CHAPITRE 1

Géométries fractales

1.1 Introduction

La fin des années 70 a vu se développer la notion de *géométrie fractale* dans de nombreux domaines de la physique. Le concept de géométrie fractale, introduit par B.B. Mandelbrot, fournit en effet un cadre solide pour l' analyse des phénomènes naturels dans divers secteurs des sciences. Roger Pynn écrit dans la revue *Nature* que « si cette opinion continue à s'étendre, nous n'aurons pas longtemps à attendre avant que l'étude des fractales devienne une partie obligatoire du cursus universitaire ».

La notion de *fractale* en fait regroupe dans un cadre géométrique unique de nombreux travaux mathématiques antérieurs. Les objets concernés ont été inventés dès la fin du XIX^{e} siècle par des mathématiciens comme Cantor, Peano… Le terme « fractal » a été introduit par B.B. Mandelbrot (*fractal*, c'est-à-dire qui a été fractionné à l'infini, du latin « *fractus* » dérivé du verbe « *frangere* », briser). Une définition à la fois précise et générale d'un objet fractal est difficile ; nous le définirons avec Mandelbrot comme un ensemble qui présente des irrégularités à toutes les échelles.

C'est fondamentalement son caractère de concept *géométrique* qui en fait sa portée. La géométrie fractale est le complément qui manquait à la géométrie euclidienne et à la symétrie cristalline[1] : comme l'a fait remarquer Mandelbrot, les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes des cônes, ni les îles des cercles et leur description nécessite une géométrisation adaptée.

Comme nous le montrerons, la notion de géométrie fractale est étroitement liée aux propriétés d'invariance par changement d'échelle : une structure fractale est la même « *de près comme de loin* ». Les concepts de similitude interne et d'invariance d'échelle ont été développés indépendamment dans plusieurs domaines, comme par exemple les phénomènes critiques et les transitions de phases du second ordre. Mais on trouve également des géométries fractales

[1] Il faut cependant y ajouter les découvertes récentes sur les symétries quasi cristallines.

dans les trajectoires de particules, dans les lignes de flux hydrodynamiques, les ondes, les paysages, montagnes, îles et rivières, dans les roches, métaux et matériaux composites, dans les plantes, dans les polymères et les gels...

Le nombre des travaux publiés ces dix dernières années sur le sujet est considérable. Les ouvrages de base sont moins nombreux : outre des articles, B.B. Mandelbrot a publié plusieurs ouvrages généraux sur ses travaux (Mandelbrot, 1975a, 1977 et 1982) ; les livres de Barnsley (1988) et de Falconer (1990) abordent également les aspects mathématiques. Parmi les livres traitant des fractales dans le domaine des sciences physiques, on pourra se référer à celui de Feder (1988), de Vicsek (1989), centré plus particulièrement sur les phénomènes de croissance, de Takayasu (1990), de Le Méhauté (1990), ainsi qu'un certain nombre de traités plus spécifiques (Avnir, 1989, Bunde & Havlin 1991) ou d'introduction aux fractales (Sapoval, 1990). Les revues plus spécialisées seront indiquées au fur et à mesure dans les chapitres concernés.

1.2 Notion de dimension

Pour mesurer une longueur, une surface ou un volume, une méthode usuelle consiste à recouvrir ces ensembles de pavés dont la longueur, la surface ou le volume sont pris comme unité de mesure. C'est précisément ce que l'on fait lorsqu'on calcule ces grandeurs au moyen d'intégrales multiples.

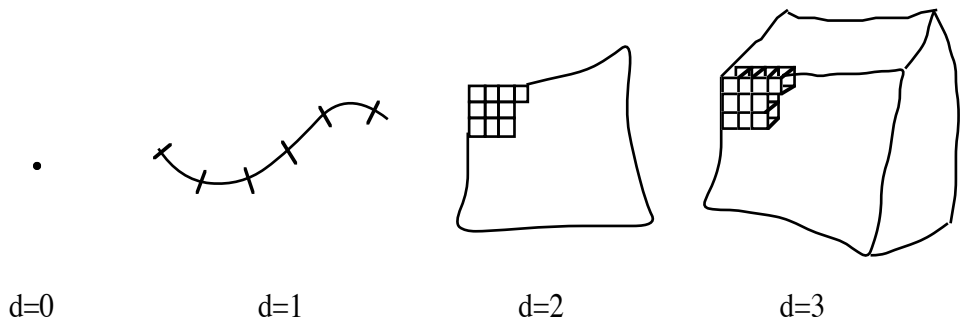


Fig.1.2.1 Pavages de lignes, surfaces ou volumes.

Si ε est le côté (étalon de longueur) d'un pavé, la mesure obtenue est,

$$\mathcal{M} = N\,\varepsilon^d = N\mu$$

où μ est l'unité de mesure (longueur, surface ou volume dans le cas présent, masse dans d'autres cas). Cantor, Carathéodory, Peano,… ont montré qu'il existait des objets pathologiques pour lesquels cette méthode était mise en défaut. La mesure ci-dessus doit *par exemple* être remplacée par la α-mesure de recouvrement. C'est ce que nous allons détailler maintenant.

La longueur de la côte de Bretagne

Supposons en effet que l'on veuille appliquer la méthode précédente à la mesure de la longueur, entre deux points fixés, d'une côte très découpée comme la côte de Bretagne. On constate rapidement que l'on est confronté à une difficulté : la longueur mesurée $\mathcal{L}$ dépend de l'unité de mesure choisie ε, et croît indéfiniment quand ε décroît !

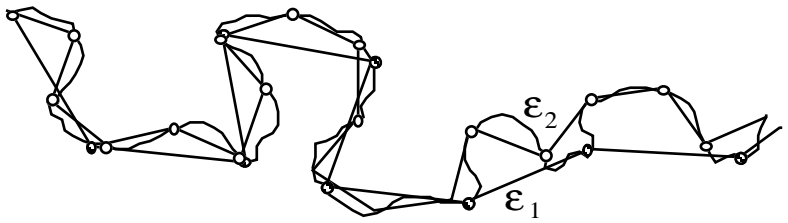


Fig.1.2.2 Mesure de la longueur d'une côte par report d'unités différentes.

Pour un étalon de mesure ε_1, on trouve une longueur $N_1\ \varepsilon_1$ mais un étalon de mesure plus petit ε_2 donne une nouvelle valeur plus grande,

$$\mathcal{L}(\varepsilon_1) = N_1\ \varepsilon_1$$
$$\mathcal{L}(\varepsilon_2) = N_2\ \varepsilon_2 \neq \mathcal{L}(\varepsilon_1)$$
$$\ldots$$

et ceci sur une échelle allant de plusieurs dizaines de kilomètres à quelques mètres. L.F. Richardson étudia en 1961, les variations de longueur approchée $\mathcal{L}(\varepsilon)$ de diverses côtes et constata d'une manière très générale que, dans un large domaine de valeurs de ε, la longueur variait pratiquement suivant une loi de puissance[2] en ε,

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = N(\varepsilon)\ \varepsilon \propto \varepsilon^{-\rho}$$

La figure 3 montre le comportement de la longueur de diverses côtes en fonction de l'unité de mesure. On voit que, pour une courbe « normale » comme le cercle, la longueur devient constante ($\rho = 0$) quand l'unité de mesure devient assez petite par rapport au rayon de courbure. La dimension du cercle est bien sûr $D = 1$ (et correspond à $\rho = 0$). Les autres courbes présentent un exposant ρ positif de sorte que leur longueur croît indéfiniment au fur et à mesure que l'étalon de mesure diminue : il est impossible de leur donner une longueur précise, on dit qu'elles sont partout non rectifiables[3]. De plus ces courbes s'avèrent également non dérivables.

L'exposant $(1 + \rho)$ de $1/N(\varepsilon)$ défini ci-dessus est en fait une « *dimension fractale* », comme nous allons le voir plus loin. Cette détermination de la mesure fractale basée sur le recouvrement de la côte par des disques de rayon ε est précisément celle utilisée par Pontrjagin et Schnirelman, 1932 (Mandelbrot, 1982, p 439) pour définir la *dimension de recouvrement*.

---

[2] La notation $\propto$ très fréquemment utilisée signifie « varie comme » : $a \propto b$ signifie précisément que le rapport a/b tend asymptotiquement vers une constante.

[3] Une portion de courbe est rectifiable si on peut en déterminer la longueur.

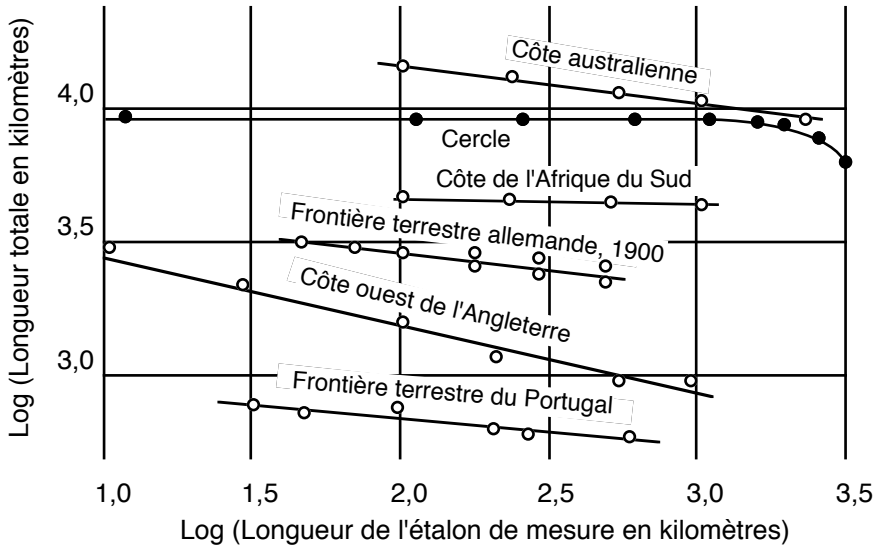


Fig.1.2.3 Mesures des longueurs de diverses côtes et frontières terrestres effectuées par Richardson (1961).

L'idée de la définition de la dimension fondée sur le recouvrement par un ruban de largeur 2ε avait déjà été développée par Minkowski en 1901. Nous allons donc examiner maintenant ces méthodes plus en détail.

D'une manière générale, les travaux sur les structures fractales s'appuient à la fois sur ceux concernant les fonctions non dérivables en tout point (Cantor, Poincaré, Julia) et sur ceux relatifs à la notion de mesure (dimension) d'un ensemble fermé (Bouligand, Hausdorff, Besicovitch).

1.3 Propriété métriques : dimension de Hausdorff, dimension topologique

Diverses définitions de la dimension fractale ont été proposées. Ces définitions mathématiques sont parfois un peu formelles et pas toujours très parlantes au premier abord pour le physicien. Pour une structure fractale donnée, elles fournissent la plupart du temps la même valeur pour la dimension fractale, mais ce n'est pas toujours le cas. Certaines de ces définitions peuvent cependant s'avérer plus commodes ou plus précises que d'autres pour le calcul, ou plus pointues pour caractériser une propriété physique.

Avant de détailler les diverses catégories de structures fractales, donnons quelques définitions mathématiques et diverses méthodes de calcul de la dimension ; pour plus de détails on pourra par exemple se reporter aux travaux de Tricot (Tricot, 1988), ou aux livres de Falconer (Falconer, 1985, 1990).

Remarquons tout d'abord que, pour définir la dimension d'une structure, il

est nécessaire que cette structure possède une notion de distance (notée $|x - y|$) entre deux points quelconques x et y de celle-ci. Mais cela ne pose guère de problème pour les structures fournies par la nature.

Notons également que dans ces définitions il y a toujours un passage à la limite $\varepsilon \to 0$. Pour la détermination concrète d'une dimension fractale, on est tout naturellement conduit à discrétiser (c'est-à-dire à utiliser des longueurs élémentaires ε finies) : la précision du calcul dépend alors de la longueur relative de la longueur élémentaire ε, comparée à celle du système (§ 1.4.4).

1.3.1 La dimension topologique d_T

Si on considère des objets géométriques constitués d'un ensemble de points, on dit dans ce cas que sa dimension topologique est $d_T = 0$; s'ils sont constitués d'éléments de courbe, $d_T = 1$, d'éléments de surface $d_T = 2$…

> « Constitué » signifie ici que l'objet est localement homéomorphe à un point, une ligne, une surface. La dimension topologique est invariante par des transformations inversibles, continues, non nécessairement différentiables (homéomorphismes). Les dimensions dont nous allons parler sont invariantes par des transformations différentiables (dilatations).

Une structure fractale possède une dimension fractale strictement supérieure à sa dimension topologique.

1.3.2 La dimension de Hausdorff-Besicovitch, ou dimension de recouvrement : dim(E)

Une première approche pour mesurer la dimension d'un objet E consiste à suivre la méthode usuelle de pavage de l'objet par des pavés (appartenant à l'espace dans lequel l'objet est plongé) de mesure $\mu = \varepsilon^{d(E)}$ où d(E) est la dimension de l'objet. Mais lorsque d(E) est *a priori* inconnu, une solution consiste à faire des essais en prenant des unités de mesure $\mu = \varepsilon^{\alpha}$ avec un exposant α indéterminé. Considérons par exemple un carré (d = 2) de côté L, et recouvrons-le de pavés de côté ε. La mesure est donnée par $\mathcal{M} = N\mu$, où N est le nombre de pavés, c'est-à-dire $N = (L/\varepsilon)^d$. Ainsi,

$$\mathcal{M} = N\,\varepsilon^{\alpha} = (L/\varepsilon)^d\,\varepsilon^{\alpha} = L^2\,\varepsilon^{\alpha-2}$$

Si on essaie $\alpha = 1$, on trouve que $\mathcal{M} \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$: la « longueur » d'un carré est infinie. Si on essaie $\alpha = 3$, on trouve que $\mathcal{M} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$: le « volume » d'un carré est nul. La surface du carré n'est obtenue que quand $\alpha = 2$, et sa dimension est celle d'une surface $d = \alpha = 2$.

Le fait que cette méthode puisse s'appliquer pour α réel quelconque est très intéressant car il permet sa généralisation aux dimensions non entières.

