PROBLEMAS

DE

GEOMETRÍA

Ubaldo Usunáriz Balanzategui
Ignacio Usunáriz Sala

ÍNDICE

PRÓLOGO

Este libro, *Problemas de Geometría*, junto con otros dos, *Problemas de Matemáticas* y *Problemas de Geometría Analítica y Diferencial,* están dedicados a la presentación y resolución de problemas que se planteaban hace unas décadas, en la preparación para ingreso en las carreras de ingeniería técnica superior.

Incluye 744 problemas que se presentan en dos grandes grupos:
· Geometría del plano, con 523 problemas referentes a lugares geométricos, rectas, ángulos, triángulos y su construcción, cuadriláteros y otros polígonos, circunferencia, cónicas y áreas.
· Geometría del espacio, con 221 problemas referentes a lugares geométricos, planos, diedros, cuerpos, áreas, volúmenes y geometría descriptiva.
Además se incluyen en el anexo, 25 problemas para su resolución por los lectores.

Esta segunda edición de *Problemas de Geometría* tiene por objeto su puesta a disposición de la Escuela de Ingenieros de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid.

Madrid, verano 2012

Problemas de Geometría del Plano

Sección A - LUGARES GEOMÉTRICOS

A 1- Enunciar los lugares geométricos elementales.

Solución: La línea recta es el lugar geométrico de los puntos que siguen una misma dirección.

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto interior llamado centro.

La mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos.

El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos rectas fijas están en una relación dada, es un sistema de dos rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas dadas; en el caso en que dicha relación sea la unidad, el lugar geométrico es el conjunto de las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas dadas.

El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos están en una relación dada, es una circunferencia cuyo centro está sobre la recta definida por dichos puntos y que la corta en dos puntos cuya relación de distancias a los puntos dados es la dada.

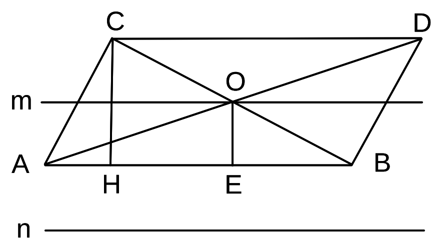
El lugar geométrico de los puntos para los que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos dados es constante, es una recta perpendicular a la recta que une dichos dos puntos.

El lugar geométrico de los puntos para los que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos dados es constante, es una circunferencia de centro el punto medio de dichos dos puntos.

El lugar geométrico de los puntos desde los que se ve un segmento dado bajo un ángulo constante, se compone de dos arcos de circunferencia (arcos capaces), que pasan por los extremos de dicho segmento.

A 2- Hallar el lugar geométrico de los centros de los paralelogramos cuya base es fija en magnitud y posición, y cuya altura es constante en magnitud.

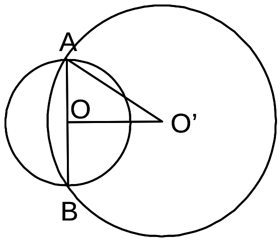
Solución:



La base AB es fija y la altura $CH = h$ es constante. El punto O, centro del paralelogramo, está en la intersección de las dos diagonales, esto es, en su punto medio. Por tanto la distancia OE será siempre igual a $\frac{h}{2}$. El lugar pedido está formado por dos rectas m y n, paralelas a AB, a la distancia $\frac{h}{2}$ de esta, situadas a uno y otro lado de AB.

A 3- Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio dado, que dividen a una circunferencia dada en dos partes iguales.

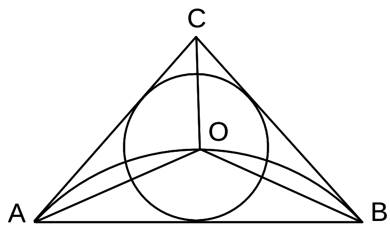
Solución:



Sea la circunferencia de centro O' la que divide a la de centro O en dos partes iguales, por lo que, siendo A y B los puntos de intersección de ambas circunferencias, la recta AB es un diámetro de O. Siendo OA y $O'A$ constantes, también lo será el cateto OO'. Por tanto el lugar de O' es una circunferencia de centro O y radio $\sqrt{R^2 - r^2}$, donde $R = O'A$ y $r = OA$.

A 4- Hallar el lugar geométrico de los centros de los círculos inscritos en los triángulos de base fija AB en magnitud y posición, y cuyo ángulo $\widehat{C}$ es constante en magnitud.

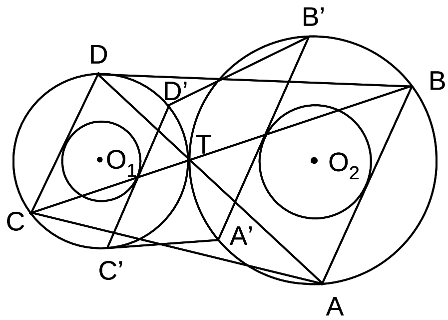
Solución:



AO, BO y CO son las bisectrices de los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$. El ángulo $\widehat{AOB}$ es igual a $\pi - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = \pi - \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = \pi - \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{C}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi + \widehat{C}\right)$, que es constante. Por tanto el lugar geométrico de O está formado por los arcos capaces de $\frac{1}{2}\left(\pi + \widehat{C}\right)$ trazados sobre AB.

A 5- Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las bases de los trapecios que tienen por diagonales las secantes trazadas por el punto de contacto de dos círculos tangentes exteriormente, cuando es constante el ángulo formado por estas dos secantes.

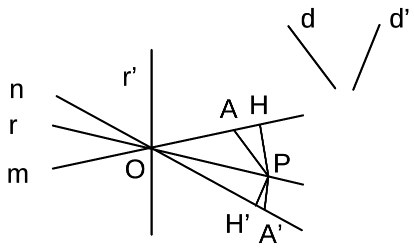
Solución:



Sean O_1 y O_2 los centros de los círculos dados, de radios O_1C y O_2A, respectivamente. Las secantes ATD y BTC subtienden cuerdas DC y AB constantes en magnitud (O_1 y O_2 son los arcos capaces de ángulo $\widehat{T}$ sobre ellas), por lo que son tangentes en sus puntos medios, a circunferencias concéntricas con las dadas. Si se trazan tangentes paralelas a una dirección dada, se obtienen dos trapecios $ABCD$ y $A'B'C'D'$, cuyas bases AB, $A'B'$ y CD, $C'D'$ son tangentes en sus puntos medios, a las circunferencias concéntricas. Luego estas circunferencias son el lugar pedido.

A 6- Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias, paralelamente a direcciones dadas, a dos rectas fijas es constante.

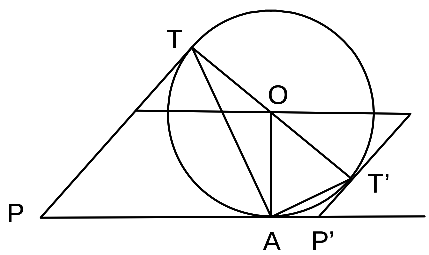
Solución:



Sean m y n las rectas dadas, y d y d' las direcciones. Las distancias según estas direcciones, de un punto P a m y n, son PA y PA'. Las distancias (perpendiculares) a las rectas son PH y PH'. Cualquiera que sea la posición de P, los triángulos PAH (y los $PA'H'$) serán semejantes. Por tanto la relación entre las distancias PH y PH' es constante. El lugar pedido es el conjunto de dos rectas r y r', que pasan por O, intersección de m y n.

A 7- Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes paralelas a una dirección dada, trazadas a las circunferencias tangentes a una recta fija dada, en un punto fijo A de esta.

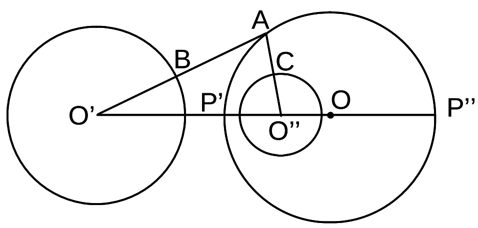
Solución:



Sea PA la recta dada, O el centro de una de las circunferencias tangentes a PA en A, y sean PT y $P'T'$ las tangentes a O paralelas a la dirección dada, siendo T y T' los respectivos puntos de tangencia (los ángulos de estas tangentes con la recta dada son constantes). Siendo OT perpendicular a PT, y OA perpendicular a PA, el ángulo $\widehat{TOA}$ es suplementario del $\widehat{APT}$ y por tanto constante. Como el triángulo OAT es isósceles ($OT = OA$), los ángulos $\widehat{OAT}$ y $\widehat{OTA}$ son iguales y constantes, midiendo la mitad del $\widehat{APT}$. El lugar pedido es el conjunto de dos rectas AT y AT', perpendiculares entre sí, que pasan por A y forman con la recta dada ángulos iguales a la mitad del $\widehat{APT}$ y a la mitad de su suplementario.

A 8- Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la relación de sus distancias a dos circunferencias dadas, sea igual a la relación de los radios de estas.

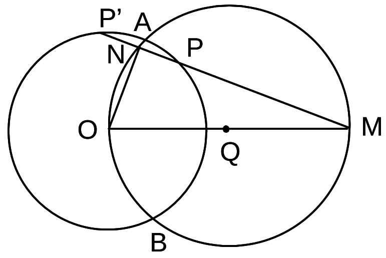
Solución:



Sean O' y O'' las circunferencias dadas, R y r sus radios y sea A un punto tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{O'B}{O'C} = \frac{R}{r}$. Por tanto $\frac{AB + O'B}{O'B} = \frac{AC + O'C}{O'C} = \frac{AO'}{R} = \frac{AO''}{r}$. Luego A está en el lugar de los puntos cuya relación de distancias a dos dados, O' y O'', es constante. Este lugar es una circunferencia cuyo centro O está en la recta $O'O''$.

A 9- Por un punto fijo M se traza una secante que corta a un círculo fijo O en los puntos P y P'. Se lleva a partir de M y sobre MPP', una distancia MN igual a la semisuma de MP y MP'. Hallar el lugar geométrico de N cuando varía la secante.

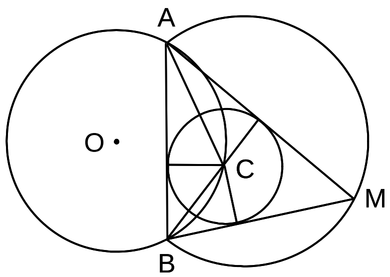
Solución:



$MN = \dfrac{MP + MP'}{2} = MP + \dfrac{PP'}{2}$. Luego N es el punto medio de PP', por lo que el ángulo $\widehat{MNO}$ es recto, y N está en el arco capaz de 90º sobre OM. El lugar pedido es el arco AB de la circunferencia de centro Q, punto medio de MO, y radio $\dfrac{MO}{2}$.

A 10- Se da una circunferencia O y una cuerda AB. Haciendo centro en un punto C del arco AB, se traza una circunferencia tangente a la cuerda AB y se trazan las tangentes a esta circunferencia desde A y B, que se cortan en M. Hallar el lugar geométrico de M cuando C describe el arco AB.

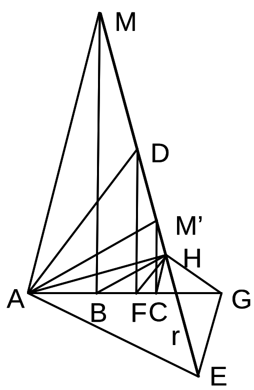
Solución:



El ángulo $\widehat{ACB}$ es constante. Como $\widehat{MAC} = \widehat{CAB}$ y $\widehat{MBC} = \widehat{CBA}$, el ángulo $\widehat{AMB}$ es constante pues mide $2\widehat{C} - \pi$. El lugar pedido es el arco capaz de $2\widehat{C} - \pi$, trazado sobre AB.

A 11- Se dan tres puntos alineados A, B y C. Se trazan las perpendiculares en B y C a la recta ABC. Una recta variable r corta a las perpendiculares en M y M', de manera que $AM = 2AM'$. Se proyecta A sobre r en H. Hallar el lugar geométrico de H.

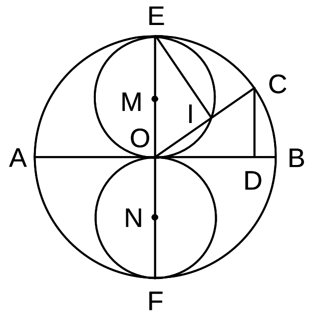
Solución:



Trazando la bisectriz interior AD del ángulo $\widehat{MAM'}$, se tiene que $\frac{DM}{DM'} = \frac{AM}{AM'} = 2$, luego D se desplaza a lo largo de la recta DF, paralela a MB y $M'C$, siendo $FB = 2FC$. Análogamente, siendo AE la bisectriz exterior de $\widehat{MAM'}$, se tiene $\frac{EM}{EM'} = \frac{AM}{AM'} = 2$, desplazándose E a lo largo de la recta EG, paralela a DF, siendo $GB = 2GC$. El haz $(A, MM'DE)$, cortado por MM' da la relación $(MM'DE) = \frac{-2}{2} = -1$. Proyectando $(MM'DE)$ desde la dirección perpendicular a ABC, se tiene el haz $(\infty, BCFG)$, que cortado por ABC da la relación $(BCFG) = -1$. Por tanto, proyectado desde H, las rectas HF y HG son las bisectrices del triángulo BHC. Luego el ángulo $\widehat{FHG}$ es recto, por lo que el lugar de H es una circunferencia de diámetro FG.

A 12- Se da un círculo O y un diámetro fijo AB. Sobre un radio variable OC se lleva $OI = CD$, siendo D el pie de la perpendicular trazada desde C sobre el diámetro AB. Hallar el lugar geométrico de I, cuando varía el radio OC.

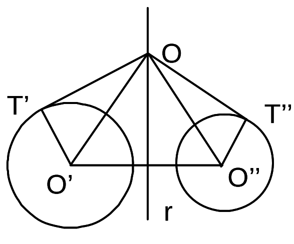
Solución:



Los triángulos OIE y OCD son iguales ($OE = OC$, $OI = CD$, y el ángulo $\widehat{EOI}$ igual al $\widehat{OCD}$). Luego el ángulo $\widehat{OIE}$ es recto por serlo el $\widehat{ODC}$. Por ello, el lugar geométrico de I es el conjunto de dos circunferencias iguales, tangentes exteriores en O, de radio igual a la mitad del radio de la circunferencia dada, y cuyos centros son M y N, puntos medios de OE y OF, siendo EF el diámetro perpendicular a AB.

A 13- Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan ortogonalmente a dos circunferencias dadas.

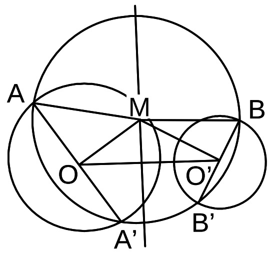
Solución:



Sean las circunferencias dadas O' y O'' de radios r' y r'', y sea O un punto del lugar. La circunferencia O corta en T' a la circunferencia O', y en T'' a la O''. Siendo $O'T'$ perpendicular a OT', y $O''T''$ a OT'', y como $OT' = OT'' = R$, radio de la circunferencia O, se tiene que $OO'^2 = R^2 + r'^2$ y $OO''^2 = R^2 + r''^2$, es decir que $OO'^2 - OO''^2 = r'^2 - r''^2$, que es constante. Luego el lugar pedido es una recta perpendicular a $O'O''$, eje radical de las circunferencias dadas.

A 14- Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan a otras dos dadas según diámetros.

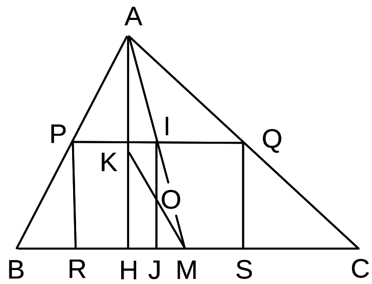
Solución:



Sean las circunferencias dadas O y O', de radios r y r'. Siendo M un punto del lugar, se tiene: $AM^2 = OM^2 + r^2 = MB^2 = O'M^2 + r'^2$. Por tanto $OM^2 - O'M^2 = r'^2 - r^2$ que es constante. Luego el lugar es una recta perpendicular a OO'. Esta recta es simétrica del eje radical con relación al punto medio de OO'.

A 15- Hallar el lugar geométrico de los centros de los rectángulos inscritos en un triángulo dado.

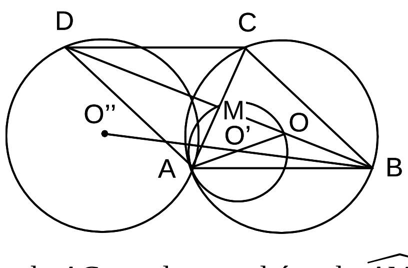
Solución:



Sea el rectángulo *PQRS* inscrito en el triángulo dado *ABC*, estando su base *RS* sobre el lado *BC*, y siendo *O* su centro. La altura del triángulo sobre el lado *BC* es *AH*, siendo *K* su punto medio; *AM* es la mediana sobre dicho lado; *IOJ* es la altura del rectángulo que pasa por *O*. En el triángulo *AHM*, el punto *O* se encuentra sobre la recta *MK* que une los puntos medios del lado *BC* y de la altura *AH*. El lugar pedido consta de tres rectas que unen los puntos medios de cada lado del triángulo con los puntos medios de sus respectivas alturas.

A 16- En una circunferencia dada *O*, se traza una cuerda fija *AB* y otra variable *AC*. Sobre estas cuerdas se construye el paralelogramo *ABCD*. Hallar los lugares geométricos del centro *M* del paralelogramo y de su vértice *D*.

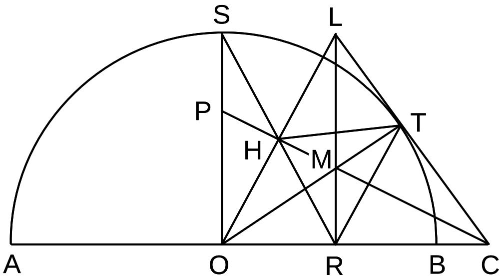
Solución:



M es el punto medio de la cuerda AC, por lo que el ángulo $\widehat{AMO}$ es recto. En consecuencia, el lugar de M es la circunferencia de centro O', punto medio de AO, y diámetro AO. Siendo $BD = 2BM$, el lugar geométrico de D es la circunferencia O'', homotética de la O', siendo B el centro de homotecia y la razón 2.

A 17- Se da una circunferencia *O* y un diámetro fijo *AB*. Desde un punto *C* variable, situado sobre la prolongación de *AB*, se traza una tangente *CT* y la bisectriz del ángulo $\widehat{ACT}$. Hallar el lugar geométrico del pie de la perpendicular trazada desde el centro *O* sobre esta bisectriz.

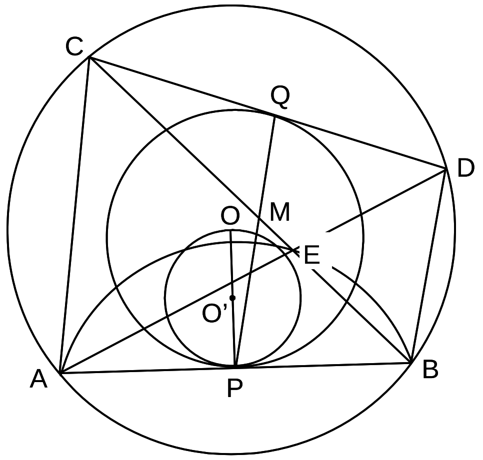
Solución:



Sean: *CP* la bisectriz de $\widehat{ACT}$ (*P* está sobre *OS*, radio perpendicular a *AB*), *H* el pie de la perpendicular trazada desde *O* sobre *CP*, *TR* la perpendicular desde *T* a *CP*, *L* el punto de intersección de *OH* con *CT*, *LR* la perpendicular desde *L* sobre *AB*. El triángulo *COL* es isósceles (*CO* = *CL*, *HO* = *HL*), siendo sus alturas *CH*, *OT* y *LR*, siendo *M* su ortocentro. El triángulo *OPM* es isósceles ($\widehat{SOL} = \widehat{LOT}$), luego *OP* = *OM*, es decir *SP* = *TM*. El triángulo *HTR* es isósceles ($\widehat{HRT} = \widehat{HTR}$), luego *HT* = *HR* El triángulo *OHR* es isósceles ($\widehat{HOR} = \widehat{HRO}$), luego *HO* = *HR*. Por tanto los triángulos *HPS* y *HMT* son iguales. De ello se deduce que *SH* = *HT* = *HR* = *HO*. Es decir que, al ser *SH* = *HO*, *H* está sobre la mediatriz de *SO*, que es el lugar geométrico pedido.

A 18- En una circunferencia *O*, está inscrito un cuadrilátero *ABCD*, en el que *AB* es fijo y *CD* constante en magnitud. Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de las diagonales, así como el del punto de intersección de las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos.

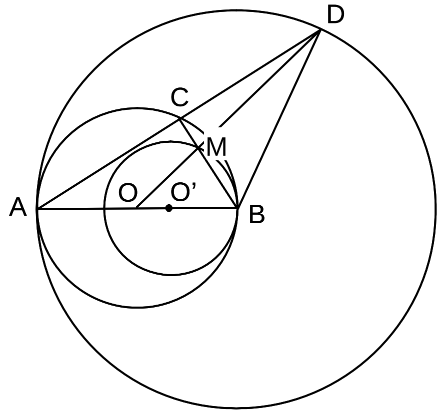
Solución:



Siendo *E* el punto de intersección de las diagonales, el ángulo $\widehat{AEB}$ es constante, pues es igual a la semisuma de los arcos *AB* y *CD* que son constantes. Luego el lugar geométrico de *E* es el arco capaz de dicho ángulo sobre *AB*. Uniendo los puntos medios de los lados del *ABCD*, se forma un paralelogramo, cuyas diagonales se cortan en *M*, punto medio de *QP*, que a su vez, son los puntos medios de *CD* y *AB*. Al ser *CD* constante en magnitud, el lugar de *Q* es una circunferencia de centro *O*. Como *M* es punto medio de *QP*, su lugar geométrico es una circunferencia homotética de la anterior, con centro de homotecia *P* y razón $\frac{1}{2}$.

A 19- Se da una circunferencia *O* y un diámetro fijo *AOB*. Siendo *C* un punto variable de la circunferencia, se prolonga *AC* una longitud *CD* = *AC*. Hallar el lugar geométrico de *M*, intersección de *BC* y *OD*.

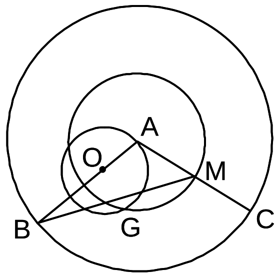
Solución:



En el triángulo *ABD*, *M* es su baricentro y $OM = \dfrac{OD}{3}$. El punto *D* recorre la circunferencia homotética de la dada, con centro de homotecia *A* y razón 2. El punto *M* recorre la circunferencia homotética de la anterior, con centro de homotecia *O* y razón $\dfrac{1}{3}$.

A 20- Hallar el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos isósceles que tienen fijo uno de sus lados iguales, *AB*, siendo móvil el otro lado igual, *AC*.

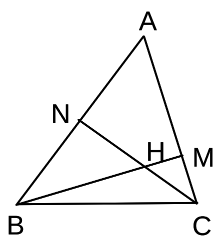
Solución:



El vértice *C* recorre la circunferencia de centro *A* y radio *AB* = *AC*. El punto medio *M* de *AC* recorre la circunferencia concéntrica con la anterior y de radio la mitad de *AC*. El baricentro *G* recorre una circunferencia homotética con la que recorre *M*, con centro de homotecia *B* y razón $\dfrac{2}{3}$.

A 21- Hallar el lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos que tienen un lado *BC* fijo y el ángulo $\widehat{A}$ constante.

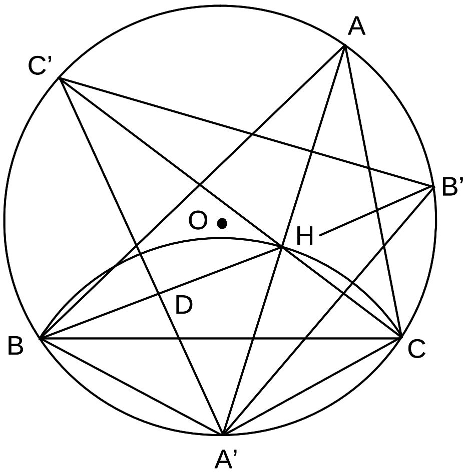
Solución:



Sean *BM* y *CN* las alturas trazadas desde *B* y *C* sobre los lados opuestos y *H* el ortocentro. El ángulo $\widehat{BHC} = \widehat{MHN}$, es constante e igual a $180º - \widehat{A}$. El lugar pedido es el arco capaz de $180º - \widehat{A}$ trazado sobre *BC*.

A 22- Se da una circunferencia O y dos puntos fijos en ella, B y C. Un punto A recorre la circunferencia. Se llaman A', B', C' las intersecciones de la circunferencia con las bisectrices del triángulo ABC. Hallar el lugar geométrico de H, ortocentro del triángulo $A'B'C'$.

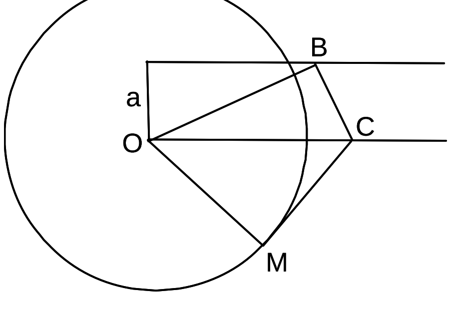
Solución:



Por ser $\widehat{A}$ constante, A' es fijo, pues es el punto medio del arco BC. En el triángulo $A'DB'$, $\widehat{DB'A'} = 90º - \widehat{DA'B'} = 90º - \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2}$, Como $\widehat{BB'A'} = \frac{\widehat{A}}{2}$, los puntos B, B' y H están alineados, coincidiendo H con el incentro del ABC. Por ser $\widehat{B'BA'} = \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = \widehat{BHA'}$, el triángulo $A'BH$ es isósceles. Luego $A'H$ es constante al ser igual a $A'B$. El lugar pedido es el arco de centro A' y radio $A'B$, limitado por la circunferencia dada O.

A 23- Se dan dos rectas paralelas. Por un punto O fijo de la primera, se traza una secante variable que corta a la segunda en B. Se traza BC perpendicular a OB, que corta a la primera paralela en C. Se forma el ángulo $\widehat{OCM}$ igual al doble del $\widehat{BOC}$. Por O se traza la perpendicular a CM, que la corta en M. Hallar el lugar geométrico de M.

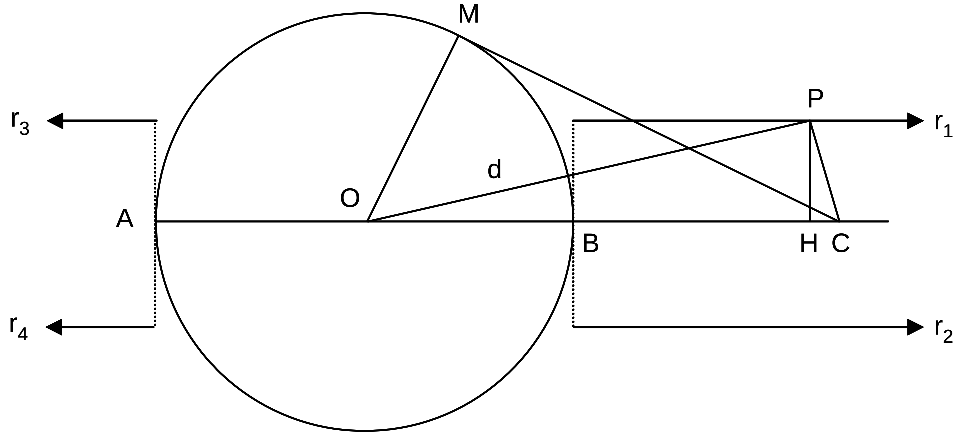
Solución:



Sea a la distancia entre las dos paralelas. y α el ángulo $\widehat{BOC}$. Se tiene que $OM = OC \cdot \sin 2\alpha = \frac{BC}{\sin\alpha}\sin 2\alpha = \frac{a}{\sin\alpha\cos\alpha}\sin 2\alpha = 2a$. El lugar pedido es una circunferencia de centro O y radio $2a$.

A 24- Se considera una circunferencia de centro *O* y diámetro *AB*. Por *O* se traza un radio cualquiera *OM*. Por *M* se traza la perpendicular a *OM* que corta al diámetro *AB* en *C*. Por *O* se traza una recta *d* que forma con el diámetro *AB* un ángulo mitad del que forma *CM* con dicho diámetro. Por *C* se traza una perpendicular a *d*, que la corta en *P*. Hallar el lugar geométrico de *P* cuando varía el radio *OM*.

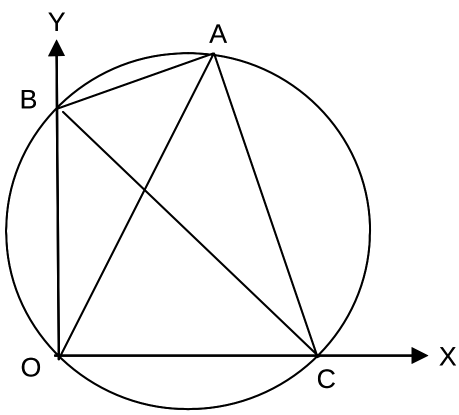
Solución:



Siendo α el ángulo que forma *d* con *AB*, *R* el radio de *O*, y *PH* la distancia de *P* a *AB*, se tiene: $OC = \frac{R}{\sin 2\alpha} = \frac{PC}{\sin\alpha} = \frac{PH}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Luego $PH = \frac{R\sin\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{2}$. El lugar pedido está formado por las semirrectas r_1, r_2, r_3 y r_4, paralelas a *AB* y que distan de esta una distancia igual a $\frac{R}{2}$.

A 25- Un triángulo rectángulo se mueve de manera que los vértices *B* y *C*, correspondientes a los ángulos agudos, describen respectivamente los lados *OX* y *OY* de un ángulo recto. Hallar el lugar geométrico del vértice *A*, correspondiente al ángulo recto.

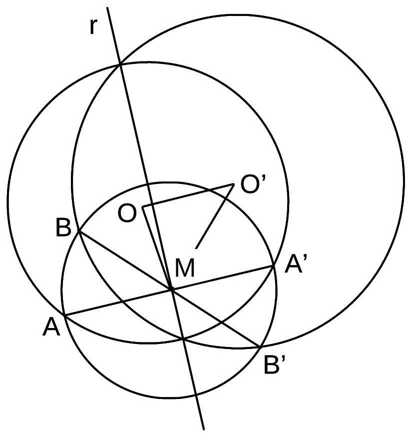
Solución:



Siendo rectos los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{BOC}$, el cuadrilátero *ABOC* es inscriptible. Los ángulos $\widehat{AOC}$ y $\widehat{ABC}$ son iguales, luego al ser constante este último, aquel también lo es, por lo que *A* describe un segmento de la recta *OA*, limitado por las posiciones que toma *A* cuando *B* y *C* se sitúan en *O*.

A 26- Hallar el lugar geométrico de los centros de los círculos que son cortados diametralmente por otros dos dados.

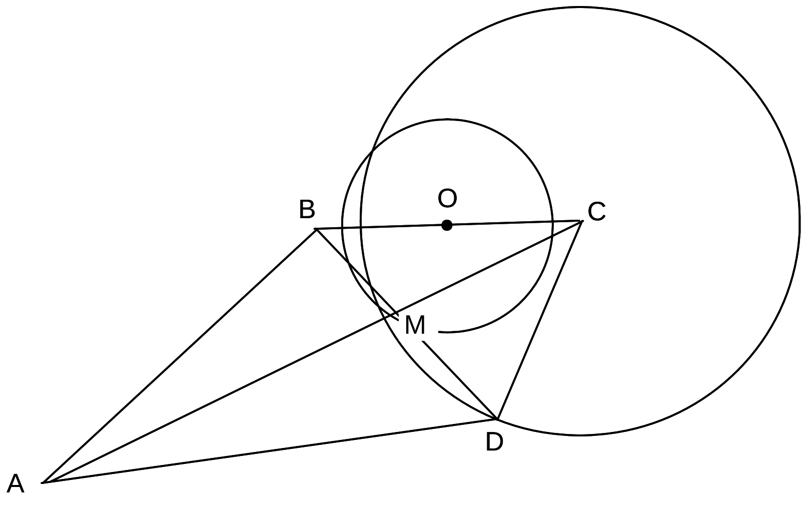
Solución:



Sean O y O' los círculos dados de radios R y R', y M el centro del círculo cortado diametralmente en A y A' por O, y en B y B' por O', cuyo lugar se pide. Se tiene que $MO^2 = R^2 - MB^2$ y $MO'^2 = R'^2 - MA^2$. Como $MA = MB$, $MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$, que es constante. Luego el lugar pedido es una recta perpendicular a OO' (eje radical de O y O').

A 27- De un cuadrilátero $ABCD$, se conoce AB en posición y magnitud, y BC, CD y AC en magnitud. Hallar el lugar geométrico del punto medio de la diagonal BD.

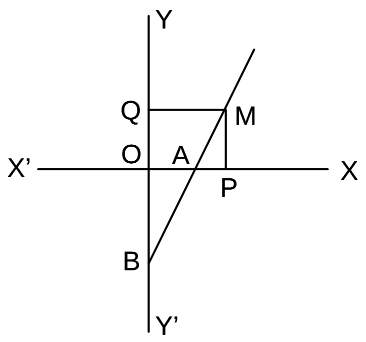
Solución:



Construido el triángulo ABC, el lugar geométrico de D es una circunferencia de centro C y radio CD. El lugar pedido es la circunferencia homotética de la anterior, con centro de homotecia B y razón $\frac{1}{2}$, es decir que su centro O es el punto medio de BC y su radio $\frac{CD}{2}$. También forma parte del lugar la circunferencia simétrica de O con relación a AB.

A 28- Sean dos ejes perpendiculares XOX', YOY'. Sobre OX se lleva $OA = a$, y sobre OY' se lleva $OB = 2a$. Siendo M un punto tal que su distancia a OX es MP, y a OY, MQ, cumpliéndose que $2MQ - MP = 2a$, hállese su lugar geométrico y sus condicionantes.

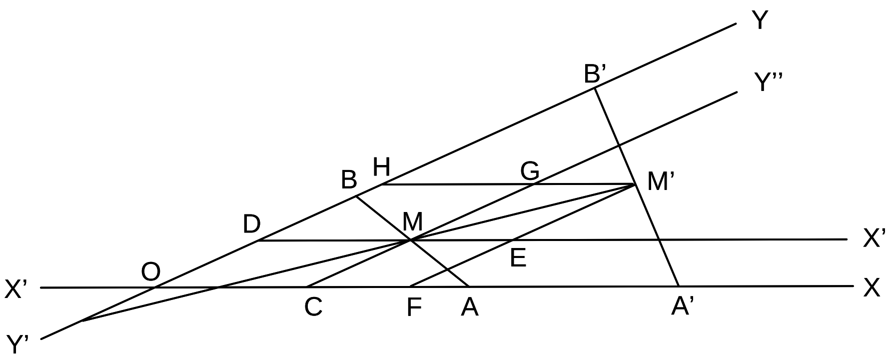
Solución:



El lugar geométrico es la recta AB. Esta recta está en los cuadrantes 1º, 4º y 3º. En el cuadrante 1º se cumple siempre la condición definida. En el 4º cuadrante, MP es negativo, luego la condición del enunciado se transforma en $2 \cdot MQ - (-MP) = 2a$, es decir que en vez de restar la distancia MP, hay que sumarla, cumpliéndose la condición. En el cuadrante 3º, MP y MQ son negativos, es decir $2(-MQ) - (-MP) = 2a$, por lo que hay que restar la distancia MQ y sumar la MP, cumpliéndose así la condición del enunciado.

A 29- Se consideran dos rectas secantes XOX' e YOY'. Sobra la primera se consideran dos puntos A y A'. Sobre la segunda, otros dos, B y B'. Los puntos A y B son fijos, mientras que los puntos A' y B' se mueven sobre las rectas dadas, permaneciendo del mismo lado de AB, de manera que la relación $\frac{AA'}{BB'} = k$ es constante. Hallar el lugar geométrico de M', punto medio de $A'B'$.

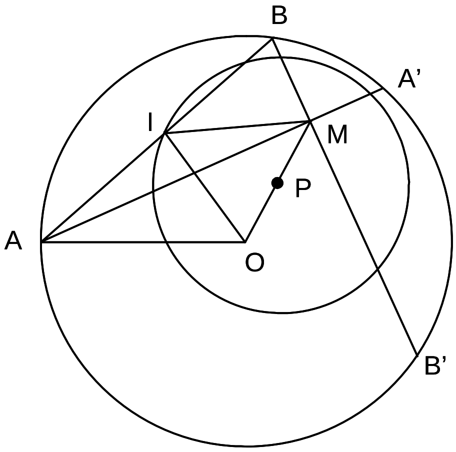
Solución:



Sean $OA = a$, $OB = b$, M el punto medio de AB, $AA' = x$, $BB' = y$, siendo $x = ky$, $OA' = a + ky$, $OB' = b + y$. Trazando por M las paralelas DMX'' y CMY'' a XX' e YY', respectivamente, se tiene que $AC = \frac{a}{2}$, $BD = \frac{b}{2}$. Las paralelas por M' a las dos rectas dadas, son $M'EF$ y $M'GH$. Se tiene que $M'E = M'F - EF = \frac{OB'}{2} - OD = \frac{b+y}{2} - \frac{b}{2} = \frac{y}{2}$. Análogamente, $M'G = \frac{x}{2}$. Por ello se tiene que: $\frac{M'G}{M'E} = \frac{x}{y} = k$. Por tanto, el lugar pedido es una recta que pasa por M.

A 30- Se da una circunferencia O y un punto interior M, por el que se trazan las cuerdas AMA' y BMB' perpendiculares entre sí. Hallar el lugar geométrico de I, punto medio de AB.

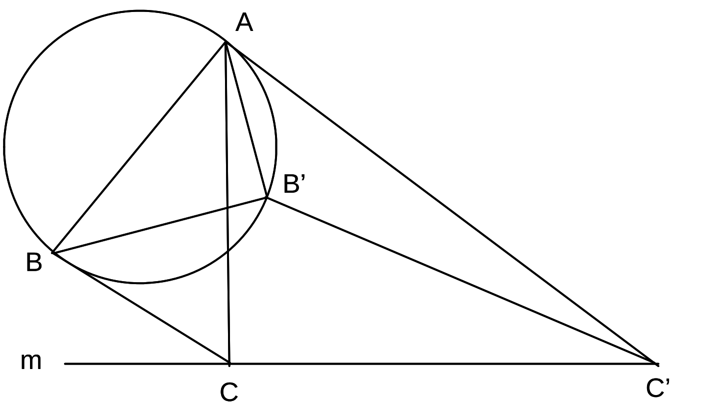
Solución:



En el triángulo rectángulo AIO, se tiene $OA^2 = OI^2 + IA^2 = OI^2 + IM^2$. Luego el lugar pedido es una circunferencia.

A 31- Un triángulo de área constante, gira en su plano alrededor del vértice A, siendo el ángulo $\widehat{A}$ constante. El vértice C recorre una recta dada m. Hallar el lugar geométrico del vértice B.

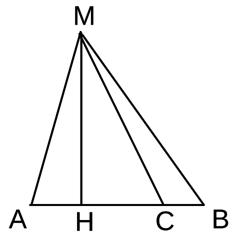
Solución:



Sea ABC una posición del triángulo en la que AC es perpendicular a m. Girándolo un ángulo α, se obtiene por ejemplo la posición $AB'C'$. El área del ABC es $\frac{AC \cdot AB \sin\widehat{A}}{2}$. Y la del $AB'C'$ es $\frac{AC' \cdot AB' \sin\widehat{A}}{2}$. Luego $\frac{AC}{AC'} = \frac{AB'}{AB}$. Además, $\widehat{CAC'} = \widehat{A} + \alpha = \widehat{BAB'}$. Por tanto los triángulos ACC' y ABB' son semejantes, por lo que $\widehat{AB'B} = 90^{\circ}$, y el lugar pedido es una circunferencia de diámetro AB.

A 32- Dados dos puntos A y B y tres números a, b, c, hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que $a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 = c$.

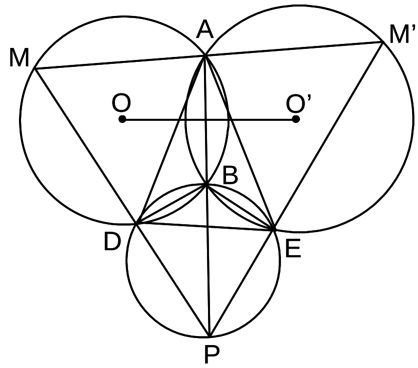
Solución:



Se toma sobre AB un punto C tal que $\frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$. En el triángulo MAC se tiene: $MA^2 = MC^2 + CA^2 - 2AC \cdot HC$. En el triángulo MCB, se tiene: $MB^2 = MC^2 + CB^2 + 2BC \cdot HC$. Multiplicando la primera igualdad por a, y la segunda por b, y sumándolas, se tiene: $a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 = c = (a+b)MC^2 + a \cdot CA^2 + b \cdot CB^2$, pues los otros dos sumandos se anulan. Luego $MC^2 = \frac{c - a \cdot CA^2 - b \cdot CB^2}{a+b}$, que es constante. Por tanto M describe una circunferencia de centro C y radio $\sqrt{\frac{c - a \cdot CA^2 - b \cdot CB^2}{a+b}}$.

A 33- Se dan dos círculos O y O' secantes en A y B. Sobre la secante variable MAM' se construyen triángulos $MM'P$ semejantes a uno dado. Hallar el lugar geométrico de P.

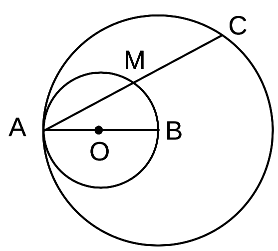
Solución:



Siendo constantes los ángulos en M y M', AD y AE son fijos, siéndolo también DE, por lo que el vértice P está sobre el arco capaz de $\widehat{P}$ sobre DE.(esta circunferencia pasa también por B).

A 34- Se da una circunferencia O y un diámetro AB. Se traza una cuerda AM, que se prolonga $MC = AM$, Hallar el lugar geométrico de C.

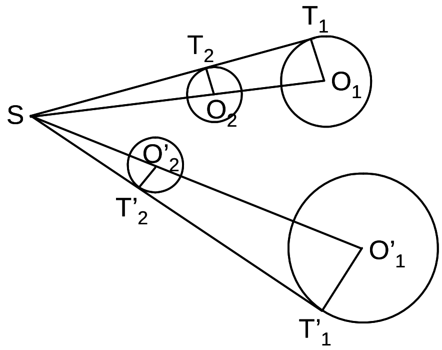
Solución:



C describe una circunferencia homotética de O, con centro de homotecia A y razón 2.

A 35- Hallar el lugar geométrico de los polos de inversión que transforman dos círculos dados en otros dos de igual radio.

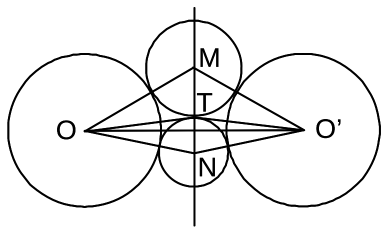
Solución:



Sean O_1 y O'_1 los círculos dados de radios R_1 y R'_1, S el polo de inversión, y O_2 y O'_2 los círculos transformados de igual radio R_2. Se tienen las siguientes igualdades: $ST_1 \cdot ST_2 = ST'_1 \cdot ST'_2$, $\frac{ST_2}{ST_1} = \frac{SO_2}{SO_1} = \frac{R_2}{R_1}$, $ST_1^2 = SO_1^2 - R_1^2$, $\frac{ST'_2}{ST'_1} = \frac{SO'_2}{SO'_1} = \frac{R_2}{R'_1}$, $ST'^2_1 = SO'^2_1 - R'^2_1$. Operando se obtiene la igualdad: $R'_1 \cdot SO_1^2 - R_1 \cdot SO_1^2 = R_1 \cdot R'_1(R_1 - R'_1)$ (**A**), luego el lugar geométrico de S es una circunferencia. Si en la recta $O_1O'_1$ se toma un punto P tal que se cumple la igualdad: $\frac{O_1P}{O'_1P} = \frac{R_1}{R'_1}$ (**B**), llamando H a la proyección de S sobre $O_1O'_1$, se tienen las igualdades: $SO_1^2 = SP^2 + O_1P^2 + 2O_1P \cdot PH$ (**C**), y $SO'^2_1 = SP^2 + O'_1P^2 - 2O'_1P \cdot PH$ (**D**). Sustituidos estos valores en (**A**) se obtiene: $SP^2 = \frac{R_1R'_1(R_1 - R'_1) - R'_1 \cdot O_1P^2 - R_1 \cdot O'_1P^2}{R'_1 - R_1}$. Luego la citada circunferencia tiene como centro el punto P definido en (**B**), siendo su radio SP.

A 36- Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de los pares de círculos tangentes entre sí y tangentes cada uno a dos círculos dados exteriores entre sí.

Solución:



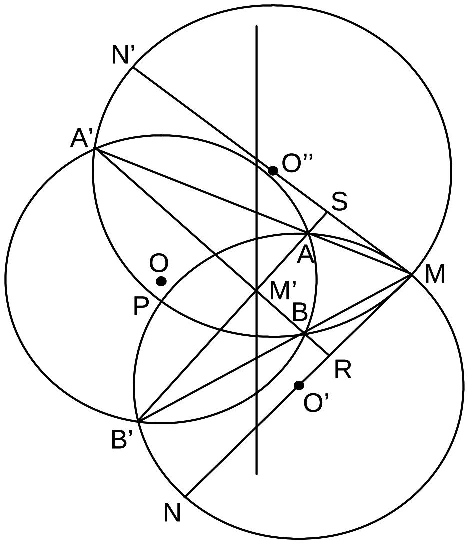
El lugar geométrico de los polos de inversión que transforman dos círculos exteriores en otros dos de igual radio, es una circunferencia (ver A 35). Con polo de inversión un punto cualquiera de esta circunferencia, los dos círculos dados se transforman en dos de igual radio (O y O'). En este caso, el lugar geométrico de los puntos de contacto de dos circunferencias tangentes entre sí (de centros M y N), y tangentes a las dos circunferencias de igual radio (la inversión mantiene las tangencias), es la mediatriz MN de la recta que une los centros de los dos círculos iguales. Luego el lugar pedido es la circunferencia inversa de dicha mediatriz.

A 37- Hallar el lugar geométrico de los polos de inversión que transforman los vértices de un triángulo dado ABC, en los de un triángulo isósceles $A'B'C'$, de forma que $A'B' = A'C'$.

Solución: Siendo S el polo de la inversión, se tiene que $A'B' = \frac{k \cdot AB}{SA \cdot SB}$ y $A'C' = \frac{k \cdot AC}{SA \cdot SC}$. Luego $\frac{SB}{SC} = \frac{AB}{AC}$. Por tanto el lugar pedido es una circunferencia, lugar de los puntos cuya relación de distancias a dos puntos dados B y C, es constante e igual a $\frac{AB}{AC}$.

A 38- Se da un punto M y un círculo O Se trazan pares de secantes MAA' y MBB' variables. Hallar el lugar geométrico de los puntos P de corte de los círculos MAB' y $MA'B$.

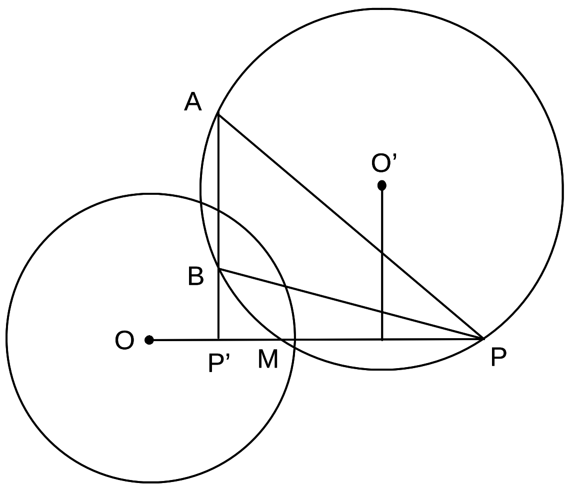
Solución:



El lugar geométrico de M', intersección de $A'B$ con AB', es la polar de M respecto a O. Al invertir la figura con centro en O y potencia la de M respecto a O, los círculos MAB' (O') y $MA'B$ (O'') se transforman en las rectas AB' y $A'B$, perpendiculares a MO' y MO'', o sea en los ejes radicales (AB' eje radical de O y O', $A'B$ de O y O''), ya que $MN \cdot MR = MN' \cdot MS = MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$. El lugar geométrico de P es la circunferencia inversa de la polar.

A 39- Hallar el lugar geométrico de los centros O' de los círculos circunscritos a los triángulos autopolares ABP con respecto a una circunferencia dada O, que tienen un vértice P fijo.

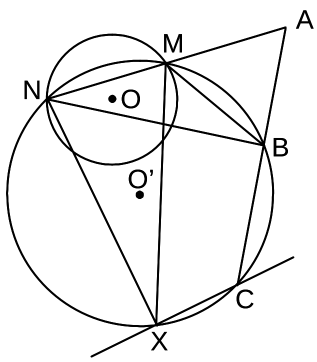
Solución:



El círculo circunscrito es ortogonal al de Monge (ortóptico) de O, y como pasa por el punto dado P, que se puede considerar como un círculo de radio nulo, también es ortogonal a él. Luego el lugar pedido es el eje radical del círculo de radio nulo (punto P) y del círculo ortóptico de O, es decir la mediatriz de PM.

A 40- Se da una circunferencia O y dos puntos A y B. Se trazan secantes variables AMN, y se llevan ángulos iguales a uno dado, $\widehat{BMX}$ y $\widehat{BNX}$. Hallar el lugar geométrico de X.

