

Intégration

A partir de maintenant, vous oublier que vous avez vu l'intégrale d'une fonction.

Dans tout ce chapitre, a et b sont deux réels, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I, J et K sont des intervalles. On s'autorise le droit d'écrire $[a, b]$ sans dire que $a \leq b$, qui sera alors sous-entendu.

1 INGRÉDIENTS

1.1 INTÉGRALE DE FONCTIONS EN ESCALIER

Définition 1 : Subdivision d'un segment

On appelle **subdivision de $[a, b]$** toute famille $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ pour laquelle $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Le réel strictement positif $\max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ est appelé le **pas de σ** .

On dit que la subdivision (σ') est **plus fine** que la subdivision (σ) si (σ') contient tous les points de (σ) , autrement dit, si $(\sigma) \subset (\sigma')$. Alors les intervalles de la subdivision (σ') sont inclus dans les intervalles de la subdivision (σ) .

Exemple 1

La famille $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ est une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$, de pas $\frac{1}{n}$.

La subdivision (σ_n)

En généralisant la subdivision précédente à un intervalle $[a, b]$, on peut créer une subdivision en n parties égales, noté (σ_n) , dont les points sont les $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ où $x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$ pour k de 0 à n . (σ_5) n'est pas une subdivision plus fine que (σ_3) , mais (σ_9) est une subdivision plus fine que (σ_3) .

La relation d'ordre "plus fine" sur l'ensemble des subdivision n'est donc pas d'ordre total.

Prenons alors une subdivision On a alors

Définition 2 : Fonction en escalier

On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est **en escalier** si pour une certaine subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On dit alors que $(x_0, \dots, x_n)$ est **adaptée** à f .

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ ou $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble de toutes les fonctions en escaliers, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2

Toute fonction constante sur $[a, b]$ est en escalier sur $[a, b]$.

La fonction $x \mapsto [x]$ est une fonction en escalier sur tout intervalle.

Exemple 3

La fonction $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ est en escalier sur $[0, 2]$.

Pour le voir, il suffit de remarquer que la subdivision $\sigma = \{0, 1, 2\}$ est adaptée à f .

Le choix d'une subdivision adaptée à f n'est pas unique (il y en a même une infinité). Par exemple, la subdivision $\sigma' = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ est aussi adaptée à f puisque $f|_{]0, \frac{1}{2}[}$ et $f|_{] \frac{1}{2}, 1[}$ sont des fonctions constantes.

Proposition 1 : Propriétés

Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$.

- ① Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à f est aussi adaptée à f .
- ② Soient σ_f et σ_g des subdivisions adaptées à f et g respectivement, alors $\sigma_f \cup \sigma_g$ est une subdivision adaptée aux deux applications f et g à la fois.
- ③ $\mathcal{E}([a, b])$ est un espace vectoriel de dimension infinie, autrement dit, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g \in \mathcal{E}([a, b])$.
- ④ $|f|, \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)$ et fg sont des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.

Preuve.

- ① Si f est constante sur chaque intervalles définis par σ , alors f est encore constante sur des intervalles plus petits.
- ② D'après ce qui précède, $\sigma_f \cup \sigma_g$ est plus fine que σ_f , et est donc une subdivision adaptée à f . De même, c'est aussi une subdivision adaptée à g .
- ③ $\sigma_f \cup \sigma_g$ est adaptée à f et g , donc f et g sont constantes sur les intervalles de cette subdivision, donc la fonction $\lambda f + g$ est aussi constante sur ces intervalles. La fonction $\lambda f + g$ est donc en escalier.
- ④ Si f constante sur $]x, y[$, alors $|f|, \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)$ sont aussi constantes sur $]x, y[$. Pour fg , on procède comme le point précédent.

□

Définition 3 : Intégrale de fonctions en escalier

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ en escalier et $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f . Si pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$, alors le nombre complexe $\sum_{i=0}^{n-1} y_i (x_{i+1} - x_i)$ ne dépend pas de la subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ adaptée choisie.

On l'appelle **l'intégrale de f sur $[a, b]$** , notée $\int_{[a, b]} f$ ou $\int_{[a, b]} f(t) dt$.

Pourquoi l'intégrale ne dépend pas de la subdivision

Intuitivement, c'est clair que si on découpe un rectangle en deux rectangles, la somme des aires des deux petits rectangle sera l'aire du grand rectangle.