On peut formaliser un peu plus cette mesure. Tout d'abord l'objet étant de forme quelconque, il n'est pas en général possible de le recouvrir avec des pavés identiques de côté ε. Mais on peut faire le recouvrement de l'objet E avec

des boules V_i dont le diamètre (diam V_i) est inférieur ou égal à ε. Ceci offre plus de souplesse mais impose de prendre la limite inférieure de la somme des mesures élémentaires $\mu = (\text{diam } V_i)^\alpha$.

On considère donc ce que l'on appelle la α-mesure de recouvrement (Hausdorff 1919, Besicovitch 1935) définie comme suit,

$$m^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{ \sum(\text{diam } V_i)^\alpha : \cup V_i \supset E, \text{diam } V_i \leq \varepsilon\} \qquad (1.3\text{-}1)$$

et on définit la *dimension de Hausdorff* (ou Hausdorff - Besicovitch) **:** dim E par,

$$\begin{aligned} \dim E &= \inf \{ \alpha : m^\alpha(E) = 0 \} \\ &= \sup \{ \alpha : m^\alpha(E) = \infty \}. \end{aligned} \qquad (1.3\text{-}2)$$

La dimension de Hausdorff est la valeur de α pour laquelle la mesure fait un saut de zéro à l'infini. Pour la valeur α = dim E, cette mesure peut être quelconque entre zéro et l'infini.

La fonction $m^\alpha(E)$, est monotone en ce sens que si un ensemble F est inclus dans E, $E \supset F$, alors $m^\alpha(E) \geq m^\alpha(F)$ quel que soit α.

1.3.3 La dimension de Bouligand-Minkowski

On peut également définir une dimension dite de Bouligand-Minkowski, (Bouligand, 1929, Minkowski, 1901), que l'on note $\Delta(E)$. Voici quelques méthodes permettant de calculer $\Delta(E)$:

La saucisse de Minkowski

Soit E un ensemble plongé dans un espace euclidien de dimension d (précisément E est une partie bornée de $\mathbf{R}^d$). Soit maintenant $E(\varepsilon)$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^d$ distants de moins de ε de E. $E(\varepsilon)$ définit une *saucisse de Minkowski*, on l'appelle aussi épaississement ou dilatation de E comme en analyse d'image. On peut la définir comme la réunion,

$$E(\varepsilon) = \bigcup_{x \in E} B_\varepsilon(x)$$

$B_\varepsilon(x)$ est une boule de l'espace euclidien à d dimensions, centrée en x et de rayon ε. On calcule,

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(d - \frac{\log \text{Vol}_d(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right) \qquad (1.3\text{-}3)$$

où Vol_d représente simplement le volume en dimension d (par exemple, longueur, surface ou volume usuel). Si la limite existe, $\Delta(E)$ est par définition la *dimension de Bouligand-Minkowski*.

On retrouve naturellement la notion usuelle de dimension : considérons par exemple un segment de droite de longueur L. La saucisse de Minkowski associée a comme volume $\text{Vol}_d(E)$,

$$\begin{aligned} &\text{en } d = 2 : && 2\varepsilon L + \pi\varepsilon^2 \\ &\text{en } d = 3 : && \pi\varepsilon^2 L + (4\pi/3)\varepsilon^3 \end{aligned}$$

Fig.1.3.1 Saucisse de Minkowski ou épaississement d'une courbe E.

si bien qu'en négligeant l'ordre supérieur en ε, $Vol_d(E) \propto \varepsilon^{d-1}$

D'une manière générale on obtient,

Si E est un point :	$Vol_d(E) \propto \varepsilon^d$,	$\Delta(E) = 0.$
Si E est un arc rectifiable :	$Vol_d(E) \propto \varepsilon^{d-1}$,	$\Delta(E) = 1.$
Si E est une boule de dimension k :	$Vol_d(E) \propto \varepsilon^{d-k}$,	$\Delta(E) = k.$

Dans la pratique on obtient Δ(E) comme la pente de la droite de régression linéaire (moindres carrés) de l'ensemble des points du plan de coordonnées,

$$\{ \log 1/\varepsilon, \quad \log Vol_d(E(\varepsilon)/\varepsilon^d) \}.$$

C'est une méthode aisée à mettre en œuvre. Les effets de bords (comme ceux obtenu ci-dessus dans la mesure d'un segment de longueur L) conduisent à une certaine imprécision dans la pratique (courbure pour les valeurs de ε qui ne sont plus très petites).

La méthode des boîtes

C'est une méthode très intéressante pour de nombreuses structures fractales. Soit N(ε) le nombre de pavés de côté ε recouvrant E :

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \right) \qquad (1.3\text{-}4)$$

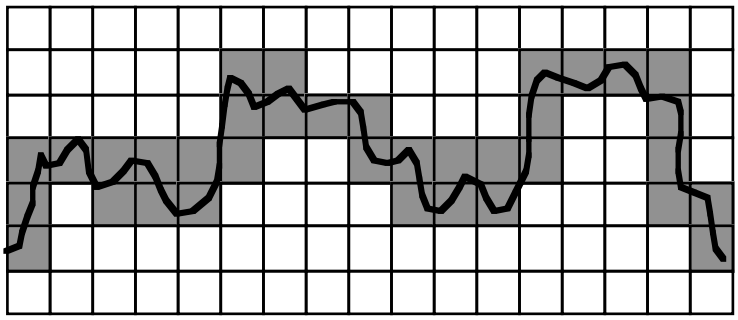


Fig.1.3.2 Mesures de la dimension d'une courbe par la méthode des boîtes.

La méthode des boîtes est couramment utilisée, en particulier pour les structures auto-affines (voir section 2.2.5).

La dimension d'une réunion d'ensembles est égale à la plus grande des dimensions

de ces ensembles : $\Delta(E \cup F) = \max \{\Delta(E), \Delta(F)\}$

La limite $\Delta(E)$ peut dépendre du choix du pavage. S'il existe deux limites Sup et Inf différentes, il faut alors prendre la limite Sup.

La méthode des boules disjointes

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre *maximum* de boules disjointes de rayon ε centrées sur l'ensemble E : alors,

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \log N(\varepsilon) / |\log \varepsilon| \qquad (1.3\text{-}5)$$

Cette méthode est peu utilisée en pratique.

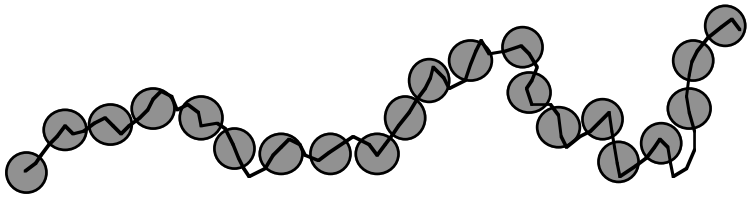
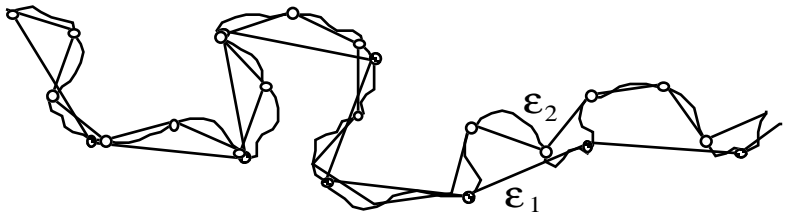


Fig.1.3.3 Mesures de la dimension d'une courbe par la méthode des boules disjointes.

La méthode du compas (Richardson, 1960)

C'est la méthode que nous avons décrite plus haut (fig.1.2.2).



Soit $N(\varepsilon)$ le nombre de pas de longueur ε nécessaire pour parcourir E :

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \log N(\varepsilon) / |\log \varepsilon| \qquad (1.3\text{-}6)$$

On remarquera que toutes ces méthodes donnent la même dimension fractale $\Delta(E)$ lorsqu'elle existe (voir Falconer, 1990) parce qu'on est dans un espace euclidien dont la dimension est finie. Ce ne serait plus vrai dans un espace de dimension infinie (espace de fonctions...).

1.3.4 La dimension d'entassement (en anglais, *packing*) ou dimension de Tricot : Dim (E)

Contrairement à la dimension de Hausdorff-Besicovitch, qui est déterminée à partir de la α-mesure de recouvrement, la dimension de boîtes $\Delta(E)$ n'est pas définie en termes de mesure. Ceci peut conduire à certaines difficultés dans certains développements théoriques. On peut pallier cette lacune en définissant la dimension d'entassement, suivant un schéma semblable à celui de la α-mesure de recouvrement (Falconer, 1990). Soit $\{V_i\}$ une collection de boules disjointes et,

$$\mathcal{P}_o{}^{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{ \sum(\text{diam } V_i)^{\alpha}, \text{diam } V_i \leq \varepsilon\}$$

Comme cette expression n'est toujours pas une mesure, on doit considérer

$$\mathcal{P}^{\alpha}(E) = \inf\{ \mathcal{P}_o^{\alpha}(E_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset E\}$$

La dimension d'entassement est définie par la limite suivante,

$$\text{Dim } E = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}(E) = \infty \} = \inf \{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}(E) = 0 \} \qquad (1.3.7a)$$

ou encore, d'après les définitions précédentes,

$$\text{Dim } E = \inf \{ \sup \Delta(E_i) : \cup E_i \supset E\}. \qquad (1.3\text{-}7b)$$

Les inégalités suivantes entre les diverses dimensions définies ci-dessus sont toujours vraies:

$$\dim E \le \text{Dim } E \le \Delta(E)$$

et

$$\dim E + \dim F \le \dim E \otimes F \le \dim E + \text{Dim } F \le \text{Dim } E \otimes F \le \text{Dim } E + \text{Dim } F.$$

On peut également noter que les dimensions de boîtes pour les multifractales sont en pratique plutôt des dimensions de Tricot.

D'autres méthodes de calculs des dimensions ont été également proposées par Tricot (Tricot, 1982) qui peuvent s'avérer intéressantes dans certains cas. Citons sans détailler d'avantage, la *méthode des éléments structuraux*, la *méthode des variations*, la *méthode des intersections*.

Théorème : s'il existe un réel D et une mesure μ finie, positive telle que pour tout $x \in E$ ($B_r(x)$ étant la boule de rayon r centrée en x),

$$\log \mu(B_r(x))/\log r \to D, \text{ alors}$$

$$D = \dim E. \qquad (1.3\text{-}8)$$

D est également appelée la *dimension de masse*. Si la convergence est uniforme sur E, alors

$$D = \dim(E) = \Delta(E). \qquad (1.3\text{-}9)$$

Ce théorème ne s'applique pas toujours ainsi, dim E = 0 pour un ensemble dénombrable or ce n'est pas le cas de la dimension de Bouligand-Minkowski : $\Delta(E) \neq 0$.

Dans la pratique, Mandelbrot a popularisé la dimension de Hausdorff-Besicovitch ou dimension de masse (car la mesure est très souvent une masse), dim E qui s'avère être l'une des plus simples et des plus parlantes (mais pas toujours la plus judicieuse) pour la plupart des problèmes de physique *quand le théorème ci-dessus s'applique*.

On a alors la relation donnant la masse à l'intérieur d'une boule de rayon r,

$$\boxed{\mathcal{M} = \mu(B_r(x)) \propto r^D} \qquad (1.3\text{-}10)$$

le centre x de la boule B étant sur la structure fractale E.

Nous prendrons bien sûr ici le point de vue du physicien en ne nous en-

combrant pas *a priori* de trop de rigueur mathématique. La *dimension fractale sera en général notée* D, et dans les cas que nous considérerons, on supposera, sauf spécification, que le théorème d'existence s'applique et donc que la dimension fractale est la même pour toutes les méthodes décrites plus haut.

Unités de mesure

On peut très souvent écrire la relation ci-dessus sous la forme d'une équation sans dimension, en introduisant l'unité de longueur ε_u et de volume $(\varepsilon_u)^d$ ou de masse $\rho_u = \rho\,(\varepsilon_u)^d$ (en supposant une densité uniforme ρ sur le support) :

$$\frac{\mathcal{V}}{(\varepsilon_u)^d} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathcal{M}}{\rho_u} \propto \left(\frac{r}{\varepsilon_u}\right)^D$$

Des exemples sont donnés plus loin avec la courbe de Koch ou le tapis de Sierpinski (§ 1.4.1). L'unité de volume est alors celle de l'espace de dimension $d = d_T$ des objets géométriques qui constituent l'ensemble (voir le § 1.3.1).

Du strict point de vue mathématique, on doit réserver le mot de dimension aux ensembles. Pour les mesures on peut considérer l'ensemble couvert par une mesure uniforme. On peut cependant théoriquement définir une notion de dimension d'une mesure μ par :

$$\dim(\mu) = \inf \{ \dim(A), \mu(A^c)=0 \},$$

A étant un sous-ensemble mesurable et A^c étant son complémentaire. Cette dimension est souvent strictement inférieure à la dimension du support. C'est bien ce qui se passe pour la dimension d'information décrite au § 1.6.2.

Si on a des objets où la transformation d'échelle est différente suivant les différentes directions de l'espace, la dimension de boîte est différente de la dimension de Hausdorff (voir fig. 2.2.8).

Ayant maintenant défini les outils nécessaires à l'étude des structures fractales, il est temps d'entrer dans le vif du sujet en montrant les premiers exemples concrets.

1.4 Exemples de fractales

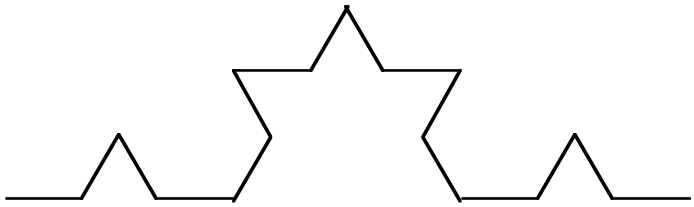
1.4.1 Fractales déterministes

On peut construire de manière extrêmement simple des structures fractales, en utilisant un processus récurrent composé d'un initiateur (l'état initial) et d'un générateur (l'opération de récurrence).