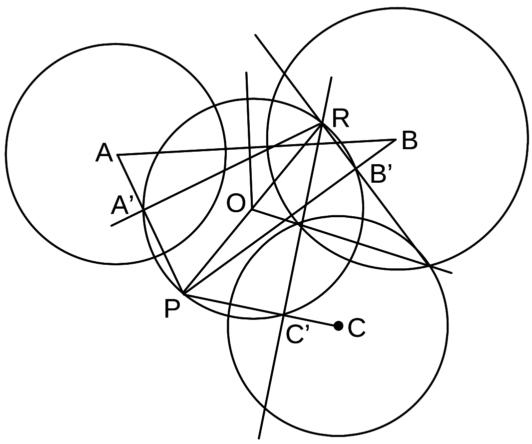
Solución:



Los puntos M, N, B, X son concíclicos (círculo O') pues B y X están en el arco capaz del ángulo dado sobre MN El punto A está en el eje radical de O y O', luego $AM \cdot AN = AB \cdot AC$, por lo que el punto C es fijo, y el ángulo $\widehat{BCX}$ también lo es. Por tanto el lugar pedido es una recta que forma con BC dicho ángulo.

A 41- Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyas polares respecto a tres circunferencias dadas, son concurrentes.

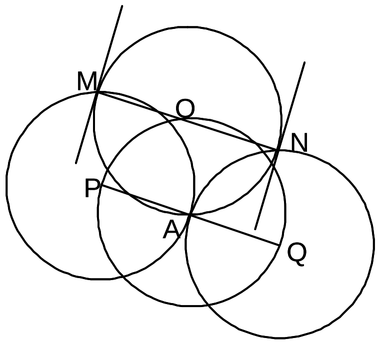
Solución:



Sean las tres circunferencias A, B, C, sea P un punto del lugar, y sea R el punto en que se cortan las tres polares. La circunferencia O, de diámetro PR, pasa por A', B' y C', pies de las tres polares de P respecto a A, B y C. Se tiene que $AA' \cdot AP = R_A^2$, luego O es ortogonal a A. De la misma forma, es ortogonal a B y C. Luego todo punto del lugar está en O. Sea P un punto cualquiera de O. Se une P con A y se traza la perpendicular a PA en A', que pasa por R que es diametralmente opuesto a P, teniéndose, por ser A ortogonal, que $AA' \cdot AP = R_A^2$. Luego $A'R$ es la polar de P respecto a A. Lo mismo para B y C. Por tanto, las tres polares pasan por R, por lo que P, punto cualquiera de O, es del lugar pedido. El siguiente razonamiento conduce a la misma solución: Para que las polares de P sean concurrentes, es necesario y suficiente que lo sean los ejes radicales de P respecto a los tres círculos. El punto de intersección de los tres ejes radicales tiene la misma potencia respecto a los tres círculos, luego un punto común debe coincidir con el centro radical de los tres círculos. Siendo O el centro radical, OP es igual a la tangente trazada desde O a cada círculo. Luego P tiene que estar en la circunferencia de centro O que corta ortogonalmente a los tres círculos.

A 42- Se hace girar una circunferencia alrededor de uno de sus puntos y en cada posición se le trazan tangentes paralelas a una recta fija. Hallar el lugar geométrico de los puntos de tangencia.

Solución:



Sea O el círculo dado que gira alrededor de A. El centro O describe un círculo de centro A y radio AO. Los puntos de tangencia son M y N, de forma que $OM = ON = OA$, siendo MN perpendicular a la dirección dada. El lugar consta de dos circunferencias iguales a la dada, cuyos centros están a un lado y otro de A, en la dirección perpendicular a la dada, siendo tangentes entre sí en A.

A 43- Siendo G el centro de gravedad del triángulo ABC, demostrar que para todo punto P del plano se cumple que $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

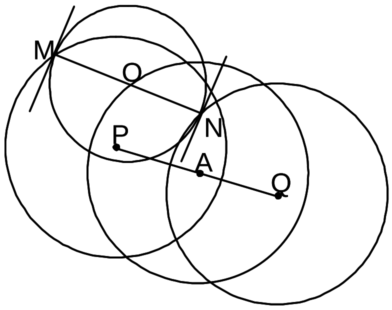
Solución: En el triángulo PGA se tiene: $PA^2 = PG^2 + AG^2 - 2PG \cdot GA'$, siendo A' la proyección de A sobre PG. De forma similar, en el triángulo PGB se tiene $PB^2 = PG^2 + BG^2 - 2PG \cdot GB'$, y en el PGC, $PC^2 = PG^2 + CG^2 - 2PG \cdot GC'$. Sumando las tres igualdades, y teniendo en cuenta que por ser G el centro de gravedad se cumple que $GA' + GB' + GC' = 0$ (cada sumando con su signo correspondiente), se tiene $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

A 44- Hallar el lugar geométrico de los puntos para los que la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices de un triángulo, es constante e igual a k^2.

Solución: En el problema anterior A 43, haciendo $PA^2 + PB^2 + PC^2 = k^2$, se tiene $3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = k^2$. Luego $PG^2 = \frac{1}{3}(k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2)$. Por tanto el lugar pedido es una circunferencia cuyo centro es el centro de gravedad del triángulo y su radio $\sqrt{\frac{1}{3}(k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2)}$.

A 45- Se hace girar una circunferencia alrededor de un punto fijo A y en cada posición se le trazan tangentes paralelas a una dirección dada. Hallar el lugar geométrico de los puntos de tangencia.

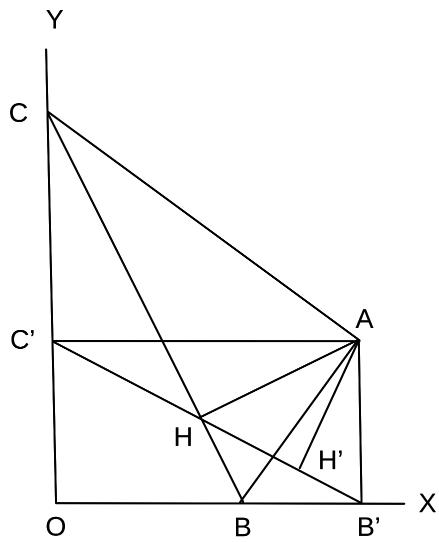
Solución:



El centro O del círculo dado describe un círculo de centro A y radio AO. Trazando por O la perpendicular a la dirección dada y tomando en uno y otro sentido el radio R de O, se tendrán los dos puntos de tangencia M y N. El lugar pedido está formado por dos círculos P y Q, de radio AO, tales que $AP = AQ = R$, siendo MN perpendicular a la dirección dada.

A 46- Hallar el lugar geométrico del pie de las alturas sobre las hipotenusas, de todos los triángulos rectángulos que teniendo el vértice *A*, correspondiente al ángulo recto, común y fijo, tienen el vértice *C* sobre el eje *OY*, y el *B* sobre el eje *OX*.

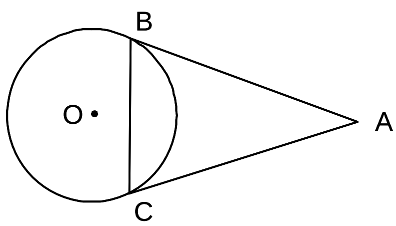
Solución:



Sea el triángulo rectángulo *ABC*. Trazando por *A* las perpendiculares a los ejes, se tiene el $AB'C'$. Siendo $\widehat{CAC'}$ igual al $\widehat{BAB'}$, por ser sus lados perpendiculares, los triángulos ACC' y ABB' son semejantes, por lo que $\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AB'}$. Luego los triángulos *ABC* y $AB'C'$ también lo son por la relación anterior y tener el ángulo en *A* igual. De ahí que los triángulos *ACH* y $AC'H'$ (*H* y H' son los pies de las perpendiculares desde *A*) también son semejantes. Luego girando el triángulo *ABC* alrededor de *A* un ángulo $\widehat{CAH}$ y multiplicándolo por la relación $\frac{AH}{AC}$ (homotecia), se obtiene el triángulo $AB'C'$. Por ello el lugar pedido es la recta $B'C'$.

A 47- Dado un triángulo isósceles, halla el lugar geométrico de los puntos tales que su distancia a la base del triángulo sea media proporcional entre sus distancias a los otros dos lados.

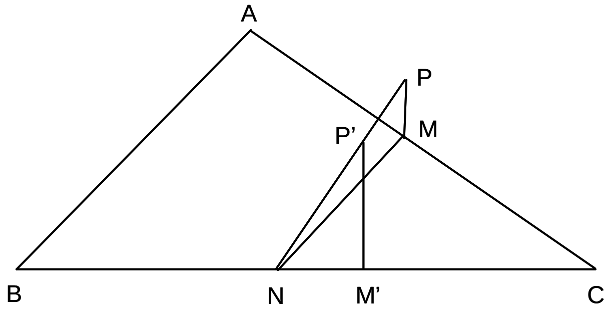
Solución:



Si desde un punto *A* exterior a un círculo *O* se trazan las tangentes *AB* y *AC* y la polar *BC*, la distancia de un punto de la circunferencia a la polar es media proporcional entre las distancias de ese punto a las tangentes. Luego dado el triángulo *ABC*, el lugar pedido es el círculo *O* tangente en *B* y *C* a los lados *AB* y *AC*.

A 48- Sea un triángulo *ABC*. Sobre *AC* se marca un punto *M*, y sobre *BC* un punto *N*, tales que se verifique constantemente $CN \cdot CA = CM \cdot CB$. 1º) Encontrar cómo varía la recta *MN*, cuando *M* y *N* se desplazan satisfaciendo la condición anterior. 2º) En *N* se traza la perpendicular a *AC*, y en *M* la perpendicular a *BC*. Hallar en las mismas condiciones, el lugar geométrico de la intersección de ambas perpendiculares. 3º) Se reemplaza el punto *M* por M' sobre *BC* de forma que $CN \cdot CA = -CM' \cdot CB$. La perpendicular a *BC* por M' corta a la perpendicular a *AC* por *N* en P'. Hallar el lugar geométrico de P'.

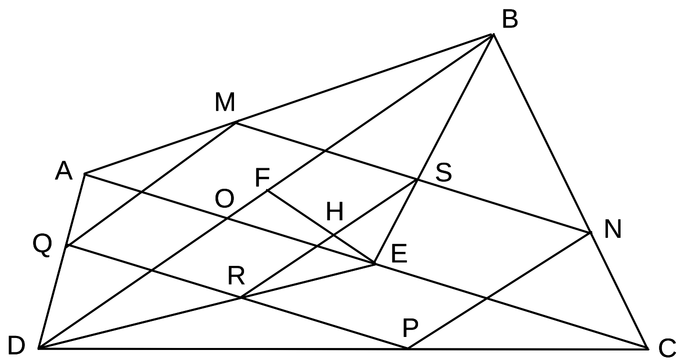
So*lución:*



1º) $\dfrac{CN}{CM} = \dfrac{CB}{CA}$ y como $\widehat{C}$ es constante, todos los triángulos *ABC* son semejantes y *MN* se conserva paralela a sí misma. 2º) En todos los triángulos *PMN*, *MN* se conserva paralela a sí misma, y lo mismo *PM* y *PN* por construcción, luego son semejantes, y como *M* y *N* describen *AC* y *BC*, *P* describe la recta *PC*. 3º) Lo mismo sucede con todos los triángulos $P'M'N$, que son semejantes, y como M' y *N* describen las rectas *BC* y *AC*, P' describe la recta $P'C$.

A 49- Se da un cuadrilátero *ABCD*. 1º) Demostrar que existe una infinidad de paralelogramos *MNPQ* inscritos en él (*M* sobre *AB*, *N* sobre *BC*, *P* sobre *CD*, *Q* sobre *DA*). 2º) Encontrar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las diagonales de estos paralelogramos.

Solución:

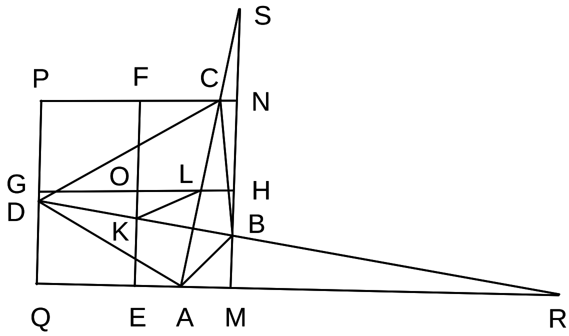


1º) Se fijan los puntos *M*, *N*, *P* y *Q* de forma que $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NC}{NB} = \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{QD}{QA} = \dfrac{m}{n}$. Luego *PQ* es paralela a *AC*, teniéndose que $\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{DQ}{DA} = \dfrac{m}{m+n}$, y $\dfrac{MQ}{BD} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{m}{m+n}$. Luego *MQ* y *NP* son paralelas a *BD*, y *MN* y *PQ* lo son a *AC*. Por tanto *MNPQ* es un paralelogramo. Variando la relación $\dfrac{m}{n}$ se tienen infinitos paralelogramos inscritos en *ABCD*. 2º) *E* y *F* son los puntos medios de *AC* y *BD*, luego *DE* es la mediana de *ADC*, y *BE* la de *ABC*. Luego *H* es el centro de *MNPQ*. El punto *H* está siempre en *EF*, pues *EH* es mediana de *ERS*, y *EF* lo es de *DEB*. Luego el lugar de *H* es la recta *EF*.

Nota: Estos mismos argumentos son válidos en el espacio cuando *ABCD* es un cuadrilátero alabeado.

A 50- Se consideran los rectángulos circunscritos a un cuadrilátero de diagonales perpendiculares. Demostrar que son semejantes y hallar el lugar geométrico de sus centros.

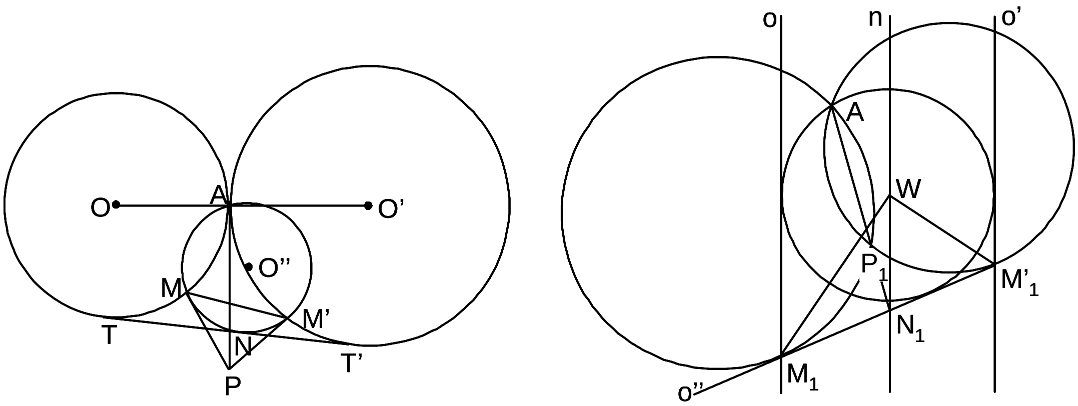
Solución:



Sea el cuadrilátero $ABCD$ y un rectángulo el $MNPQ$. Por ser $\widehat{ARB} = \widehat{BSA}$ (RB es perpendicular a SA, y RA a SB), se tiene $\frac{AC}{MN} = \frac{DB}{QM}$ y $\frac{MN}{MQ} = \frac{AC}{DB}$, con lo que se demuestra que los rectángulos son semejantes. El lugar geométrico de O es el arco capaz de 90º sobre KL, puntos medios de BD y AC

A 51- Se dan dos círculos O y O', tangentes exteriores en A. Se considera una de sus tangentes comunes TT'. Un círculo variable O'' que pasa por A y que es tangente a TT', corta a O y a O' en M y en M', respectivamente. Sea P el polo de MM' respecto a O''. Y sea N el punto de intersección de PA con O''. Hallar el lugar geométrico de N y P.

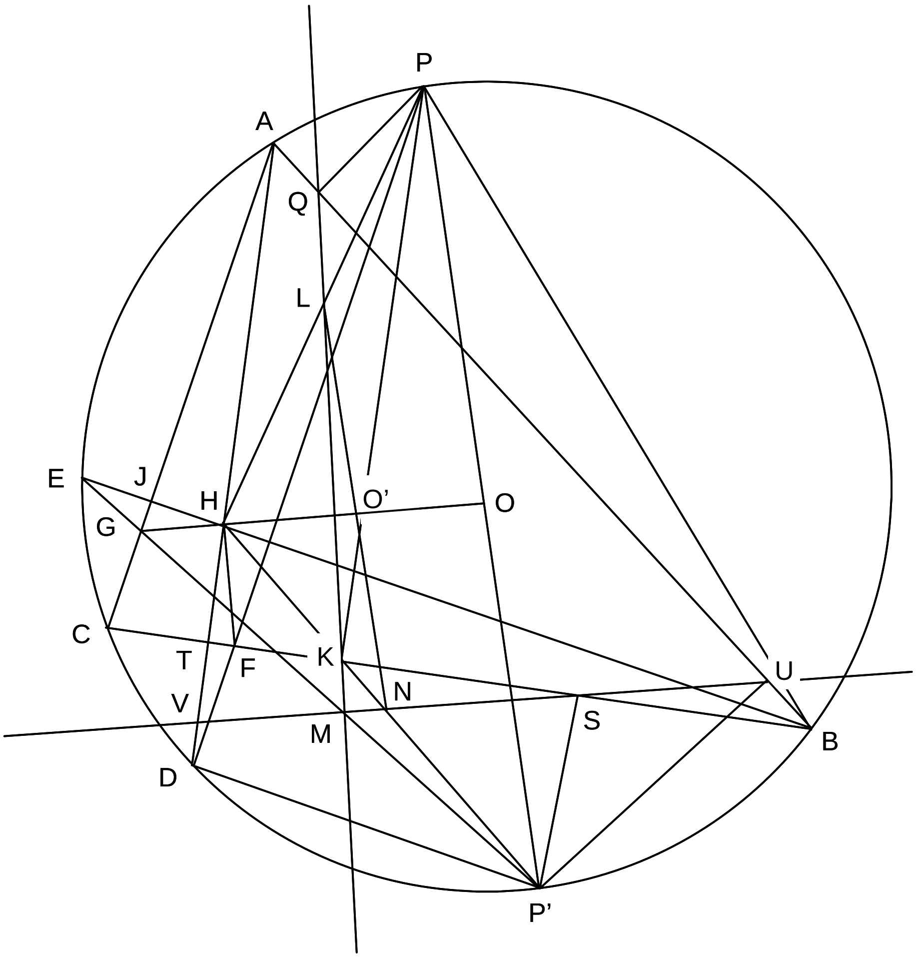
Solución:



Invirtiendo con centro A y potencia cualquiera, los círculos O y O' se invierten en dos rectas paralelas, o y o' (figura de la derecha), la tangente TT' en un círculo que pasa por A, es tangente a las dos rectas anteriores y cuyo centro es W, el círculo O'' se invierte en una recta o'' tangente al círculo anterior , y las tangentes MP y $M'P$ en dos circunferencias que pasan por A y son tangentes a o'' en los puntos de corte M_1 y M'_1 de esta con las rectas o y o'. Tras la inversión, la potencia de N_1, inversa de N, respecto a las circunferencias inversas de MP y $M'P$, es, siendo P_1 el inverso de P, $N_1P_1 \cdot N_1A = N_1M_1^2 = N_1M_1'^2$. Luego N_1 es el punto medio de $M_1M'_1$, y su lugar geométrico es la recta n, paralela media de o y o', limitada por la circunferencia W. Como el ángulo $\widehat{M_1WM'_1}$ es recto, se tiene que $N_1M_1 = N_1M'_1 = N_1W$, luego $N_1P_1 \cdot N_1A = N_1M_1^2 = N_1W^2$, por lo que P_1 está en una circunferencia que pasa por A y es tangente en W a la recta n. Deshaciendo la inversión, el lugar geométrico de N es una circunferencia con centro el de semejanza de O y O', limitada por TT'. El lugar de P es la tangente a la circunferencia lugar geométrico de N.

A 52- Hallar el lugar geométrico de los puntos de corte de las rectas de Simson correspondientes a dos puntos diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita a un triángulo.

Solución:



Sea ABC el triángulo, H su ortocentro, punto de corte de las alturas AT y BJ, O el centro del círculo circunscrito, P y P' dos puntos diametralmente opuestos de dicho círculo, Q y K los pies de las perpendiculares trazadas desde P sobre AB y BC, S y U los de las trazadas desde P' sobre BC y AB, QKM y USM las respectivas rectas de Simson que se cortan en M. Trazando por H las paralelas a dichas rectas, se tienen HF y HG. Haciendo las construcciones para la demostración de la recta de Simson, se obtiene que el cuadrilátero $CJHT$ es inscriptible, pues son rectos los ángulos $\widehat{HJC}$ y $\widehat{CTH}$, luego $\widehat{C}+\widehat{JHT}=180^{\circ}$. Por tanto $\widehat{JHT}=\widehat{GHF}+\widehat{JHG}-\widehat{THF}=180^{\circ}-\widehat{C}$. De ahí que $\widehat{GHF}=$

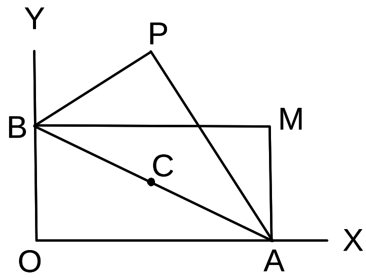
$$=180^{\circ}-\widehat{C}-\widehat{JHG}+\widehat{THF}=180^{\circ}-\widehat{C}-\widehat{JEG}+\widehat{TDF}=180^{\circ}-\frac{arco\ AP+arco\ PB}{2}-\frac{arco\ P'B}{2}$$

$$+\frac{arco\ AP}{2}=\frac{360^{\circ}-arco\ AP+arco\ AP-arco\ PB-arco\ P'B}{2}=\frac{360^{\circ}-180^{\circ}}{2}=90^{\circ}.$$

Por tanto, las rectas de Simson correspondientes a P y P' son perpendiculares. Las rectas HP y HP' cortan respectivamente a las dos rectas de Simson, en L y N. Por las características de las rectas de Simson, se tiene que $LP=LH$, $NP'=NH$, $LN=\frac{PP'}{2}$. La recta HO corta a LN en O', de forma que $O'O=O'H$. Luego O' es fijo, y como el triángulo LNM es rectángulo, se tiene que $O'M=O'L=O'N=\frac{R}{2}$, siendo R el radio de O. Por tanto el lugar geométrico de M es el círculo de los nueve puntos o de Euler.

A 53- Se da un ángulo recto *XOY* y un punto *P* en su plano. Alrededor de *P* gira un ángulo recto cuyo vértice es *P* y cuyos lados encuentran a *OX* y *OY* en *A* y *B*. Sea *M* el cuarto vértice del rectángulo *AOBM*. Hallar el lugar geométrico de *M*, así como los lugares de los baricentros de los triángulos *OAB* y *PAB*.

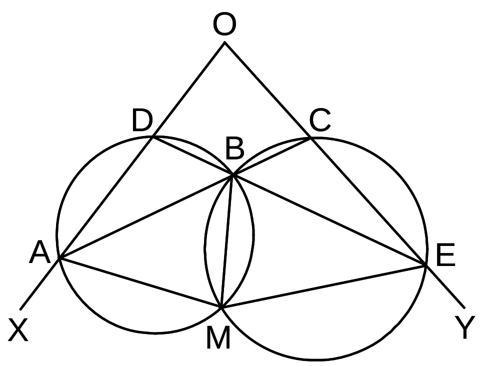
Solución:



Sea *C* el punto medio de *AB*. Como el cuadrilátero *OAPB* es inscriptible, *C* es el centro del círculo circunscrito por lo que su lugar geométrico es la mediatriz de *OP*. Como *M* es el simétrico de *O* respecto a *C*, su lugar geométrico es una recta homotética de la mediatriz de *OP*, con centro de homotecia *O* y razón $\frac{OM}{OC} = 2$. El lugar del baricentro *D* del triángulo *OAB* es otra recta homotética de dicha mediatriz, con centro de homotecia *O* y razón $\frac{OD}{OC} = \frac{2}{3}$. El lugar del baricentro *E* del triángulo *PAB* es otra recta homotética de la citada mediatriz, con centro de homotecia *P* y razón $\frac{PE}{PC} = \frac{2}{3}$.

A 54- Por un punto *B*, situado en el interior de un ángulo *XOY*, se traza una secante fija *ABC* y una secante móvil *DBE* (*A* y *D* están sobre *OX*; *C* y *E* sobre *OY*). Se circunscribe una circunferencia al triángulo *ABD*, y otra al *BCE*. Halla el lugar geométrico de *M*, segundo punto de intersección de estas dos circunferencias.

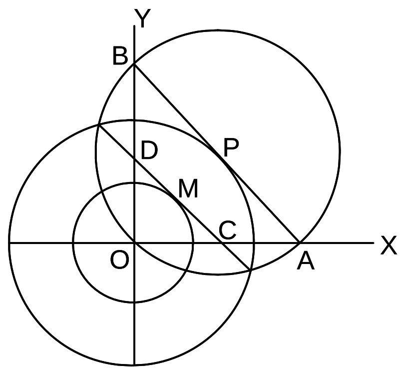
Solución:



Sea α el ángulo que forman ambas secantes entre sí; sean β y γ los ángulos fijos que forma *AC* con *OX* y *OY*. Se tiene que $\widehat{AMB} = \alpha + \beta$, $\widehat{BMC} = \gamma - \alpha$, de donde $\widehat{AMC} = \beta + \gamma$. Luego el lugar pedido es el arco capaz de $\beta + \gamma$ sobre *AC*.

A 55- Se da un círculo O y dos diámetros perpendiculares OX, OY. La tangente en un punto cualquiera P de este círculo encuentra a OX en A y a OY en B. El eje radical de O y del círculo circunscrito al triángulo AOB, encuentra a OX en C, y a OY en D. Hallar el lugar geométrico del punto medio M de CD.

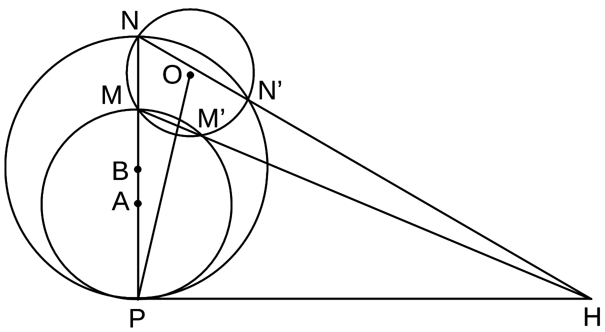
Solución:



Siendo R el radio de O, y $OA = a$, $OB = \dfrac{aR}{\sqrt{a^2 - R^2}}$. Las rectas AB y CD son antiparalelas con relación a $\widehat{XOY}$. Luego $a \cdot OC = \dfrac{aR \cdot OD}{\sqrt{a^2 - R^2}}$, $DC = OP = R$, $OC^2 + OD^2 = R^2$, $OC = \dfrac{R^2}{a}$, $OD = \dfrac{R\sqrt{a^2 - R^2}}{a}$, $OM^2 = \dfrac{R^2}{4}$, $OM = \dfrac{R}{2}$. Luego el lugar pedido es la circunferencia de centro O y radio $\dfrac{R}{2}$.

A 56- Dado un punto P y una circunferencia O, se traza por P una transversal variable que corta al círculo en M y N. En cada posición se trazan las circunferencias de diámetros PM y PN, que cortan a O en M' y N'. Hallar el lugar geométrico del punto H, intersección de MM' y NN'.

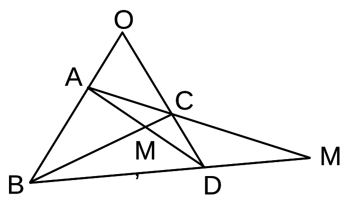
Solución:



H es el centro radical de las tres circunferencias (O, A y B). El eje radical de A y B es la perpendicular por P a la transversal, que ha de pasar por H. Luego $HP^2 = HO^2 - R^2$, siendo R el radio de O. El lugar pedido es una recta perpendicular a PO.

A 57- Se dan dos lados opuestos AB y CD de un cuadrilátero, que se cortan en O. El lado AB es fijo, y el CD gira alrededor de O. Hallar el lugar geométrico de M, punto donde se cortan los otros dos lados AC y BD, y el de M', punto de intersección de las diagonales AD y BC.

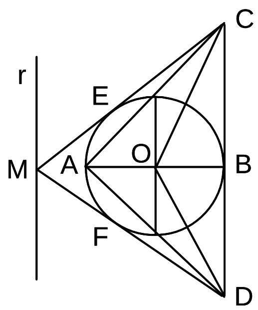
Solución:



En el triángulo OBD cortado por la transversal ACM, se tiene $\frac{MD}{MB} \cdot \frac{AB}{AO} \cdot \frac{CO}{CD} = 1$. Como AB, AO, CO y CD son constantes, se tiene que $\frac{MD}{MB} = k$, constante. Por tanto $\frac{MB}{DB} = \frac{1}{1-k}$, por lo que M describe una circunferencia homotética de la descrita por D, con centro de homotecia B y razón $\frac{1}{1-k}$. En el triángulo OBC cortado por la transversal $AM'D$, se tiene $\frac{DC}{DO} \cdot \frac{AO}{AB} \cdot \frac{M'B}{M'C} = 1$. Como DC, DO, AO y AB son constantes, se tiene que $\frac{M'B}{M'C} = q$, constante. Por tanto $\frac{BM'}{BC} = \frac{q}{1+q}$, por lo que M' describe una circunferencia homotética de la descrita por C, con centro de homotecia B y razón $\frac{q}{1+q}$.

A 58- Se da una circunferencia O y un diámetro AB. El punto A es el vértice de un ángulo recto variable cuyos lados encuentran en C y D a la tangente en B. Por C y D se trazan al círculo las tangentes CE y DF. Hallar el lugar geométrico del punto M, intersección de estas tangentes.

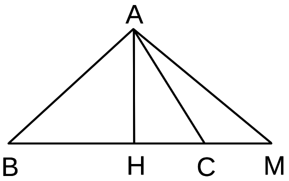
Solución:



Siendo $\alpha = \widehat{ACB} = \widehat{BAD}$, $\beta = \widehat{ODB}$, $2\beta = \widehat{MDB}$, $\gamma = \widehat{OCB}$, $2\gamma = \widehat{MCB}$, siendo R el radio de O y siendo H la proyección de M sobre CBD, se tienen las siguientes relaciones: $\tan\alpha = \frac{2R}{CB} = \frac{BD}{2R} = t$, $CB = \frac{2R}{t}$, $BD = 2Rt$, $CD = 2R\frac{t^2+1}{t}$, $\tan\beta = \frac{R}{BD} = \frac{1}{2t}$, $\tan\gamma = \frac{R}{CB} = \frac{t}{2}$, $\tan 2\beta = \frac{MH}{DH} = \frac{4t}{4t^2-1}$, $DH = MH \cdot \frac{4t^2-1}{4t}$, $\tan 2\gamma = \frac{MH}{CH} = \frac{4t}{4-t^2}$, $CH = MH \cdot \frac{4-t^2}{4t}$, $CD = CH + DH = 2R\frac{t^2+1}{t} = MH \cdot \frac{3(t^2+1)}{4t}$, $MH = \frac{8}{3}R$. Luego el lugar geométrico de M es la perpendicular r a AB, a una distancia de B igual a $\frac{8}{3}R$.

A 59- Hallar el lugar geométrico de los puntos A, tales que $\alpha \cdot AC^2 - \beta \cdot AB^2 = \gamma^2$, siendo B y C dos puntos fijos dados, y α, β y γ tres constantes dadas.

Solución:



Sean $BC = a$, H la proyección de A sobre BC, y sea M un punto de BC tal que $CM = d$. En el triángulo ABM se tiene $AB^2 = (a+d)^2 + AM^2 - 2(a+d)MH$. En el triángulo ACM se tiene $AC^2 = d^2 + AM^2 - 2dMH$. Luego se obtiene la siguiente igualdad:

$$\alpha \cdot AC^2 - \beta \cdot AB^2 - \gamma^2 = \alpha(d^2 + AM^2 - 2dMH) - \beta[(a+d)^2 + AM^2 - 2(a+d)MH] - \gamma^2 = 0.$$

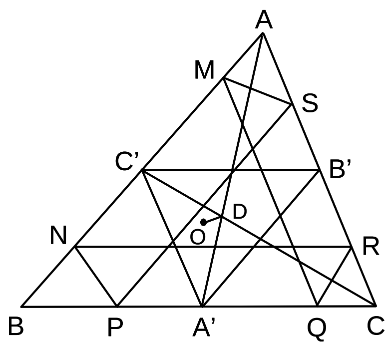
Operando: $$(\alpha-\beta)AM^2 + MH(-2d\alpha + 2d\beta + 2a\beta) + d^2(\alpha-\beta) - 2da\beta - a^2\beta - \gamma^2 = 0.$$

Anulando el coeficiente de MH, se tiene $d = \dfrac{a\beta}{\alpha-\beta}$, y por tanto $AM^2 = \dfrac{a^2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2} + \dfrac{\gamma^2}{\alpha-\beta}$.

Luego el lugar geométrico pedido es una circunferencia de centro el punto M que está sobre BC a una distancia d de C, y cuyo radio es AM.

A 60- Demostrar que si se tienen en un triángulo tres rectas antiparalelas iguales, son concíclicos sus seis puntos de corte con los lados del triángulo. Hallar el lugar geométrico del centro del círculo.

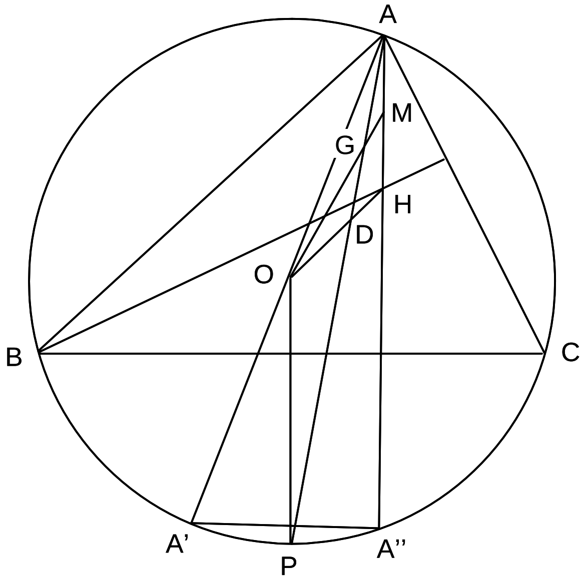
Solución:



Sea el triángulo ABC, y las antiparalelas iguales MS, NP y QR. Los cuadriláteros $NPQR$, $PQRS$, $QRSM$, $RSMN$, $SMNP$, $MNPQ$ son cada uno de ellos inscriptibles en una circunferencia, por tener sus ángulos opuestos suplementarios (por ejemplo, siendo $\alpha = \widehat{NBP}$, $\beta = \widehat{BNP}$, $\gamma = \widehat{BPN}$, $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, $\widehat{PNR} = \gamma$, $\widehat{PQR} = \alpha+\beta = 180^\circ - \gamma$) . Los círculos circunscritos a los dos primeros cuadriláteros coinciden, pues están circunscritos al triángulo PQR. Razonamientos análogos son válidos para los seis cuadriláteros formados, luego los seis puntos M, N, P, Q, R y S son concíclicos. El centro de estos círculos está definido por las mediatrices de NP, PQ, QR, NR, etc. y sus sucesivas paralelas, cuyos vértices describen los lados del ABC, por lo que su lugar es una recta. En el caso en que las antiparalelas sean de longitud nula, este centro coincide con el circuncentro O del ABC. En el caso en que M y N coincidan en un punto C' de AB, se tiene que $AC' = \dfrac{b^2c}{a^2+b^2}$, $BC' = \dfrac{a^2c}{a^2+b^2}$, siendo las tres rectas CC', AA', BB' cevianas, pues $\dfrac{\frac{b^2c}{a^2+b^2}}{\frac{-a^2c}{a^2+b^2}} \cdot \dfrac{\frac{ba^2}{a^2+c^2}}{\frac{-bc^2}{a^2+c^2}} \cdot \dfrac{\frac{ac^2}{b^2+c^2}}{\frac{-ab^2}{b^2+c^2}} = -1$, luego el punto D, intersección de estas cevianas, forma parte del lugar pedido.

A 61- Sobre una circunferencia de centro *O*, se dan dos puntos fijos *B* y *C*, y un tercer punto móvil *A*. Sea *H* el ortocentro del triángulo *ABC*. 1º) Hallar el lugar geométrico del baricentro *G* del triángulo *OAH*. 2º) Hallar el lugar geométrico del pie *D* de la bisectriz interna del ángulo $\widehat{A}$ de dicho triángulo. 3º) Determinar *A* para que la bisectriz *AD* tenga una magnitud dada.

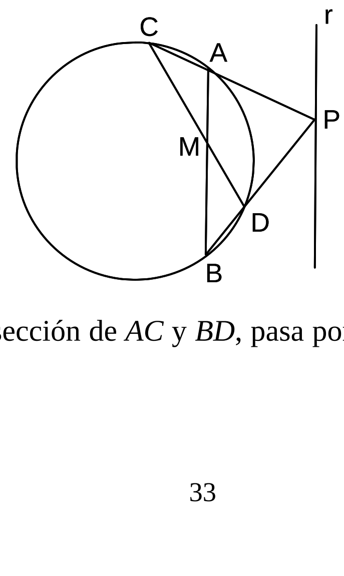
Solución:



1º) El ángulo $\widehat{BHC}$ es suplementario del $\widehat{BAC}$, luego el lugar geométrico de *H* es el círculo simétrico del *O* respecto a *BC*. El punto medio *M* de *AH*, describe el círculo de centro el punto medio de *BC* y radio el de *O*. Por tanto *G* describe el círculo homotético del que describe *M*, con centro de homotecia *O* y razón $\frac{OG}{OH} = \frac{2}{3}$. 2º) Como $\frac{DO}{DH} = \frac{OA}{HA} = k$, $\frac{DO}{DO+DH} = \frac{k}{1+k} = \frac{DO}{OH}$, luego *D* describe el círculo homotético al que describe *H*, con centro de homotecia *O* y razón $\frac{OD}{OH} = \frac{k}{1+k}$, siendo $k = \frac{OA}{AH}$. 3º) *AD* pasa por el punto medio *P* del arco $A'A''$ (A' y A'' son los puntos de intersección de *AO* y *AH* con la circunferencia *O*). Como los triángulos *ADH* y *DOP* son semejantes, $\frac{OD}{DH} = \frac{AD}{DP} = \frac{AH}{OP}$, $\frac{AD+DP}{AD} = \frac{AH+OP}{AH}$, $AP = \frac{AD}{DH}(AH+OP)$. Luego dado *AD*, se conoce *AP*, y con centro en *P* y radio *AP* se corta *O* en *A* (hay otra solución A_1, simétrica de *A* con relación a *OP*).

A 62- En un círculo dado se tiene una cuerda fija *AB* y otra variable *CD* que pasa por *M*, punto medio de *AB*. Hallar el lugar geométrico de la intersección de *AC* y *BD*.

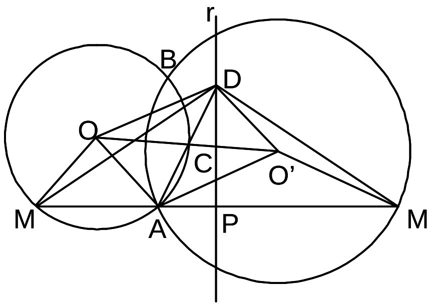
Solución:



La polar de *P*, punto de intersección de *AC* y *BD*, pasa por *M*. Luego *P* describe la polar de *M*, que es una paralela a *AB*.

A 63- Dados dos círculos O y O', que se cortan en A y B, se traza una secante MAM'. Hallar el lugar geométrico de P, punto medio de MM'.

Solución:



Sea C el punto medio de OO', y D el simétrico de A respecto a C. Se tiene que $OM = OA = O'D$, $O'A = O'M' = OD$. Siendo $\alpha = \widehat{OMA} = \widehat{OAM}$, $\widehat{MOA} = \pi - 2\alpha$, y siendo $\beta = \widehat{OAO'}$, $\widehat{O'AM'} = \widehat{O'M'A} = \pi - \alpha - \beta$, $\widehat{AO'M'} = \pi - 2(\pi - \alpha - \beta) = 2(\alpha + \beta) - \pi$.

En el cuadrilátero $AODO'$, se tiene:

$\widehat{OAO'} = \widehat{ODO'} = \beta$, $\widehat{DOA} = \widehat{DO'A} = \frac{1}{2}(2\pi - 2\beta) = \pi - \beta$.

En el triángulo $M'O'D$, se tiene:

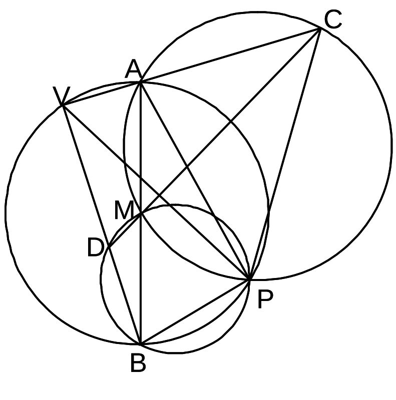
$\widehat{DO'M'} = 2\pi - \widehat{AO'D} - \widehat{AO'M'} = 2\pi - (\pi - \beta) - [2(\alpha + \beta) - \pi] = 2\pi - 2\alpha - \beta$.

En el triángulo MOD, se tiene: $\widehat{MOD} = \widehat{MOA} + \widehat{AOD} = \pi - 2\alpha + \pi - \beta = 2\pi - 2\alpha - \beta$.

Luego los triángulos MOD y $M'O'D$ son iguales, pues tienen dos lados iguales, $OM = O'D$ y $OD = O'M'$, e iguales los ángulos $\widehat{MOD}$ y $\widehat{M'O'D}$. Por tanto $DM = DM'$, por lo que D está en la mediatriz de MM' y $\widehat{DPA} = 90º$. El lugar geométrico de P es el arco capaz de 90º sobre AD, es decir, una circunferencia de centro C y radio $CA = CD$.

A 64- Se da un ángulo AVB, de vértice V. Una circunferencia que pasa por V y por un punto dado P, corta a los lados del ángulo en los puntos A y B. Hallar el lugar geométrico del baricentro del triángulo VAB.

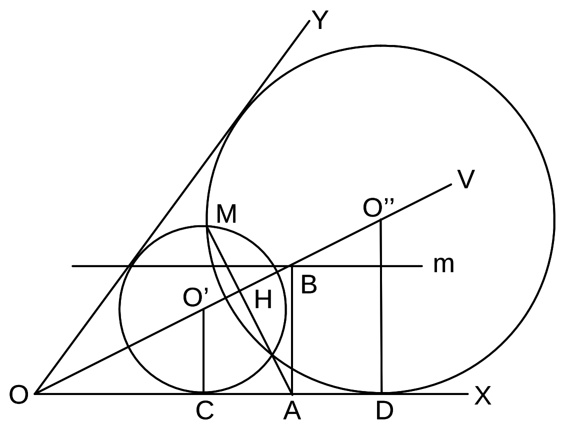
Solución:



Los triángulos PAB, al variar la circunferencia, se mantienen semejantes, puesto que $\widehat{PAB} = \widehat{PVB}$, y $\widehat{PBA} = \widehat{PVA}$. Siendo M el punto medio de AB, los ángulos $\widehat{PMA}$ y $\widehat{PMB}$ son constantes. La circunferencia PMA corta a VA en el punto C. Se tiene que $\widehat{PCV} = \pi - \widehat{PMA}$, luego $\widehat{PCV}$ es constante, y consecuentemente C es fijo. Análogamente, D es fijo. Por tanto, $\widehat{DMC} = \widehat{DMP} + \widehat{PMC} = = \pi - \widehat{PBV} + \widehat{PAC} = \pi$. Luego M está en la recta CD. El lugar del baricentro del triángulo VAB, es la recta homotética de CD, con centro de homotecia V y razón $\frac{2}{3}$.

A 65- Por un punto M interior al ángulo XOY, pasan dos círculos O' y O'', inscritos en el ángulo. Hallar el lugar geométrico de M cuando la suma de los radios de los dos círculos, es constante.

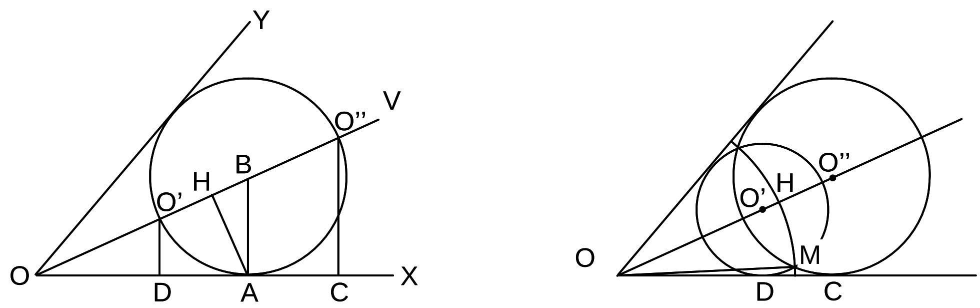
Solución:



Las circunferencias O' y O'' son tangentes en C y D, respectivamente, a OX. Sus centros están sobre la bisectriz OV del ángulo $\widehat{XOY}$. La perpendicular por M a OV es el eje radical de ambas circunferencias, que corta en A a OX. Luego $AC = AD$, siendo A el punto medio de CD, por lo que $AB = \dfrac{O'C + O''D}{2}$. Como esta cantidad se conoce, el punto B es fijo (intersección de OV con la paralela m a OX a la distancia AB). Por B se traza la perpendicular BA a OX. La recta AH, perpendicular a OV, es el eje radical de O' y O'', sobre el que está M. Por tanto el lugar pedido es la recta AH.

A 66- Por un punto M interior al ángulo XOY, pasan dos círculos O' y O'', inscritos en el ángulo. Hallar el lugar geométrico de M cuando el producto de los radios de los dos círculos, es constante.

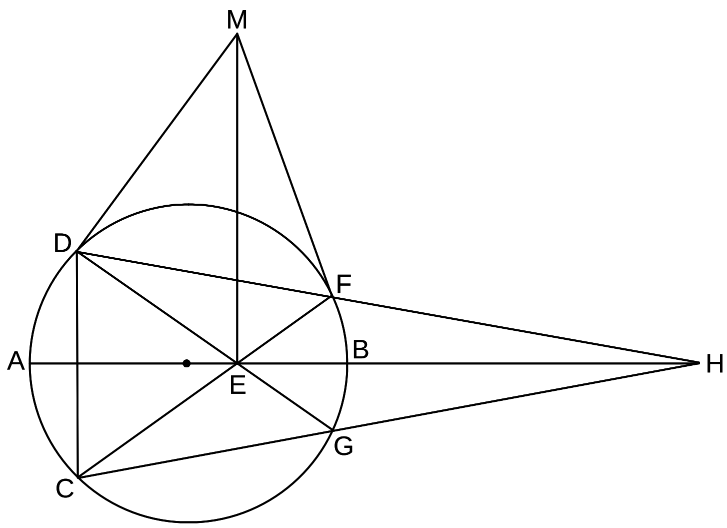
Solución:



Sea OV la bisectriz de XOY, AH (perpendicular a OV) la raíz cuadrada del producto de los dos radios, y $O'D$ y $O''C$ los radios perpendiculares a OX (los centros O' y O'' están sobre OV, y C y D son los puntos de tangencia con OX). Luego OH es conocido. Se tiene que $\dfrac{O'D}{AH} = \dfrac{OD}{OH}$, $\dfrac{O''C}{AH} = \dfrac{OC}{OH}$, y multiplicando las dos igualdades, $\dfrac{O'D \cdot O''C}{AH^2} = \dfrac{OC \cdot OD}{OH^2}$. Como $O'C \cdot O'D = AH^2$, $OC \cdot OD = OH^2$, por lo que los círculos O' y O'' son inversos, con centro de inversión O y potencia OH^2. Considerando a M como puntos homólogos de una y otra circunferencia, se tiene $OM \cdot OM = OH^2$. Luego OM es constante e igual a OH, sean cuales sean O' y O'', por lo que el lugar de M es el círculo de centro O y radio OH.

A 67- Sea un círculo de diámetro *AB*. Se traza una cuerda *CD* perpendicular a *AB*. Por *C* se traza una secante que corta a *AB* en *E* y al círculo en *F*. Se traza la tangente en *F*, que corta en *M* a la perpendicular a *AB* trazada por *E*. Hallar el lugar geométrico de *M*.

Solución:

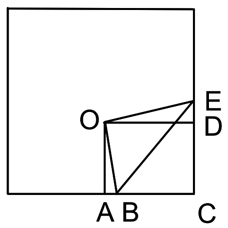


La intersección de *DF* y *AB* es *H*. La polar de *H* es *EM*, y *DH* es la polar de *M*. Como *DH* pasa por un punto fijo *D*, su polo *M* describe una recta, que es la polar de *D*, es decir la tangente *DM*.

Sección B - RECTAS, ÁNGULOS, TRIÁNGULOS

B 1- Doblando una punta de un cuadrado, se forma un triángulo rectángulo de catetos b y c. Calcular en función de b y c, las distancias del vértice del nuevo triángulo rectángulo a los lados del primitivo.

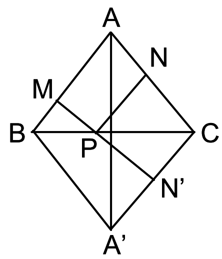
Solución:



Se dobla la esquina por BE, pasando el vértice C a ocupar la posición O, siendo $OB = b$ y $OE = c$, y se piden las distancias OA y OD. En el triángulo ODE, se tiene que $OD^2 = c^2 - (c - CD)^2 = 2c \cdot CD - CD^2 = 2c \cdot OA - OA^2$. De la misma forma, en el triángulo OAB, se tiene que $OA^2 = 2b \cdot OD - OD^2$. Operando, $OA = \dfrac{2b^2c}{b^2 + c^2}$, $OD = \dfrac{2bc^2}{b^2 + c^2}$.

