam limites de (a_n). Mostremos que $a = b$. Como decorrência da desigualdade triangular, tem-se

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b|.$$

Seja $\varepsilon > 0$ um número arbitrário. Como $a_n \to a$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geq n_1.$$

Analogamente, em virtude de $a_n \to b$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geq n_2.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e se $n \geq n_0$ concluímos que

$$|a - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue-se que $a = b$.

Exemplo 9. *A sequência constante* $(a, a, a, \cdots)$, *em que* $a_n = a$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *é convergente e seu limite é o próprio* a. *Basta observar que, para qualquer* $\varepsilon > 0$, *temos*

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

e assim $\lim a_n = a$.

Exemplo 10. *Consideremos a sequência cujo termo geral é* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *e seja* $\varepsilon > 0$. *Apliquemos a Propriedade Arquimediana aos números* ε *e 1. Assim, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, *dependendo de* ε, *tal que* $n_0\varepsilon > 1$. *Se* $n \geq n_0$ *então* $n\varepsilon \geq n_0\varepsilon > 1$, *de modo que*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \textit{se} \quad n \geq n_0.$$

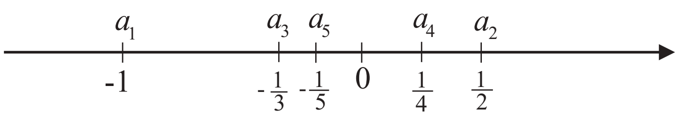
Isso mostra que $\frac{1}{n} \to 0$.

Verifica-se facilmente que (a_n) é nula se, e somente se, $(|a_n|)$ for nula.

Exemplo 11. *A sequência cujo termo geral é* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *também converge. Para demonstrar isso basta proceder como no exemplo anterior, pois*

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}\,.$$

Assim, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.



Exemplo 12. *A sequência* $(1, -1, 1, -1, \cdots)$ *cujo termo geral é dado por* $a_n = (-1)^{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *não converge. De fato, nenhum número real* l *pode ser o seu limite, pois o intervalo* $\left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right)$, *não pode conter o* 1 *e o* -1, *simultaneamente. Desse modo, dado* $\varepsilon = \frac{1}{2}$, *não existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $(-1)^{n+1} \in \left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right)$, *para todo* $n > n_0$.

Exemplo 13. *Consideremos a sequência em que o termo geral é* $a_n = n$. *Ela não converge e seu comportamento é distinto do daquela divergente dada no exemplo anterior em que a divergência se dava de maneira oscilatória e os seus termos permaneciam limitados. No presente exemplo a sequência diverge tendendo para* $+\infty$.

Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 18. *Diz-se que a sequência (a_n) tende para $+\infty$ se, dado qualquer $K > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > K$ para todo $n \geq n_0$. Nesse caso, escreve-se:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad ou \quad \lim a_n = +\infty \quad ou \quad a_n \to +\infty$$

Definição 19. *Diz-se que a sequência (a_n) tende para $-\infty$ se, dado qualquer $K > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < -K$ para todo $n \geq n_0$. Nesse caso, escreve-se:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \quad ou \quad \lim a_n = -\infty \quad ou \quad a_n \to -\infty$$

Deve-se enfatizar que uma sequência pode divergir sem que ela oscile ou tenda para $+\infty$ ou $-\infty$; seu comportamento pode ser totalmente caótico como o que acontece com a sequência que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa a n-ésima casa decimal do desenvolvimento do número irracional $\pi = 3,1415926\cdots$. Os primeiros termos dessa sequência são dados por $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9\ldots$.

Definição 20. *A restrição de uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ é chamada* subsequência *de a. A cada $n_j \in \mathbb{N}'$ a subsequência associa o termo a_{n_j} e será designada por $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots)$ ou, de maneira mais compacta, (a_{n_j}) em que $n_j \in \mathbb{N}'$.*

Da mesma maneira que falamos em sequência convergente ou divergente, pode-se falar em subsequência convergente ou divergente.

Exemplo 14. *Voltemos à sequência do exemplo 12 em que o termo geral é $a_n = (-1)^{n+1}$. Dela, consideremos duas subsequências:- uma referente aos índices pares e outra referente aos índices ímpares. Para o primeiro caso, teremos a subsequência $(-1, -1, -1, \ldots)$ e para segundo teremos $(1, 1, 1, \ldots)$. Em ambos temos subsequências constantes, logo, convergentes. Muito embora a sequência original seja divergente ela possui pelo menos duas subsequências convergentes.*

Deve-se observar que nem toda sequência admite subsequências convergentes. Este é o caso da sequência (a_n) com $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. No entanto, toda sequência limitada possui uma subsequência convergente. Esse é o enunciado de um teorema central em Análise o qual é devido a Weierstrass e que será estudado no capítulo 3.

Antes de prosseguirmos estabeleceremos algumas definições.

Definição 21. *Uma sequência (a_n) diz-se* limitada *se existir uma constante positiva K tal que $|a_n| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por exemplo, a sequência de termo geral $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ é limitada e podemos tomar $K = 1$. Já a sequência de termo geral $a_n = n$ não é limitada.

Quando, para uma sequência (a_n), existir um número real K tal que $a_n \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a sequência (a_n) é *limitada superiormente*. Se $a_n \geq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que (a_n) é *limitada inferiormente*. É claro que uma sequência (a_n) é limitada se, e somente se, ela for limitada tanto superiormente quanto inferiormente.

Outros tipos bastante usuais de sequências são as estabelecidas nas quatro definições seguintes.

Definição 22. Uma sequência (a_n) é dita *não-decrescente* se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 15. *A sequência* $(1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, \cdots)$ *é não-decrescente.*

Definição 23. *Uma sequência* (a_n) *é dita* crescente *se* $a_n < a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 16. *A sequência cujo termo geral é dado por* $a_n = \frac{n-1}{n}, n = 1, 2, \cdots$ *é crescente.*

Definição 24. *Uma sequência* (a_n) *é dita* não-crescente *se* $a_n \geq a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 17. *A sequência* $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \cdots)$ *é não-crescente.*

Definição 25. *Uma sequência* (a_n) *é dita* decrescente *se* $a_n > a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 18. *A sequência* $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots)$ *é decrescente.*

Sequências que se enquadram em uma dessas definições são chamadas *monótonas*.

Deve-se observar que toda sequência possui uma subsequência não-decrescente ou uma subsequência não-crescente ou ambas. Tente demonstrar este resultado. Observe a sequência

$$\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \dots\right).$$

e extraia dela uma subsequência crescente e uma decrescente. Vejamos um outro exemplo.

Exemplo 19. Consideremos a sequência

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 - \frac{1}{2},\ a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\ a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8},\ \cdots.$$

A subsequência $(a_2, a_4, a_6, \cdots)$ é crescente. De fato,

$$a_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)$$

em que as expressões entre parênteses são positivas. Como

$$a_{2n+2} = a_{2n} + \left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2^{2n+2}}\right)$$

segue-se que $a_{2n+2} > a_{2n}$.

Mostremos que a subsequência $(a_1, a_3, a_5, \cdots)$ é decrescente. Para isto basta observar que

$$a_{2n+1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right).$$

Como os termos entre parênteses são positivos segue-se que $a_{2n+1} > a_{2n+3}$. Portanto, a sequência original possui duas subseqüências uma delas crescente e outra decrescente. Esta sequência voltará a ser analisada quando estudarmos as séries numéricas.

O teorema seguinte nos fornece uma importante propriedade das sequências convergentes.

Teorema 3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Sejam (a_n) uma sequência convergente com $l = \lim a_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - l| < 1 \text{ se } n \geq n_0.$$

Daí,

$$|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| \leq 1 + |l|, \text{ se } n \geq n_0.$$

Os termos restantes $\{a_1, \cdots, a_{n_0-1}\}$ podem ser limitados por $k = \max\{|a_1|, \cdots, |a_{n_0-1}|\}$. Portanto, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$|a_n| \leq \max\{1 + |l|, k\}$$

o que conclui a demonstração. □

Deve-se observar que a recíproca desse fato não é verdadeira:- existem sequências que são limitadas mas não são convergentes. Isto é o que acontece com a sequência exibida no exemplo 12 previamente estudado.

Propriedades Algébricas de Limites de Sequências

Recordemos que sequências são funções reais, de modo que, dadas duas sequências (a_n) e (b_n), podemos construir novas sequências efetuando suas soma, produto e quociente, isto é, podemos considerar $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$ e $(\frac{a_n}{b_n})$. Para essa última é necessário que $b_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Surge assim a seguinte pergunta

> Se (a_n) e (b_n) forem convergentes, $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$ e $(\frac{a_n}{b_n})$ também o serão?

Veremos que a resposta para essa pergunta é afirmativa. Surge, então, uma nova questão.

> Sendo (a_n) e (b_n) sequências convergentes, como os limites de $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$ e $(\frac{a_n}{b_n})$ são dados em função dos limites de (a_n) e (b_n)?

Veremos que

$$\begin{aligned} \lim(a_n + b_n) &= \lim a_n + \lim b_n \\ \lim(a_n b_n) &= \lim a_n \lim b_n \\ \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \end{aligned}$$

É costume nos referirmos a essas propriedades dizendo, respectivamente, que o limite da soma é a soma dos limites, que o limite do produto é o produto dos limites e que o limite do quociente é o quociente dos limites.

Além dessas questões, veremos outras tal como a regra do sanduíche e o fato de que se $a_n \to 0$ e (b_n) é limitada então $a_n b_n \to 0$. Comecemos tratando do limite da soma.

Propriedade 1. *Se (a_n) e (b_n) forem duas sequências convergentes, então $(a_n + b_n)$ é convergente e*

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e suponhamos que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$. Assim, existem n_1 e n_2 pertencentes a $\mathbb{N}$ tais que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geq n_1$$

e

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geq n_2.$$

Escolhendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, teremos, usando a desigualdade triangular dada no exercício do capítulo 1,

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para $n \geq n_0$, de modo que $(a_n + b_n)$ converge e $\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n$. □

Mostremos que o limite do produto é o produto dos limites.

Propriedade 2. *Se* (a_n) *e* (b_n) *forem sequências convergentes, então* $(a_n b_n)$ *é convergente e*

$$\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n).$$

Demonstração. Suponhamos que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$. Façamos a estimativa de

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &= |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|. \end{aligned}$$

Como (b_n) é limitada, por ser convergente (vide Teorema 3), existe $k > 0$ tal que $|b_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, desde que $a_n \to a$ e $b_n \to b$ existem n_1 e n_2 números naturais tais que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \text{se } \ n \geq n_1$$

e

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}, \quad \text{se } \ n \geq n_2$$

se $a \neq 0$. Seja $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então

$$|a_n b_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \leq k\frac{\varepsilon}{2k} + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e daí $(a_n b_n) \to ab$. Para o caso $a = 0$, veja a Proposição 10. □

Consideremos o caso no qual temos duas sequências convergentes (b_n) e (a_n) em que $b_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo c um número real fixo, ou seja, (b_n) é uma sequência constante. Pelo teorema anterior $(b_n a_n)$ é convergente e

$$\lim(ca_n) = \lim(b_n a_n) = \lim b_n \lim a_n = c \lim a_n.$$

Dessas observações, segue-se o seguinte corolário do teorema anterior.

Corolário 1. *Sejam* (a_n) *uma sequência e* c *um número real. Então* (ca_n) *é uma sequência convergente e*

$$\lim(ca_n) = c \lim a_n.$$

Dada uma sequência (a_n), podemos construir a sequência $(|a_n|)$ constituída pelos valores absolutos dos termos de (a_n). A próxima propriedade é relativa à sequência assim construída.

Propriedade 3. *Se* (a_n) *é uma sequência convergente, então* $(|a_n|)$ *é convergente e* $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.

Demonstração. Façamos $\lim a_n = a$ e observemos que, usando a segunda desigualdade triangular, tem-se

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

Daí, a convergência de (a_n) implica na convergência de $(|a_n|)$ e $\lim |a_n| = |\lim a_n|$. □

A recíproca dessa última propriedade não é verdadeira. Fica a cargo do(a) leitor(a) encontrar um contra-exemplo para comprovar essa afirmação. Entretanto, temos o seguinte resultado:

Propriedade 4. *Seja* (a_n) *for uma sequência convergente. Então* $\lim a_n = 0$ *se, e somente se,* $\lim |a_n| = 0$.

Demonstração. Basta mostrar que $\lim |a_n| = 0$ implica que $\lim a_n = 0$ em virtude da propriedade precedente. Se $\lim |a_n| = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||a_n| - 0| < \varepsilon$, se $n \geq n_0$. Assim, $|a_n| < \varepsilon$, ou seja, $|a_n - 0| < \varepsilon$, para $n \geq n_0$. Logo $\lim a_n = 0$. □

Propriedade 5. *Se* (a_n) *for uma sequência que converge para* $a \neq 0$, *então existem* $n_0 \in \mathbb{N}$ *e* $k > 0$ *tais que* $|a_n| > k$ *para todo* $n \geq n_0$.

Demonstração. Como $\lim a_n = a \neq 0$, dado $\epsilon = \frac{|a|}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2} \text{ se } n \geq n_0.$$

Observando que $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$, obtém-se

$$|a| - |a_n| < \frac{|a|}{2} \text{ se } n \geq n_0.$$

Logo,

$$0 < \frac{|a|}{2} < |a_n| \text{ se } n \geq n_0$$

o que conclui a demonstração da propriedade. □

Para mostrarmos que o limite do quociente é o quociente dos limites precisaremos da seguinte propriedade.

Propriedade 6. *Seja* (a_n) *uma sequência convergente tal que* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim a_n = a \neq 0$. *Então* $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ *converge e* $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$.

Demonstração. Façamos a estimativa de

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a_n a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|}.$$

Como $\lim a_n = a \neq 0$, usando a Propriedade 5 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ se $n \geq n_1$. Também, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{|a|^2\varepsilon}{2} \text{ se } n \geq n_2.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$,teremos

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0$$

e então $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$. □

Propriedade 7. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes tal que $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim b_n \neq 0$. Então $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge e $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.*

Demonstração. A demonstração dessa propriedade segue-se imediatamente das propriedades 2 e 6. □

Propriedade 8. *Se (a_n) e (b_n) forem duas sequências convergentes tais que $a_n \leq b_n$, então $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

Demonstração. Façamos $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ e suponhamos, por contradição, que $a > b$. Assim, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|a_n - a| < \frac{a-b}{2}, \text{ se } n \geq n_1$$

e

$$|b_n - b| < \frac{a-b}{2}, \text{ se } n \geq n_2.$$

Escolhendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, obtemos

$$a - b = a - a_n + a_n - b \leq a - a_n + b_n - b \leq |a_n - a| + |b_n - b| <$$

$$\frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} = a - b \text{ se } n \geq n_0$$

o que é impossível. Portanto, $a = \lim a_n \leq b = \lim b_n$. □

Propriedade 9. (Regra do Sanduíche) *Sejam $(a_n), (b_n)$ e (c_n) sequências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$. Se (a_n) e (c_n) convergem e $\lim a_n = \lim c_n = l$, então (b_n) converge e $\lim b_n = l$.*

Demonstração. Desde que (a_n) e (c_n) ambas convergem para l, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l - \epsilon < a_n$ e $c_n < l + \epsilon$ se $n \geq n_0$. Da desigualdade $a_n \leq b_n \leq c_n$, obtemos

$$l - \epsilon < b_n < l + \epsilon, \text{ se } n \geq n_0.$$

Isso mostra que (b_n) converge para l. □

Propriedade 10. *Se* (a_n) *converge para 0 e* (b_n) *é uma sequência limitada então a sequência* $(a_n b_n)$ *converge para 0.*

Demonstração. Desde que (b_n) é uma sequência limitada, existe $K > 0$ tal que $|b_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $a_n \to 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n \geq n_0$ implica $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. Portanto,

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \text{ se } n \geq n_0,$$

e assim $a_n b_n \to 0$. □

O próximo teorema estabelece a convergência de um tipo especial de sequência.

Teorema 4. *Se* (a_n) *é uma sequência não-decrescente e limitada superiormente, então* (a_n) *converge para* $\sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

Demonstração. Desde que (a_n) é não-decrescente e limitada superiormente tem-se

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq K,$$

para algum $K > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. O postulado de Dedekind nos garante que o conjunto limitado $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ possui supremo, digamos, a. Mostremos que $a_n \to a$. Para isso, seja $\varepsilon > 0$ e usando a caracterização de supremo de um conjunto dada no capítulo anterior (vide exercício 12), existe a_{n_0} tal que

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a.$$

Como (a_n) é não-decrescente e $a = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ segue-se que $a_{n_0} \leq a_n \leq a$, para todo $n \geq n_0$. Então

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \text{ se } n \geq n_0.$$

Isso mostra que $a_n \to a$. □

Podemos demonstrar de maneira completamente análoga o próximo resultado.

Teorema 5. *Se* (a_n) *for uma sequência não-crescente e limitada inferiormente, então* (a_n) *convergirá para* $\inf\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

O próximo exemplo nos fornece uma interessante aplicação do teorema 4.

Exemplo 20. *Consideremos a sequência*

$$(1, 1 + \frac{1}{1!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \cdots),$$

cujo termo geral é

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,.$$

Mostremos que seu conjunto de valores $\left\{1, 1+\frac{1}{1!}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}, \cdots\right\}$ *é limitado superiormente (claramente também é limitado inferiormente, mas isso não interessará na nossa análise) e, pelo Postulado de Dedekind, ele possui supremo.*

Comecemos observando que

$$\begin{aligned}
3! &= 3\cdot 2 > 2^2,\\
4! &= 4\cdot 3\cdot 2 > 2^3,\\
5! &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 > 2^4,\\
&\vdots\\
n! &= n\cdot(n-1)\cdots 2 > 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\
&= 3-\frac{1}{2^{n-1}}\\
&< 3,
\end{aligned}$$

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} =$$
$$1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

em que usamos a expressão para a soma dos n *primeiros termos de uma progressão geométrica de razão igual a* $\frac{1}{2}$. *Segue-se, pelo Teorema 4, que a sequência em estudo é convergente; seu limite é o número* e, *base do* sistema de logaritmos naturais ou neperianos, *que o(a) leitor(a) conhece desde o curso de Cálculo. Isso sugere a notação*

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

Outra aplicação dos teoremas 4 e 5 é o *Teorema dos Intervalos Encaixados* que será estabelecido a seguir.

Teorema 6. *Consideremos a sequência de intervalos encaixados*

$$\cdots \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \cdots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1].$$

Então existem números reais $a \leq b$ *tais que*

$$[a, b] = \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Além disso, se $b_n - a_n \to 0$*, então* $a = b$*.*

Demonstração. Inicialmente, observemos que

$$a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Segue-se, pelos teoremas 4 e 5, que existem $a \leq b$ tais que $a_n \to a$ e $b_n \to b$. Consequentemente, $[a, b] = \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Suponhamos, a seguir, que $b_n - a_n \to 0$ mas $a < b$. Escolhendo $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, teremos

$$b_n - a_n < \frac{b-a}{2} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande.}$$

Tomando limites em ambos os membros dessa última desigualdade, obtemos $b - a \leq \frac{b-a}{2}$ o que é uma contradição. Isso conclui a demonstração.
□

3 Exercícios Propostos

1. Calcule os cinco primeiros termos das seguintes sequências:

   (a) $(n^3 + 2n^2 - n + 3)$

   (b) $(\frac{(-1)^{n!}}{n!})$

   (c) $(\cos(n\pi))$

   (d) $(\frac{n-1}{n+2})$

2. Determine quais das seguintes sequências são ou não monótonas ou eventualmente monótonas:

   (a) $(\frac{n-1}{n+2})$

   (b) $(\sqrt[3]{2})$

   (c) $(\frac{10^n}{n!})$

   (d) $(n^2 + \frac{1}{n^2})$

3. Para cada uma das sequências $(a_n), l \in \mathbb{R}$ e números positivos ε, encontre um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

   (a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, l = 0, \varepsilon = 0,0001$

   (b) $a_n = \frac{1}{(n+2)^3}, l = 0, \varepsilon = 0,00002$

   (c) $a_n = \frac{n-1}{n+2}, l = 1, \varepsilon = 0,001$

   (d) $a_n = \frac{2n^2+2}{n^2+n+3}, l = 2, \varepsilon = 10^{-4}$

4. Dado $\varepsilon > 0$, determine os valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais vale a desigualdade $|a_n - l| < \varepsilon$ quando:

   (a) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ e $l = 1$.

   (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e $l = 0$.

   (c) $a_n = \frac{n^2}{n^3+n}$ e $l = 0$.

   (d) $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ e $l = 1$.

5. Use a *Propriedade Arquimediana* para mostrar que a sequência $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ é convergente. Qual o seu limite? Faça o mesmo para a sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

6. Mostre que se a sequência (a_n) convergir para a então toda subsequência de (a_n) também convergirá para a. Conclua daí que a sequência $(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{5}, \ldots)$ diverge.

7. Dada a sequência (a_n) mostre que se ambas as subsequências $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ e $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ convergem para a então a sequência (a_n) também converge para a.

8. Mostre que toda sequência não-crescente e limitada é convergente.

9. Seja (a_n) uma sequência convergente e suponha que $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim a_n \geq 0$.

10. Mostre que se $a > 1$, então $\dfrac{1}{a^n} = 0$.

11. Seja (a_n) uma sequência com todos os termos não-nulos, que convirja para um limite positivo. Mostre que o conjunto

$$\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots\right\}$$

    é limitado.

12. Suponha que a sequência de termos positivos (a_n) convirja para 0. Mostre que a sequência $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ tende para $+\infty$. E se os termos da sequência não forem todos positivos?

13. Mostre que se a sequência (a_n) for convergente então $\lim a_n^k = (\lim a_n)^k$, qualquer que seja o número natural k. Estude os casos em que k é inteiro ou racional.

14. Calcule $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)$.

15. Considere a sequência (a_n) dada por:

$$a_1 = \sqrt{2}, \text{ e } a_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{a_n}},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Mostre que (a_n) converge e que $a_n < 2$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

16. Demonstre que se (a_n) for crescente (decrescente) e possuir uma subsequência (a_{n_k}) convergente, então (a_n) será convergente.

17. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

    (a) Se $\lim b_n = +\infty$ e $\lim a_n = 0$ então $\lim a_n b_n = 0$.

    (b) Se (a_n) e (b_n) forem sequências de números reais positivos tais que $\lim a_n = 0$ e $\lim b_n = 0$, então $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 1$.

    (c) Se $\lim a_n$ existe e $\lim b_n$ não existe, então $\lim(a_n+b_n)$ não existe.

    (d) Se $\lim a_n$ e $\lim b_n$ não existem então $\lim(a_n+b_n)$ não existe.

    (e) Se $\lim a_n$ e $\lim b_n$ não existem então $\lim a_n b_n$ não existe.

    (f) Se $\lim |a_n| = 1$ então $\lim a_n = 1$ ou $\lim a_n = -1$.

18. (a) O que se pode dizer sobre a sequência (a_n) se ela converge e cada a_n é inteiro.

    (b) Encontre todas as subsequências convergentes da sequência $(1, -1, 1, -1, \ldots)$. Observe que há infinitas subsequências convergentes mas apenas dois possíveis valores limites.

    (c) Encontre todas as subsequências convergentes da seqüência

    $$(1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

    Observe que existem infinitos valores limites possíveis.

19. Sejam $0 < a_1 < a_2$ e defina

$$a_{n+1} = (a_n b_n)^{\frac{1}{2}} \text{ e } b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Mostre, por indução, que $a_n < b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (a_n) e (b_n) convergem para o mesmo limite.

20. Construa uma sequência que tenha uma subsequência convergente para 1, uma subsequência convergente para $\frac{1}{2}$, uma subsequência convergente para $\frac{1}{3}$, ...

4 Apêndice I

Continuidade e Números Irracionais

Neste apêndice, faremos uma tradução livre do prefácio escrito por Richard Dedekind para o seu trabalho *Continuidade e Números Irracionais* no qual ele constrói, usando cortes, que viriam a ser chamados *Cortes de Dedekind*, o corpo dos números reais. Esse prefácio é importante pois, entre outras coisas, relata o porquê de Dedekind ter sentido a necessidade de construir o corpo dos números reais.

Antes de passar ao prefácio digamos algumas palavras sobre Dedekind. Richard Dedekind (1831-1916) foi um matemático alemão, nascido e falecido em Braunschweig, e filho de um professor do Collegium Carolinum, em Brunswick, Alemanha. Permaneceu celibatário por toda a sua vida, morando com uma de suas irmãs. Realizou seus estudos de doutorado em Göttingen, tendo sido o último orientando de Gauss, com uma tese sobre integrais Eulerianas. Seu trabalho mais popular foi sobre a construção dos números reais, realizado em 1852.

Passemos ao prefácio do trabalho supracitado.

> Minha atenção referente às considerações relativas a este trabalho foi primeiro dirigida no outono de 1858. Como professor na Escola Politécnica em Zurique tive que lecionar pela primeira vez os elementos do Cálculo Diferencial e senti, de maneira mais intensa que antes, a ausência de fundamento realmente científico para a Aritmética. Ao discutir a noção de aproximação de uma variável de um determinado valor limite, e particularmente ao demonstrar o teorema que afirma que toda variável que cresce continuamente mas não ultrapassa um determinado valor, deve tender a um valor limite, tive que recorrer a argumentos geométricos. Mesmo agora, considero extremamente útil, do ponto de vista didático, o recurso ao apelo intuitivo geométrico em uma primeira apresentação do Cálculo Diferencial e, de fato, indispensável se não quisermos perder muito tempo. Mas essa forma de introdução ao Cálculo Diferencial não possui fundamento científico, e isto ninguém pode negar. Para mim, esse sentimento de insatisfação se tornou tão intenso que resolvê-lo se tornou uma ideia fixa e permaneci meditando sobre ele até que eu encontrasse um fundamento puramente aritmético e perfeitamente rigoroso para os princípios da Análise Infinitesimal. A afirmação de que o Cálculo Diferencial trata de magnitudes contínuas é feita com muita frequência. No entanto, uma explicação sobre essa continuidade não é encontrada em lugar nenhum; mesmo a

mais rigorosa exposição do Cálculo Diferencial não fundamenta suas demonstrações sobre a continuidade mas, com mais ou menos consciência deste fato, elas ou apelam para noções geométricas ou são sugeridas pela geometria, ou dependem de teoremas que nunca foram estabelecidos de modo puramente aritmético. Entre esses, por exemplo, está o acima mencionado teorema, e uma investigação cuidadosa convenceu-me que esse teorema, ou qualquer outro resultado equivalente a ele, pode ser considerado de algum modo como uma base suficiente para a Análise Infinitesimal. Resta somente descobrir sua verdadeira origem nos elementos da aritmética e assim e ao mesmo tempo assegurar a definição real da essência da continuidade. Aconteceu em 24 de novembro de 1858 e alguns dias depois comuniquei os resultados de minhas meditações ao meu caro amigo Durège com quem eu tive uma longa e acalorada discussão. Posteriormente, expus estas ideias a alguns de meus alunos, e aqui em Braunschweig li um artigo sobre tal assunto perante um clube científico de professores, mas ainda não tinha a intenção de publicá-lo pois, em primeiro lugar, a apresentação não me parecia simples e, além disso, a teoria por si só ainda não se mostrava promissora. Contudo, eu estava mais ou menos determinado a escolher este tópico para esta ocasião, quando alguns dias antes, 14 de março, por gentileza do autor, o artigo *Die Elemente der Funktionenlehre* de E. Heine (*Crelle´s Journal, Vol. 74*) veio às minhas mãos e eu tomei a decisão. Realmente eu concordei inteiramente com a substância desta Memória, e não poderia ser de outra forma, mas francamente devo reconhecer que minha própria apresentação me parecia mais simples e trazia à tona os pontos vitais mais claramente. Quando estava escrevendo este prefácio (20 de março de 1872), recebi o interessante artigo *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, de Georg Cantor (*Math. Annalen, Vol. 5*), para o qual eu externo ao engenhoso autor os mais afetuosos agradecimentos. Acredito, após uma rápida leitura, que o axioma dado na Seção II daquele artigo, exceto a sua forma de apresentação, coincide com aquilo que designei na Seção III como a essência da continuidade.

5 Apêndice II

O Número e Revisitado

Veremos como introduzir o número e de uma maneira alternativa. Mais precisamente, mostraremos que

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.1}$$

Provaremos que essa sequência é crescente e limitada.

(a) $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ é crescente.

Usando o Binômio de Newton, obtemos

$$(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.2}$$

O termo geral dessa expansão é

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \tag{2.3}$$

Para cada k fixado, cada um dos fatores

$$\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

é crescente. Portanto, a sequência $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ é crescente.

(b) A sequência $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ é limitada.

Inicialmente, observemos que o termo geral dado em (2.3) satisfaz a desigualdade

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{k!}$$

pois os termos entre parênteses são todos menores do que ou iguais a 1. Daí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

pois $k! \geq 2^{k-1}$.

Usando o fato de que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

concluímos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \quad \text{para todo } \; n = 1, 2, \ldots.$$

Conclui-se, pelo Teorem 4, que a sequência em estudo é limitada.

Consequentemente, $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ é convergente e seu limite é menor do que ou igual a 3. Definamos

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Esse número é o mesmo introduzido anteriormente, vide exemplo 20, na presente lição.

Na verdade, a sequência $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ não converge rapidamente. O número e é aproximadamente

$$2,71828182845904523536\ldots$$

Comparando esse valor com vários termos da sequência $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$,

$$n = 1, \; \left(\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1\right) = 2,$$

$$n = 10, \; \left(\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}\right) = 2,59374\ldots,$$

$$n = 100, \; \left(\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}\right) = 2,70481\ldots,$$

$$n = 1000, \; \left(\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right) = 2,71692\ldots,$$

vemos que, para $n = 1000$, 0 erro cometido, $e - \left(\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)$, é igual a $0,0014\ldots$.

Na verdade, a aproximação mais rápida de e é dada pelo exemplo 20 da presente lição. Veja Amann& Escher[1]

[1] H. Amann & J. Escher, Analysis I, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1998.

Capítulo 3

Teorema de Bolzano-Weierstrass e Sequências de Cauchy

Dedicaremos este capítulo ao estudo de algumas sequências especiais que surgem com muita frequência ao longo do estudo da Análise Real. Faremos um estudo detalhado delas, assim como estudaremos as *Sequências de Cauchy* e demonstraremos o importante *Teorema de Bolzano-Weierstrass*. No capítulo 2 vimos que para estudar a convergência de sequências, deveríamos ter um candidato a limite. O estudo das *Sequências de Cauchy* nos permitirá analisar a convergência de sequências sem que tenhamos de ter, *a priori*, um candidato a limite. Além disso, elas terão um papel preponderante no estudo dos *Espaços Completos*, conceito esse que foge ao escopo deste curso. Com relação ao *Teorema de Bolzano-Weierstrass* ele nos mostrará que uma sequência limitada não-convergente não é algo tão mau. Caso isso aconteça, ela contém uma subsequência convergente o que, em muitos casos, é suficiente nas aplicações.

1 Algumas Sequências Especiais

Analisemos alguns tipos de sequências. Começaremos com (r^n) em que r é um número real fixo. Na verdade esse exemplo, dependendo de qual seja o r, abrange uma classe de exemplos.

Exemplo 21. *Seja r um número real e consideremos a sequência (r^n). Estudaremos todos os casos possíveis com relação aos valores de r.*

(a) Se $r = 1$, a sequência será constante, $(1, 1, 1, \ldots)$, e, portanto, convergirá para 1.

(b) Se $r = -1$ a, sequência será $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ a qual já foi estudada no capítulo anterior e é divergente. Observe que ela

contém duas (mas não somente duas) subsequências convergentes: $(1, 1, 1, \ldots)$ *e* $(-1, -1, -1, -1, \ldots)$.

(c) *Consideremos o caso em que* $0 \leq r < 1$. *Se* $r = 0$, *nada há a demonstrar, pois ela será constante com todos os seus termos nulos. Dedicaremos nossa atenção ao caso em que* $0 < r < 1$. *Fazendo* $a_n = r^n$ *teremos*

$$a_{n+1} = r^{n+1} = rr^n < r^n = a_n$$

e assim (a_n) *é decrescente e limitada inferiormente por 0. Daí, concluímos que* (r^n) *converge. Seja* l *o seu limite. Como* (r^n) *converge,* (rr^n) *também convergirá e*

$$\lim rr^n = r \lim r^n$$

ou

$$\lim r^{n+1} = rl$$

e como (r^{n+1}) *também converge para* l *(observe que* (r^{n+1}) *é subsequência de uma sequência convergente), teremos* $l = rl$ *e assim* $(1 - r)l = 0$. *Mas* $1 - r \neq 0$ *e então* $l = 0$. *Conclusão: se* $0 \leq r < 1$ *a sequência* (r^n) *converge para 0.*

(d) *Se* $-1 < r < 0$ *a sequência será oscilante, ou seja, os termos de ordem ímpar serão negativos e os termos de ordem par serão positivos. No entanto, a convergência de* $(|r|^n)$ *recairá no caso anterior e assim convergirá para zero. Usando a propriedade 4 do capítulo anterior* $(a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0)$ *tem-se* $r^n \to 0$ *sempre que* r *for como acima.*

(e) *Suponhamos que* $r > 1$. *Desse modo,* $r = 1 + h$, *para algum* $h > 0$. *Usemos a Desigualdade de Bernoulli*

$$r^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Como h *é positivo, tem-se* $(1 + nh) \to +\infty$ *e, usando a última desigualdade, concluímos que* $r^n \to +\infty$.

(f) *Consideremos* $r < -1$. *Desde que* $|r| > 1$ *tem-se* $|r|^n \to +\infty$. *Daí,* (r^n) *é não-limitada e, consequentemente, divergente. Com isso, esgotamos todos os casos possíveis.*

Exemplo 22. *Dado* $-1 < r < 1$ *analisaremos a convergência da sequência* (s_n) *cujo termo geral é*

$$s_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Observando que

$$\lim \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r},$$

pois $r^{n+1} \to 0$, *tem-se*

$$\lim s_n = \lim(1 + r + r^2 + \ldots + r^n) = \frac{1}{1 - r}.$$

Esse é o exemplo mais popular daquilo que é conhecido como série numérica, a qual será estudada no próximo capítulo.

Exemplo 23. *Consideremos a sequência*

$$(1, 1 + \frac{1}{1!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \cdots)$$

cujo termo geral é

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

já estudada no exemplo 20 do capítulo anterior. Por ser crescente e limitada, ela é convergente e seu limite, que é a base do sistema de logaritmos naturais, é designado por e. *Queremos provar que* e *é um número irracional. Antes, porém, observemos que para qualquer natural* $N > 2$ *e qualquer* $k \in \mathbb{N}$, *temos*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{(N+1)!} + \tfrac{1}{(N+2)!} + \tfrac{1}{(N+3)!} + \ldots + \tfrac{1}{(N+k)!} \\
&= \tfrac{1}{(N+1)!}\left(1 + \tfrac{1}{(N+2)} + \tfrac{1}{(N+2)(N+3)} + \ldots + \tfrac{1}{(N+2)(N+3)\ldots(N+k)}\right) \\
&< \tfrac{1}{(N+1)!}\left(1 + \tfrac{1}{N+2} + \tfrac{1}{(N+2)^2} + \ldots + \tfrac{1}{(N+2)^{k-1}}\right) \\
&< \tfrac{1}{(N+1)!}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots + \tfrac{1}{2^{k-1}}\right) \\
&< \tfrac{2}{(N+1)!} \\
&= \tfrac{2}{N+1} \cdot \tfrac{1}{N!} \\
&\leq \tfrac{1}{2N!}.
\end{aligned}$$

Mostraremos, por contradição, que e *é irracional. Com efeito, suponhamos que* e *seja um número racional da forma* $\frac{m}{n}$. *Observemos que* e *pode ser reescrito como*

$$e = \frac{M}{N!}$$

em que M *e* N *são números naturais escolhidos convenientemente, de modo que* $N > 2$. *Notemos também que*

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{N!} = \frac{P}{N!}$$

em que P é um certo número natural. Assim,

$$\begin{aligned}
1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{(N+k)!} \\
&= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{N!} + \tfrac{1}{(N+1)!} + \tfrac{1}{(N+2)!} + \ldots + \tfrac{1}{(N+k)!} \\
&< \tfrac{P}{N!} + \tfrac{1}{2N!} \\
&= \tfrac{P+\frac{1}{2}}{N!}\,.
\end{aligned}$$

Dessa série de desigualdades concluímos que $\frac{P+\frac{1}{2}}{N!}$ é uma cota superior para o conjunto de valores da sequência em estudo. Além disso, $e = \frac{M}{N!}$ é o seu supremo, ou seja, a menor de suas cotas superiores. Usando o fato de que

$$\frac{P}{N!} < \frac{M}{N!} \leq \frac{P+\frac{1}{2}}{N!} < \frac{P+1}{N!}$$

chegamos a

$$P < M < P+1$$

o que é impossível pois M é um inteiro e, portanto, não pode estar entre dois inteiros consecutivos P e $P+1$. Esta contradição nos leva a concluir que e é um número irracional. Na verdade, esse número é transcendente, isto é, ele não pode ser raiz de nenhuma equação algébrica cujos coeficientes sejam inteiros. Para a demonstração deste fato o leitor poderá consultar de Figueiredo[1].

Exemplo 24. Consideremos a sequência

$$\left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots\right)$$

e observemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{2^3}{2^4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n}$

$= 1 + \frac{n}{2}$

Ora, essas desigualdades nos dizem, em particular, que a sequência em estudo não é limitada, portanto, não é convergente. Este é outro exemplo daquilo que chamamos série numérica cujo comportamento é diferente da que foi vista no exemplo 22.

[1]Djairo Guedes de Figueiredo, Números Irracionais e Transcendentes, Coleção Iniciação Científica/01, SBM, 2002.

Exemplo 25. Estudemos a sequência $(\sqrt[n]{n})$. Para analisar o seu comportamento usaremos a desigualdade

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)\frac{r^2}{2}, r \geq 0,$$

apresentada na Aplicação 3 do capítulo 1. Em particular, em virtude de $r \geq 0$, temos

$$(1+r)^n \geq n(n-1)\frac{r^2}{2}.$$

Como $\sqrt[n]{n} \geq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $h_n \geq 0$ (se $n \geq 2$ tal h_n é positivo) satisfazendo

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$$

de modo que

$$n = (1+h_n)^n \geq n(n-1)\frac{h_n^2}{2}.$$

Assim, para $n \geq 2$, temos

$$0 < h_n \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como

$$\lim \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

usando a Regra do Sanduíche, obtém-se $h_n \to 0$ e então, em vista de $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, concluímos que $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Bernhard Placidus Jojann Nepomuk **Bolzano**, nasceu em Praga, Boêmia, atual República Tcheca, a 5 de outubro de 1781 e morreu a 18 de dezembro de 1848 em Praga. Interessou-se por Matemática, Filosofia e Teologia. Foi padre, mas tinha ideias contrárias às da Igreja Católica, também adotou posições críticas relativas as condições sociais do Império Austro-húngaro, por isso foi obrigado a aposentar-se em 1824 pelo imperador Franz I da Áustria.

2 Teorema de Bolzano-Weierstrass

Nosso próximo objetivo é o teorema de Bolzano-Weierstrass cuja demonstração será baseada no seguinte resultado.

Teorema 7. *Toda sequência possui ou uma subsequência não-crescente ou uma subsequência não-decrescente, ou ambas.*

Demonstração. Dada uma sequência (a_n) consideremos o subconjunto de $\mathbb{N}$

$$A = \{N \in \mathbb{N}; \text{ se } m > N \text{ então } a_m < a_N\}.$$

Suponhamos que A não seja limitado superiormente. Por ser constituído de números naturais, ele contém elementos da forma

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots.$$

Pelo fato de $k_1 \in A$ segue-se que se $m > k_1$ então $a_m < a_{k_1}$. Em particular, como $k_2 > k_1$ teremos

$$a_{k_2} < a_{k_1}.$$

Como $k_2 \in A$, teremos que $m > k_2$ implica $a_m < a_{k_2}$ e daí $a_{k_3} < a_{k_2}$, donde

$$a_{k_3} < a_{k_2} < a_{k_1}.$$

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma subsequência decrescente

$$a_{k_1} > a_{k_2} > a_{k_3} > \dots.$$

Consideremos, a seguir, o caso em que o conjunto A seja limitado superiormente (que inclui o caso no qual $A = \emptyset$). Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja limitado é finito e daí existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k_1, k_1 + 1, k_1 + 2, \dots$ não pertencem a A. Desde que $k_1 \notin A$ existe um natural $m > k_1$ tal que $a_m \geq a_{k_1}$. Chame esse natural de k_2. Como $k_2 \notin A$, existe um inteiro $k_3 > k_2$ tal que $a_{k_3} \geq a_{k_2} \geq a_{k_1}$ e assim obtemos uma subsequência não-decrescente

$$a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq a_{k_3} \leq \dots$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Karl Wilhelm Theodor **Weierstrass**, matemático alemão, nasceu a 31 de outubro de 1815 em Ostenfelde e faleceu a 19 de fevereiro de 1897 em Berlim. As suas descobertas matemáticas qualificam-lhe como um pioneiro da Análise Matemática. Foi professor de Matemática da Universidade de Berlim. Antes disso foi professor secundarista de Alemão, Caligrafia, Geografia e Matemática.

Vejamos a seguir o teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema 8. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência limitada, ou seja, existe uma constante positiva M tal que

$$-M \leq a_n \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Em virtude do teorema anterior, (a_n) possui uma subsequência decrescente ou não-decrescente. Se a subsequência for decrescente, e como ela é limitada inferiormente, ela convergirá para o ínfimo do seu conjunto de valores. Analogamente, se ela for não-decrescente, ela convergirá para o supremo de seu conjunto de valores. Em ambos os casos encontramos subsequências convergentes. □

Outra demonstração do Teorema de Bolzano-Weirstrass, usando um argumento bastante geométrico e intuitivo, baseado no método da bissecção, pode ser encontrada em Brannan[2].

Observação 5. *A sequência $(sen\ n)$ é limitada e, com o que dispomos até o momento, é impossível descrever o seu comportamento quando $n \to \infty$. Entretanto, pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass, ela possui uma subsequência convergente para um número $l \in [-1, 1]$ haja vista que $|sen\, n| \leq 1$. Na verdade, pode-se provar, e isso está fora do escopo desse curso, que para cada $l \in [-1, 1]$ existe uma subsequência $(sen\ n_k)$ de $(sen\, n)$ com $sen\, n_k \to l$.*

[2] David Alexander Brannan, A First Course in Mathematical Analysis, Cambridge University Press, Published in association with The Open University, Cambridge, 2006.

Antes de exibirmos um corolário do teorema de Bolzano-Weierstrass, estabeleceremos uma definição e alguns exemplos.