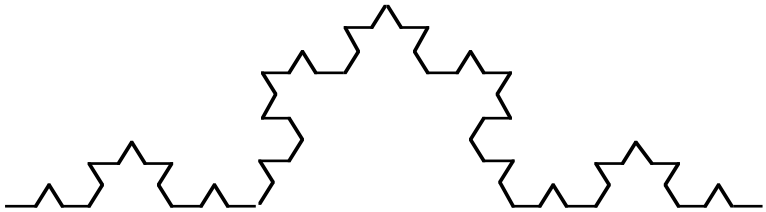
La courbe triadique de Von Koch (1904)

Chaque segment de longueur ε est remplacé par une ligne brisée (*générateur*), formée de 4 segments de longueur $\varepsilon/3$, suivant la relation de récurrence suivante :

A l'itération zéro, on dispose d'un *initiateur* qui est un segment dans le cas de la courbe triadique de Koch, ou un triangle équilatéral dans le cas de l'île de Koch. Si l'initiateur est un segment de dimension horizontale L, à la première itération (la courbe se confond alors avec le générateur) les segments de base auront pour longueur $\varepsilon_1 = L/3$, à la seconde itération ils auront pour longueur $\varepsilon_2 = L/9$ puisque chaque segment est à nouveau remplacé par le générateur,



puis $\varepsilon_3 = L/3^3$ à la troisième itération



et ainsi de suite. Les relations donnant la longueur $\mathcal{L}$ de la courbe sont donc :

$$\varepsilon_1 = L/3 \;\rightarrow\; \mathcal{L}_1 = 4\,\varepsilon_1$$
$$\varepsilon_2 = L/9 \;\rightarrow\; \mathcal{L}_2 = 16\,\varepsilon_2$$
$$\dots$$
$$\varepsilon_n = L/3^n \;\rightarrow\; \mathcal{L}_n = 4^n\,\varepsilon_n$$

en éliminant n entre les deux égalités de la dernière ligne, la longueur $\mathcal{L}_n$ en fonction de l'unité de mesure ε_n s'écrit finalement,

$$\mathcal{L}_n = L^D\,(\varepsilon_n)^{1-D} \quad \text{avec } D = \log 4 / \log 3 = 1{,}2618\dots$$

Pour une *unité de longueur* fixée ε_n, $\mathcal{L}_n$ croît comme la puissance D de la taille L de la courbe. Notons que l'on retrouve ici l'exposant $\rho = D - 1$ de ε_n, que nous avons introduit au § 1.2 (loi de Richardson) et qui montre la divergence de $\mathcal{L}_n$ quand $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

A une itération donnée, la courbe obtenue n'est pas strictement une fractale mais suivant la dénomination de Mandelbrot une « préfractale ». En effet, une fractale est l'objet mathématique obtenu comme limite de la suite des préfractales quand le nombre d'itérations n tend vers l'infini. Dans le langage courant on fait souvent l'assimilation entre fractales et préfractales.

L'expression précédente est un premier exemple de loi d'échelle car elle peut s'écrire,

$$\mathcal{L}_n / \varepsilon_n = f(L/\varepsilon_n) = (L/\varepsilon_n)^D \qquad (1.4\text{-}1)$$

Une loi d'échelle représente une relation générale existant entre diverses grandeurs *sans dimension* décrivant le système (c'est ici une simple loi de puissance). Une telle loi n'est en général possible que lorsqu'il n'existe qu'une seule unité de longueur indépendante dans l'objet (ici ε_n).

Une structure dérivée de la courbe de Koch est obtenue en choisissant un triangle équilatéral comme initiateur, on ainsi génère la très connue *île de Koch*.

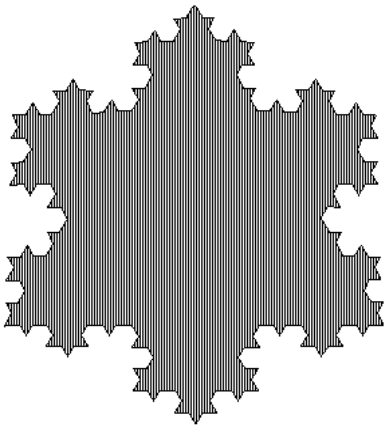
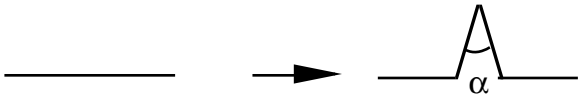


Fig.1.4.1 Ile de Koch après seulement trois itérations. Sa côte est fractale, mais l'ile elle-même est de dimension 2 (on dit que c'est une fractale de surface).

On peut également construire des courbes généralisant la courbe de Koch et ayant une dimension fractale $1 \leq D \leq 2$, en variant simplement le générateur. Un exemple est fourni par la courbe de Koch modifiée dont le générateur s'écrit,



et pour laquelle la dimension fractale est $D = \text{Log } 4 / \text{Log } (2 + 2\sin(\alpha/2))$.
Noter que la limite $\alpha = 0$ conduit à $D = 2$, c'est-à-dire à une « courbe » remplissant un triangle. Ce n'est pas exactement une courbe à cause de l'existence d'une infinité de points multiples. Mais on peut modifier légèrement la construction pour les éliminer. La dimension $D = 2$ est également obtenue pour la *courbe de Peano* (qui est dense dans un carré) pour laquelle le générateur est,

Ce qui donne pour les trois premières itérations,

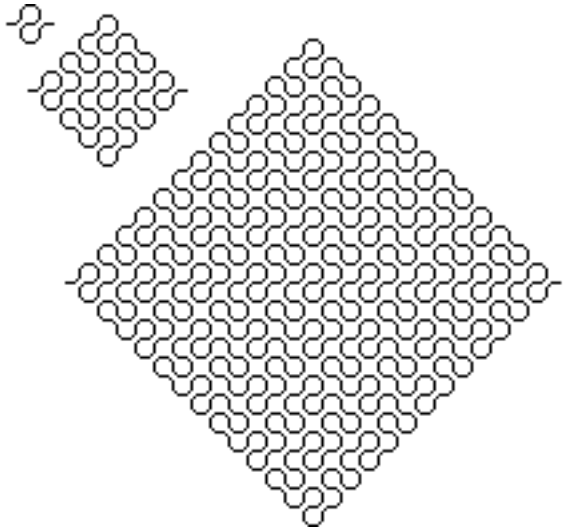


Fig.1.4.2 Trois premières itérations de la courbe de Péano (pour des raisons graphiques, l'échelle est simultanément dilatée à chaque itération d'un facteur 3). La courbe de Péano est dense dans le plan et sa dimension fractale est 2.

La construction a également été adaptée (arrondissement des angles) pour éliminer les points doubles.

Les courbes de Von Koch ou de Péano sont comme le nom l'indique des courbes, c'est-à-dire que leur *dimension topologique* est

$$d_T = 1.$$

Détermination de la dimension fractale par la relation entre masse et rayon

Ainsi qu'il a été indiqué plus haut, une méthode[4] que nous utiliserons très communément pour déterminer une dimension fractale consistera à calculer la masse de la structure incluse dans une boule, de dimension d si l'espace support est de dimension d, et de rayon R, soit

$$\mathcal{M} \propto R^D$$

La mesure est ici en général une masse, elle peut également être une « surface », ou toute autre grandeur scalaire attachée au support.

Sur cet exemple de la courbe de Koch (fig. 1.4.3), on pourra vérifier que D = log 4/log 3, et qu'il en est bien ainsi pour les diverses méthodes indiquées plus haut. On notera que si l'on ne choisit pas les ε dans la séquence $\varepsilon_n = L/3^n$ les calculs s'avèrent plus compliqués mais que la limite $\varepsilon \to 0$ existe et donne bien D.

[4] Mais la méthode des boîtes sera également très couramment utilisée.

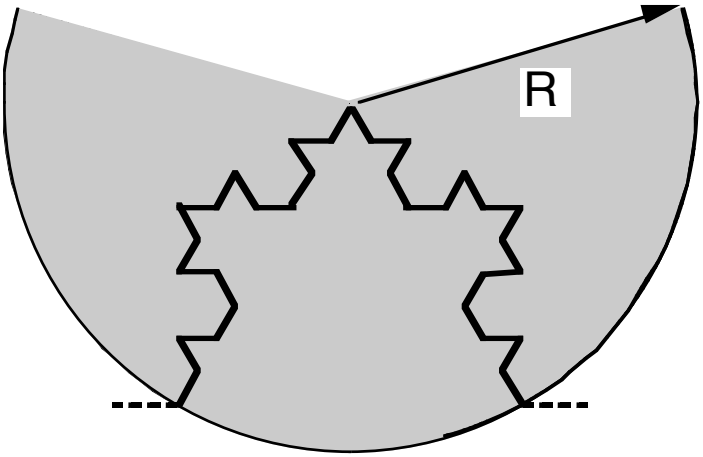


Fig.1.4.3 Mesure de la dimension fractale d'une courbe de Koch par la relation entre masse et rayon. Si chaque segment représente une unité de « surface fractale » (ou contenu de Minkowski) (exemple 1 cm^D), la « surface » ci-dessus est égale à 2 cm^D quand R = 1cm, à 8 cm^D, quand R= 3 cm…

D'une manière très générale $\mathcal{M}$ a la forme,

$$\mathcal{M} = A(R)\ R^D$$

où $A(R) = A_o + A_1\ R^{-\Omega} + \ldots$ tend vers une constante A_o quand $R \to \infty$. A(R) est appelé correction à la loi d'échelle quand les coefficients $A_1, \ldots$ ne sont pas nuls (ce n'est pas le cas pour les exemples donnés dans ce chapitre).

Détermination directe de la dimension fractale, cas multi-échelles

La dimension fractale D peut se déterminer de manière directe sur une seule itération *si l'on sait que la structure limite est fractale* : si une structure fractale de taille L dont la masse est $\mathcal{M}(L) = A(L)\ L^D$ donne par itération k éléments de taille L/h ; on a alors une relation implicite en D,

$$\mathcal{M}(L) = k\,\mathcal{M}(L/h), \text{ soit } A(L)\,L^D = k\,A(L/h)\,(L/h)^D.$$

D est ainsi déterminé asymptotiquement ($L \to \infty$) en remarquant que $A(L/h) / A(L) \to 1$ quand $L \to \infty$. D'où

$$k\,(1/h)^D = 1.$$

Par exemple la courbe de Koch correspond à k = 4 et h = 3. (A(L) est de plus ici indépendant de L).

Nous rencontrerons plus loin des *fractales multi-échelles*, donnant à chaque itération k_i éléments de taille L/h_i (i = 1…n) soit
$\mathcal{M}(L) = k_1\,\mathcal{M}(L/h_1) + k_2\,\mathcal{M}(L/h_2) + \ldots\ k_n\,\mathcal{M}(L/h_n)$ et donc,

$$k_1\,(1/h_1)^D + k_2\,(1/h_2)^D \ldots\ k_n\,(1/h_n)^D = 1 \qquad (1.4\text{-}2)$$

ce qui détermine D.

Ensembles de Cantor

Un objet, également très étudié bien avant l'introduction de la notion de fractale, est l'*ensemble de Cantor*, obtenu en éliminant itérativement le tiers central de chaque segment :

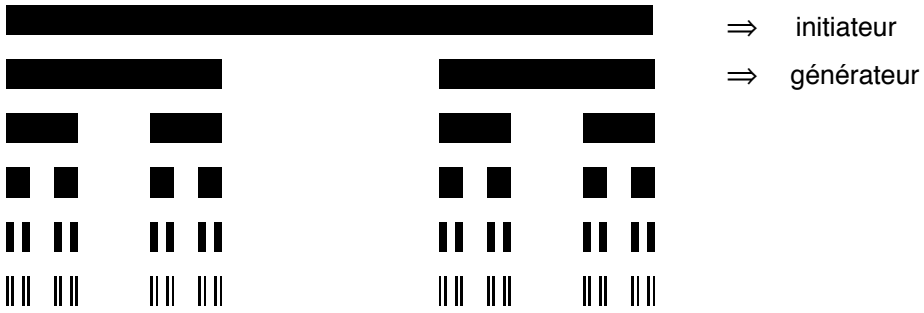


Fig.1.4.4 Construction des cinq premières itérations d'un ensemble de Cantor. Afin d'une part d'avoir une représentation plus visible et d'autre part d'introduire le lien entre mesure et ensemble, les segments sont des barres de largeur fixée (barres de Cantor), représentant par conséquent une densité uniformément répartie sur l'ensemble support (mesure uniforme, voir aussi le § 1.6.3). On identifie ainsi dimension fractale et dimension de masse.

Cinq itérations sont représentées dans la figure 1.4.4.

La dimension fractale de cet ensemble est,

$$D = \log 2 / \log 3 = 0{,}630\ 9\ldots$$

Dans les ensembles de Cantor, elle est telle que $0 < D < 1$: on dit que l'on a « une poussière ». Elle n'est plus constituée que de points, sa *dimension topologique* est $d_T = 0$.

Pour mettre en évidence le fait que la dimension fractale ne caractérise pas à elle seule l'objet, construisons maintenant un second ensemble de Cantor ayant la *même dimension fractale* mais une structure spatiale différente : à chaque itération, chaque élément est divisé en quatre segments de longueur

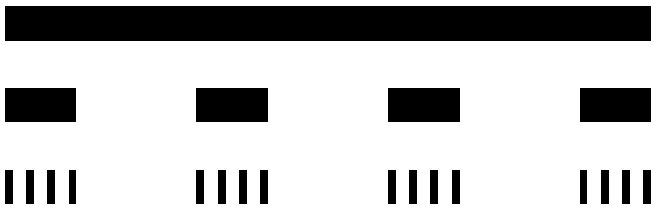


Fig.1.4.5 Construction des deux premières itérations d'un autre ensemble de Cantor ayant la même dimension fractale.

1/9, ce qui revient a répartir uniformément les éléments de la seconde itération

de l'ensemble précédent. En fait ces deux ensembles diffèrent par leur lacunarité (voir le § 1.5.3), c'est-à-dire par la répartition des régions vides.