B 2- Demostrar que la suma de distancias desde un punto de la base de un triángulo isósceles a los otros dos lados, es constante.

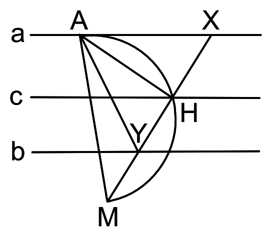
Solución:



Sea el triángulo ABC, cuyos lados AB y AC son iguales. Sea el triángulo $A'BC$ simétrico del ABC respecto a BC. Y sea P un punto cualquiera de BC, cuyas distancias a AB y AC son PM y PN, siendo PN' el simétrico de PN. Los ángulos $\widehat{BPM}$, $\widehat{CPN}$ y $\widehat{CPN'}$ son iguales por ser complementarios de $\widehat{PBM} = \widehat{PCN}$. Luego los puntos M, P y N' están alineados, siendo MN' la suma de las distancias de P a los dos lados iguales del triángulo ABC. Como esta distancia corresponde a la existente entre las paralelas AB y CA', es constante.

B 3- Se dan dos rectas a y b, un punto A sobre la primera y otro M fuera de ellas. Trazar una recta MXY que corte en X a la recta a, y en Y a la b, de modo que $AX = AY$.

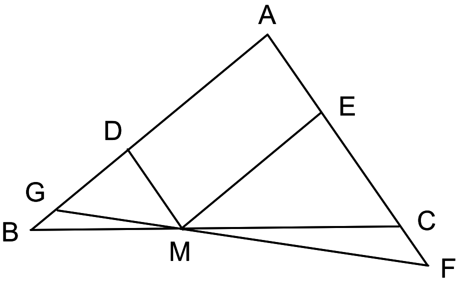
Solución:



El triángulo AXY es isósceles, siendo H el punto medio de su base XY, por lo que está sobre la paralela media c de a y b. Como AH es perpendicular a XY, H está sobre el arco capaz de 90º sobre AM. Luego la recta pedida MXY pasa por H, intersección de c con el citado arco capaz.

B 4- Encontrar sobre la base BC de un triángulo dado ABC, un punto M tal que trazando por él las paralelas a los otros dos lados, se obtenga un paralelogramo de perímetro dado.

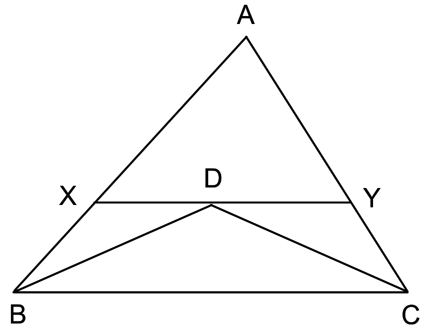
Solución:



Sobre AB se lleva $AG = p$, siendo $2p$ el perímetro dado. Sobre AC se lleva $AF = p$. La recta FG corta a BC en M, que es el punto pedido. En efecto, en el triángulo isósceles AGF, se tiene que $MD + ME = AF = AG = p$. Luego $AD + DM + ME + EA = 2p$.

B 5- Dado un triángulo ABC, hallar un punto X sobre AB y otro Y sobre AC, de modo que $XY = BX + CY$, siendo XY paralela a BC.

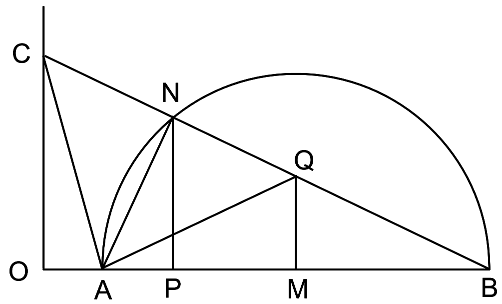
Solución:



Se trazan las bisectrices BD y CD de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ACB}$, que se cortan en D, por donde se traza la paralela XY a BC. Se tiene que $XB = XD$, $YC = YD$, luego $XY = BX + CY$.

B 6- Se dan dos puntos A y B, sobre un lado de un ángulo recto $\widehat{AOC}$. Hallar sobre el otro lado un punto C tal que $\widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{ABC}$.

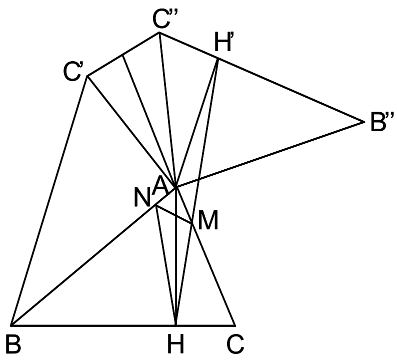
Solución:



Se traza la mediatriz MQ de AB, y la mediatriz PN de OM. La intersección de PN con la circunferencia de diámetro AB, determina el punto N, que unido con B, determina el punto C pedido. En efecto, $\widehat{QBM} = \widehat{QAM}$, $\widehat{CQA} = 2 \cdot \widehat{QBM}$, $\widehat{CQA} = \widehat{ACQ}$, luego $\widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{ABC}$.

B 7- Inscribir en un triángulo dado *ABC*, otro de perímetro mínimo.

Solución:

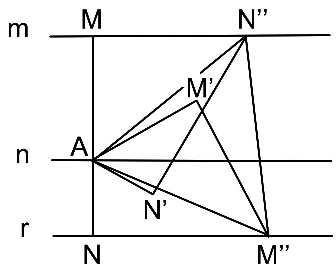


BC' es el simétrico de BC respecto a AB; $B''C''$ es el simétrico de BC' respecto a AC. El triángulo $AB''C''$ es igual al ABC. Se trata de hallar la mínima distancia HH' entre puntos homólogos de BC y $B''C''$. En efecto, la mínima distancia entre A y $B''C''$ es AH', y entre A y BC es AH. La recta HH' corta a AC en M. El triángulo de perímetro mínimo que se puede inscribir en ABC, con un vértice en H, es el MHN, de forma que $\widehat{BHN} = \widehat{CHM}$. El triángulo MHN es el pedido.

Nota: Ver el problema C 27.

B 8- Inscribir en tres rectas paralelas, un triángulo equilátero.

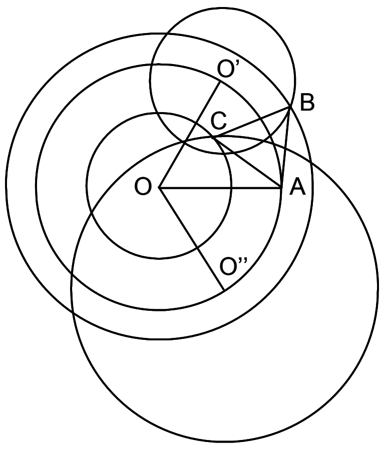
Solución:



Sean m, n y r las tres rectas paralelas y se toma un punto A sobre n. Sean AM y AN las distancias de A a m y r. Con centro A se rotan AM y AN un ángulo de 60º, obteniéndose AM' y AN'. La perpendicular $N'N''$ a AN', corta a m en N''. Y la perpendicular $M'M''$ a AM', corta a r en M''. El triángulo $AM''N''$ es el pedido.

B 9- Inscribir en tres círculos concéntricos de centro *O*, un triángulo equilátero.

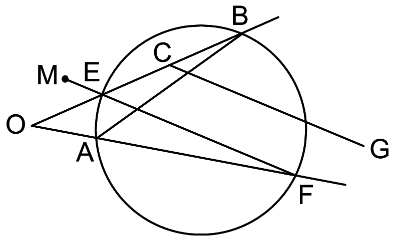
Solución:



Tomando como centro un punto A cualquiera del círculo central, se rota el círculo interior 60º, pasando su centro a O' y cortando al exterior en B. Rotando el exterior 60º, su centro pasa a O'', cortando al interior en C. El triángulo pedido es el ABC.

B 10- Dado un ángulo de vértice O, dos puntos A y B, uno en cada lado, y un punto M exterior al ángulo, trazar por M una recta que corte a los lados del ángulo en E y F, de manera que A, B, E y F sean concíclicos.

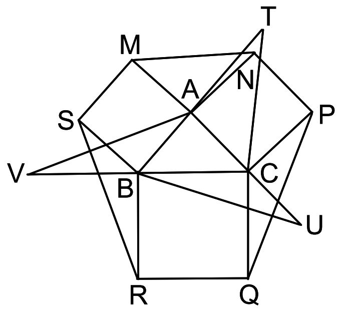
Solución:



Para que sean concíclicos, ha de cumplirse que $\widehat{BAF} = \widehat{BEF}$ y $\widehat{ABE} = \widehat{AFE}$, siendo las rectas AB y EF antiparalelas con respecto al ángulo dado. Se lleva el ángulo conocido $\widehat{BAF}$ sobre $\widehat{BCG}$, siendo C un punto cualquiera de OB. Trazando por M la paralela MEF a CG, se obtienen los puntos E y F.

B 11- Sobre los lados de un triángulo se construyen cuadrados hacia el exterior del triángulo. Calcular los lados del triángulo conociendo en magnitud los segmentos MN, PQ y RS (ver figura), que unen los vértices de los citados cuadrados

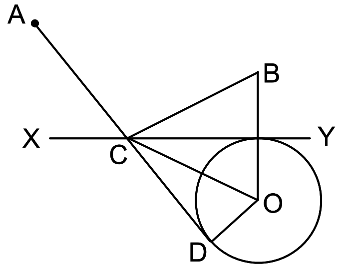
Solución:



Sea ABC el triángulo, y $ABMS$, $ACNP$, $BCRQ$ los tres cuadrados, siendo $m = MN$, $n = PQ$ y $p = RS$, los tres segmentos que se conocen en magnitud. Girando 90º las rectas AM, CP y BR, en torno a A, B y C, respectivamente, sus nuevas posiciones son AT, CU y BV, prolongaciones de BA, AC y CB. En el triángulo TBC se tiene, por ser A el punto medio de BT, que $BC^2 + CT^2 = 2 \cdot AC^2 + \dfrac{BT^2}{2}$, es decir $a^2 + m^2 = 2b^2 + 2c^2$. Similarmente, $b^2 + n^2 = 2a^2 + 2c^2$ y $c^2 + p^2 = 2b^2 + 2a^2$. De donde $a = \dfrac{\sqrt{2m^2 + 2n^2 - p^2}}{3}$, $b = \dfrac{\sqrt{2n^2 + 2p^2 - m^2}}{3}$, $c = \dfrac{\sqrt{2p^2 + 2m^2 - n^2}}{3}$.

B 12- Se da una recta XY y dos puntos A y B, situados a un mismo lado de la recta. Encontrar un punto C sobre XY, tal que el ángulo $\widehat{ACX}$ sea doble del $\widehat{BCY}$.

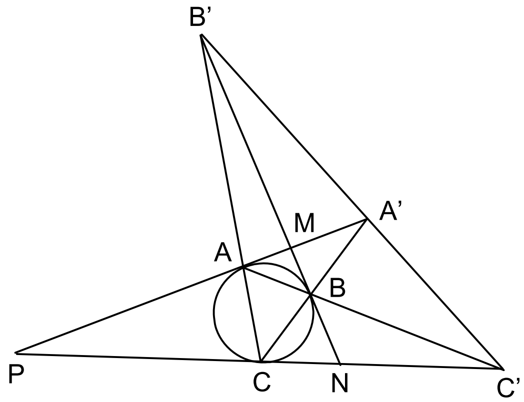
Solución:



Se obtiene el simétrico O, de B respecto a XY. Se traza la circunferencia de centro O, tangente a XY. Desde A se traza la tangente AD que corta a XY en C. El ángulo $\widehat{ACX} = \widehat{DCY} = 2 \cdot \widehat{OCY} = 2 \cdot \widehat{BCY}$.

B 13- Se da un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita O. Las tangentes en A, B y C, cortan a los lados opuestos en A', B' y C'. Demostrar que estos tres puntos están alineados.

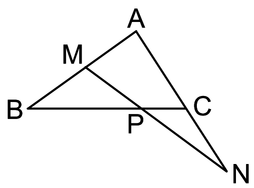
Solución:



Hay que deducir que $\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{B'A}{B'C}=1$ (**A**). En el triángulo ACA', se tiene $\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{BC}{BA'}\cdot\frac{A'M}{MA}=1$ (**B**). En el triángulo BCB', se tiene $\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{AB'}{AC}=1$ (**C**). En el triángulo ABA', se tiene $\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{MA}{MA'}\cdot\frac{A'C}{CB}=1$ (**D**). Tomando $\frac{A'C}{A'B}$ de (**C**), $\frac{C'B}{C'A}$ de (**D**) y $\frac{B'A}{B'C}$ de (**B**) y sustituyéndolos en (**A**), se tiene: $\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{B'A}{B'C}=\frac{MB'\cdot AC\cdot BA'}{MB\cdot AB'\cdot A'C}$. En el triángulo $BB'C$ cortado por AMA', se tiene: $\frac{MB'}{MB}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{AC}{AB'}=1$. De estas dos últimas igualdades, se obtiene: $\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{B'A}{B'C}=1$.

B 14- Se da un triángulo ABC. En el sentido BA se lleva un segmento BM y otro igual en la prolongación de AC a partir de C, es decir $CN = BM$. Probar que BC divide a MN siempre en la misma relación.

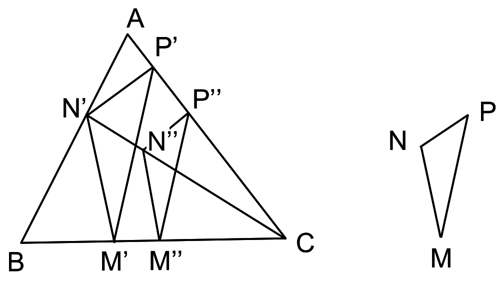
Solución:



En el triángulo AMN cortado por BPC, se tiene $\frac{BM}{BA}\cdot\frac{CA}{CN}\cdot\frac{PN}{PM}=1$. Como $BM = CN$, $\frac{PN}{PM}=\frac{AB}{AC}$, que es constante.

B 15- Inscribir en un triángulo ABC dado, otro $M'N'P'$, semejante a uno conocido MNP, con el vértice M' en BC.

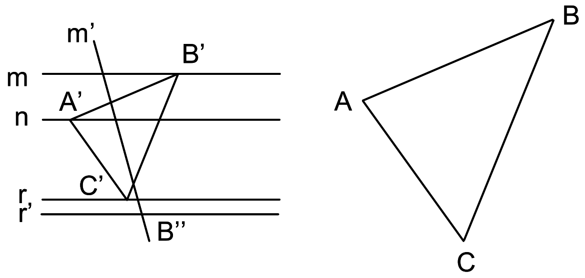
Solución:



Por un punto cualquiera M'' de BC, se traza una paralela $M''P''$ a PM. Por P'' y M'' se trazan paralelas a PN y MN, respectivamente, que se cortan en N''. La recta CN'' corta a AB en N'. Las paralelas por N' a NM y NP, determinan M' y P'.

B 16- Inscribir en tres paralelas dadas, un triángulo semejante a uno dado.

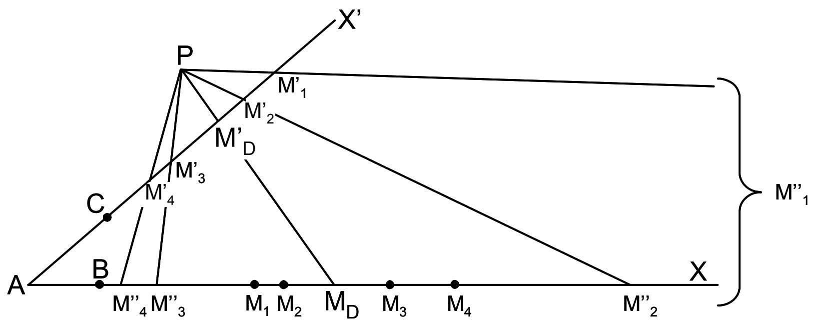
Solución:



Sean las paralelas m, n y r, y sea ABC el triángulo dado. Con centro un punto A' de n, se gira m un ángulo $\widehat{BAC}$, obteniéndose m'. Se traza r', paralela a r y tal que las distancias de A' a r y r' estén en la relación $\dfrac{AC}{AB}$; m' y r' se cortan en B''. Se deshace el giro de r', pasando B'' a B' sobre m. Se lleva el ángulo $\widehat{BAC}$ sobre $\widehat{B'A'C'}$, obteniéndose C'. El triángulo $A'B'C'$ es el pedido.

B 17- Se dan dos rectas AX y AX'. Sobre la primera hay un punto fijo B, y sobre la segunda otro punto fijo C. Trazar por un punto fijo P, una recta que corte en M a AX, y en M' a AX', de modo que $BM + CM'$ tenga una longitud dada k.

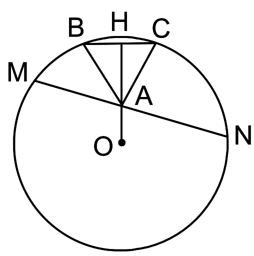
Solución:



Se toman sobre AX una serie de puntos M_1, M_2, ... y sobre AX' la serie M_1', M_2',... de forma que $BM_1 + CM_1' = k$, etc. Se proyecta desde P y sobre AX, la serie de puntos situados en AX', obteniéndose la serie M_1'', M_2'',...El punto doble M_D de las dos series situadas sobre AX (M_1, M_2,... y M_1'', M_2'',...), da la recta solución $PM_D'M_D$.

B 18- Inscribir en un segmento circular dado, un triángulo equilátero con un vértice en un punto A dado, situado sobre la cuerda, y los otros dos sobre el arco

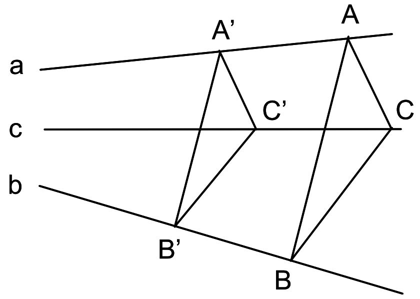
Solución:



Sea el círculo dado de centro O, y MN la cuerda que determina el segmento circular. Supuesto resuelto el problema, sea ABC el triángulo pedido. El círculo de centro A y radio $AB = AC = BC$, corta al arco del segmento en B y C. El eje radical de los dos círculos es la cuerda común BC, perpendicular a OA en H, punto medio de BC, estando alineados O, A y H. Por tanto, llevando a uno y otro lado de AH (altura y bisectriz correspondientes al vértice A) un ángulo de 30º, se obtienen B y C.

B 19- Dadas dos rectas *a* y *b*, que se cortan fuera de los límites del dibujo, trazar por un punto dado *C*, una recta *c* que concurra con las dos citadas.

Solución:

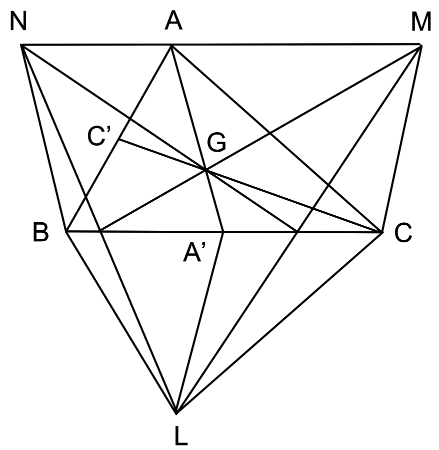


Tomando dos puntos cualesquiera *A* y *B*, situados respectivamente en *a* y *b*, se tiene el triángulo *ABC*. Por un punto cualquiera A' de *a* se trazan las paralelas $A'B'$ y $A'C'$ a *AB* y *AC*. Por B' se traza la paralela $B'C'$ a *BC*, obteniéndose C'. La recta CC' es la recta *c* pedida.

Nota: Ver el problema D 2.

B 20- Dado un triángulo *ABC*, se construyen los triángulos *BCL*, *CAM* y *ABN*, directamente semejantes entre sí. Determinar la posición relativa de los baricentros de los triángulos *ABC* y *LMN*.

Solución:



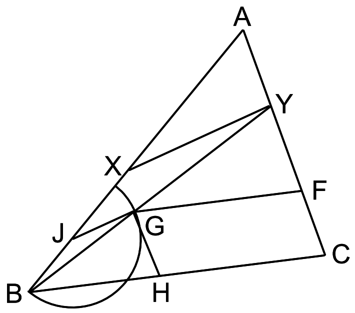
Sean G, G', G'' y G''', los baricentros de los triángulos *ABC*, *LBC*, *LMC* y *LMN*. Las medianas AA' y LA' están divididas por G y G' en la razón $2 \div 1$, siendo GG' paralela a *AL* e igual a $\dfrac{AL}{3}$. Por tanto, se pasa del baricentro del *ABC* al del *LMN*, por medio de la quebrada $GG'G''G'''$, cuyos lados son paralelos a *AL*, *BM*, *CN*, e iguales a sus terceras partes. G''' coincidirá con *G*, si *AL*, *BM* y *CN* son iguales y paralelas a los lados de un mismo triángulo. Como *AL*, *BM* y *CN* son proporcionales a *AB*, *BC* y *CA*, estando igualmente inclinadas sobre estos lados, representan en magnitud y dirección los lados de un triángulo semejante al *ABC*. Por tanto los baricentros del *ABC* y del *LMN* coinciden.

B 21- Siendo $(ABCD) = (A'B'C'D')$, demostrar que $\dfrac{AB \cdot CD}{A'B'} + \dfrac{AC \cdot DB}{A'C'} + \dfrac{AD \cdot BC}{A'D'} = 0$.

Solución: $(ABCD) = \dfrac{AC}{AD} : \dfrac{BC}{BD} = (A'B'C'D') = \dfrac{A'C'}{A'D'} : \dfrac{B'C'}{B'D'} = \dfrac{\dfrac{1}{A'B'} - \dfrac{1}{A'D'}}{\dfrac{1}{A'B'} - \dfrac{1}{A'C'}}$. Luego $\dfrac{1}{A'B'}(AC \cdot BD - AD \cdot BC) + \dfrac{AD \cdot BC}{A'D'} - \dfrac{AC \cdot BD}{A'C'} = 0$. Cambiando de signo y teniendo en cuenta que $AD \cdot BC - AC \cdot BD = AB \cdot DC$, queda demostrado.

B 22- Dado el triángulo ABC, trazar una recta que corte a AB en X, y a AC en Y, de forma que se tenga que $BX = XY = YC$.

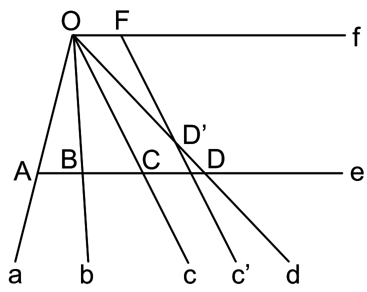
Solución:



Sobre CA se toma una distancia cualquiera CF y se traza la paralela FG a CB. Con radio $BJ = FC$, con centro J, se traza un arco que corta a FG en G. Se traza GH, paralela a FC. La poligonal $BJGH$ es equilátera por construcción. Uniendo B con G, se obtiene Y. La paralela por Y a GJ determina X.

B 23- Dadas cuatro rectas concurrentes a, b, c y d, trazar una secante que las corte respectivamente en A, B, C y D, de forma que $AB = CD$.

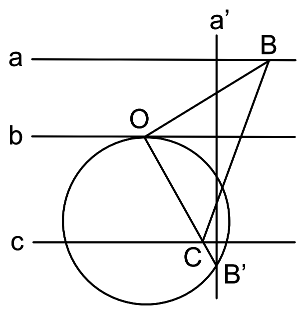
Solución:



Suponiendo resuelto el problema, se traza por A la secante e, que corta a b, c y d, en B, C y D. Por O, punto de concurrencia de las cuatro rectas dadas, se traza f, paralela a e, y se lleva $OF = AB$. Se traza por F la paralela c' a c, que corta en D' a d. Si $CD = AB = OF$, D y D' se confundirían. Por tanto se tienen sobre d dos series proyectivas $(D,...)$ $(D',...)$, cuyos puntos dobles representan la solución.

B 24- Inscribir en tres rectas paralelas dadas, un triángulo rectángulo de área dada k^2.

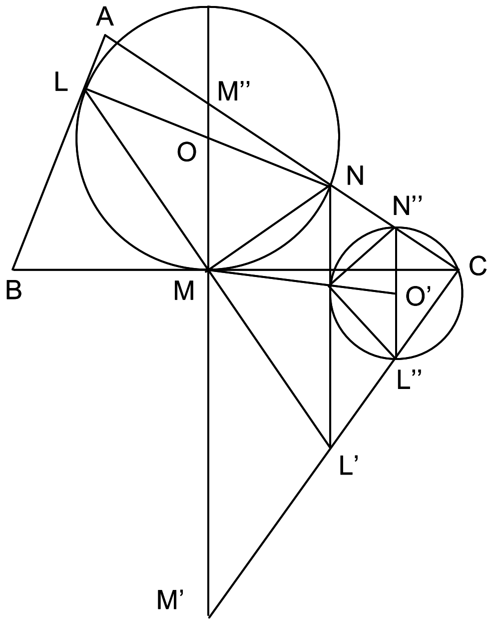
Solución:



Sean a, b y c las paralelas dadas, y sea OBC el triángulo pedido. Con centro O se gira a un ángulo de 90º, obteniéndose a'. El punto B se sitúa en B', teniéndose $OC \cdot OB' = 2k^2$. Luego B' es el inverso de C con centro O y potencia $2k^2$. El inverso de c es una circunferencia que pasa por O, y corta a a' en B', alineado con OC. Se deshace el giro, pasando a' a a, y B' a B, obteniéndose el triángulo OBC.

B 25- Inscribir en un triángulo dado *ABC*, un semicírculo tangente a *BC* en un punto dado *M* de *BC*, y con los extremos *L* y *N* del diámetro *LON*, sobre *AB* y *AC*.

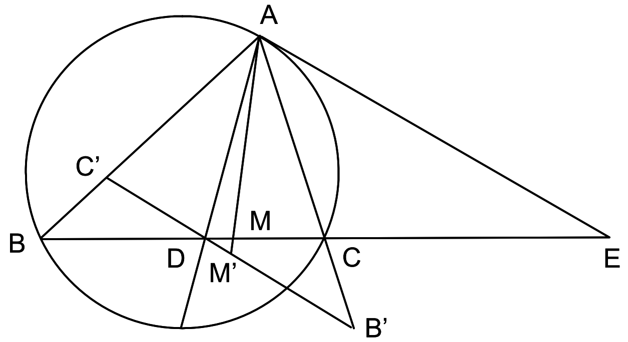
Solución:



Suponiendo resuelto el problema, sea $CL'M'$ la recta simétrica de AB respecto a M. El ángulo $\widehat{NML'}$ es recto por serlo el $\widehat{LMN}$, y $L'N$ es perpendicular a BC. Siendo M'' la intersección de OM con AC, hay que inscribir en el triángulo $M'M''C$, un triángulo rectángulo con su hipotenusa paralela a $M'M''$, siendo M el vértice opuesto. Para ello se traza $N''L''$, una paralela cualquiera a MM'. Se traza la circunferencia de centro O', punto medio de $N''L''$. Se une M con O', y donde esta recta corta a la citada circunferencia, será el vértice O'' del ángulo recto $\widehat{N''OL''}$. Desde M se trazan las paralelas MN y ML' a sus catetos. Se obtiene L, simétrico de L' respecto a M. El punto de intersección de LN y MM', es el centro O de la semicircunferencia pedida, cuyo radio es $OM = ON = OL$.

B 26- Demostrar que en un triángulo *ABC*, la simediana de $\widehat{A}$ y la tangente en *A* al círculo circunscrito, forman un haz armónico con los lados *AB* y *AC*.

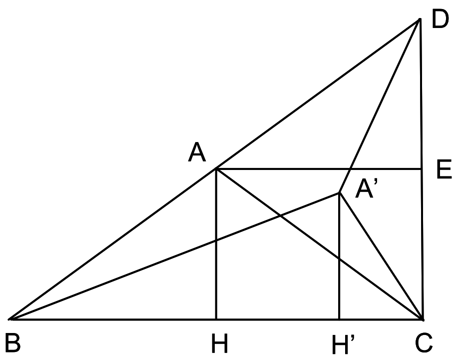
Solución:



Sea AM la simediana, y AE la tangente. El simétrico del ABC respecto de la bisectriz AD del ángulo $\widehat{BAC}$, es el triángulo $AB'C'$, coincidiendo la simediana AM con la mediana AM' del $AB'C'$. Al ser AE y BC antiparalelas del $\widehat{BAC}$, AE y $B'C'$ son paralelas, por lo que $B'C'$ queda dividido en dos partes iguales por AMM', luego el haz $\left(A, CBME\right)$ es armónico.

B 27- Demostrar gráficamente que de todos los triángulos de igual perímetro, el equilátero es el de área máxima.

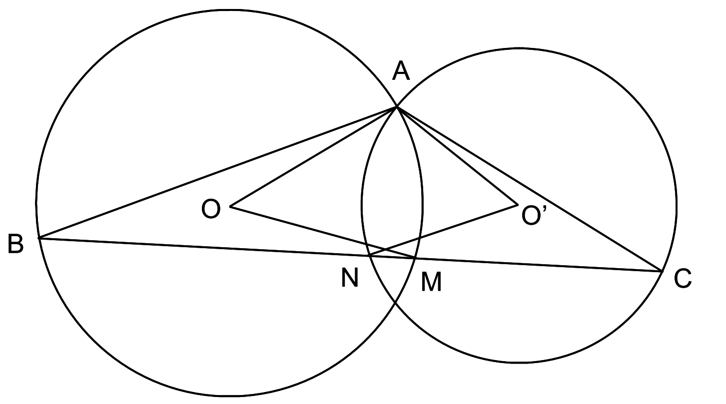
Solución:



Primero se demuestra que de todos los triángulos que tienen la misma base y el mismo perímetro, el isósceles es el de mayor superficie. Sean los triángulos ABC y $A'BC$ con la misma base BC y el mismo perímetro, pues $BA + AC = BA' + A'C$, siendo isósceles el primero ($AB = AC$). Se prolonga BA, de forma que $AD = AC$, formándose el triángulo BDC, cuyo ángulo en C es recto, pues siendo $AB = AD = AC$, se puede describir sobre BD una circunferencia con centro en A, pasando por B, C y D. Se deduce la siguiente desigualdad, $A'B + A'D > AB + AD$, es decir $A'B + A'D > AB + AC$. Y como $A'B + A'C = AB + BC$, se obtiene que $A'D > A'C$. Trazando AE, perpendicular sobre CD, siendo E el punto medio de CD, se deduce que A' está situado entre las paralelas AE y BC, por lo que $AH > A'H$, es decir que el isósceles tiene la mayor altura y por tanto la mayor superficie. Entre todos los triángulos de igual perímetro, el equilátero es el de área máxima porque es isósceles sobre cualquiera de los lados que se tome como base.

B 28- Dadas dos circunferencias O y O', que se cortan en A, inscribir un triángulo ABC, con el vértice B sobre la primera, y el C sobre la segunda, semejante a uno dado.

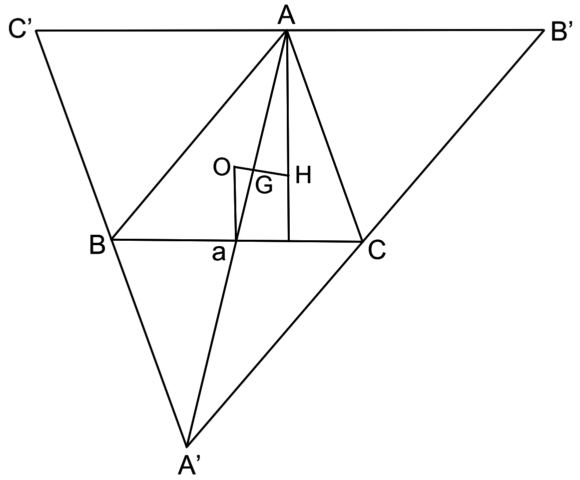
Solución:



Se lleva el ángulo central $\widehat{AOM}$ igual a dos veces el $\widehat{B}$, y el $\widehat{AO'N}$ igual a dos veces el $\widehat{C}$. La recta MN corta a O en B, y a O' en C, siendo ABC el triángulo pedido, pues $\widehat{ABC} = \dfrac{\widehat{AOM}}{2} = \widehat{B}$, y $\widehat{ACB} = \dfrac{\widehat{AO'N}}{2} = \widehat{C}$.

B 29- Probar que el circuncentro O, el ortocentro H, el baricentro G y el centro O_9 del círculo de los nueve puntos, de un triángulo, están en línea recta y forman una cuaterna armónica.

Solución:

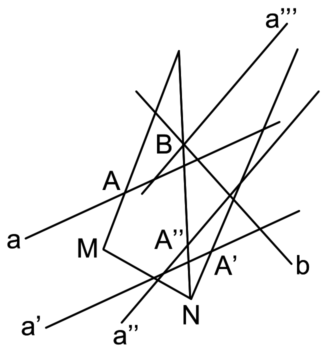


Sea el triángulo ABC. Se trazan por A, B y C, las paralelas a los lados opuestos, obteniéndose el triángulo $A'B'C'$. Los dos triángulos, ABC y $A'B'C'$, son semejantes con razón -2 y centro de semejanza G, baricentro de ambos. La recta $AGaA'$ es mediana de ABC y de $A'B'C'$, siendo a el punto medio de BC. La mediatriz Oa de BC es paralela a AH. Como H, ortocentro del ABC, es el circuncentro del $A'B'C'$, se tiene $AH = 2 \cdot Oa$. Luego $GO = \frac{GH}{2}$, y $OH = 3 \cdot OG$, estando O alineado con G y H. El círculo de los nueve puntos tiene su centro O_9 en el punto medio de OH, luego está alineado con OGH, y $O_9H = \frac{OH}{2} = \frac{3 \cdot OG}{2}$, de donde $O_9G = GH - HO_9 = \frac{GO}{2}$.

Por tanto $(OO_9GH) = \frac{OG}{OH} \div \frac{O_9G}{O_9H} = \frac{1}{3} \div \frac{-1}{3} = -1$.

B 30- Se dan dos rectas a y b, y dos puntos M y N fuera de ellas. Trazar dos rectas MA y NB, que forman entre sí un ángulo dado, conociendo la relación $\frac{MA}{NB} = k$, y sabiendo que A y B son puntos de a y b, respectivamente.

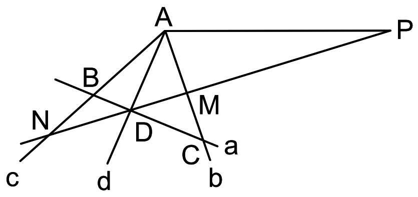
Solución:



Supuesto resuelto el problema, se traslada M a N, con lo que a pasa a a', y A a A'. Se gira NA' el ángulo $\widehat{BNA'}$, con lo que A' pasa a A'' y a' a a''. Como $NA'' = MA$, se tiene que $\frac{NA''}{NB} = k$. Luego se trata de encontrar en el ángulo formado por b y a'', dos puntos B y A'', cuya relación de distancias a N sea conocida, para lo cual se multiplica a'' por la relación, obteniéndose a''', que corta a b en B. Uniendo B con N se obtiene A''. Deshaciendo el giro y la traslación, el problema queda resuelto, al pasar NA'' a MA.

B 31- Por un punto dado P, trazar una recta que corte a tres rectas dadas, a, b y c, de tal manera que los tres puntos de intersección y el punto dado, formen una cuaterna armónica.

Solución:



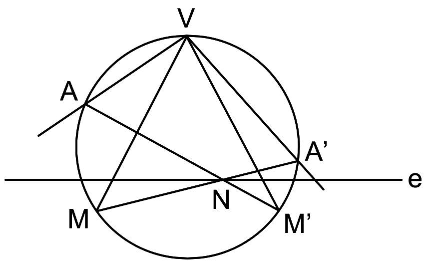
Las rectas b y c se unen en A. Se une A con P, y se halla d, rayo conjugado armónico de AP respecto de b y c, que corta a a en D. PD es la recta pedida, pues el haz $(A, PDMN) = -1$, estando D en a y d. Se obtienen otras dos soluciones, uniendo P con B y C.

B 32- Se da una proyectividad de bases superpuestas, definida por $A(1)$, $A'(2)$; $B(2)$, $B'(3)$; $C(3)$, $C'(4)$. Hallar los puntos dobles.

Solución: Analíticamente se tiene que $(1, 2, 3, x) = (2, 3, 4, y)$, es decir: $\frac{3-1}{x-1} \div \frac{3-2}{x-2} = \frac{4-2}{y-2} \div \frac{4-3}{y-3}$. De donde $y = x + 1$. Se trata de una traslación, estando los puntos dobles en el infinito.

B 33- Definida una proyectividad entre haces superpuestos, encontrar dos rayos homólogos que formen un ángulo dado.

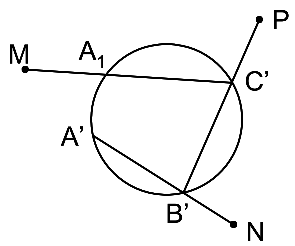
Solución:



Suponiendo el problema resuelto, sean VM y VM' los dos rayos homólogos que forman entre sí el ángulo dado. Se ha dibujado el eje de colineación e, dos rayos homólogos VA y VA', las rectas AM' y $A'M$ que se cortan en N, sobre e, y una circunferencia que pasa por V. El ángulo $\widehat{ANA'} = \frac{arco\ AVA' + arco\ MM'}{2}$ es conocido, luego el arco capaz de este ángulo sobre AA' corta al eje de colineación en N y en otro punto, que son las dos soluciones del problema.

B 34- Inscribir un triángulo en una circunferencia dada, de tal forma que cada lado pase por un punto dado.

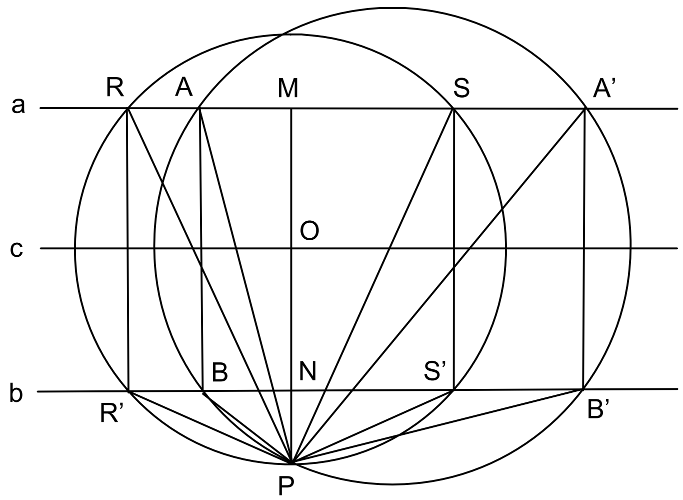
Solución:



El problema se resuelve por falsa posición en tres ensayos. Sean M, N y P los tres puntos dados. Se toma un punto A' en la circunferencia. La recta $A'N$ corta al círculo en B'. La recta $B'P$ corta al círculo en C'. La recta $C'M$ corta al círculo en A_1. Para que A_1fuera la solución, MA' y MA_1 habrían de coincidir. Entre A' y A_1 se ha establecido una proyectividad, pues la correspondencia es biunívoca, y se pasa de uno a otro mediante un número finito de proyecciones y secciones. Los puntos dobles de la proyectividad definida, determinan la solución.

B 35- Trazar entre dos rectas paralelas a y b, perpendicularmente a ellas, un segmento que sea visto desde un punto exterior dado P, bajo ángulo máximo.

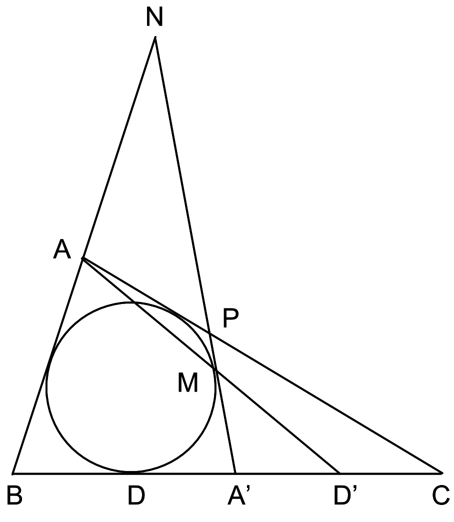
Solución:



Sea c la paralela media de las dos dadas, y sea AB una posición cualquiera del segmento definido en el enunciado. El círculo que pasa por A, B y P, corta a a y b en otros dos puntos A' y B'. Los ángulos $\widehat{APB}$ y $\widehat{A'PB'}$ son diferentes. Por tanto, para cada posición de AB se obtiene otra $A'B'$, de forma que ambas subtienden ángulos diferentes vistos desde P. Aplicando el teorema de Rolle, cuando estos dos ángulos sean iguales, se obtendrá un ángulo extremo, máximo o mínimo. En este caso, el ángulo mínimo es nulo, y viene dado por la posición PMN. El ángulo es máximo en los casos RR' y SS', simétricos respecto a MN y determinados por el círculo de centro O, punto de corte de MN con c, y que pasa por P.

B 36- Se da un triángulo ABC y se considera el círculo inscrito tangente a BC en D. Por un punto cualquiera A' de BC, se traza la tangente $A'M$ al citado círculo. La recta AM encuentra a BC en D'. Demostrar que $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{D'B}{D'C} = \frac{A'B^2}{A'C^2}$.

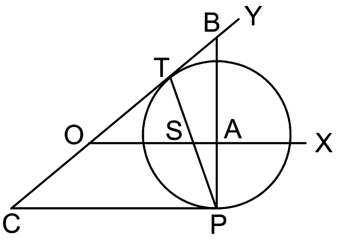
Solución:



Se cortan las cuatro tangentes BA, CA, BC y $A'M$, por las rectas $A'M$ y BC, teniéndose que $(NPA'M) = (BCDA')$, siendo N y P las intersecciones de $A'M$ con AB y AC, respectivamente. Proyectando la primera cuaterna desde A y cortando por BC, se tiene $(BCA'D') = (BCDA')$. Desarrollando: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{D'B}{D'C} = \frac{A'B^2}{A'C^2}$.

B 37- Se da un ángulo XOY y un punto P fuera del ángulo, por el que se traza una secante variable PAB, que encuentra a OX en A, y a OY en B. Trazar la secante PAB, de forma que el producto $PA \cdot PB$ sea mínimo.

Solución:

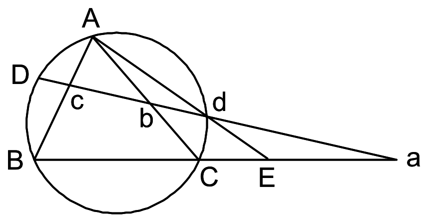


Considerando el producto $PA \cdot PB = m$, la inversa de OX con relación a P, es una circunferencia que pasa por P y por B, inverso de A. Esta circunferencia corta a OY en dos puntos. Cuando sea tangente a OY, el producto será mínimo. Por tanto ha de trazarse una circunferencia con centro en la perpendicular por P a OX, tangente en P a CP (paralela a OX por P), que será tangente a OY en T, siendo $CT = CP$. La recta PT es la solución.

Nota: El triángulo TOS es isósceles ($OT = OS$), por ser semejante al TCP. Por tanto otra forma de construir la solución, consiste en trazar por P la paralela CP a OX, que corta en C a OY. Se lleva CP sobre OY, obteniéndose T.

B 38- Se da un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Por un punto cualquiera D de esta, se traza una transversal que corta a los lados en a, b y c, y a la circunferencia en d. Hallar la relación que liga las dos cuaternas anarmónicas $(ABCD)$ y $(abcd)$.

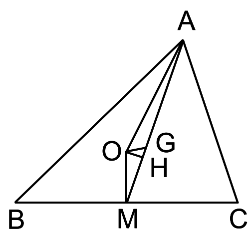
Solución:



Proyectando $(ABCD)$ desde d, y cortando por BC, se tiene: $(ABCD) = \left(d, ABCD\right) = (EBCa)$. Cortando el haz $\left(A, EBCa\right)$ por BC y por Dd, se tiene: $(EBCa) = (dcba)$. Luego $(ABCD) = (dcba) = (abcd)$.

B 39- Demostrar que en todo triángulo ABC, el cuadrado de la distancia del circuncentro O, al baricentro G, viene dado por la expresión $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$, siendo R el radio del círculo circunscrito y a, b y c, los lados del triángulo.

Solución:



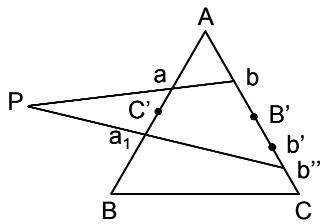
Siendo M el punto medio de BC, se tiene: $OM^2 = OG^2 + GM^2 - 2 \cdot GM \cdot GH$, $OA^2 = OG^2 + AG^2 + 2 \cdot AG \cdot GH$. Sumando el doble de la primera igualdad con la segunda: $2 \cdot OM^2 + OA^2 = 3 \cdot OG^2 + AG^2 + 2 \cdot GM^2 + 2 \cdot AG \cdot GH - 4 \cdot GM \cdot GH$. Siendo $OA = R$, $OM^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{4}$, $AG - 2 \cdot GM = 0$ y $AM^2 = m^2 = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$, se tiene:

$$3R^2 - \frac{a^2}{2} = 3 \cdot OG^2 + \left(\frac{2m}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{3}\right)^2 + 2 \cdot GH(AG - 2 \cdot GM) = 3 \cdot OG^2 + \frac{2m^2}{3}.$$

Luego, $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

B 40- Dado un triángulo *ABC* y un punto *P*, se pide trazar por *P* dos rectas tales que los puntos medios de los segmentos determinados por ellas sobre los lados *AB* y *AC*, coincidan con los puntos medios de dichos lados.

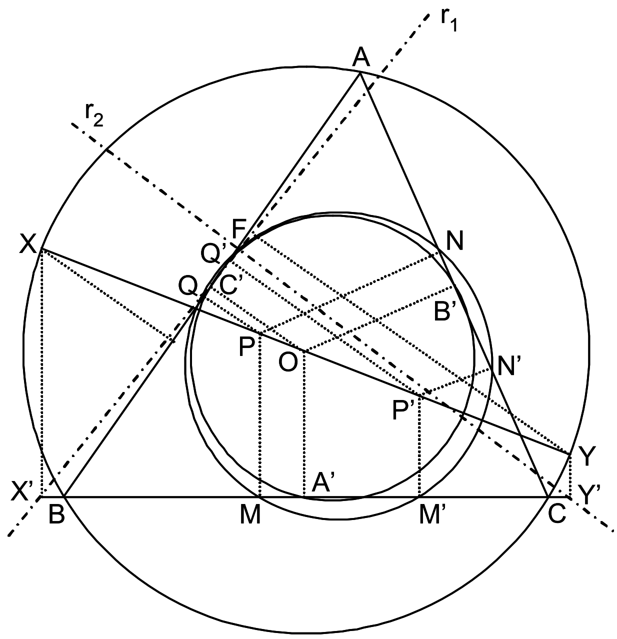
Solución:



Sean C' y B', los puntos medios de *AB* y *AC*, y sea a un punto sobre *AB*. Sea a_1 su simétrico respecto de C'. La recta Pa corta en b a *AC*, y Pa_1 en b''. Sea b' el simétrico de b respecto de B'. Se forman dos series proyectivas (b', b''), cuyos puntos dobles dan la solución. Existe proyectividad, ya que hay correspondencia biunívoca entre b' y b'', y se pasa de un punto al otro mediante un número finito de proyecciones y secciones.

B 41- Demostrar que si dos puntos *P* y P', isogonales conjugados respecto de un triángulo *ABC*, están sobre un mismo diámetro del círculo circunscrito *O*, el círculo circunscrito a los triángulos podarios, es tangente al círculo de los nueve puntos.

Solución:

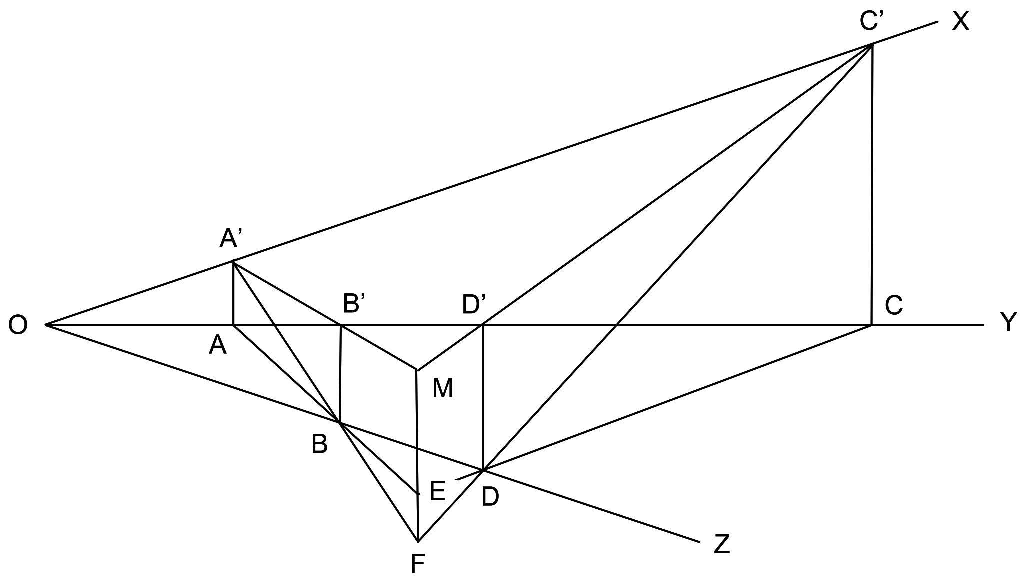


Sean A', B' y C' los puntos medios de *BC*, *AC* y *AB*. Sean *X* e *Y* los extremos del diámetro de *O*, que pasa por *P* y P', siendo *R* el radio del círculo circunscrito. Las proyecciones de *P* y P' sobre los lados del *ABC* son *M* y M' sobre *BC*, *N* y N' sobre *AC*, y *Q* y Q' sobre *AB*. Las rectas de Simson de *X* e *Y*, r_1 y r_2, son perpendiculares entre sí y se cortan sobre un punto *F* del círculo de los nueve puntos (ver el problema A 52). Se tiene $\frac{OX}{OP} = \frac{A'X'}{A'M}$, $\frac{OY}{OP'} = \frac{A'Y'}{A'M'}$ y sus análogas.