On considère d'abord le cas de la subdivision (σ) et de la subdivision $(\sigma') = (\sigma) \cup \{c\}$ obtenu en rajoutant un point c . Si $c \in]x_{j-1}, x_j[$, on peut écrire

$$I_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{j-1} (x_k - x_{k-1}) \lambda_k + (x_j - c) \lambda_j + (c - x_{j-1}) \lambda_j + \sum_{k=j+1}^n (x_k - x_{k-1}) \lambda_k.$$

Cette somme n'est autre que $I_{\sigma'}(f)$. Par récurrence immédiate sur p , on montre que $I_{\sigma'}(f) = I_\sigma(f)$ pour toute subdivision (σ') plus fine que (σ) obtenu en rajoutant p points à la subdivision (σ) .

Enfin, si (σ) et (σ') sont deux subdivisions adaptées à f , il en est de même de la subdivision somme (σ'') qui est plus fine que (σ) et (σ') , et pour lequel $I_{\sigma''}(f) = I_\sigma(f)$ et $I_{\sigma''}(f) = I_{\sigma'}(f)$, d'où $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$.

Proposition 2 : Propriétés de l'intégrale

Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Linéarité $\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g.$

Positivité Si f est à valeurs réelles, et $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0.$

Croissance Si f et g sont à valeurs réelles, et $f \geq g$, alors $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g.$

Inégalité triangulaire $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$

Relation de Chasles Pour tout $c \in [a, b]$, on a $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

Lien avec les parties réelle et imaginaire $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im}(f).$

Preuve. Notons (σ) une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ adaptée à f et à g . On note λ_k et μ_k les valeurs constantes prises par f et g sur les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Dans l'ordre,

Linéarité $I(\alpha f + \beta g) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k + \beta \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_k = \alpha I(f) + \beta I(g).$

Positivité Si $f \geq 0$, alors $\lambda_k \geq 0$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $x_{k+1} - x_k > 0$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, donc $\int_{[a,b]} f \geq 0.$

Croissance Par linéarité, $\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g \geq 0$, d'où $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g.$

Inégalité triangulaire D'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$,
 $\left| \int_{[a,b]} f \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda_i| (x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,b]} |f|.$

Relation de Chasles Quitte à remplacer (σ) par $(\sigma) \cup \{c\}$, on peut supposer que (σ) contient le point c . Soit j l'indice pour lequel $x_j = c$. On peut écrire alors

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{j-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k + \sum_{k=j}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

Lien avec les parties réelle et imaginaire On peut remarquer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_k = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \int_{[a,b]} f &= \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Re}(f)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) (x_{i+1} - x_i) + i \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Im}(f)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) (x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,b]} \operatorname{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im}(f). \end{aligned}$$

□

Exemple 4

Si f est la fonction constante égale à α , alors $\int_{[a,b]} f = \alpha(b-a).$

Exemple 5

Si f est une fonction nulle sauf en un nombre fini de points, on peut noter A cet ensemble fini et la subdivision associée à $(A \cap [a, b]) \cup \{a, b\}$ est adaptée à f . Notons-la $(u_0, \dots, u_n)$. On a alors

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) \times 0 = 0$$

Exemple 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la restriction à $[0, n]$ de la fonction partie entière. Alors f est une fonction en escalier, $(0, 1, \dots, n)$

est une subdivision adaptée et $\int_{[0,n]} f = \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1-k) = \frac{n(n-1)}{2}$.

1.2 FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX**Définition 4 : Fonction continue par morceaux**

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **continue par morceaux**, s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, telle que

- pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.
- pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction f admet une limite **finie** à droite de x_i .
- pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction f admet une limite **finie** à gauche de x_{i+1} .

Autrement dit, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

On dit que f est continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, si elle est continue par morceaux sur tout segment de I .

On note $\mathcal{C}_{\mathbf{m}}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

⚠ ATTENTION La fonction f définie par $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ **n'est pas** continue par morceaux, car elle n'admet pas de limite finie en 0^+ .

La fonction f définie par $x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ **n'est pas** continue par morceaux, car elle n'admet pas de limite en 0^+ .

Exemple 7

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est continue par morceaux.

Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est continue par morceaux.

Proposition 3

Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\mathbf{m}}([a, b], \mathbb{C})$, on peut donc poser $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, appelée norme infinie de f .