Courbe de Mandelbrot-Given

Les processus itératifs déterministes s'avèrent d'un grand intérêt pour l' étude des structures fractales plus complexes rencontrées dans la nature, car leur caractère itératif permet souvent un calcul exact. La courbe de Mandelbrot-Given (Mandelbrot & Given, 1984) en est un exemple instructif car il simule l'amas conducteur de courant d'un réseau de résistance au voisinage du seuil de conductivité (réseau de résistances dont beaucoup sont coupées si bien que le réseau ne conduit presque plus). Il est également intéressant pour comprendre les structures multifractales. Nous en reparlerons dans le § 5.2.2 (modèles hiérarchiques, p. 204) car il modélise assez bien « l'épine dorsale » de l'amas infini de la percolation (figure 3.1.8).

Le générateur et les deux premières itérations sont les suivants,

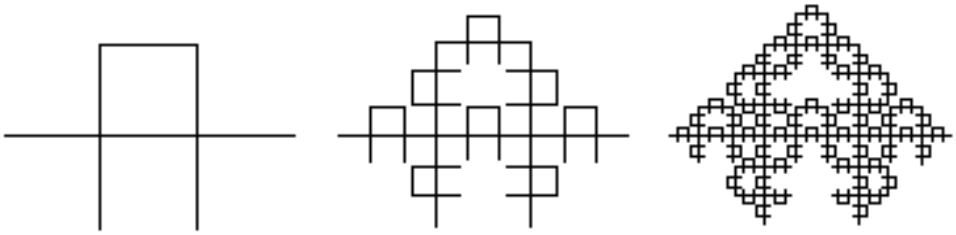


Fig.1.4.6 Construction des trois premières itérations d'un ensemble de Mandelbrot-Given. Cette fractale a une structure rappelant l'amas de percolation lequel joue un rôle important dans la description des milieux désordonnés (section 3.1).

Les segments verticaux du générateur sont légèrement réduits de manière à éliminer les points doubles. La dimension fractale est (en négligeant la contraction des segments verticaux) $D = \log 8 / \log 3 \cong 1{,}89\ldots$

« Tamis » et « Tapis »

Ces structures sont très fréquemment utilisées pour mener à terme des calculs analytiques exacts de diverses propriétés physiques (conductance, vibrations…).

Tamis de Sierpinski

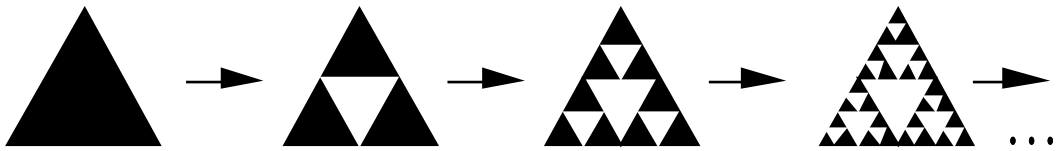


Fig.1.4.7 Itération du tamis de Sierpinski formé de triangles pleins (Les objets sont constitués seulement des parties laissées en noir).

Le facteur d'échelle de l'itération est 2, tandis que le rapport de masse est 3. La dimension fractale correspondante est ainsi,

$$D = \log 3/\log 2 = 1{,}585\ldots$$

On considère également souvent le tamis de Sierpinski engendré avec les côtés seuls. On vérifie aisément qu'il a la même dimension D = log 3/log 2 = 1,585…

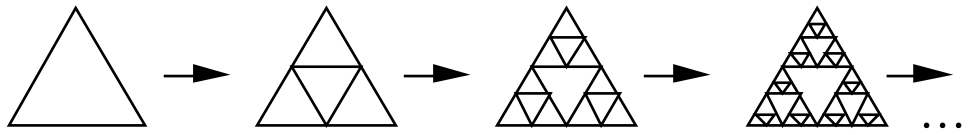


Fig.1.4.8 Itération du tamis de Sierpinski formé des côtés des triangles.

On peut montrer qu'asymptotiquement les deux structures « convergent » l'une vers l'autre, au sens de la distance de Hausdorff (voir par exemple Barnsley, 1988).

Tapis de Sierpinski

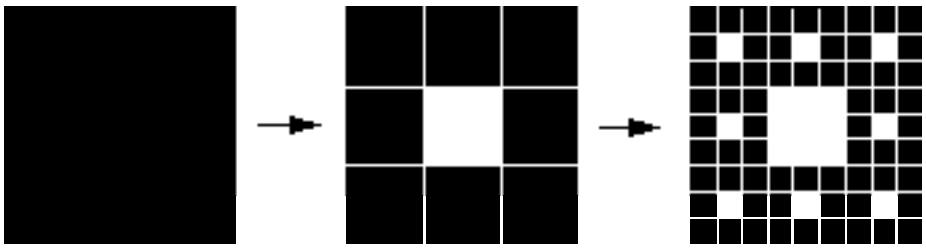


Fig.1.4.9 Itération d'un tapis de Sierpinski.

Le facteur d'échelle est 3 et le rapport de masse (carrés noirs) est 8. Soit
D = log 8/log 3 = 1,8928…

Autres exemples

On peut multiplier à l'infini les exemples de structures fractales déterministes construites sur la base des tamis et tapis de Sierpinski. Ces géométries peuvent s'avérer très intéressantes pour modéliser certains problèmes de transport dans des objets poreux ou encore d'électrodes fractales. Voici deux exemples tridimensionnels, le tamis 3d et l'éponge dites de Menger.

Autre illustration du fait que la dimension fractale ne caractérise pas à elle seule l'objet : la dimension fractale du tamis 3d est égale à deux comme pour la courbe de Peano.

Tamis 3d (Mandelbrot)
D = log 4/log 2 = 2

Eponge de Menger
D = log 20/log 3 ≅ 2.73

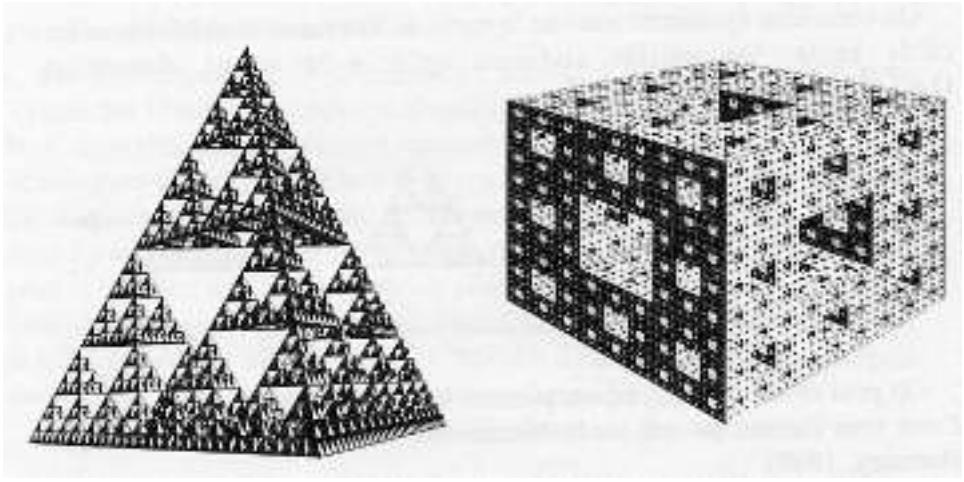


Fig.1.4.10 Tamis de Sierpinski tridimensionnel formé de tétraèdres pleins (image de gauche); éponge de Menger (à droite). (Extrait de Mandelbrot 1982).

Fractales non uniformes

Une autre variation possible dans les structures fractales réside dans la présence simultanée de plusieurs échelles de dilatation. Voici un exemple d'une

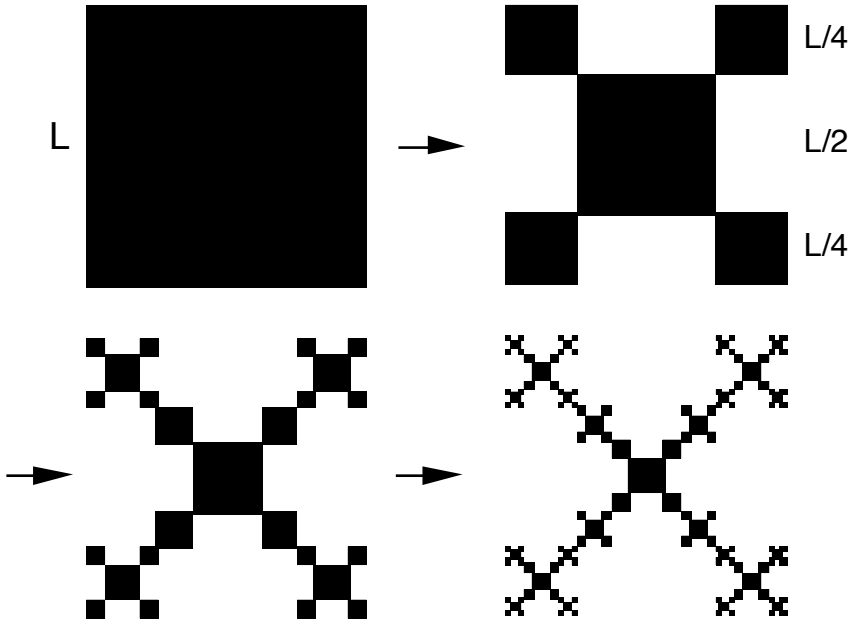


Fig.1.4.11 Construction d'une fractale déterministe non uniforme : ici avec deux échelles de contraction.

telle structure obtenue par itération déterministe contenant les facteurs 1/4 et 1/2 (figure 1.4.11). Sa géométrie est évidemment fractale et sa dimension D se détermine sur une seule itération comme précédemment (à partir de l'équation 1.4.2) :

$$4\,(L/4)^D + (L/2)^D = L^D.$$

$$\text{soit} \qquad D = \frac{\text{Log}(1+\sqrt{17}\,)}{\text{Log}\,2} - 1$$

Cette structure est en réalité plus complexe dans la distribution de son support que les fractales décrites plus haut : elle est en fait multifractale. Nous étudierons plus en détails, dans la section 1.6, les mesures multifractales.

1.4.2 Fractales statistiques

Nous avons donné jusqu'à présent des exemples de fractales déterministes (on dit aussi exactes) mais on peut aisément définir des structures statistiques. Dans ces structures la récurrence définissant la hiérarchie est régie par une ou plusieurs lois probabilistes précisant le choix de l'application de tel ou tel générateur à chaque itération.

Fractales homogènes

Une fractale statistique est homogène quand le volume (ou la masse) de structure est répartie uniformément à chaque niveau de hiérarchie, c'est-à-dire que les divers générateurs servant à construire la fractale conservent le rapport de masse d'un niveau au suivant.

Ainsi à partir de la récurrence :

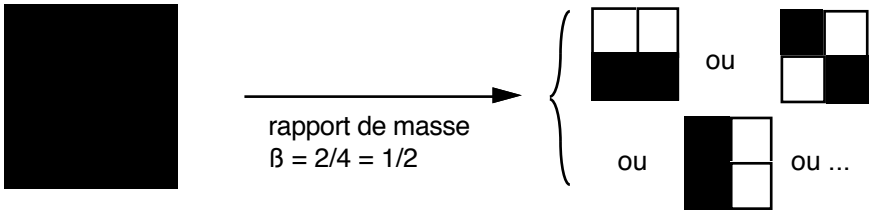


Fig.1.4.12-a Générateur d'une fractale statistique

on peut construire la fractale statistique,

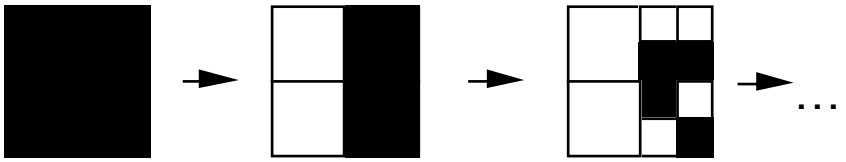


Fig.1.4.12-b Fractale statistique engendrée avec le générateur précédent.

La dimension fractale correspondante est

$$D = d + \log \beta / \log 2 = 1.$$

Si on utilise la détermination de D sur une itération, on a en effet, $2^d\beta$ éléments nouveaux de taille 1/2 à chaque itération soit, $2^d \beta (1/2)^D = 1$.

Fractales hétérogènes

Le rapport de masse ß peut lui-même varier : la fractale ainsi engendrée est dite hétérogène. Une telle fractale peut servir de base à un modèle de turbulence (voir la section 2.3).
Partant d'une relation de récurrence où la statistique sur ß est donnée :

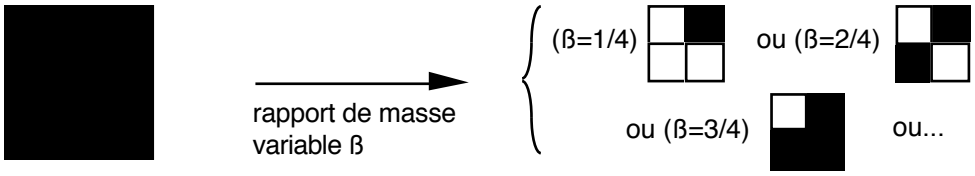


Fig.1.4.13-a Générateur d'une fractale statistique hétérogène

on bâtit des structures fractales hétérogènes,

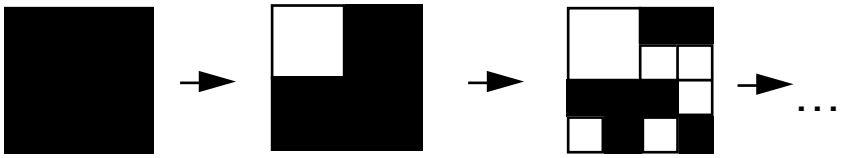


Fig.1.4.13-b Fractale statistique hétérogène engendrée avec le générateur précédent.

dont la dimension est donnée par $\langle \mathcal{M}(L) \rangle \propto L^D$ soit,

$$D = d + \log \langle ß \rangle / \log 2$$

Les fractales statistiques sont à quelques exceptions remarquables près les seules rencontrées dans la nature ; leurs propriétés fractales (invariance d' échelle, voir le § 1.4.3) portent sur les moyennes statistiques attachées à la structure fractale.