Multiplicando: $\frac{OX \cdot OY}{OP \cdot OP'} = \frac{R^2}{OP \cdot OP'} = \frac{A'X'^2}{A'M \cdot A'M'} = \frac{A'Y'^2}{A'M \cdot A'M'} = \frac{A'F^2}{A'M \cdot A'M'} =$
$= \frac{B'F^2}{B'N \cdot B'N'} = \frac{C'F^2}{C'Q \cdot C'Q'}$. Los denominadores son las potencias de A', B' y C' respecto del círculo podario, que pasa por los seis puntos *M*, M', *N*,... El círculo de los nueve puntos, sobre el que están A', B' y C', se confunde con el lugar geométrico de los puntos cuya razón de potencias respecto al círculo podario y al círculo *F*, es constante e igual a $\frac{R^2}{OP \cdot OP'}$ y tiene el mismo eje radical que estos dos. Como el círculo *F* se reduce a su centro situado en el círculo de los nueve puntos, este y el podario son tangentes entre sí.

B 42- Se dan tres rectas coplanarias OX, OY y OZ. En el ángulo $\widehat{YOZ}$ se han trazado dos transversales AB y CD que se cortan en E (A y C están sobre OY; B y D sobre OZ). Por los puntos A, C, B y D, se levantan perpendiculares a OY. Las correspondientes a A y C, cortan a OX en A' y C'. Las correspondientes a B y D, cortan a OY, en B' y D'. Las rectas $A'B'$ y $C'D'$, se cortan en M. Demostrar que la recta que une M con E es perpendicular a OY.

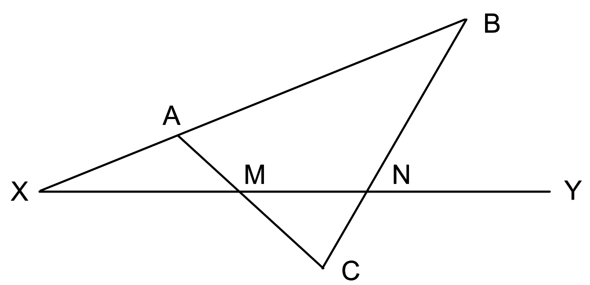
Solución:



Los triángulos $C'DC$ y $A'AB$ son homológicos, ya que sus lados se cortan en puntos de la misma recta EF. Como AA' es paralela a CC' y perpendicular a OY, el eje de homología ha de ser EF, perpendicular a OY y paralela a AA' y CC'. El eje de homología de $C'D'D$ y $A'B'B$ es MF, paralela a DD' y BB', y perpendicular a OY. Luego EF y MF son perpendiculares trazadas desde el punto F a una misma recta, por lo que ambas rectas coinciden en una sola recta MEF, perpendicular a OY.

B 43- Sobre una recta ilimitada XY, se mueve un segmento MN de longitud constante. Se dan dos puntos fijos A y B, fuera de la recta. Se trazan AM y BN, que se cortan en C. Estudiar las variaciones del ángulo $\widehat{ACB}$.

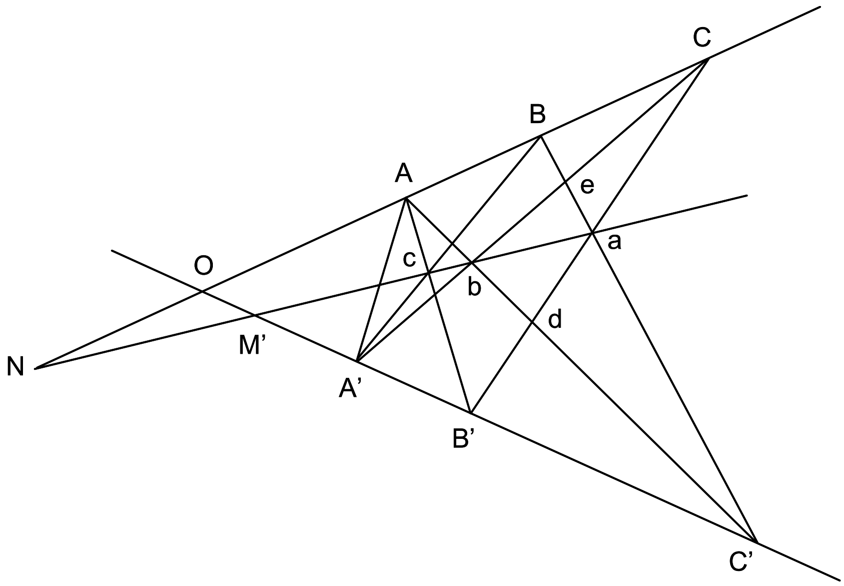
Solución:



Desplazando el segmento MN desde el infinito (a la izquierda del dibujo), el ángulo $\widehat{C}$ va aumentando desde el valor nulo hasta un cierto valor máximo, a partir del cual vuelve a disminuir, hasta anularse en el infinito (a la derecha del dibujo). El valor máximo se produce cuando el triángulo MCN es isósceles, es decir cuando la abscisa de C coincide con la del punto medio de MN.

B 44- Se dan tres puntos alineados A, B y C, y otros tres puntos A', B' y C' sobre una segunda recta. Las rectas BC' y CB' se cortan en a, las rectas CA' y AC' en b, las rectas AB' y $A'B$ en c. Demostrar que a, b y c están alineados.

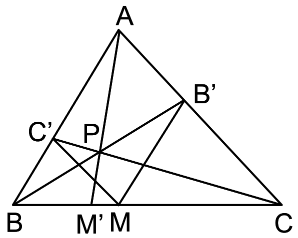
Solución:



La recta abc recibe el nombre de eje de colineación, y solo depende de la proyectividad y no del par de puntos elegidos como vértices de los haces. El punto de intersección O de las dos rectas puede considerarse como de las dos bases, en un caso el punto homólogo es N y en el otro caso es M'. Luego el eje de colineación pasa por los puntos original e imagen del punto O, común a las dos bases, por lo que es fijo Tomando como centros de proyección los puntos B y B', los rayos BC' y $B'C$ se cortan sobre el eje de colineación, por lo que a, b y c están alineados. Otra demostración es la siguiente: Se proyecta desde C' la cuaterna $(A'ABC)$ y se corta por CA' y por CB', obteniéndose respectivamente $(A'beC)$ y $(B'daC)$. Proyectando la primera desde A, y la segunda desde B, se tienen los haces $\left(B, A'beC\right)$ y $\left(A, B'daC\right)$ que tienen la misma razón doble y un rayo homólogo común (BC y AC), luego los otros pares de rayos homólogos se cortan en puntos alineados. Los puntos de corte son c, b y a.

B 45- Sobre la base BC de un triángulo ABC, se toma un punto cualquiera M, y se trazan las paralelas MB' y MC' a los lados AB y AC respectivamente, estando B' y C' sobre dichos lados. La recta que une A con P, punto de intersección de las cevianas BB' y CC', corta a BC en M'. Hallar el valor de la expresión $\frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{MC}{MB}$.

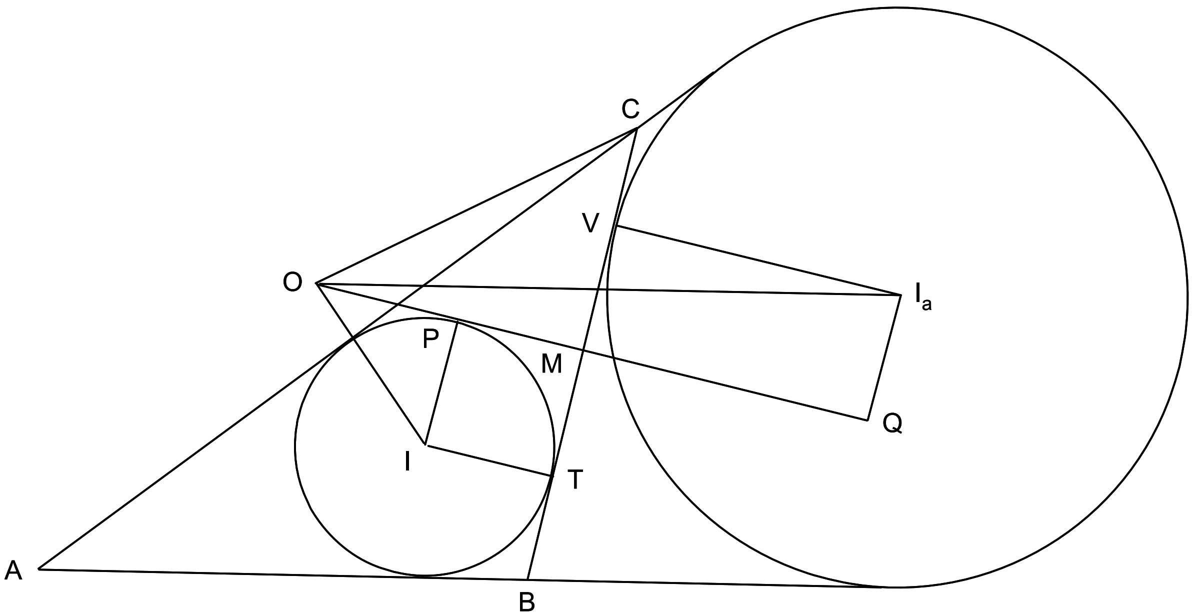
Solución:



Considerando las cevianas AM', BB' y CC', se tiene: $\frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1$. Por construcción $\frac{B'C}{B'A} = \frac{MC}{MB}$, y $\frac{C'A}{C'B} = \frac{MC}{MB}$. Luego $\frac{M'B}{M'C} = \frac{-MB^2}{MC^2}$. Por tanto $\frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{MC}{MB} = \frac{-MB}{MC}$

B 46- Demostrar que en todo triángulo la suma de los cuadrados de las distancias del centro del círculo circunscrito a los centros de los cuatro círculos inscrito y exinscritos, vale doce veces el cuadrado del radio del círculo circunscrito.

Solución:



Sea ABC el triángulo de perímetro $2p = a+b+c$; sea O el centro del círculo circunscrito de radio $R = OA = OB = OC$; sea I el centro del círculo inscrito de radio $r = IP = IT$; sea I_a el centro del círculo exinscrito en el ángulo $\widehat{A}$, de radio $r_a = QM = I_aV$; sea M la intersección de BC con OQ; y sean $d = IO$, $BT = p-b$, $MC = \frac{a}{2}$, $BV = p-c$ y $d_a = OI_a$.

Son fórmulas usuales: $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \dfrac{abc}{4S}$, siendo S el área del triángulo; $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{abc}{4pR}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $r_a = \dfrac{S}{p-a}$.

En el triángulo IOP, se tiene: $d^2 = IO^2 = \left(\frac{a}{2} - p + b\right)^2 + \left(r - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = R^2 - 2rR.$

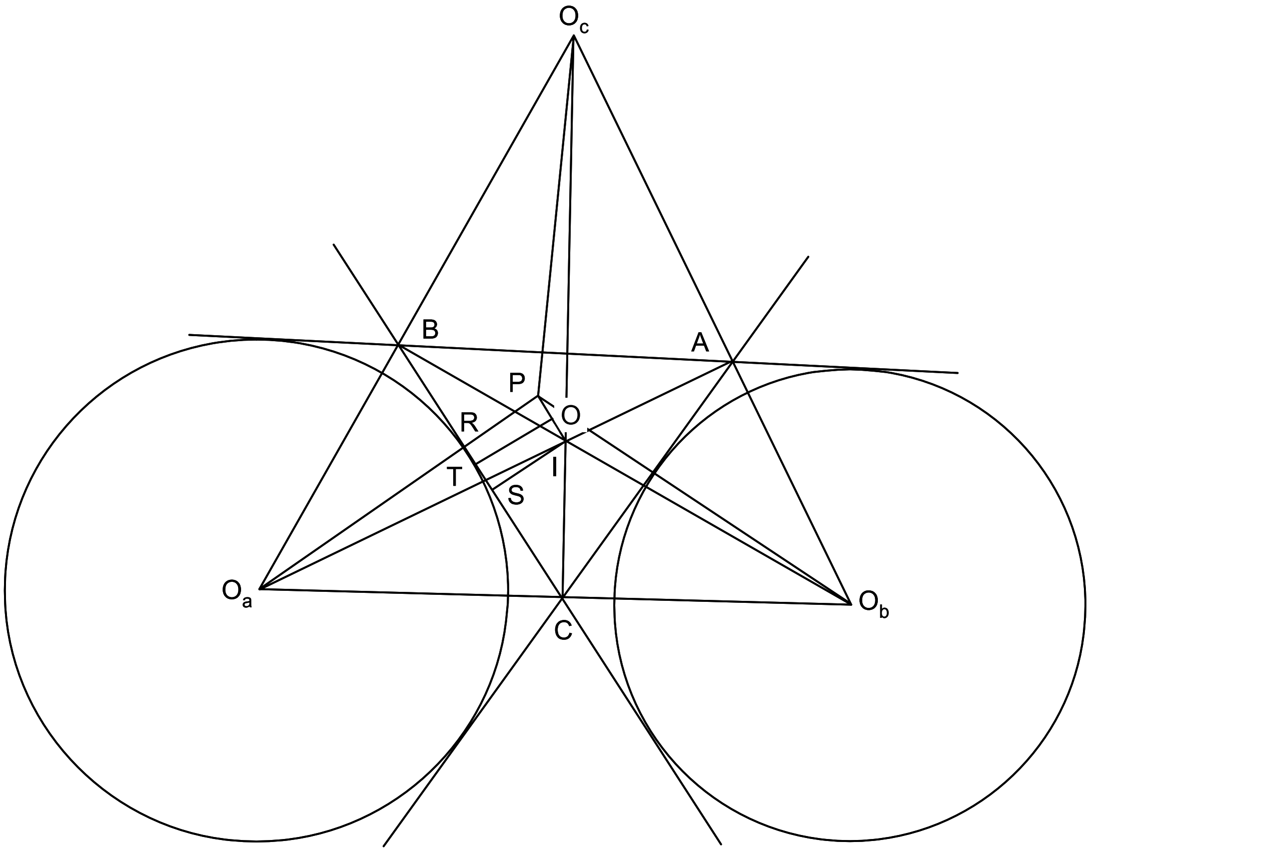
En el triángulo I_aOQ, se tiene: $d_a^2 = I_aO^2 = \left(p - c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(r_a + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 = R^2 + 2r_aR.$

Luego,

$$d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 4R^2 + 2R(r_a + r_b + r_c - r) = 4R^2 + 2RS\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) =$$
$$= 4R^2 + 2RS\frac{abc}{S^2} = 4R^2 + 8R^2 = 12R^2.$$

B 47- Se consideran los centros O_a, O_b y O_c de las circunferencias exinscritas en el triángulo ABC. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde dichos centros sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente, concurren, y que este punto de concurrencia es colineal con el incentro y el circuncentro. Hallar la relación de distancias existentes entre estos tres puntos.

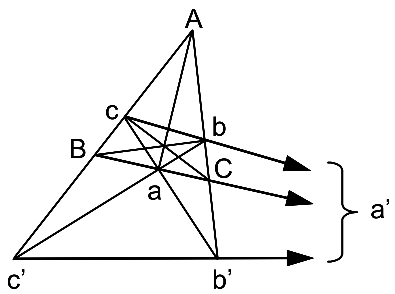
Solución:



El triángulo $O_aO_bO_c$ es semejante al ABC. Siendo P el centro del círculo circunscrito al triángulo $O_aO_bO_c$, O el del circunscrito al ABC, I el del inscrito al ABC, se tiene: $\widehat{AO_bP} = \widehat{AO_cP} = \frac{\widehat{A}}{2}$, $\widehat{BO_cP} = \widehat{BO_aP} = \frac{\widehat{B}}{2}$. Luego las tres perpendiculares enunciadas, coinciden en P. Siendo O_aA perpendicular a O_bO_c, I es el ortocentro de $O_aO_bO_c$. El punto medio T de BC, lo es también de RS, luego las perpendiculares por los puntos medios de los lados, se cortan en O, punto medio de PI, estando los tres puntos alineados y siendo $\frac{OP}{OI} = -1$.

B 48- Sean a, b y c, los pies de las alturas del triángulo ABC. Las rectas BC y bc se cortan en a', AC y ac en b', y AB y ab en c'. Demostrar que a', b' y c', están alineados y determinar la posición de dicha recta respecto a la que une el ortocentro H con el circuncentro O del triángulo ABC.

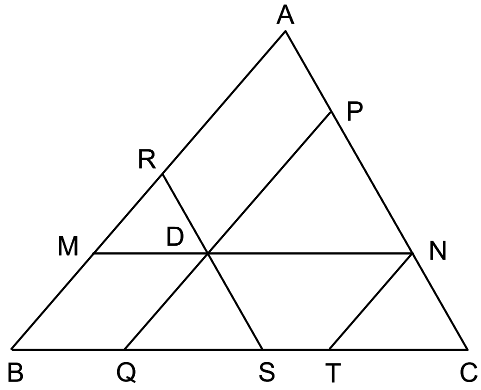
Solución:



$(BCaa') = -1$, $(ACbb') = -1$, $(ABcc') = -1$. Luego $\frac{aC}{aB} = \frac{-a'C}{a'B}$, $\frac{bA}{bC} = \frac{-b'A}{b'C}$, $\frac{cB}{cA} = \frac{-c'B}{c'A}$, $\frac{aC}{aB} \cdot \frac{bA}{bC} \cdot \frac{cB}{cA} = -1 = \frac{-a'C}{a'B} \cdot \frac{-b'A}{b'C} \cdot \frac{-c'B}{c'A}$, por lo que a', b' y c' están alineados. Se traza el círculo de los nueve puntos que pasa por a, b y c, cuyo centro es O_9. La recta que une el ortocentro H y el circuncentro O, pasa por O_9. La recta $a'b'c'$ es la polar de H respecto al círculo O_9, pues $(cbHa') = -1$. Luego la recta HO es perpendicular a la recta $a'b'c'$.

B 49- Determinar en el interior de un triángulo dado ABC, un punto D tal que las paralelas trazadas por él a los lados del triángulo y limitadas por estos, sean iguales.

Solución:



Las paralelas a los lados trazadas por D, delimitan tres triángulos semejantes al dado, con razones de semejanza m, n y p, de tal forma que $m = \frac{MN}{BC} = \frac{BQ+QS+ST}{a}$, $n = \frac{PQ}{AB} = \frac{QC}{a} = \frac{QS+ST+TC}{a}$, $p = \frac{RS}{AC} = \frac{BS}{a} = \frac{BQ+QS}{a}$. Luego $m+n+p = \frac{2BQ+3QS+2ST+TC}{a}$, y como $QS = TC$, $m+n+p = \frac{2a}{a} = 2$. En el punto buscado, $MN = PQ = RS$, luego $MN = am = bn = cp$, y por tanto $MN\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 2$, con lo que $MN = PQ = RS = \frac{2abc}{ab+bc+ca}$, quedando definido el punto D.

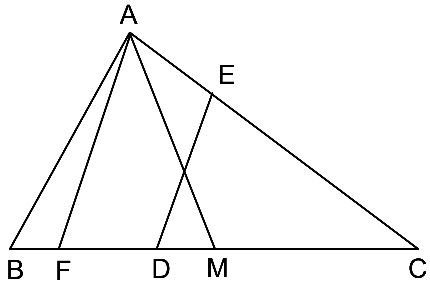
B 50- Se dan tres puntos en línea recta O, A y A_1. Sea A_2 el conjugado armónico de A_1 respecto a OA, A_3 el de A_2 respecto a OA_1,..., A_n el de A_{n-1} respecto a OA_{n-2}. Demostrar que el conjugado de A_1 respecto a OA_{n-1} coincide con el de A_n respecto a OA. Calcular el segmento OA_n en función de OA_1, OA y n.

Solución: Tomando como origen de las abscisas el punto O, sea a la abscisa de A, a_1 la de A_1, ..., a_n la de A_n. Por definición de conjugado armónico, se tiene: $\frac{2}{a} = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$, $\frac{2}{a_1} = \frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}$, $\frac{2}{a_2} = \frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}$, ..., $\frac{2}{a_{n-4}} = \frac{1}{a_{n-3}}+\frac{1}{a_{n-2}}$, $\frac{2}{a_{n-3}} = \frac{1}{a_{n-2}}+\frac{1}{a_{n-1}}$, $\frac{2}{a_{n-2}} = \frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}$. Sumando miembro a miembro las anteriores igualdades y simplificando, se tiene $\frac{2}{a}+\frac{1}{a_1} = \frac{2}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}$, es decir $\frac{2}{a}-\frac{1}{a_n} = \frac{2}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_1}$, luego queda demostrado que el conjugado armónico de A_n respecto a OA, es el mismo que el de A_1 respecto a OA_{n-1}. Considerando $U_n = \frac{1}{a_n}$, se tiene: $\frac{2}{a}+\frac{1}{a_1} = 2U_{n-1}+U_n = 2U_{n-2}+U_{n-1}$, es decir $U_n+U_{n-1}-2U_{n-2} = 0$, siendo la ecuación característica de esta recurrencia $x^2+x-2 = 0$, cuyas raíces son 1 y -2, luego $U_n = A\cdot 1^n + B(-2)^n = A+(-1)^nB\cdot 2^n$. Aplicando este resultado para $U_0 = \frac{1}{a}$, $U_1 = \frac{1}{a_1}$, $U_2 = \frac{2}{a}-\frac{1}{a_1}$, $U_3 = \frac{-2}{a}+\frac{3}{a_1}$ (valores obtenidos aplicando la ecuación de recurrencia anterior), se tiene $U_n = \frac{1}{a_n} = \frac{2+(-2)^n}{3a}+\frac{1-(-2)^n}{3a_1}$.

Luego, $a_n = \dfrac{1}{\frac{2+(-2)^n}{3a}+\frac{1-(-2)^n}{3a_1}} = \dfrac{3aa_1}{[1-(-2)^n]a+[2+(-2)^n]a_1}$.

B 51- Dado un triángulo *ABC*, dividirlo en dos partes equivalentes mediante una recta paralela a una dirección dada.

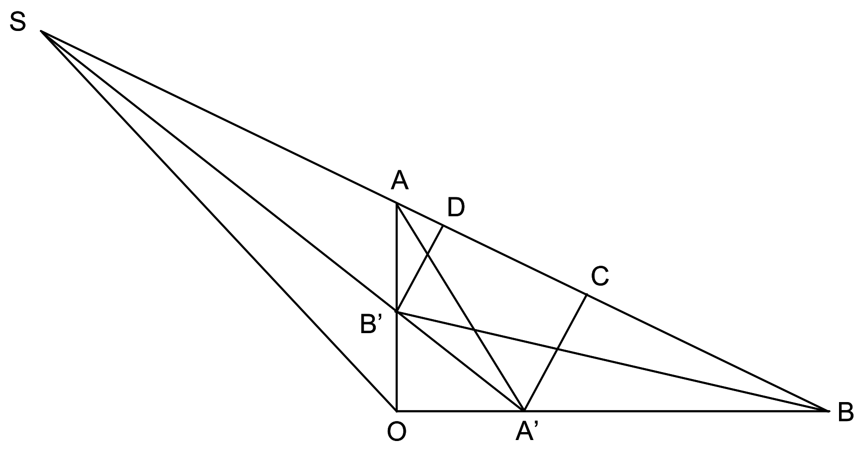
Solución:



Sea *DE* la recta buscada y *AM* la mediana correspondiente al lado *BC*. Los triángulos *AMC* y *DEC* tienen igual área, que es proporcional a los productos de los lados del ángulo común $\widehat{C}$. Luego $DC \cdot EC = AC \cdot MC$, $\frac{AC}{EC} = \frac{DC}{MC}$. Trazando por *A* la paralela *AF* a la dirección dada, se tiene $\frac{AC}{EC} = \frac{FC}{DC}$. Luego $\frac{DC}{MC} = \frac{FC}{DC}$, $DC^2 = MC \cdot FC$, por lo que *DC* es conocido.

B 52- Dado un triángulo *AOB*, rectángulo en *O*, y sean AA' y BB' las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ (A' y B' son los pies de las bisectrices sobre los lados opuestos). 1º) Demostrar que los círculos de centro A' y B' y que pasan por *O*, son tangentes a *AB*. 2º) Demostrar que las rectas *AB*, $A'B'$ y la bisectriz exterior de $\widehat{AOB}$, concurren en un punto *S*. 3º) Deducir de las propiedades anteriores, la construcción de un triángulo *AOB*, rectángulo en *O*, conociendo las distancias $OA' = a$ y $OB' = b$, y la del vértice *O* a los pies de las bisectrices interiores de los ángulos agudos. 4º) Suponiendo $a > b$, hallar la relación que debe existir entre *a* y *b*, para que el problema sea posible.

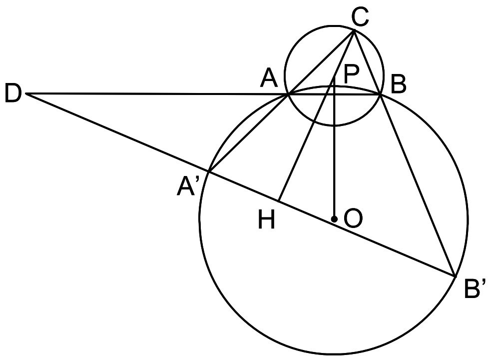
Solución:



1º) Considerando la bisectriz AA' y la perpendicular $A'C$ sobre *AB*, se tiene que *O*, *A*, A' y *C*, son concíclicos, y como $\widehat{OAA'} = \widehat{A'AC}$, los triángulos OAA' y $AA'C$ son iguales, por lo que $OA' = A'C$. Análogamente, $B'O = B'D$. 2º) El triángulo *AOB* y el formado por dos de sus bisectrices interiores y una exterior, son homológicos, luego los puntos de intersección A', B' y *S*, de lados homólogos están alineados. 3º) Se traza el triángulo $A'OB'$, rectángulo en *O*, y las circunferencias de centro A' y B', y radios $A'O$ y $B'O$. La tangente común *CD* coincide con *AB*, que pasa por *S*, donde concurren $A'B'$ y la bisectriz exterior *SO* de $\widehat{A'OB'}$. 4º) Si $a = 2b$, la tangente común *AB* es paralela a OA', luego el punto *B* está en el infinito. Para que el problema sea posible $b < a < 2b$.

B 53- Una serie de triángulos se caracterizan por tener un lado AB común e igual el ángulo $\widehat{C}$ opuesto a dicho lado. Se traza una circunferencia O, de radio R, y que pasa por A y B. En cada uno de los triángulos de la serie se prolongan los lados CA y CB que cortan a O en A' y B'. 1º) Demostrar que las alturas que corresponden al vértice C en cada uno de los triángulos $CA'B'$, pasan por un punto fijo. 2º) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las rectas $A'B'$.

Solución:

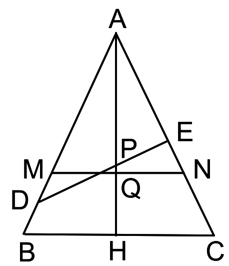


1º) Sea P el centro del círculo ABC (arco capaz de $\widehat{C}$ sobre AB), y sea H el pie de la altura del vértice C sobre $A'B'$. Siendo D la intersección de AB y $A'B'$, se tiene que el ángulo formado por HC y PO es igual a $\widehat{BDB'} = \widehat{ADA'}$; $\widehat{APB} = 2 \cdot \widehat{C}$; $\widehat{BAA'}$ y $\widehat{A'B'B}$, son suplementarios, pues subtienden la misma cuerda $A'B$ desde lados opuestos. Llamando α a $\widehat{C}$, y β a $\widehat{CAB}$, $\widehat{CBA} = \pi - \alpha - \beta$, $\widehat{ABB'} = \alpha + \beta$, $\widehat{BDB'} = \pi - \widehat{ABB'} - \widehat{BB'A'} = \pi - \alpha - 2\beta$. Luego el ángulo formado por HC y OP es igual a $\pi - \alpha - 2\beta$. El ángulo $\widehat{CPO} = \pi - \widehat{CPB} - \widehat{BPO}$. Ahora bien, $\widehat{BPO} = \alpha = \frac{1}{2}\widehat{APB}$, $\widehat{ABC} = \pi - \alpha - \beta$, $\widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABP} = \pi - \alpha - \beta - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\widehat{CPB} = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \beta) = 2\beta$.

Luego, $\widehat{CPO} = \pi - 2\beta - \alpha = \widehat{HC/OP}$, por lo que CH y CP forman el mismo ángulo con OP, es decir se superponen, y por tanto CH pasa por P, centro del círculo ABC. 2º) $\widehat{C} = \dfrac{arco\ AB - arco\ A'B'}{2}$, luego $arco\ A'B' = arco\ AB - 2 \cdot \widehat{C}$, es constante, por lo que la cuerda $A'B'$ es tangente a un círculo concéntrico con O, siendo el punto de tangencia el punto medio de $A'B'$. Por tanto, este círculo concéntrico es el lugar geométrico del punto medio de $A'B'$.

B 54- Se da un triángulo isósceles ABC y un punto P en la altura AH trazada sobre el lado diferente BC. Trazar por P una recta que no sea la altura y que divida al triángulo en dos partes iguales.

Solución:



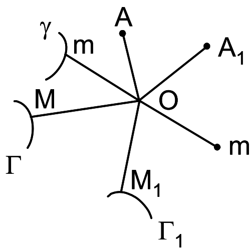
Sea P el punto sobre la altura AH y sea DPE la recta pedida. Se tiene $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD \cdot AE}{AB^2} = \dfrac{1}{2}$. Fijados tres puntos D_1, D_2 y D_3, sobre AB, se obtienen tres puntos homólogos E_1, E_2 y E_3, de forma que $AE_i = \dfrac{AB^2}{2 \cdot AD_i}$. Uniendo D_i con P se obtienen sobre AC los puntos E_i'. Los puntos dobles de E_i y E_i' dan la solución.

Nota: Siendo $AH = h$, $AP = d$, $BC = a$, se obtiene: $AE = \dfrac{d\sqrt{4h^2 + a^2}}{2\left(h + \sqrt{h^2 - 2d^2}\right)}$,

$AD = \dfrac{d\sqrt{4h^2+a^2}}{2\left(h-\sqrt{h^2-2d^2}\right)}$, o viceversa. En efecto $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD \cdot AE}{AB^2} = \dfrac{1}{2}$.

B 55- En un plano se dan dos puntos fijos O y A ($OA = a \neq 0$). A un punto cualquiera m del plano, se le hace corresponder el punto M situado en la semirrecta simétrica de OA respecto de Om, a la distancia OM del punto O, definida por $a \cdot OM = Om^2$ (M es asociado de m). ¿De cuántos m es asociado M en el plano? Si m describe una línea γ, M describe una línea Γ, asociada de γ. Si en la construcción de γ se reemplaza el punto A por otro fijo A_1 del plano ($OA_1 = a_1 \neq 0$) sin modificar el punto O ni la línea γ, la línea Γ queda reemplazada por la línea Γ_1. Demostrar que γ puede deducirse de Γ_1 por una semejanza directa en la que el centro, el ángulo y la razón son independientes de la línea γ.

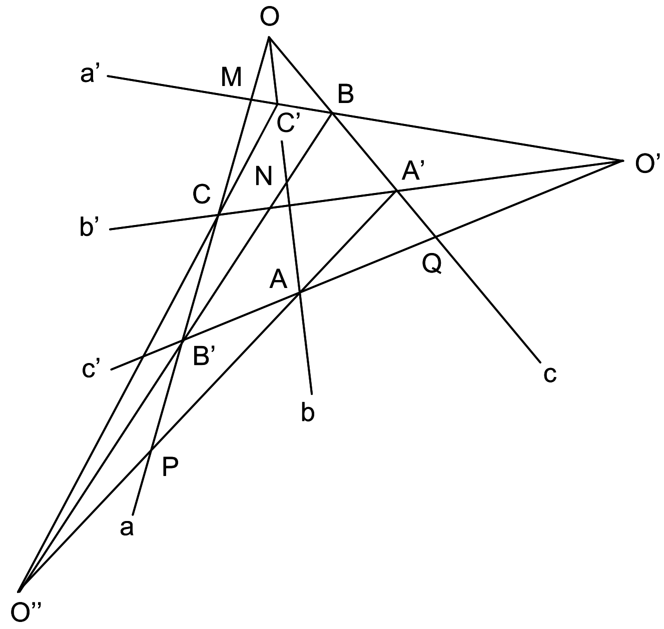
Solución:



El punto M es asociado de dos m (m y m'), uno cuya distancia Om es positiva y el segundo cuya distancia Om es negativa, es decir $Om = \pm\sqrt{a \cdot OM}$. El centro O es fijo, no se modifica por definición. Om está sobre la bisectriz de las semirrectas OA y OM, que coincide con la bisectriz de las semirrectas OA_1 y OM_1, luego el ángulo es independiente de γ. La razón $\dfrac{Om}{OM} = \pm\sqrt{\dfrac{a}{OM}}$, pasa a ser $\dfrac{Om}{OM_1} = \pm\sqrt{\dfrac{a_1}{OM_1}}$, independiente de γ.

B 56- Se dan dos haces, cada uno de ellos de tres rectas concurrentes: el primero a, b y c, el segundo a', b' y c'. Se consideran los puntos $A\left(b, c'\right)$, $A'\left(c\ b'\right)$, $B\left(c, a'\right)$, $B'\left(a\ c'\right)$, $C\left(a, b'\right)$, $C'\left(b\ a''\right)$. Demostrar que las rectas AA', BB' y CC', son concurrentes.

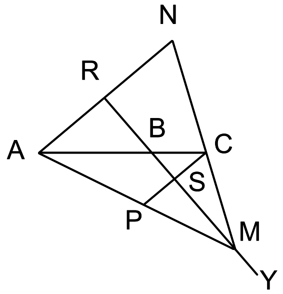
Solución:



Sean $M(a,a')$, $N(b,BB')$, $P(a,AA')$ y $Q(c,c')$. Se proyecta la cuaterna ($O'QAB'$) desde B y desde A'. El haz B se corta por el rayo b, dando la cuaterna ($C'OAN$). El haz A' se corta por el rayo a, dando la cuaterna ($COPB'$). Como ambas cuaternas tienen la misma razón y un punto doble (O), los otros pares de puntos homólogos (C' y C, A y P, N y B') están en rectas (CC', AA', BB') concurrentes en el punto O''.

B 57- Se consideran tres puntos alineados A, B y C, estando B entre C y A ($AB = b$, $BC = c$, $b > c$). Una recta variable BY gira alrededor de B. Sea N el simétrico de A, y P el simétrico de C, ambos respecto a BY. 1º) Hallar los lugares geométricos de N y P. 2º) Las rectas AP y CN se cortan en M. Determinar una homotecia de centro A que haga corresponder M con N,.y definir el lugar geométrico de M. 3º) Hallar la posición de M en la que el triángulo ACM sea de área máxima, calculando los valores de $\tan\widehat{BCM}$ y de $\tan\widehat{AMC}$. 4º) En este último caso, calcular los valores de los lados del citado triángulo, de $\tan\widehat{ACM}$ y $\tan\widehat{CAM}$, así como el radio R del círculo circunscrito.

Solución:

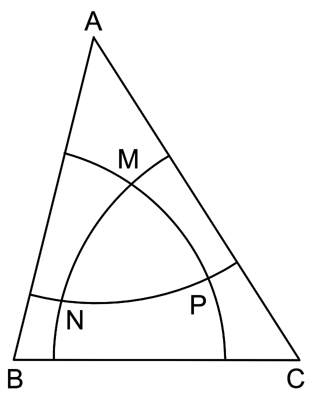


1º) Siendo $BN = BA$, el lugar geométrico de N es un círculo de centro B y radio b. Siendo $BP = BC$, el lugar geométrico de P es un círculo de centro B y radio c.

2º) $\frac{AM}{AP} = \frac{MN}{NC} = \frac{AN}{AN - PC} = \frac{AB}{AB - BC} = \frac{b}{b-c}$. Entre M y P existe una homotecia positiva de centro A y razón $\frac{b}{b-c}$. Entre M y N existe una homotecia negativa de centro C y razón $\frac{c}{b-c}$. Luego el lugar geométrico de M es un círculo homotético, bien del descrito por P (centro A y razón $\frac{b}{b-c}$), bien del descrito por N (centro C y razón $\frac{-c}{b-c}$). 3º) Siendo $\alpha = \widehat{BAR}$, $BR = b\sin\alpha$, $BS = c\sin\alpha$, $\frac{SM}{RS} = \frac{c}{b-c}$, $SM = \frac{c(b+c)}{b-c}\sin\alpha$, $SC = c\cos\alpha$, $BM = \frac{2bc}{b-c}\sin\alpha$, $S_{ACM} = \frac{bc(b+c)}{2(b-c)}\sin 2\alpha$. Esta área será máxima cuando $2\alpha = 90º$, $\alpha = 45º$ (o el simétrico respecto a ABC). Para este valor de α, se tiene: $BR = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, $BS = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $SM = \frac{c(b+c)\sqrt{2}}{2(b-c)}$, $BM = \frac{bc\sqrt{2}}{b-c}$, $SC = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $MC = \frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{b-c}$, $AM = \frac{b\sqrt{b^2+c^2}}{b-c}$, $\tan\widehat{CMB} = \frac{b-c}{b+c}$, $\tan\widehat{AMC} = \frac{b^2-c^2}{2bc}$, $\tan\widehat{BCM} = \frac{b}{c}$. 4º) $AM = \frac{b\sqrt{b^2+c^2}}{b-c}$, $CM = \frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{b-c}$, $\tan\widehat{ACM} = \frac{b}{c}$, $\tan\widehat{CAM} = \frac{c}{b}$, $R = \frac{MC}{2\sin\widehat{CAM}} = \frac{b^2+c^2}{2(b-c)}$.

B 58- Las longitudes de los lados de un triángulo ABC, son $AB = 14$, $AC = 16$, $BC = 12$. Desde los vértices como centros se trazan tres círculos cuyos radios son respectivamente 11, 9 y 10. Estos tres círculos tienen un área común MNP, cuya forma es la de un triángulo curvilíneo. Se pide la longitud de sus tres lados.

Solución:



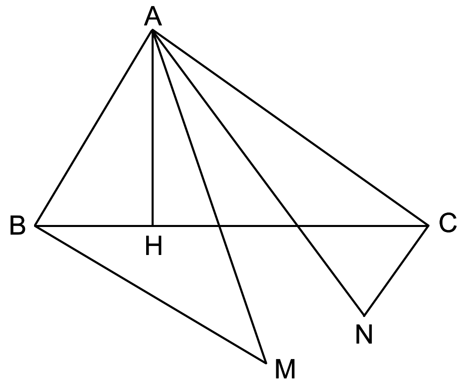
En el triángulo MBC, los lados son $MB = 9$, $MC = 10$, $BC = 12$. Se tiene:

$\tan\frac{\widehat{MBC}}{2} = \sqrt{\frac{(p-9)(p-12)}{p(p-10)}} = 0,5166$, $\widehat{MBC} = 54^{o}38'26''09 = 54^{o},64$, y de forma similar $\widehat{MCB} = 47^{o}13'17''19 = 47^{o},20$. Procediendo de igual forma en los triángulos ACN ($AC = 16$, $CN = 10$, $AN = 11$), ABP ($AP = 11$, $BP = 9$, $AB = 14$) y ABC ($AB = 14$, $AC = 16$, $BC = 12$), se obtienen: $\widehat{CAN} = 38^{o}06'01''07 = 38^{o},10$, $\widehat{ACN} = 42^{o}44'44''05 = 42^{o},75$, $\widehat{BAP} = 39^{o}58'59''24 = 39^{o},99$, $\widehat{ABP} = 51^{o}45'12''17 = 51^{o},75$, $\widehat{ABC} = 75^{o}31'20''96 = 75^{o},52$, $\widehat{ACB} = 57^{o}54'36''18 = 57^{o},91$, $\widehat{BAC} = 46^{o}34'02''87 = 46^{o},57$.

El ángulo $\widehat{MBP}$ mide $54^{o}38'26''09 + 51^{o}45'12''17 - 75^{o}31'20''96 = 30^{o}52'17''30 = 30^{o},87$. Luego el arco MP mide $\frac{2\pi 9 \cdot 30^{o},87}{360} = 4,85$. Procediendo de igual forma con los otros dos arcos, se tiene: arco $NP = \frac{2\pi 11 \cdot 31,52}{360} = 6,05$, arco $MN = \frac{2\pi 10 \cdot 32,05}{360} = 5,60$.

B 59- Sea AH la altura trazada desde el vértice A sobre el lado BC del triángulo ABC. Se traza por B la perpendicular BM al lado AB, de forma que $BM = CH$. Se traza por C la perpendicular CN al lado AC, de forma que $CN = BH$. Demostrar que los puntos M y N equidistan del vértice A.

Solución:



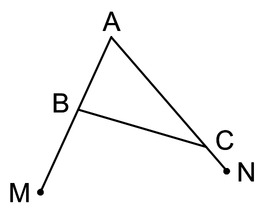
$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = c^2 + CH^2 = c^2 + b^2\cos^2 C = c^2 + b^2(1-\sin^2 C) = c^2 + b^2 - b^2\sin^2 C =$$
$$= c^2 + b^2 - c^2\sin^2 B = b^2 + c^2(1-\sin^2 B) = b^2 + c^2\cos^2 B = b^2 + BH^2 = b^2 + CN^2 = AN^2.$$

B 60- El lado BC de magnitud variable, de un triángulo ABC, está situado sobre una recta dada r. El ortocentro H de dicho triángulo, es fijo. Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC, pasan por un punto fijo.

Solución: Como los puntos simétricos del ortocentro de un triángulo, respecto a sus lados, están sobre la circunferencia circunscrita, el punto H', simétrico de H respecto de r, está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Por tanto, las circunferencias circunscritas pasan por el punto fijo H'.

B 61- Se prolongan los lados AB y AC de un triángulo dado ABC, por debajo de la base BC, de manera que la suma de las prolongaciones sea igual a esta base. Determinar en qué caso la recta que une los extremos de las prolongaciones, es mínima.

Solución:



En el triángulo AMN la suma de los dos lados AM y AN es fija, es decir $AM + AN = m + n = b + c + a = k$. $MN^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos A = (m+n)^2 - 2mn(1+\cos A) =$ $= k^2 - mnk'$. Luego, MN será mínimo cuando mn sea máximo, es decir, cuando $m = n$, o lo que es lo mismo, cuando el triángulo AMN sea isósceles $AM = AN$.

B 62- Calcular los tres lados de un triángulo ABC, conociendo las tres medianas: $m_a = 3$, $m_b = 5$ y $m_c = 6$.

Solución: Aplicando la fórmula $a^2 + b^2 = 2m_a^2 + \dfrac{c^2}{2}$ y sus análogas, se tiene sumándolas: $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{3} = \dfrac{280}{3}$. Luego, $\dfrac{280}{3} - a^2 = 18 + \dfrac{a^2}{2}$, $a = \dfrac{2\sqrt{113}}{3}$; $\dfrac{280}{3} - b^2 == 50 + \dfrac{b^2}{2}$, $b = \dfrac{2\sqrt{65}}{3}$; $\dfrac{280}{3} - c^2 = 72 + \dfrac{c^2}{2}$, $c = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

B 63- Una semirrecta está segmentada a partir de su origen O, en partes iguales por los infinitos puntos de división 0, 1, 2, ...n,... Desde un cierto punto exterior se proyectan estas divisiones sobre una segunda recta coplanaria, obteniéndose los puntos P_0, P_1, P_2,..., P_n. Se conocen las distancias $P_2P_5 = 18\,\text{mm}$ y $P_{15}P_{25} = 17\,\text{mm}$. La segunda recta está a su vez dividida en mm a partir de P_0. Hallar la longitud total del segmento P_0P_∞, así como el número de orden de cada uno de los puntos cuya proyección P_n coincide con un mm exacto de la recta P_hP_k.

Solución: Las cuaternas homólogas tienen la misma razón, luego: $(2, 5, 15, 25) = (0, 18, x, x + 17)$, de donde $x = 52$; $(0, 2, 15, 25) = (0, y, y + 52, 69 + y)$, $y = 16$; $(0, 2, 15, n) = (0, 16, 68, z)$, $z = 136$. Por tanto, la longitud total del segmento P_0P_∞ es de $136\,\text{mm}$.

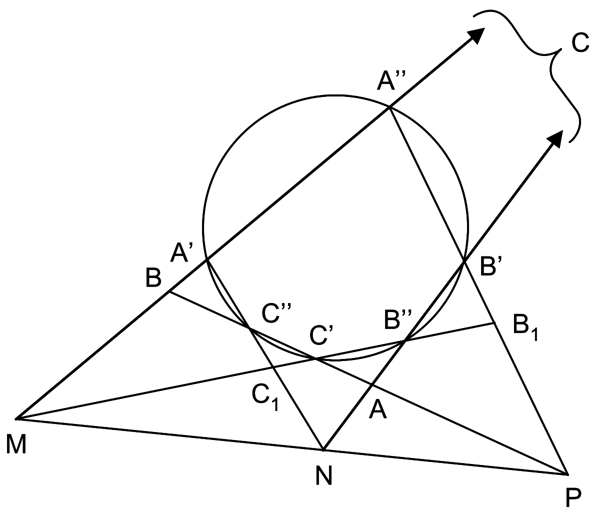
Como $(0, 1, 2, 15) = (0, t, 16, 68)$, $t = 8{,}5$; $(0, 1, 2, n) = (0, 8{,}5, 16, m)$, $m = \dfrac{136n}{n + 15}$, $n = \dfrac{15m}{136 - m} = \dfrac{2040}{136 - m} - 15$. Haciendo $\dot{\overline{136 - m}} = 2040$, se obtienen los siguientes valores para n (número de orden) y m (mm correspondientes):

n	2	5	9	15	19	25	36	45	53	70	87	105	121	155	189	240	325	393
m(mm)	16	34	51	68	76	85	96	102	106	112	116	119	121	124	126	128	130	131

n	495	665	1005	2025	∞
m(mm)	132	133	134	135	136

B 64- Los lados de un triángulo ABC, cortan a una circunferencia dada: el lado BC en los puntos A' y A'', el lado CA en B' y B'', y el lado AB en C' y C''. Demostrar que el triángulo $A_1B_1C_1$, que se forma al prolongar $A''B'$, $B''C'$ y $C''A'$, es homológico al dado.

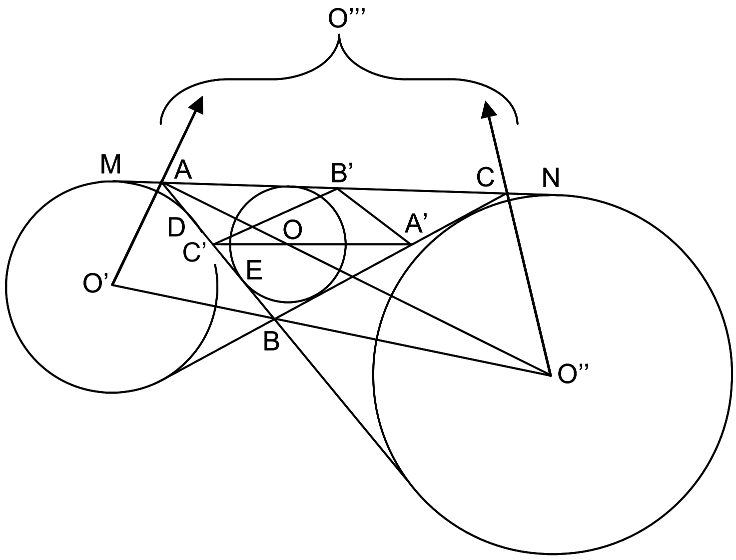
Solución:



En el exágono inscriptible $A'A''B'B''C'C''$. los pares de lados opuestos se cortan en tres puntos alineados, M, N y P (Pascal). En M coinciden BC y B_1C_1, en N, AC y A_1C_1, y en P, AB y A_1B_1. Luego los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son homológicos.

B 65- Se da un triángulo *ABC*, su círculo inscrito *O*, y los tres exinscritos O', O'' y O'''. Demostrar que los ejes radicales de estas cuatro circunferencias, tomadas de dos en dos, son las bisectrices de un triángulo relacionado con el dado.

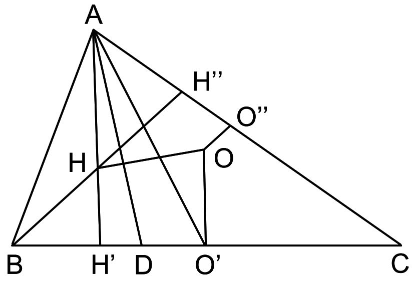
Solución:



El eje radical de *O* y O' pasa por C', punto medio de *AB*, pues $AD = BE = p - b$ (*D* y *E* son los puntos de tangencia de la tangente común a *O* y O'; *p* es el semiperímetro del *ABC*) y es perpendicular a OO' (paralelo a CO''), que es la bisectriz exterior de $\widehat{C'}$. El mismo razonamiento se aplica a OO'' y a OO'''. El eje radical de $O'O''$ pasa por el punto medio B', de la tangente común *MN* ($MC = NA = p$), es perpendicular a $O'O''$ y paralelo a la bisectriz *BO*. Ahora bien, la paralela desde B' a *BO*, es la bisectriz interior de $\widehat{B'}$. El mismo razonamiento se aplica a $O'O'''$ y a $O''O'''$. Luego los citados ejes radicales son bisectrices del triángulo formado por los puntos medios de los lados del triángulo dado.