⚠ ATTENTION Attention, aucune proposition ne dit que $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$ atteint ses bornes, donc c'est faux en général ! Prenez $x \mapsto \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Preuve. f est prolongeable par continuité sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, donné par sa subdivision. La fonction prolongée est donc bornée et atteint ses bornes.

Alors $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est bornée et donc f est bornée par $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x)|$. $\square$

Proposition 4 : Structure de l'ensemble des fonctions continues par morceaux

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f + g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ et $fg \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ sont continues par morceaux. $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ a donc une structure d'espace vectoriel et de sous-anneau.

Preuve. Si f et g sont continues sur $[x, y]$, alors $\lambda f + g$ et fg sont continues. En appliquant cela aux intervalles de subdivisions, on prouve le théorème. $\square$

1.3 FONCTION UNIFORMÉMENT CONTINUE

Définition 5 : Fonction uniformément continue

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in I, |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Lien avec la continuité

Par rapport à la définition de continuité, on a juste inversé $\exists \alpha > 0$ et $\forall x \in I$.

Continuité	$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall y \in I, \quad x - y \leq \alpha \implies f(x) - f(y) \leq \varepsilon$
Continuité uniforme	$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad \forall y \in I, \quad x - y \leq \alpha \implies f(x) - f(y) \leq \varepsilon$

Donc dans la définition de continuité, α dépend de x , alors que dans la définition d'uniforme continuité, α ne dépend pas de x . Ce qui donne immédiatement que la continuité uniforme implique la continuité. La réciproque est fautive en général.

Exemple 8

Toute fonction k -lipchitzienne, c'est à dire telle que,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

est uniformément continue sur son ensemble de définition.

Exemple 9

La fonction $x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout fermé borné $[a, b]$.

⚠ ATTENTION La fonction $x \mapsto x^2$ **n'est pas** uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

1.4 APPROXIMATION DE FONCTIONS

Rappel On rappelle qu'un **segment** de $\mathbb{R}$ est un intervalle **fermé et borné** de $\mathbb{R}$.

Théorème 1 : Théorème de Heine

Toute fonction, continue sur un segment, est uniformément continue sur ce segment.

Preuve. (Hors-programme) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, y \in [a, b], |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Donc, pour tout $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Mais, on a le théorème de Bolzano-Weierstrass ! La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée entre a et b , elle possède une suite extraite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $\ell \in [a, b]$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$, donc $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)}$, et donc $x_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)} < y_{\varphi(n)} < x_{\varphi(n)} - \frac{1}{\varphi(n)}$. On obtient donc par le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = \ell$. En passant à la limite dans $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$ et en utilisant la continuité de f en ℓ , on obtient $0 = |f(\ell) - f(\ell)| \geq \varepsilon > 0$, ce qui est absurde. $\square$

Exemple 10

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 5 : Approximation par deux fonctions en escaliers

Toute fonction continue par morceaux f réelle, sur un segment $[a, b]$ peut être encadrer à ε près par deux fonctions en escaliers, c'est à dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b]), \quad \varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \forall x \in [a, b], \quad 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$$

Preuve.

Cas d'une fonction continue. Pour une fonction continue par morceaux, le faire pour chaque segment de la subdivision et recoller. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Par le théorème de Heine, elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} < \alpha$. On discrétise l'intervalle $[a, b]$ en posant $x_k = a + k \frac{b-a}{N}$ pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$, f est continue. Par théorème des bornes atteintes, il existe $x'_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et $y'_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que $f(x'_i) = \min_{[x_i, x_{i+1}]}(f)$ et $f(y'_i) = \max_{[x_i, x_{i+1}]}(f)$. On définit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \varphi(x) = f(x'_i)$ et $\varphi(x_n) = f(x_n)$.

Ainsi, si pour tout les $x \in [x_i, x_{i+1}], |x - x_i| \leq \alpha$ et ainsi la différence : $0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$. On fait de même avec ψ . On définit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \psi(x) = f(y'_i)$ et $\psi(x_n) = f(x_n)$. Alors $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, et pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}], \psi(x) - \varphi(x) = f(y'_i) - f(x'_i) \leq \varepsilon$ car $|y'_i - x'_i| \leq \alpha$. d'où le résultat. $\square$

Convergence uniforme de fonctions complexe

On peut définir la **distance uniforme** entre deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, comme le réel

$$\|f - g\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Alors, si on pose $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, on dit que la suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f sur $[a, b]$ si $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f_p - f\|_\infty = 0$.