Exemple : La figure ci-dessous représente une distribution de disques dont les positions des centres suivent une distribution de Poisson et dont les rayons sont aléatoires suivant une densité de probabilité déterminée, $P(R>r) = Q\, r^{-\alpha}$; plus α est grand, plus les disques petits sont fréquents, et moins le fond noir a une dimension fractale proche de 2. Une telle distribution de disques peut être celle des cratères de la lune, d'une vue (en projection) d'un ciel parsemé seulement d'objets sphériques distribués au hasard ou encore… des trous dans l'emmenthal ! Nous reviendrons plus loin sur ce modèle.

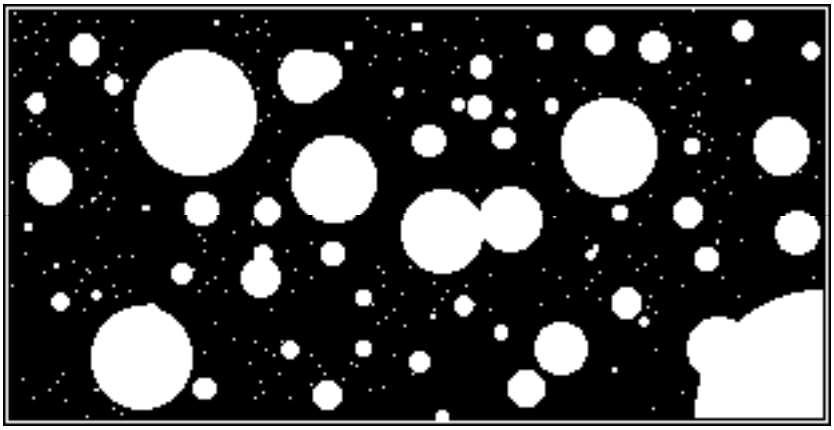


Fig.1.4.14 Fractale statistique de disques dont la répartition des tailles suit une loi de puissance.

On peut ainsi imaginer à l'infini des structures fractales. De nombreux exemples sont décrits dans Mandelbrot (1982).

Revenons donc maintenant aux propriétés fondamentales des structures que nous venons de construire.

1.4.3 Invariance d'échelle

On dit aussi *invariance par homothétie* ou *similitude interne* ou encore *invariance par dilatation*. C'est une observation qui permet à l'œil de détecter une structure fractale : elle apparaît semblable à elle-même « de près comme de loin », c'est-à-dire quelle que soit l'échelle. Naturellement l'œil est insuffisant et une analyse plus fine nécessaire. Dans les exemples précédents cette invariance vient du fait qu'une structure obtenue par itération est telle que la masse obéit à une relation d'homothétie de la forme[5] (L grand)

$$\mathcal{M}(bL) = \lambda \mathcal{M}(L)$$

c'est-à-dire que si l'on considère la masse de matière dans un volume dont les dimensions linéaires sont dilatées d'un facteur b, la masse est multipliée par un facteur λ. Pour des surfaces ou des volumes ordinaires $\lambda = b^d$, où d est la dimension de l'objet. Cette relation se généralise à toutes les fractales autosimilaires. Dans la courbe de Koch par exemple :

$$\mathcal{M}(3L) = 4\mathcal{M}(L) = 3^D\mathcal{M}(L)$$

et dans le cas général,

$$\boxed{\mathcal{M}\,(bL) \;=\; b^D\,\mathcal{M}\,(L)} \qquad (1.4\text{-}3)$$

[5] L'unité de mesure doit être conservée dans la dilatation ; afin d'éviter des difficultés s'il existe une taille caractéristique minimale dans le système physique considéré (un agrégat de particules par exemple), on prend alors cette taille comme unité.

Ceci est une manière très directe de calculer D, qui est donc aussi *la dimension de similitude* (voir aussi la remarque, page 14).

La relation d'invariance d'échelle $\mathcal{M}(bL) = b^D \mathcal{M}(L)$ est équivalente à la relation masse/rayon $\mathcal{M}(L) = A_o L^D$. Il suffit pour s'en convaincre de choisir $b = 1/L$ dans la loi d'échelle, soit $\mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(1)\, L^D$.

Nous verrons que la similitude interne est présente dans de nombreuses fractales exactes ou statistiques (voir ci-dessous), qui ne sont pas générées par itération.

D'une manière très générale :

Invariance par translation → réseaux périodiques

Invariance par dilatation → fractales auto-similaires

En pratique l'invariance d'échelle n'existe que pour une gamme limitée de distances r

$$a << r << \Lambda.$$

Λ, étant la coupure macroscopique due à la taille de l'échantillon, à la longueur de corrélation, à des effets de gradients,…

a, étant la coupure à une distance microscopique due au pas du réseau, aux tailles moléculaires…

L'invariance peut d'autre part n'être vérifiée qu'asymptotiquement (r très grand), s'il existe des corrections aux lois d'échelle (A(r) non constant).

1.4.4 Ambiguïtés dans les mesures pratiques

Dans la pratique, c'est-à-dire pour des objets physiques, on voit apparaître des problèmes d'adaptation des méthodes que nous venons de décrire. D'une part, comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, il y a une échelle de taille caractéristique minimale en dessous de laquelle la description fractale cesse d'être valable (exemple : agrégats formés de petites particules) et il y a également une taille supérieure pour l'objet considéré. D'autre part, un phénomène physique dépendant d'un paramètre n'engendre des structures fractales à toutes échelles que pour une valeur critique du paramètre. Cette valeur est souvent difficilement atteinte et des corrections aux lois d'échelles sont en général présentes (remarque, page 14).

La détermination de la dimension fractale s'obtient par exemple (méthode des boîtes), comme la pente de la droite de régression linéaire des points de coordonnées, $\{\log 1/r, \log N(r)\}$, r allant de la taille minimale caractéristique à la taille de l'objet.

La méthode de détermination choisie (voir la discussion de Tricot, 1982), l'existence d'une dynamique fractale insuffisante (objet fractal sur une échelle ayant moins de deux décades), l'existence de corrections aux lois d'échelles, rendent souvent très imprécise une détermination basée sur une régression dans une échelle log-log, représentation qui a tendance à atténuer les cour-

bures. La présence d'une très légère courbure est le signe que le régime asymptotique n'est pas atteint ; de même un point d'inflexion peut être pris pour un comportement linéaire et ce n'est pas toujours évident sans un support théorique fiable de faire la part des choses. Un bon modèle théorique ou une dynamique suffisante est donc indispensable. Une discussion sur les lois de puissances réelles et apparentes pourra être trouvée dans T.A. Witten, Les Houches, 1985 (Boccara & Daoud, 1985).

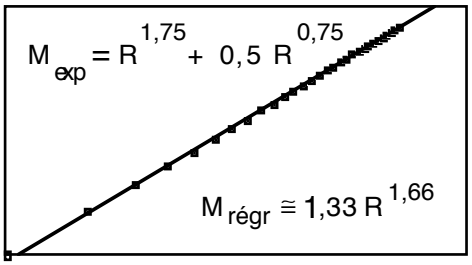


Fig.1.4.15 Exemple très simple d'imprécision dans l'estimation de l'exposant (M_{regr}) due à des corrections dans la loi d'échelle (M_{exp}).On obtient ainsi 1,66 au lieu de 1,75, bien que la linéarité de la loi soit apparemment bonne.

1.5 Propriétés de connectivité

Une fractale est évidemment très insuffisamment caractérisée par sa seule dimension fractale D. Nous verrons tout au long de ce livre apparaître des exposants destinés à préciser les comportements de diverses grandeurs physiques.

Géométriquement on peut avoir intérêt à considérer des grandeurs comme la *dimension d'étalement*, la *ramification* ou la *lacunarité* caractérisant les propriétés de *connectivité* et de distribution de matière dans une fractale.

1.5.1 Dimension d'étalement, dimension de connexion

Considérons une fractale constituée d'un ensemble de carrés adjacents. Les carrés blancs seront les sites autorisés (appartenant à la structure fractale), les carrés noirs les sites interdits. Si l'on compte à partir d'un site permis le nombre $S(\ell)$ de sites permis accessibles (ayant par exemple un côté commun avec un carré déjà visité), et atteints en ℓ pas ou moins, on obtient d'une manière générale,une relation masse-(distance en pas) de la forme :

$$S(\ell) \propto \ell^{d_e} \qquad (1.5\text{-}1)$$

ℓ est appelée la *distance chimique* ou *distance de connectivité* et d_e la *dimension d'étalement*. C'est une dimension qui ne dépend que des connexions entre les éléments de la structure fractale (et non de la métrique de l'espace où elle est

plongée) : c'est une *propriété intrinsèque de connectivité* de la fractale. La dimension d_e est liée à la *tortuosité* : plus la tortuosité est élevée, plus les circonvolutions de l'objet nous imposent des détours pour aller d'un point à un autre situé à une distance « à vol d'oiseau » fixée. On a l'inégalité : $d_e \leq D$. L'égalité $d_e = D$ est atteinte quand la métrique de la fractale correspond à sa métrique naturelle, c'est-à-dire quand les distances euclidiennes (à vol d'oiseau) sont égales ou proportionnelles aux distances obtenues en restant sur la fractale (en moyenne). C'est le cas des tamis de Sierpinski.

A cause de l'invariance statistique de la structure par toute dilatation, on s'attend à ce que la distance quadratique euclidienne moyenne $R(\ell)^2$ entre deux sites séparés par une distance chimique ℓ soit telle que

$$R(\ell)^2 \propto \ell^{2/d_{min}} \qquad (1.5\text{-}2)$$

d_{min} est appelé *dimension chimique* ou encore de *connexion*. C'est la dimension fractale de la trace (la mesure étant alors la distance en pas) du chemin le plus court : en effet on a bien une relation (distance en pas)-rayon donnée par $\ell \propto R^{d_{min}}$. Comme $S(\ell) \propto R(\ell)^D$ on obtient

$$d_e = \frac{D}{d_{min}} \qquad (1.5\text{-}3)$$

On vérifie bien ici ce que nous avons dit plus haut à savoir que $d_e = D$, seulement si $d_{min} = 1$ c'est-à-dire $R \propto \ell$.

Les chiffres représentent la « distance chimique » ℓ = 1, 2, 3,... d'une origine 0. Les régions interdites sont en noir. Les domaines hachurés correspondent à différents amas inaccessibles à partir de 0. R est la racine carrée de la distance quadratique moyenne entre deux points séparés de ℓ.

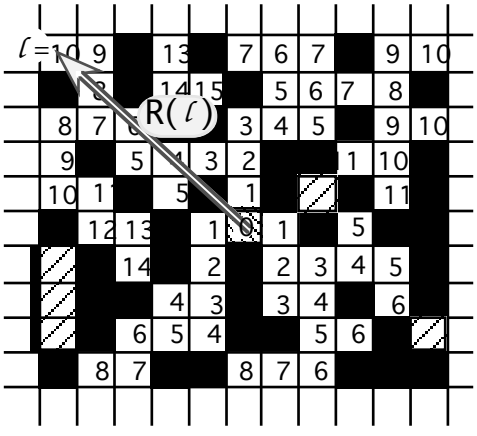


Fig.1.5.1 Représentation sur un réseau carré de sites accessibles, de la distance chimique ℓ, et des sites visités $S(\ell)$. Par exemple $S(3) = 11 = 3\,(1) + 3\,(2) + 5\,(3)$.

1.5.2 La ramification $\mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ est le *plus petit* nombre de liens qu'il faut couper pour *déconnecter une portion macroscopique* de l'objet. Par liens, il faut entendre tous les chemins allant d'un point de la structure à un autre.

Ainsi pour le tamis de Sierpinski : $\mathcal{R}$ est fini,

tandis que pour son tapis : $\mathcal{R}$ est infini.

La ramification joue évidemment un rôle important dans les propriétés de conduction ou dans les propriétés mécaniques des fractales. La condition $\mathcal{R}$ fini est d'autre part une condition nécessaire pour écrire des relations *exactes* du groupe de renormalisation dans l'espace réel comme nous le verrons dans l'exemple sur le calcul des modes de vibrations d'un tamis de Sierpinski traité au § 5.1.1 et de sa conductance traitée au § 5.2.1.

1.5.3 La lacunarité $\mathcal{L}$

Elle indique en quelque sorte l'écart à l'invariance par translation en mesurant la présence de trous plus ou moins importants dans une structure fractale E.

Nous avons vu que l'on pouvait toujours écrire $\mathcal{M}(R) = A(R)\, R^D$, la seule condition sur A étant que $\log A/\log R \to 0$. La distribution de trous ou lacunes est par conséquent reliée aux fluctuations autour de la loi en R^D. On définit donc la lacunarité $\mathcal{L}$ par,

$$\mathcal{L} = \text{Variance (A)}$$

C'est-à-dire que la lacunarité peut se calculer à partir de la moyenne sur E,

$$\boxed{\mathcal{L}(R) = \left(\langle \mathcal{M}(R)^2 \rangle - \langle \mathcal{M}(R) \rangle^2 \right)^{1/2} / \langle \mathcal{M}(R) \rangle} \qquad (1.5\text{-}4)$$

Pour un objet comme l'ensemble de Cantor défini page 15, la lacunarité est périodique (en log R), car $A(R) = A(bR)$ où $b = 1/3$ pour le premier exemple et $b = 1/4$ pour le second.

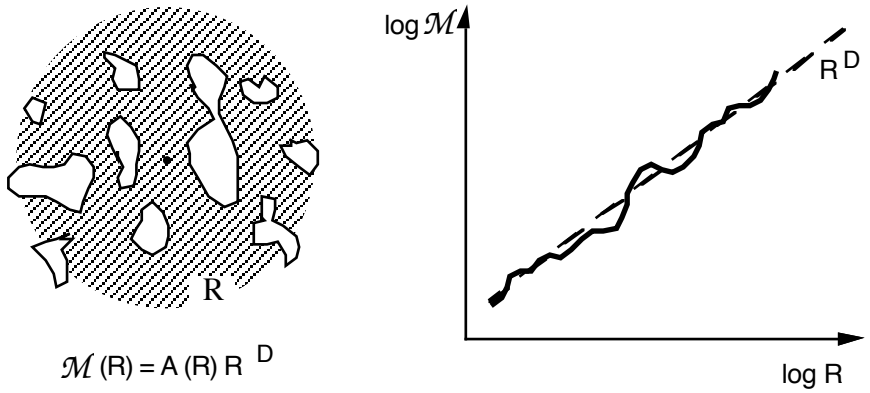


Fig.1.5.2 Effet de la lacunarité sur la relation masse en fonction du rayon. $\mathcal{M}(R)$ fluctue autour de la loi de puissance en R^D.