B 66- Encontrar la relación que deben satisfacer los lados de un triángulo *ABC*, para que la simediana correspondiente a *A*, sea perpendicular a la recta que une el centro del círculo circunscrito con el ortocentro.

Solución:

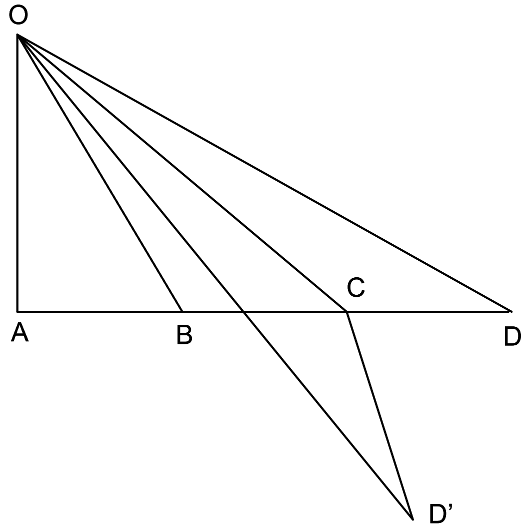


$AC^2 - AB^2 = 2BC \cdot O'H'$; $O'H' = \dfrac{b^2 - c^2}{2a}$. Análogamente $O'H' = \dfrac{a^2 - b^2}{2a}$. Sea *D* la intersección de la simediana con *BC*. Se tiene: $\dfrac{DB}{CD} = \dfrac{c^2}{b^2}$, de donde $\dfrac{CD}{b^2} = \dfrac{DB}{c^2} = \dfrac{CD + DB}{b^2 + c^2} = \dfrac{a}{b^2 + c^2}$. Para que *OH* sea ortogonal a *AD*, es necesario y suficiente que $\dfrac{CD}{O'H'} = \dfrac{CA}{O'H'}$.

Luego, $\dfrac{2ab^3}{(b^2 + c^2)(a^2 - c^2)} = \dfrac{2ab}{b^2 - c^2}$, o bien, $a^2 = \dfrac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2}$.

B 67- Se da un punto O exterior a una recta AD. Se baja la perpendicular OA a esta y las oblicuas OB, OC,..., siendo $AB = BC = CD =$... Demostrar que los ángulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$,... disminuyen.

Solución:



Sean OB, OC y OD tres oblicuas consecutivas cualesquiera. Sea OD' la simétrica de OD respecto a OC. Como $\widehat{OCD} > \widehat{OCA}$, CD', simétrica de CD, cae por debajo de DCB, y como $CD = CD' = CB$, CD' cae dentro del $\widehat{COB}$, luego $\widehat{COD} = \widehat{COD'} < \widehat{COB}$, como se quería demostrar.

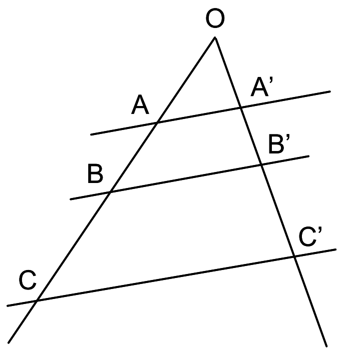
B 68- Se dan sobre una recta orientada, tres pares de puntos AA', BB' y CC', y sean a, b y c sus puntos medios. Demostrar que si P es un punto cualquiera de dicha recta, la función $F(P) = PA \cdot PA' \cdot bc + PB \cdot PB' \cdot ca + PC \cdot PC' \cdot ab$, es constante.

Solución: Trasladando P una distancia m cualquiera, se tiene:

$F(P+m) = (PA+m) \cdot (PA'+m) \cdot bc + (PB+m) \cdot (PB'+m) \cdot ca + (PC+m) \cdot (PC'+m) \cdot ab =$
$= F(P) + m[(PA+PA')bc + (PB+PB')ca + (PC+PC')ab] + m^2(bc+ca+ab)$. Ahora bien, dados varios puntos alineados A, B, C... N, se tiene que $AB + BC + \ldots + NA = 0$ (primer principio de Chasles), luego $bc + ca + ab = 0$. Por el segundo principio de Chasles se tiene que, dados los puntos alineados A, B, C y D, el valor de la expresión $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC$, es nulo, por tanto $Pa \cdot bc + Pb \cdot ca + Pc \cdot ab = 0$. Teniendo en cuenta lo anterior y como
$(PA+PA')bc + (PB+PB')ca + (PC+PC')ab = 2(Pa \cdot bc + Pb \cdot ca + Pc \cdot ab) = 0$,
se tiene que: $F(P+m) = F(P)$, luego $F(P)$ es constante.

B 69- Se dan dos semirrectas orientadas, que son cortadas por tres paralelas, en los puntos AA', BB' y CC'. Demostrar que la expresión $E = AA' \cdot BC + BB' \cdot CA + CC' \cdot AB$ es nula.

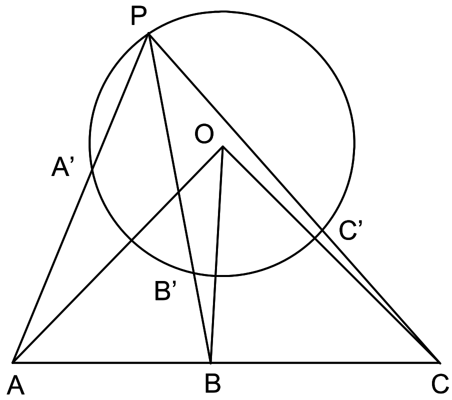
Solución:



Siendo $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{OA}{OB}$ y $\dfrac{AA'}{CC'} = \dfrac{OA}{OC}$, la expresión dada queda como sigue:
$E = AA' \cdot BC + \dfrac{OB}{OA} \cdot AA' \cdot CA + \dfrac{OC}{OA} \cdot AA' \cdot AB = \dfrac{AA'}{OA}(OA \cdot BC + OB \cdot CA + OC \cdot AB)$.
Como la expresión entre paréntesis es nula (segundo principio de Chasles), $E = 0$.

B 70- Se dan tres puntos A, B y C sobre un eje orientado, un círculo y un punto P sobre este. Las rectas PA, PB y PC cortan al círculo en A', B' y C', respectivamente. Demostrar que la expresión $E = BC \cdot PA \cdot PA' + CA \cdot PB \cdot PB' + AB \cdot PC \cdot PC'$, es nula.

Solución:



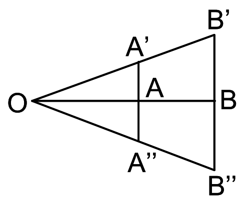
Se tiene que $PA \cdot PA' = AP(AP - AA')$, y como $AP \cdot AA'$ es la potencia de A con relación al círculo, cuyo centro es O y su radio R, $AP \cdot AA' = AO^2 - R^2$. Por tanto $PA \cdot PA' = AP^2 - AO^2 + R^2$. Luego:

$E = [BC \cdot AP^2 + CA \cdot BP^2 + AB \cdot CP^2] - [BC \cdot AO^2 + CA \cdot BO^2 + AB \cdot CO^2] + R^2[BC + CA + AB$

La relación de Stewart para varios puntos alineados, A, B, C... y un punto O fuera de la alineación, determina que $\sum(BC \cdot OA^2) = 0$. Luego las expresiones incluidas en los dos primeros corchetes, son nulas, y la incluida en el tercer corchete también lo es (primer principio de Chasles). Por todo ello, $E = 0$.

B 71- Demostrar que si está definida en el plano una congruencia inversa, esta tiene una recta doble respecto de la cual forman ángulos iguales las rectas homólogas.

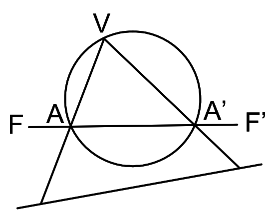
Solución:



La congruencia es una semejanza de razón la unidad. Una congruencia inversa es, por tanto, una simetría con relación a un eje. Todos los puntos del eje son homólogos de sí mismos, es decir que el eje es una recta doble de infinitos puntos dobles (la recta impropia también es doble). Luego $AA' = AA''$, $BB' = BB''$. Las rectas $A'B'$ y $A''B''$ se cortan en O sobre el eje OAB. Los triángulos $OB'B$ y $OB''B$ son iguales, por tanto $\widehat{A'OA} = \widehat{A''OA}$, con lo que queda demostrado.

B 72- Dadas dos involuciones sobre una recta, hallar los pares de puntos conjugados en ambas involuciones.

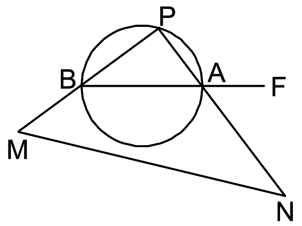
Solución:



Proyectando las involuciones desde un punto V y cortando por un círculo que pase por V, sean F y F' los correspondientes puntos de Frégier. La recta FF' corta al círculo en A y A'. Los rayos VA y VA' definen los elementos conjugados comunes.. Si una de las involuciones, o las dos, son elípticas, estos rayos son siempre reales. Si son hiperbólicas, pueden ser reales, imaginarios o estar confundidos. En este último caso tienen en común un rayo doble.

B 73- Se da una involución sobre una recta y un punto P exterior a ella. Hallar un par de puntos conjugados que se vean desde P bajo un ángulo de 90º.

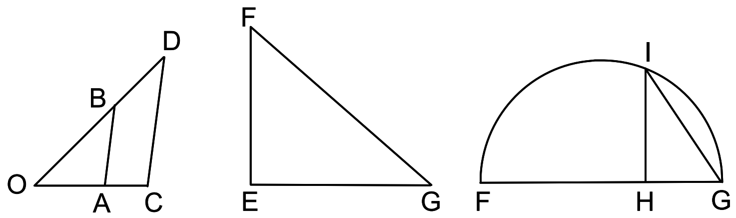
Solución:



Se proyecta la involución desde P, y se corta por un círculo que pase por P, obteniéndose el punto F de Frégier de la involución. Uniendo F con el centro del círculo se obtienen los puntos A y B Los rayos PA y PB cortan a la base en los puntos pedidos M y N.

B 74- Construir la fórmula $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$, detallando gráficamente los distintos pasos a dar

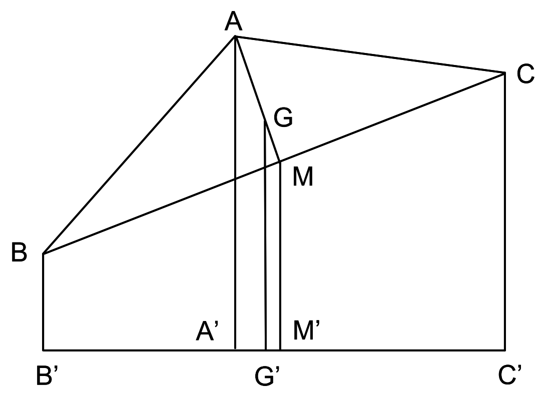
Solución:



En la primera figura, $OA = 1$, $OB = OC = a$, $OD = a^2$ (de forma similar se obtiene b^2). En la segunda figura $EF = a^2$, $EG = b^2$, $FG = \sqrt{a^4 + b^4}$. En la tercera figura se lleva FG como diámetro del semicírculo y $GH = 1$, obteniéndose $GI = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$, pues $GI^2 = FG \cdot GH$.

B 75- En todo triángulo ABC, siendo G su baricentro, y XY una recta que no lo corta, se verifica que $AA' + BB' + CC' = 3GG'$, siendo A', B', C' y G', las proyecciones de A, B, C y G sobre XY.

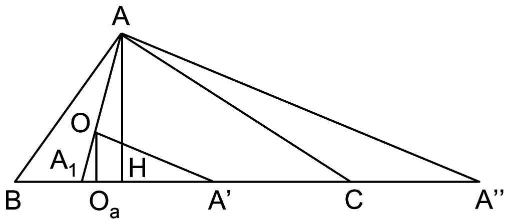
Solución:



Siendo M el punto medio de BC, se tiene que $2 \cdot MM' = BB' + CC'$. Además $\dfrac{AA' - GG'}{GG' - MM'} = 2$. Luego $3 \cdot GG' = AA' + 2 \cdot MM' = AA' + BB' + CC'$.

B 76- Se da un triángulo ABC, un punto O en su interior, y tres puntos A', B' y C' situados respectivamente sobre BC, CA y AB. Sean AA'', BB'' y CC'', las paralelas a OA', OB' y OC', limitadas por los lados del triángulo. Demostrar que $E = \dfrac{OA'}{AA''} + \dfrac{OB'}{BB''} + \dfrac{OC'}{CC''} = 1$.

Solución:

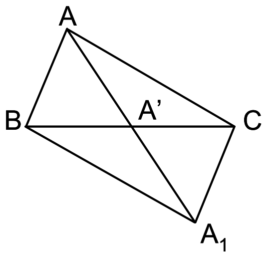


Sea A_1, la intersección de AO con BC; O_a, la proyección de O sobre BC; S, el área del ABC; S_a, el área del OBC; $S = S_a + S_b + S_c$. Se tiene $\dfrac{OA'}{AA''} = \dfrac{OA_1}{AA_1} = \dfrac{OO_a}{AH} = \dfrac{OO_a}{h_a} = \dfrac{OO_a \cdot a}{a \cdot h_a} = \dfrac{2S_a}{2S}$.

Luego $E = \dfrac{S_a + S_b + S_c}{S} = \dfrac{S}{S} = 1$.

B 77- En un triángulo ABC se traza la mediana AA'. Demostrar que $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AA' < \dfrac{AB + AC}{2}$.

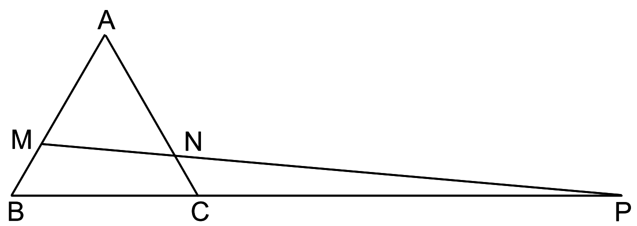
Solución:



$AC < AA' + A'C$, luego $AA' > AC - A'C$. Además $AA' > AB - A'B$. Sumando estas dos últimas desigualdades, se tiene: $2 \cdot AA' > AC + AB - BC$, es decir $AA' > \dfrac{AC + AB - BC}{2}$. Siendo A_1 el simétrico de A respecto a A', se tiene: $AA_1 = 2 \cdot AA' < AB + AC$. Luego $AA' < \dfrac{AB + AC}{2}$.

B 78- Sea un triángulo equilátero ABC, de lado a. Trazar una recta que corte en M al lado AB, en N al lado AC, y en P a la prolongación del lado BC, de tal manera que las áreas de los triángulos AMN, CNP y del cuadrilátero $BCMN$, sean equivalentes. Suponiendo que el triángulo está inscrito en un círculo de radio 1, calcular MN y NP.

Solución:



Siendo $AM = x$, $MB = a - x$, $S_{AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} x \cdot AN = \dfrac{1}{2} S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$, $AN = \dfrac{a^2}{2x}$. Llamando $CP = y$, se tiene: $\dfrac{y + a}{y} \cdot \dfrac{a - \dfrac{a^2}{2x}}{\dfrac{a^2}{2x}} \cdot \dfrac{x}{a - x} = 1$. De donde $y = \dfrac{ax(a - 2x)}{2x^2 - a^2}$. Como $S_{NCP} = S_{AMN}$, se tiene:

$\dfrac{\sqrt{3}}{4} y \dfrac{2ax - a^2}{2x} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$, $x = AM = \dfrac{2a}{3}$, $y = CP = 2a$, $AN = \dfrac{3a}{4}$.

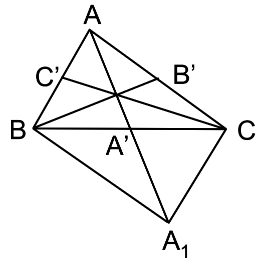
$NP^2 = NC^2 + CP^2 - 2 \cdot NC \cdot CP \cdot \cos 120º = \dfrac{a^2\sqrt{73}}{16}$, $NP = \dfrac{a\sqrt{73}}{4}$.

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos 60º = \dfrac{a^2\sqrt{73}}{16 \cdot 9}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{73}}{12}$. Para $R = 1$, $a = \sqrt{3}$,

$MN = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{73}}{12} = 1,23322$, $NP = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{73}}{4} = 3 \cdot MN = 3,69966$.

B 79- Demostrar que la suma de las medianas de un triángulo es mayor que la mitad de su perímetro y menor que este.

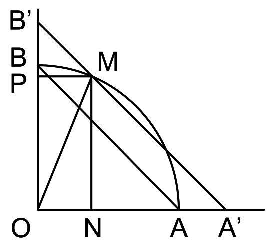
Solución:



$b < m_a + \dfrac{a}{2}$, $c < m_a + \dfrac{a}{2}$. Sumando: $b + c < 2m_a + a$. Análogamente, $a + c < 2m_b + b$ y $a + b < 2m_c + c$. Sumando las tres desigualdades: $a + b + c < 2(m_a + m_b + m_c)$. Por otra parte: $c + b > 2m_a$. Sumando esta desigualdad con sus dos análogas, se tiene: $a + b + c > m_a + m_b + m_c$. Luego llamando $2p = a + b + c$, se ha demostrado que $p < m_a + m_b + m_c < 2p$.

B 80- Se considera un cuadrante de círculo AOB. Por un punto M del arco, se traza una paralela $A'B'$ a la cuerda AB, que corta a OA en A', y a OB en B'. Demostrar que $MA'^2 + MB'^2 = AB^2$.

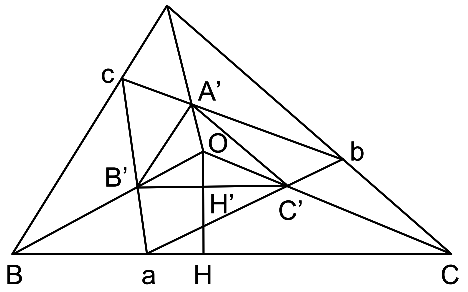
Solución:



Sea $OM = OA = OB = R$. Se tiene:
$MA'^2 + MB'^2 = MN^2 + NA'^2 + MP^2 + B'P^2 = MN^2 + MN^2 + MP^2 + MP^2 = 2R^2 = AB^2$.

B 81- Se consideran dos triángulos ABC y $A'B'C'$, homotéticos directos, conteniendo el mayor en su interior al menor. Demostrar que el área de un tercer triángulo abc, inscrito en el ABC y circunscrito al $A'B'C'$, es media proporcional de las áreas de los dos triángulos dados.

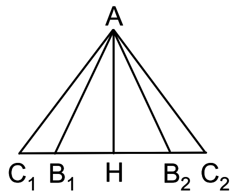
Solución:



Hay que demostrar que $S_{abc}^2 = S_{ABC} \cdot S_{A'B'C'}$, o bien, siendo $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{A'B'C}$, que $S_{abc} = k \cdot S_{A'B'C'}$. Sea $OH'H$ la perpendicular desde el centro de homotecia O, sobre los lados paralelos $B'C'$ y BC, siendo $OH = k \cdot OH'$. Se tiene que $S_{B'C'a} = \dfrac{1}{2} \cdot B'C' \cdot H'H = \dfrac{1}{2} \cdot B'C' \cdot OH' \cdot (k-1)$, y $S_{OB'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot B'C' \cdot OH'$. Luego $S_{B'C'a} = (k-1) \cdot S_{OB'C'}$. Procediendo de la misma forma con los triángulos $bA'C'$ y $cA'B'$, y sumando las tres igualdades resultantes, se tiene que $S_{B'C'a} + S_{C'A'b} + S_{A'B'c} = (k-1) \cdot S_{A'B'C'}$, es decir $S_{abc} - S_{A'B'C'} = (k-1) \cdot S_{A'B'C'}$. Por tanto $S_{abc} = k \cdot S_{A'B'C'}$, con lo que queda demostrado.

B 82- Si tres números verifican la relación $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, hay dos triángulos de los que dos lados miden b y c, y la altura correspondiente al tercer lado mide h.

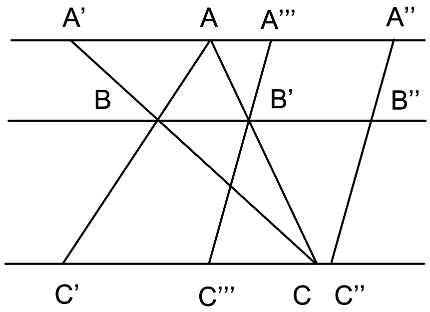
Solución:



Para que se verifique la igualdad dada, b y c, han de ser cada uno de ellos, mayores que h. Por tanto se traza AH perpendicular a BC, siendo $AH = h$. Con centro en A, se lleva $AB_1 = AB_2 = c$ y $AC_1 = AC_2 = b$, obteniéndose los dos triángulos AC_1B_2 y AC_1B_1 (y sus dos simétricos AC_2B_1 y AC_2B_2).

B 83- Tres paralelas trazadas por los vértices de un triángulo ABC, cortan a los lados opuestos en A', B' y C', y a una transversal cualquiera en A'', B'' y C''. Demostrar que se cumple la expresión $E = \frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} = 1$.

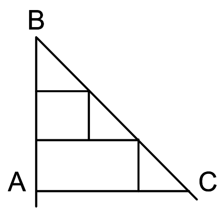
Solución:



Si se traslada la transversal paralelamente a sí misma, la relación no varía. En efecto, se traslada $A''B''C''$ hasta ocupar la posición $A'''B'C'''$, en la que coinciden los puntos B' y B'''. Luego llamando m a la distancia $B'B''$, se tiene:
$E(m) = \frac{AA''-m}{AA'} + \frac{BB''-m}{BB'} + \frac{CC''-m}{CC'} = E - m\left(\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'}\right)$. Ahora bien, como $\frac{AA'}{AC} = \frac{-BB'}{B'C}$, $\frac{CC'}{AC} = \frac{-BB'}{AB'}$, se tiene que: $\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} =$
$= \frac{B'C}{-BB' \cdot AC} + \frac{1}{BB'} + \frac{AB'}{-B'B \cdot AC} = \frac{1}{BB'}\left(-\frac{B'C+AB'}{AC} + 1\right) = \frac{1}{BB'}\left(1 - \frac{AC}{AC}\right) = 0.$
Demostrado que al trasladar la transversal paralelamente a sí misma, el valor de E no varía, se traslada la transversal a B', teniéndose $E = \frac{AA'''}{AA'} + 1 + \frac{CC'''}{CC'}$. Como $\frac{AA'''}{AA'} = -\frac{CC'''}{CC'}$, $E = 1$.

B 84- Se da un triángulo ABC, rectángulo en A e isósceles. Se divide AB en n partes iguales, trazándose por estos puntos las paralelas a AC. Calcular las áreas en que ABC ha sido dividido.

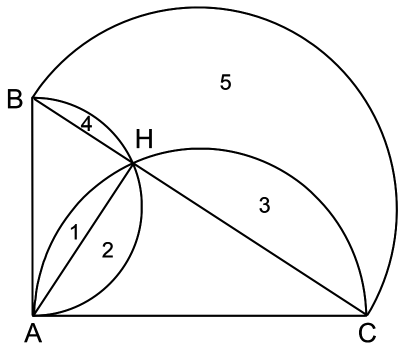
Solución:



El área de la primera faja es S_1. La de la segunda faja es $S_1 + 2 \cdot S_1 = 3 \cdot S_1$. La de la tercera faja es $S_1 + 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_1 = 5 \cdot S_1$. La de la faja nº k es $(2k-1)S_1$. Luego $S_1(1+3+5+\ldots+2n-1) = S_{ABC}$; $S_1 = \frac{S_{ABC}}{n^2}$. El área de la faja nº k es $(2k-1)\frac{S_{ABC}}{n^2}$.

B 85- Se da un triángulo ABC rectángulo en A. Se traza exteriormente al triángulo, el semicírculo de diámetro BC, e interiormente los semicírculos de diámetros AB y AC. Demostrar que el área de la parte común de estos dos últimos, aumentada en el área del triángulo, es igual al área de la parte del primer semicírculo, exterior a los otros dos semicírculos.

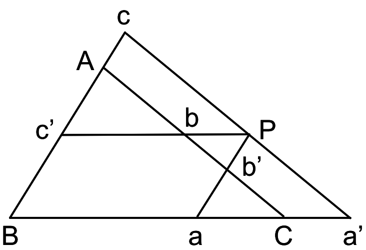
Solución:



$S_4+S_2+S_{ABH}=\frac{1}{2}\pi\frac{c^2}{4}$, $S_1+S_3+S_{ACH}=\frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4}$, $S_5=\frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4}-S_3-S_4=\frac{1}{2}\pi\frac{b^2+c^2}{4}-$
$-\left(\frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4}-S_1-S_{ACH}\right)-\left(\frac{1}{2}\pi\frac{c^2}{4}-S_2-S_{ABH}\right)=S_1+S_2+S_{ACH}+S_{ABH}=S_1+S_2+S_{ABC}$.

B 86- Por un punto P del plano de un triángulo ABC, se trazan las paralelas bc' a BC, ca' a AC, ab' a AB. Estas paralelas determinan sobre los lados del triángulo, tres segmentos aa', bb', cc'. Demostrar las cuatro igualdades siguientes: $Pa\cdot Pb\cdot Pc=-Pa'\cdot Pb'\cdot Pc'$; $\frac{aa'}{BC}+\frac{bb'}{CA}+\frac{cc'}{AB}=1$; $\frac{Pa}{AB}+\frac{Pb}{BC}+\frac{Pc}{CA}=1$; $\frac{Pa'}{AC}+\frac{Pb'}{BA}+\frac{Pc'}{CB}=1$.

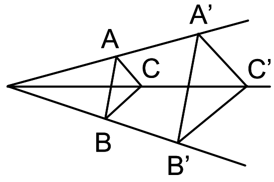
Solución:



En los distintos triángulos semejantes formados, se obtienen los siguientes conjuntos de igualdades: $\frac{Pa'}{AC}=\frac{Pa}{AB}=\frac{aa'}{BC}$; $\frac{Pb'}{BA}=\frac{Pb}{BC}=\frac{bb'}{CA}$; $\frac{Pc'}{CB}=\frac{Pc}{CA}=\frac{cc'}{AB}$. Multiplicando los primeros y segundos miembros de dichos conjuntos, se tiene: $\frac{Pa'\cdot Pb'\cdot Pc'}{AC\cdot BA\cdot CB}=\frac{Pa\cdot Pb\cdot Pc}{AB\cdot BC\cdot CA}$. Luego $Pa\cdot Pb\cdot Pc=-Pa'\cdot Pb'\cdot Pc'$, que es la demostración de la primera igualdad. Sumando miembro a miembro los tres conjuntos, se tiene:
$\frac{Pa'}{AC}+\frac{Pb'}{BA}+\frac{Pc'}{CB}=\frac{Pa}{AB}+\frac{Pb}{BC}+\frac{Pc}{CA}=\frac{aa'}{BC}+\frac{bb'}{CA}+\frac{cc'}{AB}$. Como $\frac{bb'}{CA}=\frac{Pb}{BC}$ y $\frac{cc'}{AB}=\frac{Pc'}{CB}$, se tiene: $\frac{aa'}{BC}+\frac{bb'}{CA}+\frac{cc'}{AB}=\frac{aa'}{BC}+\frac{Pb}{BC}+\frac{Pc'}{CB}=$
$=\frac{aa'+a'C+Ba}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$, con lo que quedan demostradas las tres restantes igualdades.

B 87- Demostrar que si en dos triángulos homotéticos ABC y $A'B'C'$, son a, b y c los lados del primero, y d_a, d_b y d_c las distancias entre lados homólogos, positivas o negativas según que, por ejemplo, A y $B'C'$ estén o no, al mismo lado de BC, se verifica $\sqrt{S_{ABC}\cdot S_{A'B'C'}}=S_{ABC}-\frac{1}{2}(a\cdot d_a+b\cdot d_b+c\cdot d_c)$.

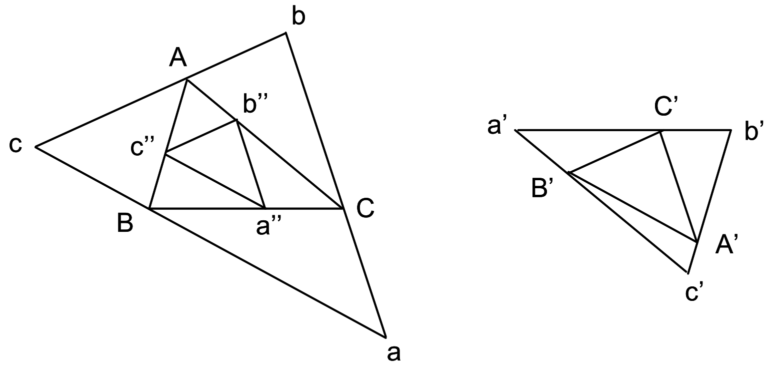
Solución:



$S_{A'B'C'} = S_{ABC} + S_{AA'CC'} + S_{BB'CC'} - S_{AA'BB'}$. $S_{AA'CC'} = -\dfrac{b+kb}{2}d_b$. $S_{BB'CC'} = -\dfrac{a+ka}{2}d_a$.
$S_{AA'BB'} = \dfrac{c+kc}{2}d_c$. Luego, $S_{A'B'C'} = S_{ABC} - \dfrac{1}{2}(1+k)(a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c)$.
Por tanto, $S_{A'B'C'} + \dfrac{k}{2}(a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c) = S_{ABC}.-\dfrac{1}{2}(a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c)$.
Como $S_{A'B'C'} = k^2 \cdot S_{ABC}$; $S_{A'B'C'} \cdot S_{ABC} = k^2 \cdot S^2_{ABC}$; $k \cdot S_{ABC} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{A'B'C'}}$.
Luego, $S_{ABC} - \dfrac{1}{2}(a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c) = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{A'B'C'}}$.

B 88- Si por los vértices A, B y C de un triángulo se trazan las paralelas bc, ca y ab, a los lados de otro triángulo $A'B'C'$, y por los vértices de este se trazan las paralelas $b'c'$, $c'a'$ y $a'b'$ a los lados del ABC, demostrar que se tiene que $S_{ABC} \cdot S_{a'b'c'} = S_{A'B'C'} \cdot S_{abc}$.

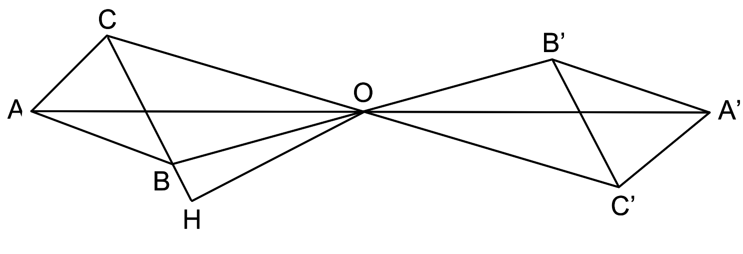
Solución:



Multiplicando el triángulo $a'b'c'$ por una relación tal que se convierta en el ABC, se tiene $S_{a'b'c'} \cdot k^2 = S_{ABC}$. Aplicando esta relación k^2 al $A'B'C'$, se tiene $S_{A'B'C'} \cdot k^2 = S_{a''b''c''}$, siendo el triángulo $a''b''c''$, semejante al $A'B'C'$ e inscrito en el ABC. Luego S_{ABC} es media proporcional (ver el problema B 81) entre S_{abc} y $S_{a''b''c''}$, es decir $S^2_{ABC} = S_{abc} \cdot S_{a''b''c''}$. Sustituyendo el valor de $S_{a''b''c''}$ por $S_{A'B'C'} \cdot k^2 = S_{A'B'C'} \cdot \dfrac{S_{ABC}}{S_{a'b'c'}}$, se tiene $S_{ABC} \cdot S_{a'b'c'} = S_{A'B'C'} \cdot S_{abc}$.

B 89- Demostrar que si se dan dos triángulos homotéticos y equivalentes, ABC y $A'B'C'$, siendo h_a, h_b y h_c las alturas del primero, y d_a, d_b y d_c las distancias entre lados homólogos, se verifica que $E = \dfrac{d_a}{h_a} + \dfrac{d_b}{h_b} + \dfrac{d_c}{h_c} = 0$.

Solución:

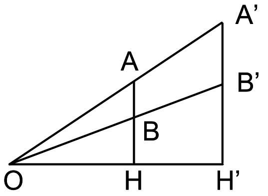


Por ser homotéticos, se tiene $S_{A'B'C'} = k^2 \cdot S_{ABC}$, y por ser equivalentes $S_{A'B'C'} = S_{ABC}$, luego $k^2 = 1$. Sea $OH = \dfrac{d_a}{2}$. Si los triángulos son homotéticos directos, coinciden ($k = +1$), y las distancias son nulas, por lo que la expresión también lo es. Si la homotecia es negativa ($k = -1$), teniendo en cuenta los signos negativos:

$$E = \frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{ad_a}{2S_{ABC}} + \frac{bd_b}{2S_{ABC}} + \frac{cd_c}{2S_{ABC}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-ad_a}{2S_{A'B'C'}} + \frac{-bd_b}{2S_{A'B'C'}} + \frac{-cd_c}{2S_{A'B'C'}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_{A'B'C'}}{2S_{A'B'C'}} = 0.$$

B 90- Se dan en un plano dos triángulos homotéticos, siendo a, b y c los lados de uno de ellos, y d_a, d_b y d_c las distancias entre lados homólogos. Demostrar que la expresión $E = a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c$, permanece constante al desplazarse los triángulos.

Solución:



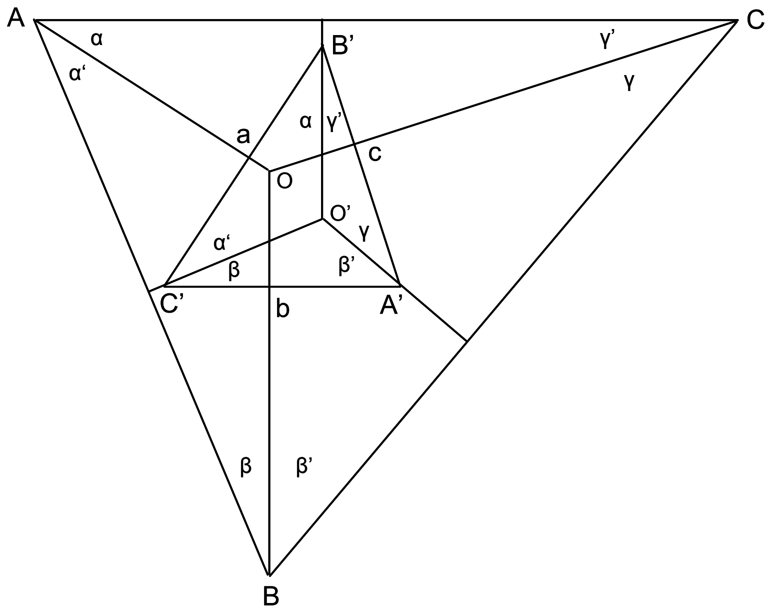
En la homotecia directa, $OH \cdot k = OH' = OH + d_c$, $d_c = OH \cdot (k-1)$. Luego $E = (k-1)\sum(OH \cdot d_c) = 2(k-1)S_{ABC}$, que es constante. En la homotecia inversa, $OH \cdot k = -OH' = -OH - d_c$, $d_c = -OH \cdot (k+1)$.
Luego $E = -(k+1)\sum(OH \cdot d_c) = -2(k+1)S_{ABC}$, que es constante

B 91- Sean AA', BB' y CC', las alturas del triángulo ABC. Por los puntos medios a', b' y c' de $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$, se trazan las perpendiculares aa', bb' y cc', sobre BC, CA y AB. Demostrar que son concurrentes.

Solución: Las alturas AA', BB' y CC' son bisectrices del triángulo órtico $A'B'C'$. Los lados del triángulo mediano del órtico $a'b'c'$, son paralelos a los del órtico, luego las paralelas a AA', BB' y CC', trazadas por a', b' y c', son sus bisectrices. Pero estas rectas son aa', bb' y cc', luego son concurrentes.

B 92- Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$, demostrar que si concurren las perpendiculares Aa, Bb y Cc, bajadas desde A, B y C sobre $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$, las perpendiculares $A'a'$, $B'b'$ y $C'c'$, bajadas desde A', B' y C' sobre los lados del primero, también concurren.

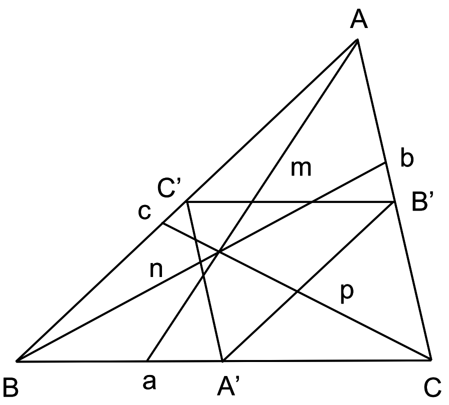
Solución:



Llamando A_1, B_1 y C_1 los puntos en que Aa, Bb y Cc cortan a BC, AC y AB (estos puntos no se han dibujado en la figura), se tiene: $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = -1 = \frac{\sin\gamma' \cdot \sin\alpha' \cdot \sin\beta'}{\sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}$. En el triángulo $A'B'C'$, las rectas OA', OB 'y OC', forman con sus lados los mismos ángulos que OA, OB y OC con los lados del ABC, luego verificarán la misma relación, siendo también concurrentes.

B 93- En un triángulo ABC, se trazan tres cevianas Aa, Bb y Cc. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de Aa y BC, de Bb y CA, y de Cc y AB, son concurrentes.

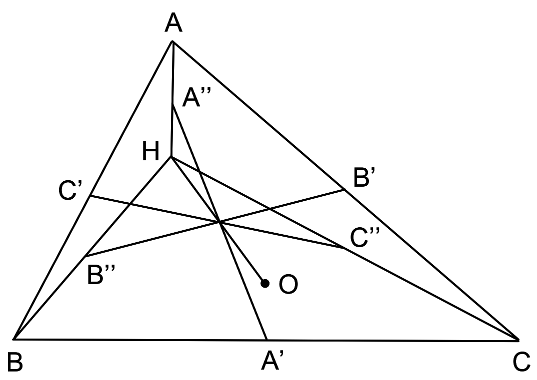
Solución:



Sean A', B' y C' los puntos medios de BC, CA y AB, y sean m, n y p los de Aa, Bb y Cc. Los puntos m, n y p se encuentran en las paralelas $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$ a los lados del ABC. Se tiene $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1 = \frac{2 \cdot mC'}{2 \cdot mB'} \cdot \frac{2 \cdot nA'}{2 \cdot nC'} \cdot \frac{2 \cdot pB'}{2 \cdot pA'} = \frac{mC'}{mB'} \cdot \frac{nA'}{nC'} \cdot \frac{pB'}{pA'}$. Por tanto $A'm$, $B'n$ y $C'p$, son cevianas del triángulo $A'B'C'$.

B 94- Dado un triángulo ABC, sea O su circuncentro, H el ortocentro, A', B' y C' los puntos medios de los lados, A'', B'' y C'' los puntos medios de AH, BH y CH. Demostrar que $A'A'' = B'B'' = C'C''$, y que $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ y OH son concurrentes.

Solución:



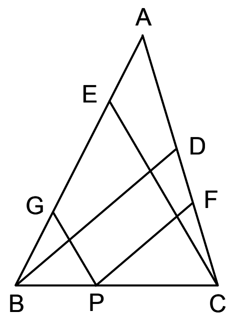
$A'A''$, $B'B''$ y $C'C''$ son diámetros del círculo de los nueve puntos, cuyo centro es el punto medio de OH.

B 95- Demostrar que en todo triángulo, las tangentes a la circunferencia circunscrita trazadas en los vértices, cortan a los lados opuestos en tres puntos alineados.

Solución: Se trata de una caso límite de un exágono $ABCDEF$, inscrito en una circunferencia, en el que los vértices B y C se confunden, así como los D y E, y los F y A. Consecuentemente, los lados BC, DE y FA, son las tangentes en dichos vértices confundidos. Aplicando el teorema de Pascal, queda demostrado el enunciado.

B 96- Dado un triángulo ABC, trazar desde un punto de uno de sus lados, rectas que corten a los otros dos lados, de modo que su suma sea igual a una cantidad dada m. Demostrar que para cualquier otro punto de dicho lado, las paralelas a las rectas trazadas suman también la misma cantidad m.

Solución:



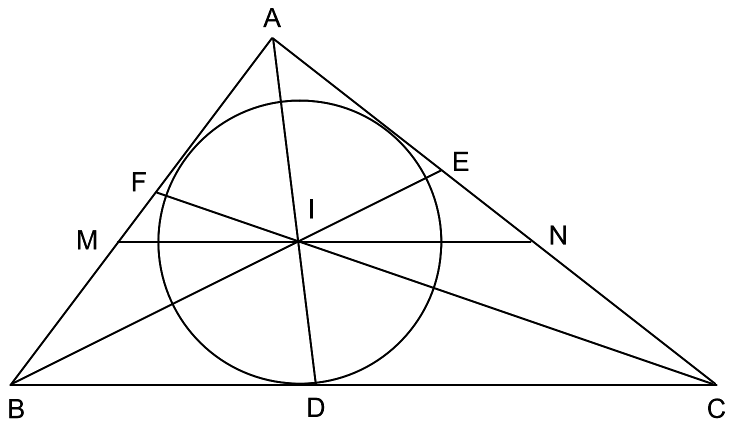
Sea BC el lado escogido. Desde B y C, se trazan las rectas BD y CE iguales a m. Evidentemente los puntos B y C cumplen con el enunciado. Desde otro punto cualquiera P de BC, se trazan las paralelas PF y PG a BD y CE, respectivamente. Se tiene que $PF = \frac{BD \bullet PC}{BC} = \frac{mPC}{BC}$, $PG = \frac{CE \bullet PB}{BC} = \frac{mPB}{BC}$. Sumando estas dos igualdades, se tiene: $PF + PG = m$.

B 97- Demostrar que los círculos de Apolonio son ortogonales al círculo circunscrito, tienen el mismo eje radical y sus centros están alineados.

Solución: Sean W y W' los centros isodinámicos del triángulo ABC, que son inversos de los centros isógonos U y U'. Se tiene $\frac{BW}{CW} = \frac{BA}{CA} = \frac{BW'}{CW'}$, o sea que W y W' pertenecen a los círculos de Apolonio, por lo que se puede trazar una tangente al círculo circunscrito igual al radio del círculo de Apolonio, es decir que ambos círculos son ortogonales. Los tres círculos se cortan en W y W', por lo que su eje radical común es WW', y sus centros están sobre la polar del punto K (punto de Lemoine).

B 98- Demostrar que en un triángulo ABC, la paralela MN trazada desde el incentro I a uno de sus lados, BC en el caso de la figura, limitada por los otros dos lados, AB y AC, es igual a la suma de los segmentos MB y NC, determinados sobre estos dos lados, comprendidos entre las paralelas.

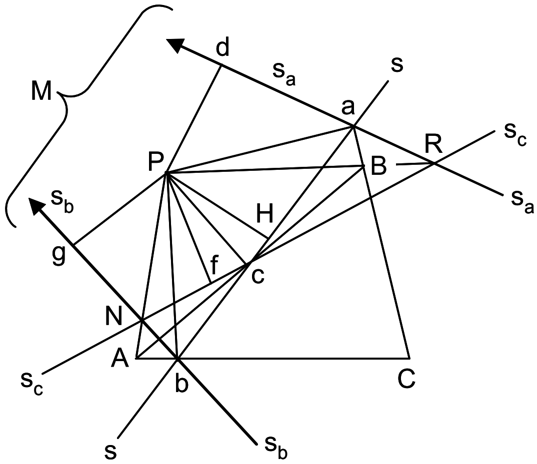
Solución:



Los triángulos CIN y BIM, son isósceles, pues $\widehat{NCI} = \frac{\widehat{DCN}}{2}$, $\widehat{INC} = \pi - \widehat{NCD}$, $\widehat{NIC} = \pi - \widehat{NCI} - \widehat{INC} = \quad = \pi - \frac{\widehat{DCN}}{2} - \pi + \widehat{NDC} = \frac{\widehat{NCD}}{2} = \widehat{NCI}$. Por tanto, $NI = NC$. Análogamente, $MI = MB$. Luego, $MI + IN = MN = MB + NC$.

B 99- Demostrar que las rectas simétricas de una recta de Simson, respecto de los lados de un triángulo *ABC*, forman un triángulo cuyo incentro coincide con el polo de la recta de Simson. Demostrar que este polo es también el centro de perspectividad del triángulo dado y del formado por dichas rectas simétricas.

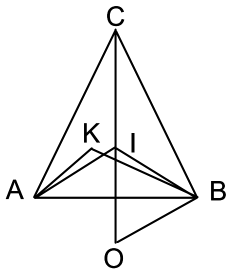
Solución:



Sea *s* la recta de Simson correspondiente al polo *P* (punto sobre la circunferencia circunscrita al *ABC*), que pasa por los pies *a*, *b* y *c* de las perpendiculares trazadas desde *P* sobre los lados del *ABC*. Sean s_a, s_b y s_c, sus simétricas respecto de estos lados. Y sean *H*, *d*, *e* y *f*, los pies de las perpendiculares trazadas desde *P* sobre *s* y sus simétricas. En los triángulos rectángulos *Pdc* y *PcH*, se tiene que *Pc* es común, y como $\widehat{HPc} = \widehat{BcH} = \widehat{dcA} = \widehat{dPc}$, son iguales, por lo que $PH = Pd$. Análogamente se obtiene que $PH = Pe = Pf$, es decir que *P* es el incentro del triángulo *MNR*, formado por s_a, s_b y s_c. Los triángulos *ABC* y *MNR*, son homológicos, pues los lados homólogos se cortan en *a*, *b* y *c*, que están alineados. Por tanto *AN*, *CM* y *RB*, pasan por un punto fijo *P*. En efecto, el punto *N*, al estar sobre las simétricas de *s* respecto de *AB* y *AC*, está sobre *PA*, que pasa por *A*, punto común de *AB* y *AC*. El mismo razonamiento se aplica a *M* y *R*, deduciéndose que *P* es el centro de perspectividad de los triángulos *ABC* y *MNR*.

B 100- Dado un triángulo isósceles *ABC*, de base *AB*, se dividen los dos ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ en un mismo número de partes iguales mediante dos haces de $(n-1)$ semirrectas. Las que irradian de *A*, se numeran ordenadamente a partir de *AC* inclusive, mediante los números 0, 1, 2,... *n*, terminando en *AB*. Similarmente para el vértice *B*, desde *BA* hasta *BC*. Señálense los puntos de intersección de las parejas de rayos de misma numeración, demostrando que cualquiera que sea *n*, dichos puntos están sobre una línea cuyas propiedades se piden.

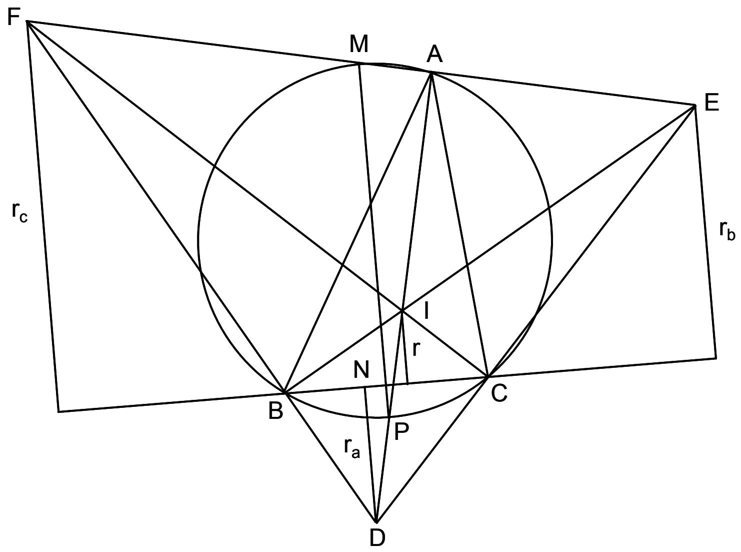
Solución:



El ángulo que el rayo *AK* forma con *AC*, es $\frac{\widehat{A}}{n}k$, y el que forma *BK* con *BA* es $\frac{\widehat{B}}{n}k$. El ángulo $\widehat{AKB}$ mide $180^\circ - (\widehat{A} - \frac{\widehat{A}}{n}k) - \frac{\widehat{B}}{n}k$. Como $\widehat{A} = \widehat{B}$, $\widehat{AKB} = 180^\circ - \widehat{A}$. Luego la línea pedida se corresponde con el arco capaz de $180^\circ - \widehat{A}$, trazado sobre *AB*. Este arco es tangente a *AC* y *CB* en *A* y *B*, respectivamente, y pasa por el incentro *I* del *ABC*.

B 101- Demostrar que la suma de los radios, r_a, r_b, r_c, de las circunferencias exinscritas en un triángulo ABC, es igual a cuatro veces el radio R de la circunferencia circunscrita, más el radio r de la circunferencia inscrita ($r_a + r_b + r_c = 4R + r$).

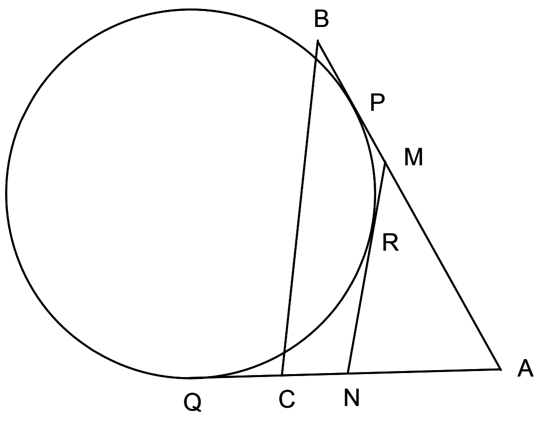
Solución:



Sean D, E, F los centros de los círculos exinscritos, e I el centro del círculo inscrito. El triángulo ABC es el órtico del DEF, siendo I el ortocentro de este, y siendo el círculo circunscrito al ABC, el círculo de los nueve puntos del DEF. Por tanto, $PI = PD$, teniéndose que: $PN = \frac{r_a - r}{2}$, $NM = \frac{r_b + r_c}{2}$. Luego, $PM = 2R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{2}$, es decir: $r_a + r_b + r_c - r = 4R$.