Definição 26. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A se todo intervalo da forma $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contém um ponto de A diferente de x, qualquer que seja $\varepsilon > 0$.*

Na verdade, se x for um ponto de acumulação de A, todo intervalo da forma acima contém uma infinidade de pontos de A, o que nos leva a concluir que todo conjunto que possui ponto de acumulação é infinito.

Exemplo 26. *O(A) leitor(a) deve saber justificar as afirmações dos exemplos seguintes.*

(a) O conjunto $\mathbb{N}$ não possui pontos de acumulação.

(b) O conjunto $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ possui apenas 0 como ponto de acumulação.

(c) O conjunto dos pontos de acumulação dos racionais $\mathbb{Q}$ é todo o conjunto dos reais.

(d) O conjunto dos pontos de acumulação do intervalo $[a,b)$, $a<b$, é o intervalo $[a,b]$.

Outros exemplos serão exibidos na seção de exercícios. Demonstremos um corolário do teorema de Bolzano-Weierstrass.

Corolário 2. *Todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ possui um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja A um conjunto infinito de números reais. Assim, existe uma aplicação injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa $s(n) = a_n \in A$. Portanto, o conjunto A contém todos os termos da sequência (a_n) a qual é limitada, pois o conjunto A o é. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, (a_n) possui uma subsequência convergente, digamos $(a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots)$, para um certo $a \in \mathbb{R}$. Afirmamos que a é ponto de acumulação do conjunto A. De fato, como a subsequência (a_{k_j}) converge para a, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice k_{j_0} tal que

$$a_{k_j} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \text{ para todo } k_j > k_{j_0}.$$

Como os termos da referida subsequência são todos distintos e pertencem ao conjunto, A o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contém elementos de A diferentes de a e daí a é ponto de acumulação de A. $\square$

3 Sequências de Cauchy

Augustin Louis **Cauchy**, grande matemático francês, nasceu a 21 de agosto de 1789 em Paris e faleceu a 23 de maio de 1857 em Paris. Dedicou-se a muitos campos da Matemática do seu tempo tais como equações diferenciais, integração, sequências e séries numéricas, combinatória, funções de variável complexa e álgebra. Deixou uma obra gigantesca. Foi um dedicado seguidor dos preceitos da Igreja Católica. Suas últimas palavras, dirigidas a um arcerbispo, foram *"O homem morre, mas sua obra permanece"*.

A seguir, estudaremos as sequências de Cauchy. Esse conceito é fundamental para generalizar para outros espaço as propriedade inicialmente observadas no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição 27. *Uma sequência de números reais* (a_n) *é chamada sequência de Cauchy se, dado* $\varepsilon > 0$, *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \ \text{ se } \ m, n \geq n_0.$$

Temos o seguinte importante resultado.

Teorema 9. (Critério de Cauchy) *Uma sequência é convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que (a_n) seja uma sequência convergente para um certo $a \in \mathbb{R}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ se } \ n \geq n_0.$$

Portanto, se $m, n \geq n_0$ teremos

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o que implica ser (a_n) uma sequência de Cauchy. Essa é a parte fácil da demonstração.

Reciprocamente, suponhamos que (a_n) seja uma sequência de Cauchy e mostremos que ela é convergente. Para isso, devemos encontrar um candidato a limite. Inicialmente, mostremos a limitação dessa sequência. Para $\varepsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a_m| < 1 \ \text{ se } \ m, n \geq n_1.$$

e assim

$$|a_n - a_{n_1}| < 1 \ \text{ se } \ n \geq n_1.$$

Portanto,

$$|a_n| = |a_n - a_{n_1} + a_{n_1}| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1}| < 1 + |a_{n_1}| \ \text{ se } \ n \geq n_1.$$

Isso mostra que o conjunto $\{a_{n_1}, a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots\}$ é limitado. Tomando $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{n_1-1}|\}$ concluímos que

$$|a_n| \leq \max\{K, 1 + |a_{n_1}|\}, \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto a sequência é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequência (a_{n_j}) convergente para um certo $a \in \mathbb{R}$.

Mostremos que a própria sequência também converge para a. Com efeito, para todo termo a_{n_j} da subsequência, temos

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_j} + a_{n_j} - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a|. \tag{3.1}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como (a_n) é de Cauchy existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } m, n \geq n_2$$

e como (a_{n_j}) converge para a existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n_j \geq n_3.$$

Tomemos $n_{j_0} \geq \max\{n_2, n_3\}$ e usando 3.1 com $n_j = n_{j_0}$ temos

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{j_0}}| + |a_{n_{j_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ se } n \geq n_0$$

de onde se conclui que $a_n \to a$. □

Observação 6. *O teorema precedente é importante pois, entre outras coisas, nos fornece a completeza de $\mathbb{R}$. Além disso, deve-se observar que ao usarmos a definição de convergência deve-se ter, a priori, um candidato a limite. No entanto, nem sempre isso acontece. Caso não tenhamos um candidato a limite e queiramos demonstrar que uma dada sequência converge podemos usar o critério de Cauchy e mostrar que a sequência o satisfaz.*

As sequências de Cauchy de números racionais são utilizadas, também, para construir o corpo dos reais via classes de equivalência. Vide Sloughter [21] para os detalhes bastante técnicos.

4 Exercícios Propostos

1. Diga, justificando matematicamente, quais das seguintes afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas.

   (a) Se $\lim b_n = +\infty$ e $\lim a_n = 0$ então $\lim(a_n b_n)$ não existe.

   (b) Se (a_n) e (b_n) são sequências de números reais positivos tais que $\lim a_n = 0$ e $\lim b_n = 0$ então $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

   (c) Se $\lim a_n$ existe e $\lim b_n$ não existe então $\lim(a_n + b_n)$ não existe.

   (d) Se $\lim a_n = +\infty$ e $\lim b_n = +\infty$ então $\lim(a_n - b_n)$ existe e é igual a zero.

   (f) Se $\lim |a_n| = 1$ então $\lim a_n = 1$ ou $\lim a_n = -1$.

2. Dado $\varepsilon > 0$, determine os valores de n para os quais vale a desigualdade $|a_n - l| < \varepsilon$ quando:

   (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ e $l = 1$;

(b) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ e $l = 1$;

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e $l = 0$;

(d) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ e $l = 0$;

(e) $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ e $l = 1$.

3. Mostre que se $r \geq 1$ a sequência $(r^{\frac{1}{n}})$ é decrescente e converge para 1.

4. Mostre que se $0 < r \leq 1$ a sequência $(r^{\frac{1}{n}})$ é crescente e converge para 1.

5. Sejam (a_n) uma sequência e a um número positivo tais que $a \leq a_n \leq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

6. Considere a sequência (a_n) dada por

$$a_1 = 2,5 \;\text{ e }\; a_n = \frac{1}{5}(a_{n-1}^2 + 6) \;\text{ para }\; n > 1.$$

Mostre que:

(a) $2 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) (a_n) é decrescente;

(c) (a_n) converge. Encontre o seu limite.

7. Verifique se as sequências a seguir são convergentes. Justifique suas respostas.

$$\left(\frac{2n^3+1}{3n^3+n+2}\right), \left((1+\frac{1}{\sqrt{n}})^2\right), ((50+3^n)^{\frac{1}{n}}).$$

8. Considere a sequência (a_n) dada por

$$a_1 = 10 \;\text{ e }\; a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} \;\text{ para }\; n > 1.$$

(a) Mostre que ela é decrescente.

(b) Mostre que ela é limitada inferiormente.

(c) Conclua que ela é convergente e calcule seu limite.

9. Estude a convergência da sequência $(\frac{r^n}{n!})$ em que r é um número positivo.

10. Mostre que a sequência cujos termos são dados por $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... é convergente.

11. Calcule $\lim(\sqrt{2n^2+n+1} - n)$.

12. Seja (a_n) uma sequência convergente para um certo limite a. Mostre a sequência (s_n) cujo termo geral é dado por
$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
converge para a. No entanto, (s_n) pode convergir sem que a sequência (a_n) convirja.

13. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos positivos tais que $\frac{a_n}{b_n} \to l \geq 0$. Mostre que se $\sum a_n$ for divergente, então $\sum b_n$ será divergente.

14. Defina a sequência (a_n) recursivamente por $a_0 := 2$ e $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (a_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ mas seu limite não pertence a $\mathbb{Q}$. Qual é o limite de (a_n)?

5 Apêndice I

Limite Inferior e Limite Superior de Sequências

Neste Apêndice introduziremos os conceitos de *limite inferior* e *limite superior* de sequências limitadas. Isso nos possibilitará, entre outras coisas, exibir uma outra demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass. Inicialmente, recordemos que uma sequência (a_n) é limitada se o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\}$ for limitado. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{a_k; k \geq n\}$ será, também, limitado.

Definição 28. *Seja (a_n) uma sequência limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a sequência $(\sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\})$. Claramente, essa sequência é não-crescente e limitada e, portanto, é convergente. Definamos o* limite superior *de (a_n) por*
$$\limsup a_n = \lim_{k\to\infty} \sup\{a_k, a_{k+1}, \ldots\} = \inf_k(\sup_{n\geq k} a_n).$$

Analogamente, define-se o limite inferior *de (a_n), designado por $\liminf a_n$, por*
$$\liminf a_n = \lim_{k\to\infty} \inf\{a_k, a_{k+1}, \ldots\} = \sup_k(\inf_{n\geq k} a_n).$$

Exemplo 27. *É fácil ver que $\limsup \frac{1}{n} = \liminf \frac{1}{n} = 0$ enquanto que $\limsup(-1)^n = 1$ e $\liminf(-1)^n = -1$. Na verdade, as diferenças explicitadas nesses dois exemplos são casos particulares do teorema a seguir.*

Teorema 10. *Uma sequência limitada* (a_n) *é convergente se, e somente se,* $\liminf a_n = \limsup a_n$ *e, nesse caso,* $lima_n = \liminf a_n = \limsup a_n$*.*

Demonstração. Sejam $b_k = \sup\limits_{n\geq k} a_n$ e $b'_k = \inf\limits_{n\geq k} a_n$. Então $b'_k \leq a_k \leq b_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Suponhamos que (a_n) convirja e seja a o seu limite. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < a_k < a + \epsilon$ se $k \geq k_0$. Desde que $a_k \leq \sup\limits_{n\geq k} a_n = b_k$ e $a_k \geq \inf\limits_{n\geq k} a_n = b'_k$, teremos

$$a - \epsilon \leq b'_k \leq a_k \leq b_k \leq a + \epsilon, \forall k \geq k_0.$$

Logo, em virtude da Regra do Sanduíche, $limb'_k = limb_k = a$, como queríamos demonstrar. Reciprocamente, se $\liminf a_n = \limsup a_n$ e desde que $b'_k \leq a_k \leq b_k$, teremos $\lim b'_k = \lim a_k = \lim b_k$, o que conclui a demonstração. $\square$

Definição 29. *Diz-se que* l *é* ponto aderente *da sequência* (a_n) *se existir uma subsequência* (a_{n_j}) *tal que* $\lim\limits_{n_j\to\infty} a_{n_j} = l$*.*

A demonstração do seguinte resultado será deixado como exercício.

Teorema 11. *Se* (a_n) *for uma sequência limitada o conjunto* C *de seus pontos aderentes é limitado.*

Teorema 12. *Se* (c_n) *for uma sequência de pontos aderentes de* (a_n) *e* $c_n \to c$*, então* $c \in C$*.*

Demonstração. Mostremos que existe uma subsequência de (a_n) convergindo para c. Desde que $c_n \to c$, existe $n'_1 \in \mathbb{N}$ com $c_{n'_1} \in (c-1, c+1)$. Escolhamos $\epsilon_1 > 0$ tal que $(c_{n'_1} - \epsilon_1, c_{n'_1} + \epsilon_1) \subset (c-1, c+1)$. Desde que $c_{n'_1}$ é ponto aderente de (a_n), existe $n_1 > n'_1$ tal que $a_{n_1} \in (c_{n'_1} - \epsilon_1, c_{n'_1} + \epsilon_1) \subset (c-1, c+1)$.

Analogamente, existe $n'_2 > n'_1 \in \mathbb{N}$ com $c_{n'_2} \in (c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$. Escolhamos $\epsilon_2 > 0$ tal que $(c_{n'_2} - \epsilon_2, c_{n'_2} + \epsilon_2) \subset (c-1, c+1)$. Desde que $c_{n'_2}$ é ponto aderente de (a_n), existe $n_2 > n'_2 > n'_1$ tal que $a_{n_2} \in (c_{n'_2} - \epsilon_2, c_{n'_2} + \epsilon_2) \subset (c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$. Prosseguindo dessa maneira, encontramos uma subsequência (a_{n_j}) convergindo para c. Isso conclui a demonstração. $\square$

Teorema 13. $\limsup a_n$ *e* $liminf a_n$ *são, respectivamente, o maior e o menor ponto aderente da sequência limitada* (a_n)*.*

Demonstração. A demonstração de que $\limsup a_n$ e $liminf a_n$ são pontos aderentes de (a_n) é análoga à do resultado anterior. Mostremos, a seguir, que se c for ponto aderente de (a_n), então $\limsup a_n \geq c$. Com efeito, existe uma subsequência (a_{n_j}) com $a_{n_j} \to c$ e assim

$$c = \lim a_{n_j} = \inf_m (\sup \{a_{n_k}; k \geq m\} \leq \limsup a_n.$$

A demonstração de que $liminf a_n$ é o menor ponto aderente de (a_n) é análoga. $\square$

Observação 7. *Observemos que esse teorema nos fornece uma demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass. Para uma excelente explanação sobre esse teorema, sugerimos consultar Boas*[3].

[3]Ralph P. Boas Jr., A Primer of Real Functions, The Carus Mathematical Monographs, Number Thirteen, The Mathematical Association of America, 1960.

Capítulo 4

Noções Iniciais Sobre Séries Numéricas

Neste capítulo, começaremos o estudo das séries numérica que é feito utilizando os resultados e procedimentos introduzidos na teoria das sequências. Com as séries daremos sentido a expressões do tipo

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots &= \frac{3}{2} \\ 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots &= e \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots &= +\infty \end{aligned}$$

ou seja, aprenderemos a efetuar "somas" que possuem uma "quantidade infinita" de parcelas. Isso, evidentemente, não pode ser feito da maneira convencional; para efetuarmos uma "soma" como as mostradas acima lançaremos mão do conceito de limite de sequências.

1 Definição e Exemplos de Séries

No capítulo anterior estudamos certas sequências que tinham a particularidade de que seus termos gerais eram representados por somas. Relembremos algumas delas.

Exemplo 28. *Comecemos com a sequência*

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n,$$

em que r é um número real. Observemos que as parcelas dessa soma são termos de uma progressão geométrica de razão r. Como já visto

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad se \ \ r \neq 1.$$

Se $|r| < 1$, *essa sequência converge para* $\frac{1}{1-r}$. *Grosso modo, isso significa considerar uma "soma com um número infinito de parcelas", sendo razoável pensar em fazer*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 + r + r^2 + \ldots + r^n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} r^j = \sum_{j=0}^{\infty} r^j.$$

Assim, poderíamos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

desde que $|r| < 1$. *Isso nos diz que podemos "somar" uma quantidade infinita de parcelas mas o resultado desta operação pode resultar em um valor finito.*

Vejamos outros exemplos.

Exemplo 29. Consideremos a sequência (S_n) dada por

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

estudada no exemplo 24 do Capítulo 3. Conforme visto,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Como $\lim n \cdot \frac{1}{2} = \infty$ tem-se, por comparação, que a sequência (S_n) tende para $+\infty$. Neste caso, a "soma" de uma quantidade infinita de parcelas é infinita, muito embora as parcelas tendam a zero. Diz-se que a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

é divergente e sua soma é $+\infty$.

Exemplo 30. *No exemplo 28 "somamos" infinitas parcelas o que produziu um resultado finito. No exemplo 29 tivemos um resultado infinito. Vejamos um exemplo em que nenhum desses casos ocorre. Consideremos a sequência cujos termos são somas dadas por*

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 - 1,\ S_3 = 1 - 1 + 1,\ S_4 = 1 - 1 + 1 - 1, \ldots$$

Na notação de soma infinita podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Observemos que

$$S_1 = S_3 = S_5 = \cdots = 1$$

e

$$S_2 = S_4 = S_6 = \cdots = 0.$$

Portanto, a sequência (S_n) *diverge pois ela possui duas subsequências convergindo para limites distintos. Assim, a "soma infinita"* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ *nem possui valor finito nem resulta em* $+\infty$.

Para concluir esse exemplo, convidamos o leitor a analisar criticamente o que será feito a seguir e identificar as falhas nos argumentos.

Consideremos a "soma"

$$S = 1-1+1-1+1-1+\cdots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0.$$

No entanto, se rearranjarmos a "soma" como

$$S = 1-[1-1+1-1+1-1+\cdots] = 1-[(1-1)+(1-1)+\cdots] =$$

$$1-[0+0+0\cdots] = 1-0 = 1.$$

Ora, por um lado $S=0$ *e, por outro,* $S=1$*, o que é impossível. O que há de errado nos argumentos acima? Observe que propriedades usadas no argumento precedente como, por exemplo, a associatividade são válidas quando trabalhamos com um número finito de parcelas. Aqui, no que concerne às séries, estamos a considerar limites. Portanto, devemos ser muito cuidadosos nesses processos.*

Após esta introdução informal iniciaremos o estudo rigoroso das séries infinitas ou, simplesmente, séries.

Definição 30. *Uma série infinita, ou simplesmente série, é um par de sequências reais* (a_n) *e* (s_n) *cujos termos estão ligados pelas relações*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

$$a_1 = s_1 \ \text{ e } \ a_n = s_n - s_{n-1},\ n \geq 2.$$

A primeira dessas é chamada *sequência dos termos* da série e a segunda *sequência das somas parciais.* Uma série é, portanto, um par da forma $((a_n),(s_n))$ em que (a_n) e (s_n) estão relacionados como acima. No entanto, é mais usual designar a série como uma soma infinita da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n.$$

As *somas parciais* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ são também chamadas *reduzidas de ordem* n da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Na próxima definição, atribuiremos um sentido à soma infinita que representa uma série.

Definição 31. *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, se a sequência das somas parciais* (s_n) *convergir para* s *diremos que a série converge e escrevemos*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Caso a sequência das somas parciais não convirja, diremos que a série diverge.

"De repente o mostrador luminoso (da calculadora) me revela uma fileira de 3 - chego a pensar que haja enguiçado. É que cai naquilo a que os entendidos chamam de dízima periódica - algo que sempre me fascinou, mais pelo nome que pela compreensão de seu significado. Saber que a série de algarismos se prolonga indefinidamente me parece tão fantástico como aquela definição de paralelas, segundo a qual elas "se encontram no infinito". Onde fica o infinito? Eis uma questão que nem Dostoievski ousou formular." (Fernando Sabino, na crônica DOIS E DOIS SÃO CINCO, contida em A Falta que ela me faz.)

Assim, para efetuarmos somas com uma infinidade de parcelas devemos proceder como foi dito na definição anterior. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Esse é um caso particular no qual a série pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

em que r é um número real. Essas são chamadas *séries geométricas de razão* r. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 31. Consideremos o número decimal

$$0,999\ldots$$

visto como a série

$$0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \cdots$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots=\frac{9}{10}\left[1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right].$$

O termo entre colchetes é familiar ao leitor; ela é a série geométrica com razão $r=\frac{1}{10}$. Desse modo,

$$0,9+0,09+0,009+0,0009+\cdots=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}=1$$

o que confirma exatamente aquilo que esperávamos:

$$0,999\ldots=1.$$

Exemplo 32. *Vejamos uma outra situação que também recai em uma série geométrica. Consideremos a dízima periódica $d=0,215626262\ldots$ e determinemos a sua geratriz. Nesse caso, tem-se*

$$d=0,215+0,00062+0,0000062+0,000000062+\ldots$$

de modo que

$$d=\frac{215}{10^3}+\frac{62}{10^5}+\frac{62}{10^7}+\frac{62}{10^9}+\ldots$$

e daí

$$d=\frac{215}{10^3}+\frac{62}{10^5}\left[1+\frac{1}{10^2}+\left(\frac{1}{10^2}\right)^2+\cdots\right]$$

em que o termo entre colchetes é um série geométrica cuja razão é $\frac{1}{10^2}$. Logo,

$$d=\frac{215}{10^3}+\frac{62}{10^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}$$

e então

$$d=\frac{215}{1000}+\frac{62}{99000}=\frac{21.347}{99.000}$$

que é a geratriz da dízima periódica em estudo.

Vejamos uma série que não é geométrica.

Exemplo 33. *Consideremos*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

conhecida como série telescópica. Observando que

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

pode-se escrever a soma parcial s_n como

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Deve-se notar que nessa soma os termos $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{3}$, ... , $\frac{1}{n}$ e $-\frac{1}{n}$ se cancelam, sobrando apenas 1 e $-\frac{1}{n+1}$. De modo que

$$\begin{aligned} \lim s_n &= \lim\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right] \\ &= \lim\left[1-\frac{1}{n+1}\right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, a série telescópica *converge e*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

A série a seguir já foi estudada no exemplo 24 do capítulo 3.

Exemplo 34. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

é chamada série harmônica. Vimos no exemplo 24 do capítulo 3 que a sequência das somas parciais dessa série não é limitada, logo não é convergente. Assim, a série harmônica é divergente.

Nicole Oresme (1323-1382), matemático francês e bispo de Lisieux, ao que parece, foi o primeiro a analisar a divergência da Série Harmônica.

Exemplo 35. Consideremos a série

$$1+1+1+\cdots.$$

Nesse caso,

$$s_n=1+1+\cdots+1=n.$$

Como (s_n) tende para $+\infty$ a série em questão é divergente e escreve-se

$$1+1+1+\cdots=+\infty.$$

2 Alguns Resultados

Antes de prosseguirmos com mais exemplos, estabeleceremos alguns resultados bastante úteis. Os dois primeiros são consequências imediatas das propriedades análogas satisfeitas por sequências.

Teorema 14. *Se* $\lambda \neq 0$ *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *converge se, e somente se,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergir.*

Teorema 15. *Suponhamos que as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convirjam. Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *converge.*

Corolário 3. *Suponhamos que as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convirjam. Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *converge.*

Suas demonstrações serão deixadas como exercício.

O teorema seguinte é bastante útil na teoria das séries, pois o corolário que o segue fornece um critério simples para estabelecer a divergência de determinadas séries.

Teorema 16. *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergir então* $\lim a_n = 0$.

Demonstração. Para demonstrar esse fato façamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Isto significa que $\lim S_n = S$ em que $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ é n-ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ora, como (S_n) converge para S tem-se que (S_{n-1}) também converge para S. Como

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

segue-se que

$$\lim a_n = \lim[S_n - S_{n-1}] = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0.$$

$\square$

Corolário 4. (Um critério de divergência) *Se* $\lim a_n$ *não existir ou, se existir e for não-nulo, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

A demonstração desse corolário é imediata a partir do teorema 16.

Exemplo 36. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ *diverge, pois seu termo geral* $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$*, o que se enquadra no corolário 4.*

A recíproca do teorema 16 não é válida conforme mostra a série harmônica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots.$$

Ela diverge, mas seu termo geral $\frac{1}{n} \to 0$.

A convergência (ou a divergência) de uma série não é alterada se adicionarmos ou suprimirmos um número finito de termos na parte inicial da série. Por exemplo, se suprimirmos os primeiros k termos de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e se a soma dos termos suprimidos for igual a c então cada nova soma parcial possui a forma $S_{n+k}-c$. Observemos que $\lim(S_{n+k}-c)$ existe se, e somente se, $\lim S_{n+k}$ existe, e $\lim S_{n+k}$ existe se, e somente se, $\lim S_n$ existe.

3 Testes de Convergência

A partir de agora usaremos simplesmente a notação $\sum a_n$ para designar a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deixando claro que em alguns casos, como o leitor deve ter percebido, os índices representados na série podem começar com $n=0$ ou com n a partir de um certo n_0.

O teste de Cauchy para sequências é traduzido para a linguagem das séries como

Teorema 17. (Teste de Cauchy para Séries.) *A série* $\sum a_n$ *converge se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$*, existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon \ \text{ para quaisquer } m \geq n \geq n_0.$$

O(A) leitor(a) deve reler o teste de Cauchy para sequências e observar que o teorema acima é consequência imediata dele, atentando para o fato de que a convergência (ou divergência) de uma série é simplesmente a convergência (ou divergência) de uma sequência de somas parciais.

Deve-se observar que ainda não temos testes gerais para análise da convergência de séries. Começaremos, a partir de agora, a introduzir vários critérios que nos garantirão se uma determinada série converge ou não.

Teorema 18. *Consideremos a série $\sum a_n$ em que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que exista um número positivo K tal que*

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leq K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum a_n$ é convergente.

Demonstração. Inicialmente, relembremos que a convergência da série $\sum a_n$ é equivalente à da sequência das somas parciais (s_n). Como os termos da série são não-negativos tem-se

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leq s_{n+1} = s_n + a_{n+1},$$

ou seja, (s_n) é não-decrescente, e, por hipótese, a sequência (s_n) é limitada. Então, pelo Teorema 4, ela é convergente. Isso conclui a demonstração do teorema. □

Vejamos o teste da comparação.

Teorema 19. (Teste da Comparação) *Sejam (a_n) e (b_n) sequências tais que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a série $\sum b_n$ converge então a série $\sum a_n$ converge.*

Demonstração. Sejam S_n e s_n as somas parciais

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

e

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Em virtude de $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$0 \leq s_n \leq S_n.$$

Como $\sum b_n$ converge, existe $K > 0$ tal que $S_n \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí, como consequência da comparação acima, obtém-se

$$0 \leq s_n \leq S_n \leq K,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência (s_n) é não-decrescente e limitada superiormente. Pelo teorema anterior, ela é convergente e daí a série $\sum a_n$ converge. $\square$

Segue imediatamente do teorema anterior o seguinte corolário.

Corolário 5. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências tais que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a série $\sum a_n$ divergir então a série $\sum b_n$ diverge.*

Exemplo 37. *Como aplicação do teste precedente, estudemos a série*

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

comparando-a com a série harmônica

$$\sum \frac{1}{n}.$$

Observando que $\sqrt{n} \leq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtém-se

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e usando o corolário 5, concluímos que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge pois a série harmônica diverge.

4 Exercícios Propostos

1. Estude a convergência da série
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots .$$

2. Encontre, se possível, a soma da série $4 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \cdots$.

3. Prove que a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$
é convergente e encontre a sua soma.

4. Estude a convergência da série $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$.

5. Encontre a geratriz da dízima periódica $0,368453453453\ldots$.

6. Interprete $0,\overline{13}$ como uma série e encontre o seu valor em forma de fração.

7. Estude a convergência da série $5 + \sqrt{5} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{5} + \sqrt[5]{5} + \cdots$.

8. Estude a convergência da série $\sum \frac{1}{n(n+3)}$.

9. Mostre que
$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right), \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$
e conclua que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

10. Estude a convergência da série $\sum \frac{n}{(n+1)!}$.

11. Calcule $\sum \pi^{-n}$.

12. Estude a convergência da série $\sum \frac{1}{n+10^{50}}$.

13. Calcule $\sum \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{\pi^n}\right)$.

14. Investigue a convergência da série $\sum \frac{10}{3^n+1}$.

15. Mostre que a série $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \cdots$ diverge.

16. Para cada uma das séries abaixo, determine os valores de x para os quais ela converge.
    (a) $\sum (5x)^n$
    (b) $\sum (x-1)^n$
    (c) $\sum \left(\frac{x}{4}\right)^n$
    (d) $\sum \left(\frac{x-2}{3}\right)^n$

17. Verifique se a série $\sum \frac{3^n+4^n}{5^n}$ converge e, em caso afirmativo, calcule sua soma.

18. Mostre que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ diverge.

19. Se (a_n) e (b_n) forem seqüências com termos não-negativos e se $\sum a_n^2$ e $\sum_n b_n^2$ convergirem, então $\sum a_n b_n$ convergirá.

20. Use frações parciais para mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$.

21. Se $\sum a_n,\ a_n > 0$, for convergente então $\sum a_n^2$ é convergente. Falso ou verdadeiro? Justifique.

22. Se $\sum a_n,\ a_n > 0$, for convergente então $\sum \sqrt{a_n}$ é convergente. Falso ou verdadeiro? Justifique.

Capítulo 5

Critérios de Convergência para Séries

Este capítulo será dedicado ao estudo de vários critérios de convergência de séries, tema já iniciado no capítulo passado.

1 Séries Alternadas

O primeiro critério a ser visto é destinado às séries alternadas. A seguir, será dada a definição desse tipo de série.

Gottfried Wilhelm von **Leibniz**, matemático e filosofo alemão, nasceu a 1 de julho de 1646 em Leipzig e faleceu a 14 de novembro de 1716 em Hannover. É considerado um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral.

Definição 32. *Uma* série alternada *é uma série da forma*

$$\sum(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

em que os termos a_n são não-negativos para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 38. *A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ é alternada.*

O teorema seguinte é conhecido como teste de Leibniz para séries alternadas.

Teorema 20. *Seja (a_n) uma sequência não-crescente convergente para 0. Então a série alternada*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \quad (ou \ \sum(-1)^{n+1}a_n)$$

é convergente.

Demonstração. Mostraremos que (s_{2n}) e (s_{2n+1}) convergem para o mesmo limite. Daí, seguir-se-á que a sequência (s_n) é convergente. Vide exercício 7 do Capítulo 2. Observemos que

$s_{2n+2} - s_{2n}$

$$= (a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}) - (a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n})$$
$$= a_{2n+1} - a_{2n+2}$$
$$\geq 0$$

pois a sequência (a_n) é não-crescente. Também,

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

visto que os termos entre parênteses são não-negativos, assim como a_{2n}. Portanto, a subsequência (s_{2n}) é não-decrescente e limitada superiormente e assim ela converge, digamos, para um certo s. Além disso,

$$s_{2n+1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$$

e como $s_{2n} \to s$ e $a_{2n+1} \to 0$, tem-se

$$s_{2n+1} \to s.$$

Então $s_n \to s$, ou seja, a série alternada $\sum(-1)^{n+1} a_n$ converge. □

Exemplo 39. *Como aplicações desse último teorema vê-se, facilmente, que as séries* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ *e* $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \cdots$ *são convergentes.*

Exemplo 40. *Como aplicações desse último teorema Vê-se, facilmente, que as séries*

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$ *(série harmônica alternada),*

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

convergem. Como poderá ser visto no estudo de séries de potências, suas somas são, respectivamente, $\ln 2$ *e* $\frac{\pi}{4}$.

Convergência Absoluta

Definição 33. *Uma série* $\sum a_n$ *é dita* absolutamente convergente *se* $\sum |a_n|$ *for convergente.*

Exemplo 41. *A série alternada*

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente pois $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots$ *e* $\frac{1}{n} \to 0$, *isto é, ela satisfaz às condições do teste de Leibniz para a convergência de séries alternadas. No entanto, ela não é absolutamente convergente pois a série harmônica*

$$\sum |(-1)^{n+1} \frac{1}{n}| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots ,$$

é divergente.

As séries que são convergentes mas não são absolutamente convergentes são chamadas *condicionalmente convergentes*.

A seguir, enunciaremos um teorema cuja demonstração será deixada como exercício. Ele é uma simples consequência de um resultado sobre sequências. Qual?

Teorema 21. *Toda série absolutamente convergente é convergente, ou seja, se* $\sum |a_n|$ *convergir então* $\sum a_n$ *convergirá.*

O exemplo anterior mostra que a recíproca desse fato não é verdadeira.

2 Teste da Razão ou de D'Alembert

O teorema seguinte nos fornece um outro teste para a convergência de séries.

Teorema 22. *Seja* $\sum a_n$ *uma série de termos positivos e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a razão* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(i) Se todas as razões $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *são menores do que ou iguais a um número* $r < 1$ *então a série converge;*

(ii) Se todas as razões $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *são maiores do que ou iguais a 1 então a série diverge.*

Demonstração. (i) Por hipótese, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\frac{a_2}{a_1} \leq r,\ \frac{a_3}{a_2} \leq r,\ \frac{a_4}{a_3} \leq r,\ \cdots$$

e assim

$$\begin{aligned} &a_2 \leq r a_1, \\ &a_3 \leq r a_2 \leq r^2 a_1, \\ &a_4 \leq r a_3 \leq r^3 a_1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ou mais geralmente $0 \leq a_n \leq r^{n-1} a_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Desde que a série $\sum r^{n-1}$ converge - relembre que $0 < r < 1$- o mesmo acontecerá com a série $\sum r^{n-1} a_1$. Pelo teste da comparação, a série $\sum a_n$ converge pois $0 \leq a_n \leq r^{n-1} a_1$.

(ii) Nesse caso, tem-se

$$\frac{a_2}{a_1} \geq 1,\ \frac{a_3}{a_2} \geq 1,\ \frac{a_5}{a_4} \geq 1,\ \cdots$$

Jean Le Rond **d'Alembert**, matemático e físico francês, nasceu a 17 de novembro de 1717 em Paris e faleceu a 29 de outubro de 1783 em Paris. Era filho ilegítimo de Louis-Camus Destouches. Assim que nasceu, sua mãe o abandonou na igreja de St. Jean Le Rond. No orfanato que o acolheu deram-lhe o nome daquela igreja. Depois foi entregue a Mme Rousseau, esposa de um vidraceiro. Quando viu que o menino era um gênio, sua mãe biológica quis tê-lo de volta, mas ele a renegou. Participou da edição da primeira enciclopédia e fez importantes descobertas em vários campos da Matemática.

e então $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$. Daí, a sequência (a_n) não converge para zero, e assim $\sum a_n$ diverge. $\square$

Devemos-se observar que as condições sobre a razão no teorema anterior podem ser enfraquecidas de modo que é suficiente que elas se verifiquem a partir de um certo $n \in \mathbb{N}$.

Uma consequência do teorema anterior é o resultado dado a seguir conhecido como teste da razão ou teste de D'Alembert para séries.

Corolário 6. (Teste da Razão ou de D'Alembert) *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos para a qual a sequência $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge para um certo limite r. Então*

(i) Se $r < 1$ a série converge;

(ii) Se $r > 1$ a série diverge;

(iii) Se $r = 1$ nada se pode afirmar sobre a convergência ou divergência da série.

Demonstração. (i) Suponhamos que a sequência de termos positivos $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ convirja para r com $0 \leq r < 1$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0,$$

de modo que

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

Isso é equivalente a

$$r - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

Como (a_n) é constituída por termos positivos, temos

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r + \varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

Sendo $0 \leq r < 1$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário, escolhamo-lo convenientemente de modo que que $r + \varepsilon < 1$. Segue-se da parte (i) do teorema anterior que a série converge.

(ii) Suponhamos que $r > 1$. Novamente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

Logo,

$$r - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0,$$

e daí

$$r - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ se } n \geq n_0.$$

Desde que $r > 1$, escolhamos $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que $r - \varepsilon > 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
&a_{n_0+1} > a_{n_0}(r-\varepsilon)\\
&a_{n_0+2} > a_{n_0+1}(r-\varepsilon) > a_{n_0}(r-\varepsilon)^2\\
&a_{n_0+3} > a_{n_0+2}(r-\varepsilon) > a_{n_0}(r-\varepsilon)^3\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Como $r - \varepsilon > 1$ teremos $(r-\varepsilon)^k \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. Então

$$a_{n_0+k} \to +\infty.$$

Isso implica na divergência da série. Concluímos, assim, a demonstração nos casos em que o limite das razões $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é diferente de 1. O item (iii) seguir-se-á dos exemplos expostos a seguir nos quais $r = 1$. No primeiro a série diverge, ao que no segundo ela converge. □

Exemplo 42. *Retornemos à conhecida série harmônica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{n}$. *Assim,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1.$$

Exemplo 43. *Analisemos a série*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

cuja soma parcial de ordem n *satisfaz*

$$\begin{aligned}
&1 + \tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p} + \cdots + \tfrac{1}{n^p}\\
&\quad \leq 1 + \tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p} + \cdots + \tfrac{1}{n^p} + \tfrac{1}{(n+1)^p} + \cdots + \tfrac{1}{(2^n-1)^p}\\
&\quad = 1 + \left(\tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{3^p}\right) + \left(\tfrac{1}{4^p} + \tfrac{1}{5^p} + \tfrac{1}{6^p} + \tfrac{1}{7^p}\right) + \left(\tfrac{1}{8^p} + \cdots + \tfrac{1}{15^p}\right) + \cdots\\
&\quad + \left(\tfrac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \tfrac{1}{(2^n-1)^p}\right)\\
&\quad \leq 1 + \left(\tfrac{1}{2^p} + \tfrac{1}{2^p}\right) + \left(\tfrac{1}{2^{2p}} + \tfrac{1}{2^{2p}} + \tfrac{1}{2^{2p}} + \tfrac{1}{2^{2p}}\right) + \left(\tfrac{1}{2^{3p}} + \cdots + \tfrac{1}{2^{3p}}\right) + \cdots\\
&\quad + \left(\tfrac{1}{2^{(n-1)p}} + \cdots + \tfrac{1}{2^{(n-1)p}}\right)\\
&\quad = 1 + \tfrac{2}{2^p} + \tfrac{2^2}{2^{2p}} + \tfrac{2^3}{2^{3p}} + \cdots + \tfrac{2^{n-1}}{2^{(n-1)p}}\\
&\quad = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{p-1} + \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{p-1}\right]^2 + \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{p-1}\right]^3 + \cdots + \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{p-1}\right]^{n-1}
\end{aligned}$$

$= \frac{1-(\frac{1}{2})^{(p-1)n}}{1-(\frac{1}{2})^{p-1}}$

$\leq \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{p-1}}$

ou seja, a sequência das somas parciais é crescente e limitada superiormente, se $p > 1$, o que nos leva a concluir que a sequência é convergente. Então a série

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

é convergente caso $p > 1$. O seu termo geral $a_n = \frac{1}{n^p}$ satisfaz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to 1.$$

Dos dois últimos exemplos concluímos que quando $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ o teste da razão é inconcludente, ou seja, a série pode convergir ou divergir.

Observação 8. *Deve-se observar que o teste da razão se aplica mesmo no caso em que os termos da série não são sempre positivos. Com efeito, consideremos a série $\sum a_n$ e suponhamos*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to r < 1.$$

Usando o teste da razão para a série de termos positivos $\sum |a_n|$ tem-se que esta última converge, ou seja, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, e então ela será convergente.

No caso em que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to r > 1,$$

pode-se provar, como feito no teste da razão, que $|a_n| \to +\infty$. Isso mostra que o termo geral da série $\sum a_n$ não tende a zero e assim ela é divergente.

3 Teste da Raiz ou de Cauchy

A seguir, demonstraremos um teorema que tem como corolário um resultado conhecido como teste da raiz ou teste de Cauchy, que é mais um critério para se estabelecer a convergência de certas séries.

Teorema 23. *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a raiz quadrada $\sqrt[n]{a_n}$. Então*

(i) se todas as raízes $\sqrt[n]{a_n}$ são menores do que ou iguais a um número $r < 1$, então a série converge;

(ii) se todas as raízes $\sqrt[n]{a_n}$ *são maiores do que ou iguais a 1, então a série diverge.*

Demonstração. (i) Suponhamos que $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$. Daí,

$$0 < a_n < r^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como a série geométrica $\sum r^n$ converge, usando o teste da comparação, concluímos que $\sum a_n$ converge, o que conclui a demonstração de (i).

(ii) No caso em que $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ temos $a_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí o termo geral da série não converge para zero. Consequentemente, a série $\sum a_n$ diverge. □

Tal como observamos para o teorema 22, notamos que as condições sobre as raízes acima podem ser enfraquecidas de modo que é suficiente que elas se verifiquem a partir de um certo $n \in \mathbb{N}$.

Corolário 7. (Teste da Raiz ou de Cauchy) *Seja* $\sum a_n$ *uma série de termos positivos tal que a sequência* $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ *converge para um certo limite* r*. Então*

(i) se $r < 1$*, a série converge;*

(ii) se $r > 1$*, a série diverge;*

(iii) se $r = 1$*, nada se pode afirmar sobre a convergência ou divergência da série.*

Demonstração. (i) Suponhamos que a sequência $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ convirja para um certo $0 \leq r < 1$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sqrt[n]{a_n} - r| < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0$$

e assim

$$\sqrt[n]{a_n} < r + \varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $r + \varepsilon < 1$ tem-se

$$a_n < (r + \varepsilon)^n \text{ se } n \geq n_0.$$

A convergência da série segue-se do teorema 23.

(ii) Suponhamos $r > 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sqrt[n]{a_n} - r| < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

Portanto,

$$r - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \text{ se } n \geq n_0.$$

Como ε é arbitrário e $r > 1$, podemos escolher ε de tal modo que $r - \varepsilon > 1$ e assim

$$1 < r - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \text{ se } n \geq n_0.$$

Logo $1 < a_n$, para todo $n > n_0$. Consequentemente, (a_n) não converge para zero, donde se conclui que a série é divergente.

(iii) Se $\lim \sqrt[n]{a_n} \to 1$ o teste não é conclusivo. Basta considerar as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^p}$, com $p > 1$. Deixemos os detalhes por conta do(a) leitor(a). □

Observação 9. *Deve-se observar que o teste da raiz se aplica mesmo no caso em que os termos da série não são sempre positivos. Com efeito, consideremos a série* $\sum a_n$ *e suponhamos*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to r < 1.$$

Usando o teste da raiz para a série de termos positivos, obtém-se a convergência de $\sum |a_n|$, *ou seja, a série* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente, e então ela será convergente.*

No caso em que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to r > 1.$$

pode-se provar, como feito no teste da razão, que $|a_n| \to +\infty$ *e daí série* $\sum a_n$ *é divergente.*

4 Teste da Condensação

O *Teste da Condensação* é expresso no seguinte teorema:

Teorema 24. (Teste da Condensação) *Seja* (a_n) *uma sequência de números reais não-negativos tais que* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então a série*

$$(s_1) \qquad \sum a_n$$

converge se, e somente se,

$$(s_2) \qquad \sum 2^j a_{2^j}$$

convergir.

Demonstração. Suponhamos que a série (s_1) convirja. Observemos que

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots$$

pode ser reescrita na forma

$$a_2 + a_4 + a_4 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + \cdots$$

e é majorada por

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \cdots$$

que, por hipótese, é convergente. Portanto, $\sum 2^j a_{2^j}$ converge.

Reciprocamente, suponhamos que a série (s_2) convirja. Ela pode ser escrita como

$$a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + \cdots$$

a qual é majorada por $\sum a_n$. Portanto, a série (s_1) converge Isso conclui a demonstração do teorema. □

Exemplo 44. Uma aplicação desse resultado é a análise da convergência de

$$\sum \frac{1}{n^p},$$

onde $p > 1$. Aplicando o teorema precedente a essa série, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^j \frac{1}{(2^j)^p} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^j$$

a qual é uma série geométrica cuja razão é $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$. Então $\sum \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$.