On pourrait alors reformuler la proposition par

Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

2 RECETTE : INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

Avant de commencer, quelques notations.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée par un minorant m , et un majorant M .

On définit $\mathcal{E}^-(f) := \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b]) \mid \varphi \leq f\}$ (respectivement $\mathcal{E}^+(f) := \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b]) \mid \varphi \geq f\}$) l'ensemble des fonctions en escaliers qui sont inférieures (respectivement supérieures) à f . Cet ensemble est non vide puisque f est minorée par un réel m (respectivement majorée par M , et donc la fonction constante $x \mapsto m$ (respectivement $x \mapsto M$) est dans cet ensemble.

On pose aussi $A^\pm(f) := \left\{ \int_{[a,b]} f \mid f \in \mathcal{E}^\pm(f) \right\}$, l'ensemble des intégrales, au sens des fonctions en escaliers définies dans le paragraphe 1, des fonctions de $\mathcal{E}^\pm(f)$.

Les ensembles $A^-(f)$ (respectivement $A^+(f)$) est un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$, non vide, puisqu'il contient $\int_{[a,b]} (x \mapsto m) = m(b-a)$, et majorée par $M(b-a)$ (respectivement minorée par $m(b-a)$).

Ainsi, $A^-(f)$ (respectivement $A^+(f)$) possède une borne supérieure (respectivement inférieure), que l'on notera $\int^- f$ (respectivement $\int^+ f$).

Définition 6 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$. On dit que f est intégrable sur le segment $[a, b]$ si $\int^- f = \int^+ f$, et dans ce cas, on notera cette valeur commune $\int_{[a,b]} f$ ou bien $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)dt$.

Intégrabilité des fonctions usuelles sur un segment

Les fonctions usuelles sont toutes continues par morceaux sur leur intervalle de définition, et même le plus souvent lisses. On peut donc être sûr de leur intégrabilité sur tout segment de $\mathbb{R}$ grâce au théorème suivant.

Attention, on rappelle que pour calculer l'intégrale sur un intervalle infini, par exemple sur $[1, +\infty[$, il faudra d'abord calculer l'intégrale $[1, x]$ pour $x > 1$, car on sait qu'elle existe, puis faire tendre x vers $+\infty$.

Théorème 2 : Intégrabilité sur un segment

Toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur ce segment.

Preuve. Faisons la preuve sur $\mathbb{R}$.

On doit montrer que $\int^- f = \int^+ f$. Soient $(\varphi_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{E}^\pm(f)$ qui convergent vers f . Elles existent d'après la Proposition 5. Le cas où $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est immédiat. Supposons alors que $f \notin \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$. Dans ce cas, il est clair qu'il ne peut pas y avoir égalité entre une fonction de $\mathcal{E}^+(f)$ et une fonction de $\mathcal{E}^-(f)$, sinon, cette fonction serait égale à f . Donc pour tout $a_\pm \in A^\pm(f)$, $a_+ > a_-$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n > N$,

$$\int_{[a,b]} (\varphi_n^+ - \varphi_n^-) \leq \int_{[a,b]} \varepsilon = \varepsilon(b-a)$$

On a alors,

$$0 \leq \int^+ f - \int^- f \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} (\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = 0.$$

D'où le résultat. $\square$

Notations Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On pose

$$\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt, \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Proposition 6 : Propriétés de l'intégrale de fonctions continues par morceaux

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$.

① Les propriétés de la Proposition 2 restent vraies.

② **Inégalité de Cauchy-Schwartz**

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} \sqrt{\int_{[a,b]} g^2}$$

⚠ ATTENTION Si $a \geq b$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq 0$, alors $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq - \int_a^b |f(t)|dt$.

Preuve.

- ① Par linéarité de la limite, et conservation du module par la limite, toutes les propriétés sont conservées.
- ② La fonction $P : x \mapsto \int_a^b (f(t) + xg(t))^2 dt$ est polynomiale et positive, d'après les propriétés de l'intégrale.
 - Si $\int_a^b g(t)^2 dt = 0$, alors le polynôme P est de degré au plus 1 et il est positif si, et seulement si, $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$. l'inégalité est vérifiée.
 - Sinon, le polynôme P est de degré 2, de coefficient dominant positif. P est positif si, et seulement si, son discriminant est négatif ou nul

$$\left(2 \int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 - 4 \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt \leq 0$$

d'où l'inégalité.