Il en est ainsi pour les fractales déterministes obtenues par itération à partir d'un générateur. La lacunarité devient apériodique pour les fractales statistiques (Gefen *et al.,* 1983).

1.6 Mesures multifractales

La connaissance de la dimension fractale d'un ensemble est, nous l'avons vu, très insuffisante pour caractériser sa géométrie, et donc à plus forte raison un phénomène physique se produisant sur cet ensemble. Ainsi, dans un réseau aléatoire de liens fusibles, les liens qui fondent sont ceux qui voient passer un courant supérieur à un certain seuil : leur distribution a comme support un ensemble qui n'a en général pas la dimension fractale de l'ensemble complet. De même dans un phénomène de croissance comme l' « agrégation limitée par diffusion » (le modèle « DLA » est décrit dans la section 4.2), tous les sites de croissance n'ont pas le même poids, certains croissant beaucoup plus vite. Il s'avère donc nécessaire pour la compréhension de nombreux phénomènes physiques mettant en jeu des supports fractals de caractériser la distribution (singulière) des mesures associées à chaque point de ce support. Ces mesures, grandeurs scalaires, peuvent correspondre à une concentration, un courant, un potentiel électrique ou chimique, une probabilité d'atteindre chaque point du support, une pression, une dissipation…

Approche intuitive de la multifractalité

Considérons par exemple la distribution des diamants sur la surface du globe. Supposons que, le hasard aidant, cette répartition ait quelques analogies avec celle de la figure (1.4.14) (qui un peu trop optimiste !) : c'est-à-dire que nous supposons que la distribution des diamants est fractale, que cette distribution n'est pas homogène, et qu'il existe des régions très peu nombreuses où il y a de grosses pierres, tandis que la majorité de la surface du globe contient des diamants à l'état de traces. Le renseignement que l'on peut tirer de la connaissance de la dimension fractale, est global : si celle-ci est proche de deux, les diamants sont répartis presque uniformément sur la terre, si elle est proche de zéro, il existe quelques endroits privilégiés où toute la masse des diamants est distribuée. Dans le premier cas on trouve très vite quelque chose mais le rendement est très mauvais, dans le second cas il faut beaucoup chercher mais on est alors bien payé de ses efforts. Cependant on voit rapidement que le renseignement fourni par la dimension fractale est très insuffisant. Il existe en particulier une *mesure attachée au support de cet ensemble fractal*, c'est le prix du diamant en fonction de son volume, et évidemment il est plus intéressant de trouver de grosses pierres que des petites. Il faut donc affiner notre connaissance de la distribution des diamants en faisant intervenir le paramètre de leur taille. Admettons que l'on connaisse parfaitement la distribution (sinon on est conduit à faire un échantillonnage) et qua-

drillons la surface du globe en attachant à chaque parcelle carrée de côté ε, la valeur en diamants qui s'y trouve. L'ensemble des parcelles peut être, pour simplifier, divisé en un nombre fini de lots ($i = 1 \ldots N$) correspondant à diverses tranches de valeurs allant des plus démunies aux plus riches (à chaque parcelle i de taille ε et située en x_i, on attachera ainsi sa valeur relative $\mu(\varepsilon,x_i)$ par rapport à la valeur totale). Chacun de ces lots correspondant à une tranche μ donnée, spécifie une distribution des diamants à la surface de la terre ; on suppose que chacune de ces distributions est également fractale à la limite où le côté ε des parcelles tend vers zéro. Les régions riches, très rares, auront une dimension fractale proche de zéro (c'est une « poussière »), tandis que les régions présentant des traces de diamants, très uniformément réparties, auront une dimension fractale proche de deux.

Le caractère multifractal est attaché à l'hétérogénéité de la distribution (voir le § 1.4.2, et T.A. Witten (Boccara & Daoud, 1985)). Pour une distribution fractale homogène, la masse au voisinage de chaque point de la distribution est arrangée de la même manière. C'est-à-dire qu'à l'intérieur d'une sphère de rayon R centrée sur la fractale en x_i, la masse $\mathcal{M}(R)$ fluctue peu autour de sa valeur moyenne sur tous les x_i, $\langle\mathcal{M}(R)\rangle$ dont la loi d'échelle est en R^D : la distribution $P(\mathcal{M})$ des masses $\mathcal{M}(R)$ prises en différents x_i, est étroite, c'est-à-dire décroît, de part et d'autre de la valeur moyenne, plus vite que toute puissance. En particulier, tous les moments $\langle\mathcal{M}(R)^q\rangle$ varient comme $\langle\mathcal{M}(R)\rangle^q$ pour tous q. La distribution fractale est bien décrite par le seul exposant D. Il n'en va pas de même pour les fractales hétérogènes pour lesquelles la distribution $P(\mathcal{M})$ des masses est large. C'est le cas de l'exemple de la distribution des diamants à la surface du globe. La connaissance du comportement des moments $\langle\mathcal{M}(R)^q\rangle$ nous renseigne alors sur les ailes de la distribution, les régions très pauvres et les régions très riches.

Nous allons préciser ces notions sur quelques distributions simples qui vont nous permettre d'introduire les relations mathématiques indispensables à l'utilisation pratique du concept de multifractalité.

Les grandeurs $f(\alpha)$ ou $\tau(q)$ que nous allons définir maintenant permettent de caractériser les hétérogénéités de distribution des mesures que l'on appelle *mesures multifractales*. Comme ces notions ne sont pas évidentes de prime abord, le lecteur pourra donc également se reporter aux divers exemples physiques décrits dans la suite.

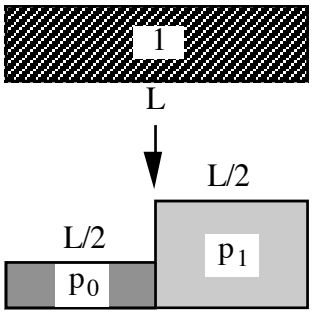
1.6.1 Mesure fractale binomiale

Cette mesure très simple se construit de la manière suivante : un segment de longueur L sur lequel est répartie une mesure uniforme de densité 1/L est divisé en deux parts égales de longueur $\ell_0 = \ell_1 = L/2$ pour lesquelles on attribue les poids respectifs p_0 et p_1 (p_0 sur la part gauche et p_1 sur la part droite). Ce processus est itéré à l'infini. La mesure totale est conservée si on prend soin de choisir

$$p_0 + p_1 = 1$$

Chaque élément (segment) de l'ensemble est libellé par la succession de choix (0 à gauche, 1 à droite) à chaque itération. A l'itération n, chaque segment est donc indicé par une suite $[\eta] \equiv [\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots \eta_n]$ où $\eta_k = 0$ ou 1, et a pour longueur, $d\ell = \varepsilon L = 2^{-n} L$. Son abscisse sur le segment E = [0,1] est de plus très simplement décrite par le nombre en base deux,

$$x = \ell / L = 0, \eta_0\eta_1 \ldots \eta_n$$



Première itération de la mesure binômiale. Les mesures, associées à la surface des rectangles, sont indiquées en insertion.

Ainsi à la troisième itération, les poids $\mu(\varepsilon, x_i)$ successifs des segments sont les $p_{[\eta]}$ où,

$[\eta] =$ [000] $(x_0 = 0{,}000)$ $\rightarrow$ $p_{[000]} = p_0^3$

[001] $(x_1 = 0{,}001)$
[010] $(x_2 = 0{,}010)$ $\rightarrow$ $p_{[001]} = p_{[010]} = p_{[100]} = p_0^2 p_1$
[100] $(x_3 = 0{,}100)$

[011] $(x_4 = 0{,}011)$
[101] $(x_5 = 0{,}101)$ $\rightarrow$ $p_{[011]} = p_{[101]} = p_{[110]} = p_0 p_1^2$
[110] $(x_6 = 0{,}110)$

[111] $(x_7 = 0{,}111)$ $\rightarrow$ $p_{[111]} = p_1^3$

et ainsi de suite pour chaque valeur de n (ou de $\varepsilon = 2^{-n}$). La normalisation à un se conserve pour chaque n :

$$\sum_i \mu(\varepsilon, x_i) = \sum_{[\eta] = [00\ldots0]}^{[11\ldots1]} p_{[\eta]} = 1.$$

On vérifie aisément que le poids associé à une suite $[\eta]$ a la forme générale,

$$\mu(\varepsilon, x) \equiv p_{[\eta]} = p_0^{n\varphi_0} p_1^{n\varphi_1}$$

($n\varphi_0$ et $n\varphi_1$ étant les nombres respectifs de 0 et 1 dans $[\eta]$: $\varphi_0 = k/n$ et $\varphi_1 = (n - k)/n$, $k = 0, \ldots n-1$).

A chaque valeur de x est associé un $\varphi_0(x) = 1 - \varphi_1(x)$). Ce poids se retrouve avec la fréquence,

$$N(\varepsilon, x) = C_n^k = \frac{n!}{(n\varphi_0)!(n\varphi_1)!}$$

La figure 1.6.1 représente la hiérarchie des itérations pour n = 4, et la distribution correspondante des poids (plus exactement leur logarithme). Le logarithme du poids sur un intervalle ε, divisé par le logarithme de cet intervalle, s'appelle *exposant de Hölder* et se note α,

$$\alpha = \frac{\log \mu(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = -\varphi_0 \log_2 p_0 - \varphi_1 \log_2 p_1$$

Il mesure la *singularité de la mesure* au voisinage d'un point x (*via* $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$), soit

$$\boxed{\mu(\varepsilon,x) = \varepsilon^{\alpha(x)}} \qquad (1.6\text{-}1)$$

Les valeurs de α sont bornées suivant l'inégalité,

$$0 < \alpha_{min} = -\log_2 p_0 \le \alpha \le \alpha_{max} = -\log_2 p_1 < \infty.$$

Ce comportement permet d'autre part de partitionner[6] l'ensemble E en sous-ensembles de même α,

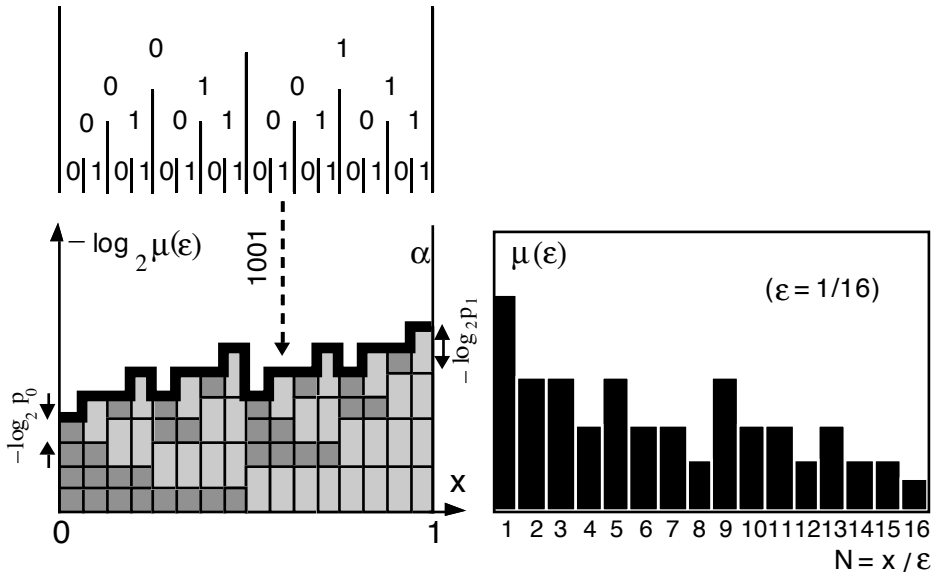


Fig. 1.6.1 La partie supérieure gauche représente les séquences binaires conduisant aux [η] pour n = 4. Le dessin en bas à droite représente la distribution des mesures μ dont le logarithme est également proportionnel (facteur –n) à α. On a choisi ici log p_1 = 2 log p_0 On peut remarquer la symétrie de la distribution binomiale : contrairement à l'exemple des diamants, les régions de faible poids sont aussi rares que celles ayant un poids important.

[6] Dans notre exemple intuitif sur la distribution des diamants la partition en « lots » est faite en fonction de leur « valeur » relative ; on voit ici que ces lots peuvent également être désignés par leur exposants de Hölder qui indique comment varie localement la valeur (en diamant) d'un arpent de terre en fonction de sa taille.

$$E = \bigcup_{\alpha} E_\alpha \qquad (1.6\text{-}2)$$

Considérons maintenant plus particulièrement les sous-ensembles E_α. Nous les avons dénombrés plus haut en calculant $N(\varepsilon)$. L'analogue de la dimension de Hausdorff pour le support des intervalles possédant le même α (fonction de α et donc de x), s'écrit alors :

$$\delta(\alpha) = -\frac{\log N(\varepsilon, \alpha)}{\log \varepsilon} \qquad (1.6\text{-}3)$$

A la limite des n grands (ε petit) on a alors simplement,

$$\delta = -\log [(n\varphi_0)!(n\varphi_1)!/n!] / \log \varepsilon$$

$$\approx -\varphi_0 \log_2 \varphi_0 - \varphi_1 \log_2 \varphi_1$$

Dans le cas binomial, cette dimension fractale est parfaitement définie pour chaque ensemble E_α puisque tous les paramètres sont déterminés (*via* $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$).