5 Teste da Integral Imprópria

A seguir, estabeleceremos um critério de convergência baseado no conceito de integral imprópria. Muito embora não tenhamos estudado a Integral de Riemann, o(a) leitor(a) deve relembrar suas propriedades aprendidas no curso de Cálculo.

Teorema 25. *Se f for for uma função positiva definida no intervalo $0 \leq x < \infty$ e decrescente com $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, então a série*

$$\sum f(n)$$

converge se, e somente se, a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

converge.

Demonstração. Façamos

$$a_n = f(n)$$

e

$$b_n = \int_n^{n+1} f(x)dx.$$

Como f é decrescente

$$f(n+1) = f(n+1)[(n+1)-n] = \int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n),$$

ou seja,

$$a_{n+1} \leq b_n \leq a_n.$$

Pelo teste da comparação, $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge. Mas $\sum b_n$ converge exatamente quando a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)dx$ convergir. $\square$

Corolário 8. *As séries* $\sum \frac{1}{n^p}$ *e* $\sum \frac{1}{n(\lg n)^p}$ *convergem quando* $p > 1$ *e diverge quando* $p \leq 1$.

A demonstração desse corolário será deixada como exercício.

6 Exercícios Resolvidos

1. Consideremos as sequências (a_n) e (b_n) satisfazendo $a_n, b_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que o limite $\lim \frac{a_n}{b_n}$ exista e seja igual a r.

   (a) Se $r \neq 0$ então $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum b_n$ for convergente.

   (b) Se $r = 0$ e se $\sum b_n$ for convergente então $\sum a_n$ é convergente.

   Solução. (a) Consideremos $r > 0$. Desde que $\lim \frac{a_n}{b_n} = r$, dado $\varepsilon > 0$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

   $$\left| \frac{a_n}{b_n} - r \right| < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0,$$

   de onde obtém-se

   $$r - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < r + \varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

   Como ε é arbitrário, podemos tomá-lo igual a $\varepsilon = \frac{r}{2}$, de modo que

   $$\frac{r}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3r}{2} \text{ se } n \geq n_0.$$

   Da desigualdade $\frac{a_n}{b_n} < \frac{3r}{2}$ se $n \geq n_0$ obtemos $a_n < \frac{3r}{2} b_n$, se $n \geq n_{n_0}$ e a convergência de $\sum b_n$ implica na convergência de $\sum a_n$.

De $\frac{r}{2} < \frac{a_n}{bn}$ para $n \geq n_{n_0}$ obtemos $\frac{r}{2}b_n < a_n$ para $n \geq n_0$ e a convergência de $\sum a_n$ implica na convergência de $\sum b_n$, o que conclui a demonstração do item (a).

(b) Supondo $r = 0$, teremos

$$\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0$$

e a convergência de $\sum b_n$ implica na convergência de $\sum a_n$.

Observe que se tomarmos $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ teremos

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0,$$

ou seja, a convergência de $\sum \frac{1}{n^2}$ não implica na de $\sum \frac{1}{n}$. Observe, também, que quando $r = 0$ a divergência de $\sum a_n$ implica na divergência de $\sum b_n$.

2. Seja $a > 0$. Mostre que a série $\sum \frac{1}{1+a^n}$ é divergente se $0 < a \leq 1$ e convergente se $a > 1$.

   Solução. Se $0 < a < 1$ a sequência $\left(\frac{1}{1+a^n}\right)$ converge para 1 e para $\frac{1}{2}$ se $a = 1$, de modo que o termo geral da série $\sum \frac{1}{1+a^n}$ não converge para zero. Isso implica que tal série é divergente.

   Consideremos $a > 1$. Como

$$\frac{1}{1+a^n} < \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

   tem-se que a série $\sum \frac{1}{1+a^n}$ é majorada pela série geométrica $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$ cuja razão $\frac{1}{a}$ é menor do que 1, portanto convergente. Pelo teste da comparação conclui-se que $\sum \frac{1}{1+a^n}$ é convergente.

3. Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ convirja. Mostre que $\sum a_n^2$ converge.

   Solução. Como $\sum a_n$ converge, segue-se que $a_n \to 0$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n < 1$ se $n \geq n_0$, de modo que $0 \leq a_n^2 \leq a_n < 1$ se $n \geq n_0$. Usando o teste da comparação concluímos que $\sum a_n^2$ converge.

   Se retirarmos a hipótese $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a conclusão do exercício não é válida. Basta observar que a série

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots$$

   cujo termo geral é $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ é convergente, mas $\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

7 Exercícios Propostos

1. Investigue a convergência das séries:

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{3}{11} + \frac{4}{18} + \frac{5}{27} + \cdots$

   (b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{20} + \frac{3}{38} - \frac{4}{56} + \frac{5}{74} - \cdots$

   (c) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots$

2. Mostre que se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ converge então $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

3. Suponhamos que as séries de termos positivos $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam convergentes. Então $\sum a_n b_n$ converge.

4. (*Extensão do Teste da Comparação*) Suponhamos que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries de termos positivos. Mostre que

   (a) Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.

   (b) Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge.

5. Mostre que a série $\sum \cos n$ é divergente.

6. Mostre que a série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ é convergente.

7. Verifique se a série $\sum \frac{n^2+1}{n^2+n+1}$ é convergente.

8. (a) Use o Teste da Razão para provar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3 - n}$ converge enquanto que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ diverge.

   (b) Para que valores de a pode-se usar o Teste da Razão para concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ converge?

9. Estude a convergência e a convergência absoluta das séries

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3 + \sqrt{n}}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n^4 + 2}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{3^n + 7}$.

10. Se α e β são números positivos, então a série
$$\sum \frac{1}{(\alpha n+\beta)^p}$$
converge se $p>1$ e diverge se $p\leq 1$.

11. Estude a convergência da série
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$
Os teste da raiz e da razão são aplicáveis?

12. Use o teste da comparação para estudar a convergência ou divergência da série
$$\sum \frac{n\sqrt{n+1}}{n^2-3}.$$

13. Analise a convergência ou divergência da série
$$\sum \frac{1}{n^x}$$
com respeito aos diversos valores de x.

Capítulo 6

Limites de Funções

No Cálculo Diferencial e Integral é abordado, de modo intuitivo e informal, as noções de limites, continuidade, diferenciabilidade e integração de funções reais. Nosso objetivo, a partir deste capítulo, é o de colocar em bases firmes e rigorosas esses conceitos. Em particular, o presente capítulo será dedicado ao estudo dos limites.

1 Ponto de Acumulação de um Conjunto

Comecemos recordando uma definição já vista no capítulo 3.

Definição 34. *Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é dito um* ponto de acumulação *de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, o intervalo aberto $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ possui um ponto de A diferente de p.*

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado *conjunto derivado* de A e designado por A'.

Deve-se observar que um ponto de acumulação de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ não pertence, necessariamente, ao conjunto A. Isto ficará claro nos vários exemplos vistos a seguir.

Exemplo 45. *Todo conjunto que possua um ponto de acumulação é infinito. De fato, suponhamos que $p \in \mathbb{R}$ seja ponto de acumulação de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon_1 > 0$, da definição de ponto de acumulação, existe $a_1 \in A, a_1 \neq p$ tal que $|a_1 - p| < \varepsilon_1$. Tomemos $0 < \varepsilon_2 < |a_1 - p|$ e daí encontraremos $a_2 \in A, a_2 \neq p$ tal que $|a_2 - p| < \varepsilon_2$ e então teremos $a_1 \neq a_2$. Prosseguindo dessa maneira, encontramos uma sequência decrescente (ε_n) de números positivos e uma sequência (a_n) de pontos distintos de A tal que $a_n \neq p$. Segue-se que o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots\} \subset A$ é infinito. Decorre dessas observações que existe uma sequência em A, constituída de termos distintos, convergindo para p. Também conclui-se que se A for finito ele* *não terá pontos de acumulação. O seguinte resultado é demonstrado de maneira simples com o auxílio do que foi feito nesse exemplo.*

Teorema 26. *Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ se, e somente se, existir uma sequência (a_n) em A, $a_n \neq a_m$, para todo $m \neq n$, tal que $\lim a_n = p$.*

Use o que você aprendeu sobre sequências, combinado com o conceito de ponto de acumulação, para demonstrar esse teorema como exercício.

Exemplo 46. *O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é constituído por todos os números reais, isto é, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Isso é consequência de uma observação dada no capítulo 1 de que todo intervalo de $\mathbb{R}$ contém números racionais. Também, por uma razão semelhante, $(\mathbb{Q}^c)' = \mathbb{R}$.*

Exemplo 47. *O conjunto dos pontos de acumulação de cada um dos intervalos $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$ é $[a, b]$.*

2 Limites de Funções

A essência do conceito de limite de uma função é esse:

Se l for um número real, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = l$ significa que o valor de $f(x)$ pode ser colocado tão próximo de l sempre que x esteja próximo de p com $x \neq p$. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 35. *Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de A. Diz-se que $l \in \mathbb{R}$ é* limite *de f em p se, dado qualquer número positivo ε, existir um número positivo δ, que em geral depende de ε e p, tal que*

$$x \in A, \;\; 0 < |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Designa-se tal fato por

$$\lim_{x \to p} f(x) = l$$

ou

$$f(x) \to l \;\text{ quando }\; x \to p.$$

e também diz-se que f converge (ou tende) para l quando x converge (ou tende) para p.

Deve-se observar que o limite, quando existe, é único. O(A) leitor(a) está convidado(a) a mostrar isso como exercício.

Exemplo 48. *O limite da função constante $f(x) = k$ é a própria constante k. Mais precisamente, sejam $f : A \to \mathbb{R}$ uma dada função em que $A \subset \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Se $f(x) = k$ para todo $x \in A$ então*

$$\lim_{x \to p} f(x) = k.$$

Isso é fácil de ver pois, dado $\varepsilon > 0$, para qualquer $\delta > 0$ tem-se

$$x \in A, 0 < |x - p| < 0 \Rightarrow |f(x) - k| = |k - k| = 0$$

o que prova a afirmação. Aqui, o δ não depende de ε nem do ponto particular que estamos a considerar.

Exemplo 49. *Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \text{ para todo } x, y \in I,$$

em que M é uma constante positiva. Funções que satisfazem essa condição são chamadas funções de Lipschitz *ou* funções lipschitzianas *e M é a* constante de Lipschitz. *Nesse caso, tem-se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Para verificarmos o limite acima, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrário e consideremos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Assim, se $x \in I$ e $0 < |x - p| < \delta$ então

$$|f(x) - f(p)| \leq M|x - p| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

o que mostra o limite acima. Observemos que o δ deste exemplo depende de ε mas não depende do ponto $p \in I$.

Rudolf Otto Sigismund **Lipschitz** foi um matemático alemão nascido em Königsberg (hoje Kaliningrad, Rússia), a 14 de maio de 1832 e falecido a 7 de outubro de 1903 em Bonn, Alemanha. Lipschitz concluiu seu doutorado na Universidade de Königsberg, a 9 de agosto de 1853, e teve uma prolífica carreira de pesquisador, produzindo importantes trabalhos em Teoria dos Números, Funções de Bessel, Séries de Fourier, Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais e Teoria do Potencial.

Funções, tais como as lipschitzianas, que satisfazem

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

são ditas *funções contínuas* e seu estudo sistemático será feito nos capítulos 7 e 8.

Analisemos um exemplo mais trabalhoso.

Exemplo 50. *Consideremos a função $f(x) = x^2$, para $x \in \mathbb{R}$. Mostremos que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = p^2 = f(p).$$

Devemos fazer uma estimativa de

$$|f(x) - f(p)| = |x^2 - p^2|$$

de modo que ela se torne menor que um certo $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, sempre que x esteja próximo de p. Como o conceito de limite é local devemos ter a preocupação apenas com os valores de x que estejam próximos de p. Para iniciar, observemos que

$$|x^2 - p^2| = |(x+p)(x-p)| = |x+p||x-p| \tag{6.1}$$

de modo que suporemos x satisfazendo $|x - p| < 1$. Usando a segunda desigualdade triangular, obtém-se $|x| - |p| < 1$ e daí $|x| < |p| + 1$, donde

$$|x + p| \leq |x| + |p| \leq 2|p| + 1.$$

Em virtude da desigualdade (6.1), teremos

$$|x - p| < 1 \Rightarrow |x^2 - p^2| = |x + p||x - p| \leq (2|p| + 1)|x - p|.$$

Escolhamos

$$\delta = \delta(\varepsilon, p) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|p| + 1}\right\}$$

de modo que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim\limits_{x \to p} x^2 = p^2$. Novamente, conforme observado anteriormente, temos uma função contínua. Aqui, o valor de δ depende de ε e do ponto p.

Exemplo 51. *Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ com $x > 0$. Mostremos que se $p > 0$, então*

$$\lim_{x \to p} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Como nos casos anteriores, dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que $|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}| < \varepsilon$ sempre que x estiver próximo de p. Inicialmente, devemos ser cautelosos com os valores de x a fim de que ele não se torne muito próximo de zero. Isso ficará claro na desigualdade

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}\right| = \frac{|x^2 - p^2|}{x^2 p^2} \leq \frac{(x + p)|x - p|}{x^2 p^2}$$

de modo que devemos fazer uma estimativa cuidadosa no denominador do seu último termo. Para isso, façamos uma restrição inicial para x. Suponhamos que

$$\frac{p}{2} < x < \frac{3p}{2}$$

o que acarreta

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}\right| \leq 4\frac{(x + p)|x - p|}{p^4}.$$

Também,

$$|x + p| \leq |x| + |p| \leq \frac{3p}{2} + p = \frac{5p}{2}.$$

Consequentemente,

$$\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{p^2}\right| \leq \frac{10}{p^3}|x-p|.$$

Escolhamos

$$\delta = \delta(\varepsilon, p) = \min\left\{\frac{p}{2}, \frac{10\varepsilon}{p^3}\right\}.$$

Portanto,

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{p^2}\right| < \varepsilon$$

o que era exatamente aonde gostaríamos de chegar. Logo,

$$\lim_{x\to p}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Nesse exemplo o δ depende do ε e do ponto p.

Enfatizamos que a Definição 28 não envolve o valor $f(x_0)$ que, inclusive, pode não existir.

Exemplo 52. *Se*

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad se \;\; x \neq 0,$$

então

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

muito embora f não esteja definida em $p=0$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon$ e tomando $0 < |x-0| < \delta$, teremos

$$|f(x)-0| = |x\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x| < \epsilon,$$

observando que $|\sin t| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Estabeleceremos um resultado, algumas vezes usado como definição de limite, que relaciona o conceito de limite com o de sequência já previamente estudado.

Teorema 27. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de A. Então $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l$ existe se, e somente se, para toda sequência (x_n) em A, convergindo para p e tal que $x_n \neq p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tivermos que a sequência $(f(x_n))$ converge para l.*

Demonstração. Suponhamos que exista $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l$ e consideremos uma sequência (x_n) em A, convergindo para p com $x_n \neq p$ para todo

$n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que $(f(x_n))$ converge para l. Para isso tomemos $\varepsilon > 0$ e usando a definição de limite encontremos um $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ora, como $x_n \to p$, para o $\delta > 0$ encontrado acima, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < |x_n - p| < \delta \text{ se } n \geq n_0.$$

Destarte,

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon \text{ se } n \geq n_0,$$

donde resulta que $f(x_n) \to l$ e a primeira parte do teorema está demonstrada. Vejamos a recíproca, ou seja, se para toda sequência (x_n) em $A, x_n \neq p$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $x_n \to p$ implica $f(x_n) \to l$ então $\lim\limits_{x \to p} f(x) = l$. Suponhamos que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = l$ não se cumpra, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ exista $x_\delta \in A, x_\delta \neq p$ com $|x_\delta - p| < \delta$ mas $|f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon$. Para cada natural n, tomando $\delta = \dfrac{1}{n}$ encontraremos uma sequência (x_n) em $A, x_n \neq p$ de modo que $|x_n - p| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Concluímos, então, que existe uma sequência (x_n) no conjunto $A, x_n \neq p$ convergindo para p mas $(f(x_n))$ não converge para l, o que finaliza a demonstração. □

Exemplo 53. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0, \\ 2 & se \quad x = 0, \\ 1 & se \quad x > 0. \end{cases}$$

Tomemos uma sequência (x_n) constituída de termos positivos e convergindo para 0. Assim, $f(x_n) = 1 \to 1$. Por outro lado, se tomarmos uma sequência (y_n) constituída de termos negativos e convergindo para zero teremos $f(y_n) = 0 \to 0$. De acordo com o teorema 27 essa função não possui limite em 0, muito embora ela permaneça limitada em qualquer intervalo contendo 0.

Vejamos um exemplo em que a não-existência do limite ocorre porque a função "explode" para valores próximos do ponto no qual estamos tentando analisar a existência do limite.

A expressão informal "a função explode para valores próximos do ponto p" significa que a função assume valores excessivamente grandes para pontos em uma vizinhança de p.

Exemplo 54. *Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e analisemos o seu comportamento em torno de 0. Para isso, escolhamos uma sequência (x_n), constituída de termos positivos, tal que $x_n \to 0$. Neste caso, tem-se $f(x_n) \to +\infty$. se a sequência for constituída de termos negativos e tender a zero teremos $f(x_n) \to -\infty$. Portanto, a função deste exemplo não possui limite em 0.*

O próximo teorema nos diz que se $\lim_{x \to p} f(x)$ existir, então f será limitada em vizinhanças de p.

Teorema 28. *Se $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, é tal que $\lim_{x \to p} f(x)$ existe, em que p é ponto de acumulação de A, então a função f é limitada no conjunto $(p - \delta, p + \delta) - \{p\} \subset A$, para algum $\delta > 0$.*

Demonstração. Seja $l = \lim_{x \to p} f(x)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Como

$$|f(x)| - |l| \leq |f(x) - l|,$$

obtemos

$$x \in A,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < l + \varepsilon$$

o que mostra ser f limitada no conjunto $(p - \delta, p + \delta) - \{p\} \subset A$. □

O resultado a seguir nos diz que se o limite de uma função em p é não-nulo então, nas proximidades de p, os valores da função preservam o sinal do limite.

Teorema 29. *Sejam $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de A. Se $\lim_{x \to p} f(x) = l$ existir e for não-nulo então existe $\delta > 0$ tal que para $x \in (p - \delta, p + \delta), x \neq p$ tem-se $|f(x)| > \dfrac{|l|}{2}$. Em particular, se $l > 0$ $(l < 0)$ então $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ em $x \in (p - \delta, p + \delta), x \neq p$.*

Demonstração. Desde que $l \neq 0$ consideraremos $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$ de modo que existe $\delta > 0$ com

$$x \in A, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$$

e usando-se $|l| - |f(x)| \leq |f(x) - l|$, obtém-se

$$x \in A, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \frac{|l|}{2} < |f(x)|.$$

Isso conclui a demonstração do teorema. □

Vejamos algumas operações com limites.

Teorema 30. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x \to p} g(x) = m$$

existem então

(a) $\lim_{x\to p}(f(x) \pm g(x))$ *existe e* $\lim_{x\to p}(f(x) \pm g(x)) = l \pm m$. *Esta propriedade é válida para adições com um número finito qualquer de funções.*

(b) $\lim_{x\to p}(f(x) \cdot g(x))$ *existe e* $\lim_{x\to p}(f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$. *Em particular, se* k *for uma constante então* $\lim_{x\to p}(kf(x))$ *existe e* $\lim_{x\to p}(kf(x)) = k \cdot l$.

Esta propriedade é válida para produtos com um número finito qualquer de funções.

(c) Se $m \neq 0$ *então* $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe e* $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$. *Em particular, se a função* f *for constante e igual a 1 então* $\lim_{x\to p} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{m}$

Demonstração. A demonstração deste teorema é imediata a partir da caracterização do limite de funções estabelecida no teorema 27. Faremos a demonstração apenas do item c. Seja (x_n) uma sequência em A de modo que $x_n \neq p$ e $x_n \to p$. Suponhamos que $m > 0$. Neste caso, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > \frac{m}{2}$ para $x \in (p - \delta, p + \delta), x \neq p$. Como $f(x_n) \to l$ e $g(x_n) \to m$, teremos

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{l}{m}$$

o que conclui a demonstração do ítem (c). □

Outro resultado que segue imediatamente da teoria das sequências é o próximo teorema, que tem como consequência a versão da regra do sanduíche para limites de funções.

Teorema 31. *Sejam* $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $p \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A. *Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in A, x \neq p$ *e* f *e* g *possuirem limites em* p *então*

$$\lim_{x\to p} f(x) \leq \lim_{x\to p} g(x).$$

Demonstração. Basta observar a seguinte propriedade de sequências: se (x_n) e (y_n) forem sequências convergentes e se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim x_n \leq \lim y_n$. □

Corolário 9. (A Regra do Sanduíche) *Sejam* $A \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *e* $p \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* A. *Se* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, *para todo* $x \in A, x \neq p$ *e* f *e* h *possuem limites em* p *com* $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = l$ *então* g *possui limite em* p *e* $\lim_{x\to p} g(x) = l$.

O próximo teorema é o análogo para funções da propriedade 10 demonstrada para sequências.

Teorema 32. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A. Se $\lim_{x\to p} f(x)$ existir e for igual a zero e g for limitada em $A \cap (p-r, p+r)$, para alguma $r > 0$ então $\lim_{x\to p} f(x)g(x)$ existirá e será nulo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em A com $x_n \neq p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (p-r, p+r)$ para todo $n \geq n_0$. Deste modo $|g(x_n)| \leq K$ para todo $n \geq n_0$. Como $f(x_n) \to 0$ então $f(x_n)g(x_n) \to 0$. Logo $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$. $\square$

Limites Laterais

Muitas vezes, estudamos o limite de uma função f quando x tende para p, considerando x apenas à direita de p ou apenas à esquerda de p. Quando isso acontece, estamos considerando os limites laterais de f em p que serão tratados nesta seção.

Definição 36. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto $A \cap (p, p+r)$, para algum $r > 0$. O número real l^+ é* limite lateral à direita *de f em p se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que*

$$x \in A, 0 < x - p < \delta \Rightarrow |f(x) - l^+| < \varepsilon.$$

Designa-se isso por

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = l^+.$$

Um ponto $p \in \mathbb{R}$ que seja ponto de acumulação de $A \cap (p, p+r)$, para algum $r > 0$, é chamado *ponto de acumulação à direita* de A.

Definição 37. Seja $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto $A \cap (p-r, p)$ para algum $r > 0$. O número real l^- é *limite lateral à esquerda* de f em p se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que

$$x \in A, 0 < p - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l^-| < \varepsilon.$$

Designa-se isso por

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = l^-.$$

Um ponto $p \in \mathbb{R}$ que seja ponto de acumulação de $A \cap (p-r, p)$, para algum $r > 0$, é chamado *ponto de acumulação à esquerda* de A.

Podemos exprimir esses fatos em termos de sequências como no teorema 27 deste capítulo.

Teorema 33. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, e p um ponto de acumulação de $A \cap (p, p+r)$, para algum $r > 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = l^+$.

(b) Para toda sequência (x_n) tal que $x_n \in A$, $x_n > p$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to p$, tem-se $f(x_n) \to l^+$.

Temos o análogo desse teorema para o limite lateral à esquerda.

Teorema 34. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, e p um ponto de acumulação de $A \cap (p-r, p)$ para algum $r > 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = l^-$

(b) Para toda sequência (x_n) tal que $x_n \in A$, $x_n < p$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to p$, tem-se $f(x_n) \to l^-$.

As demonstrações desses dois teoremas são inteiramente análogas a do teorema 2 e em virtude disso serão omitidas e deixadas como exercício para o(a) leitor(a). Outro teorema cuja demonstração será deixada como exercício é o seguinte.

Teorema 35. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação dos conjuntos $A \cap (p, p+r)$ e $A \cap (p-r, p)$ para alguma $r > 0$. Então $\lim\limits_{x \to p} f(x) = l$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \lim\limits_{x \to p^-} f(x) = l$.*

Limites Infinitos e Limites no Infinito

Consideraremos nesta seção o caso no qual a função toma valores muito grandes quando x tende para p e também o caso em que x assume valores grandes.

Definição 38. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A.*

(a) Diz-se que f tende para $+\infty$ quando $x \to p$, e escreve-se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = +\infty$, se, para todo $M \in \mathbb{R}$, existir $\delta = \delta(p, M) > 0$ tal que para todo $x \in A$ com $0 < |x-p| < \delta$, tivermos $f(x) > M$.

(b) Diz-se que f tende para $-\infty$ quando $x \to p$, e escreve-se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = -\infty$, se, para todo $M \in \mathbb{R}$, existir $\delta = \delta(p, M) > 0$ tal que para todo $x \in A$ com $0 < |x-p| < \delta$, tivermos $f(x) < M$.

Definição 39. *Seja $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, tal que $(a, +\infty) \subset A$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que $l \in \mathbb{R}$ é limite de f quando $x \to +\infty$, e escreve-se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, se, dado $\varepsilon > 0$ existir $K = K(\varepsilon, p) > a$ tal que $x > K$ implicar que $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

A demonstração do próximo teorema é deixada como exercício para o leitor.

Teorema 36. *Seja $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, tal que $(a, +\infty) \subset A$, para algum $a \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

(b) Para toda sequência (x_n) em $A \cap (a, +\infty)$ tal que $\lim x_n = +\infty$, a seqüência $(f(x_n))$ converge para l.

Definição 40. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, e suponhamos que $(a, +\infty) \subset A$ para algum $a \in A$. Diz-se que f tende para $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$), e escreve-se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ (\textit{respectivamente}, \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty)$$

se dado qualquer $M \in \mathbb{R}$ existir $K = K(p, M) > a$ tal que para qualquer $x > K$, tivermos $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < M$).

Temos a seguinte caracterização para esse conceito.

Teorema 37. *Seja $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ e suponhamos que $(a, +\infty) \subset A$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *(respectivamente,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*).*

(b) Para toda sequência (x_n) em $(a, +\infty)$ tal que $\lim x_n = +\infty$ então $\lim f(x_n) = +\infty$ (respectivamente, $\lim f(x_n) = +\infty$).

De maneira análoga definem-se os seguintes limites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= l \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty
\end{aligned}$$

3 Exercícios Propostos

1. Determine condições sobre $|x-1|$ a fim de que $|x^2-1| < \frac{1}{2}$.

2. Determine condições sobre $|x-1|$ a fim de que $|x^2-1| < \frac{1}{3}$. Considere, também, o caso $|x^2-1| < \frac{1}{4}$. Considere a situação em $|x^2-1| < \frac{1}{n}$.

3. Determine condições sobre $|x-2|$ a fim de que $|x^2-4| < \frac{1}{10}$.

4. Use a definição de limite para mostrar que $\lim\limits_{x\to p} x^3 = p^3$.

5. Determine $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ justificando sua resposta com argumentos $\epsilon - \delta$:

   (a) $f(x) = 2x^2 + x + 1, \ p = 1;$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}, \ p = 0;$

   (c) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}, \ p = 1;$

   (d) $f(x) = \sqrt[x]{}, p = 16;$

6. Mostre que a definição de limite é equivalente a: Diz-se que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-p| < \delta$ implica $|f(x) - l| < C\epsilon$, qualquer que seja a constante positica C.

7. Encontre, quando possível, $\lim\limits_{x\to p^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to p^-} f(x)$. Justifique suas respostas:

   (a) $f(x) = \frac{x}{x+|x|}, \ p = 0;$

   (b) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}, \ p = 1;$

   (c) $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2-6x+8}, \ p = 2;$

   (d) $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{|x|}\right), \ p = 0.$

8. Encontre, quando possível, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$ nos casos a seguir e justifique suas respostas.

   (a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1};$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^4+1};$

   (c) $f(x) = \frac{\cos x}{|x|^2};$

   (d) $f(x) = \frac{\cos x}{|x|^{-2}};$

Capítulo 7

Funções Contínuas

Dedicaremos este capítulo ao estudo das funções contínuas. Comecemos com dois exemplos.

1 Exemplos e Definição

Exemplo 55. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & se \ \ x \neq 1 \\ 0 & se \ \ x = 1 \end{cases}$$

e calculemos

$$\lim_{x \to 1} f(x),$$

caso ele exista.

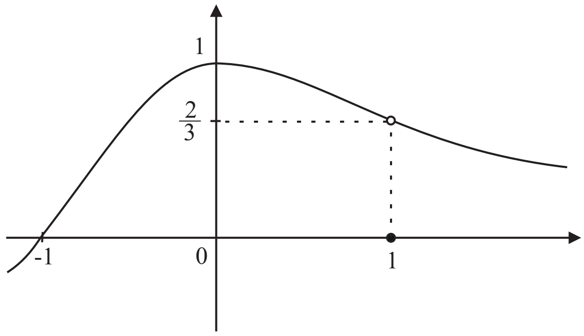
Inicialmente, observemos que para $x \neq 1$ temos

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Seja (x_n) uma sequência com $x_n \to 1$. Usando o fato de que o limite do quociente é o quociente dos limites, obtemos

$$f(x_n) = \frac{x_n^2-1}{x_n^3-1} = \frac{x_n+1}{x_n^2+x_n+1} \to \frac{2}{3} \neq f(0).$$

Na figura a seguir encontra-se esboçado o gráfico da função estudada.



Gravemos este resultado em nossa memória e consideremos um outro exemplo.

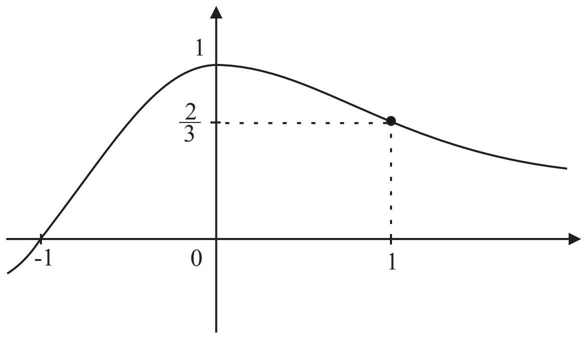
Exemplo 56. *Seja*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & se \;\; x \neq 1 \\ \frac{2}{3} & se \;\; x = 1 \end{cases}$$

e estudemos a questão de existência de

$$\lim_{x \to 1} f(x).$$

Nesse caso, e usando argumentos análogos aos do exemplo anterior, verifica-se que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \dfrac{2}{3} = g(1)$. *O gráfico dessa função é mostrado na figura a seguir.*



Observa-se no exemplo 55 que quando traçamos o gráfico da função f, ao chegarmos ao ponto $x = 1$, a função dá um salto. Desse modo, ao traçarmos seu gráfico teremos que, momentaneamente, retirar o lápis do papel sobre o qual o estamos desenhando. Já no exemplo 56, o gráfico pode ser efetuado sem quebras ou saltos, ou seja, ele é feito de modo contínuo. Isto motiva a definição de *função contínua* que será estudada neste capítulo e subsequentes.

Definição 41. *Diz-se que a função* $f : A \to \mathbb{R}$ *é* contínua *no ponto* $x_0 \in A$ *se, para qualquer sequência* (x_n) *em* A*, com* $x_n \to x_0$*, tivermos* $f(x_n) \to f(x_0)$*. Caso contrário, diz-se que* f *é* descontínua *em* x_0 *ou que* x_0 *é uma descontinuidade de* f*. Se* f *for contínua em todos os pontos de seu domínio* A *diz-se que* f *é* contínua.

Segue-se que a função $f : A \to \mathbb{R}$ é descontínua em $x_0 \in A$ se, e somente se, existir uma sequência (x_n) em A tal que $x_n \to x_0$ mas $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$.

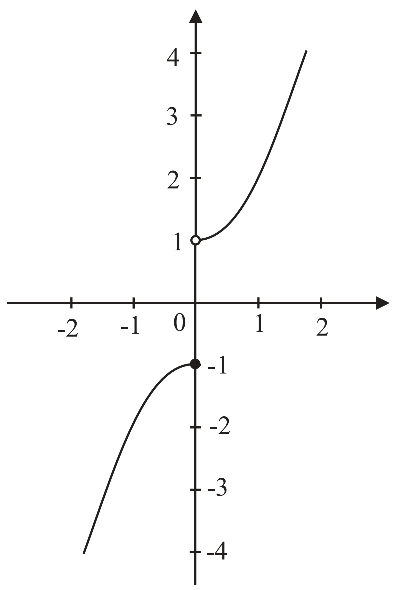
Decorre da definição 41 que se $x_0 \in A$ for um ponto de acumulação de A então $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0 se, e somente se, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existir e for igual a $f(x_0)$.

Vejamos outros exemplos.

Exemplo 57. *Mostremos que a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se \quad x > 0, \\ -x^2 - 1 & se \quad x \leq 0 \end{cases}$$

é descontínua em $x = 0$ *e contínua em todos os outros pontos de* $\mathbb{R}$. *Se o(a) leitor(a) analisar o gráfico, mostrado na figura a seguir, verificará que a função possui uma descontinuidade em* $x = 0$. *No entanto, isso deve ser demonstrado formalmente usando a definição 41.*



Comecemos considerando o ponto $x_0 > 0$. *Seja* (x_n) *uma sequência real convergindo para tal* x_0. *Como* $x_0 > 0$ *e* $x_n \to x_0$, *existe um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > 0$, *para todo* $n > n_0$, *e assim*

$$f(x_n) = x_n^2 + 1 \to x_0^2 + 1 = f(x_0)$$

o que mostra ser f *contínua em* $x_0 > 0$. *Um argumento semelhante pode ser usado no caso em que* $x_0 < 0$. *Analisemos o comportamento da função em 0. Para isso, consideremos a sequência* (x_n) *dada por* $x_n = \frac{1}{n}$. *Verifica-se que* $0 < x_n = \frac{1}{n} \to 0$. *Assim,*

$$f(x_n) = \frac{1}{n^2} + 1 \to 1.$$

Por outro lado, considerando a sequência (x_n), $x_n = -\frac{1}{n}$, *verifica-se que* $x_n = -\frac{1}{n} \to 0$. *Assim,*

$$f(x_n) = -\frac{1}{n^2} - 1 \to -1,$$

ou seja,

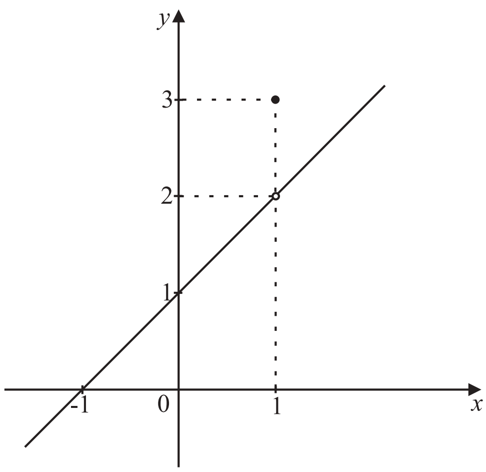
$$-1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Consequentemente, f *não é contínua em* 0.

Exemplo 58. *Consideremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se \quad x \neq 1 \\ 3 & se \quad x = 1 \end{cases}$$

cujo gráfico está esboçado a seguir.



Para $x \neq 1$ *a função* f *é escrita como*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \to 2$$

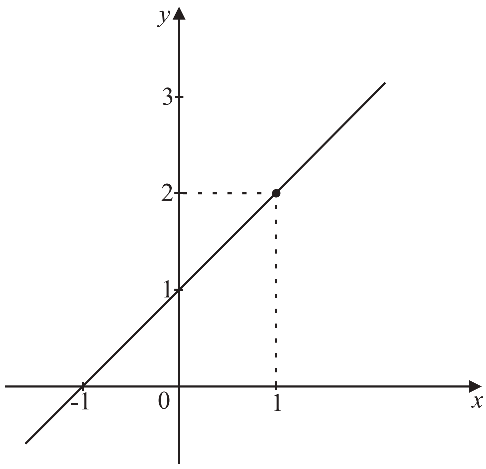
se $x \to 1$, *ou seja,* $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 3$. *Donde se conclui que* f *não é contínua em 1. No entanto, podemos redefinir* f *em 1 de modo que a função resultante seja contínua. Mais precisamente, se definirmos uma nova função* $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & se \quad x \neq 1 \\ 2 & se \quad x = 1 \end{cases}$$

resultará que

$$\lim_{x \to 1} \tilde{f}(x) = 2 = \tilde{f}(1).$$

Então $\tilde{f}$ *é contínua em 1, assim como nos demais pontos de* $\mathbb{R}$. *Verificamos facilmente isso observando o gráfico de* $\tilde{f}$ *representado na figura a seguir.*



Esse tipo de descontinuidade de f é chamado descontinuidade removível, pois podemos redefinir f nesse ponto de descontinuidade de modo que a função resultante seja contínua. Observemos que isso é possível porque o limite no ponto de descontinuidade existe.

Mais precisamente, dadas uma função $f : I \to \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação c de $I, c \notin I$, se a função f possuir limite l no ponto c e se definirmos $\tilde{f} : I \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ por

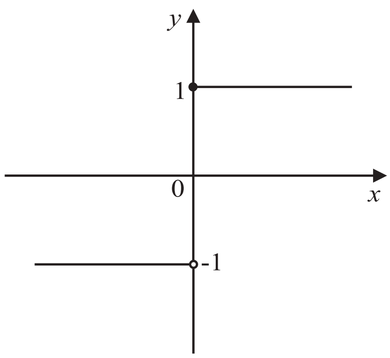
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} l & \text{se} \quad x = c \\ f(x) & \text{se} \quad x \in I \end{cases}$$

então $\tilde{f}$, chamada uma extensão de f, é contínua em c. Deixamos a verificação desse fato a cargo do(a) leitor(a).

Exemplo 59. *Consideremos a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \geq 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

e seu gráfico.



Nesse caso, é fácil ver que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

Portanto, f é descontínua em 0 *e, além disso, os limites laterais nesse ponto são distintos. Então 0 não é uma descontinuidade removível e, consequentemente, não podemos redefinir a função f em 0 de modo que a função resultante seja contínua.*

Observação 10. *Se uma função $g : I \to \mathbb{R}$ não possuir limite em um ponto de acumulação c de I, não poderemos construir uma extensão contínua $\tilde{g} : I \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ de g pois, para isso, o $\lim_{x\to c} \tilde{g}(x) = \lim_{x\to c} g(x)$ deveria existir.*

Exemplo 60. *Consideremos a* função de Dirichlet*, introduzida por Johan Peter Gustav Lejeune Dirichlet em 1829,*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

a qual se presta como exemplo (ou contra-exemplo) ilustrativo de várias aplicações. Essa função é descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Provemos tal afirmação. Inicialmente seja x_0 um número racional. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existe uma sequência (x_n) de números racionais tal que $x_n \to x_0$ e $f(x_n) = 1 \to 1$. Pelo mesmo motivo, existe uma sequência de números irracionais (y_n) que converge para x_0, mas $f(y_n) = 0 \not\to 1 = f(x_0)$. Portanto, f é descontínua em todos os racionais. De maneira análoga, prova-se que ela é descontínua em todos os irracionais. Assim, f é descontínua em todos os números reais.

Johann Peter Gustav Lejeune **Dirichlet**, nasceu a 13 de fevereiro de 1805 em Düren, Alemanha e faleceu a 5 de maio de 1859 em Göttingen, Alemanha. Sua família era de origem belga. Estudou em um colégio jesuíta e depois no Colege de France. Teve contato com importantes matemáticos de sua época e muito contribuiu no estudo do cálculo, das equações diferenciais e das séries. Foi o sucessor de Gauss, em 1995, como professor de Matemática em Göttingen.

Exemplo 61. *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(x) \geq 0$ então a função $\sqrt{f} : I \to \mathbb{R}$, definida por $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$, é contínua. Com efeito, basta usar a propriedade de sequência dada no capítulo 2 que nos diz que se uma sequência convergente (z_n) for tal que $z_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim \sqrt{z_n} = \sqrt{\lim z_n}$. Tomemos $x \in I$ e uma sequência (x_n) em I convergindo para x. Como f é contínua $f(x_n) \to f(x)$ e, pela propriedade de sequência supracitada teremos $\sqrt{f(x_n)} \to \sqrt{f(x)}$, o que mostra ser $\sqrt{f}$ contínua em I. Devemos observar que, supondo f contínua apenas em $x \in I$, provaríamos ser $\sqrt{f}$ contínua em x.*

2 Condição Necessária e Suficiente para a Continuidade

A noção de continuidade pode ser formulada via ε e δ por intermédio do teorema a seguir.

Teorema 38. *Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $x_0 \in A$ se, e somente, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$, que pode depender de ε e de x_0, tal que*

$$x \in A \;\; e \;\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Isso equivale a dizer que, dado qualquer intervalo da forma $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, existirá um intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ implica $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Demonstração. Suponhamos que a condição acima seja satisfeita. Desejamos mostrar que f é contínua em $x_0 \in A$. Para isso, seja (x_n) uma sequência em A convergindo para x_0. Mostremos que $f(x_n) \to f(x_0)$. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ um número dado. Em virtude da condição (7.1), existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ora, como $x_n \to x_0$, para o δ acima, encontramos n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $|x_n - x_0| < \delta$ e assim, segue da condição (7.1) que $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, se $n \geq n_0$, ou seja, $f(x_n) \to f(x_0)$ e daí f é contínua em x_0.

Reciprocamente, suponhamos que f seja contínua em $x_0 \in A$. Se a condição (7.1) não for satisfeita, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in A, |x_\delta - x_0| < \delta$, com $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \frac{1}{n}$, encontramos $x_n \in A$, $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ de modo que $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Portanto, encontramos uma sequência (x_n) em A, convergindo para x_0, mas $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, o que contradiz a hipótese de continuidade de f em x_0. $\square$

Observação 11. *Decorre do teorema 38 que f é contínua em x_0 se, e somente se,*

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0),$$

sempre que for possível calcular esses limites laterais.

Exemplo 62. *Consideremos a função $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x < \infty$. Observemos que em 0 pode-se falar, apenas, em limite lateral à direita. Assim, dado $\epsilon > 0$,*

$$|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \epsilon \;\; se \;\; 0 \leq x < \epsilon^2$$

e tomando $\delta = \epsilon^2$ concluímos que $f(0^+) = f(0)$. Se $x_0 > 0$ e $x \geq 0$, então

$$|f(x) - f(x_0| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Daí, dado $\epsilon > 0$, escolhamos $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon > 0$ de modo que

$$|f(x) - f(x_0| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon \ \ se \ \ |x - x_0| < \sqrt{x_0}\epsilon > 0.$$

Isso mostra a continuidade de f em $[0, +\infty)$.

A seguir, estabeleceremos um lema que será usado na demonstração do teorema 39.