B 102- Dado un triángulo ABC, se traza una recta que corta a AB en M, y a AC en N, de forma que $MN = BM + CN$. Demostrar que las rectas MN son tangentes a una misma circunferencia.

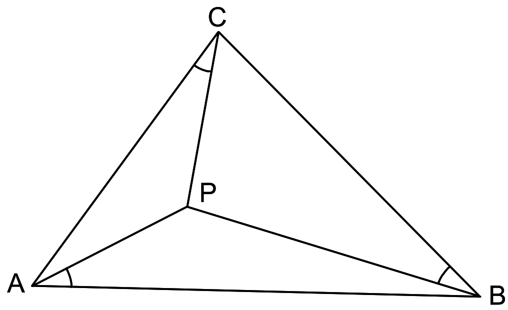
Solución:



Se tiene: $MP = MR$, $NQ = NR$. Luego, $MN = MP + NQ$. Como $MN = MB + NC$, uno de los dos puntos, P o Q, están sobre el lado AB o AC del triángulo, y el otro punto sobre la prolongación del otro lado. Por tanto, $AP = AQ = \frac{AP + AQ}{2} = \frac{AB + AC}{2}$. Luego al ser las tangentes constantes, la circunferencia es la misma.

B 103- Hallar un punto P en el plano de un triángulo ABC dado, de forma que, unido con los tres vértices, estas tres rectas formen ángulos iguales con los lados del triángulo, tomados estos en el mismo sentido.

Solución:

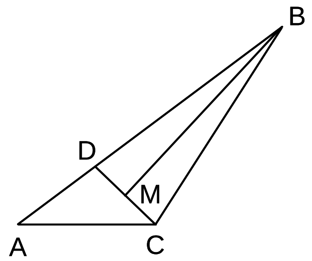


Se debe tener que $\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA} = \alpha$. En el triángulo PBC se tiene: $\widehat{BPC} + (\widehat{C} - \alpha) + \alpha = \pi$, luego $\widehat{BPC} = \pi - \widehat{C}$. En el triángulo APC se tiene: $\widehat{APC} + \alpha + (\widehat{A} - \alpha) = \pi$, luego $\widehat{APC} = \pi - \widehat{A}$. Luego P está sobre el arco capaz de $\pi - \widehat{C}$ trazado sobre BC, y sobre el arco capaz de $\pi - \widehat{A}$ trazado sobre AC. La intersección de estos arcos capaces (dos puntos, uno o ninguno), determina el punto P, llamado punto de Brocard.

Sección C - CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

C 1- Construir un triángulo conociendo $\widehat{A}$, b y $a - c$.

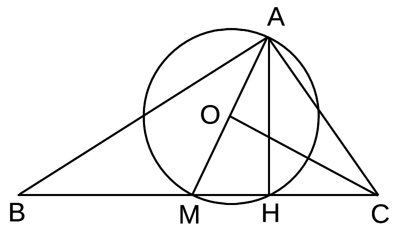
Solución:



Se traza $AC = b$, y sobre su extremo A, se traza el ángulo $\widehat{BAC} = \widehat{A}$. Sobre el lado AB se lleva $AD = a - c$. Se levanta en M la mediatriz de CD, que corta en B a AB. El triángulo pedido es el ABC.

C 2- Construir un triángulo conociendo h_a, m_a y sabiendo que $a = 2b$.

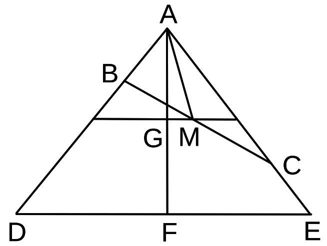
Solución:



Se traza una recta BC y en un punto H de ella, se levanta la perpendicular $AH = h_a$. Con centro en A y radio $AM = m_a$, se corta BC en M y M' (no dibujado en la figura). Por el punto medio O de AM, se levanta la mediatriz OC, que corta a BC en C. Llevando $CB = 2 \cdot AC$, se tiene el triángulo pedido ABC.

C 3- Construir un triángulo conociendo m_a, $\widehat{A}$ y $b + c$.

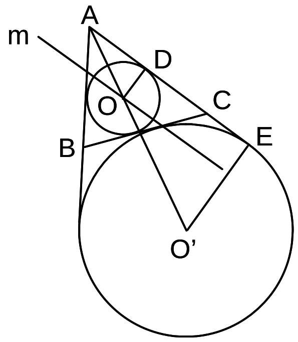
Solución:



En los lados del ángulo $\widehat{A}$, se lleva $AD = AE = b + c$. Se traza GM, paralela media a DE del triángulo ADE. Con centro en A y radio $AM = m_a$, se corta GM en M. La recta simétrica de AE con relación a M, corta a AD en B, Se lleva $AC = b + c - AB$, obteniéndose el triángulo pedido ABC.

C 4- Construir un triángulo conociendo $\widehat{A}$, a y el radio r del círculo inscrito.

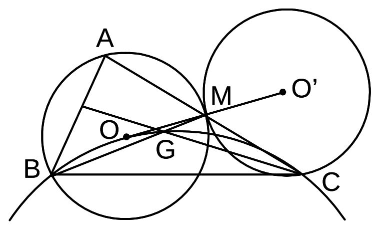
Solución:



Se traza el ángulo $\widehat{BAC} = \widehat{A}$, su bisectriz AO' y una paralela m a una distancia r de uno de los lados de $\widehat{A}$, por ejemplo el AC. El centro O de la circunferencia inscrita está en la intersección de la bisectriz con m. Se traza la circunferencia de centro O y radio $OD = r$. En el lado AC, y a partir de D (punto de tangencia de O con AC), se lleva $DE = a$ Se levanta la perpendicular EO' a AC en E. El punto de intersección de esta perpendicular con la bisectriz AO, da el punto O', centro del círculo exinscrito. Trazado este (centro O' y radio $O'E$), se traza BC, tangente común a los círculos O y O', obteniéndose los vértices B y C.

C 5- Construir un triángulo conociendo $\widehat{A}$, m_b y el ángulo $\widehat{a, m_c}$.

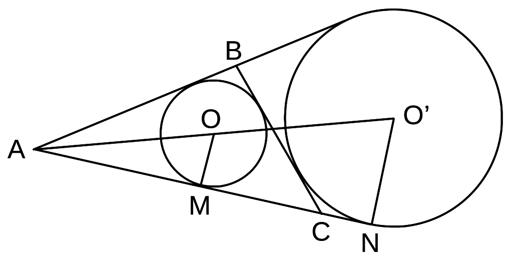
Solución:



El vértice A está en el arco capaz de $\widehat{A}$ construido sobre $BM = m_b$. Como $MA = -MC$, el vértice C está en la circunferencia homotética de la anterior, con M como centro de homotecia y razón -1. El vértice C está sobre el arco capaz del ángulo $\widehat{a, m_c}$, trazado sobre $BG = \dfrac{2}{3}m_b$. Determinado C, su simétrico respecto de M, es el vértice A.

C 6- Construir un triángulo conociendo a, r y r_a.

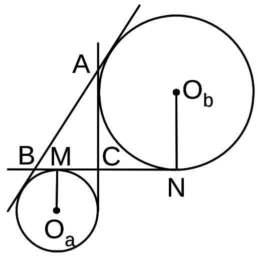
Solución:



Se traza el círculo inscrito de centro O y radio r. Por un punto M de él, se traza la tangente AMN. Sobre esta y a partir de M, se lleva $MN = a$. Sobre la perpendicular en N a MN, se lleva $NO' = r_a$. Se prolonga OO' hasta que corte a MN en A. Desde A se traza la tangente a O, que lo es también a O'. La tangente común a O y O', distinta de las trazadas desde A, da los vértices B y C.

C 7- Construir un triángulo conociendo r_a, r_b y c.

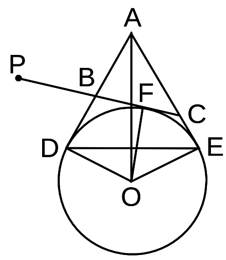
Solución:



Se traza $MN = c$, y se levantan en sus extremos, las perpendiculares $MO_a = r_a$ y $NO_b = r_b$, a distintos lados de MN (se tiene en cuenta que la distancia entre los puntos de tangencia de dos circunferencias exinscritas situadas del mismo lado de un determinado lado del triángulo -en este caso, del AB-, es igual a la longitud de este). Las tangentes comunes a O_a y O_b, determinan, junto con la recta MN, los vértices A, B, C del triángulo.

C 8- Dado un ángulo $\widehat{A}$ y un punto P, exterior al ángulo, trazar por P una recta que corte a los lados del ángulo en los puntos B y C, de forma que el triángulo ABC sea de perímetro $2p$ dado.

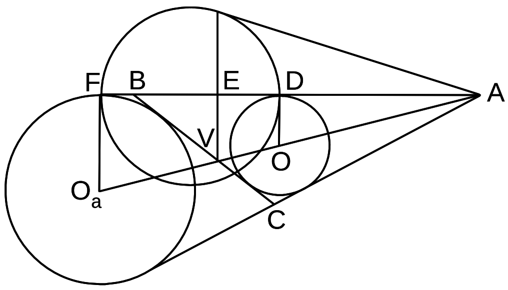
Solución:



Se traza la bisectriz AO del ángulo dado. Sobre los lados del ángulo se llevan $AD = AE = p$. Se levantan las perpendiculares en D y E, que se cortan en O, sobre AO. Se traza la circunferencia de centro O y radio $OD = OE$. Desde P se traza la tangente PF (situada entre A y O) a la circunferencia, que da los vértices B y C.

C 9- Construir un triángulo conociendo a, $b + c$ y w_a.

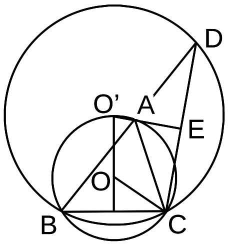
Solución:



Los centros O, de la circunferencia inscrita, y O_a , de la exinscrita en $\widehat{A}$, son conjugados armónicos de A y V, pie de la bisectriz interior de $\widehat{A}$. Los pies de las perpendiculares trazadas desde dichos puntos, sobre AB, es decir F y D, son conjugados armónicos de E (pie de la perpendicular desde V) y A. Se conocen $FD = a$ y $AF = p = \dfrac{a+b+c}{2}$, luego también se conocen AD y AE. Por tanto, para construir el triángulo, se toma $AF = p$, y $FD = a$; se halla E, conjugado armónico de A respecto de F y D; se traza la perpendicular EV a,BD, y desde A se corta con $AV = w_a$. Las perpendiculares por D y F, a AB, dan O y O_a sobre AO. Trazadas las circunferencias de centros O y O_a, con radios respectivos OD y O_aF, su tangente común determina los vértices B y C.

C 10- Construir un triángulo conociendo $2p$, $\widehat{A}$ y R, radio de la circunferencia circunscrita.

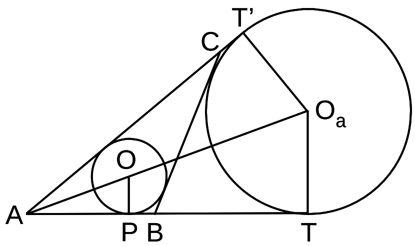
Solución:



Supuesto resuelto el problema, se prolonga el lado AB en una longitud $AD = AC$, con lo que el ángulo $\widehat{ADE} = \widehat{ACE} = \frac{\widehat{A}}{2}$, es decir que el punto D está sobre el arco capaz de $\frac{\widehat{A}}{2}$ sobre BC, siendo $BD = BA + AC = b + c$. Por tanto, para construir el triángulo, se traza la circunferencia de radio R, con centro en un punto O; en un punto cualquiera de ella se coloca el ángulo $\widehat{A}$, que cortará a la circunferencia en dos puntos B y C, que definen un lado del triángulo (la circunferencia circunscrita corresponde al arco capaz de $\widehat{A}$ sobre el lado opuesto BC). Sobre BC se traza el arco capaz de $\frac{\widehat{A}}{2}$, cuyo centro es O' situado sobre la mediatriz de BC. Con centro en B y radio $2p - a = b + c$, se corta en D el arco capaz O'. Se levanta la mediatriz EA de DC, que corta en A a la circunferencia circunscrita O.

C 11- Construir un triángulo conociendo a, $b + c$ y r, radio del círculo inscrito.

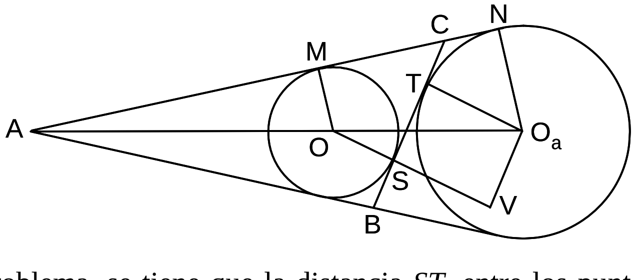
Solución:



Se traza un círculo de radio r, y en un punto P cualquiera de ella, se traza la tangente AB. A partir de P, se lleva sobre la tangente, en un sentido, la longitud $PT = a$, y en el sentido opuesto, la longitud $PA = p - a = \frac{b + c - a}{2}$. Desde el punto A se trazan las tangentes a O, $AT = AT' = p$. Las perpendiculares a estas tangentes, en T y T', dan el punto O_a, centro del círculo exinscrito. Se traza este círculo con radio $O_aT = O_aT'$. La tangente común a O y O_a, determina los vértices B y C.

C 12- Construir un triángulo conociendo $b - c$, r y $\widehat{A}$.

Solución:



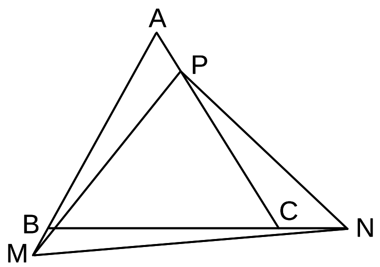
Supuesto resuelto el problema, se tiene que la distancia ST, entre los puntos de tangencia con el lado BC, del círculo inscrito O y del círculo exinscrito O_a, respectivamente, es $b - c$. Prolongando OS una longitud $SV = O_aT = r_a$, se tiene que $(r + r_a)^2 + (b - c)^2 = OO_a^2$. En los triángulos AOM

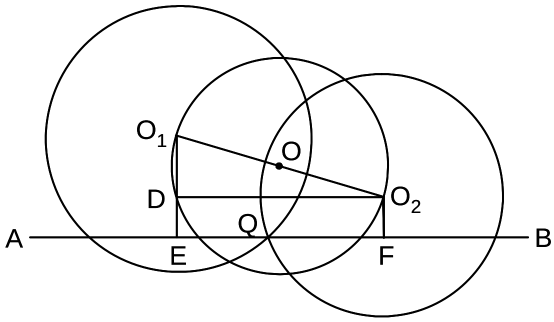
y AO_aN, se tiene $\frac{r}{AO}=\frac{r_a-r}{OO_a}$, luego $(r+r_a)^2+(b-c)^2=\frac{(r_a-r)^2 \cdot AO^2}{r^2}$, es decir: $(AO^2-r^2)r_a^2-2r(AO^2+r^2)r_a-$
$-r^2\left[r^2+(b-c)^2-AO^2\right]=0$. De esta ecuación se obtiene r_a, pues se conocen todos los restantes elementos (AO es conocido, pues se conocen el ángulo $\widehat{A}$ y el radio r del círculo inscrito). Por tanto, para construir el triángulo, se traza el ángulo $\widehat{A}$ y el círculo inscrito O, se calcula r_a obtenido de la ecuación anterior y se traza el círculo exinscrito O_a. La tangente común a O y O_a, determina los vértices B y C.

Nota: La obtención de r_a, a partir de la citada ecuación, puede hacerse gráficamente.

C 13- Construir un triángulo equilátero de área dada S, y cuyos lados pasan, cada uno, por un punto dado.

Solución:





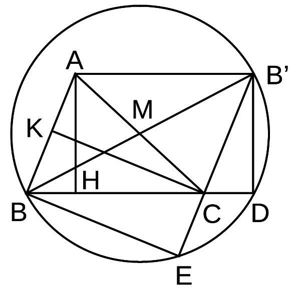
Sean M, N y P, los tres puntos dados. Los vértices A, B y C se hallan sobre arcos capaces de 60º trazados sobre PM, MN y NP. El lado a del triángulo ABC pedido, es conocido, igual a $\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. Supuesto resuelto el problema, sean O_1 y O_2, los centros de dos de los arcos capaces (figura de la derecha), y sea AB el lado del triángulo que pasa por Q, intersección de dichos arcos capaces. Trazando por O_2 la paralela O_2D a AB, siendo D el pie de la perpendicular trazada sobre ella desde O_1, se tiene que $DO_2=\frac{a}{2}$ y $\widehat{O_1DO_2}=90º$. Luego para inscribir el lado AB, se traza una circunferencia con centro el punto O medio de O_1O_2 y radio $\frac{O_1O_2}{2}$, y se corta por la circunferencia de centro O_2 y radio $\frac{a}{2}$, obteniéndose el punto Q, por el que se traza la paralela AB a DO_2. La obtención del vértice C, no reviste dificultad.

C 14- Construir un triángulo conociendo $\widehat{A}$, $c-a$, y la diferencia entre los segmentos que h_b determina en el lado AC.

Solución:
Supuesto resuelto el problema, sea AM la diferencia entre los segmentos HA y HC, que BH determina en AC, y sea $AN=c-a$, por lo que los triángulos BCM y MBN son isósceles, cortándose sus alturas BH y BP en el vértice B. En consecuencia, para construir el triángulo, se traza el ángulo $\widehat{A}$, llevando sobre uno de sus lados $AM=HA-HC$, y sobre el otro lado, $AN=c-a$. La mediatriz PB de MN corta en B a la paralela a AM trazada a una distancia $AH=h_b$, de AM. El vértice C es el simétrico de M respecto a H.

C 15- Construir un triángulo conociendo m_b, h_a y h_c.

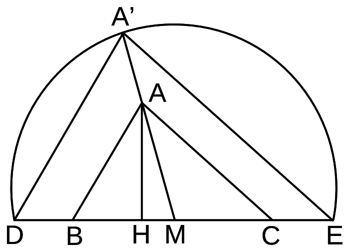
Solución:



Supuesto resuelto el problema, se construye el paralelogramo $ABCB'$, formado por los lados AB y BC del triángulo, y las paralelas AB' y CB' a dichos lados. Las diagonales AC y BB', se cortan en su punto medio M. La circunferencia de centro M y radio $MB = MB'$, corta en E a CB', siendo el ángulo $\widehat{BEC} = 90º$, con lo que $BE = CK = h_c$. Por tanto, para construir el triángulo, se traza una circunferencia de radio m_b, y desde los extremos B y B' de uno de sus diámetros, con radios respectivos h_c y h_a, se corta a dicha circunferencia en los puntos E y D. El vértice C queda determinado por la intersección de BD y $B'E$. La paralela $B'A$ a BC, determina el vértice A.

C 16- Construir un triángulo conociendo m_a, h_a y $\widehat{A}$.

Solución:

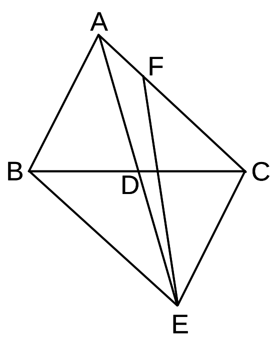


Siendo $AH = h_a$ y $AM = m_a$, se construye el triángulo rectángulo AHM. Sobre HM, y a uno y otro lado de M, se llevan segmentos iguales cualesquiera $MD = ME$. Sobre DE se traza el arco capaz de $\widehat{A}$, y se prolonga MA hasta que corte al arco capaz en A', trazándose $A'D$ y $A'E$. Por A se trazan las paralelas a $A'D$ y $A'E$, obteniéndose AB y AC.

Nota: Los triángulos ABC y $A'DE$ son homotéticos con centro de homotecia M.

C 17- Construir un triángulo conociendo m_a, $\widehat{A}$ y $b - c$.

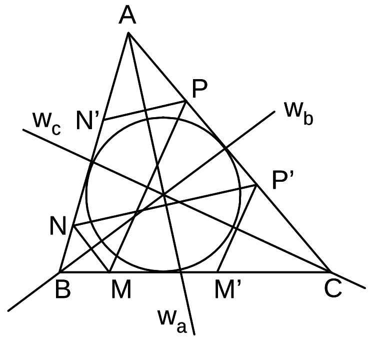
Solución:



El triángulo ACE, en el que E es el simétrico de A respecto a D, punto medio de BC, se puede construir, pues se conocen $AE = 2m_a$, $\widehat{ACE} = 180º - \widehat{A}$, y $AC - CE = b - c$; para lo cual se traza sobre AE el arco capaz de $180º - \widehat{A}$, que se corta en F mediante un arco de centro A y radio $AF = b - c$. Prolongando AF se tiene C. Trazando por A la paralela AB a CE, y prolongando CD, se obtiene B.

C 18- Construir un triángulo conociendo las bisectrices, w_a, w_b y w_c, en posición, y un punto M situado en el lado BC.

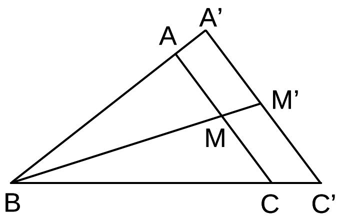
Solución:



El simétrico N de M respecto de la bisectriz w_b, se encuentra sobre AB. El simétrico P' de N respecto de la bisectriz w_a, se encuentra sobre AC. El simétrico M' de P' respecto de la bisectriz w_c, se encuentra sobre BC. El simétrico P de M respecto de w_c, se encuentra sobre AC. El simétrico N' de P respecto de w_a, se encuentra sobre AB. Las rectas MM', NN' y PP', determinan los vértices A, B y C.

C 19- Construir un triángulo conociendo m_b, $\widehat{A}+\widehat{C}$ y $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$.

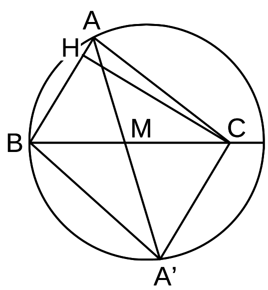
Solución:



Se traza un ángulo $\widehat{A'BC'} = 180^{\text{o}} - \left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)$. Sobre uno de sus lados se lleva $BA' = n$, y sobre el otro, $BC' = m$. Sea M' el punto medio de $A'C'$. Se traza BM', y se lleva $BM = m_b$. La paralela AMC a $A'C'$, determina los vértices A y C.

C 20- Construir un triángulo conociendo h_c, c y el ángulo $\widehat{b,m_a}$.

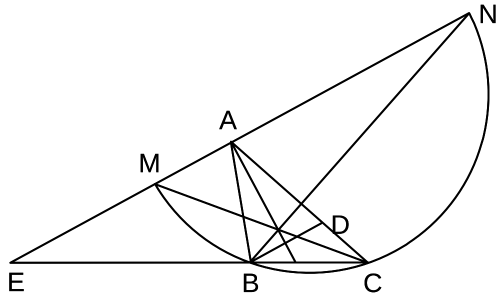
Solución:



Sea ABC el triángulo buscado. Se conoce $\widehat{CAM} = \widehat{MA'B} = \widehat{b,m_a}$, por tanto A' está sobre el arco capaz del ángulo $\widehat{b,m_a}$ sobre $AB = c$, además de estar sobre la paralela CA' a AB, trazada a una distancia de esta igual a h_c.Para construir el triángulo, se traza sobre $AB = c$, el arco capaz de $\widehat{b,m_a}$, que se corta en C por la paralela a AB trazada a una distancia h_c.

C 21- Construir un triángulo conociendo a, $b-c$ y la bisectriz exterior w'_a.

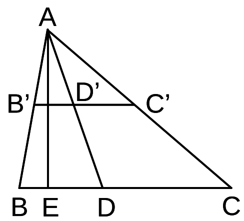
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sea $CD=b-c$, $AE=w'_a$, y CM y BN las bisectrices de los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{B}$.. Se tiene $\widehat{EAD}=90^\circ+\frac{\widehat{A}}{2}=\widehat{BDC}$, luego BD y AE son paralelas, por lo que $\frac{DC}{CB}=\frac{AC}{EC}=\frac{AM}{ME}=\frac{b-c}{a}$. Por tanto el punto M se conoce, pues está en una relación conocida con A y E. El punto N también se conoce, pues es el conjugado armónico de M con relación a E y A. Se traza la semicircunferencia de diámetro MN, que pasa por B y C, y desde E se traza la secante EBC, de forma que determine en la semicircunferencia una cuerda $BC=a$. Para construir el triángulo se procede situando sobre AE los puntos M y N como se ha indicado más arriba. Se traza la semicircunferencia de diámetro MN, y desde E se traza, de la forma indicada, la secante EBC.

C 22- Construir un triángulo conociendo la bisectriz interior AD, $AC-CD$ y $AB-BD$.

Solución:



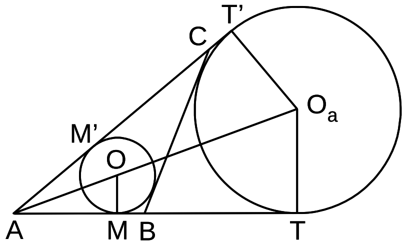
Siendo $AB'=AB-BD$, $AC'=AC-CD$, y DE la proyección de AD sobre BC, se tiene: $\frac{BD}{AB'+B'B}=\frac{DC}{AC'+C'C}$, de donde $\frac{AB'}{BD}=\frac{AC'}{CD}$. En el triángulo ABD, se tiene que $(AB'+B'B)^2=AD^2+BD^2-2\cdot AD\cdot BD\cdot ED$. En el triángulo ADC, se tiene que $(AC'+C'C)^2=AD^2+CD^2+2\cdot AD\cdot CD\cdot ED$. Eliminando ED, y teniendo en cuenta la relación anterior, se obtiene $BD=\frac{AD^2-AB'\cdot AC'}{2\cdot AC'}$, $CD=\frac{AD^2-AB'\cdot AC'}{2\cdot AB'}$,

$BC=\frac{(AB'+AC')(AD^2-AB'\cdot AC')}{2\cdot AB'\cdot AC'}$, $AB=AB'+BD=\frac{AD^2+AB'\cdot AC'}{2\cdot AC'}$,

$AC=AC'+CD=\frac{AD^2+AB'\cdot AC'}{2\cdot AB'}$. Luego se conocen los tres lados del triángulo ABC.

C 23- Construir un triángulo conociendo a, h_a y $2p$.

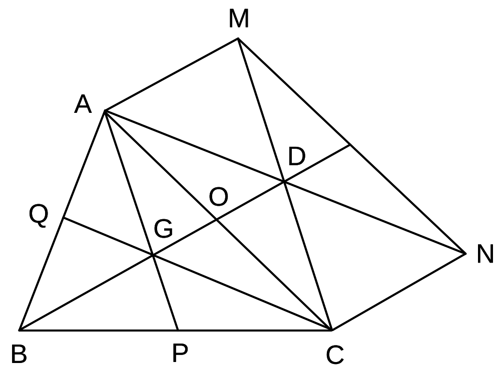
Solución:



Como $S=r\cdot p=\frac{a\cdot h_a}{2}$, $r=\frac{a\cdot h_a}{2p}$. Conociéndose r, se traza el círculo O de radio r, y una tangente AT en un punto cualquiera M de O. Sobre la tangente, se lleva $MA = p - a$, y en sentido contrario $AT = AT' = p$. Las respectivas perpendiculares en T y T' dan O_a, cuyo círculo se traza. La tangente común a O y O_a, determina los vértices B y C.

C 24- Construir un triángulo conociendo m_a, m_c y el ángulo $\widehat{b, m_b}$.

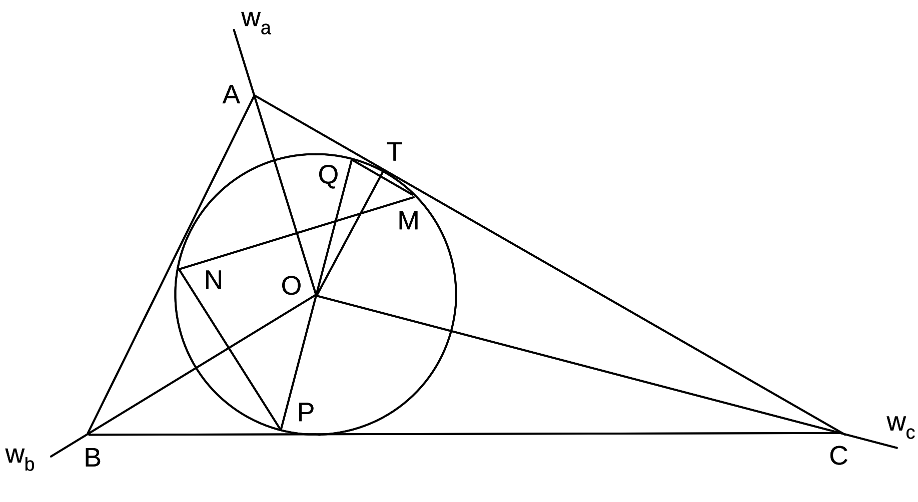
Solución:



Supuesto resuelto el problema, siendo G el baricentro del triángulo ABC, se trazan por A y C las paralelas $AM = CN = BG = \dfrac{2 \cdot m_b}{3}$, obteniéndose el paralelogramo $AMNC$ de centro D, cuyas diagonales son $MC = 2 \cdot MD = 2 \cdot AG = \dfrac{4}{3} m_a$, y $AN = 2 \cdot AD = 2 \cdot GC = \dfrac{4}{3} m_c$, siendo $\widehat{ACN} = \widehat{AOD} = \widehat{BOC} = = \widehat{b, m_b}$ (o su suplementario). Luego se puede construir el paralelogramo $AMNC$, para lo cual se traza el arco capaz de $\widehat{ACN}$ sobre AN, y con centro D, punto medio de AN, se traza una circunferencia de radio $DC = \dfrac{MC}{2}$, que corta al arco capaz en C. Las paralelas AG y CG a MC y AN, respectivamente, dan G. Prolongando OG una longitud $GB = 2 \cdot GO$, se obtiene B.

C 25- Construir un triángulo circunscrito a un círculo dado de centro O, sabiendo que sus vértices están sobre tres semirrectas dadas que parten de O.

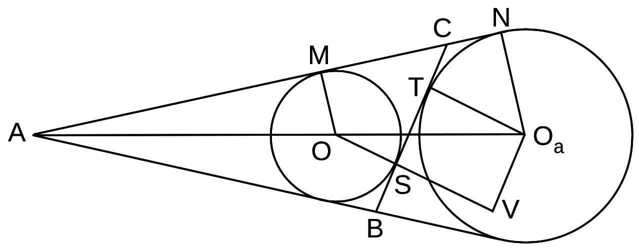
Solución:



Las tres semirrectas dadas corresponden a las tres bisectrices del triángulo pedido ABC, resolviéndose el problema por simetría. Se toma sobre el círculo dado, un punto M cualquiera, y se hallan los sucesivos simétricos: N, simétrico de M respecto de w_a, P simétrico de N respecto de w_b y Q, simétrico de P respecto de w_c. Si M hubiera sido el punto de tangencia de AC con O, hubiera coincidido con Q. Luego dicho punto de tangencia T, se obtiene mediante el radio OT, perpendicular a MQ. La tangente en T determina los vértices A y C, y las tangentes desde estos determinan el vértice B.

C 26- Construir un triángulo conociendo $b-c$, r_a y $\widehat{A}$.

Solución:

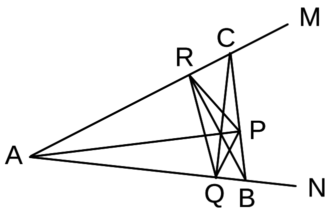


Supuesto resuelto el problema, se tiene que la distancia *ST*, entre los puntos de tangencia con el lado *BC*, del círculo inscrito *O* y del círculo exinscrito O_a, respectivamente, es $b-c$. Prolongando *OS* una longitud $SV = O_aT = r_a$, se tiene que $(r+r_a)^2+(b-c)^2 = OO_a^2$. En los triángulos *AOM* y AO_aN, se tiene $\dfrac{r_a}{AO_a} = \dfrac{r_a-r}{OO_a}$, luego $(r+r_a)^2+(b-c)^2 = \dfrac{(r_a-r)^2 \cdot AO_a^2}{r_a^2}$, es decir: $(AO_a^2-r_a^2)r^2-2r_a(AO_a^2+r_a^2)r-r_a^2\left[r_a^2+(b-c)^2-AO_a^2\right]=0$. De esta ecuación se obtiene r, pues se conocen todos los restantes elementos (AO_a es conocido, pues se conoce el ángulo $\widehat{A}$ y r_a, radio del círculo exinscrito en $\widehat{A}$). Por tanto, para construir el triángulo, se traza el ángulo $\widehat{A}$ y el círculo exinscrito O_a, se calcula r obtenido de la ecuación anterior y se traza el círculo inscrito *O*. La tangente común a *O* y O_a, determina los vértices *B* y *C*.

Nota: la obtención de *r*, a partir de la citada ecuación, puede hacerse gráficamente.

C 27- Se da un ángulo $\widehat{A}$ y un punto *P* en su interior. Trazar un triángulo *PQR*, inscrito en $\widehat{A}$, que sea de perímetro mínimo.

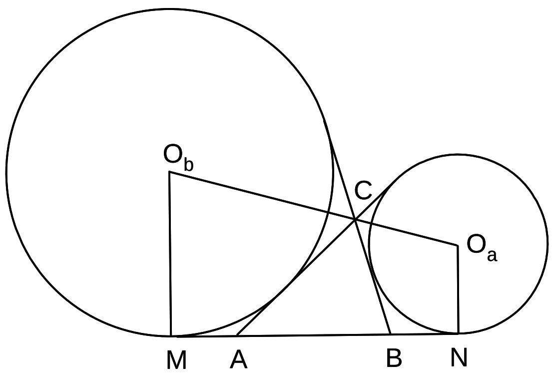
Solución:



El triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo dado, es el órtico. Por tanto, se traza la perpendicular por *P* a *AP*, que corta en *B* y *C* a los lados de $\widehat{A}$; por *B* se levanta la perpendicular *BR* a *AC*, y por *C* la perpendicular *CQ* a *AB*. El triángulo *PQR* es el pedido, pues es el órtico del *ABC*. Nota: Ver el problema B 7.

C 28- Construir un triángulo conociendo r_a, r_b y $a+b$.

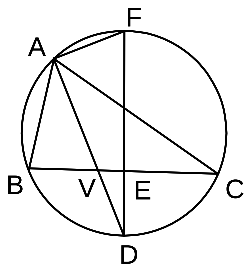
Solución:



MN, tangente común de O_a y O_b, mide $a+b$. Por tanto se trazan las perpendiculares a *MN*, $MO_b = r_b$, $NO_a = r_a$. Las tangentes comunes interiores a O_a y O_b, determinan con *MN*, el triángulo *ABC*.

C 29- Construir un triángulo conociendo a, $\widehat{A}$ y w_a.

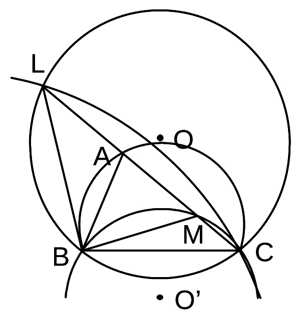
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sea AV la bisectriz dada, que corta al círculo circunscrito en D, teniéndose que EV y AF son antiparalelas en el triángulo ADF (DF es el diámetro perpendicular a BC). Luego $DV \cdot DA = DE \cdot DF = DB^2$. Luego se conoce la diferencia y el producto de AD y DV. Para construir el triángulo, se traza sobre $BC = a$, el arco capaz de $\widehat{A}$. El diámetro perpendicular a BC, determina D. Se obtienen AD y VD, conociéndose su diferencia y su producto. Con centro D y radio DA, se corta el arco capaz en A.

C 30- Construir un triángulo conociendo a, $\widehat{A}$ y $\dfrac{b+c}{b-c}$.

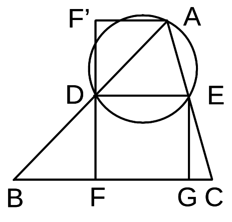
Solución:



Supuesto construido el triángulo ABC, se prolonga CA en $AL = AB = c$, y se lleva sobre AC a partir de A, $AM = AB = c$, con lo que $\dfrac{CL}{CM} = \dfrac{b+c}{b-c}$. Se tiene que $\widehat{BLC} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ y $\widehat{BMC} = 90^{\circ} + \dfrac{\widehat{A}}{2}$. Para construir el triángulo, se trazan sobre $BC = a$, los arcos capaces de $\widehat{A}$ (arco BAC), $\dfrac{\widehat{A}}{2}$ (arco BLC) y $90^{\circ} + \dfrac{\widehat{A}}{2}$ (arco BMC). Con centro de homotecia C y razón $\dfrac{b+c}{b-c}$ se obtiene la circunferencia homotética del arco capaz BMC, que corta al arco capaz BLC en L. La recta CL corta al arco capaz BAC, en A.

C 31- Construir un triángulo conociendo el lado del cuadrado inscrito con un lado apoyado en BC, el ángulo $\widehat{A}$ y la razón en la que otro vértice del cuadrado divide a AB.

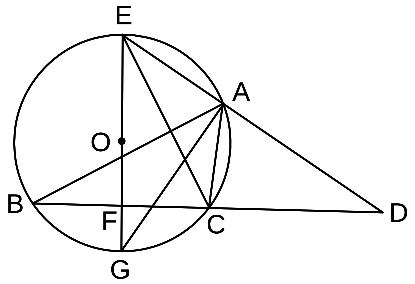
Solución:



Se construye el cuadrado $DEFG$, de lado dado, estando BC sobre su lado FG. Sobre DE se traza el arco capaz de $\widehat{A}$. Se prolonga FD hasta F', de forma que $\dfrac{DF'}{DF} = \dfrac{AD}{DB}$. La paralela por F' a DE corta al arco capaz en A (puede haber una, dos o ninguna solución). Uniendo A con D y E, se obtienen B y C.

C 32- Construir un triángulo conociendo a, $\widehat{A}$ y w'_a.

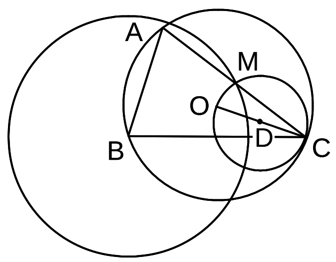
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sea $AD = w'_a$, la bisectriz exterior, que corta a la circunferencia circunscrita en E. Siendo EG el diámetro perpendicular a BC, se tiene en el triángulo GED, que GA y DF son antiparalelas, por lo que $EA \cdot ED = EF \cdot EG = EC^2$, es decir que se conoce el producto y la diferencia de ED y EA. Para construir el triángulo, se traza el arco capaz de $\widehat{A}$ sobre $BC = a$, y el diámetro EG perpendicular a BC, con lo que se conoce EC. Se obtienen EA y ED, pues se conocen su producto EC^2, y su diferencia AD. Con centro E y radio EA se corta el arco capaz en A.

C 33- Construir un triángulo conociendo a, m_b y $\widehat{A}$.

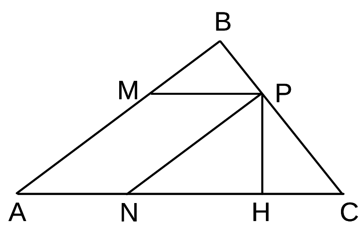
Solución:



Sobre $BC = a$, se traza el arco capaz de $\widehat{A}$. Con centro en B y radio m_b, se traza una circunferencia, lugar geométrico de M, punto medio de AC. Con centro de homotecia C y razón $\frac{1}{2}$, se obtiene la homotética del arco capaz trazado sobre BC, que es también lugar geométrico de M, por lo que M se encuentra en la intersección de las dos circunferencias trazadas. CM corta al arco capaz sobre BC, en A.

C 34- Dado un ángulo y un punto P en su interior, trazar por este punto una recta que forme con los lados un triángulo de área dada.

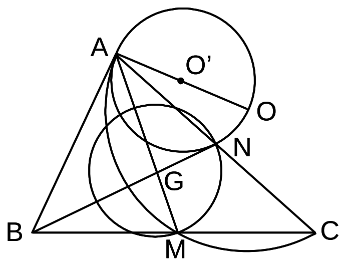
Solución:



Sea ABC el triángulo pedido, siendo $\widehat{A}$ el ángulo dado. Desde P se trazan las paralelas PM y PN a los lados del ángulo, y sea PH la perpendicular trazada desde P sobre AC. Los triángulos ABC y PNC son semejantes, por lo que $\frac{S_{ABC}}{S_{PNC}} = \frac{AC^2}{NC^2} = \frac{(AN+NC)^2}{NC^2} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{PH \cdot NC}$. Como AN y PH son conocidos, se tiene la siguiente ecuación, con NC como incógnita: $NC^2 + 2\left(AN - \frac{S_{ABC}}{PH}\right)NC + AN^2 = 0$ (se trata de obtener dos segmentos cuya suma y producto se conocen). Conocido NC, se obtiene B prolongando CP.

C 35- Construir un triángulo conociendo m_a, m_b y $\widehat{C}$.

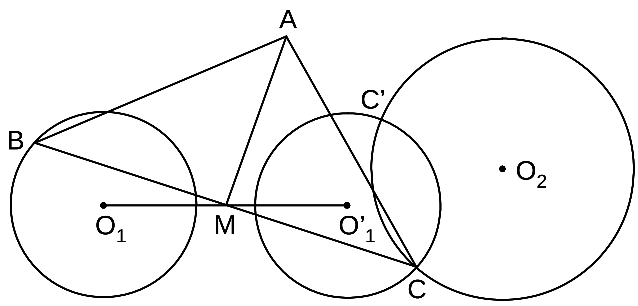
Solución:



Se traza sobre $AM = m_a$, el arco capaz de $\widehat{C}$ (circunferencia de centro O). El lugar geométrico de N, punto medio de AC, es la circunferencia O', homotética de la anterior, con centro de homotecia A y razón $\frac{1}{2}$. Siendo $AG = \frac{2}{3}m_a$, se traza con centro G y radio $GN = \frac{1}{3}m_b$, una circunferencia lugar geométrico de N. La intersección de esta circunferencia con la de centro O', determina el punto N. La recta AN corta en C a la circunferencia de centro O. Prolongando NG una longitud $GB = \frac{2}{3}m_b$, se obtiene B..

C 36- Construir un triángulo conociendo en magnitud y posición, la mediana AM, y dos circunferencias O_1 y O_2, sobre las que se encuentran los vértices B y C, respectivamente.

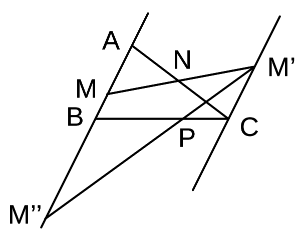
Solución:



Se halla el círculo O_1', simétrico del O_1, respecto de M Los círculos O_2 y O_1' se cortan en C. La recta CM corta en B a O_1 (los círculos O_2 y O_1' pueden ser tangentes, cortarse en dos puntos o no cortarse)

C 37- Construir un triángulo conociendo tres puntos que dividen a cada uno de los tres lados según razones dadas.

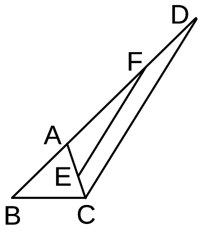
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sean M, N y P, los puntos tales que $\frac{MB}{MA} = m$, $\frac{NA}{NC} = n$ y $\frac{PC}{PB} = p$. Con centro de homotecia N y razón $\frac{1}{n}$, se traza $M'C$, homotética de AB, siendo M' el punto homólogo de M. A continuación se halla el homotético de $M'C$, con centro de homotecia P y razón $\frac{1}{p}$, que da $M''B$. El lado AB se encuentra sobre MM''. Luego hallando el homotético M' de M y M'' de M', se obtiene el lado AB en posición. Procediendo de forma similar con N y P, se obtienen las rectas que determinan los vértices del triángulo.

C 38- Construir un triángulo conociendo a, $\widehat{A}$ y $c + 3b$.

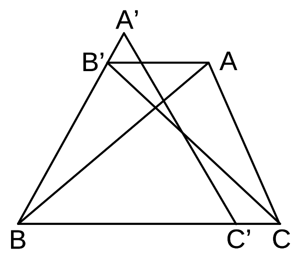
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sea ABC el triángulo pedido, y sea $AD = 3 \cdot AC$, es decir $BD = c + 3b$. El ángulo $\widehat{CAD} = 180º - \widehat{A}$. Se puede construir un triángulo cualquiera EAF, en el que $\widehat{EAF} = 180º - \widehat{A}$, y $AF = 3 \cdot AE$. Para construir el triángulo pedido, se traza en el extremo D de $BD = c + 3b$, el ángulo $\widehat{BDC} = \widehat{AFE}$. Con centro B y radio a, se corta en C el lado DC. Desde C se traza CA formando con BD el ángulo $\widehat{A}$.

C 39- Construir un triángulo equilátero $A'BC'$, equivalente a otro cualquiera dado ABC, de modo que el vértice B sea común, y el lado $A'C'$ esté sobre BC.

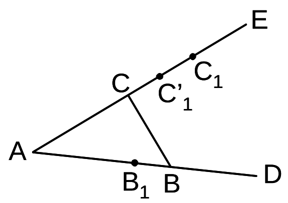
Solución:



Se forma el triángulo $BB'C$, equivalente al dado, siendo $\widehat{CBB'} = 60º$, para lo cual B' está sobre la paralela AB' a BC. Seguidamente se traza el triángulo $A'BC'$, equivalente al $BB'C$, estando A' sobre BB', es decir que $BB' \cdot BC = BA' \cdot BC' = BA'^2 = BC'^2$. Por tanto BA' es media proporcional entre BB' y BC.

C 40- Construir un triángulo conociendo $\widehat{A}$, $b + c$ y $a + c$.

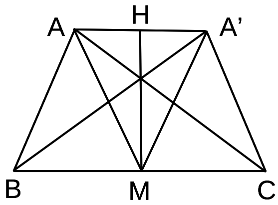
Solución:



Sea ABC el triángulo pedido, y sean $AD = c + a$ y $AE = b + c$. Tomado un punto B_1 sobre AD, se lleva $B_1D = B_1C_1$, y $AB_1 = EC'_1$. Por tanto, sobre AE se establecen dos series de puntos: C_i y C'_i. Los puntos dobles resuelven el problema.

C 41- Construir un triángulo conociendo $b \cdot c$, m_a y $\widehat{B} - \widehat{C}$.

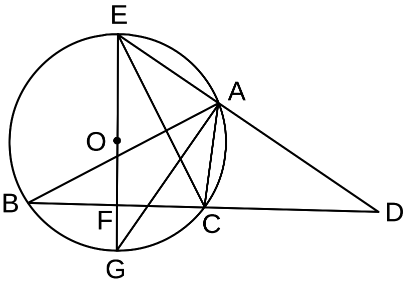
Solución:



Sea ABC el triángulo pedido. Sea $A'BC$ su simétrico respecto a la mediatriz MH de BC. $\widehat{ABA'} = \widehat{A'CB} = \widehat{B} - \widehat{C}$. El área del $ABA' = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BA' \cdot \sin\widehat{ABA'} = \frac{1}{2} bc \sin\left(\widehat{B} - \widehat{C}\right)$, es conocida. El área del $AMA' = S_{ABA'} = \frac{1}{2} \cdot AM^2 \cdot \sin\widehat{AMA'}$. Luego, $\sin\widehat{AMA'} = \dfrac{bc\sin\left(\widehat{B} - \widehat{C}\right)}{m_a^2}$. Para construir el ABC, se obtiene el ángulo $\widehat{AMA'}$, según la fórmula anterior, y se traza el triángulo AMA'. Sobre AA' se traza el arco capaz de $\widehat{B} - \widehat{C}$, que se corta por la paralela a AHA' trazada desde M, obteniéndose B y C.
Nota: Todos los cálculos anteriores se pueden resolver gráficamente.

C 42- Por un punto dado sobre la bisectriz exterior de un ángulo, trazar una recta que determine entre los lados un segmento de longitud dada.

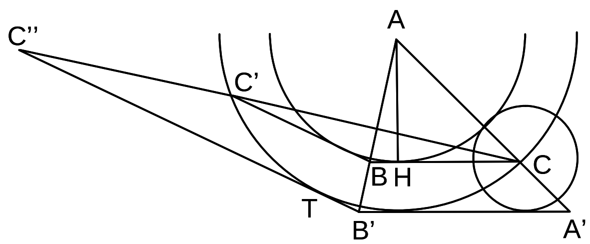
Solución:



El problema se reduce al C 32. En efecto, el punto dado es D, la bisectriz exterior es AD, el ángulo es $\widehat{BAC}$ y el segmento dado es BC.

C 43- Construir un triángulo conociendo a, $\widehat{B}$ y $b - h_a$.

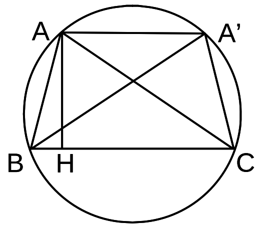
Solución:



Con centro en el extremo C de $BC = a$, se traza el círculo de radio $b - h_a$. Se traza el lado AB del ángulo $\widehat{B}$, y se halla el simétrico BC' de BC respecto a AB. El círculo tangente a BC y a BC', y al círculo C, tiene su centro en A, por ser su radio h_a. Se trata del problema de Apolonio r, r, C, que se puede reducir al r, r, P, trazando las paralelas $C''B'$ y $B'A'$, siendo $C''C' \cdot C''C = CT^2$. Dibujado el círculo que pasa por C y es tangente en T a $C''B'$, se traza su concéntrico con un radio menor en la cantidad $b - h_a$. Este círculo es tangente a BC en H, pie de la altura h_a.