1.6.2 Mesure fractale multinomiale

Ces résultats, montrés dans le cas d'une *mesure binomiale*, se généralisent aisément aux *mesures multinomiales*. En effet si on considère b poids p_β ($0 \le \beta \le b - 1$), on peut construire un processus analogue à celui de la mesure binomiale. Chaque segment de taille b^{-n} à l'itération n est indicé par une suite $[\eta]$ ou encore une abscisse x, écrites en base b (au lieu de 0 et 1 de l'exemple binomial précédent). Les intervalles b-adiques sont alors caractérisés par les fréquences φ_β de leurs « *digits* » β dans cette base b. De sorte que les expressions de α et δ se généralisent en,

$$\alpha = -\sum_{\beta} \varphi_\beta \log_b p_\beta \qquad \text{et} \qquad \delta = -\sum_{\beta} \varphi_\beta \log_b \varphi_\beta$$

avec les contraintes $\sum_{\beta} \varphi_\beta = 1$ et $\sum_{\beta} p_\beta = 1$.

Dans le cas d'une mesure binomiale (b = 2), δ est une fonction univoque de α, puisque on dispose de deux paramètres φ_0 et φ_1 dont la somme est normalisée à un. Pour b > 2, cette relation n'est plus univoque (il existe b – 2 paramètres supplémentaires) et les couples (α,δ) couvrent un certain domaine. Ce domaine est indiqué très grossièrement par un réseau de courbes sur la figure 1.6.2 (dans le cas b = 3). L'ensemble des $[\eta]$ (ou des x exprimés en base b) correspondant au même α est dominé par le terme de plus grande dimension f = max δ (c'est-à-dire par le sous-ensemble $N(\varepsilon,\alpha)$ dont l'exposant δ est le plus grand).

$$N(\varepsilon, \alpha)_{\text{dominant}} \propto \varepsilon^{-f(\alpha)} \qquad (1.6\text{-}4)$$

Ce terme maximise donc

$$-\sum_{\beta} \varphi_\beta \log_b \varphi_\beta$$

On écrit par conséquent que la variation s'annule (les $\vartheta\varphi_\beta$ étant alors des variables infinitésimales indépendantes),

$$\vartheta\left(-\sum_{\beta} \varphi_\beta \log_b \varphi_\beta\right) \equiv 0$$

avec les contraintes ,

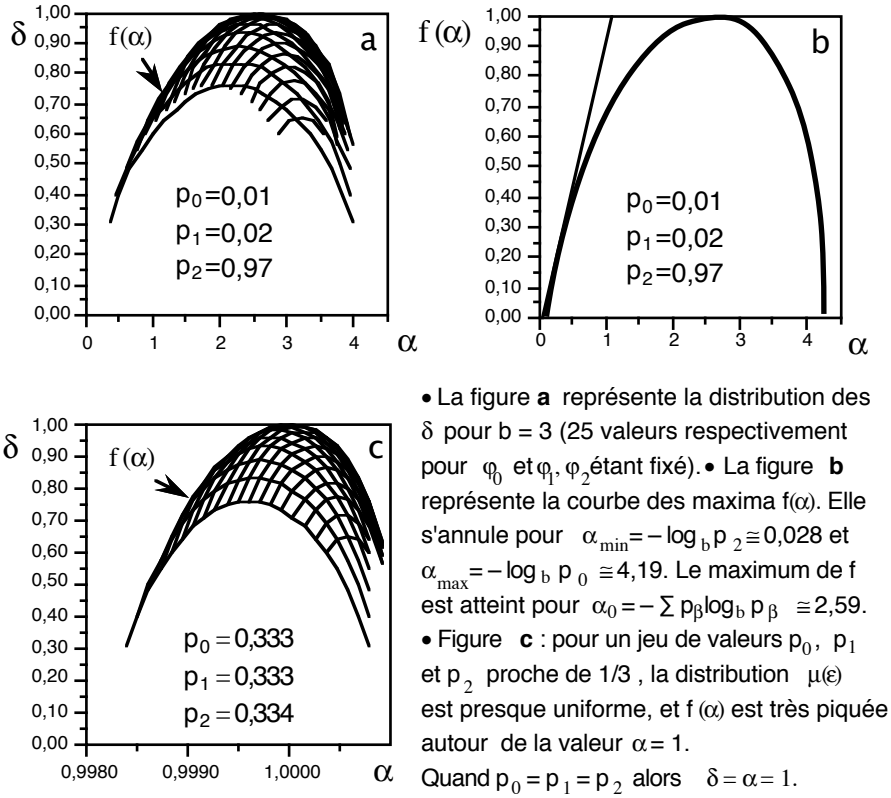
$$\alpha = -\sum_{\beta} \varphi_\beta \log_b p_\beta \qquad \text{et} \qquad 1 = \sum_{\beta} \varphi_\beta$$

Ceci se résout de manière classique en introduisant les multiplicateurs de Lagrange q et (r – 1), de sorte que l'on est conduit à la relation,

$$\sum_{\beta} \vartheta\varphi_\beta \left[\log_b \varphi_\beta - q \log_b p_\beta - r \right] \equiv 0 \qquad \forall \ \vartheta\varphi_\beta.$$

Tous les termes entre crochets s'annulent. Soit, en utilisant la normalisation à un des φ_β (ce qui détermine r) :

$$\varphi_\beta = \varphi_\beta(q) = b^r \, p_\beta^q = \frac{p_\beta^q}{\sum_\beta p_\beta^q} \quad , \qquad -\infty < q < +\infty.$$



• La figure **a** représente la distribution des δ pour b = 3 (25 valeurs respectivement pour φ_0 et φ_1, φ_2 étant fixé). • La figure **b** représente la courbe des maxima f(α). Elle s'annule pour $\alpha_{min} = -\log_b p_2 \cong 0{,}028$ et $\alpha_{max} = -\log_b p_0 \cong 4{,}19$. Le maximum de f est atteint pour $\alpha_0 = -\sum p_\beta \log_b p_\beta \cong 2{,}59$. • Figure **c** : pour un jeu de valeurs p_0, p_1 et p_2 proche de 1/3 , la distribution $\mu(\varepsilon)$ est presque uniforme, et f (α) est très piquée autour de la valeur $\alpha = 1$.
Quand $p_0 = p_1 = p_2$ alors $\delta = \alpha = 1$.

Fig. 1.6.2 Distribution des dimensions de Hausdorff des sous-ensembles E_α.

La dépendance en x des φ s'opère maintenant au travers des q qui sélec-

tionnent les sous ensembles {x}(q) correspondant à $\delta(\alpha)$ *extremum* pour α fixé. Il est alors commode d'introduire la quantité,

$$\boxed{\tau(q) = \log_b \sum_\beta p_\beta^q} \qquad (1.6\text{-}5a)$$

$\tau(q)$ entre en fait dans le cadre des fonctions génératrices de cumulants. Un choix de signe opposé a été également adopté par certains auteurs.

α et $f(\alpha)$ sont alors reliés de manière simple à $\tau(q)$ par les relations :

$$\alpha = -\sum_\beta \varphi_\beta \log_b p_\beta = -\left(\frac{\partial}{\partial q} \sum_\beta p_\beta^q \log_b p_\beta - \log_b \sum_\beta p_\beta^q \right) / \sum_\beta p_\beta^q$$

et $\max \delta = f(\alpha) = -\left(\frac{\partial}{\partial q} \sum_\beta p_\beta^q \log_b \left(\sum_\beta p_\beta^q \right) - \log_b \sum_\beta p_\beta^q \right) / \sum_\beta p_\beta^q$

qui se réduisent aux relations remarquables,

$$\boxed{\alpha = -\frac{\partial \tau(q)}{\partial q} \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \tau(q) - q \frac{\partial \tau(q)}{\partial q} = \tau - q\,\alpha.} \qquad (1.6\text{-}5b)$$

avec $\alpha = -\sum_\beta \varphi_\beta \log_b p_\beta$, $f(\alpha) = -\sum_\beta \varphi_\beta \log_b \varphi_\beta$,

$$\varphi_\beta = \frac{(p_\beta)^q}{\sum_\beta (p_\beta)^q} \quad \text{et} \quad \tau(q) = \log_b \sum_\beta (p_\beta)^q, \quad -\infty < q < +\infty. \qquad (1.6\text{-}5c)$$

Ces résultats (qui constituent le formalisme multifractal) ont été obtenus sous cette forme par Frisch et Parisi (1985) et Halsey *et al.* (1986) en utilisant la méthode de la plus grande pente, mais le concept lui-même se trouve déjà dans un article de 1974 de Mandelbrot. Nous avons suivi ici l'approche un peu plus simple de Mandelbrot (1988).

On notera que les fonctions $f(\alpha)$ et $\tau(q)$ sont transformées de Legendre l'une de l'autre, une transformation couramment utilisée en thermodynamique lorsque l'on souhaite changer de variables indépendantes.

Formellement, f peut être comparée à une entropie, q à l'inverse d'une température, α à une énergie (variable conjuguée de q) et τ à une énergie libre de Gibbs [Lee & Stanley, 1988]. L'expression de f est en effet bien celle d'une entropie ou plus exactement d'une quantité d'information, pourvu que l'on considère les φ_β comme les probabilités de trouver les mesures p_β (c'est la fréquence relative du digit β dans $x = 0, \eta_0\eta_1\ldots\eta_n$ écrit en base b). L'entropie minimum est obtenue quand la distribution des p_β est connue exactement, c'est-à-dire quand l'un des $\varphi_\beta = 1$ tous les autres étant nuls (exemple x = 0,333…33). Au contraire, le désordre et l'entropie maximum correspond à

tous les φ_β égaux (ici les φ_β égaux à 1/b et $f(\alpha) = 1$). L'expression de $\varphi_\beta(q)$ montre que ce désordre maximum correspond soit à $q = 0$, soit au cas trivial $p_0 = \dots\ p_\beta = \dots\ p_{b-1}$ (= 1/b).

D'une manière générale $f(\alpha)$ est une courbe convexe, positive, croissante à partir de $f(\alpha_{min}) = 0$, jusqu'à un maximum $D_0 = \max f(\alpha)$ qui est égal à un dans l'exemple précédent ; puis $f(\alpha)$ décroît jusqu'à $f(\alpha_{max}) = 0$. Les valeurs extrêmes de α sont simplement données par les conditions d'entropie minimum (l'un des $\varphi_\beta = 1$ tous les autres étant nuls) :

$$\alpha_{min} = \min\ (-\log_b p_\beta),\ \alpha_{max} = \max\ (-\log_b p_\beta).$$

Signification de $\tau(q)$

Considérons la mesure suivante,

$$M_q(\varepsilon) = \sum_i \mu(\varepsilon, x_i)^q \qquad (1.6\text{-}6)$$

Que représente cette mesure?

- Quand $q = 0$, $M_0(\varepsilon)$ représente le volume de support mesuré en intervalles ε,

$M_0(\varepsilon) \approx (L/\varepsilon)^{D_0}$, avec ici $D_0 = 1$ pour le segment [0,1] de longueur $L = 1$.

- Quand $q = 1$, $M_1(\varepsilon)$ représente la somme sur le support des mesures dans l'intervalle ε. Comme cette mesure est normalisée,

$$M_1(\varepsilon) \equiv \sum_{[\eta]=[00\dots0]}^{[11\dots1]} p_{[\eta]} = 1.$$

- Quand $q \to +\infty$, M_q est dominée par les régions de très forte densité μ/ε.

- Quand $q \to -\infty$, M_q est dominée par les régions de très faible densité μ/ε.

Le paramètre q permet donc de sélectionner les sous ensembles E_q correspondant à des densités plus ou moins grandes.

On pose habituellement,

$$\boxed{M_q(\varepsilon) = \varepsilon^{(q-1)\,D_q}} \qquad (1.6\text{-}7)$$

expression qui vérifie les cas $q = 0$ et $q = 1$. Les D_q sont appelées *dimensions généralisées d'ordre q* (la dénomination est due à Hentschel & Procaccia, 1983), bien qu'il ne s'agisse d'une dimension que dans le cas $q = 0$ (on peut cependant définir D_q comme une dimension critique quand $q > 1$). L'avantage des D_q sur les $\tau(q)$ réside dans le fait que ceux-ci se réduisent tous à la dimension fractale D quand l'espace est homogène, c'est-à-dire

$$\mu(x, \varepsilon) \propto \varepsilon^D \quad \forall\ x, \text{ car alors}$$

$$M_q(\varepsilon) = \sum_{\text{support}} \mu(\varepsilon, x)^q \sum_{\text{support}} \varepsilon^{qD} \propto \varepsilon^{-D}\,\varepsilon^{qD} \quad \text{d'où} \quad D_q = D.$$

On peut enfin démontrer que D_q décroît monotoniquement quand q croît.

Montrons maintenant que $(1 - q)D_q = \tau(q)$. D'après ce qui précède,

$$M_q(\varepsilon) = \sum_i \varepsilon^{q\,\alpha(x_i)}$$

or le nombre de domaines correspondant au même α est connu, c'est $N(\varepsilon,\alpha) \propto \varepsilon^{-\delta(\alpha)}$, de sorte que

$$M_q(\varepsilon) \approx \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} d\alpha\, \varepsilon^{q\,\alpha - \delta(\alpha)}.$$

Cette intégrale est dominée par les maxima de $\delta(\alpha)$ avec la valeur de α qui minimise l'exposant ($\varepsilon << 1$), soit $\alpha(q)$ tel que

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\,[q\,\alpha - \max \delta(\alpha)]\,\Big|_{\alpha = \alpha(q)} = 0, \qquad \text{ou} \quad \max \delta(\alpha)\,\Big|_{\alpha = \alpha(q)} \equiv f(\alpha(q))$$

ce qui est bien conforme aux résultats précédents. Par comparaison on voit que $M_q(\varepsilon) \propto \varepsilon^{q\,\alpha - f}$ soit,

$$\boxed{\begin{array}{c} M_q(\varepsilon) \;\propto\; \varepsilon^{-\tau(q)} \\ \text{avec } \tau(q) = (1-q)\,D_q = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\log \varepsilon} \log \sum_i \mu(\varepsilon, x_i)^q \end{array}} \qquad (1.6\text{-}8)$$

(L'intégrale est une somme discrète si on utilise la méthode des boîtes).