Lema 1. *Se $g : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $a \in A$ e se $g(a) > 0$ (respectivamente $g(a) < 0$), então existem $\delta > 0$ e uma constante $K > 0$ tal que $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta)$ implica $g(x) \geq K$ (respectivamente $g(a) \leq -K$).*

Demonstração. Consideremos o caso em que $g(a) > 0$. Quando $g(a) < 0$ a demonstração seguir-se-á de maneira análoga e, em virtude disso, será omitida. Utilizemos a condição (7.1) usada no teorema 38. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de modo que $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta)$ implica que $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$. Essa última desigualdade implica, em particular, que $g(a) - |g(x)| < \varepsilon$ se $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta)$, o que é equivalente a

$$g(a) - \varepsilon < |g(x)|,$$

para todo $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta)$. Tomemos $\varepsilon = \frac{g(a)}{2} > 0$, de modo que existe $\delta > 0$ satisfazendo

$$\frac{g(a)}{2} < |g(x)|,$$

para todo $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta)$. Portanto, no caso $g(a) > 0$, basta tomarmos $K = \frac{g(a)}{2}$. $\square$

Da mesma maneira que fizemos para o caso em que tratamos de limites, estabeleceremos resultados sobre a continuidade de somas, produtos etc. de funções contínuas. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 39. *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ são contínuas em um ponto $a \in A$, então as funções*

$$f + g, \ \ f - g, \ \ f \cdot g, \ \ cf$$

também são contínuas em $a \in A$. Se $g(a) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é contínua em $a \in A$.

Demonstração. Os casos $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e cf são simples e suas demonstrações são semelhantes àquelas feitas para as propriedades correspondentes de limites. Demonstremos a que trata do quociente, pois essa possui a novidade do uso do lema 1. Suponhamos $g(a) > 0$. Pelo lema anterior existem $r > 0$ e $K > 0$ tais que $g(x) \geq K$ para todo $x \in A \cap (x - r, x + r)$. Tomemos um $\varepsilon > 0$ e façamos a estimativa

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| &= \left|\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right| \\
&= \frac{|f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)|}{|g(x)||g(a)|} \\
&\leq \frac{|f(x)g(a) - f(a)g(a)| + |f(a)g(a) - f(a)g(x)|}{Kg(a)} \\
&= \frac{|f(x)g(a) - f(a)g(a)|}{Kg(a)} + \frac{|f(a)g(a) - f(a)g(x)|}{Kg(a)} \\
&= \frac{1}{K}|f(x) - f(a)| + \frac{|f(a)|}{Kg(a)}|g(x) - g(a)|.
\end{aligned}$$

Suponhamos que $f(a) = 0$. Nesse caso,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| \leq \frac{1}{K}|f(x) - f(a)|.$$

e, como f é contínua em a, para $K\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $x \in A \cap (a - \delta_1, a + \delta_1)$ tem-se

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| \leq \frac{1}{K}|f(x) - f(a)| < \frac{1}{K}K\varepsilon = \varepsilon,$$

para todo $x \in A \cap (a - \delta, a + \delta)$ com $\delta = \min\{r, \delta_1\}$. O que mostra ser $\frac{f}{g}$ contínua em a.

Suponhamos que $f(a) \neq 0$. Usando o número $\frac{Kg(a)\varepsilon}{2|f(a)|}$ e considerando o fato de que g é contínua em a, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in A \cap (a - \delta_2, a + \delta_2) \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{Kg(a)\varepsilon}{2|f(a)|}.$$

Também existe $\delta_3 > 0$ tal que se $x \in A \cap (x - \delta_3, x + \delta_3)$ então $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Assim, tomando $\delta = \min\{r, \delta_2, \delta_3\}$, teremos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| &\leq K|f(x) - f(a)| + \frac{|f(a)|}{Kg(a)}|g(x) - g(a)| \\
&< K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{|f(a)|}{Kg(a)}\frac{Kg(a)\varepsilon}{2|f(a)|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

De onde concluímos que $\frac{f}{g}$ é contínua em a. O caso $g(a) < 0$ é feito de maneira análoga. $\square$

Exemplo 63. *Inicialmente, observemos que qualquer função da forma $p(x) = ax^n$, em que a é uma constante e $n \in \mathbb{N}$, é contínua. Isso é consequência imediata das propriedades de limites de sequências. Como a soma de funções contínuas é contínua, segue-se que qualquer polinômio*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é uma função contínua.

Exemplo 64. *As funções racionais*

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, são funções contínuas em todos os pontos $a \in \mathbb{R}$ tais que $q(a) \neq 0$.

As duas proposições a seguir apresentam maneiras de construirmos funções contínuas a partir de outras funções contínuas.

Proposição 7. *Se $f : A \to \mathbb{R}$ for contínua em $a \in A$ então a função $|f| : A \to \mathbb{R}$, dada por $|f|(x) = |f(x)|$, para todo $x \in A$, também é contínua em a.*

Demonstração. Basta observar que, em virtude da segunda desigualdade triangular, temos

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|.$$

Segue-se que, se (x_n) for uma sequência em A convergindo para a, então por f ser contínua em a, $f(x_n) \to f(a)$ e, usando a desigualdade acima, $|f(x_n)| \to |f(a)|$, o que mostra a continuidade de $|f|$ em a. $\square$

Proposição 8. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ duas funções tais que a imagem $f(A)$ de f esteja contida em B. Se f for contínua em $a \in A$ e g for contínua em $f(a) \in B$ então a função composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em a.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em A convergindo para a. Em virtude da continuidade de f em a, tem-se $f(x_n) \to f(a)$. Usando a continuidade de g em $f(a)$ obtém-se

$$g(f(x_n)) = g \circ f(x_n) \to g(f(a)) = g \circ f(a)$$

o que mostra a continuidade de $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ em a. $\square$

Doravante, a menos que se diga algo em contrário, as funções consideradas sempre estarão definidas em intervalos de $\mathbb{R}$.

3 Conjuntos Abertos e Funções Contínuas

Existem alguns teoremas que se enquadram em uma classe de propriedades chamadas globais. Esse é o caso do próximo teorema. Para enunciá-lo, precisamos da noção de subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, a qual é introduzida na definição a seguir.

Definição 42. *Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é dito* aberto *se, para todo $x \in A$, existe um intervalo aberto I tal que $x \in I$ e $I \subset A$.*

Todo intervalo aberto é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. A reunião de dois intervalos abertos de $\mathbb{R}$ também é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, assim como o próprio $\mathbb{R}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Convenciona-se ainda que o conjunto vazio é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Se a, $b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ então os intervalos $(a, b]$, $[a, b)$ e $[a, b]$ não são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

Há também o conceito de subconjunto fechado de $\mathbb{R}$, dado na próxima definição.

Definição 43. *Dizemos que um subconjunto B de $\mathbb{R}$ é* fechado *se o seu complementar B^c é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

É claro que o intervalo $[a, b]$ é subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. Todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado. Os subconjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são fechados. Temos que $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são também fechados. Assim, $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são simultaneamente abertos e fechados.

Um intervalo da forma $(a, b]$, com $a < b$, não é nem aberto e nem fechado.

Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ também não são abertos nem fechados. Esses fatos são consequências das densidades de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Reveja os Exemplos 5 e 6.

Teorema 40. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, dado um subconjunto aberto qualquer $B \subset \mathbb{R}$ tem-se que $f^{-1}(B)$ é um subconjunto aberto.*

Demonstração. Suponhamos que f seja contínua. Devemos mostrar que, dado um aberto $B \subset \mathbb{R}$, então $f^{-1}(B)$ é um conjunto aberto. Para isso, provaremos que, para qualquer $x_0 \in f^{-1}(B)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset f^{-1}(B)$. Como f é contínua em x_0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{7.2}$$

Ora, $f(x_0) \in B$ e B é um conjunto aberto. Em virtude disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(f(x_0) + \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ está contido em B. Para esse ε

encontramos um δ tal que a condição (7.2) seja satisfeita. Ela nos diz, em particular, que

$$f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset B,$$

ou seja,

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(B).$$

Então $f^{-1}(B)$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que a imagem inversa de abertos, por meio da f, sejam abertos. Mostremos que a função f é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Seja, então, $x_0 \in \mathbb{R}$ e tomemos um $\varepsilon > 0$ arbitrário. O intervalo $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) - \varepsilon)$ é um conjunto aberto. Portanto

$$f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) - \varepsilon)) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) - \varepsilon)\}$$

é um conjunto aberto que contém o ponto x_0. Consequentemente, existe $\delta > 0$ tal que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) - \varepsilon)).$$

Daí

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) - \varepsilon),$$

o que é equivalente a

$$x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Isto mostra que f é contínua em todo $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Este último teorema também é verdadeiro no contexto dos conjuntos fechados. Mais precisamente:

Teorema 41. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, dado um subconjunto fechado qualquer $F \subset \mathbb{R}$ tem-se que $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado.*

A demonstração desse teorema é consequência imediata do anterior se observarmos que se $X \subset \mathbb{R}$, então $f^{-1}(X^c) = [f^{-1}(X)]^c$. Faça a demosntração como exercício.

Os dois resultados precedentes são válidos em um contexto mais geral, no qual consideramos os conjuntos abertos ou fechados relativos. Para tornar mais precisa tal afirmação, necessitamos de alguns conceitos.

Definição 44. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que $A \subset X$ é* aberto em X *se existir um subconjunto aberto U em $\mathbb{R}$ tal que $A = X \cap U$. Diz-se também que A é um* aberto relativo de X.

Definição 45. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que $F \subset X$ é* fechado em X *se $X \setminus F$ for aberto em X. Diz-se também que F é um* fechado relativo de X.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 65. *Todo conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é aberto e fechado nele mesmo. Para ver isso, basta observar que* $X = X \cap \mathbb{R}$ *e, além disso,* $\mathbb{R}$ *e* $\varnothing$ *são conjuntos abertos e fechados em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 66. *Seja* $X = [0, +\infty)$. *O conjunto* $A = [0, 1)$ *é aberto em* X, *pois* $A = X \cap (-2, 1)$ *em que* $(-2, 1)$ *é aberto em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 67. *Seja* $X = (1, +\infty)$. *O conjunto* $F = (1, 3]$ *é fechado em* X, *pois* $X - F = (3, +\infty)$ *e* $(3, +\infty)$ *é um conjunto aberto em* X.

Exemplo 68. *Consideremos o conjunto dos inteiros*

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

. *Cada conjunto* $\{n\}, n \in \mathbb{Z}$, *é aberto em* $\mathbb{Z}$. *Basta observar que* $\{n\} = \mathbb{Z} \cap (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ *e* $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ *é aberto de* $\mathbb{R}$. *Além disso,* $\{n\}, n \in \mathbb{Z}$ *é fechado em* $\mathbb{Z}$.

Desses exemplos pode-se concluir que a noção de aberto não é o invés da noção de fechado, ou seja, existem conjuntos que são, simultaneamente, abertos e fechados.

Com as noções anteriores, os teoremas 40 e 41 podem ser reescritos da seguinte maneira:

Teorema 42. *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, *é contínua se, e somente se, dado um subconjunto aberto qualquer* $B \subset \mathbb{R}$ *tem-se que* $f^{-1}(B)$ *é um subconjunto aberto em* X.

Teorema 43. *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, *é contínua se, e somente se, dado um subconjunto fechado qualquer* $F \subset \mathbb{R}$ *tem-se que* $f^{-1}(F)$ *é um subconjunto fechado em* X.

As demonstrações desses teoremas serão deixados a cargo do(a) leitor(a).

Vejamos outros resultados interessantes.

Definição 46. *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$, *em que* I *é um intervalo de* $\mathbb{R}$, *é dita* uniformemente contínua *se, dado* $\varepsilon > 0$, *existir* $\delta > 0$ *tal que, se* $x, y \in I$ *com* $|x - y| < \delta$, *então* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Observemos que, nesse caso, o δ depende apenas de ε e não dos particulares pontos que estejamos considerando. Claramente toda função uniformemente contínua é contínua. As seguintes propriedades são válidas:

(a) Se $f : I \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua, então f transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$. Em virtude da continuidade uniforme de f, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in I$, $|x - y| < \delta$ implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em I. Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \delta$, se $m, n \geq n_0$, donde conclui-se que $f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ se $m, n \geq n_0$. Então $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy.

Infere-se desse resultado que a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua, muito embora seja contínua. De fato, considere a sequência de Cauchy $\left(\frac{1}{n}\right)$. Como $f(\frac{1}{n}) = n$ conclui-se que a sequência $(f(\frac{1}{n}))$ não é de Cauchy. Isso prova que essa função não é uniformemente contínua.

(b) Mostre que toda função lipschitziana é uniformemente contínua.

De fato, seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana com constante de Lipschitz igual a K. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Portanto, se $x, y \in I$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, o que prova a continuidade uniforme de f.

Quando estudarmos o teorema do valor médio exibiremos mais exemplos de funções lipschitzianas.

4 Exercícios Resolvidos

1. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, em que I é um intervalo de $\mathbb{R}$, é dita *holderiana* (ou Hölder-contínua) se existirem constantes positivas α e K tais que
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$
para quaisquer $x, y \in I$. As constantes K e α são chamadas, respectivamente, de *constante de Hölder* e de *expoente de Hölder*. Mostre que toda função holderiana é uniformemente contínua.

   Solução. Dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, de modo que $x, y \in I$ e $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Portanto, f é uniformemente contínua.

2. Mostre que a função $f : I \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, é lipschitziana sempre que I for um intervalo limitado.

   Solução. Observe que, em virtude de I ser limitado, existe uma constante $K > 0$ tal que $|x| \leq K$, para todo $x \in I$. Portanto, dados $x, y \in I$, teremos
$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x+y||x-y| \leq (|x|+|y|)|x-y| \leq 2K|x-y|$$
o que mostra que f é lipschitziana e $2K$ é a constante de Lipschitz.

3. Mostre que a função $f : [0, b) \to \mathbb{R}$, com $b > 0$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, não é lipschitziana.

Solução. Suponhamos que tal função seja lipschitziana. Logo, existe uma constante $K > 0$ tal que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|$, para quaisquer $x, y \in [0, b)$. Tomando $y = 0$ e $0 < x < b$, teremos $\sqrt{x} \leq Kx$, donde $\frac{1}{K} \leq \sqrt{x}$, para todo $0 < x < b$, o que é impossível. Portanto, f não é lipschitziana em $[0, b)$. Na verdade, tal função não é lipschitziana em qualquer intervalo que contenha 0.

4. Mostre que a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é Hölder-contínua com expoente de Hölder igual a $\frac{1}{2}$ e constante de Hölder igual a 1.

   Solução. Sejam $x, y \geq 0$ os quais podem ser escolhidos, sem perda de generalidade, satisfazendo $y \leq x$ donde $\sqrt{y} \leq \sqrt{x}$. Portanto, $2y \leq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$. Segue daí que $x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq x - y$. Logo, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |(x - y)|$. Assim, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |(x - y)|^{\frac{1}{2}}$. Concluímos daí que $f(x) = \sqrt{x}$ é Hölder-contínua.

5 Exercícios Propostos

1. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $[x]$ como sendo o maior inteiro menor do que ou igual a x. Assim, $[2] = 2$, $[3,5] = 3$, $[\pi] = 3$, $[\sqrt{2}] = 2$, $[-100,5] = -101$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$. Determine os pontos nos quais f é descontínua.

2. Mostre que toda função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua.

3. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua tal que $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. O exercício anterior pode ser generalizado da seguinte maneira: sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{Q}$ (ou para todo $x \in \mathbb{Q}^c$), então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demonstre isto!

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $f(kx) = kf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua. Existe uma forma geral para tal tipo de função?

6. Considere a função $f(x) = x^3$ definida em $\mathbb{R}$. Se $A \subset \mathbb{R}$ for um conjunto aberto, a sua imagem $f(A)$ também será um conjunto aberto? E se $F \subset \mathbb{R}$ for fechado, o que acontece com a imagem $f(F)$?

7. Considere a função $f(x) = x^2$ definida em $\mathbb{R}$. Se $A \subset \mathbb{R}$ for um conjunto aberto, a sua imagem $f(A)$ também será um conjunto aberto? E se $F \subset \mathbb{R}$ for fechado, o que acontece com a imagem $f(F)$?

8. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ definida em $\mathbb{R}$. Se $A \subset \mathbb{R}$ for um conjunto aberto, a sua imagem $f(A)$ também será um conjunto aberto? E se $F \subset \mathbb{R}$ for fechado, o que acontece com a imagem $f(F)$?

9. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, em que n é um número natural fixo. Mostre que se I é um intervalo limitado então f é lipschitziana. Caso I não seja limitado, verifique que f não é lipschitziana.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja imagem é um conjunto finito. Mostre que f é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se, f for constante em algum intervalo aberto contendo x_0.

11. A função característica $\chi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ é definida por:

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in X, \\ 0 & \text{se} \quad x \in X^c. \end{cases}$$

Mostre que χ_X é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $x_0 \in X \cup int(X^c)$.

12. Se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma dada função, define-se $|f| : I \to \mathbb{R}$ por $|f|(x) = |f(x)|$. Mostre que se f for contínua, então $|f|$ será contínua. A recíproca desse fato é verdadeira? Justifique sua resposta.

13. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, mostre que

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

é contínua.

14. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $x_0 \in I$ e $f(x_0) > C$, para alguma constante C, mostre que existe um intervalo J contendo x_0 tal que $f(x) > C$ para todo $x \in J$. Enuncie e demonstre um resultado análogo no caso em que $f(x_0) < C$.

Capítulo 8

Máximos e Mínimos e o Teorema do Valor Intermediário

Esta aula será dedicada ao estudo dos máximos e mínimos de funções $f : I \to \mathbb{R}$, em que I é um intervalo de $\mathbb{R}$, e do *Teorema do Valor Intermediário* que são tópicos da maior relevância na Análise Matemática. As questões relativas a máximos e mínimos são importantes por seus aspectos matemáticos assim como por suas aplicações. A natureza nos fornece muitos fenômenos nos quais os *extremos de funções* aparecem de maneira bastante natural. Nesse ponto, o(a) leitor(a) deve recordar das aulas de Cálculo referentes a este assunto. Começaremos com algumas definições.

1 Máximos e Mínimos

Definição 47. *Diz-se que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é* limitada superiormente *se existir um número M tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in I$.*

Isto significa que o conjunto $\{f(x); x \in I\}$ é limitado superiormente e assim existe $\sup\{f(x); x \in I\}$.

Definição 48. *Diz-se que a função $f : I \to \mathbb{R}$* atinge máximo global ou absoluto *em um ponto $\bar{x} \in I$ se $f(x) \leq f(\bar{x})$, para todo $x \in I$. Nesse caso, f é limitada superiormente* e $\sup\{f(x); x \in I\} = \max\{f(x); x \in I\} = f(\bar{x})$. *Diz-se então que $\bar{x}$ é* ponto de máximo global ou absoluto *de f, ao passo que $f(\bar{x})$ é o* valor máximo global ou absoluto *de f.*

Doravante, o termo *máximo* de uma função significará *máximo global ou absoluto.*

Temos também os conceitos análogos aos das definições anteriores para funções limitadas inferiormente e pontos de mínimo dados a seguir.

Definição 49. *Diz-se que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é* limitada inferiormente *se existir uma constante N tal que $f(x) \geq N$, para todo $x \in I$.*

Isso significa que o conjunto $\{f(x); x \in I\}$ é limitado inferiormente, ou seja, existe $\inf \{f(x); x \in I\}$.

Observemos que os ínfimo e supremo, citados previamente, existem em virtude do Postulado de Dedekind.

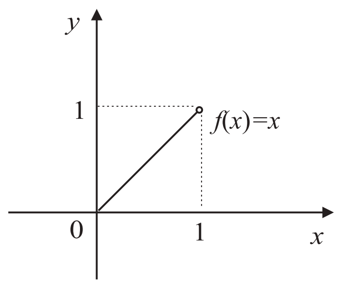
Definição 50. *Diz-se que a função $f : I \to \mathbb{R}$* atinge mínimo global ou absoluto *em um ponto $\underline{x} \in I$ se $f(x) \geq f(\underline{x})$, para todo $x \in I$. Nesse caso, f é limitada inferiormente e $\inf \{f(x); x \in I\} = \min \{f(x); x \in I\} = f(\underline{x})$. Diz-se então que $\underline{x}$ é* ponto de mínimo global ou absoluto *de f, ao passo que $f(\underline{x})$ é o* valor mínimo global ou absoluto *de f.*

Doravante, o termo *mínimo* de uma função significará *mínimo global ou absoluto.*

Quando $f : I \to \mathbb{R}$ for, simultaneamente, limitada superiormente e inferiormente, diz-se, simplesmente, que f é *limitada.*

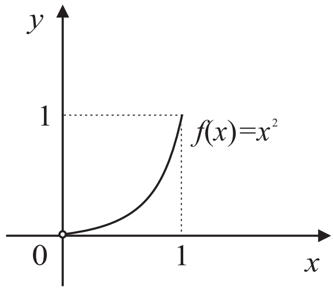
Para melhor entendimento desses conceitos, analisemos os exemplos a seguir.

Exemplo 69. *Considere a função $f(x) = x$ para $x \in [0, 1)$, representada graficamente na figura a seguir.*



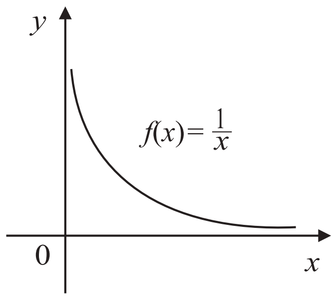
Como $0 \leq f(x) < 1$, f é limitada superiormente e inferiormente. Além disso, $f(0) = 0$, ou seja, 0 é ponto de mínimo de f, mas, apesar de f ser limitada superiormente, não existe nenhum ponto do seu domínio que atinja o valor 1, que é o supremo dos valores de f.

Exemplo 70. *Consideremos a função $f(x) = x^2$ para $x \in (0, 1]$, cujo gráfico é mostrado a seguir.*



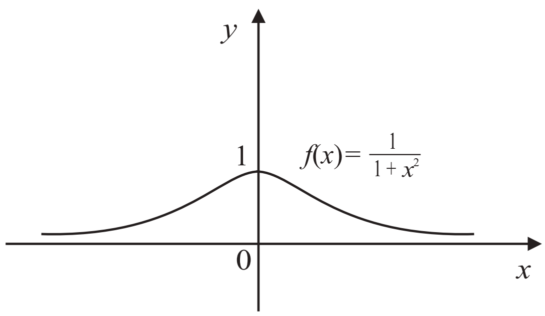
Temos que $0 < f(x) \leq 1$ *e, assim,* f *é limitada superiormente e inferiormente. Além disso,* $f(1) = 1$*, e daí* 1 *é ponto de máximo de* f*, mas, apesar de* f *ser limitada inferiormente, não existe nenhum ponto do seu domínio que atinja o valor* 0*, que é o ínfimo dos valores de* f*.*

Exemplo 71. *A função* $f(x) = \frac{1}{x}$*, para* $x > 0$*, cujo gráfico encontra-se a seguir, é limitada inferiormente por 0, mas não é limitada superiormente.*



Observemos que $\inf\left\{\frac{1}{x}; x > 0\right\} = 0$*, mas não existe nenhum* $\underline{x} > 0$ *tal que* $f(\underline{x}) = 0$*.*

Exemplo 72. *A função* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$*,* $x \in \mathbb{R}$ *é limitada superiormente e inferiormente. Observando o gráfico de* f



vemos que

$$\begin{aligned}\sup\left\{\frac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}\right\} &= 1 = f(0)\\ \inf\left\{\frac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}\right\} &= 0\end{aligned}$$

notamos que $f(x) > 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Isso mostra que a função não atinge mínimo.*

O próximo lema garante que toda função contínua, definida em um intervalo fechado e limitado, é limitada superiormente e inferiormente.

Lema 2. *Toda função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é limitada superiormente e inferiormente.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Suponhamos, por contradição, que f não seja limitada superiormente. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$. Usando o *teorema de Bolzano-Weierstrass*, encontramos uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) convergindo para algum ponto $\bar{x} \in [a, b]$, isto é, $x_{n_j} \to \bar{x}$. Usando a continuidade de f, obtém-se $f(x_{n_j}) \to f(\bar{x})$. Isso implica que a sequência $(f(x_{n_j}))$ é, em particular, limitada. No entanto, isso contradiz o fato de que $f(x_{n_j}) > n_j$. Portanto, f é limitada superiormente. Para mostrarmos que f é limitada inferiormente, procedemos de maneira análoga. □

Usando o lema que acabamos de demonstrar provaremos, no próximo teorema, um dos principais resultados a respeito de funções contínuas.

Teorema 44. *Toda função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *atinge máximo e mínimo em* $[a, b]$.

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Pelo lema 2, f é limitada superiormente e inferiormente. Façamos $M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$. Em virtude da definição de supremo, existe uma sequência (x_n) em $[a, b]$ tal que $f(x_n) \to M$. Logo, usando o *teorema de Bolzano-Weierstrass*, encontramos uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) que converge para um certo $\bar{x} \in [a, b]$. Como f é contínua, segue de $x_{n_j} \to \bar{x}$ que $f(x_{n_j}) \to f(\bar{x})$. Como $f(x_n) \to M$, teremos que $f(x_{n_j}) \to M$. Pela unicidade do limite, concluímos que $f(\bar{x}) = M$, ou seja, tal função atinge máximo em $[a, b]$. De maneira análoga mostramos que f atinge mínimo em $[a, b]$. □

Observemos que a existência dessa sequência maximizante é decorrência do exercício 12 do Capítulo 1. Justifique, como exercício, a sua existência.

Pelo teorema precedente, qualquer função definida em um intervalo fechado e limitado atinge máximo e mínimo. No entanto, uma função contínua pode atingir máximo ou mínimo mesmo em algum intervalo não-limitado como, por exemplo, a reta $\mathbb{R}$. Veremos, no próximo teorema, uma situação na qual isso ocorre. Para tanto, necessitamos da seguinte definição.

Definição 51. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita* coerciva *se* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Por exemplo, a função $f(x) = x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, é coerciva, enquanto que $f(x) = x^3$, com $x \in \mathbb{R}$, não o é.

Teorema 45. *Toda função contínua e coerciva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ atinge mínimo.*

Demonstração. Observemos que a coercividade de f é traduzida da seguinte maneira: dado $M \in \mathbb{R}$, existe $R > 0$ tal que $f(x) > M$ se $|x| > R$. Portanto, para $M = f(0)$, existe $R > 0$ tal que $f(x) > f(0)$ se $|x| > R$. Sendo f contínua, usando o Teorema 44, ela atinge mínimo em algum ponto x_0 do intervalo $[-R, R]$. Assim, $f(x_0) \le f(x)$, para todo $x \in [-R, R]$. Também, $f(x_0) \le f(0) < f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ com $|x| > R$. Combinando esses dois últimos fatos, concluímos que $f(x_0) \le f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e assim x_0 é ponto de mínimo da função f. □

2 Teorema do Valor Intermediário

Nos dois próximos lemas veremos que se uma função contínua, definida em um intervalo, assumir valores de sinais contrários nas extremidades do intervalo, então a função possuirá um zero nesse intervalo. O primeiro desses lemas será usado na demonstração do teorema do valor intermediário, um dos principais resultados dessa aula.

Lema 3. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Então existe $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$. Nesse caso, diz-se que c é um zero da função f.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ como no enunciado do lema e consideremos o conjunto $A = \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$. Esse conjunto é limitado superiormente (b é uma cota superior de A) e não-vazio pois $a \in A$. Pelo Postulado de Dedekind 2, A possui supremo, digamos c. Claramente $c \le b$. Como $f(b) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se, $x \in [b - \delta, b]$ então $f(x) > 0$ e, assim, cada elemento do intervalo $[b - \delta, b]$ é uma cota superior de A. Como $c = \sup A$, segue-se que $c \le b - \delta < b$. Mostremos que $f(c) = 0$. Se $f(c) > 0$, existiria $\varepsilon > 0$ tal que $x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ implicaria $f(x) > 0$. Como $c = \sup A$ e $f(c-\varepsilon) > 0$, teríamos que $c-\varepsilon$ seria uma cota superior de A menor que o seu supremo, o que é impossível. Suponhamos $f(c) < 0$. Neste caso, existiria $\varepsilon > 0$ tal que $x \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset [a, b]$ implicaria $f(x) < 0$. Em particular, $f(c+\varepsilon) < 0$ e assim $c+\varepsilon \in A$. Como c é o sup de A, isso é impossível. Então $f(c) = 0$. Segue daí que $a < c$, o que conclui a demonstração deste lema. □

Lema 4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(a) > 0 > f(b)$. Então existe $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$.*

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -f(x)$. Claramente g é contínua e $g(a) = -f(a) < 0 < -f(b) = g(b)$. Aplicando o lema 3 à função g encontramos $c \in (a, b)$ com $g(c) = 0$ e então $f(c) = 0$. □

Teorema 46. (**Teorema do Valor Intermediário**) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) < d < f(b)$, para algum número real d. Então existe $a < c < b$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Consideremos a função contínua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - d$. Assim, $g(a) = f(a) - d < 0$ e $g(b) = f(b) - d > 0$. Agora, aplicando o lema 3 à função g, que é contínua, concluímos que existe $c \in (a, b)$ satisfazendo $g(c) = 0$ ou, de maneira equivalente, $f(c) = d$. □

Observemos que no teorema do valor intermediário, quando $d = 0$, recaímos nas condições do lema 3.

Corolário 10. *Todo polinômio de grau ímpar e coeficientes reais possui pelo menos um raiz real.*

Demonstração. Seja $p = p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau ímpar com coeficientes reais no qual $a_n > 0$. Como é conhecido, tem-se que

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$$

de onde conclui-se que existem pontos $a, b \in \mathbb{R}$ que satisfazem $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$, o que conclui a demonstração do corolário. □

Utilizaremos, a seguir, o teorema do valor intermediário para mostrar que funções contínuas levam intervalos em intervalos.

Corolário 11. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo I. Então a imagem $f(I)$ de f é também um intervalo.*

Demonstração. Inicialmente, observemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não-degenerado (não se reduz a um ponto) se dados $a, b \in X, a < b$ e se $a < x < b$ então $x \in X$. Se f for uma função constante, nada há a demonstrar. Suponhamos f não-constante e consideremos dois pontos quaisquer y_1 e y_2 em $f(I)$ de modo que $y_1 < y_2$ e seja y tal que $y_1 < y < y_2$. Como y_1 e y_2 pertencem à imagem de f, existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como $f(x_1) = y_1 < y < y_2 = f(x_2)$, podemos aplicar o teorema do valor intermediário para encontrar x, entre x_1 e x_2 tal que $f(x) = y$. Isto mostra que $y \in f(I)$ e daí conclui-se que $f(I)$ é um intervalo. □

3 O Método da Bissecção

Como aplicação do *Teorema do Valor Intermediário*, exibiremos um método que nos possibilitará determinar uma aproximação, com grande grau de precisão, para o zero de uma função. Observemos que o *Teorema do Valor Intermediário* nos garante a existência de um zero para funções que mudam de sinal. No entanto, ele não nos permite exibir tal zero.

Façamos a descrição desse método. Para isso, suponhamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua com $f(a) < 0 < f(b)$ (o caso $f(a) > 0 > f(b)$ é feito de maneira análoga). Pelo teorema do valor intermediário, existe um zero de f em $[a, b]$. Seja c um desses zeros (pode haver mais de um). Inicialmente, podemos fazer $I_1 = [a_1, b_1]$, em que $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Seja $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ o ponto médio do intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$, daí o nome método da bissecção. Se $f(x_1) = 0$, já encontramos um zero de f. Se $f(x_1) \neq 0$ então $f(x_1) > 0$ ou $f(x_1) < 0$. Se $f(x_1) > 0$, façamos $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_1$. Se $f(x_1) < 0$, façamos $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$. Em ambos os casos teremos que o intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ com $f(a_2) < 0 < f(b_2)$. Além disso, designando por $|I|$ o comprimento do intervalo I, tem-se que $|I_2| = \frac{I_1}{2}$. Aplicando, mais uma vez, o processo de bissecção encontramos um intervalo $I_3 = [a_3, b_3]$ com $f(a_3) < 0 < f(b_3)$ e $|I_3| = \frac{|I_1|}{2^2}$. Continuando com o processo de bissecção, encontramos intervalos $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k$, cada um deles obtido do anterior por uma bissecção. Daí, $f(a_k) < 0 < f(b_k)$ e façamos $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Se $f(x_k) = 0$, temos o zero $c = x_k$ e o processo estaria terminado. Se $f(x_k) > 0$, façamos $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$, enquanto que se $f(x_k) < 0$ tomaremos $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$. Em ambos os casos, teremos $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Então $I_{k+1} \subset I_k, f(a_{k+1}) < 0 < f(b_{k+1})$ e $|I_{k+1}| = \frac{|I_k|}{2^k}$. Este processo seria concluído caso encontrássemos $x_n \in [a, b]$ com $f(x_n) = 0$. Caso isso não aconteça, obteremos uma sequência de intervalos encaixados $I_n = [a_n, b_n]$ tal que $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e $|I_{n+1}| = \frac{|I_n|}{2^n}$. Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe um c tal que $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tal c é único, pois $\lim |I_n| = 0$. Além disso, $a_n \to c$ e $b_n \to c$. Portanto, $f(a_n) \to f(c)$ e $f(b_n) \to f(c)$. Logo, $f(c) \leq 0$ e $f(c) \geq 0$ e,assim, $f(c) = 0$. Observemos que esse processo nos fornece uma maneira de aproximar o zero c com qualquer precisão desejada pois $\lim a_n = \lim b_n = c$.

O próximo exemplo apresenta uma aplicação do método da bissecção.

Exemplo 73. *Vejamos como determinar aproximações de $\sqrt{2}$, usando o método da bissecção. Para isso, consideremos a função $f(x) = x^2 - 2$, restrita ao intervalo $[0, 2]$. Ora, como $f(0) = -2 < 0$ e $f(2) = 2 > 0$ existirá uma raiz do polinômio $x^2 - 2$ no intervalo $[0, 2]$ e, pelo fato de que f é crescente no intervalo $[0, 2]$, tal raiz é única. Façamos $a_1 = 0$ e $b_1 = 2$, de modo que o ponto médio de $I_1 = [a_1, b_1]$ é $x_1 = 1$ e $f(1) = -1$. Assim, $I_2 = [1, 2]$ e o ponto médio desse intervalo é $1,5$, com $f(1,5) = 0,25$. Daí, tem-se o intervalo $I_3 = [1,\ 1{,}5]$ cujo ponto médio é*

$1,25$ *e* $f(1,25) = -0,4375$. *Considerando o intervalo* $I_4 = [0{,}75,\ 1{,}5]$, *temos que seu ponto médio é* $1,125$ *e que* $f(1,125) = -0,734375$. *Consideremos o intervalo* $I_5 = [1{,}125,\ 1{,}5]$ *cujo ponto médio é* $1,3125$ *e* $f(1,3125) = -0,2773438 < 0$. *Por último, façamos* $I_6 = [1{,}3125,\ 1{,}5]$ *cujo ponto médio é* $1,40625$. *Assim,* $1,40625$ *é uma aproximação de* $\sqrt{2}$. *Deve-se enfatizar que quanto mais continuarmos esse processo, melhor será a aproximação.*

Uma questão associada ao estudo das funções contínuas é a de encontrar pontos do domínio de uma função em que as imagens de cada ponto seja o próprio ponto. Começaremos a discutir esse problema no que segue.

Definição 52. *Seja* $f : X \to X$ *uma função definida em um conjunto não-vazio* X. *Diz-se que* $x_0 \in X$ *é* ponto fixo *de* f *se* $f(x_0) = x_0$.

O próximo resultado garante a existência de pontos fixos sob determinadas circunstâncias.

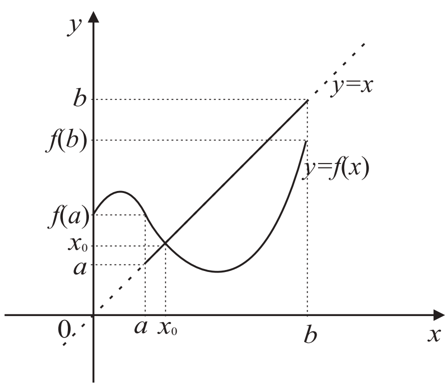
Teorema 47. (Um Teorema de Ponto Fixo) *Toda função contínua* $f : [a,b] \to [a,b]$ *possui um ponto fixo.*

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, temos já determinado um ponto fixo de f. Suponhamos que $f(a) \neq a$ ou $f(b) \neq b$. Assim, $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Consideremos a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Portanto,

$$g(a) = f(a) - a > 0 \ \text{ e } \ g(b) = f(b) - b < 0.$$

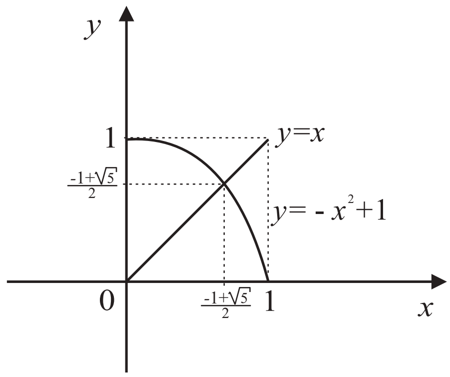
Como g é contínua, pelo teorema do valor intermediário, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $g(x_0) = 0$, ou seja, $f(x_0) = x_0$ e assim encontramos um ponto fixo para f. □

Geometricamente, o teorema de ponto fixo estabelecido acima nos diz que o gráfico de qualquer função contínua $f : [a,b] \to [a,b]$ intersecta o gráfico da função $y = x$.

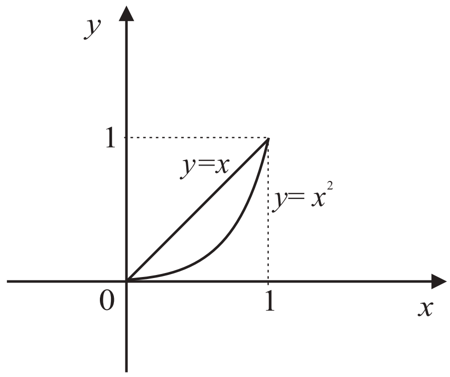


O teorema precedente nos fornece a existência de ponto fixo mas não temos, necessariamente, unicidade. Vejamos os exemplos a seguir:

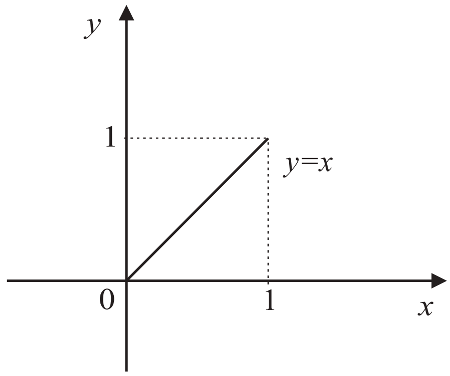
Exemplo 74. *A função* $f : [0,1] \to [0,1]$ *dada por* $f(x) = -x^2 + 1$ *possui um único ponto fixo,* $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, *no intervalo* $[0,1]$.



Exemplo 75. *A função* $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x^2$ *possui exatamente dois pontos fixos,* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, *no intervalo* $[0,1]$.



Exemplo 76. *A função* $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x$ *possui infinitos pontos fixos em* $[0,1]$. *Com efeito, todo* $x \in [0,1]$ *é ponto fixo de* f.



Veremos um outro teorema de ponto fixo, mas antes estabeleçamos uma definição.

Definição 53. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita uma* contração *se existir uma constante* $\lambda \in [0, 1)$ *tal que* $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$*, para todos* $x, y \in \mathbb{R}$.

Observemos que toda contração é uma função lipschitziana e, consequentemente, contínua.

Teorema 48. (Teorema do Ponto Fixo para Contrações) *Toda contração* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Veja que este é um teorema de existência e unicidade. Comecemos com a existência. Desde que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contração, existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 0$, nada há a demonstrar, pois neste caso, f é uma função constante e a constante que define f é o ponto fixo da função. Suponhamos então que $0 < \lambda < 1$. Seja x_1 um ponto arbitrário de $\mathbb{R}$, façamos $x_2 = f(x_1)$ e, indutivamente, definamos $x_{n+1} = f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que a sequência (x_n) converge para um ponto fixo de f. Inicialmente, observemos que

$$\begin{aligned}
|x_3 - x_2| &= |f(x_2) - f(x_1)| \leq \lambda|x_2 - x_1|, \\
|x_4 - x_3| &= |f(x_3) - f(x_2)| \leq \lambda|x_3 - x_2| \leq \lambda^2|x_2 - x_1|, \\
|x_5 - x_4| &= |f(x_4) - f(x_3)| \leq \lambda|x_4 - x_3| \leq \lambda^3|x_2 - x_1|
\end{aligned}$$

e, prosseguindo dessa maneira, obtemos

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^{n-1}|x_2 - x_1|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Supondo $m \geq n$ teremos

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq \left(\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \cdots + \lambda^{n-1}\right)|x_2 - x_1| = \frac{\lambda^{n-1} - \lambda^{m-1}}{1 - \lambda}|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos a

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda}|x_2 - x_1|.$$

Como $0 < \lambda < 1$, a sequência (λ^{n-1}) converge para zero, de onde obtemos que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, em virtude do Teorema 9, é convergente. Seja $x_0 = \lim x_n$ e usando o fato de que $x_{n+1} = f(x_n)$ e f é contínua, teremos

$$\lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(x_0)$$

e então $x_0 = f(x_0)$. Logo, a existência do ponto fixo está provada. Provemos agora a unicidade. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ pontos fixos de f, ou seja, $f(x) = x$ e $f(y) = y$. Assim,

$$|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$$

donde

$$(1-\lambda)|x-y| \leq 0$$

e pelo fato de $1-\lambda > 0$ concluímos que $|x-y| = 0$ o que nos fornece $x = y$. □

Vejamos um resultado interessante que usa o fato de que a imagem de intervalos por funções contínuas também é um intervalo.

Teorema 49. *Seja $f : I \to f(I)$ uma função contínua e crescente em que I é um intervalo aberto. Então $f^{-1} : f(I) \to I$ é uma função contínua.*

Demonstração. Inicialmente, observemos que $f(I)$ é um intervalo aberto, pois f é contínua, crescente e I é um intervalo aberto. Como é fácil ver, $f^{-1} : f(I) \to I$ também é crescente. Para mostrar que $f^{-1} : f(I) \to I$ é contínua consideremos um ponto $x_0 \in f(I)$ e uma sequência (x_n) em $f(I)$ tal que $x_n \to x_0$. Devemos mostrar que $f^{-1}(x_n) \to f^{-1}(x_0)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ e mostremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{-1}(x_0) - \varepsilon < f^{-1}(x_n) < f^{-1}(x_0) + \varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

Como $f^{-1}(x_0) \in I$ podemos escolher $\varepsilon > 0$ de modo que o intervalo aberto $(f^{-1}(x_0) - \varepsilon, f^{-1}(x_0) + \varepsilon)$ esteja contido em I. Em particular,

$$f^{-1}(x_0) - \varepsilon < f^{-1}(x_0) < f^{-1}(x_0) + \varepsilon$$

e, pelo fato de f ser crescente, obtemos

$$f(f^{-1}(x_0) - \varepsilon) < x_0 < f(f^{-1}(x_0) + \varepsilon)$$

pois $f(f^{-1}(x_0)) = x_0$. Desde que $x_n \to x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(f^{-1}(x_0) - \varepsilon) < x_n < f(f^{-1}(x_0) + \varepsilon)$, para $n \geq n_0$. Como $f^{-1} : f(I) \to I$ é crescente, obtemos

$$f^{-1}(f(f^{-1}(x_0) - \varepsilon)) < f^{-1}(x_n) < f^{-1}(f(f^{-1}(x_0) + \varepsilon)),$$

para $n \geq n_0$, que é equivalente a

$$f^{-1}(x_0) - \varepsilon < f^{-1}(x_n) < f^{-1}(x_0) + \varepsilon,$$

para $n \geq n_0$, provando que $f^{-1}(x_n) \to f^{-1}(x_0)$. □

4 Exercícios Resolvidos

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$. Então $f(x) \geq m_0$, para todo $x \in [a, b]$ e algum $m_0 > 0$.