C 44- Construir un triángulo conociendo h_a, $\widehat{B} - \widehat{C}$ y bc.

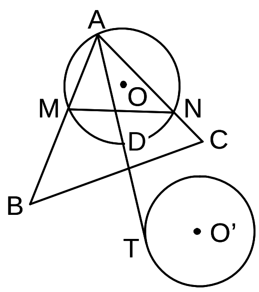
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sea ABC el triángulo pedido y sea $A'BC$ su simétrico respecto a la mediatriz de BC, siendo por tanto, $\widehat{ABA'} = \widehat{ACA'} = \widehat{B} - \widehat{C}$. El área del ABC es $\frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R}$, siendo R el radio de su círculo circunscrito. Luego $R = \frac{bc}{2h_a}$, conocido. Para construir el triángulo, se traza la circunferencia circunscrita de radio R. En un punto cualquiera de ella, se traza el ángulo $\widehat{ABA'} = \widehat{B} - \widehat{C}$, que delimita la cuerda AA', y por B se traza la paralela BC a AA'.

C 45- Construir un triángulo ABC, igual a otro dado, conociendo dos puntos M y N situados respectivamente, en AB y AC, y sabiendo que la bisectriz del ángulo $\widehat{A}$, es tangente a un círculo dado.

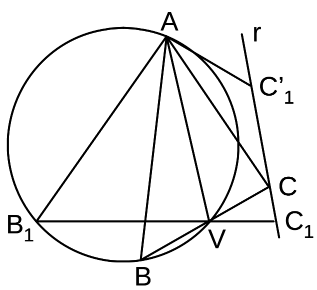
Solución:



Se traza el arco capaz de $\widehat{A}$ sobre MN, y por el punto medio D del arco MDN, se traza la tangente DT al círculo dado (se pueden trazar dos tangentes). La intersección de la tangente con el arco capaz determina el vértice A. Sobre AM y AN, se llevan las longitudes conocidas AB y AC.

C 46- Construir un triángulo conociendo w_a, $\widehat{B}$ y la distancia del vértice C a w_a.

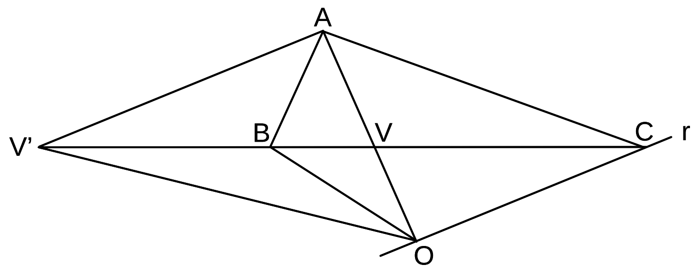
Solución:



Se traza el arco capaz de $\widehat{B}$ sobre $AV = w_a$, y la recta r, paralela a AV a una distancia de esta igual a la de C a w_a (C está en r). Se toma un punto C_1 sobre r. Unido con V, se obtiene B_1. Se lleva el ángulo $\widehat{VAC'_1} = \widehat{B_1AV}$, obteniéndose el punto C'_1. Los puntos dobles de las series C_i y C'_i dan la solución.

C 47- Construir un triángulo w'_a, $\widehat{B}$ y la distancia de C a w'_a.

Solución:

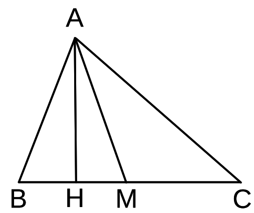


Trazada AV' y su paralela r, situada a la distancia dada, y trazada AV, perpendicular a AV' por A, y siendo O el punto de intersección de AV con r, se tiene que los rayos OV y OV' son conjugados armónicos de OB y OC. Por tanto, hallado OB, cortará al arco capaz de $\widehat{B}$ sobre AV', en B, que unido con V' determinará C sobre r.

Nota: Este razonamiento es también aplicable al problema C 46, así como el razonamiento utilizado en C 46, es aplicable al C 47.

C 48- Construir un triángulo conociendo m_a, $b^2 - c^2$ y el ángulo $\widehat{a, m_a}$.

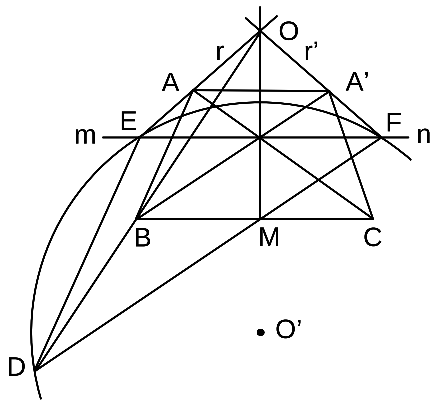
Solución:



Se construye el triángulo rectángulo AHM. Se tiene que $AC^2 - AB^2 = 2 \cdot BC \cdot HM$, de donde $BC = a = \dfrac{b^2 - c^2}{2 \cdot MH}$. Se lleva sobre MH, a uno y otro lado de M, la longitud $\dfrac{a}{2}$, obteniéndose B y C.

C 49- Construir un triángulo de base BC dada, cuyo vértice A se encuentra sobre una recta r dada, conociéndose $\widehat{B} - \widehat{C}$.

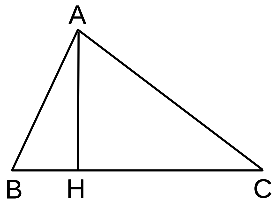
Solución:



Sea ABC el triángulo pedido, y $A'BC$ su simétrico respecto a la mediatriz de BC, y sea r' la simétrica de r. Se traza una paralela cualquiera mn a BC, y se fijan sobre ella dos puntos E y F simétricos respecto a la mediatriz de BC. Se traza sobre EF el arco capaz de $\widehat{B} - \widehat{C}$. Se une O, intersección de r y r', con B, que corta en D al arco capaz. Por B se traza BA, paralela a DE, que corta a r en A.

C 50- Construir un triángulo conociendo h_a, $b+c$ y $\dfrac{h_b}{h_c}$.

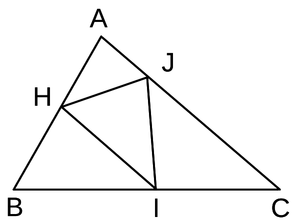
Solución:



Siendo $bh_b = ch_c$, $\dfrac{c}{b} = \dfrac{h_b}{h_c}$. Luego b y c se obtienen, pues se conoce su suma y su cociente. Se trazan dos paralelas a una distancia entre sí igual a h_a. Con centro un punto A cualquiera de una de ellas, y radios b y c, se corta la otra paralela en B y C.

C 51- Construir un triángulo circunscrito a otro dado, conociendo las razones en que cada vértice de este, divide a cada lado de aquel.

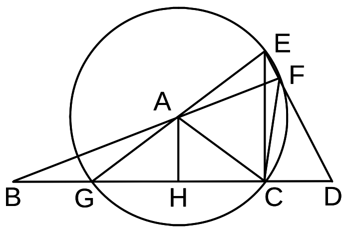
Solución:



Se resuelve como el C 37.

C 52- Construir un triángulo conociendo $\widehat{A}$, h_a y $b+c$.

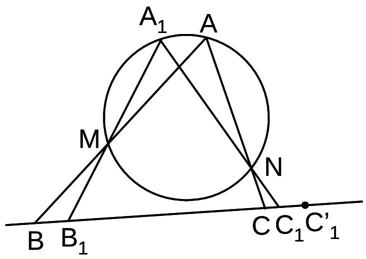
Solución:



Suponiendo resuelto el problema, con centro A y radio AC se traza una circunferencia que corta a BC en G, que unido con A determina E sobre la circunferencia, siendo $\widehat{BCE} = 90º$. Los triángulos GHA y GEC son semejantes, luego $\dfrac{h_a}{CE} = \dfrac{GA}{GE} = \dfrac{1}{2}$, $CE = 2h_a$. La recta EF corta a BC en D, siendo $\widehat{CED} = \dfrac{\widehat{CAF}}{2} = 90º - \dfrac{\widehat{A}}{2}$. El triángulo CDE es conocido, por ser rectángulo, conocerse $\widehat{CED}$, y por ser $CE = 2h_a$. Por tanto, se conoce CD. Los triángulos BCF y DBF son semejantes, $\dfrac{BC}{b+c} = \dfrac{b+c}{BD}$, luego $BC \cdot (BC+CD) = (b+c)^2$. Como se conoce CD, se halla BC. En el triángulo BCF, se conocen $BF = b+c$, $\widehat{BFC} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ y BC, por lo que se puede construir. El punto de intersección de BF con la paralela a BC a la distancia h_a, es A.

C 53- Construir un triángulo conociendo $\widehat{A}$, el lado a en magnitud y la recta sobre la que está, y dos puntos por los que pasan AB y AC.

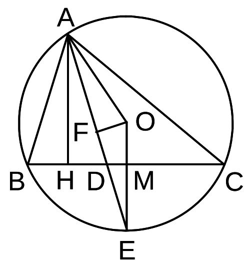
Solución:



Sean M y N, los puntos por los que pasan AB y AC, respectivamente. Se traza sobre MN el arco capaz de $\widehat{A}$. Elegido un punto B_1 sobre BC, se une con M. La recta B_1M corta al arco capaz en A_1, que unido con N determina C_1 sobre BC. Llevando sobre BC, $B_1C'_1 = a$, se obtiene C'_1. De esta forma hay dos series de puntos sobre BC: C_i y C'_i. Los puntos dobles solucionan el problema.

C 54- Construir un triángulo conociendo los pies de h_a, m_a y w_a, y el radio R del círculo circunscrito.

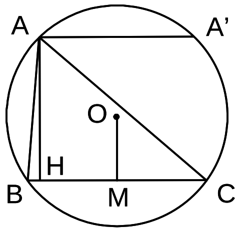
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sean H, M y D, los pies de h_a, m_a y w_a. Los triángulos AHD y EMD son semejantes, teniéndose $\frac{AD}{DE} = \frac{DH}{DM}$. Luego $\frac{AD+DE}{AD} = \frac{DH+DM}{DH}$, es decir $\frac{AE}{AD} = \frac{m+n}{m}$. Al ser $\widehat{OAF} = \widehat{OEF}$, $AF = \frac{AE}{2} = \frac{(m+n)AD}{2m} = FE$. En los triángulos semejantes OEF y ADH, se tiene $\frac{R}{AD} = \frac{AD(m+n)}{2mh_a}$. Siendo $AD^2 = h_a^2 + m^2$, se obtiene $Rh_a = \frac{(m+n)(h_a^2+m^2)}{2m}$, es decir $h_a^2 - \frac{2mRh_a}{m+n} + m^2 = 0$, de donde se obtiene h_a. Para construir el triángulo pedido ABC, se traza la recta MDH, se levanta su perpendicular $HA = h_a$, calculada según la fórmula anterior. Desde A como centro y radio R, se corta a OM (perpendicular en M) en O. Con centro en O y radio R, se obtienen B y C, sobre MDH.

C 55- Construir un triángulo conociendo a, bc y $2p'$, perímetro de su triángulo órtico.

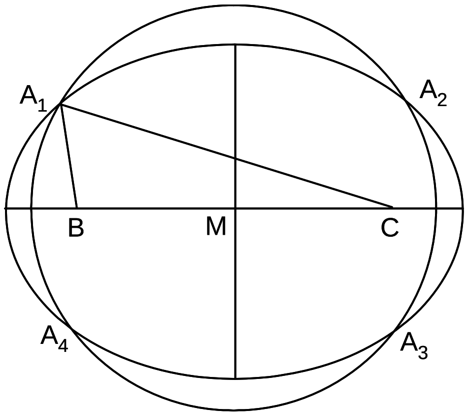
Solución:



$S_{ABC} = Rp' = \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{2R}$, $h_a = \sqrt{\frac{bcp'}{a}}$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{p'}}$. Luego se conocen h_a y R. Por tanto, se traza la mediatriz de BC y sobre ella se lleva la distancia $MO = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. Con centro en O y radio $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{p'}}$, se traza la circunferencia circunscrita. Se traza una paralela a BC a una distancia $AH = h_a = \sqrt{\frac{bcp'}{a}}$, que corta a la circunferencia en A y A'.

C 56- Construir un triángulo conociendo a, $b+c$ y m_a.

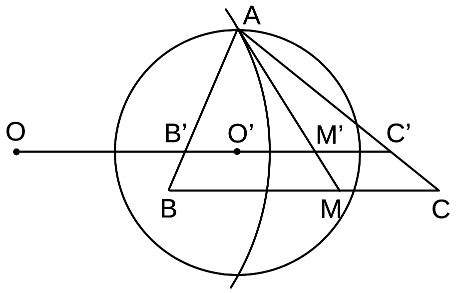
Solución:



Como $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$, $bc = \dfrac{(b+c)^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} - m_a^2$. Por tanto se conoce el producto y la suma de b y c. Otra solución consiste en trazar la elipse lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a B y C, sea $b+c$. Con centro M, punto medio de BC, se traza una circunferencia de radio m_a, que corta a la elipse en cuatro puntos A, que solucionan el problema.

C 57- Construir un triángulo conociendo b, c y la recta AM, siendo M un punto que divide al lado a en una relación conocida.

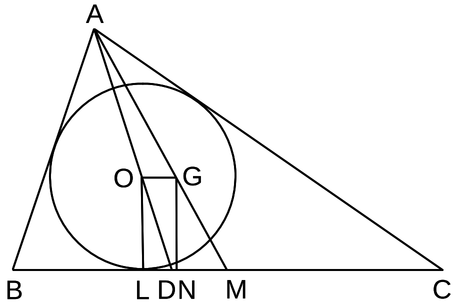
Solución:



Sobre un segmento cualquiera $B'C'$, se traza una circunferencia O, lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a B' y C', sea $\dfrac{b}{c}$. Sea M' el punto de $B'C'$ tal que $\dfrac{M'B'}{M'C'} = \dfrac{MB}{MC}$. Sobre $M'C'$ se traza la circunferencia O', lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a M' y C', sea $\dfrac{AM}{b}$. Las circunferencias de centro O y O', se cortan en A. El triángulo pedido ABC, es el homotético del $AB'C'$, con centro de homotecia A y razón $\dfrac{c}{AB'}$.

C 58- Construir un triángulo conociendo m_a y r, y sabiendo que los lados están en progresión aritmética de razón d, siendo el lado a el intermedio.

Solución:

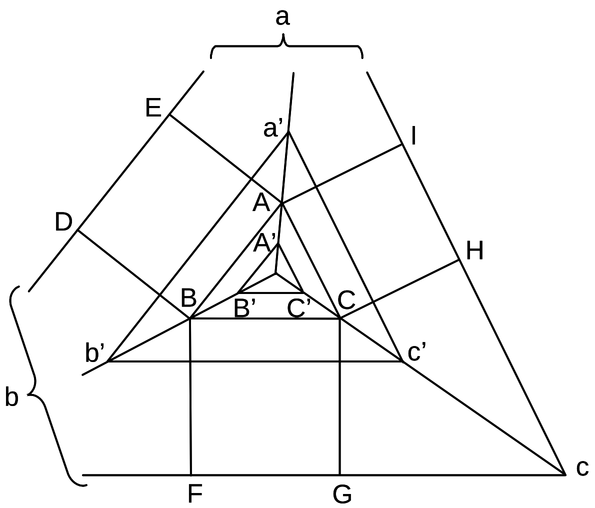


Sea O el incentro y G el baricentro; OG es paralela a BC. Sea AGM la mediana m_a, AD la bisectriz de $\widehat{A}$, y sean L y N las proyecciones de O y G sobre BC. Se tiene que $2p = 3a$. El triángulo GNM se puede construir, pues $GN = r$ y $GM = \dfrac{m_a}{3}$. $OG = \dfrac{2 \cdot DM}{3}$, $DM = CD - CM$, $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{a+d}{a-d}$,

$\frac{CD+BD}{CD} = \frac{a}{CD} = \frac{2a}{a+d}$, $CD = \frac{a+d}{2}$, $DM = \frac{a+d}{2} - \frac{a}{2} = \frac{d}{2}$, $OG = \frac{d}{3}$. Luego construido *GNM*, se traza $GO = \frac{d}{3}$, paralela a *MN*. Las tangentes desde *A* al círculo de centro *O* y radio *r*, determinan *B* y *C* sobre *MN*.

C 59- Sobre los lados *ABC* de un triángulo, se construyen exteriormente cuadrados *ABDE*, *BCFG* y *CAHI*. Prolongando *DE*, *FG* y *HI*, se forma el triángulo *abc*. Conocido el *abc*, construir el *ABC*.

Solución:

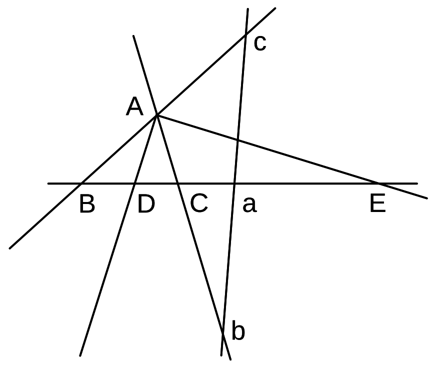


Los triángulos *ABC* y *abc* son homotéticos, con centro de homotecia el punto *K* de Lemoine (intersección de las simedianas), siendo la razón $\rho = 1 + \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{2S'}$, siendo a', b' y c' los lados del triángulo *abc*, y S' su superficie.

Nota: Las coordenadas normales absolutas de *K* (distancias de *K* a los tres lados del triángulo), son: $\frac{\lambda a}{2}$, $\frac{\lambda b}{2}$, $\frac{\lambda c}{2}$, siendo $\lambda = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}$; como las coordenadas son proporcionales a los lados, *K* es el centro de homotecia del *ABC* y del triángulo formado por los lados exteriores de los cuadrados construidos sobre los lados del *ABC*.. Por otro lado, siendo las coordenadas normales del baricentro *G*: $\frac{h_a}{3}$, $\frac{h_b}{3}$, $\frac{h_c}{3}$ (sus coordenadas normales absolutas son: $\frac{2S}{3a}$,...), las coordenadas de *K* son las inversas de las de *G*.

C 60- Construir un triángulo dados los centros de los círculos de Apolonio y el vértice opuesto a uno de los lados en que se encuentra uno de los centros.

Solución:



Sean *a*, *b* y *c* los centros de los círculos de Apolonio, y *A* el vértice al que corresponde *a*. Las rectas *cA* y *bA* determinan los lados *AB* y *AC* en posición. Por tanto, se conocen las bisectrices *AD* y *AE* en posición. El punto *D* está en la bisectriz y también en el círculo de centro *a* y radio *aA*, que corta a la bisectriz *AD* en *D*.

Nota: UIn círculo de Apolonio pasa por un vértice y los pies de las bisectrices, interior y exterior, correspondientes a ese vértice. Los centros de los tres círculos de Apolonio están alineados.

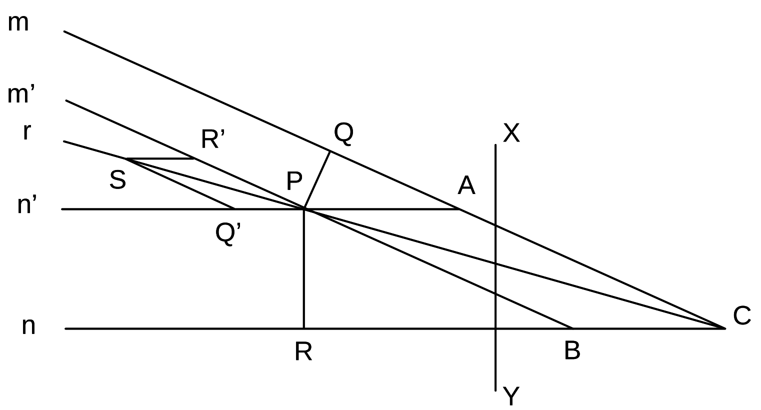
Sección D - CUADRILÁTEROS - OTROS POLÍGONOS

D 1- Rellenar un plano, supuesto ilimitado, con polígonos regulares iguales entre sí. Determinar con qué clase de polígonos puede realizarse esta operación.

Solución: Se puede realizar esta operación con polígonos cuyos ángulos interiores sean divisores exactos de 360º. El ángulo interior de un polígono regular de n lados, es $180º - \frac{360º}{n}$, luego ha de satisfacerse la igualdad $360º = k(180º - \frac{360º}{n})$, siendo k un número entero. Las soluciones son el triángulo equilátero ($n = 3$, $k = 6$), el cuadrado ($n = 4$, $k = 4$) y el exágono regular ($n = 6$, $k = 3$).

D 2- Trazar por un punto dado P una recta r que vaya a concurrir con otras dos, m y n, que se cortan fuera de los límites del dibujo.

Solución:

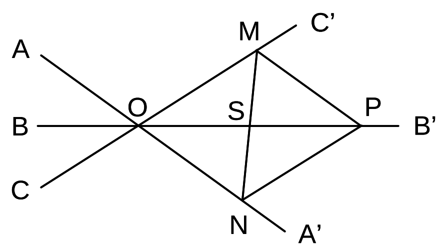


Se trazan desde P, las perpendiculares PQ y PR a m y n, así como sus paralelas m' y n'. Sobre m' se lleva $PR' = PR$, y sobre n', $PQ' = PQ$. Se trazan las paralelas $R'S$ a n, y $Q'S$ a m. La recta PS, diagonal del paralelogramo $PQ'SR'$, es prolongación de PC, diagonal del paralelogramo $PACB$, por lo que concurre en C con m y n. En efecto, ambos paralelogramos son semejantes, y son iguales los ángulos que sus diagonales forman con sus lados.

Nota: Ver el problema B 19.

D 3- Dadas tres rectas concurrentes, trazar una recta que las corte determinando dos segmentos iguales.

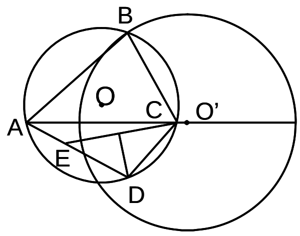
Solución:



Sean AA', BB' y CC', las tres rectas concurrentes en O. Se toma, por ejemplo, el punto P sobre BB', y se trazan por él las paralelas PM a AA' y PN a CC'. Se forma el paralelogramo $PMON$, cuyas diagonales se cortan en su punto medio, luego $MS = NS$.

D 4- Construir un cuadrilátero inscriptible *ABCD* conociendo la diagonal *AC*, el ángulo $\widehat{D}$, la razón de los lados $\frac{AB}{BC}$, y la diferencia $AD - CD$.

Solución:



Se traza sobre *AC*, el arco capaz de $\widehat{D}$ (circunferencia de centro *O*), y la circunferencia lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a *A* y *C* es la dada (circunferencia de centro O'); la intersección de estas circunferencias es el vértice *B*. Para determinar el vértice *D*, se conoce $AD - CD$ y el ángulo $\widehat{D}$ (*D* está sobre el arco capaz ya trazado). Siendo $DE = DC$, se conoce $AE = AD - CD$, y $\widehat{AEC} = 90º + \frac{\widehat{D}}{2}$; luego el triángulo *AEC* se puede construir. La mediatriz de *EC* determina el vértice *D* sobre el arco capaz *O*.

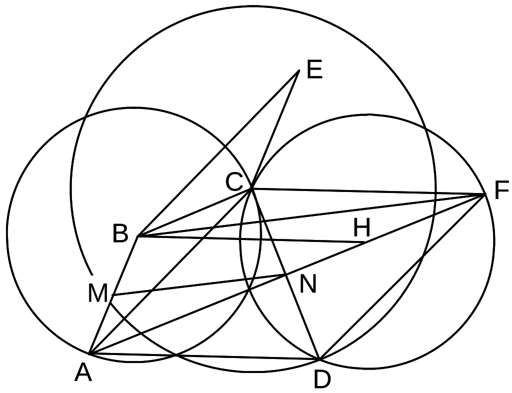
D 5- Construir un eptágono conociendo los puntos medios de sus lados.

Solución: Sean las coordenadas de los siete puntos medios, con relación a cualquier par de ejes, (m_1, n_1), (m_2, n_2),...(m_7, n_7). Siendo (x, y) las coordenadas del vértice *A*, las coordenadas de los sucesivos vértices son:
$B(2m_1 - x, 2n_1 - y)$, $C(2m_2 - 2m_1 + x, 2n_2 - 2n_1 + y)\ldots G(2m_6 - 2m_5\ldots+x, 2n_6 - 2n_5\ldots+y)$. Como el simétrico de *G* respecto a (m_7, n_7) debe coincidir con $A(x, y)$, se tiene que $x = m_7 - m_6 + m_5 - m_4 + m_3 - m_2 + m_1$, $y = n_7 - n_6 + n_5 - n_4 + n_3 - n_2 + n_1$. Conocido por tanto el vértice *A*, se obtienen los vértices *B*, *C*,...*G*, hallando los sucesivos simétricos respecto a los puntos medios.

Nota: En relación con los polígonos de lados pares, cualquier punto *A* del plano y sus sucesivos simétricos, representan una solución, pues siempre se produce que $m_{2i} + m_{2(i-1)}\ldots = m_{2i-1} + m_{2(i-1)-1} + \ldots$ Es decir, en este caso, el conjunto de sus puntos medios funciona como un espejo para cualquier *A*.

D 6- Construir un cuadrilátero *ABCD*, conociendo los cuatro lados y la recta *MN* que une los puntos medios de dos lados opuestos *AB* y *CD*.

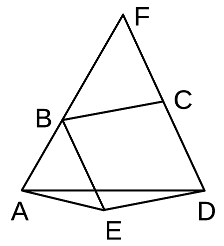
Solución:



Supuesto resuelto el problema, se trasladan los lados *AB* y *AD*, hasta las posiciones *CE* y *CF*. La recta *AF* pasa por *N*, pues *ACFD* es un paralelogramo, cortándose sus diagonales en su punto medio *N*. Siendo $BF = 2 \cdot MN$, el triángulo *BCF* se puede construir, pues se conocen sus tres lados. Una vez construido, se traza la circunferencia de centro *B* y radio *BA*, y la de centro *C* y radio *CD*. El problema se ha reducido a inscribir en estas dos circunferencias, un segmento *AD*, paralelo e igual a *FC*. Para ello, se traslada la circunferencia de centro *B*, paralelamente a *FC* y en una magnitud *FC*. La intersección de esta circunferencia y la de centro *C*, determina el vértice *D*.

D 7- Construir un cuadrilátero *ABCD*, conociendo los cuatro lados y el ángulo $\widehat{AB,CD}$, formado por los lados opuestos *AB* y *CD*.

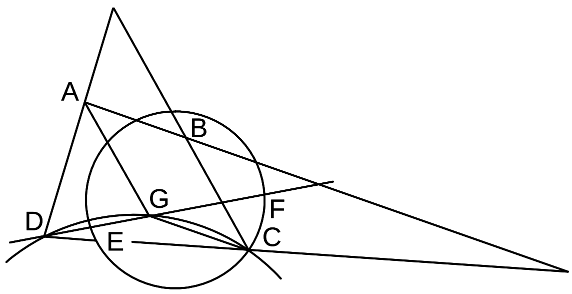
Solución:



Trazada por *B* la paralela *BE* a *CD*, el triángulo *ABE* se puede construir, pues se conocen *AB*, $BE = CD$ y $\widehat{ABE} = \widehat{AB,CD}$. A continuación se construye el *ADE*, del que se conocen los tres lados. Seguidamente, con centro en *B* y radio *BC*, y con centro en *D* y radio *DC*, se trazan dos circunferencias, que se cortan en *C*.

D 8- Construir un cuadrilátero conociendo dos lados opuestos, *AD* y *BC*, el ángulo que forman $\widehat{AD,BC}$, la razón de los otros dos lados $\dfrac{AB}{CD}$, y el ángulo que forman estos últimos, $\widehat{AB,CD}$.

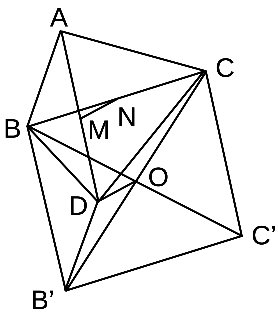
Solución:



Se traza *AG*, paralelo e igual a *BC*. Siendo $\widehat{DCG} = \widehat{AB,CD}$, el vértice *C* se encuentra en el arco capaz de este ángulo trazado sobre *DG*. Sean *E* y *F* dos puntos que dividen a *DG* en la relación dada $\dfrac{AB}{CD}$. La circunferencia de diámetro *EF*, corta en *C* al arco capaz anterior. Las paralelas *CB* a *AG*, y *AB* a *GC*, determinan el vértice *B*.

D 9- Construir un cuadrilátero *ABCD*, conociendo los cuatro lados y la recta *MN* que une los puntos medios de las diagonales.

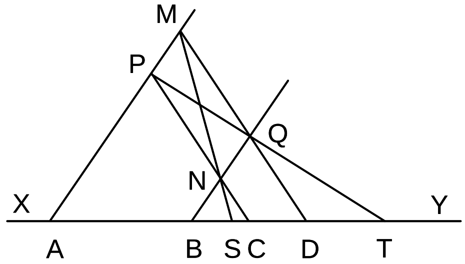
Solución:



Sea *ABCD* el cuadrilátero pedido. Se forma el paralelogramo $BCC'B'$, trasladando las diagonales *BC* y *AD*. Siendo *O* el centro del paralelogramo, la recta *DO* es igual y paralela a *MN*. El triángulo $DB'C$ se puede construir, pues se conocen los lados $DB' = AB$, *DC* y la mediana *DO*. También se puede construir el DBC', del que se conocen los lados *BD* y $DC' = AC$, y la mediana *DO*. Por tanto se conocen los vértices *D*, *B* y *C*. Las paralelas *BA* a $B'D$, y *CA* a $C'D$, determinan el vértice *A*.

D 10- Sobre una recta dada XY, se consideran cuatro puntos consecutivos A, B, C y D. Por A y B se trazan dos paralelas cualesquiera, procediéndose de igual forma con C y D. Demostrar que las diagonales del paralelogramo formado por las cuatro paralelas, cortan a la recta XY en dos puntos fijos.

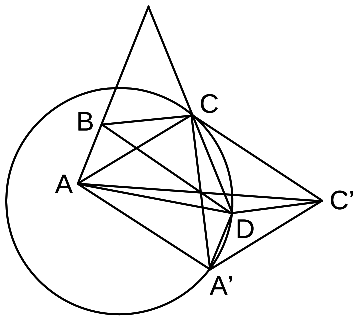
Solución:



Sean las paralelas APM, BNQ, CNP y DQM, y sean las diagonales PQ que corta a XY en T, y MN que lo hace en S. Los triángulos PAC y QBD son semejantes, al tener sus ángulos iguales, y por la misma razón lo son también PAT y QBT. Luego $\dfrac{QB}{PA} = \dfrac{DB}{CA}$ y $\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{PA}{QB}$, de donde $\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{CA}{DB}$, $\dfrac{AT-BT}{AT} = \dfrac{AB}{BT} = \dfrac{CA-DB}{CA}$. Por tanto $BT = \dfrac{AB \bullet CA}{CA-DB}$, con lo que se demuestra que, al ser constante BT, el punto T es fijo. La demostración para S es similar.

D 11- Construir un cuadrilátero $ABCD$, conociendo las diagonales AC y BD, el ángulo que forman, $\widehat{AC,BD}$, la razón de dos lados opuestos, $\dfrac{BC}{AD}$, y el ángulo de los otros dos lados, $\widehat{AB,CD}$.

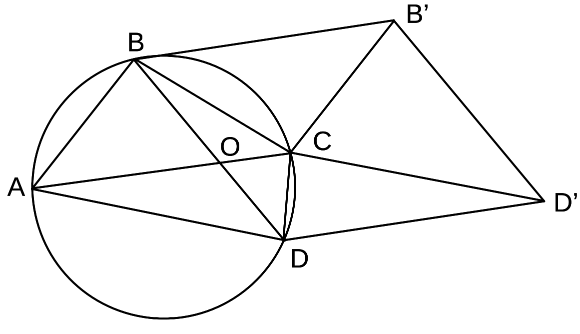
Solución:



El paralelogramo $ACC'A'$ se puede construir. Sobre CA' se traza el arco capaz de $180^{\circ} - \widehat{AC,BD}$. Se traza el círculo lugar geométrico de los puntos D, cuyas distancias a A y C', están en la relación $\dfrac{BC}{AD}$. La intersección de esta circunferencia con el arco capaz anterior, determina el vértice D. Las paralelas por C y A, a DC' y DA', respectivamente, determinan el vértice B.

D 12- Construir un cuadrilátero inscriptible $ABCD$, conociendo las diagonales AC y BD, el ángulo que forman, $\widehat{AC,BD}$, y el ángulo $\widehat{CAD}$, que forma la diagonal AC con el lado AD.

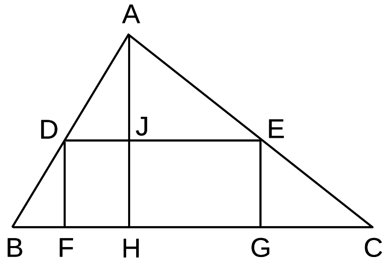
Solución:



Por ser inscriptible, $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$. Se construye el paralelogramo $BB'DD'$, pues se conocen sus lados (las
diagonales del cuadrilátero) y sus ángulos (los que forman las diagonales). Se traza el ángulo $\widehat{DBC} = \widehat{CAD}$, y el $\widehat{DD'C}$, también igual al $\widehat{CAD}$, con lo que se determina el vértice C. Las paralelas por B y D, a CB' y $D'C$, respectivamente, determinan el vértice A.

D 13- Inscribir en un triángulo dado ABC, un rectángulo $DEFG$ de área dada, y que tenga su base sobre la base del triángulo.

Solución:

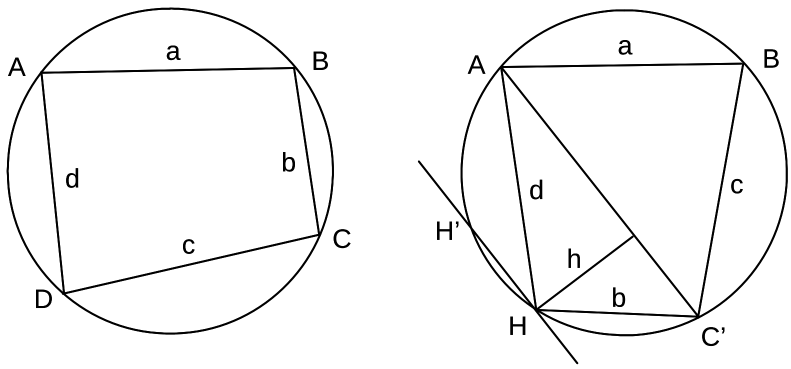


$\frac{JH}{AH} = \frac{BH-FH}{BH} = \frac{HC-HG}{HC}$. De donde $FH = BH \cdot \left(1 - \frac{JH}{AH}\right)$, $HG = HC \cdot \left(1 - \frac{JH}{AH}\right)$ y $FG = FH + HG = BC \cdot \left(1 - \frac{JH}{AH}\right)$. Por tanto, $S_{DEFG} = BC \cdot \left(1 - \frac{JH}{AH}\right) \cdot JH$.

Luego, $JH^2 - AH \cdot JH + \frac{S_{DEFG} \cdot AH}{BC} = 0$. Es decir, se conoce la suma AH de dos segmentos, y su producto $\frac{S_{DEFG} \cdot AH}{BC}$. Obtenido JH, se traza una paralela a BC, a una distancia JH.

D 14- Construir un cuadrilátero inscriptible conociendo dos lados opuestos, AB y CD, el producto $AD \cdot BC$ de los otros dos lados, y el radio R del círculo circunscrito.

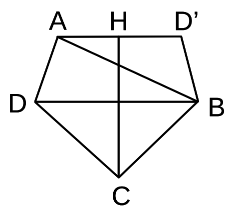
Solución:



Se traza el círculo de radio R, y se llevan los lados conocidos, AB y, a continuación, CD (BC' en la figura de la derecha). Se trata, en esta figura, de construir el triángulo AHC', en el que H está sobre el círculo circunscrito y se conoce el producto $AH \cdot HC' = AD \cdot BC$. Por tanto se conoce el área de dicho triángulo $S_{AHC'} = \frac{AH \cdot HC' \cdot \sin\widehat{H}}{2} = \frac{AC' \cdot h}{2}$, de donde se obtiene el valor de h. La paralela a AC' a la distancia h, corta al círculo en H y H'. Conocidos los cuatro lados, se colocan en el orden de la figura de la izquierda.

D 15- Construir un cuadrilátero conociendo los lados AB y AD, los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$, y sabiendo que los otros dos lados son iguales.

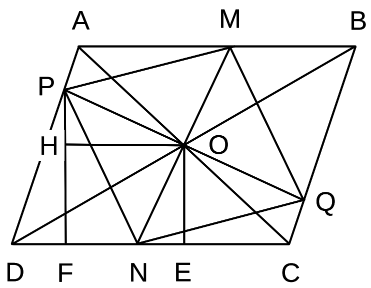
Solución:



En un punto cualquiera B, de una recta BC, se trazan los ángulos $\widehat{CBA} = \widehat{B}$ y $\widehat{CBD'} = \widehat{D}$. Sobre el lado BA del primero, se lleva el lado conocido BA, y sobre el BD' del segundo, el lado conocido $AD = BD'$. Se traza la mediatriz HC de AD' que corta a BC en C. El simétrico de B respecto de la mediatriz HC, es el vértice D.

D 16- Inscribir en un paralelogramo, un rombo semejante a uno dado.

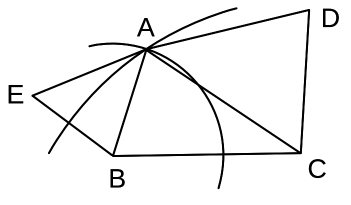
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sea $MNPQ$, el rombo inscrito en el paralelogramo $ABCD$. Su centro está en el punto O de unión de las diagonales de este. Desde O, se trazan las perpendiculares OE a DC, y OH a PF (perpendicular desde P sobre DC). En los triángulos semejantes OHP y ONE, se tiene $\frac{ON}{OP} = \frac{OE}{OH}$, luego $OH = \frac{OE \bullet OP}{ON}$, donde el cociente $\frac{OP}{ON}$ se conoce por ser igual al cociente de las semidiagonales del rombo dado, y OE se conoce por ser la mitad de la altura del paralelogramo. Para construir el rombo, se obtiene $OH = EF$, según la fórmula anterior. Se levanta la perpendicular FP, que corta en P a AD. La prolongación de PO determina Q sobre BC. La perpendicular en O a PQ, determina M y N sobre AB y DC, respectivamente.

D 17- Construir un cuadrilátero $ABCD$, conociendo los cuatro lados y la suma de dos ángulos opuestos $\widehat{B} + \widehat{D}$.

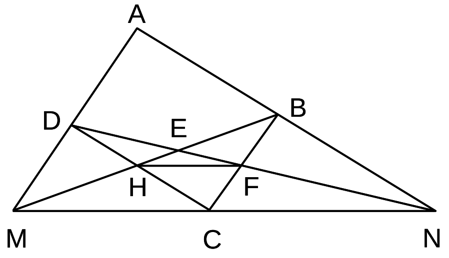
Solución:



Se traza el lado BC, y con centro B y radio BA se traza una circunferencia sobre la que está A. Se lleva el ángulo $\widehat{CBE} = \widehat{B} + \widehat{D}$, y sobre el lado BE se lleva $BE = \frac{AB \bullet CD}{DA}$. Los triángulos ABE y ADC son semejantes, siendo su razón de semejanza $\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DC}$. Por tanto $\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD}$ y el vértice A se encuentra sobre la circunferencia lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a E y C están en la relación conocida $\frac{AB}{AD}$. La intersección de las dos circunferencias determina el vértice A. El vértice D queda determinado por la intersección de la circunferencia de centro A y radio AD, con la de centro C y radio CD.

D 18- Se da un paralelogramo *ABCD* y se traza una secante cualquiera que corta en *F* a *BC*, y en *H* a *CD*. Las rectas *BH* y *DF* cortan respectivamente a *AD* y *AB* en *M* y *N*. Demostrar que *MN* es paralela a la secante *FH*.

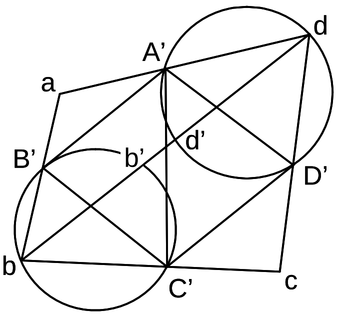
Solución:



Sea *E* el punto de intersección de *BM* y *DN*. Los triángulos *EBF* y *DEM* son semejantes por tener sus ángulos iguales. Luego $\frac{EF}{ED} = \frac{BE}{ME}$. También son semejantes los triángulos *EDH* y *EBN*, por lo que $\frac{EH}{EB} = \frac{DE}{NE}$. Por tanto $EH \bullet EN = EF \bullet EM$, es decir $\frac{EH}{EM} = \frac{EF}{EN}$, luego *HF* y *MN* son paralelas.

D 19- Inscribir en un cuadrilátero dado *ABCD*, un rombo $a'b'c'd'$ semejante a uno dado $A'B'C'D'$.

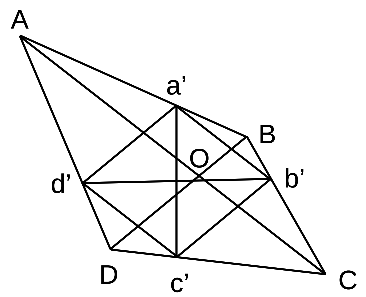
Solución:



Se circunscribe al rombo dado $A'B'C'D'$, un cuadrilátero *abcd*, semejante al *ABCD*. Para circunscribir el cuadrilátero *abcd*, se trazan, por ejemplo, sobre los lados del rombo $A'D'$ y $B'C'$, los arcos capaces de los ángulos $\widehat{D}$ y $\widehat{B}$ del cuadrilátero *ABCD*, que son lugares geométricos de los vértices *b* y *d*. Como el triángulo *abd* es semejante al *ABD*, se conocen los ángulos $\widehat{adb}$ y $\widehat{abd}$, y por tanto los arcos $A'd'$ y $B'b'$. La recta $b'd'$ corta a los arcos capaces en los vértices *b* y *d*, que unidos con $A'B'C'D'$, dan los vértices *a* y *c*. Conocido el *abcd*, se conocen las relaciones $\frac{A'a}{A'd}$, $\frac{B'a}{B'b}$, $\frac{C'b}{C'c}$ y $\frac{D'c}{D'd}$, que aplicadas al cuadrilátero *ABCD*, dan los vértices del rombo $a'b'c'd'$.

D 20- Inscribir en un cuadrilátero dado *ABCD*, un rombo $a'b'c'd'$, cuyos lados sean paralelos a las diagonales del cuadrilátero.

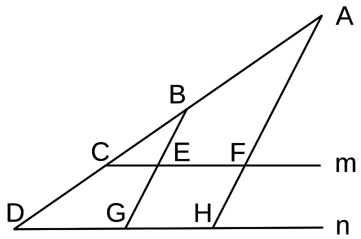
Solución:



Supuesto resuelto el problema, se conocen los ángulos $\widehat{a'd'c'}$ y $\widehat{d'c'b'}$, por ser iguales a $\widehat{BOC}$ y a $\widehat{AOB}$. Luego se puede construir un rombo $A'B'C'D'$ semejante al pedido y luego circunscribirle un cuadrilátero *abcd* semejante al dado, según lo expuesto en el problema D 19, obteniéndose luego el rombo pedido $a'b'c'd'$.

D 21- Se dan dos paralelas *m* y *n*, y dos puntos fuera de ellas, *A* y *B*. Trazar dos paralelas, una por *A* y la otra por *B*, de forma que los lados del paralelogramo formado por estas paralelas y las rectas *m* y *n*, estén en una relación dada *k*.

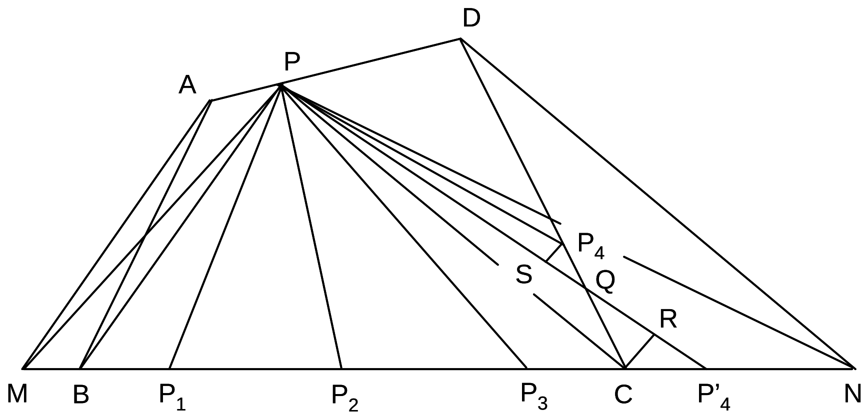
Solución:



La recta *AB* corta a *m* y *n*, en *C* y *D*. Las paralelas por *A* y *B*, cortan a *m* y *n*, en *F* y *H*, y en *E* y *G*. En los triángulos semejantes *BCE* y *BDG*, se tiene $\frac{EG}{CD} = \frac{BE}{BC}$, luego $EG = \frac{CD \cdot BE}{BC}$. En los triángulos semejantes *ACF* y *BCE*, se tiene $\frac{AB}{EF} = \frac{CB}{CE}$, luego $EF = \frac{AB \cdot CE}{CB}$. Por tanto $\frac{EG}{EF} = \frac{CD \cdot EB}{AB \cdot EC} = k$, de donde $\frac{EB}{EC} = \frac{k \cdot AB}{CD}$. Como *AB* y *CD* son constantes, *E* se encuentra en la intersección con *m*, de la circunferencia lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos *B* y *C*, es constante e igual a $\frac{k \cdot AB}{CD}$. La recta *BE* y su paralela por *A*, resuelven el problema.

D 22- Dividir un cuadrilátero cualquiera en cinco partes equivalentes, por rectas que parten de un punto dado de su perímetro.

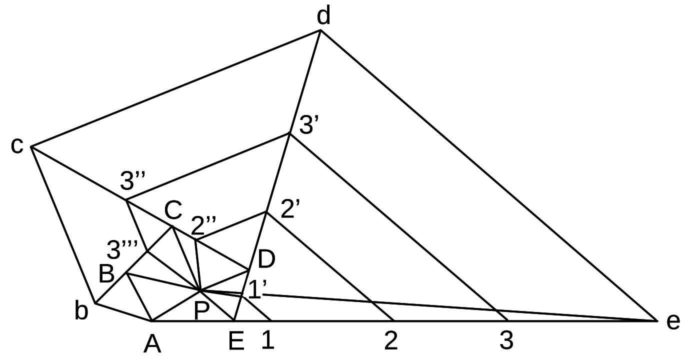
Solución:



Sea *ABCD* el cuadrilátero y *P* el punto dado de su perímetro. Trazando por *A* la paralela *AM* a *PB*, el triángulo *PMB* es equivalente al *ABP*, pues tienen la misma base *PB* y la misma altura que es la distancia entre las paralelas *PB* y *AM*. Procediendo de la misma forma con los triángulos *PDC* y *PNC*, que son equivalentes, resulta que el triángulo *PMN* es equivalente al cuadrilátero dado *ABCD*. La base *MN* del triángulo se divide en cinco partes iguales por los puntos P_1, P_2, P_3 y P'_4. El cuadrilátero $PABP_1$ es igual a la suma de los triángulos PP_1B y *PAB*, luego es igual a la suma de los triángulos *PMB* y PP_1B. Los sucesivos triángulos PP_1P_2 y PP_2P_3 son equivalentes cada uno de ellos a $\frac{1}{5}$ del área del cuadrilátero (o del triángulo *PMN*).Se trata ahora de encontrar un cuadrilátero PP_3CP_4 equivalente a $\frac{1}{5}$ del área total. Este cuadrilátero tiene común con el triángulo $PP_3P'_4$, el cuadrilátero PP_3CQ. Hay que encontrar el triángulo PP_4Q equivalente al QCP'_4, para lo cual la altura SP_4 ha de ser igual a $\frac{CR \cdot QP'_4}{QP}$. Obtenido así el punto P_4, se une con *P*.

D 23- Dado un pentágono y un punto en su interior, trazar por este, rectas que vayan hasta puntos del perímetro, de forma que el área del pentágono quede dividida en cuatro partes equivalentes.

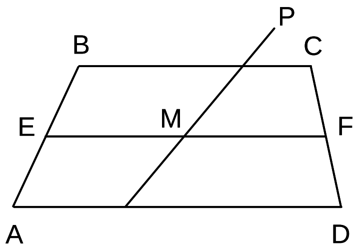
Solución:



Sea el pentágono *ABCDE*. Se une *P* con los cinco vértices. Se traza *Ab* paralela a *PB* hasta que corte a la prolongación de *BC*. Se traza *bc* paralela a *PC*, *cd* paralela a *PD*, *de* paralela a *PE*. El triángulo *PAe* es equivalente al pentágono. En efecto, tienen común el triángulo *PAE*, y el resto es equivalente al *PEd*, pues tienen la misma base *PE* y los vértices opuestos están sobre *de*, paralela a la base. Y así sucesivamente. Se divide la base *Ae* en cuatro partes iguales: *A*,1; 1,2; 2,3; 3,*e*. Basta hallar en el pentágono partes equivalentes a los triángulos *PA*1, *P*12, *P*23 y *P*3*e*. Para ello se trazan paralelas a *PE* por 1, 2, 3, *e*, hasta que corten a *Dd*; luego paralelas a *PD* por $2'$, $3'$, *d*, hasta que corten a *Cc*, y así sucesivamente. Estas paralelas van cortando a los lados del pentágono en $1'$, $2''$, $3'''$. Las rectas $P1'$, $P2''$, $P3'''$, *PA*, dividen el área del pentágono en cuatro partes equivalentes.