Forme et la signification de D_1

- Quand q = 1, l'expression précédente est indéterminée. Quelle est alors la forme et la signification de D_1, la dimension généralisée d'ordre 1?

Pour cela il faut calculer,

$$D_1 = \lim_{q\to 1} \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log M_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \qquad (1.6\text{-}9)$$

On écrit que $(\mu(\varepsilon,x)^q) = (\mu\,\mu^{q-1}) \cong \{\mu(1+ (q-1)\log \mu)$ de sorte que,

$$\log M_q(\varepsilon) = \log \sum_i \mu(\varepsilon, x_i)^q \cong \log \left(1 + \sum_i (q-1)\mu(\varepsilon, x_i)\log \mu(\varepsilon, x_i)\right)$$

$$\cong \quad (q-1) \sum_i \mu(\varepsilon, x_i)\log \mu(\varepsilon, x_i)$$

soit

$$\boxed{D_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\log \varepsilon} \sum_i \mu(\varepsilon, x_i)\log \mu(\varepsilon, x_i).} \qquad (1.6\text{-}10)$$

On peut d'autre part relier cette expression à α et $f(\alpha)$ en dérivant $\tau(q)$. On trouve alors que,

$$D_1 = \alpha_{q=1} = f(\alpha_{q=1}) \qquad (1.6\text{-}11)$$

La propriété remarquable de D_1 vient du fait que $\sum \mu(\varepsilon) \log \mu(\varepsilon)$ représente l'entropie d'information de la distribution dont D_1 décrit le comportement d'échelle. D_1 est appelée pour cette raison la *dimension d'information*. L'ensemble support $E_{\alpha(1)}$ contient *presque toute la mesure* (ou la masse) de l'en-

semble E.

En particulier pour la mesure multinomiale sur [0,1], on a $\varphi_\beta = p_\beta$ (puisque q = 1) c'est-à-dire que, $D_1 = \sum p_\beta \log_b p_\beta$. La *dimension d'information* passe, comme nous l'avons indiqué plus haut, par un maximum quand tous les p_β sont égaux (à 1/b), l'information sur la distribution étant alors minimale. Au contraire, D_1 est nul quand tous les p_β, sont nuls sauf un, p_β. L'information est alors complète puisque toute la mesure est en un point d'abscisse x = 0, βββ…

Calculons pour terminer l'exposant de masse de la distribution de mesures $\mu(\varepsilon,x)^q$ au moyen de la η-mesure de recouvrement (voir la section 1.3). Elle s'obtient comme la somme de volumes élémentaires ε^η pondérés par leur mesure associée μ^q soit,

$$m_\eta(E,\mu^q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_i \mu(\varepsilon, x_i)^q \varepsilon^\eta = \lim_{\varepsilon\to 0} M_q(\varepsilon)\, \varepsilon^\eta$$

D'après ce qui précède on voit que,

$$m_\eta(E,\mu^q) = \begin{cases} \to 0 & \text{si } \eta > \tau(q) \\ \to \infty & \text{si } \eta < \tau(q) \end{cases}$$

τ(q) est donc l'exposant de masse de la distribution μ^q. Ce résultat est ici trivial parce qu'il n'y a qu'une seule échelle de dilatation (un facteur 1/2 pour chaque segment à chaque itération). Quand on considère des *fractales non uniformes*, plusieurs échelles de dilatation sont présentes et cette formulation s'avère la plus directe pour calculer τ(q) et les autres caractéristiques multifractales.

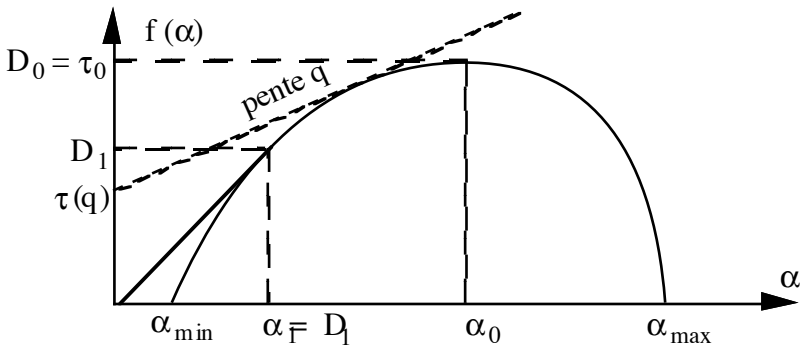


Fig. 1.6.3 La transformation de Legendre permet de passer de l'équation f = f(α) d'une courbe plane à l'équation τ = τ(q) de la même courbe en éliminant α entre q = df /dα et τ = f – qα.

Signification du maximum de f(α)

Le maximum de f(α) correspond à $\partial f/\partial\alpha \equiv q = 0$, et par conséquent à tous les φ_β égaux à 1/b,

$$M_0(\varepsilon) = (L/\varepsilon)^{D_0} \quad \text{avec} \quad \tau(0) = \max f(\alpha) = f(\alpha(0)) = D_0 .$$

$D_0 = 1$ dans l'exemple multinomial.

Le maximum de f(α) correspond donc à la mesure uniforme sur le support. Sa valeur est ainsi la dimension (fractale ou non) du support. Elle est ici celle d'un segment [0,L] donc égale à un.

Tout ce que nous venons de développer dans cet exemple multinomial permet de comprendre le cas général d'une distribution de mesures sur un support fractal. Nous détaillerons en abordant ces sujets, deux mesures importantes pour la physique, la mesure multifractale d'une distribution de points, de masse, ou de courants (turbulence développée, attracteurs étranges, distribution de galaxies ou de matière dans une roche poreuse, réseaux de résistances) et la mesure multifractale harmonique (phénomènes de croissance, D.L.A.,…).

Restons encore dans le cadre général et considérons quelques structures fractales à plusieurs échelles où les caractéristiques multifractales peuvent être complètement calculées.

1.6.3 Ensemble de Cantor à deux échelles

Les ensembles de Cantor présentés au § 1.4.1 auxquels on associe une mesure uniforme ne sont pas multifractal, plus exactement leur courbe f(α) se réduit à un point (α= f(α) = D). Pour engendrer une structure multifractale avec une mesure uniforme, il faut disposer d'au moins deux échelles de dilatation (fig. 1.6.4).

Examinons l'une de ces structures en traitant le cas général : deux échelles de mesure, deux échelles de dilatation. La structure suivante (barres de Cantor) généralise la mesure binomiale étudiée plus haut. Un segment initial de longueur L et de mesure (masse) unité, est divisé en deux parts ℓ_0 et ℓ_1 auxquelles on associe respectivement les mesures p_0 et p_1 ($p_0 + p_1 = 1$).

Détermination de τ(q)

Nous allons déterminer τ(q) en calculant la η-mesure de recouvrement. En pratique le résultat sera tout à fait analogue à celui donnant la dimension fractale calculée à partir de l'équation 1.4-2. On calcule donc,

$$m_\eta(q,N) = \sum_{i=0}^{N-1} \mu_i^q \ell_i^\eta \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \begin{cases} \to 0 & \text{si } \eta > \tau(q) \\ \to \infty & \text{si } \eta < \tau(q) \end{cases} \quad \text{où } \varepsilon = \max(\ell_i)$$

Dans le cas présent i = [0,N-1] désigne le $i^{ème}$ élément parmi $N = 2^n$ (n étant le nombre d'itérations). Il tient la place du x de la mesure binomiale. La mesure et la taille de l'élément i sont respectivement,

$$\mu_i = p_0^k p_1^{n-k} \quad \text{et} \quad \ell_i = \ell_0^k \ell_1^{n-k}$$

et sa dégénérescence, le nombre de combinaisons de k objets parmi n. Ainsi,

$$m_\eta(q,N) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \, (p_0^k p_1^{n-k})^q \, (\ell_0^k \ell_1^{n-k})^\eta = \left(p_0^q \ell_0^\eta + p_1^q \ell_1^\eta\right)^n$$

$$m_\eta(q,N) \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} \to 0 & \text{si } p_0^q \ell_0^\eta + p_1^q \ell_1^\eta < 1 \quad (\eta > \tau(q)) \\ \to \infty & \text{si } p_0^q \ell_0^\eta + p_1^q \ell_1^\eta > 1 \quad (\eta < \tau(q)) \end{cases}$$

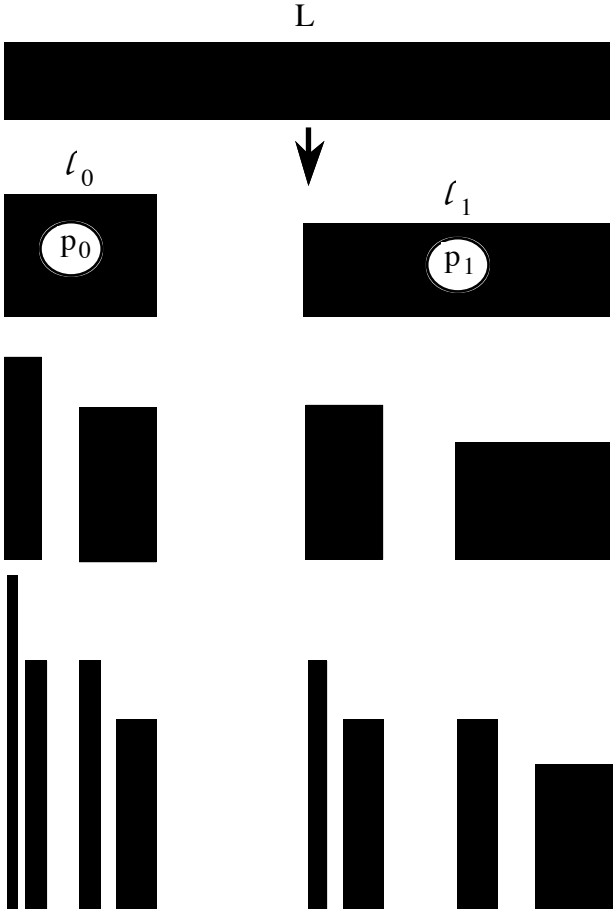


Fig. 1.6.4 Trois premières itérations de l'ensemble de Cantor pondéré, avec les échelles de dilatation $\ell_0 = L/4$ et $\ell_1 = L/2$ et les poids $p_0 = 0,4$, $p_1 = 0,6$.

ainsi $\tau(q)$ est déterminé par l'équation (analogue à celle du § 1.4.1, équation 1.4.2),

$$p_0^q \ell_0^{\tau(q)} + p_1^q \ell_1^{\tau(q)} = 1$$

connaissant $\tau(q)$ on peut calculer également D_q, α et $f(\alpha)$. Pour une générali-

sation à plusieurs échelles voir Hentschel & Procaccia (1983).

1.6.4 Mesure multifractale d'un ensemble de points

Toute description statistique d'un ensemble de points utilise plus ou moins directement la notion de corrélation. Ces corrélations représentent en effet les corrections à une distribution uniforme (c'est-à-dire invariante par translation).

Une manière de déterminer ces corrélations est de calculer les moments de la distribution de points. On peut utiliser pour cela la méthode des boîtes, (voir le.§ 1.3.3) et définir une mesure dans chaque boîte centrée en x et de coté ε.

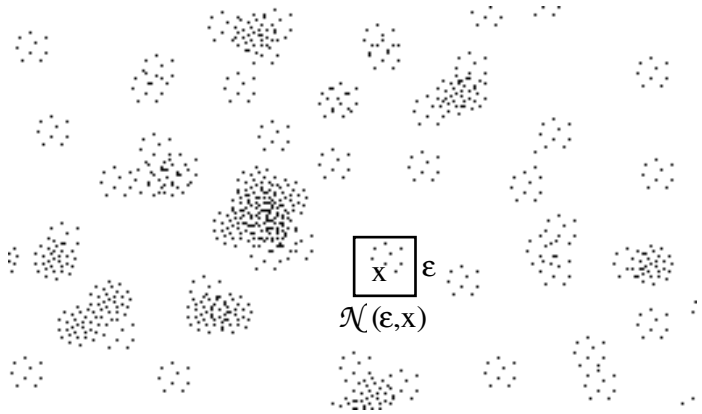


Fig. 1.6.5 Mesure multifractale d'un nuages de points. Utilisation de la méthode des boîtes.

Le nombre de points à l'intérieur d'une boîte est $\mathcal{N}(\varepsilon,x)$, si bien que la probabilité d'y trouver un point est $\mathcal{N}(\varepsilon,x)/\mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ étant le nombre de points de l'ensemble.

$$\mu(\varepsilon,x) = \mathcal{N}(\varepsilon,x)/\mathcal{N}$$

représentera donc notre mesure. Son moment d'ordre q–1 peut se calculer en sommant sur les boîtes :

$$\langle \mu(\varepsilon)^{q-1} \rangle = \sum_{i \in \text{ boîtes}} \mu(\varepsilon, x_i)^q = M_q(\varepsilon)$$

Si la structure est multifractale, d'après ce qui précède, μ et M ont les comportements en loi de puissance,

$$\mu(\varepsilon,x) \propto \varepsilon^{\alpha(x)} \qquad \text{et} \qquad M_q(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-\tau(q)} = \varepsilon^{(q-1)D_q}$$

l'exposant $\alpha = \alpha(q)$ est le même pour tout $x \in E_{\alpha(q)}$.

Connaissant τ(q) *via*

$$\tau(q) = -\frac{\log M_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

on peut alors naturellement calculer $\alpha(q)$ et $f(\alpha)$ en utilisant les relations obtenues pour la mesure multinomiale,

$$\alpha = -\frac{\partial\, \tau(q)}{\partial q} \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \tau(q) - q\,\alpha.$$

car leur dérivation est générale. La nouveauté par rapport à la mesure multinomiale est que le support (l'ensemble de points) peut être lui-même fractal.

Cette description peut être utilisée pour caractériser les attracteurs étranges que l'on obtient dans les phénomènes chaotiques. Nous en donnerons quelques exemples dans la section 2.3.

Pour une justification plus complète (mais aussi plus difficile) du formalisme précédent, on pourra consulter Collet *et al*. (1987), Bohr & Rand (1987), Rand (1989) et Ruelle (1982, 1989).