   Solução. Suponhamos, por contradição, que f não seja limitada inferiormente por uma constante positiva, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, exista $x_\varepsilon \in [a,b]$ tal que $f(x_\varepsilon) < \varepsilon$. Assim, tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, existirá x_n tal que $f(x_n) < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando o teorema de Bolzano-Weierstrass, encontramos uma subsequência de (x_n), tal que $x_{n_j} \to x$ para alguma $x \in [a,b]$. Em virtude da continuidade de f, obtém-se $f(x_{n_j}) \to f(x)$ e como $0 \le f(x_{n_j}) < \frac{1}{n_j}$, teremos $f(x) = 0$ o que é impossível pois, por hipótese, $f(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$. Isso mostra que existe uma constante positiva m_0 tal que $f(x) \ge m_0$, para todo $x \in [a,b]$. Observemos que essa resolução é a segunda parte do teorema 44. Supondo já demonstrado o teorema, este exercício pode ser facilmente resolvido tomando-se $m_0 = f(x_0)$ em que x_0 é um ponto de mínimo de f.

2. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $X = \{x \in [a,b]; f(x) = g(x)\}$ satisfaz a seguinte propriedade: se (x_n) for uma sequência em X, convergindo para um certo x_0 então $x_0 \in X$.

   Solução. Inicialmente, observemos que $x_0 \in [a,b]$ (justifique isso). Como $f(x_n) = g(x_n)$ e f e g são contínuas, teremos portanto que $\lim f(x_n) = \lim g(x_n)$. Logo, $f(\lim x_n) = g(\lim x_n)$. De onde segue que $f(x_0) = g(x_0)$. Assim, $x_0 \in X$.

3. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que, para cada $x \in [a,b]$, existe $z \in [a,b]$ tal que $|f(z)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$. Mostre que f possui um zero em $[a,b]$.

   Solução. Seja $x_1 \in [a,b]$. Por hipótese, existe $x_2 \in [a,b]$ tal que $|f(x_2)| \le \frac{1}{2}|f(x_1)|$. Para esse x_2, existe $x_3 \in [a,b]$ satisfazendo $|f(x_3)| \le \frac{1}{2}|f(x_2)| \le (\frac{1}{2})^2|f(x_1)|$. A partir desse x_3, encontramos $x_4 \in [a,b]$ com $|f(x_4)| \le \frac{1}{2}|f(x_3)| \le (\frac{1}{2})^3|f(x_1)|$. Prosseguindo desta maneira, encontramos uma sequência (x_n) em $[a,b]$ tal que $|f(x_{n+1})| \le (\frac{1}{2})^n|f(x_1)|$. Desde que $(\frac{1}{2})^n \to 0$, tem-se então que $f(x_{n+1}) \to 0$. Logo, $f(x_n) \to 0$. Observemos que, em virtude do teorema de Bolzano-Weierstrass, a sequência (x_n) possui uma subsequência (x_{n_j}) convergindo para um certo $x_0 \in [a,b]$. Agora, segue da continuidade de f que $f(x_{n_j}) \to f(x_0)$ e, pela unicidade do limite, $f(x_0) = 0$ e a existência do zero de f está demonstrada.

5 Exercícios Propostos

1. Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é uma descontinuidade de $1^{\underline{a}}$ espécie da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se os limites laterais $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem distintos.

(a) Exiba um exemplo de uma função que possua descontinuidades que não sejam de $1^{\underline{a}}$ espécie.

(b) Mostre que uma função crescente que admite apenas descontinuidades de $1^{\underline{a}}$ espécie possui uma *quantidade enumerável* de descontinuidades.

(c) Exiba um exemplo de uma função com uma quantidade não-enumerável de descontinuidades.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Mostre que f atinge máximo ou mínimo em $\mathbb{R}$. Exiba exemplos nos quais as funções atinjam apenas máximo, ou apenas mínimo ou máximo e mínimo.

3. A equação $x^5 + 4x^2 - 16 = 0$ possui uma solução no intervalo $(0, 2)$. Justifique o motivo pelo qual essa afirmação é verdadeira.

4. Se $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, mostre que $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe.

5. Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua e $\lim x \to +\infty f(x) = \lim x \to -\infty f(x) = 0$. Mostre que f é uniformemente contínua.

6. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} = 0.$$
Mostre que f atinge máximo ou mínimo (ou ambos) em (a, b).

7. Mostre que toda função contínua em um intervalo fechado é uniformemente contínua.

8. Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua no intervalo $(0, +\infty)$, mas é uniformemente contínua em $[a, +\infty)$, qualquer que seja $a > 0$.

9. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ for uniformemente contínua no conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$ então f será limitada em X.

10. Mostre que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem uniformemente contínuas a função composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será uniformemente contínua.

11. Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

12. Mostre que uma função crescente $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ será contínua em b se $f(b) = \sup\{f(x); x \in [a, b)\}$. Enuncie um critério semelhante para a continuidade de f em a.

Capítulo 9

A Derivada

Neste capítulo começaremos a estudar a derivada de funções. A derivada é uma ferramenta que permite o estudo da taxa de variação de funções, estando relacionada com a inclinação de retas tangentes ao gráfico de funções. Ela estará presente em todo o restante deste livro.

1 Noções Iniciais

Comecemos com a definição de derivada.

Definição 54. *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é* derivável *em um ponto x_0 do intervalo I se o limite*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existir. Esse limite é designado por $f'(x_0)$ e é chamado derivada *de f em x_0. Quando uma função é derivável em cada ponto do seu domínio, ela é dita uma* função derivável.

Deve-se observar que a existência desse limite pressupõe que ele independa de como x tende para x_0. No entanto, em alguns casos essa aproximação somente poderá ser feita ou pela direita ou pela esquerda. Isso é o que acontece, por exemplo, se x_0 for uma das extremidades de um intervalo. Caso x_0 esteja no interior do intervalo I, o limite acima existirá se, e somente se, os limites laterais

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existirem e forem iguais. O primeiro desses limites é chamado *derivada lateral à direita* de f no ponto x_0, sendo designado por $f'_+(x_0)$, ao passo que o segundo, é chamado *derivada lateral à esquerda*, sendo designado por $f'_-(x_0)$.

A expressão

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

é chamada *quociente de Newton* de f no ponto x_0 e pode ser reescrita como:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

em que estamos fazendo $x - x_0 = h$. Desse modo, a derivada de f em x_0 é também dada por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

No caso das derivadas laterais, teremos

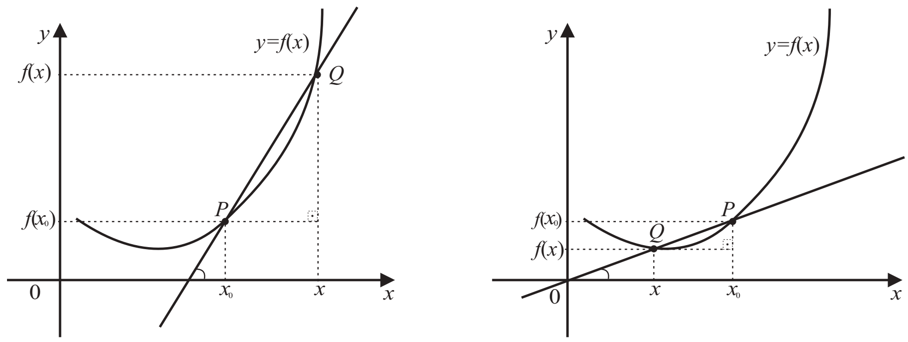
$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e

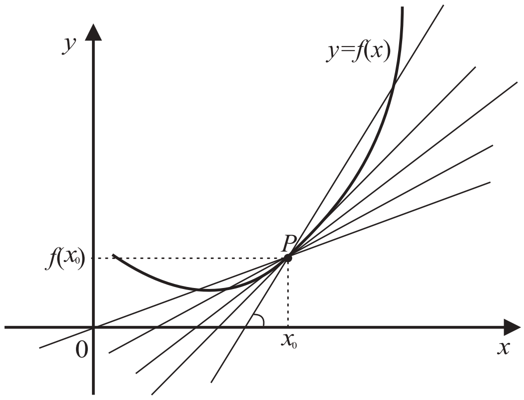
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dada a função $y = f(x)$, a sua derivada em um ponto x de seu domínio, caso exista, será também designada por $\frac{dy}{dx}(x)$ ou simplesmente por $\frac{dy}{dx}$, caso não haja dúvidas sobre o ponto no qual estamos calculando a derivada. Essa notação será bastante conveniente em várias situações.

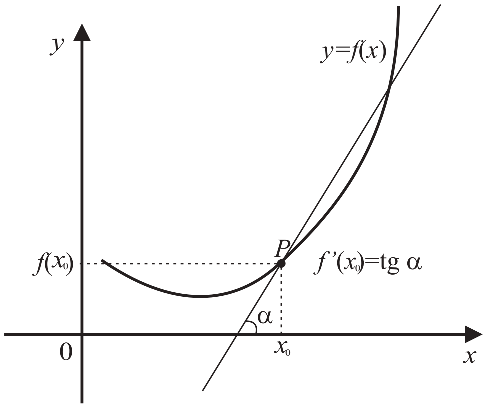
Geometricamente o quociente de Newton é igual ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x, f(x))$



Quando, para calcular o $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, fazemos x tender para x_0, estamos, no gráfico de f, fazendo o ponto Q tender para o ponto P.



Quando Q tende a P, as retas secantes que passam por P e Q se aproximam indefinidamente da reta que ocupa a posição (caso exista tal posição) limite dessas secantes. Essa reta é justamente a tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $P = (x_0, f(x_0))$. Assim, $f'(x_0)$ é o coeficiente angular dessa reta tangente.



Exemplo 77. *Consideremos a função $f(x) = x^2$, definida em $\mathbb{R}$, e mostremos que, em cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, a sua derivada existe e é dada por $f'(x_0) = 2x_0$.*

A função f é derivável em x_0 se existir o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o qual é dado por

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x + x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Exemplo 78. *Consideremos a função f definida por $f(x) = |x|$ para $x \in \mathbb{R}$. Mostremos que f é derivável em todo ponto $x_0 \neq 0$, mas não é derivável em $x_0 = 0$.*

Comecemos supondo que $x_0 > 0$ e calculemos

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Como $x_0 > 0$ e $x \to x_0$, podemos supor que no limite acima os valores de x sejam sempre positivos, de modo que $f(x) = |x| = x$. Portanto,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1 = f'(x_0).$$

Argumentando de maneira análoga, mostra-se que se $x_0 < 0$ então $f'(x_0) = -1$. Assim,

$$f'(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_0 > 0, \\ -1 & \text{se} \quad x_0 < 0. \end{cases}$$

Suponhamos $x_0 = 0$. Consideremos, primeiramente, a situação em que $x \to 0^+$, isto é, a aproximação é feita pela direita de 0. Tem-se, então,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 = f'_+(0).$$

De modo análogo, mostra-se que $f'_-(0) = -1$. Consequentemente, f não é derivável em 0, pois as derivadas laterais existem, mas não são iguais. Esse exemplo nos mostra que existem funções contínuas que podem não ser deriváveis em todos os pontos de seus domínios. No entanto, temos o seguinte resultado.

Teorema 50. *Se uma função for derivável em um ponto então ela será contínua nesse ponto.*

Demonstração. Suponhamos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ seja derivável em um ponto $x_0 \in I$. Devemos mostrar que f é contínua em tal ponto. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \left[\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) (x-x_0) \right] \\ &= \left[\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) \right] \cdot \left[\lim_{x\to x_0} (x-x_0) \right] \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Então $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, o que mostra ser f contínua em x_0. □

Exemplo 79. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \textit{ for racional}, \\ 1 & \textit{se } x \textit{ for irracional}. \end{cases}$$

Essa função não é contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}$. Assim, pelo teorema anterior, f não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$. Observemos que f é identicamente 0 em $\mathbb{Q}$ e identicamente 1 em $\mathbb{Q}^c$ e ambos são densos em $\mathbb{R}$.

A título de informação, notemos que existem funções, as quais não serão exibidas aqui, que apesar de serem contínuas em todos os pontos de seus domínios, não são deriváveis em nenhum ponto. Informações adicionais sobre esse fenômeno podem ser encontradas no apêndice deste capítulo.

2 Regras de Derivação

Exibamos um exemplo que nos dará uma regra para a derivação de potências.

Exemplo 80. *Inicialmente, recordemos a identidade:*

$$(x - x_0)(x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + x^{m-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{m-2} + x_0^{m-1}) = x^m - x_0^m,$$

quaisquer que sejam os números reais x e x_0 e m inteiro positivo. Pode-se demonstrá-la, sem muita dificuldade, por indução. A seguir, consideremos a função $f(x) = x^m$, para $x \in \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + x^{m-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{m-2} + x_0^{m-1}$$

de modo que essa última expressão possui m parcelas. Fazendo $x \to x_0$ obteremos

$$\begin{gathered} x^{m-1} \to x_0^{m-1} \\ x^{m-2}x_0 \to x_0^{m-1} \\ \vdots \\ xx_0^{m-2} \to x_0^{m-1} \end{gathered}$$

e assim

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} (x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + x^{m-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{m-2} + x_0^{m-1}) \\ &= mx_0^{m-1}. \end{aligned}$$

Isso nos leva à regra de derivação

$$\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$$

qualquer que seja o número natural m. Deve-se observar que esta regra continua válida para qualquer número real m. Provaremos isso, oportunamente.

A seguir, apresentaremos várias proposições que nos fornecerão regras para derivar funções que são construídas a partir de outras funções deriváveis.

Proposição 9. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Então a função $kf : I \to \mathbb{R}$ é derivável e sua derivada é dada por $(kf)'(x) = kf'(x)$, qualquer que seja a constante k.*

Demonstração. Construamos o quociente de Newton de kf em um ponto x_0:

$$\frac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} = k\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Daí, segue-se facilmente que $(kf)'(x) = kf'(x)$. □

Proposição 10. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto x_0, tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Então a função $\frac{1}{f} : I \to \mathbb{R}$, dada por $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$, é derivável em x_0 e sua derivada nesse ponto é dada por $(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$.*

Demonstração. O quociente de Newton para $\frac{1}{f}$ em x_0 é dado por

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Observando que a diferenciabilidade de f implica em continuidade, teremos $f(x) \to f(x_0)$ e daí $\frac{1}{f}$ é derivável em x_0 com

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}.$$

□

Proposição 11. *Seja m um inteiro positivo. Então a função $f(x) = x^{-m}$ é derivável em $x \neq 0$ e sua derivada é dada por $f'(x) = -mx^{-m-1}$*

Demonstração. Esta regra é um simples corolário da anterior, pois $f(x) = \frac{1}{x^m}$. Portanto,

$$f'(x) = -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

□

Proposição 12. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável e injetiva no intervalo aberto I. Então a função inversa $f^{-1} : J \to I$, definida no intervalo aberto $J = f(I)$, é derivável em todo ponto $x \in J$ e sua derivada é dada por*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

com $x = f(y)$.

Demonstração. Sejam $x \neq x_0$ pontos de J e façamos $y = f^{-1}(x)$ e $y_0 = f^{-1}(x_0)$. Como f é injetiva, tem-se $y \neq y_0$. Sendo f contínua em I, f^{-1} é contínua em J e assim $x \to x_0$ se, e somente se, $y \to y_0$. Portanto,

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{1}{\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}}$$

donde se conclui a regra $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$. □

Posteriormente, provaremos que, se $f'(x) > 0$ (respectivamente $f'(x) < 0$), para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente (respectivamente, decrescente). Assim, na proposição anterior, a hipótese de f ser injetiva poderia ser substituída por $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$, para todo $x \in I$.

Proposição 13. *A função $g(x) = x^{\frac{1}{m}}$, definida para $x > 0$, em que m é um inteiro positivo, é derivável e a sua derivada é dada por $g'(x) = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$.*

Demonstração. Seja f a função definida para $x > 0$ por $f(x) = x^m$. Vê-se, facilmente, que a função g é a inversa da função f e elas se enquadram nas hipóteses da proposição anterior. Fazendo $f^{-1}(x) = g(x) = x^{\frac{1}{m}}$ e $y = f^{-1}(x)$, teremos $y = x^{\frac{1}{m}}$. Daí,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{my^{m-1}} = \frac{1}{m(x^{\frac{1}{m}})^{m-1}} = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}.$$

□

A próxima proposição mostra que a derivada da soma é a soma das derivadas.

Proposição 14. *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in I$. Então a função $f + g$ é derivável em x_0 e sua derivada é dada por*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demonstração. Como f e g são deriváveis em x_0, existem os limites

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Assim, o resultado segue de

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

□

Usando as proposições 9 e 14, pode-se mostrar facilmente que se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em $x_0 \in I$, então a função $f - g$ é derivável em x_0 e sua derivada é dada por

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

A proposição a seguir fornece a regra de derivação do produto de funções.

Proposição 15. *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in I$. Então a função produto $fg : I \to \mathbb{R}$, definida por $(fg)(x) = f(x)g(x)$, é derivável em x_0 e sua derivada é dada por*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Demonstração. Os limites

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

existem, pois f e g são deriváveis em x_0. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Desde que g é contínua em x_0, existe o limite do quociente de Newton de fg em x_0, quando x tende a x_0, o qual é dado por

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

□

Proposição 16. *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in I$, com $g(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Então a função $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$, definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ é derivável em x_0 e sua derivada é dada por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Demonstração. Segue-se da proposição 10 que a função $\frac{1}{g} : I \to \mathbb{R}$ definida por $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$ é derivável. Agora, usando a proposição 15, concluímos que a função $\frac{f}{g}$ é derivável, pois $\frac{f}{g} = f . \frac{1}{g}$ e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f.\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left[-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}\right] \\
&= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}
\end{aligned}$$

□

O teorema 51, no qual será apresentada a regra da cadeia, nos fornecerá um maneira de calcular a derivada da função composta de duas funções deriváveis. Para demonstrá-lo necessitaremos do seguinte resultado devido a Carathéodory.

Lema 5. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo I. Então f é derivável em $c \in I$ se, e somente se, existir uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, contínua em c, que satisfaz*

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) \tag{9.1}$$

para todo $x \in I$. Nesse caso, teremos $\varphi(c) = f'(c)$.

Demonstração. Suponhamos que $f'(c)$ exista. Podemos então, definir uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{se} \quad x \neq c,\ x \in I \\ f'(c) & \text{se} \quad x = c \end{cases} \tag{9.2}$$

A continuidade de φ em c decorre de $\lim_{x\to c} \varphi(x) = f'(c)$. Se $x = c$, ambos os membros da expressão em (9.1) serão iguais a 0. Se $x \neq c$ podemos usar a expressão (9.2) para concluir que (9.1) é verdadeira. Reciprocamente, suponhamos que exista uma função φ, contínua em c, satisfazendo (9.1). Se $x - c \neq 0$ podemos escrever

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Em virtude da continuidade de φ em c, teremos $\lim_{x\to c} \varphi(x) = \varphi(c)$ e daí

$$\varphi(c) = \lim_{x\to c} \varphi(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Portanto, f é derivável em c e $f'(c) = \varphi(c)$, o que conclui a demonstração do teorema. □

Vejamos a regra da cadeia.

Teorema 51. (Regra da Cadeia) *Sejam $g : I \to \mathbb{R}$ e $f : J \to \mathbb{R}$ funções, I e J intervalos de $\mathbb{R}$, tais que $f(J) \subset I$. Se f for derivável em $c \in J$ e se g for derivável em $f(c)$ então a função composta $g \circ f$ é derivável em c e*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c). \tag{9.3}$$

Demonstração. Desde que $f'(c)$ existe, o lema 5 nos diz que existe uma função φ, definida em J, tal que φ é contínua em c e $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c)$, para $x \in J$ com $\varphi(c) = f'(c)$. Pelo mesmo motivo, desde que $g'(f(c))$ existe, podemos encontrar uma função ψ, definida em I, tal que ψ é contínua em $d = f(c)$ e $g(y) - g(d) = \psi(y)(y-d)$, para $y \in I$ com $\psi(d) = g'(d)$. Fazendo $y = f(x)$ e $d = f(c)$, obtemos

$$g(f(x)) - g(f(c)) = \psi(f(x))(f(x) - f(c)) = [(\psi \circ f)(x) \cdot \varphi(x)](x-c),$$

para todo $x \in J$ tal que $f(x) \in I$. Como $(\psi \circ f) \cdot \varphi$ é contínua em c e seu valor em c é $g'(f(c)) \cdot f'(c)$, aplicando, novamente, o lema 5, obtemos a igualdade (9.3). $\square$

Exemplo 81. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I e $g(y) = y^n$, para $y \in \mathbb{R}$ e n um número natural fixo. Observemos que $g'(y) = ny^{n-1}$ e assim podemos usar a regra da cadeia para obter*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

para todo $x \in I$. Daí,

$$(f^n)'(x) = n[f(x)]^{n-1} f'(x).$$

Exemplo 82. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I tal que $f(x) \neq 0$ e $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Defina $g(y) = \frac{1}{y}$ para $y \neq 0$. Um cálculo simples nos mostra que $g'(y) = -\frac{1}{y^2}$. Portanto, para $x \in I$, temos*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Exemplo 83. *Consideremos a função $f(x) = |x|$ que é derivável em todos os valores $x \neq 0$ e, como é fácil ver, $f'(x) = 1$ se $x > 0$ e $f'(x) = -1$ se $x < 0$. Consequentemente, se $g : I \to \mathbb{R}$ for uma função derivável em todos os pontos x tais que $g(x) \neq 0$, teremos*

$$|g|'(x) = \begin{cases} g'(x) & se \quad g(x) > 0 \\ -g'(x) & se \quad g(x) < 0 \end{cases}$$

O próximo resultado é o *Teorema da Função Inversa.* Antes de demonstrá-lo, relembremos alguns fatos. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente (decrescente) e contínua no intervalo I. Então sua imagem é um intervalo J e sua inversa $g = f^{-1} : J \to I$ é contínua e estritamente crescente (decrescente). Daí, as funções f e g satisfazem a relação $g(f(x)) = x$ para todo $x \in I$.

Teorema 52. (Teorema da Função Inversa) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente crescente (decrescente) no intervalo I e sejam $J = f(I)$ e $g : J \to I$ a sua inversa. Se f for derivável em $c \in I$ e $f'(c) \neq 0$ então g é derivável em $d = f(c)$ e*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}.$$

Demonstração. Usando o lema 5, encontramos uma função φ, definida em I, tal que φ é contínua em c e $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$, para $x \in I$ e $\varphi(c) = f'(c)$. Como $\varphi(c) = f'(c) \neq 0$ e φ é contínua em c, existe um intervalo aberto $(c-r, c+r)$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, para todo $x \in I \cap (c-r, c+r)$. Seja $A = f(I \cap (c - r, c + r))$ de modo que a função inversa g satisfaz $f(g(y)) = y$, para todo $y \in A$, e observando que $x = g(y)$ e $c = g(d)$, obtemos

$$y - d = f(g(y)) - f(c) = \varphi(g(y)) \cdot (g(y) - g(d)).$$

Como $\varphi(g(y)) \neq 0$, para $y \in A$ teremos

$$g(y) - g(d) = \frac{1}{\varphi(g(y))} \cdot (y - d).$$

Em virtude da continuidade de $\frac{1}{\varphi \circ g}$ em d, e usando o lema 5, concluímos que $g'(d)$ existe e

$$g'(d) = \frac{1}{\varphi(g(d))} = \frac{1}{\varphi(c)} = \frac{1}{f'(c)}$$

o que conclui a demonstração do teorema da função inversa. □

Observemos que se retirarmos a hipótese de que a derivada de f seja diferente de zero em todos os pontos de seu domínio, a conclusão do teorema da função inversa não se verifica. Basta considerar a função $f(x) = x^3$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Notemos que tal função é estritamente crescente e derivável, no entanto a derivada de f, dada por $f'(x) = 3x^2$, se anula em $x = 0$. Isso faz com que a sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ não seja derivável em $x = 0$.

3 Derivadas de Ordem Superior

Quando uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em todos os pontos de I, podemos definir a função

$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Essa função é chamada *função derivada* ou *derivada de primeira ordem* de f. Se, por sua vez, a função f' for derivável em I, podemos considerar a função $f'' : I \to \mathbb{R}$ que a cada ponto $x \in I$ associa a derivada de f' em x. A função f'' é chamada *derivada de segunda ordem* de f. Se a função f'' for derivável em I, podemos considerar $f''' : I \to \mathbb{R}$ que a cada ponto $x \in I$ associa a derivada de f'' em x. A função f''' é chamada *derivada de terceira ordem* de f. Prosseguindo dessa maneira, e sempre que possível, podemos definir a derivada de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, de f. Para efeito de notação, a derivada de n-ésima ordem de f é denotada por $f^{(n)}$, quando $n \geq 4$.

Definição 55. *Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^n em I se $f^{(m)} : I \to \mathbb{R}$ existir e for contínua para todo $m = 1, \ldots, n$. Usamos a notação $f \in C^n(I)$.*

Observemos que

$$\cdots \subset C^{n+1}(I) \subset C^n(I) \subset \cdots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I)$$

e cada inclusão é própria.

Definição 56. *Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ em I se $f^{(n)}I :\to \mathbb{R}$ existir e for contínua para todo $n \in \mathbb{N}$. Usamos a notação $f \in C^\infty(I)$.*

Note que

$$C^\infty(I) = \cap_{n=1}^{\infty} C^n(I).$$

Exemplo 84. *Se $f(x) = x^5$ com $x \in \mathbb{R}$, então*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^4 \\
f''(x) &= 20x^3 \\
f'''(x) &= 60x^2 \\
f^{(4)(x)} &= 120x \\
f^{(5)(x)} &= 120 \\
f^{(6)(x)} &= 0 \quad e \\
f^{(n)(x)} &= 0,
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 6$.

Exemplo 85. *Se $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x > 0$, então*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{x^3} \\
f'''(x) &= -\frac{6}{x^4} \\
f^{(4)(x)} &= \frac{24}{x^5}
\end{aligned}$$

4 Exercícios Resolvidos

1. Usando a definição, calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$, para $x > 0$.

   Solução. Escrevamos o quociente de Newton da função f na forma

   $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

   Como não podemos, de imediato, fazer o $h \to 0$, pois recairíamos em uma indeterminação, façamos uma racionalização para obter

   $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

   Fazendo $h \to 0$ nessa última expressão, obteremos a derivada de f em $x > 0$ como sendo

   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

   Veja o que acontece se $x = 0$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um certo ponto $c \in \mathbb{R}$. Verifique que

   $$f'(c) = \lim \left[n \left(f \left(c + \frac{1}{n} \right) - f(c) \right) \right].$$

   No entanto, a existência desse limite não implica que f seja derivável em c.

   Solução. Inicialmente, suponhamos que f seja derivável em c. Logo, o limite

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

   existe e é igual à derivada $f'(c)$. Fazendo $h = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, tem-se que $h \to 0$ se, e somente se, $n \to +\infty$. Então é válida a expressão

   $$f'(c) = \lim \left[n \left(f \left(c + \frac{1}{n} \right) - f(c) \right) \right].$$

   Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Se $c \in \mathbb{Q}$ teremos $c + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ de modo que $f(c + \frac{1}{n}) - f(c) = 0$. Assim

   $$\lim \left[n \left(f \left(c + \frac{1}{n} \right) - f(c) \right) \right] = 0.$$

De maneira análoga, prova-se essa igualdade quando $c \notin \mathbb{Q}$. Isto mostra que esse limite pode existir sem que a função seja derivável. Em verdade, a função estudada neste exemplo não é, sequer, contínua.

3. Seja I um intervalo aberto. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita de classe C^1 se ela for derivável e sua derivada $f' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ for contínua. Mostre que se $f(I) \subset J$, J intervalo aberto de $\mathbb{R}$, e se $g : J \to \mathbb{R}$ também for de classe C^1 então a função composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^1.

   Solução. Inicialmente observemos que as funções $f' : I \to \mathbb{R}$ e $g' : J \to \mathbb{R}$ são contínuas. Sejam $x \in I$ e uma sequência (x_n) em I convergindo para x. Como $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, teremos que $x_n \to x \Rightarrow f'(x_n) \to f'(x)$ implica $g'(f(x_n)) \to g'(f(x))$. Logo, $g'(f(x_n)) \cdot f'(x_n) \to g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Consequentemente $(g \circ f)'(x_n) \to (g \circ f)'(x)$ e assim a função $(g \circ f)'$ é contínua, isto é, $g \circ f$ é de classe C^1.

5 Exercícios Propostos

1. Seja I um intervalo com centro 0, isto é, 0 é o ponto médio das extremidades de I. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ chama-se *par* quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in I$ e *ímpar* quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in I$. Prove que se f for par, suas derivadas de ordem par (quando existirem) serão funções pares e suas derivadas de ordem ímpar (quando existirem) serão funções ímpares. Observe, em particular, que estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie um resultado análogo para f ímpar.

2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $c \in I$ é um *ponto crítico* de f se $f'(c) = 0$. Mostre que, se f for de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma sequência de pontos críticos de f, mas $f'(0) > 0$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq c \\ mx + h & \text{se} \quad x > c \end{cases}$$

   em que m e h são constantes reais. Determinar os valores de m e h de modo que f seja derivável em c. Observemos que tais valores dependem de c.

4. Faça como no exercício anterior, considerando a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se} \quad |x| > c, \\ ax^2 + b & \text{se} \quad |x| \leq c. \end{cases}$$

5. Calcule a derivada $f'(x)$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Seria possível calcular $f''(x)$ em todo ponto $x \in \mathbb{R}$?

6. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

Mostre que f é derivável em 0, mas é descontínua em todos os pontos exceto 0.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $|x - f(x)| \leq x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $f(0) = 0$;

   (b) Mostre que $f'(0)$ existe e encontre o seu valor. Você é capaz de exibir uma função que satisfaça essa propriedade?

8. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for derivável e Lipschitziana, então $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será uma função limitada.

9. Dada $f(x) = |x|^3$ calcule $f'(x), f''(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e mostre que $f^{(3)}(0)$ não existe. A derivada $f^{(3)}(0)$ existe para $x \neq 0$?

10. Determine a derivada $g'(x)$ em função da derivada de $f'(x)$ se

    (a) $g(x) = f(x^2)$

    (b) $g(x) = f[f(x)]$

    (c) $g(x) = f(x) + f(x^2) + f(x^3)$.

11. Se $f + g$ for derivável em c então f e g são deriváveis em c. Falso ou verdadeiro? Justifique.

12. (a) Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, encontre uma função g tal que $g' = f$. Existem outras que satisfaçam esta igualdade?

    (b) Se
    $$f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}$$
    encontre uma função g tal que $g' = f$.

13. (a) O número a é chamado raiz dupla de um polinômio f se $f(x) = (x-a)^2 g(x)$, para algum polinômio g. Mostre que a é raiz dupla de f se, e somente se, a for raiz tanto de f como de f'.

    (b) Quando $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ possui raiz dupla? Forneça uma interpretação geométrica.

14. Suponhamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja derivável. Dado $c \in [a,b]$, mostre que existe uma sequência (x_n) em $[a,b], x_n \neq c$, tal que $f'(c) = \lim f(x_n)$. Isso implica que f é contínua?

6 Apêndice

Funções Contínuas sem Derivadas

As funções que usualmente surgem no estudo da Análise Matemática são deriváveis. Esses são os casos das funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas etc. Os raros exemplos que aparecem nos exercícios e aplicações elementares são razoavelmente bem comportados como, por exemplo, a função $f(x) = |x|$ que deixa de ser derivável apenas em um ponto. Portanto, é razoável pensar que se o gráfico de uma função não admitir reta tangente em alguns pontos, eles constituirão um conjunto bastante pequeno. No caso $f(x) = |x|$, esse conjunto será $\{0\}$. Se considerarmos a função periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de período 2 tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -x+2 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

verifica-se que ela deixa de ser derivável em um conjunto infinito de pontos (qual?). Contudo, esse conjunto é enumerável. A seguir, transcreveremos um trecho, devido a Mello[1] que ilustra de maneira bastante clara o fenômeno em que o gráfico de uma função contínua pode não admitir reta tangente em ponto algum, ou seja, o conjunto dos pontos em que uma função não possui derivada pode ser muito grande.

> A idéia de *curva contínua sem tangentes*, por exemplo, uma curva constituída só de "pontos angulosos", não condiz bem com a nossa intuição geométrica e seria de esperar que um tal objeto, na hipótese de sua existência, não passasse de um ente que vive apenas nas cabeças dos matemáticos, sem utilidade no mundo físico. Duplo engano nosso. Tais objetos, as *funções contínuas que não têm derivada em ponto algum*, não apenas existem como há um tipo importante de movimento, denominado *movimento browniano*, cuja trajetória é modelada matematicamente por uma curva contínua sem tangente.
>
> Em 1827, o botânico inglês Robert Brown (1773-1858), investigando o processo de fertilização de uma certa flor, notou, ao microscópio, que os grãos de pólen em suspensão na água apresentavam um rápido movimento desordenado[2]. Em 1905, Albert Einstein (1879-1955), escreveu um trabalho decisivo sobre o movimento browniano. Finalmente, na década de 1920, o matemático americano Norbert Wiener (1894-1964) iniciou uma teoria matemática do movimento browniano. Wiener deu

[1] Luis Fenando de Osório Mello, O Movimento Browniano e as Curvas sem Tangente.

[2] H.M. Nussenzveig, Curso de Física Básica, Vol. 2, Ed. Edgard Blücher Ltda., 1983.

> uma interpretação precisa à idéia de "movimento ao acaso" de uma partícula. Ele demonstrou, no contexto de seu modelo matemático, que a trajetória efetiva da partícula é uma curva contínua, porém, sem tangente em ponto algum. Fisicamente, o que se passa é que a partícula está, a cada instante, recebendo o impacto desordenado das moléculas do fluido, de tal modo que, em seu movimento, ela muda constantemente de direção, não possuindo, portanto, velocidade instantânea definida em ponto algum.
>
> O primeiro exemplo de função contínua sem derivada apareceu em 1834, dado por Benhard Bolzano (1781-1849). Em 1861, Riemann (1826-1866) apresentou o seu exemplo de uma função contínua que não tem derivada em ponto algum. Em 1872, Weierstrass (1815-1897) e, em 1930, Van der Waerden (1903-) deram mais exemplos destes objetos[3]

O exemplo apresentado por Weierstrass, veja Tichmarsh[4] é o de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por uma série. Mais precisamente, dados $0 < b < 1$ e a um inteiro positivo satisfazendo $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, está bem definida e é contínua. Mostra-se que ela é contínua e não-derivável em todos os pontos. Omitiremos suas demonstrações, haja vista que elas são profundamente técnicas. Veja Mello e Tichmarsh, previamente citados.

O(A) leitor(a) interessado(a) pode consultar os artigos de Bush[5] e Gandulfo[6] que estão relacionados com as observações precedentes.

[3]C.B. Boyer, História da Matemática, Ed. Edgard Blücher Ltda., 1974.

[4]E.C. Tichmarsh, Theory of Functions, Oxford University Press, 1939.

[5]K.A. Bush, Continuous functions without derivatives, The American Mathematical Monthly, Vol. 59, N. 4, April (1952) 222-225.

[6]Roberto O. Gandulfo, A Função de Marcinkiewicz, Matemática Universitária, N. 5, Junho (1987) 61-68.

Capítulo 10

O Teorema do Valor Médio e Aplicações

Este capítulo será dedicado ao estudo do comportamento das funções, para o qual faremos uso de derivadas. Nisso, o *Teorema da Média* ou *Teorema do Valor Médio* desempenhará um papel crucial.

1 Teorema do Valor Médio

Estudaremos nesta seção o *Teorema do Valor Médio* que é um resultado de extrema importância para a Análise Matemática, sendo a chave para a obtenção de resultados profundos como o *Teorema Fundamental do Cálculo*.

Comecemos com alguns conceitos e resultados preliminares.

Definição 57. *Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, em que I é um intervalo, possui um* máximo *(*mínimo*)* relativo*, ou* local*, em um ponto $c \in I$ se existir um número positivo r tal que $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$, para todo $x \in I \cap (c-r, c+r)$. Dizemos que f possui um* extremo relativo*, ou* local*, em $c \in I$ se c for um ponto de máximo ou mínimo relativo.*

O próximo resultado nos fornecerá uma justificativa para o processo no qual procuram-se extremos locais de uma função examinando os zeros de sua derivada.

Teorema 53. *Seja c um extremo local da função $f : I \to \mathbb{R}$ pertencente ao interior do intervalo I. Se f for derivável em c então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que c seja um ponto de máximo local. Como c pertence ao interior de I, existe $r > 0$ tal que $(c - r, c + r) \subset I$ e $f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in (c - r, c + r)$. Tomando $0 < h < r$ temos que

$$f(c + h) \leq f(c).$$

Assim,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0.$$

Fazendo $h \to 0$, obtemos $f'(c) \leq 0$. Agora, tomando $-r < h < 0$, prova-se de maneira análoga que $f'(c) \geq 0$. Portanto, $f'(c) = 0$. Se c for um mínimo local o procedimento será análogo e deixamos para o leitor fazer como exercício. □

Definição 58. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto c pertencente ao interior do intervalo. Diz-se que c é* ponto crítico *de f se $f'(c) = 0$.*

Definição 59. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$, em que I é um intervalo, e $c \in I$. Dizemos que c é um ponto de* máximo *(*mínimo*)* global *se $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$, para todo $x \in I$.*

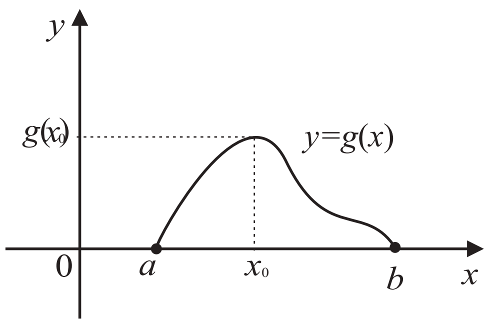
O próximo teorema será utilizado na demonstração do teorema do valor médio.

Teorema 54. (Teorema de Rolle) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b). Se $f(a) = f(b) = 0$ então $f'(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in (a,b)$.*

Demonstração. Se f for uma função constante nada há a demonstrar pois, nesse caso, a derivada de f será zero em todos os pontos de (a,b). Suponhamos que f não seja constante. Já que $f(a) = f(b) = 0$, existirá um ponto $x \in (a,b)$ tal que $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$. Se acontecer o primeiro caso, a função, que possui máximo em $[a,b]$, por ser contínua, atingirá máximo em $x_0 \in (a,b)$. Pelo teorema 53 teremos $f'(x_0) = 0$. No caso em que $f(x) < 0$ em algum $x \in (a,b)$ a função f atingirá mínimo em algum $x_0 \in (a,b)$ e assim $f'(x_0) = 0$ e o teorema está completamente demonstrado. □

Michel **Rolle** nasceu a 21 de abril de 1652, em Ambert, Basse-Auvergne, França e faleceu a 8 de novembro de 1719, em Paris, França. Rolle trabalhou em análise diofantina, álgebra e geometria. Ele publicou *Traité d'algèbre* sobre teoria de equações. Outra contribuição dele para a matemática foi a invenção da notação utilizada hoje para a raiz n-ésima de x.

Uma interpretação geométrica desse teorema é apresentada na figura a seguir.



Exemplo 86. *Dada a função*

$$f(x) = x^3 - 12x,$$

definida no intervalo $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$, *determinemos* x_0 *no intervalo aberto* $(0, 2\sqrt{3})$ *tal que* $f'(x_0) = 0$.

Solução. Inicialmente, observemos que f é contínua em $[0, 2\sqrt{3}]$ e derivável em $(0, 2\sqrt{3})$. Além disso, $f(0) = f(2\sqrt{3}) = 0$. Podemos, assim, usar o teorema de Rolle para garantir que existe x_0 no intervalo aberto $(0, 2\sqrt{3})$ tal que $f'(x_0) = 0$. Como $f'(x) = 3x^2 - 12$ o ponto x_0 será obtido fazendo $3x^2 - 12 = 0$ o que nos dá $x = \pm 2$. Então $x_0 = 2$ é o ponto procurado.

Exemplo 87. *Verifique se o teorema de Rolle se aplica às funções*

(a) $f(x) = \frac{x^2-4x}{x-2}$.

(b) $g(x) = \frac{x^2-4x}{x+2}$.

no intervalo $[0, 4]$

Solução

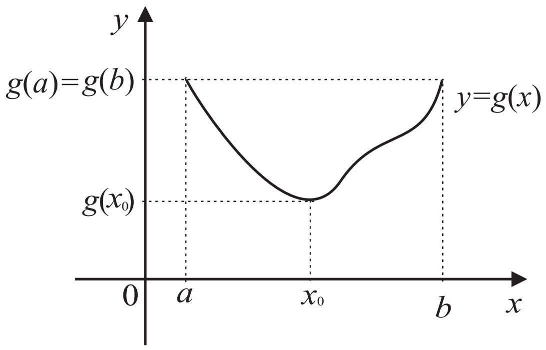
(a) Observemos que $f(0) = f(4) = 0$, mas f não está definida em $x = 2$ e daí o referido teorema não se aplica.

(b) Novamente $f(0) = f(4) = 0$ e f não está definida em $x = -2$, um ponto que não pertence ao intervalo $[0, 4]$. Assim, f é contínua em $[0, 4]$. Além disso,
$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$$
existe para todo x pertencente ao intervalo aberto $(0, 4)$. Assim, o teorema de Rolle se aplica e o valor procurado, que anula f' no intervalo dado, é $x_0 = 2(\sqrt{3} - 1)$, a raiz positiva de $x^2 + 4x - 8 = 0$.

Corolário 12. *Seja* g *uma função contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a, b). *Suponhamos que* $g(a) = g(b)$. *Então existe* $x_0 \in (a, b)$ *tal que* $g'(x_0) = 0$.

Demonstração. Definamos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = g(x) - \alpha$ onde α é o valor comum de g em a e b. Portanto, $f(a) = f(b) = 0$. Como f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), pelo teorema de Rolle, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$ e como $f'(x) = g'(x)$ tem-se que $g'(x_0) = 0$, o que completa a demonstração do corolário. □

Veja a figura a seguir para ter uma visualização geométrica do corolário precedente.