□

Exemple 11

Montrons que $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

En prenant la limite on obtient le résultat.

Exemple 12

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$. Montrons que $\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$.

Attention astuce ! Comme $f(a) = 0$, on a $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$. Donc, en écrivant $f' = 1 \times f'$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^2 dx &= \int_a^b \left| \int_a^x f'(t) \times 1 dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)|^2 dt \times \int_a^x 1^2 dt \right) dx \\ &\leq \int_a^b \left((x-a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt \right) dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Proposition 7 : Utile en pratique

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et de signe constant.

- ① Si f est strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.
- ② Si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors f est nulle.

Preuve.

- ① Comme f est continue sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, il existe un point $x_0 \in [a, b]$ en lequel $f(x_0) > 0$ et en lequel f est continue.
 Par continuité de f en x_0 et sachant que $\frac{f(x_0)}{2} < f(x_0)$, f est minorée par $\frac{f(x_0)}{2}$ sur un certain voisinage $]x_0^-, x_0^+[$ de x_0 dans $[a, b]$.
 Notons alors φ la fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de valeur $\frac{f(x_0)}{2}$ sur $]x_0^-, x_0^+[$ et 0 sinon.
 Bien sûr φ est en escalier et $\varphi \leq f$ par construction.
 De plus, par croissance de l'intégrale $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} \varphi = \frac{f(x_0)}{2} (x_0^+ - x_0^-) > 0$.
- ② On peut supposer f positive ou nulle quitte à la remplacer par $-f$.
 Il s'agit de montrer par contraposition que si f n'est pas nulle sur tout $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$, or c'est exactement ce que nous avons prouvé en grâce à l'intervention de x_0 .

□

Exemple 13

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrons que f admet un point fixe.

La fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - t$ est définie, continue sur $[0; 1]$ et

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2} = 0,$$

donc φ s'annule.

Exemple 14

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$. Regardons à quelle condition sur f a-t-on $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$?

On peut écrire $\int_a^b f = re^{i\theta}$ avec $r = \left| \int_a^b f \right|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Considérons alors $g : t \mapsto f(t)e^{-i\theta}$. On a $\int_a^b g = \left| \int_a^b f \right| \in \mathbb{R}$ donc $\int_a^b g = \int_a^b \operatorname{Re}(g)$.

Or $|g| = |f|$ et l'hypothèse de départ donne $\int_a^b |g| = \int_a^b \operatorname{Re}(g)$ puis

$$\int_a^b |g| - \operatorname{Re}(g) = 0$$

Puisque la fonction réelle $|g| - \operatorname{Re}(g)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle. Par suite $\operatorname{Re}(g) = |g|$ et donc la fonction g est réelle positive. Finalement, la fonction f est de la forme $t \mapsto g(t)e^{i\theta}$ avec g fonction réelle positive. La réciproque est immédiate.

3 RAPPELS DE CALCULS D'INTÉGRALES**Théorème 3 : Théorème fondamental de l'analyse**

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle. En particulier, si $x_0 \in I$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = 0$, donnée par

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Exemple 15**Reconnaissance de primitive**

$$\begin{aligned}\int_0^1 3x\sqrt{1+x^2} \, dx &= \int_0^1 \frac{3}{2} u'(x) \sqrt{u(x)} \, dx, \quad \text{avec } u(x) = 1+x^2, \, \forall x \in [0, 1]. \\ &= \left[(1+x^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= 2^{3/2} - 1 = 2\sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^3 \frac{1}{x \ln x} \, dx &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^3 \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx, \quad \text{avec } u(x) = \ln(x), \, \forall x \in [1, +\infty[. \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} [\ln(\ln x)]_t^3 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \ln(\ln 3) - \ln(\ln t) \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Théorème 4 : Formule d'intégration par parties (IPP)

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 . Alors,

$$\int uv = Uv - \int Uv'$$

où U est une primitive de u .