Teorema 55. (Teorema do Valor Médio) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b). Então existe pelo menos um ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demonstração. Inicialmente definamos a função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Temos que F é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $F(a) = F(b) = 0$. Assim, podemos aplicar o teorema de Rolle à função F em $[a,b]$. Portanto, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Assim,

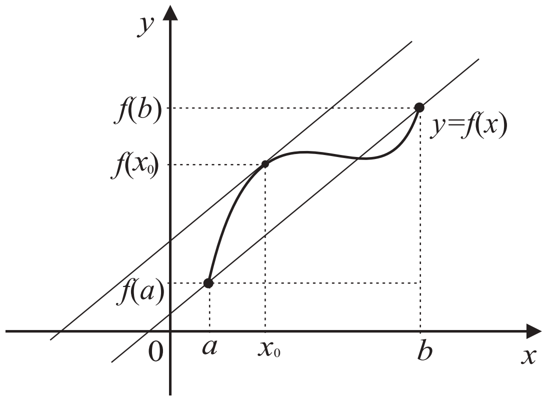
$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

que é exatamente o que gostaríamos de demonstrar. □

Observe que, do ponto de vista geométrico, a conclusão do teorema do valor médio nos diz que existe um ponto x_0, pertencente ao interior do intervalo $[a,b]$, tal que a inclinação $f'(x_0)$ da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$ é igual à inclinação

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

da reta ligando os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ que são os pontos inicial e terminal do gráfico de f, conforme podemos observar na seguinte figura.



Todos os resultados do restante deste capítulo são consequências do teorema do valor médio.

Corolário 13. *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função derivável com $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é constante em (a, b).*

Demonstração. Sejam x e y dois pontos quaisquer de (a, b) com $x < y$. Pelo teorema do valor médio, existe $x_0 \in (x, y)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

e como $f'(x_0) = 0$, concluímos que $f(x) = f(y)$. Como x e y são arbitrários segue-se que f é constante em (a, b). □

O próximo corolário será importante no estudo das primitivas de uma dada função, tema que será discutido posteriormente.

Corolário 14. *Suponhamos que as funções f e g sejam contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, deriváveis no intervalo aberto (a, b) e que $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$. Então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demonstração. Basta observar que $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$ é equivalente a $(f - g)'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$. Logo, pelo corolário anterior, $f - g$ é constante em $[a, b]$, ou seja, existe uma constante C tal que $f(x) - g(x) = C$, para qualquer $x \in [a, b]$, o que conclui a demonstração do corolário. □

A derivada de uma função pode existir em um certo intervalo $[a, b]$ sem que ela seja contínua em $[a, b]$. No entanto, mesmo que f' não seja contínua, existe um *Teorema do Valor Médio para Derivadas* o qual será demonstrado com o auxílio do seguinte lema.

Lema 6. *Seja f uma função derivável em $[a, b]$ com $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) < f(a) \;\; \textit{para} \;\; a < x < a + \delta$$

e

$$f(x) < f(b) \ \ para \ \ b - \delta < x < b.$$

Demonstração. Suponhamos que $f'(a) < 0$ e que, para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $a < x_n < a + \frac{1}{n}$ tal que $f(x_n) \geq f(a)$. Assim,

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \geq 0$$

e desde que $f'(a)$ existe, teremos $f'(a) \geq 0$ o que contradiz a hipótese $f'(a) < 0$. Isso demonstra a primeira parte do lema. A outra parte é feita de maneira análoga. □

Teorema 56. (Teorema do Valor Intermediário para Derivadas.) *Suponhamos que f seja derivável em $[a,b], f'(a) \neq f'(b)$ e μ seja um número real entre $f'(a)$ e $f'(b)$. Então $f'(c) = \mu$ para algum $\mu \in [a,b]$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f'(a) < \mu < f'(b)$ e definamos

$$g(x) = f(x) - \mu x, \ \ \text{para} \ \ x \in [a,b].$$

Daí, $g'(a) = f'(a) - \mu < 0$ e $g'(b) = f(b) - \mu > 0$. Como g é contínua em $[a,b]$, g atinge mínimo em algum $c \in [a,b]$. Pelo lema 6, existe $\delta > 0$ tal que

$$g(x) < g(a), a < x < a + \delta$$

e

$$g(x) < g(b), b - \delta < x < b.$$

Consequentemente, $c \neq a$ e $c \neq b$. Portanto, $a < c < b$ e assim $g'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = \mu$. □

2 Estudo do Comportamento de Funções

Definição 60. *Diz-se que $f : I \to \mathbb{R}$ é* crescente (decrescente) *em I se $x,\ y \in I$ com $x < y$ implica que $f(x) < f(y)(f(x) > f(y)$.*

Definição 61. *Diz-se que $f : I \to \mathbb{R}$ é* não-decrescente (não-crescente) *em I se $x,\ y \in I$ com $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)(f(x) \geq f(y)$.*

O teorema seguinte, relativo à funções deriváveis em intervalos, estabelece uma relação entre o sinal da derivada e o crescimento de uma função.

Teorema 57. *Seja f uma função real derivável em um intervalo aberto I.*

(a) *Se* $f'(c) > 0$*, para todo* $x \in I$*, então* f *é crescente em* I*.*

(b) *Se* $f'(c) < 0$*, para todo* $x \in I$*, então* f *é decrescente em* I*.*

Demonstração. (a) Demonstraremos somente a parte (a). A demonstração da parte (b) é análoga. Suponhamos que $f'(c) > 0$ para todo $x \in I$. Sejam $a,\ b \in I$ com $a < b$. Aplicando o teorema do valor médio para f no intervalo $[a, b]$, encontramos $c \in (a, b)$ com

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como $f'(c) > 0$ e $b - a > 0$, segue que $f(b) - f(a) > 0$, isto é, $f(b) > f(a)$. Portanto, f é crescente. □

Exemplo 88. *A função*

$$f(x) = x^5 + 20x - 6$$

é crescente para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$*.*

De fato, basta observar que

$$f'(x) = 5x^4 + 20 > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 89. *A função*

$$f(x) = 1 - x^3 - x^7$$

é uma função decrescente para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$*.*

Solução. Observemos que

$$f'(x) = -3x^2 - 7x^6 < 0$$

para todo $x \neq 0$. Assim, f é decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Além disso, se $x < 0$, tem-se que $f(x) > 1 = f(0)$ e, se $x > 0$, tem-se $f(0) = 1 > f(x)$. Então f é decrescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 90. *A função*

$$f(x) = 4x^3 + x - 3$$

possui apenas um zero.

Solução. De fato, como $f(0) = -3$ e $f(1) = 2$, pelo teorema do valor intermediário, existe um ponto $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$. Desde que

$$f'(x) = 12x^2 + 1 > 0,$$

tem-se que f é crescente em todo o $\mathbb{R}$. Então f não pode ter dois valores reais x para os quais $f(x) = 0$.

O próximo corolário fornece uma maneira de encontrar pontos de máximo ou de mínimo relativos de funções deriváveis definidas em intervalos.

Corolário 15. (Teste da Derivada Primeira) *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável no intervalo aberto (a, b) e $c \in (a, b)$ um ponto crítico de f.*

(i) *Se existir um intervalo aberto $(c-r, c+r) \subset (a, b)$ tal que $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c-r, c)$ e $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c, c+r)$ então f possui um máximo relativo em c.*

(ii) *Se existir um intervalo aberto $(c-r, c+r) \subset (a, b)$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c-r, c)$ e $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c, c+r)$ então f possui um mínimo relativo em c.*

Demonstração. Demonstremos o item (i). A demonstração do item (ii) é feita de maneira análoga e será deixada como exercício. Como $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in (c-r, c)$ segue do teorema anterior que f é não-decrescente em $(c-r, c)$ e, portanto, será também não-decrescente no intervalo $(c-r, c]$. Logo, $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in (c-r, c)$. Agora, segue de $f'(x) \leq 0$, para $x \in (c, c+r)$ que que f é não-crescente e $[c, c+r)$. Assim, $f(x) \leq f(c)$, para qualquer $x \in (c, c+r)$. Emtão c é ponto de máximo local de f. □

Teorema 58. (Teste da Derivada Segunda) *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, isto é, a derivada segunda de f, $f'' : (a, b) \to \mathbb{R}$, existe e é contínua. Suponhamos que $c \in (a, b)$ seja um ponto crítico de f.*

(i) Se $f''(c) < 0$ então c é ponto de máximo local

(ii) Se $f''(c) > 0$ então c é ponto de mínimo local.

Demonstração. Façamos a demonstração do item (i). Desde que $f'' : (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $f''(c) < 0$, existirá $r > 0$ tal que $(c-r, c+r) \subset (a, b)$ e $f''(x) < 0$, para todo $x \in (c-r, c+r)$. Ora, $f'(c) = 0$ e f' é decrescente em $(c-r, c+r)$, pois a segunda derivada de f, que é a derivada da derivada primeira, é negativa no referido intervalo. Portanto, se $x \in (c-r, c)$ tem-se $f'(x) > 0$ e, se $x \in (c, c+r)$, tem-se

$f'(x) < 0$ e assim, pelo teste da derivada primeira, c é ponto de máximo local. A demonstração do item (ii) é feita de maneira análoga. $\square$

Há casos de funções que embora tenham derivadas segundas contínuas, o teste da segunda derivada se aplica. Isso acontece quando a função f é tal que $f'(c) = f''(c) = 0$. É o que acontece, por exemplo, com a função $f(x) = x^4$, cujo único ponto crítico é $x_0 = 0$, sendo este um ponto de mínimo de f, o que não se pode concluir apenas usando o teste da segunda derivada, já que $f'(0) = f''(0) = 0$. No capítulo 12, no qual estudaremos a fórmula de Taylor, apresentaremos, como consequência dessa fórmula, um terceiro teste para determinação de pontos de máximos e de mínimos, que é uma generalização do teste da derivada segunda e sanará essa dificuldade.

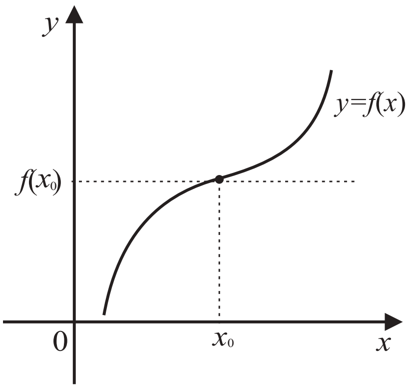
Existem casos nos quais um dado ponto crítico de uma função não é ponto de mínimo ou de máximo local. Essa é a situação do ponto $x_0 = 0$ para a função $f(x) = x^3$. Nesse caso dizemos que $x_0 = 0$ é um ponto de inflexão horizontal de $f(x) = x^3$. Esse conceito será estabelecido a seguir.

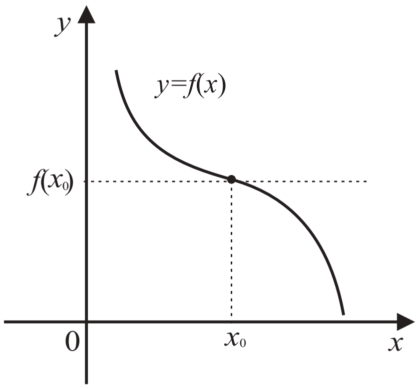
Definição 62. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(x_0) = 0$ para algum x_0 pertencente ao interior do intervalo I. Diz-se que o ponto crítico x_0 é um* ponto de inflexão horizontal *de f se existir um número positivo ε tal que*

(a) $f(x) < f(x_0)$ se $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ e $f(x) > f(x_0)$ se $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ou

(b) $f(x) > f(x_0)$ se $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ e $f(x) < f(x_0)$ se $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Veja as figuras abaixo para uma interpretação geométrica dos pontos de inflexão.





Proposição 17. *Sejam $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função com derivada segunda no intervalo (a, b) e $c \in (a, b)$ um ponto crítico de f. Se existe $r > 0$ tal que $(c - r, c + r) \subset (a, b)$ e*

(a) $f''(x) < 0$ para $x \in (c - r, c)$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (c, c + r)$

ou

(b) $f''(x) > 0$ *para* $x \in (c-r, c)$ *e* $f''(x) < 0$ *se* $x \in (c, c+r)$

então c *é um ponto de inflexão horizontal de* f*.*

Demonstração. Suponhamos que f seja uma função satisfazendo a condição (a) da proposição. Como $f''(x) < 0$ se $x \in (c-r, c)$, tem-se que f' é decrescente em $(c-r, c)$. Além disso, $f'(c) = 0$, logo, $f'(x) > 0$, para $x \in (c-r, c)$. Do mesmo modo, segue de $f''(x) > 0$ para $x \in (c, c+r)$, que f' é crescente no intervalo $(c, c+r)$ e, como $f'(c) = 0$, temos $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, c+r)$. Concluímos, então, que f é crescente em $(c-r, c)$ e $(c, c+r)$. Sendo f contínua em $(c-r, c+r)$, f é crescente em tal intervalo. Logo, $f(x) < f(c)$, para $x \in (c-r, c)$ e $f(x) > f(c)$, para $x \in (c, c+r)$, isto é, c é ponto de inflexão horizontal de f. De maneira análoga chega-se a essa conclusão supondo-se que f satisfaz a condição (b). $\square$

Proposição 18. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* f *possui um único extremo local então tal ponto é também um ponto de extremo global.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponhamos que $x_0 \in I$ seja o único ponto de máximo local de f em I. Suponhamos que x_0 não seja ponto de máximo global em I. Então existe $x_1 \in I$, digamos maior do que x_0, tal que $f(x_1) > f(x_0)$. Considerando a função f restrita ao intervalo $[x_0, x_1]$, ela terá um ponto de mínimo, digamos $x_3 \in (x_0, x_1)$, e daí x_3 seria um outro extremo local, o que contraria a hipótese. Portanto, x_0 é também máximo global. Os outros casos podem ser demonstrados de maneira análoga. $\square$

Suponhamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua e derivável em (a, b). Sendo f contínua em um intervalo fechado e limitado, segue-se que ela atinge máximo e mínimo em $[a, b]$. Se tais extremos ocorrerem em pontos c no intervalo aberto (a, b) então $f'(c) = 0$. Caso eles não ocorram no interior de $[a, b]$, eles ocorrerão em uma (ou ambas) das extremidades a ou b. Assim, os candidatos a extremos de uma função como acima são os pontos críticos pertencentes ao intervalo aberto (a, b) e suas extremidades a e b.

Exemplo 91. *Consideremos a função*

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$$

contínua e derivável. Pela continuidade de f *ela atinge máximo e mínimo em* $[0, 2]$*. Os candidatos a extremos são os pontos 0, 2 e os pontos críticos de* f *situados no intervalo aberto* $(0, 2)$*. Determinemos tais pontos críticos. A derivada de* f *é*

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

de modo que seus pontos críticos serão obtidos resolvendo-se a equação

$$f'(x) = (3x + 1)(x - 1) = 0$$

cujas raízes são $-\frac{1}{3}$ *e* 1. *Como* $-\frac{1}{3}$ *não pertence ao intervalo considerado, só nos interessa o ponto crítico* 1. *Assim, devemos testar o conjunto de números* $\{0, 1, 2\}$ *para decidir qual é o máximo e qual é o mínimo.*

$$f(0) = 2, f(1) = 1, f(2) = 4.$$

Daí, segue-se que 1 é ponto de mínimo global ($f(1) = 1$ *é o valor mínimo de* f *em* $[0, 2]$*) e 2 é ponto de máximo global(*$f(2) = 4$ *é o valor máximo de* f *em* $[0, 2]$*).*

Exemplo 92. *Encontre dois números positivos* x *e* y *tais que sua soma seja igual a 2 e seu produto* xy *seja o máximo possível.*

Solução. Sejam x e y números positivos tais que $x + y = 2$. Desejamos maximizar o produto xy. Como $y = 2-x$, o problema reduz-se a encontrar o máximo da função $f(x) = x(2 - x) = 2x - x^2$, para $0 < x < 2$. O único ponto crítico de tal função é obtido fazendo-se $f'(x) = 2 - 2x = 0$ e assim $x = 1$. Além disso, podemos usar o teste da derivada segunda e obter $f''(x) = -2 < 0$, donde se conclui que 1 é ponto de máximo local e, em virtude da proposição 18, ele é ponto de máximo global. Portanto, $y = 1$ e os números procurados são $x = y = 1$.

Exemplo 93. *Determinemos os pontos críticos da função*

$$f(x) = x(x - 1)^3$$

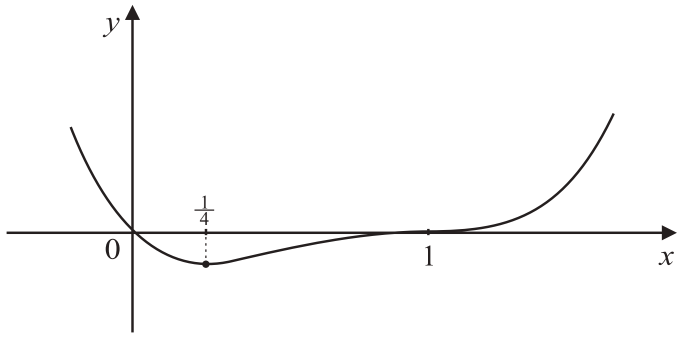
e os classifiquemos como máximo local, mínimo local ou ponto de inflexão.

Solução. Determinemos inicialmente os pontos críticos de f.

$$f'(x) = x \cdot 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3 = (x - 1)^2(3x + x - 1) = (x - 1)^2(4x - 1).$$

Assim, os pontos críticos de f são obtidos resolvendo-se a equação $(x - 1)^2(4x - 1) = 0$ cujas soluções são $x = 1$ e $x = \frac{1}{4}$. Analisemos o ponto crítico $x = \frac{1}{4}$. Observemos que $4x - 1 < 0$ se, e somente se, $x < \frac{1}{4}$, de modo que para tais valores de x a derivada será negativa. De maneira análoga, $4x - 1 > 0$ se, e somente se, $x > \frac{1}{4}$. Assim, para tais valores de x, a derivada será positiva. Consequentemente, em $x = \frac{1}{4}$ a derivada passa de negativa para positiva de modo que $x = \frac{1}{4}$ é ponto de mínimo.

Estudemos o ponto crítico $x = 1$. Neste caso, considerando o intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ a derivada é sempre positiva, excetuando-se no ponto crítico $x = 1$, de modo que tal ponto é de inflexão horizontal. Veja o gráfico da função esboçado a seguir.



Exemplo 94. *Analisemos a função*

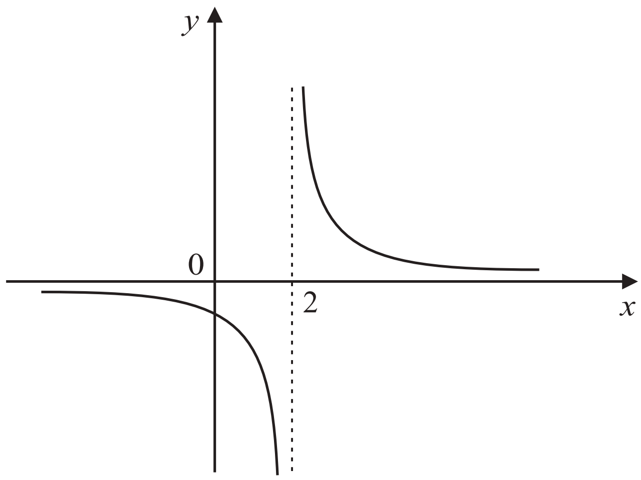
$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

com relação a extremos e determinemos os intervalos nos quais ela é crescente ou decrescente.

Solução. Desde que

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0$$

f não possui ponto crítico. Ora, como $(x-2)^2 > 0$ para todo $x \neq 2$ então $f'(x) < 0$ para $x < 2$ e para $x > 2$, ou seja, f é decrescente nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$. A figura a seguir é um esboço do gráfico de f.



Encerraremos este capítulo discutindo uma generalização do teorema do valor médio, que será utilizada no capítulo 11, na qual estudaremos as regras de L'Hospital.

Teorema 59. (Teorema do Valor Médio Generalizado) *Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b). Suponhamos que $g'(x) \neq 0$, para todo x em (a, b). Então existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Demonstração. Suponhamos que $g(b) = g(a)$. Pelo teorema de Rolle, $g'(x) = 0$ para algum $x \in (a, b)$, o que contraria a nossa hipótese. Portanto, $g(b) \neq g(a)$. Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(b)).$$

Então

$$F(a) = F(b) = 0$$

e

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

Novamente, pelo teorema de Rolle, existe $x_0 \in (a, b)$ para o qual

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x_0) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

$\square$

Exemplo 95. *Dadas as funções $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = x^2 + 1$, encontremos, no intervalo $[1, 4]$, o ponto x_0 prescrito no teorema do valor médio generalizado.*

Solução. Devemos encontrar x_0 no intervalo $[1, 4]$ de modo que

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{14 - 5}{17 - 2} = \frac{3}{5} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3}{2x_0}.$$

Então $x_0 = \frac{5}{2}$.

3 Exercícios Resolvidos

1. Mostre que a função

   $$f(x) = 7x^5 + 8x^3 + 13x - 9$$

   possui um único zero real.

   Solução. Inicialmente observemos que

   $$\lim_{x \to +\infty}(7x^5 + 8x^3 + 13x - 9) = +\infty$$

   e

   $$\lim_{x \to -\infty}(7x^5 + 8x^3 + 13x - 9) = -\infty.$$

Portanto, existem pontos em que a função f atinge valores positivos e pontos onde a função atinge valores negativos. Usando o teorema do valor intermediário, podemos garantir que a função f se anula em algum ponto. Além disso,

$$f'(x) = 35x^4 + 24x^2 + 13 > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, o que implica que f é estritamente crescente, de onde se conclui que f possui apenas um zero.

2. Use o teorema do valor médio para encontrar $x_0 \in (0, 6)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0},$$

em que $f(x) = x^3$.

Solução. Inicialmente observemos que $f'(x) = 3x^2$ e daí

$$3x_0^2 = \frac{6^3 - 0^3}{6 - 0}.$$

Portanto, $3x_0^2 = 6^2$. logo, $3x_0^2 = 36$. De onde concluímos que $x_0 = 2\sqrt{3}$.

4 Exercícios Propostos

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0.$$

Então

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x + 1) - f(x)) = 0.$$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{1+\varepsilon},$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e para algum $\varepsilon > 0$. Mostre que f é constante.

3. (a) Mostre que se f é derivável em I e se a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é limitada, então f é lipschitziana.

   (b) Mostre que se a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é contínua então f é lipschitziana em todo intervalo fechado e limitado $[a, b] \subset I$.

4. Para cada uma das funções abaixo, definidas em $\mathbb{R}$, encontre os seus extremos relativos e globais (quando existirem), os intervalos nos quais elas crescem e os intervalos nos quais elas decrescem.

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$,

(b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$,

(c) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 4$,

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

5. Para cada uma das funções dadas a seguir, determine os seus domínios, seus pontos críticos, caso existam, e encontre pontos de mínimo local e de máximo local, caso existam.

   (a) $f(x) = x^3$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x}$,

   (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$,

   (d) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$,

   (e) $f(x) = \sqrt{x}$.

6. Considere a função f, definida em todo o $\mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2,$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$ são números reais fixados e n é um número natural fixo. Verifique se f é limitada inferiormente. Em caso afirmativo, verifique se ela atinge mínimo.

7. Sejam f e g funções dadas por

$$f(x) = x^3, \ x \in \mathbb{R}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mostre que f e g têm 0 como ponto crítico que não é nem de máximo nem de mínimo local.

8. Determine os pontos críticos da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

9. Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que a função $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ possui um mínimo local em $x = 1$.

10. Mostre que $x = 0$ é ponto crítico da função $f(x) = 1 - x^5$. Qual a natureza deste ponto crítico?

11. Mostre que $x = 0$ é ponto crítico da função $f(x) = 3x^4 - 8x^3$. Qual a natureza deste ponto crítico?

12. Suponha que as funções $f, g : I \to \mathbb{R}$ possuem máximo local em um certo ponto $c \in I$. Verifique se c é ponto de máximo local para a função $f+g$. E de $f-g$? E de $f \cdot g$?

13. Mostre que a função polinomial $f(x) = x^3 - 3x + a$ nunca possui duas raízes em $[0,1]$, qualquer que seja o valor de a.

14. Use o *Teorema de Rolle* para explicar o motivo pelo qual a equação cúbica
$$x^3 + ax^2 + b = 0$$
não pode ter mais do que uma solução se $a > 0$.

15. Suponhamos que $f'(x) > C, \forall x\ [0, +\infty)$. Mostre que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f'(x)$ e $f''(x)$ existam para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se f possui três zeros, então f'' possui um zero.

17. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = K$. Determine
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x+a) - f(x)].$$

Capítulo 11

Regras de L'Hospital

Guillaume François Antoine de **L'Hospital**, Marquês de Sainte-Mesme, matemático e nobre francês, nascido a Paris em 1661 e falecido na mesma cidade a 2 de fevereiro de 1704. Aos 15 anos, L'Hospital resolveu o difícil problema sobre ciclóides, proposto por Pascal. Também é devido a L'Hospital o texto publicado a 1696 sob o título *L'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*, o que foi o primeiro manual publicado de cálculo diferencial. Durante certo tempo o Marquês de L'Hospital foi uma espécie de mecenas para o jovem Jean Bernoulli que, em contrapartida, entregaria ao Marquês alguns resultados para que esse divulgasse como se fosse de sua lavra. Entre esses trabalhos está a famosa Regra de L'Hospital que será o nosso próximo objeto de estudo.

Dedicaremos este capítulo ao estudo das *Regras de L'Hospital* que são utilizadas para levantar a indeterminação de certos limites.

Desde as aulas de Cálculo nos deparamos com certos limites que recaíam nas chamadas indeterminações. Isso acontecia quando considerávamos a questão relativa à existência de limites da forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

quando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ e chegávamos à uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Além dessa indeterminação, nos depararemos com outras tais como $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0^0$, entre outras. O nosso problema central é como levantar essa indeterminação.

1 Primeira Regra de L'Hospital

Comecemos com um resultado preliminar que usa, essencialmente, o conceito de derivada. Outros resultados mais elaborados serão demonstrados usando o teorema do valor médio.

Teorema 60. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções definidas no intervalo fechado $[a,b]$, tais que $f(a) = g(a) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Se f e g forem deriváveis em a e se $g'(a) \neq 0$ então*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$

existe e é igual a $\frac{f'_+(a)}{g'_+(a)}$, isto é,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'_+(a)}{g'_+(a)}.$$

Demonstração. Escrevamos o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, relembrando que $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Considerando

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e

$$g'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0$$

e que o limite do quociente é o quociente dos limites, obteremos

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'_+(a)}{g'_+(a)}$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Jean Bernoulli, também conhecido por Johann I Bernoulli nasceu a 27 de Julho de 1667 e faleceu a 1 de Janeiro de 1748, em Basiléia, Suíça. Foi acusado de ter roubado ideias de seu irmão Jakob e de expulsar o seu filho (Daniel Bernoulli) de casa, por ter ganho um prêmio na Academia Francesa de Ciências, para o qual ele próprio estava competindo. Contribuiu para o cálculo exponencial e várias áreas da matemática aplicada, incluindo o movimento de uma partícula num campo gravitacional. Estabeleceu a equação da catenária em 1690.

Observação 12. *Tanto o teorema 60 como as demais regras de L'Hospital continuam válidas se considerarmos limites laterais à esquerda ou limites.*

Geralmente, nas aulas de cálculo, determina-se, de maneira eminentemente geométrica, o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

chamado de *limite fundamental* trigonométrico. Usaremos o teorema precedente para mostrarmos a validade desse limite. As funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x$ satisfazem as condições do teorema pois f e g são deriváveis, $f'(x) = \operatorname{sen} x$, $g'(x) = 1$, $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$. Daí,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}' 0}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Devemos observar que o teorema 60 não pode ser aplicado se os valores das funções f e g não forem ambos iguais a zero no ponto em que se está calculando o limite. Com efeito, considere as funções $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x + 2$. Como é fácil ver

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)} = \frac{1}{2},$$

no entanto, $\frac{f'(0)}{g'(0)} = 1$. Portanto, devemos ter cuidado ao lidar com limites do quociente de funções, tendo em vista a aplicação do teorema 60.

Tanto o teorema 60 como as demais regras de L'Hospital são válidas se considerarmos limites laterais.

Outro ponto a ser ressaltado é que usaremos as propriedades das funções logarítmica e exponencial, muito embora suas definições rigorosas somente apareçam na aula 16. Esse procedimento se justifica a fim de que possamos enriquecer ainda mais os exemplos que surgirão ao longo desta discussão. Esse procedimento não altera a idéia do texto, haja vista que tais funções, e suas propriedades básicas, são de conhecimento do(a) estudante desde o Curso de Cálculo.

No teorema a seguir, surgirá a notação $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, ao considerarmos o intervalo aberto (a, b). Isso significa que a e b podem ser, ambos, números reais, e daí teríamos o intervalo aberto e limitado (a, b), mas poderíamos, também, ter situações como: $a = -\infty$ e b um número real e daí teríamos o intervalo $(-\infty, b)$; $a = -\infty$ e $b = +\infty$ e teríamos o intervalo $(-\infty, \infty)$; $a \in \mathbb{R}$ e $b = +\infty$ de modo que trabalharíamos com o intervalo $(a, +\infty)$.

Teorema 61. (Primeira Regra de L'Hospital) *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções definidas e deriváveis no intervalo aberto (a, b), em que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e tal que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$. Além disso, suponhamos que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0. \tag{11.1}$$

(i) Se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$ *então* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$

(ii) Se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty(+\infty)$ *então* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty(+\infty).$

Demonstração. Sejam α e β números reais satisfazendo $a < \alpha < \beta < b$. Como g é derivável em (a, b), segue do teorema do valor médio que

$$\frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g'(\xi),$$

para algum ξ pertencente ao intervalo (α, β). Assim, $g(\alpha) \neq g(\beta)$, pois $g'(x) \neq 0$, para qualquer $x \in (a, b)$. Além disso, aplicando o teorema do valor médio generalizado às funções f e g no intervalo (α, β), encontramos $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} \tag{11.2}$$

Comecemos demonstrando o caso (i). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} - l \right| < \varepsilon$$

sempre que $\gamma \in (a, a+\delta)$ o que é equivalente a

$$l - \varepsilon < \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} < l + \varepsilon$$

para todo $\gamma \in (a, a+\delta)$. Tomando α e β satisfazendo $a < \alpha < \beta \leq a + \delta$ e usando a igualdade em (11.2), teremos

$$l - \varepsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < l + \varepsilon.$$

Façamos $\alpha \to a^+$ e usemos a condição (11.1) para obter

$$l - \varepsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq l + \varepsilon$$

para $\beta \in (a, a+\delta]$. Isso significa que

$$\left| \frac{f(\beta)}{g(\beta)} - l \right| \leq \varepsilon$$

se $a < \beta \leq a + \delta$. Como ε é um número arbitrário, tem-se que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ e a parte (i) do teorema está demonstrada.

Consideremos o caso (ii). Suponhamos, inicialmente, que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$. Portanto, dado $M > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} < -M$$

para $\gamma \in (a, a+\delta)$. Da expressão em (11.2) obtemos

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < -M$$

para $a < \alpha < \beta < a + \delta$.

Nessa última expressão, façamos $\alpha \to a^+$ de modo que

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq -M$$

para $a < \alpha < \beta < a + \delta$. Como $M > 0$ é arbitrário, segue-se que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ e a parte (ii) está demonstrada quando $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$. O caso $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ é feito de maneira análoga e será deixado como exercício. $\square$

Exemplo 96. *Consideremos as funções* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *e* $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ *e verifiquemos a existência do limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Observemos que o teorema 60 não pode ser aplicado, pois a função $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ *não é derivável em* $x = 0$. *Apliquemos o teorema 61 com* $(a, b) = (0, b)$ *em que* b *é um número positivo qualquer. Para isso, teremos* $f'(x) = \cos x$ *e* $g'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ *de modo que*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{3}} \cos x.$$

Daí,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{3}} \cos x = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

2 Segunda Regra de L'Hospital

O próximo teorema será usado no cálculo de limites para levantar indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 62. (Segunda Regra de L'Hospital) *Sejam* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *e* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *funções deriváveis no intervalo aberto* (a, b), *tais que* $g'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in (a, b)$ *e*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty \tag{11.3}$$

(i) Se $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$ *então* $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$

(ii) Se $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ *então* $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.$

Demonstração. A demonstração desse resultado segue-se do teorema 61 observando que, *grosso modo*, $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}$. Justifique, rigorosamente, essa igualdade e demonstre este teorema como exercício.

□

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 97. Calculemos o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Observemos que quando $x \to +\infty$ chegamos a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Usemos o teorema 62. Fazendo $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x$, com $x \in (0, +\infty)$, teremos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Daí, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Isto nos diz que a função $\ln x$ cresce, "no infinito", com menor velocidade do que a função $g(x) = x$. Claramente, isso também acontece se tomarmos $g(x) = x^n$, qualquer que seja o número natural n.

Exemplo 98. *Mostremos que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Recaímos, novamente, na indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Fazendo $f(x) = e^x$ e $g(x) = x$, teremos

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x}{1} = e^x.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Isso nos diz que a função exponencial $f(x) = e^x$ cresce mais rapidamente do que a função $g(x) = x$, quando $x \to +\infty$.

Existem outras indeterminações que veremos nos exercícios resolvidos a seguir. Entre essas indeterminações temos $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$.

3 Exercícios Resolvidos

1. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Solução. Observemos que, quando $x \to 0$, ambas as funções $1 - \cos x$ e x convergem para 0. Temos então, a indeterminação $\frac{0}{0}$. Usaremos a primeira regra de L'Hospital. Deste modo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

2. Calcule
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-4x+3}{2x^2-1}.$$

Solução. Como $\lim_{x\to+\infty}(5x^3-4x+3) = \lim_{x\to+\infty}(2x^2-1) = +\infty$. Recaímos na indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Para levantar essa indeterminação vamos aplicar a segunda regra de L'Hospital.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-4x+3}{2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2-4}{4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{30x}{4} = +\infty$$
em que devemos observar que usamos a mesma regra duas vezes pois, ao usá-la a primeira vez, obtivemos, novamente, a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Calcule
$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right).$$

Solução. Observemos que as funções envolvidas possuem os seguintes limites
$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \ \text{ e } \ \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = +\infty$$
de onde se vê que deparamos com a indeterminação $+\infty-\infty$, que ainda é novidade para nós nesta aula. Reescrevamos a função em questão como
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$$
e notemos que, quando $x \to 0$, o numerador e o denominador do segundo membro desta última expressão tendem a zero, o que nos permite usar a primeira regra de L'Hospital. Assim
$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} =$$
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\cos x - 1}{x\cos x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{-x\operatorname{sen} x + 2\cos x} = \frac{0}{0+2} = 0.$$
Ressaltemos que foi necessário usar duas vezes a primeira regra de L'Hospital.

4. Calcule
$$\lim_{x\to0^+} x\ln x.$$

Solução. Neste caso, temos os limites $\lim_{x\to0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ e assim temos uma indeterminação da forma $0\cdot\infty$, que ainda não foi considerada. Reescrevamos a função $x\ln x$ como $x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, de modo que o numerador e o denominador do segundo membro desta última expressão tendem para $-\infty$ e para $+\infty$, respectivamente. Apliquemos a segunda regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

5. Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Solução. Observemos que ao fazer $x \to 0^+$, chegamos à indeterminação 0^0. Usaremos aqui propriedades da função logaritmo. Façamos $y = x^x$ e apliquemos logaritmo em ambos os membros desta última igualdade. Assim,

$$\ln y = \ln x^x = x\ln x.$$

Pelo exercício anterior, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ de modo que $\ln y$ tende a zero quando $x \to 0^+$. Conseqüentemente, y tende ao valor 1. Então

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

4 Exercícios Propostos

1. Calcule os limites a seguir:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$;

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{1+x}$;

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{(\ln x)^3}$;

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x+\ln x-1}$;

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right]$;

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$;

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2+1}$. Pode-se usar uma regra de L'Hospital?

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x}{x^5}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x}$;

(l) $\lim\limits_{x\to} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 + 5x - 6}{2x^5 + 8x - 10}$.

2. Critique o uso de regras de L'Hospital nos limites

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} &= \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{6x - 2}{6x - 2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{6}{6} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Analise o comportamento, quando $x \to 0$, de cada uma das funções a seguir:

(a) $\frac{1}{x}$;

(b) $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$;

(c) $\frac{1}{x^2}$;

(d) $\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}$.

4. Sejam $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$. Mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

mas

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

não existe.

5. Suponhamos que f seja derivável em (a, b) e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Mostre que $f(x) \neq f(y)$ para todo $x, y \in (a, b), x \neq y$.

Capítulo 12

Aproximação Polinomial

Os polinômios são as funções mais simples de serem estudadas. Elas são contínuas, deriváveis, suas derivadas se anulam a partir de uma certa ordem etc. No entanto, muitas funções que surgem nas aplicações da Matemática a outras áreas da ciência não são funções polinomiais. Entretanto, sob certas condições, dada uma função, é possível encontrar um polinômio que esteja "bem próximo" da função dada. Esse polinômio, em muitos casos, pode "substituir" a função em situações práticas. Veremos neste capítulo como encontrar polinômios com essa característica. Para isso, utilizaremos uma importante ferramenta chamada *Fórmula de Taylor* e, a partir dela, deduziremos um interessante teste para determinar se um dado ponto crítico é ponto de máximo, de mínimo ou de inflexão. Esse resultado é uma generalização do teste da segunda derivada.

Brook **Taylor** Nasceu em Edmonton, Middlesex, Inglaterra, a 18 de Agosto de 1685 e faleceu a 29 de Dezembro de 1731 em Londres. Taylor estudou problemas ligado a magnetismo, perspectiva e astronomia, entretanto é mais conhecido por seu trabalho sobre séries.

1 Aproximações de Funções por Polinômios

Um polinômio é uma função da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

em que x é a variável real e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais dados, chamados *coeficientes* do polinômio. Quando $a_n \neq 0$, diz-se que n é o *grau* do polinômio.

Essa classe de funções possui propriedades bastante interessantes e, na verdade, elas são aquilo que de melhor se pode esperar de uma função. Como é fácil ver, $p(x)$ possui derivadas de todas as ordens. Com efeito, supondo $a_n \neq 0$, obtemos

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

que é um polinômio de grau $n - 1$.

A derivada segunda de p é

$$p''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 6a_3 x + 2a_2$$

e, prosseguindo dessa maneira, obteremos a derivada de ordem n de p, dada por

$$\begin{aligned} p^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\ldots 1a_n \\ &= n!a_n. \end{aligned}$$

Assim,

$$p^{(n+1)}(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo que acabamos de ver, a derivada de um polinômio é sempre um polinômio e, caso ele seja de grau n, a sua derivada de ordem $n+1$ se anulará. No entanto, nem todas as funções da Matemática são polinomiais. Existem funções importantes na Matemática que possuem comportamentos bem distintos dessa com que acabamos de trabalhar. E isso não é um fato ruim ou uma falha da Matemática. A própria natureza nos oferece fenômenos relevantes que são traduzidos por funções como a exponencial, a logarítmica, o seno, o cosseno etc. que estão muito longe de ser polinômios. Porém, essas funções, como veremos a seguir, podem ser aproximadas por polinômios. Nesse contexto, as aproximações de certas funções por polinômios muito se assemelha às aproximações de números irracionais por decimais finitas.

Comecemos com alguns exemplos.

Exemplo 99. *No capítulo 11 estudamos o limite fundamental trigonométrico*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Isto significa que, para x próximo de 0, o valor da fração

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

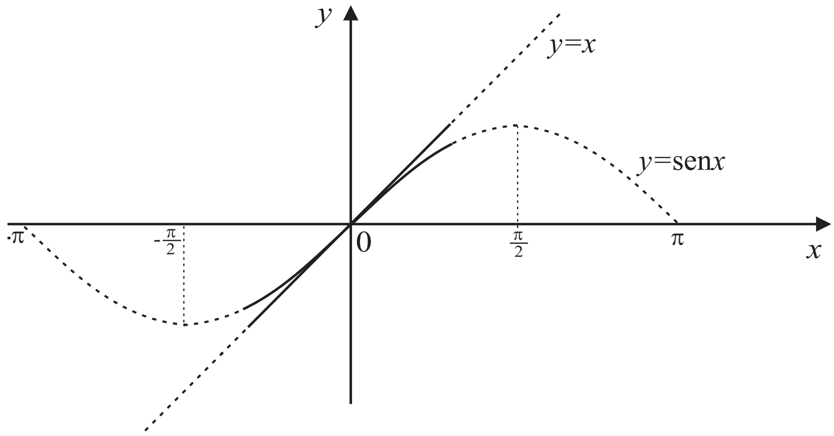
fica próximo de 1, isto é,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cong 1$$

se $x \cong 0$. Daí,

$$\operatorname{sen} x \cong x$$

se $x \cong 0$. Isso nos diz que, se x estiver próximo de 0, os valores de $\operatorname{sen} x$ *tornam-se próximos dos valores do polinômio de primeiro grau $p(x) = x$. Dessa forma, os gráficos de $p(x) = x$ e* $\operatorname{sen} x$ *praticamente se confundem se x estiver próximo de 0.*



A função $\operatorname{sen} x$ *não é um polinômio, mas está bastante próxima de sê-lo se os valores de* $|x|$ *forem pequenos. Diz-se, então, que temos uma* aproximação linear *para a função trigonométrica* $\operatorname{sen} x$*.*

Exemplo 100. *Seja* x *um número real diferente de 1. Como é de nosso conhecimento, é válida a identidade:*

$$1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

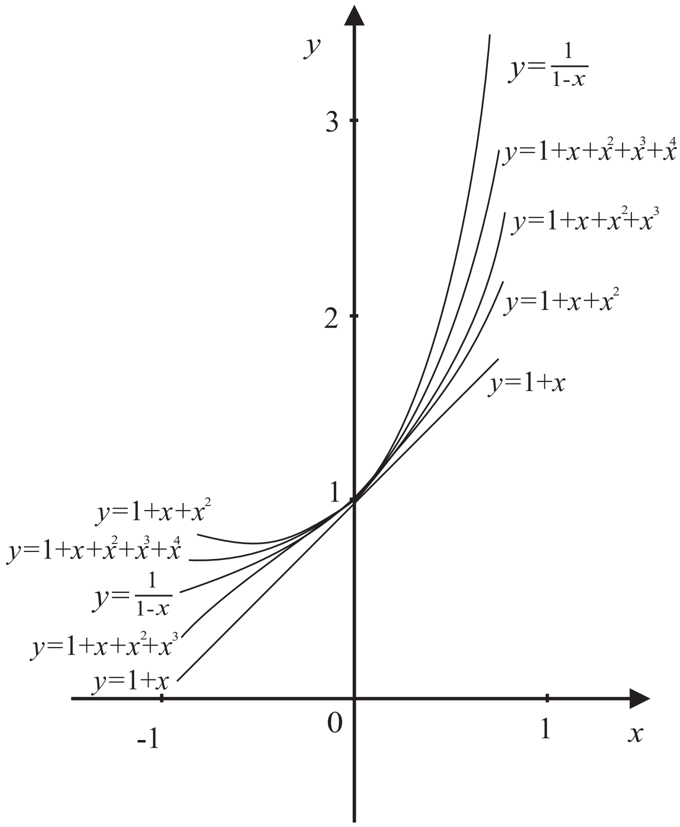
Suponhamos que $|x| < 1$*. Assim, como vimos em capítulos anteriores,* $x^{n+1} \to 0$*, de modo que* $1 - x^{n+1} \to 1$*, donde*

$$1 + x + x^2 + \cdots x^n \cong \frac{1}{1 - x}.$$

Consequentemente, a função racional $\frac{1}{1-x}$ *é aproximada pelo polinômio*

$$1 + x + x^2 + \cdots x^n$$

e quanto maior for n*, melhor será a aproximação. O gráfico a seguir fornece uma interpretação geométrica dessa aproximação.*



Exemplo 101. *Consideremos a função polinomial*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Observemos que

$$a_0 = p(0)$$

e, da expressão da segunda derivada de p, obtemos

$$a_2 = \frac{p''(0)}{2}.$$

Prosseguindo dessa maneira,

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!},\ 0 \leq k \leq n.$$

Daí, a função polinomial $f(x)$ pode ser reescrita como

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Tornemos mais precisa a noção de aproximação de funções por polinômios.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto $I, 0 \in I$ e suponhamos que f possua derivadas até ordem n em I. Nosso objetivo é o de encontrar um polinômio p tal que

$$p(0) = f(0),\ p'(0) = f'(0),\ p''(0) = f''(0), \ldots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0). \quad (12.1)$$

Suponhamos que p seja escrito como

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Usando as condições em (12.1), vê-se facilmente que

$$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0), \ldots, a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \ldots, a_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

De modo geral,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que estamos designando por $f^{(0)}(0)$ o valor $f(0)$. Temos o resultado:

Proposição 19. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no intervalo aberto I que contém 0. Então existe um, e somente um, polinômio p, de grau n, que satisfaz as $n+1$ condições*

$$p(0) = f(0),\ p'(0) = f'(0), \ldots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

e cuja expressão é dada por

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Deve-se observar que o fato de usarmos o polinômio em $x = 0$ é irrelevante. Se $a \in I$ poderíamos expressar o polinômio em torno do ponto a, da seguinte forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (12.2)$$

O polinômio representado na expressão (12.2) é chamado *polinômio de Taylor* de grau n da função f no ponto $x = a$.

Exemplo 102. *Voltemos ao exemplo 100. Como foi visto*

$$+x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Mostremos que $1 + x + x^2 + \cdots x^n$ é o polinômio de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$. O(A) leitor(a) pode verificar como exercício que

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 2!, \ldots, f^{(n)}(0) = n!.$$

Assim, o polinômio de Taylor de ordem n *da função* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *no ponto* $a = 0$ *é exatamente*

$$1 + x + x^2 + \cdots x^n$$

que, como observamos anteriormente, aproxima a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Exemplo 103. *Consideremos a função exponencial* $\exp(x) = e^x$. *Como*

$$\exp(0) = \exp'(0) = \exp''(0) = \cdots = \exp^{(n)}(0) = 1,$$

segue-se que o polinômio de Taylor de ordem n *desta função, em torno de 0, é*

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Exemplo 104. *Um exercício elementar de derivação nos leva aos seguintes polinômios de Taylor para as funções seno e cosseno, respectivamente,*

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Em todos esses exemplos as funções envolvidas eram aproximadas pelos seus respectivos polinômios, e isso será demonstrado ainda neste capítulo. No entanto, nem sempre isso acontece como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 105. *Consideremos a função*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & se \ x \neq 0, \\ 0 & se \ x = 0. \end{cases}$$

Pode-se ver, faça isso como exercício, que

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 0$$

De modo que o polinômio de Taylor da função f *é identicamente nulo e, assim, ele não pode aproximar a função* f *em intervalos em torno do 0.*

2 A Fórmula de Taylor

Antes de demonstrarmos o teorema de Taylor introduzamos a seguinte definição

Definição 63. *Dizemos que a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é* derivável no intervalo fechado $[a, b]$ *se ela for derivável no intervalo aberto* (a, b) *e se as derivadas laterais* $f'_+(a)$ *e* $f'_-(b)$ *existirem.*

O teorema a seguir nos fornecerá um critério para análise da natureza de certos pontos críticos de funções. Originalmente, esse resultado foi demonstrado por Joseph Lagrange, em 1797.

Teorema 63. (Teorema de Taylor) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que suas derivadas $f^{(k)}, k = 0, 1, 2, \ldots, n$ existam e sejam contínuas em $[a, b]$, e $f^{(n+1)}$ exista em (a, b), e seja x_0 um ponto fixado do intervalo $[a, b]$. Dado $x \in [a, b], x \neq x_0$, existe c entre x e x_0 tal que*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}$$

em que

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Joseph Louis **Lagrange** (1736-1813) nasceu em Turim, Itália. Matemático da mais alta estirpe, a ponto de Napoleão Bonaparte tê-lo cunhado com a frase: *Lagrange é a pirâmide mais alta das ciências matemáticas.* Trabalhou em Análise, Teoria dos Números, Álgebra, Mecânica Analítica etc., tendo publicado obras primas da Matemática tais como *Thèorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel, Traité de Résolution des Équations Numériques de Tous Degrés e Mécanique Analytique.* Foi um dos matemáticos da Revolução Francesa e um dos membros de uma comissão formada pela Académie de Sciences para a reforma do sistema de pesos e medidas.

Demonstração. Suponhamos que $x > x_0$ e definamos a função $F : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ por

$$F(t) = f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{K}{(n+1)!}(x-t)^{n+1},$$

em que K é uma constante que será escolhida de modo que as condições do teorema de Rolle sejam satisfeitas em que x está fixado e a variável é t. Claramente, F é contínua no intervalo fechado $[x_0, x]$, é derivável no intervalo aberto (x_0, x) e $F(x) = 0$. Impomos a condição de que $F(x_0) = 0$ de modo que o valor de K é dado por

$$K = \left\{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \cdots - \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right\} \tfrac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Podemos, então, aplicar o teorema de Rolle e encontrar $c \in (x_0, x)$ tal que $F'(c) = 0$. Pode-se calcular a derivada de F e obter

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{K}{n!}(x-t)^n. \tag{12.3}$$

De (12.3) e do fato $F'(c) = 0$ obtemos $K = f^{(n+1)}(c)$, o que conclui a demonstração do teorema. □

A expressão

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}$$

é chamada *fórmula de Taylor* de grau n de f em torno de x_0.

A fórmula de Taylor nos permite generalizar o teste da derivada segunda, conforme nos mostrará o teorema a seguir.

Teorema 64. *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em (a,b) tal que as funções derivadas $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ sejam contínuas. Seja $x_0 \in (a,b)$ tal que $f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

(i) Se n for par e $f^{(n)}(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo local de f.

(ii) Se n for par e $f^{(n)}(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo local de f.

(iii) Se n for ímpar então x_0 é ponto de inflexão.

Demonstração. (i) Suponhamos que n seja par e $f^{(n)}(x_0) < 0$. Como $f^{(n)}$ é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{(n)}(x) < 0$, para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Usando o fato de que $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, a fórmula de Taylor de f no ponto x_0 se reduz a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

com $c \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ e assim $f^{(n)}(c) < 0$. Em virtude de n ser par tem-se $(x - x_0)^n > 0$. Conseqüentemente, $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ o que mostra que x_0 um ponto de máximo local de f.

(ii) Suponhamos que n seja par e $f^{(n)}(x_0) > 0$. Como $f^{(n)}$ é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{(n)}(x) > 0$, para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Usando o fato de que $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, a fórmula de Taylor de f no ponto x_0 se reduz a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

onde $c \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ e assim $f^{(n)}(c) > 0$. Em virtude de n ser par tem-se $(x - x_0)^n > 0$. Consequentemente, $f(x) > f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ o que mostra que x_0 um ponto de mínimo local de f.

(iii) Suponhamos que n seja ímpar. Neste caso, teremos $(x - x_0)^n > 0$ se $x > x_0$ e $(x - x_0)^n < 0$ se $x < x_0$. Consideremos o caso em que $f^{(n)}(x_0) > 0$. Assim, $f(x) - f(x_0) < 0$ se $x < x_0$ e $f(x) - f(x_0) > 0$ se $x > x_0$ e $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$. Isso mostra que x_0 é um ponto de inflexão horizontal. O outro caso demonstra-se de maneira análoga. Isto conclui a demonstração do teorema. □

Os exemplos a seguir apresentam duas aplicações desse teorema.

Exemplo 106. *Consideremos a função $f(x) = x^4$. Vê-se facilmente que 0 é o único ponto crítico de f. Como $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$ e $f^{(4)}(x) = 24$, tem-se que $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Logo, 0 é ponto de mínimo local. Observemos que tal mínimo é global.*

Exemplo 107. *Consideremos a função $f(x) = x^3$. Novamente, 0 é o único ponto crítico de f. Como $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ e $f'''(x) = 6$ tem-se que $f'(0) = f''(0) = 0$ e $f'''(0) \neq 0$. Como $n = 3$ é ímpar, tal ponto crítico é de inflexão.*

3 Exercícios Resolvidos

1. Encontre o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = \ln(x+1)$ em torno do ponto $x_0 = 0$.

   Solução. As derivadas f', f'', f''', $f^{(4)}$ e $f^{(5)}$ de $f(x) = \ln(x+1)$ são dadas por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2.3}{(1+x)^4} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{2.3.4}{(1+x)^5} \end{aligned}$$

   Prosseguindo dessa maneira, obtemos

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2!$, $f^{(4)}(0) = -3!$ e, de modo geral,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

   Assim, o polinômio de Taylor de grau n de $f(x) = \ln(x+1)$ em torno do ponto $x_0 = 0$ é dado por

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

2. Mostre que o polinômio

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \pm \frac{x^n}{n!},$$

   em que n é ímpar, difere da função $\operatorname{sen} x$ por, no máximo, $\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$ no intervalo $[-\pi, \pi]$

Solução. Como $0 \in [-\pi, \pi]$ apliquemos a *fórmula de Taylor* à função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de $x_0 = 0$, para obtermos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \pm \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}.$$

Portanto,

$$\operatorname{sen} x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \pm \frac{x^n}{n!} \right] = R_{n+1},$$

onde

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algum c entre 0 e x. As sucessivas derivadas de $\operatorname{sen} x$ possuem módulos menores do que ou iguais a 1 e como $x \in [-\pi, \pi]$ obtemos

$$|R_{n+1}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Deve-se observar que este é o erro máximo que se comete ao aproximar a função $\operatorname{sen} x$ pelo polinômio referido acima.

4 Exercícios Propostos

1. Encontre o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

2. Encontre o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em torno de $x_0 = 1$.

3. Encontre o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = \ln(1-x)$ em torno de $x_0 = 0$.

4. Encontre o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = \ln x$ em torno de $x_0 = 2$.

5. Encontre os três primeiros termos não nulos da fórmula de Taylor da função $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ em torno de $x_0 = 0$.

6. Encontre os três primeiros termos não nulos da fórmula de Taylor da função $\operatorname{tg} x$ em torno de $x_0 = 0$.

7. Encontre o polinômio de Taylor de grau n da função $\frac{1}{1+x}$ em torno de $x_0 = 0$.

8. Encontre o polinômio de Taylor de grau 2 da função

$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

em torno de $x_0 = 1$.

9. Encontre o polinômio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = x^4$ em torno de $x = -2$.

10. Encontre os três primeiros não-nulos da fórmula de Taylor da função $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$ em torno de $x_0 = 0$.

11. Calcule o polinômio de Taylor de grau 5, com $x_0 = 1$, das funções $f(x) = x^5$ e $g(x) = \ln x$.

12. Seja $f(x) = \frac{1}{x+2}, x_0 = -1$, e $n = 2$. Mostre que

$$\frac{1}{x+2} = 1 - (x+1) + (x+1)^2 + R_3$$

onde, para algum c entre x e -1,

$$R_3 = -\frac{(x+1)^3}{(2+c)^4}.$$

Capítulo 13

Séries de Potências: Noções Elementares

Nos capítulos 4 e 5 estudamos as séries numéricas e vários dos seus critérios de convergência. Este capítulo será dedicado a uma classe de séries nas quais cada um de seus termos são potências de uma variável real. São as chamadas *Séries de Potências.* Elas se prestarão, entre outras coisas, para introduzir a classe de *Funções Analíticas.*

1 Definição e Exemplos

Vejamos alguns exemplos a fim de que o(a) leitor(a) tenha a percepção exata do espírito deste capítulo.

Exemplo 108. Fixemos um número real x e consideremos a série cujo termo geral seja $\frac{x^n}{n!}$, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$. Assim, temos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

O(A) leitor(a) pode usar, por exemplo, o teste da razão e verificar que essa série é convergente, qualquer que seja o valor de $x \in \mathbb{R}$. Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}$ associamos um número real $f(x)$, que é a soma da série em estudo, para cada x fixado. Desse modo, definimos a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Essa série é um caso particular daquilo que chamamos *série de potências* a qual define uma função cujo domínio é todo o conjunto dos números reais. O(A) leitor(a) está convidado(a) a relembrar as aulas de Cálculo e verificar que essa série de potências define uma função bastante familiar.

Exemplo 109. *Seja $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo $-1 < x < 1$ e consideremos a série convergente*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

cuja soma é $\frac{1}{1-x}$. Assim, encontramos uma função, definida no intervalo aberto $(-1, 1)$, cujos valores, para cada $x \in (-1, 1)$, é obtido por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Novamente, temos uma função definida por uma série de potências.

Exemplo 110. *Para cada $x \in \mathbb{R}$, consideremos a série de potências dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

que é convergente para qualquer valor real x. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$ associamos um número real dado pela soma da série precedente. Essa função é exatamente o nosso conhecido seno, isto é,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Vejamos a definição precisa de série de potências.

Definição 64. *Uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \tag{13.1}$$

é chamada uma série de potências *em x, em torno do ponto x_0, com coeficientes $a_n, n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Um caso particular importante, é o da série de potências em torno do 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{13.2}$$

Demonstraremos vários resultados sobre essas séries. Dentre esses, um dos mais importantes afirma que dada uma série de potências como na expressão em (13.2), ou é sempre convergente, ou converge apenas quando $x = 0$, ou converge em um certo intervalo aberto $(-R, R)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-R, R]$. O intervalo no qual a série de potências converge é chamado *intervalo de convergência* da série. Uma função definida por série de potências e que tem como domínio o intervalo de convergência da serie é aquilo que de melhor se pode esperar de uma função. São as chamadas *funções analíticas*. Essas noções serão tornadas mais precisas ao longo deste capítulo.

Sem perda de generalidade, nos restringiremos às séries de potências em torno do ponto $x_0 = 0$. Comecemos com o seguinte teorema

Teorema 65. *Suponhamos que a série de potências definida em (13.2) convirja em um certo ponto $x = c \neq 0$. Então a série (13.2) converge para todo $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça $|x| < |c|$.*

Demonstração. Como, por hipótese, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge, o seu termo geral $a_n c^n$ converge para zero. Desde que toda sequência convergente é limitada, existe uma constante positiva K tal que $|a_n c^n| \leq K$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número real fixado satisfazendo $|x| < |c|$. Daí,

$$|a_n x^n| = |a_n c^n| \left|\frac{x}{c}\right|^n \leq K \left|\frac{x}{c}\right|^n.$$

Usando o fato de que a série $\sum_{n=0}^{\infty} K \left|\frac{x}{c}\right|^n$ converge, pois $\left|\frac{x}{c}\right| < 1$, utilizamos o critério da comparação para concluir que a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ converge, ou seja, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < |c|$. Consequentemente, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < |c|$. □

Corolário 16. *Suponhamos que a série (13.2) não convirja em um ponto $d \neq 0$. Então ela não converge em qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > |d|$.*

Demonstração. A demonstração é simples e será feita por contradição. Suponhamos que a série não convirja para um certo $d \neq 0$, mas que exista um $x \in \mathbb{R}, |x| > |d|$ em que a série (13.2) convirja. Pelo teorema 65, teríamos que a série (13.2) seria absolutamente convergente para $x = d$, o que é impossível. Isto conclui a demonstração. □

Teorema 66. *Dada uma série de potências como em (13.2), apenas uma das possibilidades a seguir ocorre:*

(i) A série (13.2) converge qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$;

(ii) Existe um número real e positivo R tal que a série converge para todo x tal que $|x| < R$ e diverge para todo x com $|x| > R$.

Demonstração. Pelo teorema, 65 se a série (13.2) convergir para algum valor de x com $|x| = \alpha$ então a série convergirá para qualquer valor de $x \in (-\alpha, \alpha)$. Seja D o conjunto dos valores de x para os quais a série (13.2) converge e seja A o conjunto

$$A = \{\alpha \geq 0; \text{ a série (13.2) converge ou em } x = \alpha \text{ ou em } x = -\alpha\}.$$

Pelo teorema 65 $(-\alpha, \alpha) \subset D$ para cada $\alpha \in A$. O conjunto A ou é limitado superiormente ou é limitado inferiormente. Se A não for limitado superiormente existem valores $\alpha \in A$ tal que o intervalo $(-\alpha, \alpha)$ está contido no conjunto D. Portanto, $D = \mathbb{R}$.

Suponhamos que A seja limitado superiormente e como $A \neq \emptyset$, pois $(0 \in A)$, tem-se que A possui supremo. Mostremos que D é um dos intervalos da forma $(-r, r), (-r, r], [-r, r)$ ou $[-r, r]$, onde $r = \sup A$, mostrando que

$$(-r, r) \subset D \subset [-r, r].$$

Com efeito, se $x \in (-r, r)$ então $|x| < r = \sup A$ e assim $|x|$ não é um limite superior de A. Portanto, existe $\alpha \in A$ com $|x| < \alpha$. Deste modo

$$x \in (-\alpha, \alpha) \subset D.$$

Portanto, $(-r, r) \subset D$. Suponhamos que $x \in D$. Então $|x| \in A$, donde se segue que $|x| \leq r$ e $x \in [-r, r]$. Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

Observemos que o teorema 66 nada afirma para os valores de x tais que $|x| = R$. O número R é chamado *raio de convergência* da série. Se a série convergir em todo valor de $x \in \mathbb{R}$ dizemos que série de potências possui raio de convergência infinito $(R = \infty)$.

Exemplo 111. *Consideremos a série de potências*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

cujo termo geral é dado por $a_n = \frac{x^n}{n!}$ *para cada* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Usemos o teste da razão:*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \to 0$$

Então a série em estudo converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 112. *Estudemos para que valores de* $x \in \mathbb{R}$ *a série*

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

cujo termo geral é $a_n = nx^n$*, converge. Usemos o teste da razão para obter*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n}|x| \to |x|.$$

Assim, tal série converge se $|x| < 1$ *e diverge se* $|x| > 1$*. Portanto, o intervalo* $(-1, 1) \subset D$*, onde* D *é o conjunto definido no teorema 66. Se* $x = 1$ *a série se reduz a*

$$1 + 2 + 3 + \cdots$$

que, evidentemente, é divergente. Se $x = -1$*, obteremos a série*

$$-1 + 2 - 3 + \cdots + (-1)^n n + \cdots$$

que também diverge. Consequentemente, o intervalo de convergência da série é $(-1, 1)$*.*

Exemplo 113. *Analisemos a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

cujo termo geral é $a_n = \frac{x^n}{n}$ *para* $n = 1, 2, \ldots$*. O teste da razão nos leva a*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \to |x|.$$

Portanto, a série converge absolutamente se $|x| < 1$ *e diverge se* $|x| > 1$*. Se* $x = 1$ *a série de potências se reduz à série harmônica que é divergente. Se* $x = -1$ *temos uma série alternada que, pelo teste de Leibnitz, converge. Então o intervalo de convergência da série em estudo é* $[-1, 1)$*.*

Exemplo 114. *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

cujo termo geral é dado por $a_n = n!x^n$*, para todo* $n = 1, 2, \ldots$*. Como nos casos anteriores pode-se usar o teste da razão para concluir que tal série converge apenas se* $x = 0$*.*

Outros exemplos serão exibidos nos exercícios.

2 Funções Analíticas

Do que foi desenvolvido nos resultados precedentes, se uma dada série de potências convergir em um intervalo $(-r, r)$, temos definido uma função $S : (-r, r) \to \mathbb{R}$ por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Que propriedades esse tipo de funções possui? As funções definidas por séries de potências pertencem a uma classe especial de funções chamadas *Funções Analíticas*. Essas funções possuem derivadas de todas as ordens mas nem todas as funções que possuem derivadas de todas as ordens são analíticas. As funções que possuem derivadas de todas as ordens, em um dado intervalo $(-r, r)$, com $0 < r \leq \infty$ são chamadas funções de classe C^∞ em $(-r, r)$. O conjunto das funções de classe C^∞ em $(-r, r)$ é representado por $C^\infty(-r, r)$. As funções analíticas em $(-r, r)$ estão contidas em $C^\infty(-r, r)$.

Mostraremos que as séries de potências podem ser derivadas termo-a-termo tal e qual se faz com os polinômios. Neste sentido, comecemos com o seguinte teorema:

Teorema 67. *Suponhamos que a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *convirja para* $|x| < r$. *Então as séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *e* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ *convergem absolutamente para todo* $|x| < r$.

Demonstração. Observemos, inicialmente, que as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ são obtidas da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, derivando-a termo-a-termo. Consideremos $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < r$ e tomemos c satisfazendo $|x| < c < r$. Por hipótese, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < r$ e daí segue-se que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n c^n$ converge e, consequentemente, $a_n c^n \to 0$. Logo, existe uma constante $K > 0$ tal que $|a_n c^n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge. Com efeito,

$$|n a_n x^{n-1}| = n |a_n c^{n-1}| \left|\frac{x}{c}\right|^{n-1} \leq \left(\frac{K}{c}\right) n \left|\frac{x}{c}\right|^{n-1}.$$

Como $\left|\frac{x}{c}\right| < 1$ temos, em virtude do teste da razão, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left|\frac{x}{c}\right|^{n-1}$ converge. Pelo teste da comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x^{n-1}|$ converge o que implica que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ também converge. Vejamos a convergência de $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ procedendo de modo análogo ao que foi feito no caso anterior. Para isso, observemos

$$|n(n-1)a_n x^{n-2}| = n(n-1)|a_n c^{n-2}| \left|\frac{x}{c}\right|^{n-2} \leq \left(\frac{K}{c^2}\right) n(n-1) \left|\frac{x}{c}\right|^{n-2}.$$

Usando, novamente, o teste da razão, temos que a série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left|\frac{x}{c}\right|^{n-2}$ converge pois $\left|\frac{x}{c}\right| < 1$. Pelo teste da comparação a série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ também converge, o que conclui a demonstração do teorema. □

Deve-se observar que as outras séries, obtidas de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ por derivação termo-a-termo, também convergem no intervalo $(-r, r)$.

Teorema 68. *Suponhamos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ convirja para cada $x \in (-r, r)$. Designemos por $S(x)$ a soma desta série, para cada $x \in (-r, r)$. Então $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é uma função derivável no intervalo aberto $(-r, r)$ e sua derivada é dada por $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Também, $S(x)$ possui derivada segunda no mesmo intervalo e $S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.*

Em virtude dos objetivos deste curso inicial não demonstraremos esse teorema, remetendo o leitor à referência de Figueiredo [1]

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 115. *Consideremos a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vê-se facilmente, usando o teste da razão, que tal série converge, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Pelo teorema 68, essa série pode ser derivada termo-a-termo e se designarmos por

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

[1]Djairo G. de Figueiredo, Análise I, 2^a Edição, L.T.C. Editora, Rio de Janeiro, 1996.

teremos

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

e $s''(x)$ existe e é dada por

$$s''(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -s(x).$$

Exemplo 116. *Consideremos a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Pelo mesmo motivo exposto no exemplo anterior, pode-se provar que essa série converge, qualquer que seja o valor de $x \in \mathbb{R}$. Designemos por $c(x)$ a soma desta série. Como é fácil ver,

$$c'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e

$$c''(x) = -c(x).$$

Pelos dois exemplos anteriores vê-se que as funções $s(x)$ e $c(x)$, ambas satisfazem ao sistema de equações diferenciais

$$s'(x) = c(x) \;\text{ e }\; c'(x) = -s(x).$$

Observemos, também, que $s(0) = 0$ e $c(0) = 1$, ou seja, as funções $s(x)$ e $c(x)$ satisfazem o *problema de valor inicial*

$$\begin{array}{ll} s'(x) = c(x) & c'(x) = -s(x) \\ s(0) = 0 & c(0) = 1. \end{array}$$

Relembremos as aulas de Cálculo para constatar que as funções sen e cos também satisfazem a um problema de valor inicial como o acima. Invocando um conhecido resultado de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias teremos

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A unicidade a que nos referimos previamente significa que seno e cosseno são as únicas funções que são soluções do problema de valor inicial citado há algumas linhas.

Vemos, assim, que os conhecidos seno e cosseno, introduzidos primariamente pelos matemáticos da Grécia Antiga, podem ser definidas, à luz do rigor que se impõe na Análise Matemática, como séries de potências. Isto significa que essas funções são analíticas e os polinômios

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

e

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

representam aproximações, respectivamente, para os valores de $\operatorname{sen} x$ e de $\cos x$ que são cada vez mais precisas a medida que aumentarmos os valores de n.

Exemplo 117. *Consideremos a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

que converge, qualquer que seja o valor de $x \in \mathbb{R}$. Designemos a soma dessa série por $\exp(x)$. Pelo teorema 68, $\exp(x)$ possui derivadas de todas as ordens e suas derivadas, obtidas por derivação termo-a-termo desta série, satisfaz

$$(\exp)'(x) = (\exp)''(x) = (\exp)'''(x) = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

que é exatamente a função exponencial tão conhecida de todos nós. Novamente, uma função que, originalmente, não teve a sua criação relacionada com a Análise Matemática surge como sendo uma série de potências.

Como no exemplo anterior, caso queiramos uma aproximação para os valores da exponencial, basta considerarmos os polinômios da forma

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

As funções $\operatorname{sen}, \cos$ e $\exp$ introduzidas pertencem a uma classe de funções chamadas *funções transcendentes.*

Exemplo 118. *Estudemos a série*

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Pelo teste da razão, essa série converge para $x \in (-1, 1)$. *O que se pode dizer sobre a convergência nas extremidades deste intervalo? Se* $x = -1$ *a série se reduzirá a*

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$$

que diverge. Se $x = 1$, *encontramos a série alternada*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

a qual, pelo teste de Leibnitz, converge. Portanto, a série em estudo converge para os valores de x *no intervalo* $(-1, 1]$. *Pelo teorema 68, podemos derivar termo-a-termo esta série, de modo que designando por* $S(x)$ *a sua soma, obteremos*

$$S'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}.$$

Lembre os capítulos passados para concluir que

$$S'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Na verdade, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ *é exatamente a representação da função* $\ln(1+x)$.

3 Exercícios Resolvidos

1. Encontre uma série de potências, em torno de 0, que represente a função
$$\frac{x}{1+x^2}.$$
Determine em qual intervalo essa representação é válida.

   Solução. Inicialmente observemos que

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n$$

   para $-1 < r < 1$. Façamos $r = x^2$ para obter

$$\frac{1}{1+x^2} == \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

válida para $|x| < 1$. Portanto,

$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

a qual é válida para $-1 < x < 1$. Observe que para $x = -1$ ou $x = 1$ esta série diverge.

2. Determine a função definida pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.$$

Solução. Notemos que esta série pode ser reescrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$

que é uma série geométrica de razão $3x$. Portanto, ela converge sempre que $|3x| < 1$, isto é, $|x| < \frac{1}{3}$. Pelo que já foi estudado das séries geométricas, sua soma é $\frac{1}{1-3x}$. Então

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n.$$

4 Exercícios Propostos

1. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

converge.

2. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge.

3. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n} x^n$$

converge.

4. Determine o intervalo de $\mathbb{R}$ no qual a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(x-\sqrt{2})^n$$

converge.

5. Encontre o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n.$$

6. Represente a função $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ em série de potências.

7. Represente a função $f(x) = e^{-x}$ em série de potências.

8. Encontre o raio de convergência de cada uma das seguintes séries:

   (a) $\sum (-1)^n x^{2n}$;

   (b) $\sum nx^n$;

   (c) $\sum n!x^n$

   (d) $\sum \frac{x^n}{n^n}$.

9. Se o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

existe ou é igual a ∞, então

$$R := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

também fornece o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$.

10. Exiba um exemplo de uma série de potências $\sum a_n x^n$ com raio de convergência igual a 1 que não é absolutamente convergente nos extremos -1 e 1 do intervalo de convergência.

11. Exiba uma série de potências $\sum a_n x^n$ cujo intervalo de convergência seja exatamente $[-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

12. Seja R o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$. O que se pode dizer sobre os raios de convergências das séries $\sum na_n x^n$ e $\sum n^{-1}a_n x^n$?

13. Suponhamos que as séries de potências $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ tenham raios de convergência iguais, respectivamente, a R_a e R_b. Se $|a_n| \leq |b_n|$ para todo n suficientemente grande, qual a relação que deve existir entre R_a e R_b?

14. Encontre o raio de convergência da série

$$\sum \frac{(an)!}{(n!)^b} x^n,$$

em que a e b são positivos e a é inteiro.

15. Seja $0 < R < \infty$ o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$. Qual deve ser o raio de convergência da série $\sum a_n x^{2n}$?

Capítulo 14

A Integral de Riemann: Noções Iniciais

Ao cursar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, o(a) estudante depara-se com processos chamados *Integração*. Em um deles, dada uma função $f(x)$, deseja-se encontrar uma função $F(x)$, chamada primitiva de $f(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$. Designa-se esse processo por

$$F(x) = \int f(x)dx + C,$$

em que C é uma constante arbitrária. Posteriormente, defronta-se com o problema de calcular a *Integral de Riemann* de uma dada função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. Denota-se esse processo por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Esse último está relacionado com o cálculo de áreas, ao passo que o primeiro, por envolver derivadas, está ligado à construção de tangentes a gráficos de funções.

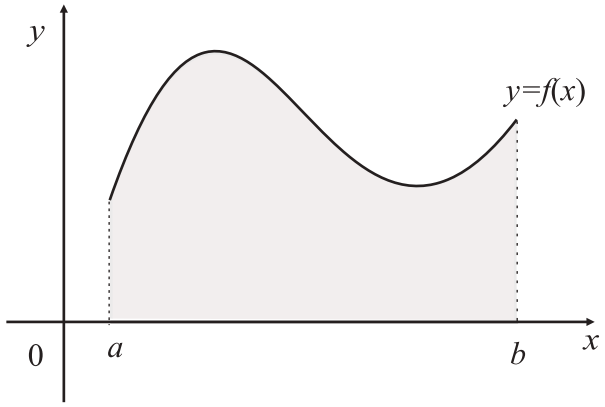
Georg Friedrich Bernhard **Riemann** nasceu a 17 de setembro de 1826 em Breeselenz, Hanover, Alemanha e faleceu a 20 de julho de 1866 em Selasca na Itália. Dedicou-se principalmente à Análise e a Geometria Diferencial.

Essas *"duas integrações"* estão relacionadas via *Teorema Fundamental do Cálculo* o qual será estudado no próximo capítulo. Neste, estabeleceremos os conceitos e resultados básicos sobre a *Integral de Riemann.*

1 Somas de Riemann

Antes de definirmos o conceito principal desta seção, que é o de somas de Riemann, começaremos motivando a definição utilizando o apelo geométrico da integral por meio de áreas.

Exemplo 119. (A área sob o gráfico de uma função) Suponhamos que $y = f(x)$ seja uma função contínua e não-negativa definida no intervalo fechado $[a, b]$. Consideremos o problema de calcular a área sob o gráfico de $y = f(x)$, para x variando de a até b, e acima do eixo x. Veja a figura abaixo.



Esse problema, que é bem geral, nos remete à Geometria Plana Elementar na qual são consideradas áreas de polígonos, que são figuras decompostas em um número finito de triângulos, e até mesmo de figuras curvilíneas como o círculo, segmentos de parábolas, lúnulas etc. Algumas vezes, no estágio pré-cálculo, é possível, via aproximações por triângulos ou retângulos, calcular áreas de figuras curvilíneas. Isso foi feito com a parábola, por Arquimedes, em cujo método jaziam as noções de convergência, supremo etc., não devidamente esclarecidas à época. Ou seja, nos primórdios da Geometria Elementar foram lançadas, via *Método da Exaustão de Eudoxo*, as sementes daquilo que, com Newton, Leibniz, Cauchy, Riemann etc., se tornou a *Integral de Riemann.*

O método descrito a seguir consiste em aproximar a figura curvilínea, mostrada na figura, por meio de retângulos. Com esse objetivo, subdividiremos o intervalo $[a, b]$ em um determinado número de subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$ considerando pontos da forma

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 65. *Uma* partição *do intervalo* $[a, b]$ *é um subconjunto finito* $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *de* $[a, b]$ *que satisfaz*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Designaremos uma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *do intervalo* $[a, b]$ *por*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ *são chamados* subintervalos da partição P. *O comprimento do subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *da partição será denotado por* Δx_i, *ou seja,* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, \dots n.$

A partir de agora, e ao longo de toda a parte referente à integração de Riemann, consideraremos sempre funções limitadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas em intervalos fechados e limitados.

Dada uma partição P como acima e desde que f é uma função limitada faz sentido considerar os números m_i e M_i definidos por:

$$m_i = \inf \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e

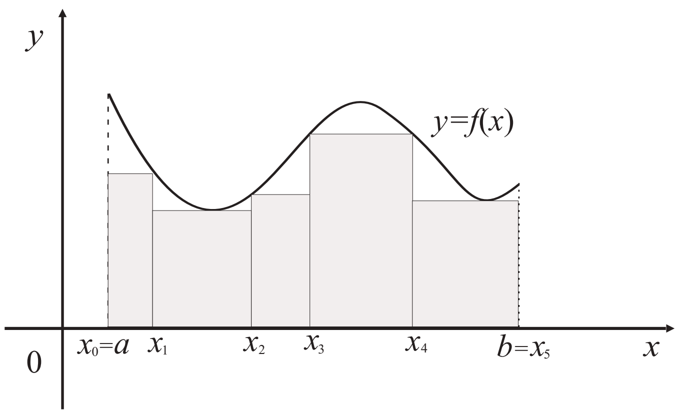
$$M_i = \sup \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e vê-se que $m_i \leq M_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definição 66. *Define-se a* soma inferior de Riemann *da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com relação à partição P, por*

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

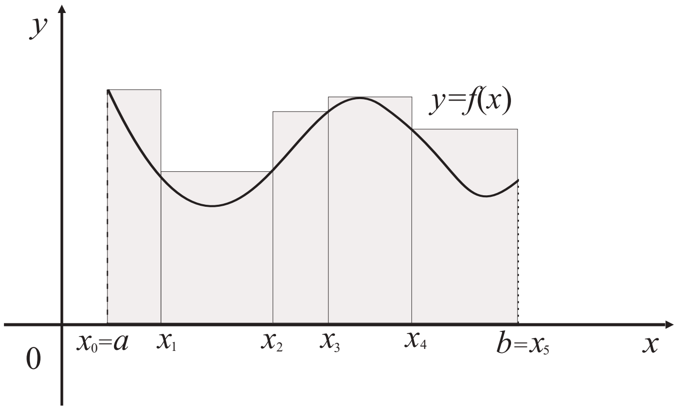
No caso em que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, a soma inferior de Riemann é uma aproximação por falta da área sob o gráfico de f. Na próxima figura a soma inferior de Riemann da função f com relação a partição $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = b\}$ é igual a área da região escura



Definição 67. *Define-se a* soma superior de Riemann *da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com relação à partição P, por*

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Para funções que satisfazem $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, a soma superior de Riemann é uma aproximação por excesso da área sob o gráfico de f. Na figura seguinte temos a soma inferior de Riemann da função f com relação a partição $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = b\}$ é igual a área da região escura



Claramente $s(f,P) \leq S(f,P)$. Verificaremos que esta última desigualdade continua válida mesmo que as partições sejam distintas na desigualdade precedente. Antes de provar este fato necessitamos de algumas definições e resultados.

Definição 68. *Sejam P e Q partições do intervalo $[a,b]$. Diz-se que Q é um* refinamento *de P se $P \subset Q$.*

Isto significa que a partição Q, no caso em que $P \subsetneqq Q$, além dos pontos de P, possui pelo menos um ponto adicional.

Dada a partição P definida por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

consideremos a partição

$$Q = \left\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{j-1} < x_j' < x_j < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\right\},$$

na qual acrescentamos o ponto x_j'. Vê-se facilmente que

$$M_j \geq M_j' = \sup\left\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j']\right\}$$

e

$$M_j \geq M_j'' = \sup\left\{f(x); x \in [x_j', x_j]\right\}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_j(x_j - x'_j + x'_j - x_{j-1}) \\
&+ \sum_{i=j+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_j(x_j - x'_j) \\
&+ M_j(x'_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{j-1} M_i(x_i - x_{i-1}) \\
&+ M'_j(x_j - x'_j) + M'_j(x'_j - x_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= S(f,Q)
\end{aligned}
$$

Assim, concluímos que se Q for um refinamento de P, possuindo um ponto adicional com relação à partição P, então $S(f,Q) \leq S(f,P)$. No caso geral, em que a partição Q é um refinamento qualquer de P, segue-se que Q possui um número finito de pontos a mais do que P. Aplicando-se a desigualdade acima reiteradas vezes, obtém-se $S(f,Q) \leq S(f,P)$, quaisquer que sejam as partições P e Q tais que $P \subset Q$.

De maneira análoga teremos, para P e Q como acima, $s(f,P) \leq s(f,Q)$. Conclusão: as somas inferiores aumentam a medida que refinamos a partição, enquanto que as somas superiores diminuem. Pode-se, então, provar o seguinte resultado:

Lema 7. *Sejam P e Q partições quaisquer do intervalo $[a,b]$. Então*

$$s(f,P) \leq S(f,Q).$$

Demonstração. Sejam P e Q partições do intervalo $[a,b]$. Então $P \cup Q$ é um refinamento de P e de Q. Usando a observação que precede esse lema, teremos

$$s(f,P) \leq s(f,P \cup Q) \leq S(f,P \cup Q) \leq S(f,Q),$$

o que conclui a demonstração do lema. □

Designando por $\mathcal{P}$ o conjunto das partições do intervalo $[a,b]$ vê-se, pelo lema acima, que o conjunto

$$\{s(f,P); P \in \mathcal{P}\}$$

é limitado superiormente, enquanto que o conjunto

$$\{S(f,P); P \in \mathcal{P}\}$$

é limitado inferiormente. Temos, assim, as seguintes definições.

Definição 69. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, sua* integral inferior $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ *é definida por*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,P); P \in \mathcal{P}\}$$

e a sua integral superior $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ *é definida por*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,P); P \in \mathcal{P}\}.$$

Decorre das definições acima que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

2 Funções Integráveis

Comecemos a estudar uma classe especial de funções:- aquelas para as quais o supremo das somas inferiores de Riemann é igual ao ínfimo das somas superiores.

Definição 70. *Diz-se que uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é* Riemann-integrável *(ou simplesmente* integrável*) se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Quando f é integrável, o valor comum $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ é designado por $\int_a^b f(x)dx$ e chamado *integral de Riemann* (ou simplesmente *integral*) de f em $[a,b]$.

Enunciemos um critério de integrabilidade.

Teorema 69. *Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existir $P \in \mathcal{P}$ tais que*

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Demonstração. Suponhamos que f seja integrável, ou seja, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ o que é equivalente a

$$\sup\{s(f,P); P \in \mathcal{P}\} = \inf\{S(f,P); P \in \mathcal{P}\}.$$

Decorre da definição de sup que, dado $\epsilon > 0$, existirá uma partição P_ϵ tal que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < s(f, P_\epsilon).$$

Analogamente, da definição de inf, encontramos $Q_\epsilon \in \mathcal{P}$ de modo que

$$S(f, Q_\epsilon) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2},$$

observando que nas duas desigualdades prévias usamos o exercício 12 do capítulo 1. Assim,

$$S(f, Q_\epsilon) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} < s(f, P_\epsilon) + \epsilon$$

e daí

$$S(f, Q_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) < \epsilon.$$

Seja $P = P_\epsilon \cup Q_\epsilon$, que é um refinamento tanto de P_ϵ quanto de Q_ϵ. Então,

$$S(f, Q_\epsilon) \geq S(f, P)$$

e

$$s(f, P_\epsilon) \leq s(f, P)$$

de modo que

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon.$$

Reciprocamente, suponhamos que, dado $\epsilon > 0$, exista uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon.$$

Temos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f, P)$$

e

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \geq s(f, P)$$

donde

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f, P) - s(f, P) < \epsilon,$$

ou seja,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$$

e, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, teremos

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Como, de maneira geral, temos

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

concluímos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

o que mostra que f Riemann-integrável em $[a, b]$. □

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 120. *Comecemos com um exemplo bem simples. Consideremos a função constante $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = K$, para todo $x \in [a, b]$, em que K é uma constante fixada. Dada uma partição*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

temos

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} K(x_j - x_{j-1}) = K \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = K(b - a)$$

e

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^{n} K(x_j - x_{j-1}) = K \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = K(b - a),$$

pois, sendo f constante, $M_j = m_j = K$, para todo $j = 1, \ldots, n$, e a soma dos comprimentos de todos os subintervalos da partição P é igual ao comprimento $b-a$ do intervalo $[a, b]$. Como $S(f, P) = s(f, P)$, qualquer que seja a partição P de $[a, b]$, teremos

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = K(b - a)$$

e então f é integrável no intervalo $[a, b]$ e sua integral nesse intervalo é dada por $K(b - a)$.

Exemplo 121. *Consideremos a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para todo $x \in [0,1]$. Mostremos que ela é Riemann-integrável no intervalo $[0,1]$, usando o critério de integrabilidade dado no teorema 69. Tomemos um $\epsilon > 0$ arbitrário e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a partição P_n construída como*

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\}.$$

Um cálculo simples nos mostra que

$$s(f, P_n) = \frac{n-1}{2n}$$

e

$$S(f, P_n) = \frac{n+1}{2n}$$

em que se deve observar que usamos a fórmula

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) < \frac{1}{n}.$$

Usando o fato de que a sequência $\frac{1}{n} \to 0$, encontramos $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ e daí, para tal n, obtemos

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) < \epsilon,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, encontramos uma partição P_n do intervalo $[0,1]$ tal que a condição do teorema 69 é satisfeita e, assim, a função $f(x) = x$ é integrável no intervalo $[0,1]$. Deve-se observar que o fato de termos considerado o intervalo $[0,1]$ é irrelevante e foi utilizado apenas tornar os cálculos mais simples. Tudo o que se fez neste exemplo pode ser feito, mutatis mutandis, para um intervalo qualquer, fechado e limitado, $[a,b]$.