Exemple 16
Intégration par parties

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} \, dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\left[-\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} \right]_a^1 + \frac{1}{2} \int_a^1 \frac{dx}{x(x^2 + 1)} \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\left[-\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} \right]_a^1 + \frac{1}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_a^1 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\ln a}{2(a^2 + 1)} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln a}{2} + \frac{1}{4} \ln(1 + a^2) \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{-a^2 \ln(a)}{2(a^2 + 1)} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{4} \ln(1 + a^2) \right) \\ &= -\frac{\ln 2}{4}.\end{aligned}$$

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}I_{n,p} &= \int_0^1 x^n (\ln x)^p \, dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 x^n (\ln x)^p \, dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n+1} [x^{n+1} (\ln x)^p]_a^1 - \frac{p}{n+1} \int_a^1 x^n (\ln x)^{p-1} \, dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-a^{n+1} (\ln a)^p}{n+1} - \frac{p}{n+1} I_{n,p-1} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}\end{aligned}$$

Alors

$$I_{n,p} = \frac{(-p) \times (-(p-1)) \times \cdots \times (-1)}{(n+1) \times (n+1) \times \cdots \times (n+1)} I_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Théorème 5 : Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ de partie entière E et de pôles distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$. Il existe une et une seule famille $(a_{ik})_{\substack{1 \leq k \leq m_i \\ 1 \leq i \leq r}}$ de nombres complexes telle que

$$R = E + \sum_{i=1}^r \underbrace{\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k}}_{\text{Partie polaire associée au pôle } \lambda_i}.$$

Cette décomposition de R est appelée sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Exemple 17**Décomposition en éléments simples**

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+x+1)} dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+x+1} dx = -x^{-1} - \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx,$$

$$\text{avec } \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx = \frac{4}{3} \int \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)^{-1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{4x^2}{x^4-1} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [2 \arctan x + \ln|x-1| - \ln|x+1|]_2^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \arctan t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - 2 \arctan 2 - \ln \left| \frac{2-1}{2+1} \right| \\ &= \pi - 2 \arctan 2 + \ln(3). \end{aligned}$$

Théorème 6 : Changement de variable

Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ et $a, b \in I$. On suppose φ à valeurs dans J .

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Exemple 18**Changement de variable**

$$\begin{aligned} \int^t \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx &= 2 \int^t \frac{1}{3+e^x} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} dx = 2 \int^t \frac{1}{\sqrt{e^x-1}^2+4} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} dx \\ &= 2 \int^{\sqrt{e^t-1}} \frac{du}{u^2+4} \\ &= \arctan(u/2) = \arctan \left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int^t \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 \int^{\sqrt{t}} u \cos(u) du \\ &= 2[u \sin u]_{\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} - 2 \int^{\sqrt{t}} \sin(u) du \\ &= 2\sqrt{t} \sin(\sqrt{t}) + 2 \cos(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

Intégrales de fonctions qui admettent des symétries

Soit $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Comme f est continue, nous pouvons nous en donner une primitive F . Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

- $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$, si f est paire.

En effet, pour montrer que la fonction $x \mapsto \int_{-x}^x f(t)dt = F(x) - F(-x)$ est nulle sur $[-a, a]$.

Or sa dérivée est la fonction $x \mapsto F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x)$, donc la fonction nulle car f est impaire.

- $\int_{-a}^a f = 0$, si f est impaire.

En effet, on fait de même avec la fonction $x \mapsto 2 \int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^x f(t)dt = F(x) + F(-x) - 2F(0)$

- Alors $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$, f est périodique de période T .

En effet, on fait de même avec la fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)dt = F(x+T) - F(x)$.

⚠ ATTENTION On fait attention aux limites de la forme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x, t)dt$.
En général

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x, t)dt \neq \int_a^b \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t)dt$$

4 FORMULES DE TAYLOR-LAGRANGE

Théorème 7 : Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt.$$

Preuve. Pour $n=0$, cette formule n'est jamais que le théorème fondamental du calcul intégral. Fixons I, a et b et montrons par récurrence sur n que le résultat est vrai de toute fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I .

Initialisation. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$, $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose le résultat vrai de toute fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{C})$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , donc par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \times \frac{-(b-t)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)}{n!} \times \frac{-(b-t)^{n+1}}{n+1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (b-t)^{n+1} dt. \end{aligned}$$

□

Taylor-Young ou Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Young est forte par sa simplicité. C'est l'approximation d'une fonction en un point.

La formule de Taylor-Lagrange est forte par sa précision. On "estime" le petit o, par une intégrale, ce qui permet plus facilement d'estimer le reste.

Exemple 19

Pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

On pourrait effectuer deux études de fonctions, mais il y a mieux. Fixons $x \geq 0$ et appliquons la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ de classe $\mathcal{C}^4$ entre 0 et x .

- à l'ordre 2 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt$, or $x \geq 0$, donc $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt \geq 0$.
- à l'ordre 3 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4} dt$, or $x \geq 0$, donc $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4} dt \geq 0$.

Théorème 8 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$ et $a, b \in I$. On a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

où la norme infinie est calculée sur le segment d'extrémités a et b .

Preuve. Le réel $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ est bien défini d'après le théorème des bornes atteintes. Si : $a \leq b$, alors

$$\begin{aligned} \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| &= \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt \right| \leq \int_a^b \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!} |b-t|^n dt \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!} dt \\ &= \|f^{(n+1)}\|_\infty \left[-\frac{|b-t|^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=a}^{t=b} = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \end{aligned}$$

Si $b < a$, on fait pareil en inversant l'ordre des bornes dans les majorations post-inégalité triangulaire. $\square$

Exemple 20

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre 0 et x et pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre ces points, $|\exp^{(n+1)}| = |\exp| \leq e^{|x|}$.

Donc d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$. On conclut par encadrement.

Exemple 21

Montrons que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$.

Considérons la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0) = 0$, et

$$\forall k \geq 1, f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+t)^k} \quad \text{donc} \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!.$$

Sur $[0, 1]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$ donc l'inégalité de Taylor Lagrange donne

$$\left| f(1) - f(0) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

c'est-à-dire

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \rightarrow \ln 2$$

5 SOMMES DE RIEMANN

Théorème 9 : Sommes de Riemann ou méthode des rectangles

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$, $\int_a^b f(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exemple 22

En considérant la fonction $x \mapsto x^2$, on obtient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Exemple 23

En considérant la fonction $x \mapsto x(1-x)$,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} k(N-k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \\ &= \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Preuve. Nous prouverons le résultat dans le seul cas où f est K -lipschitzienne pour un certain $K > 0$ - c'est vrai en particulier si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ d'après le théorème des bornes atteintes et l'inégalité des accroissements finis. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x - x_k) dx = \sum_{k=0}^{n-1} K \left[\frac{(x - x_k)^2}{2} \right]_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(b-a)^2}{2n^2} = \frac{K(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

□

Approximation pour une fonction lipschitzienne

Quand la fonction est lipschitzienne, la preuve du théorème nous donne une majoration de l'écart entre l'intégrale et la somme.

C'est plus intéressant que dans le cas général d'une fonction continue.

En pratique

Dans les exercices, quand on veut reconnaître quelque part une somme de Riemann, on se ramène généralement au cas particulier suivant, sur lequel la forme de la fonction f est facile à lire. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_m([0, 1], \mathbb{C})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Parfois en changeant le pas...

Exemple 24

Calculons pour $|a| > 1$, $\int_0^\pi \ln |a^2 - 2a \cos x + 1| dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln |a^2 - 2a \cos x + 1| dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N \ln \left| a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{N} + 1 \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \ln \left| \prod_{k=1}^N \left(a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{N} + 1 \right) \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \ln \left(|a+1|^2 \prod_{k=1}^{N-1} \left| a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{N} + 1 \right| \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \ln \left(|a+1|^2 \frac{|a^{2N} - 1|}{|a^2 - 1|} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \left(\ln \frac{|a+1|^2}{|a^2 - 1|} + \ln |1 - a^{-2N}| + 2N \ln |a| \right) \\ &= 2\pi \ln |a|. \end{aligned}$$

Remarquons que le même calcul donne, pour $|a| < 1$ (donc $a^{2N} \rightarrow 0$),

$$\int_0^\pi \ln |a^2 - 2a \cos x + 1| dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \left(\ln \frac{|a+1|^2}{|a^2 - 1|} + \ln |a^{2N} - 1| \right) = 0.$$

Méthode des trapèzes

L'erreur dans le cas $\mathcal{C}^1$ de la méthode des rectangles est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$ si n désigne le nombre de termes sommés. Cette majoration de l'erreur n'est pas très bonne car $\frac{1}{n}$ ne tend pas vers 0 rapidement lorsque n tend vers $+\infty$. Nous présentons ci-dessous une méthode, **hors programme**, proche de la précédente mais de convergence accélérée $\frac{1}{n^2}$, appelée la méthode des trapèzes.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\int_a^b f(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$