Exemplo 122. *Consideremos a função $f(x) = x^2$ definida no intervalo $[0,1]$. Seja $\epsilon > 0$ um número real dado. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a partição*

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\}.$$

Para tal partição, verifiquemos que $s(f, P_n)$ e $S(f, P_n)$ são dadas por

$$\begin{aligned} s(f, P_n) &= \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right] \\ &= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}(n-1)(2n-1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

observando que estamos utilizando a expressão

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

a qual é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. *Um cálculo simples nos mostra (verifique!) que*

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{1}{6}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right] < \epsilon$$

se $n \in \mathbb{N}$ *for suficientemente grande. Isto mostra que* f *é integrável em* $[0, 1]$. *De maneira análoga, mostra-se que* f *é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado* $[a, b]$.

Pode-se demonstrar, verifique como exercício, que a função $f(x) = x^3$ *é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado* $[a, b]$. *Use a identidade*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2,$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Em todos os exemplos prévios as funções consideradas eram todas contínuas e definidas em intervalos fechados e limitados. Na verdade, temos uma situação bem mais geral que é traduzida na afirmação de que toda função contínua definida em intervalos fechados e limitados são integráveis. Mas deve-se ressaltar que existem funções que não são contínuas, mas são integráveis. Vejamos um exemplo de uma função não-integrável.

Exemplo 123. *Defina a função* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \;\; x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & se \;\; x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Usando o fato de que qualquer intervalo $[a, b]$, $a < b$, *possui números racionais e números irracionais, concluímos que*

$$S(f, P) = 1 \;\; e \;\; s(f, P) = 0,$$

qualquer que seja a partição P *de* $[0, 1]$. *Portanto, tal função não é integrável, pois temos a diferença constante*

$$S(f, P) - s(f, P) = 1$$

para toda partição do intervalo $[0, 1]$.

Exemplo 124. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma* função não-decrescente, *isto é, que se* $a \leq x_1 < x_2 \leq b$*, então* $f(x_1) \leq f(x_2)$*. Se* $f(a) = f(b)$*, então* f *é constante e daí será integrável. Consideremos o caso no qual* $f(a) < f(b)$*. Mostremos que* f *é integrável. Para isto, seja* $\epsilon > 0$ *e tomemos uma partição* $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ *do intervalo* $[a,b]$ *tal que* $x_j - x_{j-1} < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$*. Claramente, podemos construir tal partição, bastando para isso refinarmos o intervalo* $[a,b]$ *de modo que obtenhamos subintervalos de comprimentos cada vez menores. Assim,*

$$
\begin{aligned}
S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} \left(f(x_j) - f(x_{j-1})\right)(x_j - x_{j-1}) \\
&< \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} \Big[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) \\
&+ \cdots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(b) - f(x_{n-1}) \Big] \\
&= \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \left(f(b) - f(a)\right) \\
&= \epsilon,
\end{aligned}
$$

em que estamos usando o fato de que $a = x_0$ *e* $b = x_n$*. Das desigualdades acima, concluímos que* f *é integrável.*

Pode-se provar, de maneira análoga, que funções não-crescentes são também integráveis.

Vejamos uma aplicação deste resultado.

Teorema 70. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função não-decrescente e consideremos a partição do intervalo* $[a,b]$ *cujos pontos* $x_j, j = 0, 1, \cdots, n$ *são dados por* $x_j = a + \frac{j(b-a)}{n}$*. Seja* I *um número real satisfazendo*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j), \tag{14.1}$$

qualquer que seja $n \geq 1$*. Então* $I = \int_a^b f(x)dx$*.*

Demonstração. Pelo resultado anterior temos que a função f, satisfazendo as hipóteses do teorema, é integrável. Observemos que $\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$ é uma soma inferior de f e $\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$ é uma soma superior. Consequentemente,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j).$$

Antes de prosseguirmos, notemos que se x e y forem números reais satisfazendo $\alpha \leq x, y \leq \beta$, em que α e β são números reais, então $0 \leq |x - y| \leq \beta - \alpha$. Assim,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) - f(x_0) - f(x_1) - \cdots - f(x_{n-1}) \right]$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[f(x_n) - f(x_0) \right]$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[f(b) - f(a) \right] \to 0$$

se $n \to \infty$. Então $I = \int_a^b f(x)dx$ e a demonstração do teorema está completa. $\square$

Exemplo 125. *Usemos o teorema 70 para mostrar que*

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

qualquer que seja o inteiro positivo k.

De fato, fixado um inteiro positivo k, observemos que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, teremos

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

e

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k - \left(\frac{1}{k+1} \right) n^k.$$

Um cálculo simples nos mostra que

$$\frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^k + \left(\frac{2}{n} \right)^k + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^k \right] < \frac{1}{k+1} <$$

$$\frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^k + \left(\frac{2}{n} \right)^k + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^k \right].$$

Observemos que esta última dupla desigualdade é exatamente a dupla desigualdade (14.1) quando $a = 0, b = 1, f(x) = x^k$ e $I = \frac{1}{k+1}$. Então

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

e assim temos uma primeira expressão para o cálculo de integrais para uma classe relevante de funções. Com as propriedades que introduziremos no capítulo 15 teremos uma expressão para integrais de polinômios em intervalos fechados e limitados.

Deve-se observar que o fato de termos tomado a integral no intervalo $[0,1]$ é irrelevante. Tudo o que foi feito neste exemplo se aplica, com poucas modificações, à integração em um intervalo fechado qualquer $[a,b], a<b$. Verifique, como exercício, usando estas idéias, que

$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}\left[b^{k+1} - a^{k+1}\right].$$

Deve-se ressaltar que, até o presente momento, detivemo-nos apenas nos aspectos de integrabilidade sem nos atermos às questões do cálculo de integrais. Apenas com instrumentos de que dispomos até agora é algo extremamente trabalhoso, e muitas vezes impossível, calcular precisamente o valor de uma dada integral. No entanto, por meio do *Teorema Fundamental do Cálculo*, que será estudado no capítulo 15 introduziremos uma maneira de calcular várias integrais. Existem, também, métodos numéricos que não serão estudados aqui.

Há outras maneiras alternativas, porém equivalentes, de definir a Integral de Riemann. Não nos deteremos nessas formas equivalentes remetendo o(a) leitor(a) para as referências de Figueiredo[1] e Bartle & Sherbert[2].

3 Propriedades da Integral

Teorema 71. *Se $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ forem funções integráveis, então $f+g:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração. Comecemos considerando uma partição P do intervalo $[a,b]$. Usando as definições introduzidas previamente, obtemos

$$\overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \le S(f+g,P) \le S(f,P)+S(g,P)$$

e

$$\underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \ge s(f+g,P) \ge s(f,P)+s(g,P).$$

[1]Análise I, Djairo G. de Figueiredo, Análise I, Editora Universidade de Brasília, 1997

[2]Introduction to Real Analysis, Robert G. Bartle & Donald R. Sherbert, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.2000

Se P e Q forem partições quaisquer, então $P \cup Q$ será refinamento de P e Q. Assim,

$$\overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \leq S(f,P)+S(g,Q),$$

de modo que

$$\overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

pois f e g são integráveis. De modo análogo, obtém-se

$$\underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Dessas desigualdades, conclui-se que $f+g$ é integrável e

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

□

Teorema 72. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e λ uma constante real. Então $\lambda f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, é integrável e*

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração. Se $\lambda = 0$ nada há a demonstrar. Suponhamos $\lambda > 0$ e usemos o teorema 69. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P_ϵ do intervalo $[a,b]$ tal que

$$S(f,P_\epsilon) - s(f,P_\epsilon) < \frac{\epsilon}{\lambda}.$$

Como é fácil ver, $S(\lambda f, P_\epsilon) = \lambda S(f,P_\epsilon)$ e $s(\lambda f, P_\epsilon) = \lambda s(f,P_\epsilon)$. Consequentemente,

$$S(\lambda f,P_\epsilon) - s(\lambda f,P_\epsilon) = \lambda\left(S(f,P_\epsilon) - s(f,P_\epsilon)\right) < \epsilon.$$

Isso mostra que, se $\lambda > 0$, a função λf é integrável. Como, $S(\lambda f, P_\epsilon) = \lambda S(f,P_\epsilon)$ e $s(\lambda f, P_\epsilon) = \lambda s(f,P_\epsilon)$, concluímos que

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Se $\lambda < 0$, a demonstração é feita de maneira análoga. Para isso, use, novamente, o veja exercício 17, Capítulo 1. □

Teorema 73. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, então f^2 é integrável.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$. Desde que f é integrável, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P_ϵ de $[a,b]$ tal que

$$S(f, P_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2M},$$

em que $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Recordemos que f é limitada e $f \geq 0$. Assim,

$$S(f^2, P_\epsilon) - s(f^2, P_\epsilon) = \sum_{i=1}^{n}(M_i^2 - m_i^2)\Delta x_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(M_i + m_i)\Delta x_i \leq 2M\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \epsilon.$$

Isso mostra que f^2 é integrável se $f \geq 0$. Se f não for necessariamente não-negativa procederemos da seguinte maneira. Como f é limitada, podemos considerar $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e daí $f(x) - m \geq 0$ é integrável. Assim, $(f(x) - m)^2$ é integrável e usando a identidade

$$f^2 = (f - m)^2 + 2mf - m^2,$$

concluímos que f^2 é integrável por ser a soma de funções integráveis. $\square$

Observação 13. *Observemos que os resultados precedentes nos dizem, em particular, que, se f, g forem integráveis em $[a,b]$, então $\lambda f + \mu g, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, será integrável e*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Mais particularmente, $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$. Se designarmos por $\mathcal{R}[a,b]$ o espaço vetorial das funções Riemann-integráveis no intervalo $[a,b]$, podemos interpretar essas propriedades dizendo que o operador $I : \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}$, definido por $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ é linear. Para o(a)s que já tenham estudado Álgebra Linear, devemos observar que $\mathcal{R}[a,b]$ não possui dimensão finita.

4 Exercícios Propostos

1. Prove, por indução, que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)$$

é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Prove, por indução, que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2$$

é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (a,b] \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

Mostre que f é integrável. É possível calcular $\int_a^b f(x)dx$?

4. Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^3$ e a partição $P = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, 1\right\}$. Calcule $s(f,P)$ e $S(f,P)$.

5. Se $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

6. Mostre que o valor de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ no ponto a não altera a integrabilidade de f nem o valor da integral de f em $[a,b]$.

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa e contínua. Mostre que se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se f não for contínua, essa conclusão ainda é verdadeira?

8. Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ forem integráveis, então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

9. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $M = \max\{|f(x)|; x \in [a,b]\}$, mostre que

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq M(b-a).$$

10. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $0 \leq m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$. Mostre que

$$m \leq \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

11. Mostre que
$$1 \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx \leq 2.$$

12. Suponhamos que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja contínua, derivável em $(0,1), f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq 1$ para todo $x \in (0,1)$. Mostre que
$$-\frac{1}{2} \leq \int_{0}^{1} f(x)dx \leq \frac{1}{2}.$$

13. Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas e
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} g(x)dx,$$
mostre que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

14. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é limitada e f^2 é integrável em $[0,1]$, então f é integrável em $[0,1]$. Falso ou verdadeiro? Justifique.

15. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x) \geq \alpha > 0$, para todo $x \in [a,b]$ e alguma constante α. Mostre que $\frac{1}{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

16. Sejam $f \geq 0$ uma função contínua em $[a,b]$ e $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Mostre que
$$\lim_{p \to \infty} \left(\int_{a}^{b} [f(x)]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = M.$$

17. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_a^x f(t)dt = 0$ para todo $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

5 Apêndice I

Conjuntos de Medida Nula. Condição de Integrabilidade

Definição 71. *Um conjunto C possui* medida zero *se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir uma família finita ou enumerável de intervalos (I_n) tal que $C \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$ em que $|I_n|$ designa o comprimento do intervalo I_n. Observemos que se a família for finita teremos $I_n = \emptyset$ a partir de um certo $n \in \mathbb{N}$.*

Notemos que todo conjunto enumerável possui medida zero. Com efeito, se $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$, dado $\varepsilon > 0$, consideremos a família de intervalos (I_n) dada por $I_n = (c_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, c_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}})$ de comprimento $|I_n| = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, C possui medida zero.

O conceito de medida zero é um caso particular do conceito de *Medida Exterior de Lebesgue.* Mais precisamente, a medida exterior de Lebesgue de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, designada por $m^*(A)$, é definida por

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum |I_n|; A \subset \cup I_n \right\},$$

em que (I_n) é uma família de intervalos abertos.

No caso dos conjuntos finitos, além de medida zero, eles possuem conteúdo zero. Vejamos a definição de conteúdo.

Definição 72. *Diz-se que um conjunto C possui* conteúdo zero *se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir uma família finita de intervalos $\{I_1, \ldots, I_n\}$ tal que $C \subset I_1 \cup \ldots I_n$ e $|I_1| + \cdots + |I_n| < \varepsilon$.*

O teorema a seguir, cuja demonstração será omitida, nos dá uma condição necessária e suficiente de integrabilidade.

Teorema 74. *Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, o conjunto de seus pontos de descontinuidade possuir medida zero.*

Mais informações sobre esses conceitos e resultados podem ser encontrados em de Figueiredo[3], Ávila[4]

[3]Djairo G. de Figueiredo, Análise I, LTC., 2ª Edição, 1997

[4]Geraldo Ávila, Introdução à Análise Matemática, Editora Edgard Blücher LTDA., 1993.

Capítulo 15

O Teorema Fundamental do Cálculo - Relação entre Derivação e Integração

Este capítulo será dedicado ao estudo de certas conexões entre os conceitos de derivada e de integral. Essa conexões são expressas pelo *Teorema Fundamental do Cálculo* que, *grosso modo*, traduz o fato de que as operações de derivação e integração são inversas uma da outra.

1 Primitivas

O *Teorema Fundamental do Cálculo* nos fornece, entre outras coisas, uma maneira de calcular integrais de certas funções desde que conheçamos uma de suas primitivas. Esse cálculo de primitivas é exatamente o processo inversa da derivação. Tornemos mais preciso esse conceito.

Definição 73. *Diz-se que uma função derivável* $F : I \to \mathbb{R}$*, em que* I *é um intervalo de* $\mathbb{R}$*, é uma* primitiva *de uma dada função* $f : I \to \mathbb{R}$ *se* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Pelo que foi estudado ao longo dos curso de Cálculo e de Análise é fácil ver que:

(a) a função $F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, com $m \neq -1$ é uma primitiva de $f(x) = x^m$;

(b) a função $F(x) = \operatorname{sen} x + C$ é uma primitiva da função $f(x) = \cos x$, qualquer que seja a constante C.

Algumas questões se colocam:

(i) Que classe de funções possuem primitivas?

(ii) Que relação existe entre primitivas, caso existam, de uma dada função?

Essas questões serão respondidas ao longo deste capítulo. Em virtude dos objetivos imediatos deste curso, não nos deteremos em questões muitos gerais. Comecemos com o

Teorema 75. (Teorema do Valor Médio para Integrais) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração. Desde que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

e

$$f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Assim, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Integrando termo a termo essa última sequência de desigualdades, obtemos

$$\int_a^b f(x_1)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x_2)dx.$$

Usando o fato de que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são constantes, teremos

$$f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)(b-a)$$

e daí

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2).$$

Usando o teorema do valor intermediário e o fato de que $f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ e $f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ obtemos $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Suponhamos, agora, que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Assim, ela será integrável em $[a, b]$ e, consequentemente, será integrável em qualquer intervalo fechado contido em $[a, b]$. Portanto, faz sentido definir a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Essa função é contínua, como se pode ver pelos argumentos a seguir. Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ e observemos que

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

Como f é contínua no intervalo $[a, b]$, existe uma constante positiva M tal que $|f(t)| \leq M$, para todo $t \in [a, b]$. Então

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \right| \leq M \left| \int_{x_1}^{x_2} dt \right| = M|x_2 - x_1|,$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ o que mostra que a função F é, Lipschitziana, logo, contínua. Na verdade, pode-se provar muita mais: a função F é derivável, conforme mostra o próximo teorema.

Teorema 76. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é derivável e é uma primitiva de f.

Demonstração. Consideremos f e F como no enunciado do teorema e tomemos $x \in [a, b]$. Dado $h \in \mathbb{R}$ tal que $x + h \in [a, b]$, podemos calcular $F(x + h)$ e assim, fazer

$$F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Usando o teorema do valor intermediário para integrais, encontramos c_h pertencente ao intervalo $[x, x + h]$, se $h > 0$, ou pertencente ao intervalo $[x + h, x]$, se $h < 0$, tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)h.$$

Logo,

$$F(x + h) - F(x) = f(c_h)h$$

o que implica

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(c_h).$$

Sendo f contínua e c_h um ponto entre x e $x+h$, teremos $f(c_h) \to f(x)$ se $h \to 0$. Isto nos diz, em virtude da última igualdade, que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

existe e é igual a $f(x)$. Então $F'(x) = f(x)$ o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

O teorema precedente nos mostra como encontrar uma primitiva de uma função contínua. É claro que se uma função f possuir uma primitiva F, então existirão infinitas primitivas pois, para cada constante $C \in \mathbb{R}$, $F + C$ também será uma primitiva de f, uma vez que $(F + C)' = F' = f$. O próximo teorema nos diz que dessa maneira obtemos todas as primitivas de f.

Teorema 77. *Sejam F e G duas primitivas da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então $F - G$ é uma função constante.*

Demonstração. Como F e G são primitivas de f, teremos $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Assim, $F'(x) = G'(x)$ para todo $x \in [a, b]$, donde $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = 0$. Sabe-se, como decorrência do teorema do valor médio, que se uma função derivável em um intervalo tiver derivada nula nesse intervalo, ela será constante. Então, existe uma constante C tal que $F(x) - G(x) = C$. $\square$

Concluímos desse teorema que duas primitivas de uma dada função em um intervalo diferem por uma constante.

2 Teorema Fundamental do Cálculo

Lembremos que o conceito de derivada de uma função f em um ponto p de seu domínio é motivado pelo cálculo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$. Assim, para determinarmos a *derivada* $f'(p)$ precisamos conhecer o comportamento de f apenas nas proximidades de p. Por isso dizemos que derivada é um conceito local. Já a noção de integral de uma função f tem como motivação o cálculo da área abaixo do gráfico de f. Como a própria palavra sugere, para calcularmos a *integral* $\int_a^b f(x)dx$ de f é preciso levarmos em conta a função como um todo. Por isso, dizemos que a integral é um conceito global. Portanto, as noções de derivada e integral têm motivações e definições bem distintas, entretanto o teorema fundamental do cálculo estabelece uma ponte entre esses dois conceitos e nisso consiste a sua beleza e importância.

Teorema 78. (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se G for uma primitiva qualquer de f em $[a, b]$ então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração. Como vimos no teorema 76, a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma primitiva de f. Pelo teorema 77, temos

$$\int_a^x f(t)dt - G(x) = C$$

para todo $x \in [a,b]$, em que C é uma constante. Fazendo $x = a$ nessa última igualdade, obtemos

$$\int_a^a f(t)dt - G(a) = C$$

e como $\int_a^a f(t)dt = 0$, chegamos a $C = -G(a)$. Assim,

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a),$$

para todo $x \in [a,b]$. Fazendo $x = b$ nessa última igualdade, concluímos que

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Isso conclui a demonstração do teorema fundamental do Cálculo. □

Deve-se observar que o teorema fundamental do Cálculo foi demonstrado partindo do pressuposto que a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua. Isto foi feito apenas para facilitar os cálculos. No entanto, deve-se enfatizar que podemos ter situações bem mais gerais, conforme mostra o próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em Bartle & Sherbert[1] que é uma outra versão do teorema fundamental do Cálculo.

Teorema 79. *Suponhamos que existam um conjunto finito $E \subset [a,b]$ e funções $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que:*

(a) F é contínua em $[a,b]$,

(b) $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]/E$,

(c) f é integrável em $[a,b]$.

Então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Observemos que estamos admitindo que f seja apenas integrável, o que nos permite supor que f possua algumas descontinuidades. Vejamos um exemplo.

[1]Robert G. Bartle & Donald R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.

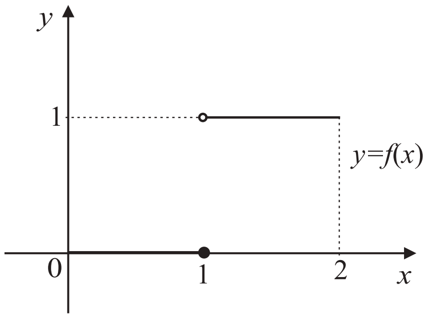
Exemplo 126. *Consideremos a função*

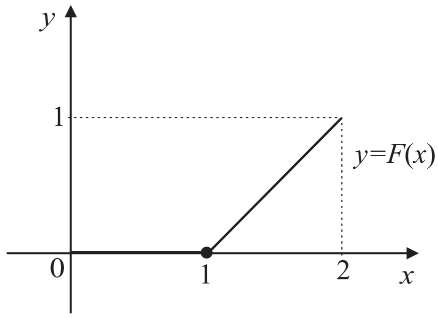
$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & se\ \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

a qual é integrável, pois possui apenas um ponto de descontinuidade. A função $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ *é dada por*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se\ \ 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & se\ \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

a qual é contínua em todos os pontos do intervalo $[0,2]$ *e derivável em* $[0,2]/\{1\}$*.*





Observemos que essa função satisfaz todos os requisitos do teorema anterior.

3 Duas Fórmulas para o Cálculo de Integrais

Apresentaremos nesta seção duas fórmulas para o cálculo de integrais de certas funções, a saber, a fórmula da mudança de variáveis em integrais e a fórmula de integração por partes.

Teorema 80. (Fórmula da Mudança de Variáveis em Integrais) *Seja* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *uma função derivável, com derivada contínua em* $[\alpha, \beta]$*. Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *for contínua em um intervalo* I *que contenha o intervalo* $\varphi([\alpha, \beta])$ *então*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx. \tag{15.1}$$

Demonstração. Inicialmente, observemos que as hipóteses de continuidade de f e de φ' são consideradas a fim de garantir a existência da integral no primeiro membro da igualdade em (15.1). Usaremos a regra da cadeia e o teorema fundamental do Cálculo. Para isso, seja a função $G(t) = F(\varphi(t))$ definida no intervalo $[\alpha, \beta]$ em que $F : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f. Ela é derivável, por ser a composta de duas funções deriváveis e $G'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, pois F é primitiva de f. Assim, pelo teorema fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\varphi(t))dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

e daí

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

o que conclui a demonstração da fórmula de mudança de variáveis. □

Vejamos um exemplo.

Exemplo 127. Calculemos a integral

$$\int_1^2 (t^2+1)^{10}\, 2t\, dt.$$

Comparando esta integral com a fórmula de mudança de variáveis teremos $\alpha = 1, \beta = 2, f(x) = x^{10}, \varphi(t) = t^2 + 1, \varphi(1) = 2, \varphi(2) = 5$ e $\varphi'(t) = 2t$. Assim,

$$\int_1^2 (t^2+1)^{10} 2tdt = \int_2^5 x^{10}dx = \left[\frac{x^{11}}{11}\right]_2^5 = \frac{5^{11} - 2^{11}}{11}.$$

Vejamos agora a fórmula de integração por partes.

Teorema 81. (Fórmula de Integração por Partes) *Sejam* $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções deriváveis no intervalo* $[a, b]$ *tais que* $F'(x) = f(x)$ *e* $G'(x) = g(x)$ *sejam funções integráveis. Então*

$$\int_a^b G(x)f(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx.$$

Demonstração. Como F e G são deriváveis então FG é derivável e

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg.$$

Por hipótese, f e g são integráveis. Da derivabilidade de F e G, segue-se que elas são contínuas, logo elas são também, integráveis. Integrando ambos os membros da última igualdade, obtemos

$$\int_a^b (FG)'(x)dx = \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx.$$

Usando o teorema fundamental do Cálculo, temos

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx$$

e daí obtemos a fórmula desejada. □

4 Exercícios Resolvidos

1. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas no intervalo fechado e limitado $[a, b]$ tal que $g(x) \geq 0$. Mostre que existe $c \in [a, b]$ satisfazendo
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

   Solução. Desde que a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, ela atinge máximo e mínimo em $[a, b]$, ou seja, existem $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Assim,
$$m \leq f(x) \leq M,$$
para todo $x \in [a, b]$. Como g é não-negativa,
$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \text{ para todo } x \in [a, b].$$
Integrando os termos nessa última desigualdade, obtemos
$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$
Observemos que, sendo g contínua e não-negativa, se $\int_a^b g(x)dx = 0$ então $g(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ de modo que, se este for o caso, o exercício estará concluído. Suponhamos que $\int_a^b g(x)dx > 0$. Daí,
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$
Ora, sendo f contínua, podemos usar o teorema do valor intermediário, encontramos $c \in [a, b]$ tal que
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$
o que conclui a resolução do exercício.

   Deve-se enfatizar que a condição de não-negatividade imposta sobre a função g não pode ser descartada. De fato, suponhamos $g(x) = x$ e o $[a, b] = [-1, 1]$. Seja também $f(x) = x, x \in [a, b]$. Por um lado temos
$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$
Por outro lado
$$f(c)\int_{-1}^1 xdx = 0$$
de onde se conclui que não existe $c \in [a, b]$ que satisfaça a igualdade do enunciado do exercício.

2. Seja $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e par. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Solução. Inicialmente, observemos que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Analisemos a integral $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ à luz da fórmula da mudança de variáveis. Para tal, seja $\varphi : [0, a] \to [-a, 0]$ definida por $\varphi(t) = -t$ de modo que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(a) = -a$. Portanto,

$$\int_{0}^{a} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{0}^{-a} f(x)dx$$

e assim

$$\int_{0}^{a} f(-t)(-1)dt = \int_{0}^{-a} f(x)dx.$$

Usando o fato de que f é par, ou seja, $f(-t) = f(t)$ e que $\int_{0}^{-a} f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(x)dx$, teremos

$$\int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt.$$

Então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

5 Exercícios Propostos

1. Para cada f dada a seguir considere $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$. Para quais valores de x temos $F'(x) = f(x)$?

   (a) $f(x) = 0$ se $x \leq 1$ e $f(x) = 1$ se $x > 1$;

   (b) $f(x) = 0$ se $x < 1$ e $f(x) = 1$ se $x \geq 1$;

2. Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definamos

$$\varphi(x) = \int_{x}^{b} f(t)dt.$$

   Calcule φ'.

3. Diga quais das seguintes funções são integráveis em $[0,2]$ e calcule a integral quando possível.

    (a) $f(x) = x$ se $0 \leq x < 1$ e $f(x) = x - 2$ se $1 \leq x \leq 2$;

    (b) $f(x) = x$ se $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = x - 2$ se $1 < x \leq 2$;

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa. Mostre que se existir $c \in [a,b]$ tal que $f(c) > 0$, então $\int_a^b f(x)dx > 0$.

5. Encontre $F'(x)$ quando $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ é definida por

    (a) $F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^3)^{-1}dt$.

    (b) $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}dt$.

6. Seja $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ 1 & 1 \leq x < 2, \\ x & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

    Obtenha expressões para

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

    e esboce os gráficos de f e F. Determine os pontos nos quais F é derivável. Calcule F' em tais pontos.

7. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função contínua e $c > 0$, defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f(t)dt$. Mostre que g é derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e calcule $g'(x)$.

8. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $u : [c,d] \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $u(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [c,d]$. Defina a função $G : [c,d] \to \mathbb{R}$ por

$$G(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$$

    é derivável e

$$G'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x).$$

9. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ for contínua e $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$ para todo $x \in [0,1]$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

10. Use a fórmula de mudança de variáveis para calcular as integrais

    (a) $\int_1^9 \frac{1}{2+\sqrt{t}}dt$.

    (b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}dt$.

Capítulo 16

As Funções Logarítmica e Exponencial

Este capítulo será dedicado ao estudo das funções logarítmica e exponencial. Devemos deixar claro que, muito embora apresentemos essas funções de maneira distinta daquela apresentada no ensino médio, em virtude do rigor que se impõe na Análise, elas coincidem com aquelas já conhecidas pelo(a) leitor(a). Começaremos com a definição de *logaritmo natural ou neperiano.*

1 Função Logarítmica

Consideremos a função contínua $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Portanto, ela é integrável em qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Pode-se, então, definir a função

$$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

essa é a *função logarítmica* e $\ln x$ é chamado o *logaritmo* de x.

As razões pelas quais esta função é chamada logarítmica serão esclarecidas ao longo deste capítulo.

Segue-se imediatamente do teorema fundamental do Cálculo que ln é derivável e

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Vejamos algumas propriedades fundamentais da função logarítmica.

Propriedade 11. $ln 1 = 0$

Essa propriedade segue-se da definição $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt.$

Propriedade 12. *Se* $x > 1$ *então* $\ln x > 0$.

Demonstração. Basta observar que sendo $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ e $x > 1$ então tal integral é positiva. □

Propriedade 13. *Se* $0 < x < 1$ *então* $\ln x < 0$.

Demonstração. Sendo $0 < x < 1$ tem-se que $\int_x^1 \frac{1}{t}dt > 0$. Portanto,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0.$$

□

Propriedade 14. $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$

Demonstração. Se $x > 0$ a expressão acima é evidente. Suponhamos que $x < 0$. Nesse caso, usaremos a regra da cadeia para obter

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x).$$

Façamos $u = -x$ e daí

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{du}\ln u.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

o que conclui a demonstração desta propriedade. □

Propriedade 15. $\ln(uv) = \ln u + \ln v$

Demonstração. Consideremos a função $f(x) = \ln(ax)$ em que a é um número. Derivemos essa função, usando a regra da cadeia. Para isso, faça $u = ax$ para obter

$$f'(x) = \frac{d}{du}\ln u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}a = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Isso nos diz que as funções $\ln(ax)$ e $\ln x$ possuem as mesmas derivadas e então elas diferem por uma constante, ou seja, existe uma constante K tal que

$$\ln(ax) = \ln x + K.$$

Para determinarmos o valor de K basta tomarmos $x = 1$ para obtermos

$$\ln a = \ln 1 + K$$

e daí $K = \ln a$. Logo

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a.$$

Fazendo $u = a$ e $x = v$, teremos a expressão procurada. □

Propriedade 16. $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

Demonstração. Da propriedade 15, teremos

$$\ln u = \ln \frac{u}{v} \cdot v = \ln\left(\frac{u}{v}\right) + \ln v$$

de onde

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$$

o que mostra a validez desta propriedade. $\square$

Propriedade 17.

$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln v.$$

A demonstração desta propriedade é consequência imediata da propriedade anterior.

Propriedade 18. *Se $x > 0$ e r for um número racional então*

$$\ln(x^r) = r \ln x.$$

Demonstração. Usemos a regra da cadeia na função $y = \ln(x^r)$ fazendo $u = x^r$. Desse modo, obteremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot rx^{r-1} = \frac{rx^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x}.$$

Como é fácil ver, a derivada da função $r \ln x$ também é $\frac{r}{x}$. Portanto, existe uma constante K tal que

$$\ln(x^r) = r \ln x + K$$

a qual é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = 1$, teremos

$$\ln 1 = r \ln 1 + K$$

donde $K = 0$ e daí segue-se a expressão desejada. $\square$

Propriedade 19. *A função* ln *é crescente.*

Demonstração. Isso segue-se de $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} > 0$. Usando o fato de que função derivável com derivada positiva é crescente, teremos a demonstração desta propriedade. Em particular, tal propriedade implica que a função logarítmica é injetiva. $\square$

Propriedade 20.

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

Demonstração. Se $1 < t < 2$, teremos $\frac{1}{2} < \frac{1}{t} < 1$. Integrando os termos desta desigualdade, teremos

$$\int_1^2 \frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{t} dt < \int_1^2 dt$$

donde

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

$\square$

Propriedade 21. *Se* (x_n) *for uma sequência tal que* $x_n \to +\infty$ *então* $\ln x_n \to +\infty$.

Demonstração. É suficiente mostrar que isto acontece para a sequência (2^n), haja vista que a função ln é crescente. Observando que

$$\ln 2^n = n \ln 2$$

e usando o fato de que $\ln 2 > 0$, concluímos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2^n = +\infty$. Em particular, isto implica que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. $\square$

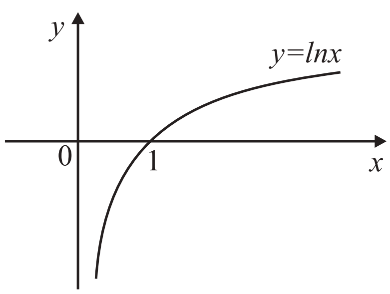
Propriedade 22. *Para qualquer sequência* (x_n) *com* $x_n > 0$ *e* $x_n \to 0^+$, *teremos* $\ln x_n \to -\infty$.

Demonstração. Como ln é crescente basta considerarmos a sequência $(\frac{1}{2^n})$. Assim,

$$\ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = -n \ln 2 \to -\infty$$

pois $\ln 2 > 0$. Em particular, isso implica que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. $\square$

As propriedades da função logarítmica, demonstradas até aqui, nos conduzem ao seguinte gráfico.



2 Função Exponencial

Pelo que desenvolvemos sobre a função logarítmica, verificamos que $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é injetiva e sobrejetiva, de modo que ela possui inversa $\ln^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ a qual será designada por exp e chamada *função exponencial*. Verificaremos que exp é exatamente a função exponencial tão conhecida do leitor. Decorre daí que $\ln \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $\ln \circ \exp(y) = y$ e $\exp \circ \ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz $\exp \circ \ln(x) = x$. Assim, $\exp(0) = 1$.

Vejamos outras propriedades da função exponencial.

Propriedade 23. *A função exponencial* $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *é crescente.*

Demonstração. Suponhamos que $x_1 < x_2$. Como $x_1 = \ln(\exp x_1)$ e $x_2 = \ln(\exp x_2)$, teremos $\ln(\exp x_1) < \ln(\exp x_1)$. Usando o fato de que a função ln é crescente, obtemos $\exp x_1 < \exp x_2$, o que prova que exp é crescente. □

Propriedade 24. *A função* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é derivável e* $\frac{d}{dx} \exp x = \exp x$.

Demonstração. Façamos $y = \exp x$. Daí, $\ln y = x$. Derivando ambos os membros desta igualdade com relação à x, obtemos $\frac{y'}{y} = 1$ de modo que $y' = y$, ou seja, $\frac{d}{dx} \exp x = \exp x$, o que conclui a demonstração. □

Propriedade 25. *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *for uma função derivável então a função dada por* $y = \exp(f(x))$, *definida no intervalo* I, *é derivável e sua derivada é dada por* $y' = \exp(f(x)) \cdot f'(x)$.

Demonstração. Faça $u = f(x)$ e use a regra da cadeia $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ para obter

$$\frac{dy}{dx} = \exp u \cdot f'(x) = \exp(f(x)) \cdot f'(x).$$

□

Propriedade 26. $\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2$

Demonstração. Inicialmente observemos que

$$\ln \exp(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = \ln(expx_1) + \ln(\exp x_2) = \ln(\exp x_1 \cdot \exp x_2).$$

Usando a injetividade de ln, concluímos que

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2.$$

□

Propriedade 27. $\exp(x_1 - x_2) = \frac{\exp x_1}{\exp x_2}$

Demonstração. Basta observar que $\exp(x_1 - x_2) \cdot \exp x_2 = \exp((x_1 - x_2) + x_2) = \exp x_1$. Portanto, $\exp(x_1 - x_2) = \frac{\exp x_1}{\exp x_2}$ o que conclui a demonstração. □

A propriedade 26 é facilmente generalizada, usando o princípio de indução, para um número finito de parcelas. Mais precisamente, se $x_1, \ldots, x_n$ forem números reais quaisquer, teremos

$$\exp(x_1 + \cdots + x_n) = \exp x_1 \cdots \exp x_n.$$

Daí,

$$\exp(nx) = \exp(x + \cdots + x) = \exp(x) \cdots \exp(x) = [\exp x]^n.$$

Notemos, também, que na propriedade 27, fazendo $x_1 = 0$ e recordando que $\exp 0 = 1$, teremos $\exp(-x_2) = [\exp x_2]^{-1}$, qualquer que seja o número real x_2. Assim, se n for um número natural, teremos

$$\exp(-nx) = \exp[n(-x)] = [\exp(-x)]^n = [(\exp x)^{-1}]^n = [\exp x]^{-n}.$$

Na igualdade $\exp(nx) = [\exp x]^n$ façamos $y = nx$ para obter $\exp\left(\frac{y}{n}\right) = [\exp y]^{\frac{1}{n}}$. Considerando o número racional $\frac{m}{n}$ podemos aplicar as propriedades precedentes para obter

$$\exp\left(\frac{m}{n}x\right) = [\exp x]^{\frac{m}{n}}.$$

Destas observações inferimos a seguinte propriedade:

Propriedade 28. Se $r = \frac{m}{n}$ for um número racional, $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ então

$$\exp(rx) = [\exp x]^r.$$

Agora observemos que $1 > \ln 1 = 0$ e usando o fato de que a função exp é a inversa da função ln, obteremos

$$\exp 1 > \exp(\ln 1) = 1.$$

Daí,

$$\exp n = [\exp 1]^n \to +\infty,$$

se $n \to +\infty$. Analogamente, prova-se que

$$\exp(-n) = [[\exp 1]^{-n} \to 0,$$

se $n \to 0$. Como a função exponencial é crescente concluímos que

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty.$$

Pelo teorema do valor intermediário existe um número real, designado por e, tal que $\exp 1 = e$. Pela propriedade 28, se r for um número racional, teremos

$$\exp r = [\exp 1]^r = e^r$$

e daí justifica-se o fato de chamarmos a função exp de *função exponencial*. Tomando x um número irracional define-se e^x como sendo

$$e^x = \exp x.$$

Deste modo podemos calcular expressões do tipo $e^{\sqrt{2}}, e^{\pi}, \ldots$

Propriedade 29. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Demonstração. Fixemos $x \in \mathbb{R}$ e consideremos a sequência (x_n) definida por

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Então

$$\ln x_n = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x\left(\frac{\ln(1 + x/n) - \ln 1}{x/n}\right).$$

A expressão

$$\left(\frac{\ln(1 + x/n) - \ln 1}{x/n}\right)$$

é o quociente de Newton da função ln no ponto 1 em que o acréscimo $h = \frac{x}{n}$ tende a zero quando $n \to \infty$. Deste modo,

$$\ln x_n \to x.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln x_n} = e^x,$$

ou seja,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

o que conclui a demonstração desta propriedade. □

Portanto,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Temos então, a seguinte definição:

Definição 74. *Dado um número positivo $a \neq 1$ definimos a função a^x, cujo domínio é $\mathbb{R}$, por*

$$a^x = e^{x \ln a}$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Deste modo,

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln a.$$

Daí segue-se que se $a > 1$ então $\frac{d}{dx} a^x > 0$ pois $\ln a > 0$. Portanto, neste caso, a função a^x é crescente. Por outro lado, se $0 < a < 1$ a função a^x é decrescente.

A função exponencial geral a^x satisfaz propriedades semelhantes às da exponencial e^x e não serão demonstradas aqui, mas serão deixadas como exercício.

Definamos a função logarítmica geral.

Definição 75. *Dado um número real $a > 0, a \neq 1$, definimos a função logarítmica na base a, $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, por*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Deve-se observar que tal função é a inversa da função exponencial geral. Com efeito, $y = \log_a x$ se, e somente se, $y = \frac{\ln x}{\ln a}$. Isso equivale a $y \ln a = \ln x$. Portanto, $\ln(a^y) = \ln x$. Assim, $a^y = x$.

Isto mostra que as funções logaritmo geral e exponencial geral são inversas uma da outra. Segue-se, então, que

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(a^x) = x.$$

3 Exercícios Resolvidos

1. Prove que $\log_a 1 = 0$.

   Solução. Com efeito, usando a definição temos

   $$\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = \frac{0}{\ln a} = 0.$$

2. Mostre que $\log_a a = 1$.

   Solução. Basta usar a definição de $\log_a$.

   $$\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1.$$

3. Demonstre que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

   Solução. Basta observar as seguintes igualdades
   $$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y.$$

4 Exercícios Propostos

1. Prove que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2$.

2. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

3. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$.

4. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$, em que n é um número natural fixo.

5. Mostre que a única solução de $e^x - x - 1 = 0$ é $x = 0$.

6. Mostre que a função $\ln x$ não tem ponto fixo.

7. Estude a convergência da série $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Referências Bibliográficas

[1] H. Amann & J. Escher, Analysis I, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1998.

[2] T. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, 1976.

[3] G. Ávila, Introdução à Análise Matemática, Ed. Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1993.

[4] G. Ávila, O Ensino do Cálculo e a Análise, Matemática Universitária, N. 33, Dezembro (2002), 83-95.

[5] R.G. Bartle & D.R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2000.

[6] R. P. Boas Jr., A Primer of Real Functions, The Carus Mathematical Monographs, Number Thirteen, The Mathematical Association of America, 1960.

[7] C.B. Boyer, História da Matemática, Ed. Edgard Blücher Ltda., 1974.

[8] D.A. Brannan, A First Course in Mathematical Analysis, Cambridge, Published in association with The Open University, Cambridge, 2006.

[9] K.A. Bush, Continuous Functions Without Derivatives, The American Mathematical Monthly, Vol. 59, N. 4, April (1952), 222-225.

[10] D.G. de Figueiredo, Análise I, 2^a Edição, L.T.C. Editora, Rio de Janeiro, 1996.

[11] D.G. de Figueiredo, Números Irracionais e Transcendentes, Coleção Iniciação Científica/01, SBM, 2002.

[12] R. Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, Dover Publications, 1963.

[13] R.O. Gandulfo, A Função de Marcinkiewicz, Matemática Universitária, N. 5, Junho (1987), 61-68.

[14] J. Lebl, Basic Analysis, Introduction to Real Analysis. Disponível em http://www.jirka.org/ra/, 2010.

[15] E.L. Lima, Curso de Análise, Vol.1, IMPA-Coleção Projeto Euclides, 1976.

[16] A.B. Maciel & O.A. Lima, Introdução à Análise Real,EDUEPB, Campina Grande-PB, 2005.

[17] L.F.O. Mello, O Movimento Browniano e as Curvas sem Tangente, Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 20, N. 1, Março, (1998), 19-23.

[18] H.M. Nussenzveig, Curso de Física Básica, Vol. 2, Ed. Edgard Blücher Ltda., 1983.

[19] H. Poincaré, O Valor da Ciência, Tradução de Maria Helena Fragoso Martins, Ed. Contraponto, 1998.

[20] W. Rudin, Princípios de Análise Matemática, Livro Técnico e Ed. Universidade de Brasília, 1976.

[21] D. Sloughter, A Primer of Real Analysis, 2008. Disponível em http://synechism.org/pra/

[22] E.C. Tichmarsh, Theory of Functions, Oxford University Press, 1939.