D 24- Dado un trapecio y un punto exterior *P*, trazar por *P* una secante que divida el área del trapecio en dos partes equivalentes.

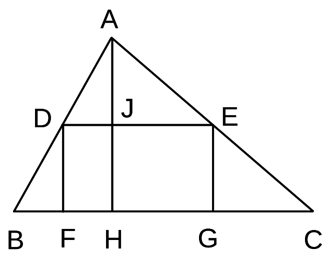
Solución:



Se traza la paralela media *EF* y se halla su punto medio *M*. La recta *PM* divide al trapecio en dos partes equivalentes.

D 25- Inscribir en un triángulo dado, un rectángulo con un lado en la base del triángulo, y que sea de área máxima.

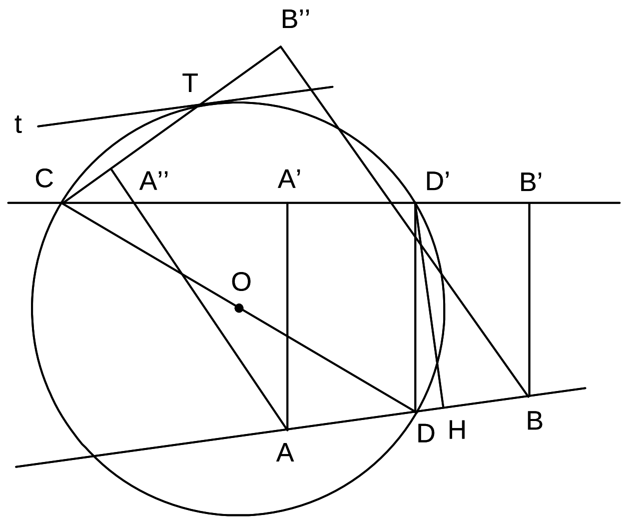
Solución:



En el problema D 13, se ha obtenido $S_{DEFG} = \dfrac{BC}{AH} \cdot (AH - JH) \cdot JH$, que será máxima cuando $AH - JH = JH$, es decir cuando $JH = \dfrac{AH}{2}$.

D 26- Se dan tres puntos A, B y C, y una recta variable que pasa por C, sobre la que se proyectan A y B en A' y B'. Hallar la posición de dicha recta para que el área del trapecio $AA'B'B$ sea máxima.

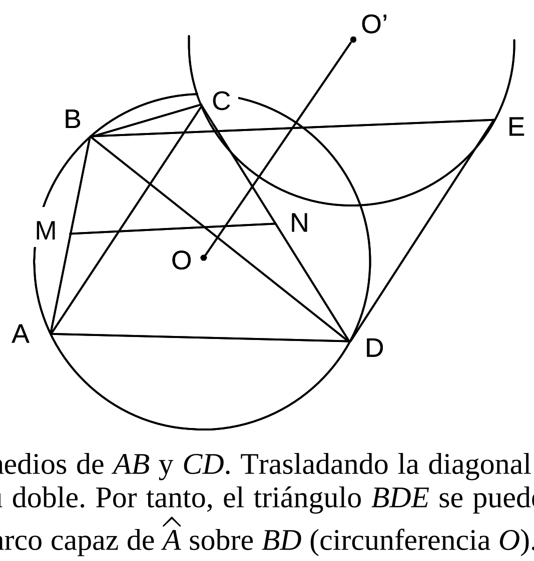
Solución:



El área del trapecio es igual al producto de uno de los lados no paralelos por la altura trazada sobre él desde el punto medio del lado opuesto. Sea D' el punto medio de $A'B'$, y $D'H$ la altura sobre AB. Siendo AB fijo, el máximo del área coincide con el máximo de $D'H$. Como D' describe la circunferencia de diámetro CD, el máximo de $D'H$ corresponde al punto de tangencia T con la tangente t paralela a AB. El trapecio de área máxima es $AA''B''B$, siendo A'' y B'' las proyecciones de A y B, sobre CT.

D 27- Construir un cuadrilátero $ABCD$, conociendo las diagonales AC y BD, la recta que une los puntos medios de dos lados opuestos, la razón de los otros dos lados y el ángulo $\widehat{A}$.

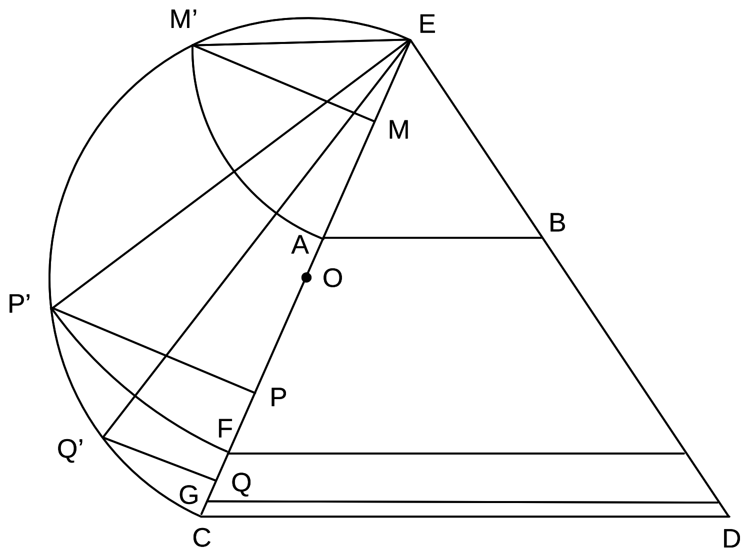
Solución:



Sean M y N, los puntos medios de AB y CD. Trasladando la diagonal AC a la posición DE, BE es paralela a MN e igual a su doble. Por tanto, el triángulo BDE se puede construir, pues se conocen sus tres lados. Se traza el arco capaz de $\widehat{A}$ sobre BD (circunferencia O). Como AC está determinada en magnitud y dirección (paralela a DE), C describe la circunferencia O', igual a la O, y trasladada paralelamente a DE una longitud $OO' = DE = AC$. Como $\frac{CB}{AD}$ está dado, y B y D son fijos, A describe la circunferencia homotética de O', con B de centro de homotecia y razón la dada, que corta en A al arco capaz O. El vértice C es el trasladado de A en la magnitud y dirección de DE.

D 28- Dividir un trapecio por dos rectas paralelas a las bases, en partes proporcionales a los números 2, 5 y 8.

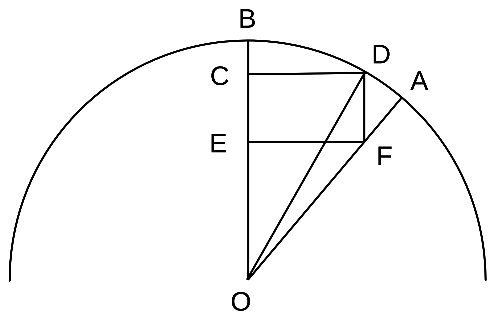
Solución:



Sea el trapecio *ABCD*. Se prolongan *AC* y *BD* hasta su intersección *E*. Se traza el semicírculo de diámetro *EC*. El arco de centro *E* y radio *EA*, corta a la semicircunferencia en M', de donde se baja la perpendicular a *EC* que la corta en *M*. Se divide *MC* en partes proporcionales a los números dados: *MP*, *PQ* y *QC*. Se levantan las perpendiculares PP' y QQ'. Los arcos de radios EP' y EQ' cortan a *EC* en *F* y *G*. Las paralelas por *F* y *G*, a la base del trapecio, resuelven el problema, ya que las áreas de los triángulos formados son proporcionales, por ser semejantes, a los cuadrados de los lados homólogos, que son EM', EP', EQ' y *EC*, y estas longitudes son proporcionales a los números dados.

D 29- Inscribir en un sector circular dado, un rectángulo de área máxima, con dos vértices en el arco.

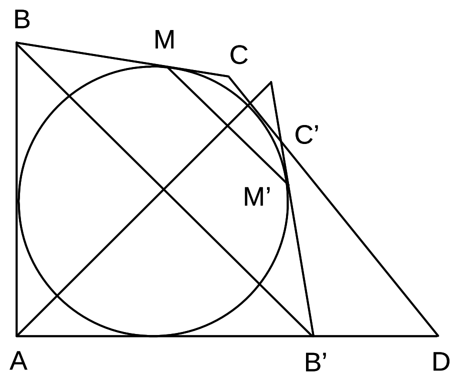
Solución:



Sea *AOB* la mitad del sector y *CDEF* la mitad del rectángulo. Sea $\alpha = \widehat{AOB}$ y $\beta = \widehat{DOB}$. El área del rectángulo es $2 \cdot CD \cdot CE$. Como $CD = R\sin\beta$, $EO = \dfrac{R\sin\beta}{\tan\alpha}$, $CE = R\left(\cos\beta - \dfrac{\sin\beta}{\tan\alpha}\right)$, se tiene que $S = 2R\sin\beta \cdot R\left(\cos\beta - \dfrac{\sin\beta}{\tan\alpha}\right) = \dfrac{2R^2}{\sin\alpha}\sin\beta \cdot \sin(\alpha-\beta)$. Este producto es máximo cuando lo sea $\sin\beta \cdot \sin(\alpha-\beta)$, para α dado. Como este producto es igual a $-\dfrac{1}{2}[\cos\alpha - \cos(2\beta-\alpha)]$, será máximo cuando lo sea $\cos(2\beta-\alpha)$, es decir cuando $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$.

D 30- Construir un cuadrilátero circunscriptible, conociendo los lados AB y AD, y los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$.

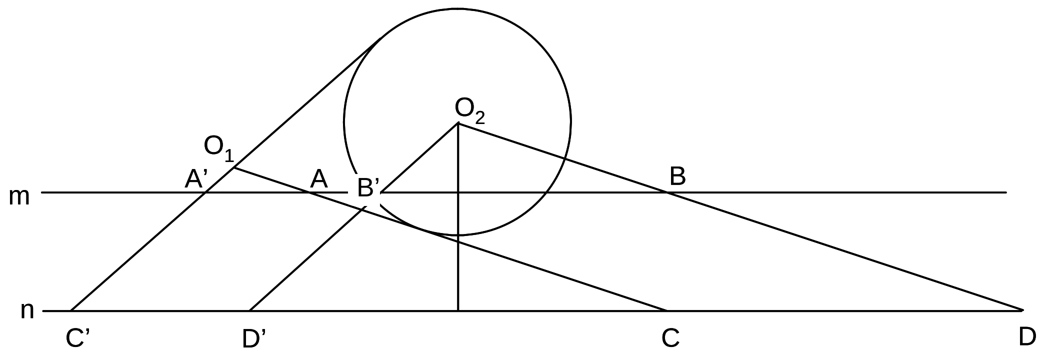
Solución:



Doblando el cuadrilátero por la bisectriz de $\widehat{A}$, AB se sitúa en AB', el ángulo $\widehat{B}$ en $\widehat{AB'C'}$, y el círculo inscrito será tangente además de a los cuatro lados, a $B'C'$, cuyo punto de tangencia es M', simétrico del M. Para construir el cuadrilátero, se trazan AD y AB' y los ángulos $\widehat{D} = \widehat{ADC}$, y $\widehat{B} = \widehat{AB'C'}$. La circunferencia tangente a las tres rectas AD, DC y $B'C'$, es la inscrita. Las tangentes a ella por A y C resuelven el problema.

D 31- Se dan dos paralelas m y n, y dos puntos O_1 y O_2 fuera de ellas. Trazar por estos dos puntos, dos paralelas que formen con las anteriores un rombo.

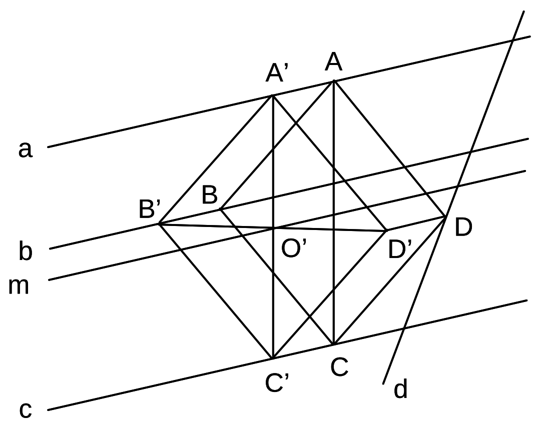
Solución:



Se traza con centro O_2 una circunferencia de radio la distancia entre las dos paralelas m y n. Se trazan por O_1 las tangentes O_1C y O_1C', y por O_2 se trazan las paralelas a las tangentes, O_2D y O_2D'. Los rombos son $A'C'D'B'$ y $ACDB$, pues la distancia entre los lados opuestos es igual a la distancia entre m y n..

D 32- Trazar un rombo de área dada, de forma que tres de sus vértices estén sobre tres rectas paralelas, y el cuarto vértice sobre una recta que corta a las anteriores.

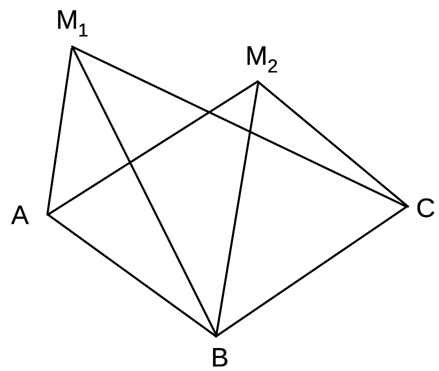
Solución:



Sean a, b y c las tres paralelas dadas y d la secante. Sea m la paralela media de las dos paralelas extremas;
el centro O del rombo estará sobre ella. El triángulo $A'O'B'$ se puede construir, pues se conoce su área, es rectángulo y sus vértices están sobre las paralelas a, b y m (con centro O' se gira 90º una de las paralelas, y se halla su homotética). Completado el rombo, se traslada paralelamente hasta que el vértice D esté sobre la recta d.

D 33- Generalizar el problema de Pothenot para el caso de que se quieran determinar simultáneamente dos puntos, conocidas las posiciones de otros tres.

Solución:



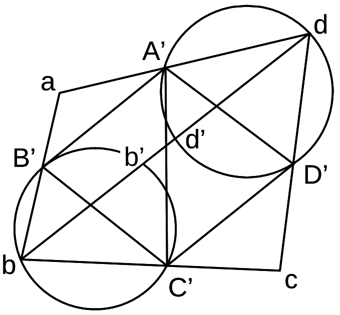
Se dan los puntos A, B y C, y se pide determinar los puntos M_1 y M_2, conocidos los ángulos $\alpha_1 = \widehat{AM_1B}$, $\beta_1 = \widehat{BM_1C}$, $\alpha_2 = \widehat{AM_2B}$ y $\beta_2 = \widehat{BM_2C}$, y las distancias $AB = m$ y $BC = n$.
Sean los ángulos $x_1 = \widehat{M_1AB}$, $y_1 = \widehat{M_1CB}$, $x_2 = \widehat{M_2AB}$, $y_2 = \widehat{M_2CB}$, y sea $\widehat{V} = \widehat{ABC}$.
Operando con las relaciones de los triángulos formados, se tiene: $BM_1 = \dfrac{m\sin x_1}{\sin\alpha_1} = \dfrac{n\sin y_1}{\sin\beta_1}$,
$\dfrac{\sin x_1}{\sin y_1} = \dfrac{n\sin\alpha_1}{m\sin\beta_1} = \tan\phi_1$, $\dfrac{\sin x_1 - \sin y_1}{\sin x_1 + \sin y_1} = \tan(\phi - 45º) = \dfrac{\tan\dfrac{x_1 - y_1}{2}}{\tan\dfrac{x_1 + y_1}{2}}$,
$x_1 + y_1 + V + \alpha_1 + \beta_1 = 2\pi$, $\dfrac{x_1 + y_1}{2} = \pi - \dfrac{V + \alpha_1 + \beta_1}{2} = \delta_1$,
$\tan\dfrac{x_1 - y_1}{2} = \tan\delta_1 \tan\left(\phi_1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\dfrac{x_1 - y_1}{2} = \delta_1'$, $x_1 = \delta_1 + \delta_1'$, $y_1 = \delta_1 - \delta_1'$,
$M_1A = \dfrac{m\sin(\alpha_1 + x_1)}{\sin\alpha_1}$, $M_1B = \dfrac{m\sin x_1}{\sin\alpha_1}$, $M_1C = \dfrac{n\sin(y_1 + \beta_1)}{\sin\beta_1}$.
Análogamente se obtienen las fórmulas referentes a M_2.
Nota: Este problema corresponde al ámbito de la trigonometría.

D 34- Rellenar un plano (supuesto ilimitado) con polígonos regulares iguales entre sí e igualmente orientados.

Solución: En el problema D 1, se dedujo que se podía rellenar un plano en las condiciones de su enunciado, con triángulos equiláteros, cuadrados y exágonos regulares. En este problema, se añade la condición de estar igualmente orientados, lo que el triángulo equilátero no cumple, siendo el cuadrado y el exágono la solución.

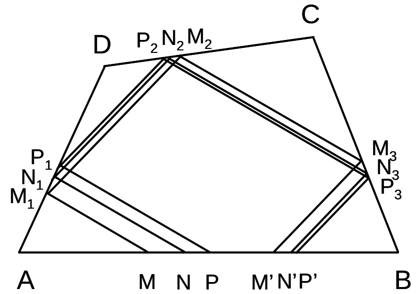
D 35- En un cuadrilátero dado, inscribir un paralelogramo cuyos lados tengan direcciones dadas.

Solución:



Se procede como lo indicado en el problema D 19. Se circunscribe a un paralelogramo $A'B'C'D'$, que satisfaga el enunciado, un cuadrilátero *abcd*, semejante al *ABCD* dado.. Para circunscribir el cuadrilátero *abcd*, se trazan, por ejemplo, sobre los lados del paralelogramo $A'D'$ y $B'C'$, los arcos capaces de los ángulos $\widehat{D}$ y $\widehat{B}$ del cuadrilátero *ABCD*, que son lugares geométricos de los vértices *b* y *d*. Como el triángulo *abd* es semejante al *ABD*, se conocen los ángulos $\widehat{adb}$ y $\widehat{abd}$, y por tanto los arcos $A'd'$ y $B'b'$. La recta $b'd'$ corta a los arcos capaces en los vértices *b* y *d*, que unidos con $A'B'C'D'$, dan los vértices *a* y *c*. Conocido el *abcd*, se conocen las relaciones $\frac{A'a}{A'd}$, $\frac{B'a}{B'b}$, $\frac{C'b}{C'c}$ y $\frac{D'c}{D'd}$, que aplicadas al cuadrilátero *ABCD*, dan los vértices del paralelogramo $a'b'c'd'$.

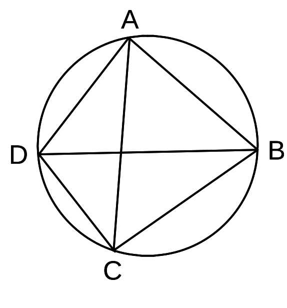
También se puede resolver proyectivamente:



Se toma un punto cualquiera *P* sobre *AB* y se trazan las sucesivas paralelas a las direcciones dadas: PP_1, P_1P_2, P_2P_3 y P_3P'. De esta forma, se establecen sobre *AB*, dos series: *P*, *M*, *N*... y P', M', N'... Los puntos dobles solucionan el problema.

D 36- Construir un cuadrilátero inscriptible *ABCD*, conociendo la diagonal *AC*, el lado *AD*, el ángulo $\widehat{A}$ y el ángulo $\widehat{ACB}$.

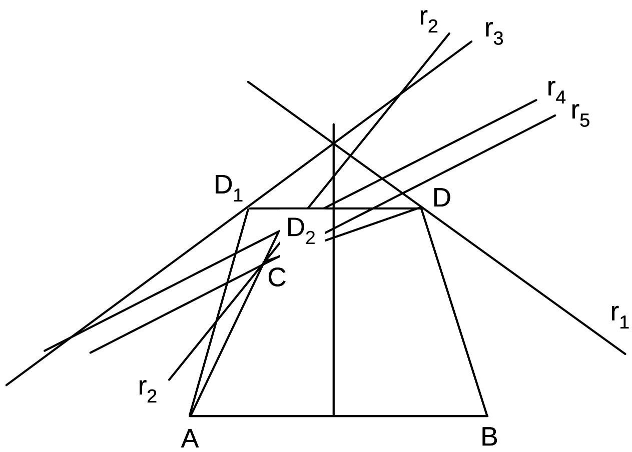
Solución:



$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Luego se conoce el ángulo $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \pi - \widehat{A} - \widehat{ADB}$, por lo que se puede construir el triángulo ADC. Se traza su círculo circunscrito y el ángulo $\widehat{ADB}$, con lo que queda determinado el vértice B.

D 37- Construir un cuadrilátero conociendo la posición de los vértices A y B, la diferencia de los ángulos $\widehat{A} - \widehat{B}$, dos rectas r_1 y r_2 sobre las que se encuentran los vértices C y D, y la relación $\dfrac{AC}{DB} = m$.

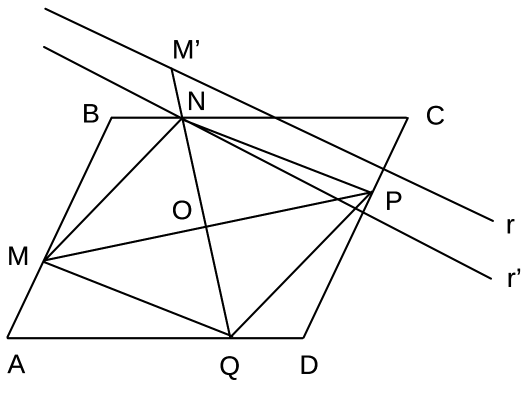
Solución:



Se dobla la figura alrededor de la mediatriz de AB, con lo que BD se sitúa en AD_1, r_1 en r_3, $\widehat{CAD_1} = \widehat{B} - \widehat{A}$, $\dfrac{AC}{AD_1} = m$. Al girar r_3 alrededor de A, un ángulo igual a $\widehat{A} - \widehat{B}$, se posiciona en r_4, D_1 en D_2, y $\dfrac{AC}{AD_2} = m$. Multiplicando r_4 por m, con centro A, se obtiene r_5 que corta a r_2 en C. Para obtener D, se lleva $\widehat{ABD} = \widehat{CAB} + \left(\widehat{B} - \widehat{A}\right)$, y $BD = \dfrac{AC}{m}$.

D 38- Inscribir en un paralelogramo dado $ABCD$, un rombo $MNPQ$ de área dada k^2.

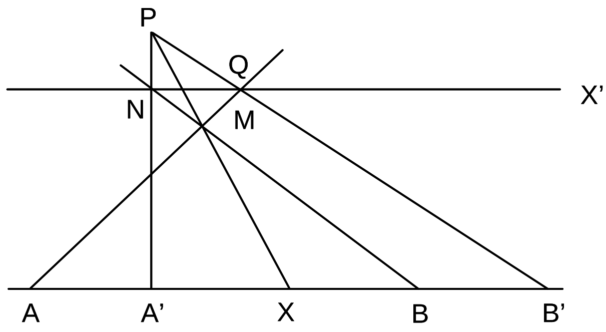
Solución:



El centro del rombo ha de coincidir con el centro O del paralelogramo. El problema se reduce a inscribir el triángulo rectángulo OMN, estando M sobre AB, N sobre BC y conociendo el producto $OM \cdot ON = \dfrac{k^2}{2}$. Girando AB, 90º alrededor de O, toma la posición r, pasando M a M'. Multiplicando r desde O por la razón $\dfrac{k^2}{2 \cdot OM}$, se obtiene r', y por tanto N en su intersección con BC. Uniendo N con O se determina Q, y su perpendicular por O determina M y P.

D 39- Cortando un cuadrilátero cualquiera por una secante arbitraria r, los puntos de intersección con los lados opuestos y con las diagonales están en involución. Aplíquese este principio para hallar solamente con la regla, el punto homólogo de $X(5)$, en la involución definida por $A(3)$, $A'(4)$, $B(6)$, $B'(7)$.

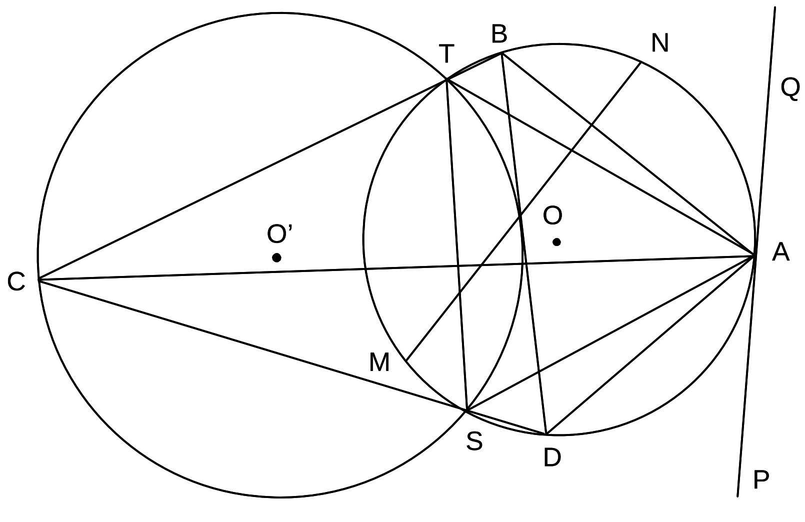
Solución:



Sobre una recta se marcan las abscisas de A, A', B, B' y X. Se trazan por A y B secantes cualesquiera que se cortan en M. y se une X con M. Se traza una secante $A'N$ que corta a XM en P. Se une P con B', que corta en Q a AM. La recta NQ corta a AB en el punto X', homólogo de X. En el caso de los datos del enunciado, la recta NQ es paralela a AB, siendo X' el punto impropio de la dirección AB.

D 40- Construir un cuadrilátero $ABCD$, conociendo las diagonales AC y BD, y los cuatro ángulos.

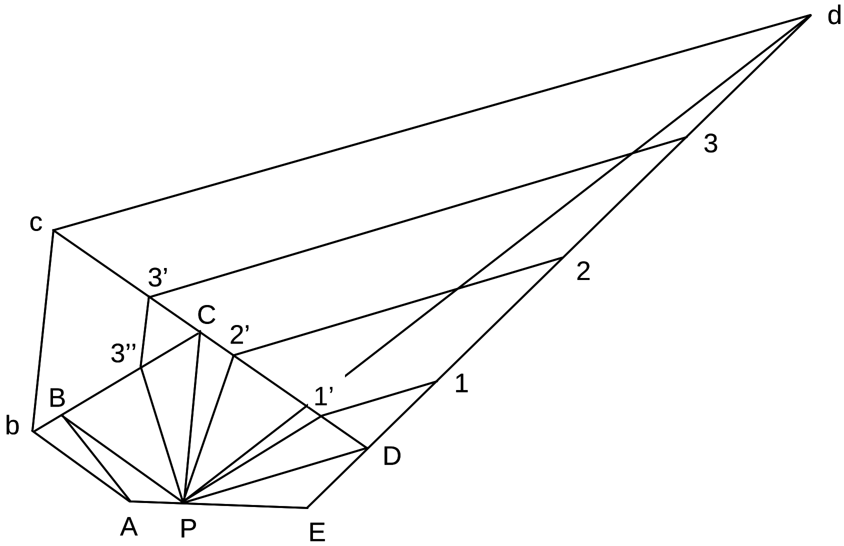
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sea O el arco capaz de $\widehat{A}$ sobre la diagonal BD, que corta a BC y CD en T y S, respectivamente. La tangente PQ en A, forma con AT y AS, los ángulos $\widehat{PAT} = \widehat{B}$ y $\widehat{QAS} = \widehat{D}$. Para construir el cuadrilátero, sobre una recta MN igual a una de las diagonales, por ejemplo la BD, se describe el arco capaz O de uno de los ángulos opuestos a ella, en este caso el $\widehat{A}$. Sobre el arco capaz se toma un punto cualquiera A y se traza la tangente PQ en dicho punto, y se forman los ángulos $\widehat{PAN}$ y $\widehat{QAS}$, iguales a los que corresponden a los vértices B y D de la diagonal citada. Sobre ST se traza el arco capaz O' del ángulo $\widehat{C}$, que es cortado en C por la circunferencia de centro A y radio la diagonal AC. Las rectas CS y CT determinan sobre O, los vértices B y D.

D 41- Se da un pentágono *ABCDE* y un punto cualquiera *P* sobre su perímetro. Trazar rectas por *P*, que dividan el pentágono en cuatro partes equivalentes.

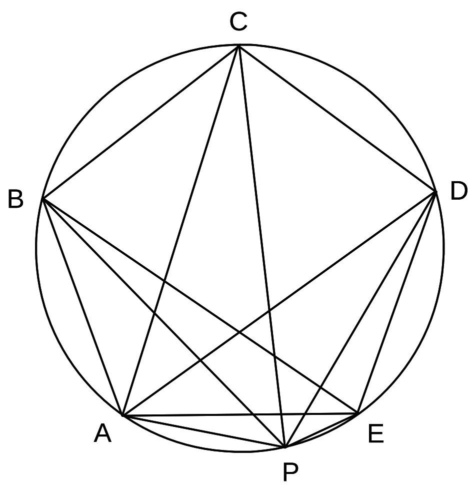
Solución:



Se siguen procedimientos similares a los descritos en los problemas D 22,y D 23. Se une *P* con los vértices. Se traza por *A* la paralela *Ab* a *PB*, estando *b* sobre la prolongación de *BC*. De la misma forma se definen los puntos *c* y *d*. El triángulo *PdE* es equivalente al pentágono dado. Se divide *Ed* en cuatro partes iguales, por los puntos 1, 2 y 3. Como se indica en la figura, se van determinando los puntos $1'$, $2'$ y $3''$. Las rectas $P1'$, $P2'$ y $P3''$ solucionan el problema.

D 42- Se da un pentágono regular *ABCDE*, y un punto *P* del arco *AE*. Probar que $PA+PC+PE = PB+PD$.

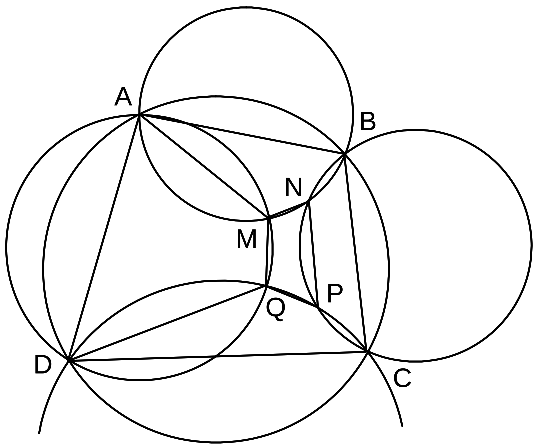
Solución:



En el cuadrilátero inscriptible *EPAC*, siendo *l* el lado del pentágono y *d* su diagonal, se tiene: $PC \cdot AE = PE \cdot AC + PA \cdot EC$, es decir $l \cdot PC = d \cdot (PE + PA)$. En el cuadrilátero inscriptible *EPCB*, se tiene: $l \cdot PE = d(PC - PB)$. En el cuadrilátero inscriptible *EPCD*, se tiene: $d \cdot PD = l(PE + PC)$. Sumando las tres igualdades, se tiene: $PA - PB + PC - PD + PE = 0$.

D 43- En el cuadrilátero inscriptible *ABCD*, se trazan cuatro círculos arbitrarios que pasan por *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, respectivamente. Estos cuatro círculos se vuelven a cortar en *M*, *N*, *P* y *Q*. Demostrar que el cuadrilátero *MNPQ* es inscriptible.

Solución:



$\widehat{Q} = \widehat{MQP} = 360º - \widehat{MQD} - \widehat{DQP} = 180º - \widehat{MQD} + 180º - \widehat{DQP} = \widehat{MAD} + \widehat{DCP}$.

De forma similar, $\widehat{N} = \widehat{MNP} = \widehat{PCB} + \widehat{MAB}$.

De donde $\widehat{Q} + \widehat{N} = \widehat{DAM} + \widehat{MAB} + \widehat{DCP} + \widehat{PCB} = \widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180º$.

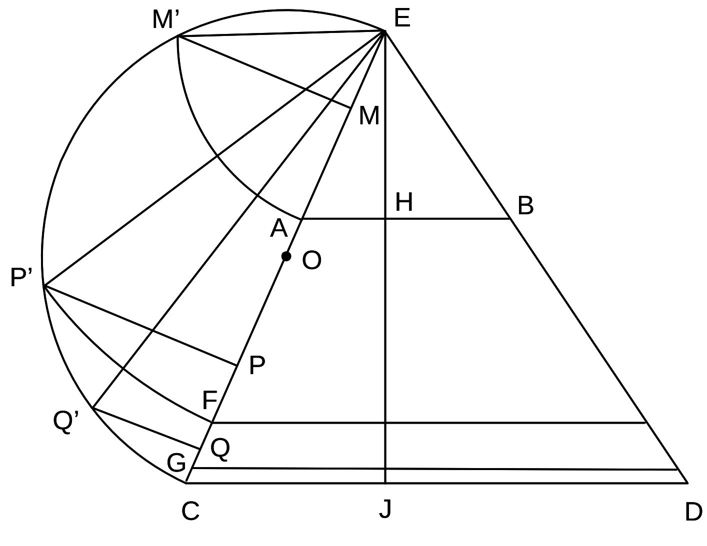
Por tanto, el cuadrilátero *MNPQ* es inscriptible.

D 44- De todos los polígonos de *n* lados que se pueden construir con *n* segmentos dados, indicar cuál es el de área máxima.

Solución: Entre todas las figuras isoperimétricas, el círculo es la de mayor área. Un polígono de *n* lados es de área máxima, cuando es inscriptible en un círculo. Siempre es posible construir con *n* segmentos dados, de los cuales el mayor es menor que la suma de los $n - 1$ restantes, un polígono inscriptible.

D 45- Dividir un trapecio en tres partes, de modo que sus áreas sean proporcionales a 1, 3 y 5. Las bases del trapecio miden 8 y 12, y su altura 7.

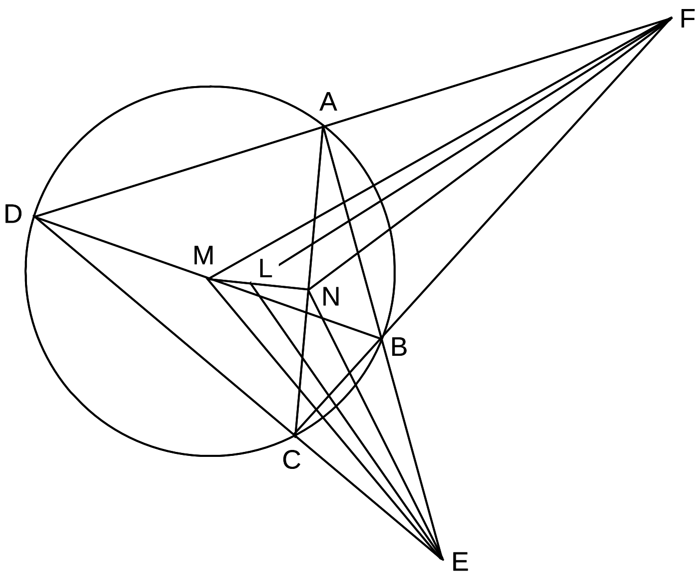
Solución:



Se utiliza el mismo razonamiento y la misma figura que el problema D 28. Se completa el triángulo del que forma parte el trapecio, $AB = 8$, $CD = 12$, $HJ = 7$. $\frac{EH}{EH + 7} = \frac{8}{12}$, $EH = 14$. $S_{EAB} = \frac{8 \cdot 14}{2} = 56$. $S_{ABCD} = \frac{8 + 12}{2} \cdot 7 = 70$. Si a 70 le corresponden 9 partes $(1 + 3 + 5)$, a 56 le corresponden $\frac{9 \cdot 56}{70} = 7{,}2$. Por tanto las áreas son proporcionales a $7{,}2$, 1, 3 y 5, cuyo total es $16{,}2$. Se divide *EC* proporcionalmente a esas cantidades y se sigue como lo expuesto en D 28. Nota: En la figura incluida en este problema, la división de *EC* por los puntos *M*, *P* y *Q*, corresponde a las cantidades del enunciado de D 28.

D 46- Demostrar que si se prolongan los lados opuestos de un cuadrilátero inscriptible y se trazan las bisectrices de los ángulos así formados, el punto de intersección de estas bisectrices y los puntos medios de las diagonales, están en línea recta.

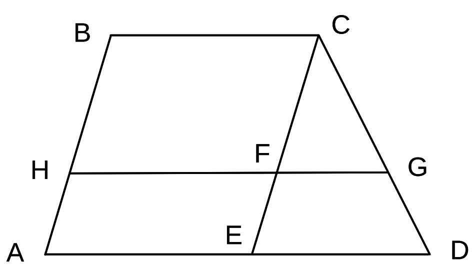
Solución:



Sea $ABCD$ el cuadrilátero inscriptible, M y N los puntos medios de las diagonales, y EL y FL las bisectrices de los ángulos $\widehat{DCEBA}$ y $\widehat{DAFBC}$. Los triángulos EAC y EBD son semejantes, pues tienen el ángulo $\widehat{BEC}$ común y $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$. La recta EN es mediana del primero, y EM del segundo, luego los triángulos EAN y EDM son semejantes, por lo que $\widehat{NEA} = \widehat{DEM}$, y la bisectriz EL de $\widehat{DEA}$ lo es también de $\widehat{MEN}$. Por tanto $\frac{LM}{LN} = \frac{EM}{EN} = \frac{DM}{AN} = \frac{DB}{AC}$. Análogamente, los triángulos AFM y FNC son semejantes y la bisectriz de $\widehat{DFC}$, lo es de $\widehat{MFL}$, y corta a MN en L'. Luego $\frac{L'M}{L'N} = \frac{MF}{NF} = \frac{DM}{NC} = \frac{DB}{AC}$. Por tanto, $\frac{LM}{LN} = \frac{L'M}{L'N}$, de donde L y L' coinciden.

D 47- Hallar la longitud de una paralela a las bases de un trapecio, que divide a los otros dos lados en la proporción $\frac{m}{n}$.

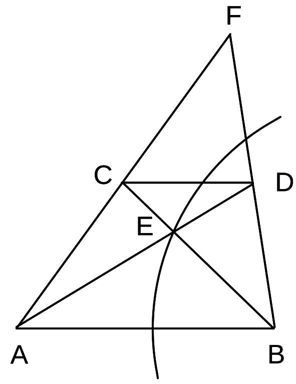
Solución:



Sea el trapecio $ABCD$ y la paralela $HG = HF + FG$, siendo CFE paralela a BA, y sean las bases del trapecio $B = AD$ y $b = BC$. Se tiene: $\frac{FC}{FE} = \frac{GC}{GD} = \frac{m}{n}$, $FG = \frac{m}{m+n} \cdot ED$. Por tanto $HG = b + \frac{m}{m+n}(B - b) = \frac{mB + nb}{m+n}$.

D 48- Construir un trapecio conociendo los cuatro ángulos y las cuatro diagonales.

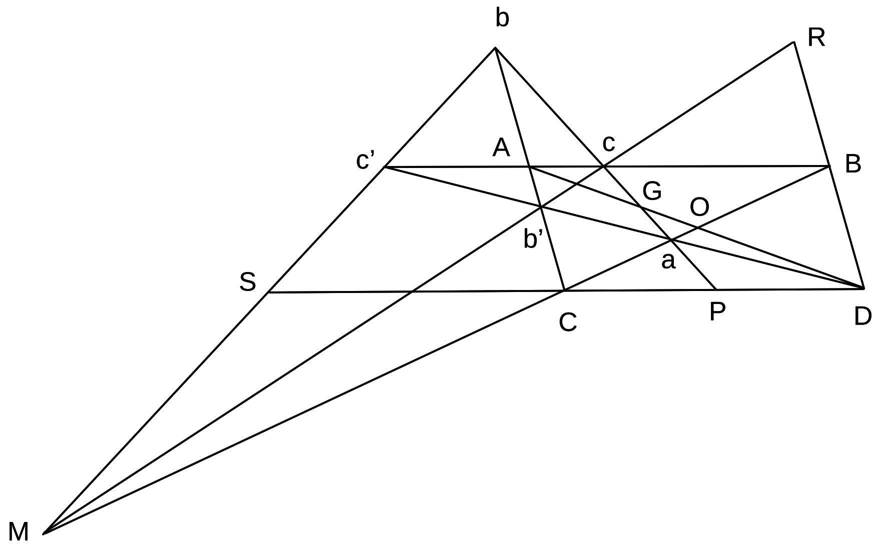
Solución:



Sea $ABCD$ el trapecio, E el punto de cruce de las diagonales, y F el de unión de las prolongaciones de AC y BD. Los triángulos CDE y AEB son semejantes, luego $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AD}{BC}$, es decir que E pertenece a la circunferencia lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a A y B es conocida. Por otro lado, E está en la mediana del ABF. Para construir el trapecio, se trazan sobre un segmento cualquiera $A'B'$, los ángulos $\widehat{F'A'B'} = \widehat{A}$ y $\widehat{F'B'A'} = \widehat{B}$, cuyos lados $A'F'$ y $B'F'$ se cortan en F'. Se traza la circunferencia lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a A' y B' es la dada, y la mediana $F'M'$, siendo M' el punto medio de $A'B'$. La intersección de ambos lugares determina E'. Las rectas $A'E'$ y $B'E'$ determinan C' y D'. Construido el trapecio $A'B'C'D'$, se construye el $ABCD$, semejante a él, siendo la relación de semejanza $\dfrac{AD}{A'D'}$.

D 49- Se da un paralelogramo $ABCD$, cuyas diagonales AD y BC se cortan en O. Por el centro de gravedad del triángulo ABC, se traza una secante cualquiera que corta a BC, CA y AB, en a, b y c, respectivamente. Se determinan los puntos b' y c', donde la recta aD corta a AC y AB. Demostrar que el punto de intersección de bc' y cb', está sobre BC, y que bc' y cb' pasan por un punto fijo.

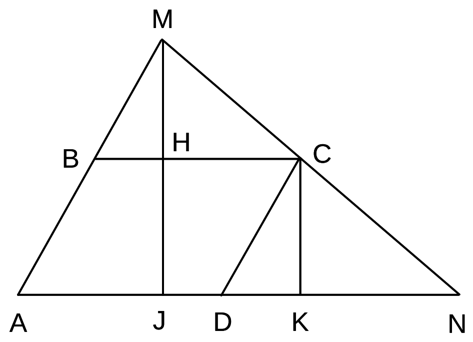
Solución:



Se forma el cuadrilátero completo $bc'b'cMa$. Si $b'c$ corta a BC en M', y bc' en M'', se tiene que $(M'aCB) = (M''aCB) = -1$, luego $M' = M'' = M$, que está sobre BC. Proyectando desde b' y cortando por BD, se tiene: $(MaCB) = -1 = \left(b', MaCB\right) = (RD\infty B)$. Luego R es el simétrico de D respecto a B, por lo que $b'c$ pasa por el punto fijo R. Igualmente, proyectando desde c' y cortando por CD, se tiene: $\left(c', MaCB\right) = -1 = (SDC\infty)$. Luego S es el simétrico de D respecto a C, por lo que cb' pasa por el punto fijo S.

D 50- Por un vértice de un paralelogramo, trazar una secante exterior limitada por los dos lados opuestos, de forma que el triángulo formado sea de área mínima.

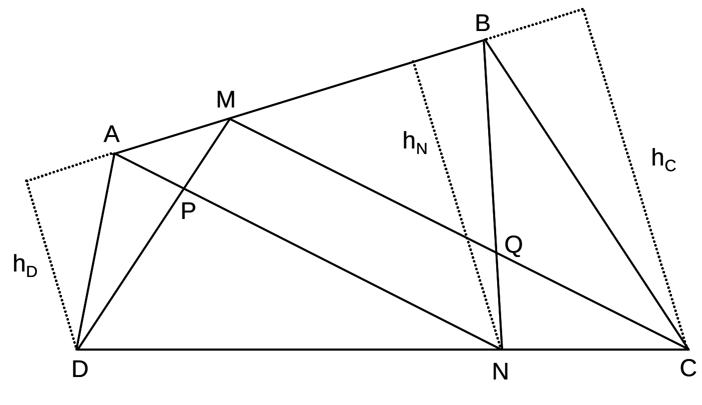
Solución:



Sea el paralelogramo $ABCD$ y MN la secante que pasa por C. La superficie $S_{AMN} = S_{ABCD} + S_{CMB} + S_{CDN}$, será mínima cuando lo sea la suma de los dos últimos sumandos $S_{CMB} + S_{CDN} = \; = \frac{1}{2}(BC \cdot BM + DC \cdot DN)\sin\widehat{CDN}$, que será mínima cuando lo sea $BC \cdot BM + DC \cdot DN$, pues $\widehat{CDN}$ es constante. Como $\frac{MB}{CD} = \frac{BC}{DN}$, la expresión será mínima cuando lo sea $\frac{BC^2 + DN^2}{DN}$, es decir cuando $DN = BC$, con lo que C es el punto medio de MN.

D 51- Se da un cuadrilátero $ABCD$. Sobre el lado AB se toma un punto M, y sobre el lado CD un punto N, de forma que $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Se unen M y N con los vértices del cuadrilátero, formándose seis triángulos y un cuadrilátero. Demostrar que el área de este es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos adyacentes a los lados AD y BC.

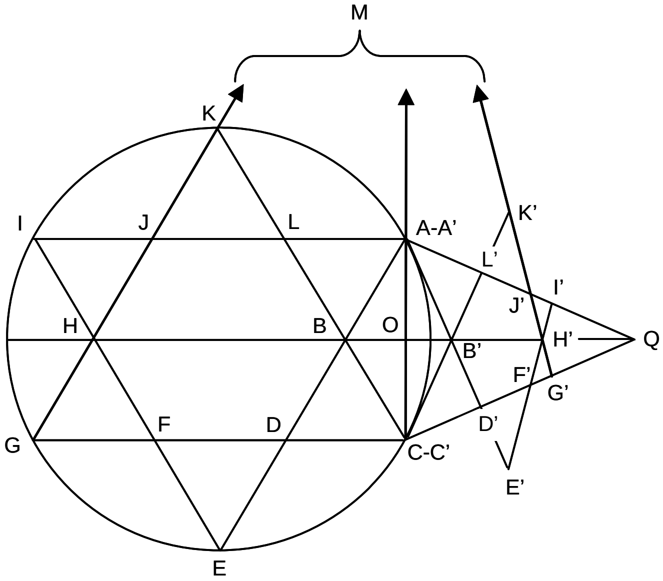
Solución:



Se tiene: $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = k$, luego $S_{BMC} = (1-k)S_{ABC}$, $S_{AMD} = kS_{ABD}$. Por otra parte, como $\frac{CN}{CD} = \frac{h_C - h_N}{h_C - h_D} = k$, $h_N = kh_D + (1-k)h_C$. Multiplicando por $\frac{AB}{2}$, se tiene:
$S_{ABN} = kS_{ABD} + (1-k)S_{ABC} = S_{AMD} + S_{BMC}$.
Como $S_{ABN} = S_{MNPQ} + S_{AMP} + S_{MBQ}$, $S_{AMD} = S_{APD} + S_{APM}$, $S_{BMC} = S_{BCQ} + S_{MBQ,}$ se tiene: $S_{MNPQ} = S_{APD} + S_{BCQ}$.

D 52- Si en un exágono regular se trazan las diagonales que no pasan por el centro, se obtiene una estrella de seis puntas, constituida por la superposición de dos triángulos equiláteros. El contorno de la estrella es un polígono formado por doce lados iguales que enlazan alternativamente vértices entrantes y salientes. Empezando por uno saliente, A, se designan la serie de vértices sucesivos por $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$, hasta cerrar el contorno en A. A la figura de la estrella se le aplica una homología de eje AC, obteniéndose la figura de contorno $A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'$ (A y A' coinciden, así como C y C'). Siendo $A'B' = B'C' = 5\,\text{cm}$, $C'D' = 4\,\text{cm}$, y $D'E' = 2\,\text{cm}$, hallar las longitudes de los restantes lados de la figura $A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'$.

Solución:



Se tiene que $(ADBE) = \dfrac{AB}{AE} \div \dfrac{DB}{DE} = \dfrac{1}{3} \div \dfrac{-1}{1} = \dfrac{-1}{3} = (A'D'B'E') = \dfrac{A'B'}{A'E'} \div \dfrac{D'B'}{D'E'} =$ $= \dfrac{5 \cdot 2}{-(7 + B'D') \cdot B'D'}$, luego $B'D' = 3$. Los lados del triángulo $B'CD'$ miden $B'D' = 3$, $CD' = 4$, $B'C = 5$, por lo que es rectángulo, con $\widehat{B'D'C} = 90^\circ$, siéndolo también el triángulo $A'D'C$, verificándose que $AC = A'C' = \sqrt{A'D'^2 + CD'^2} = 4\sqrt{5}$. De aquí se deducen las medidas de la figura $A\ldots L$, pues siendo el lado del exágono regular $AC = 4\sqrt{5}$, que es igual al radio del círculo circunscrito, se tiene que el lado de los triángulos equiláteros es $4\sqrt{15}$, que $BH = \dfrac{8\sqrt{15}}{3}$, $OH = \dfrac{10\sqrt{15}}{3}$, $MC = 12\sqrt{5}$, $MO = 10\sqrt{5}$, $MA = 8\sqrt{5}$. En el triángulo rectángulo $A'OB'$, $OB' = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{4\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$. Los triángulos rectángulos ACD' y OCQ' son semejantes, pues tienen en común el ángulo $\widehat{C}$, por lo que $\dfrac{AC}{CQ'} = \dfrac{A'D'}{OQ'} = \dfrac{CD'}{OC}$. Siendo $CQ' = AQ' = \dfrac{AC \cdot OC}{CD'} = \dfrac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{4} = 10$, $OQ' = \dfrac{AD' \cdot OC}{CD'} =$ $= \dfrac{8 \cdot 2\sqrt{5}}{4} = 4\sqrt{5}$, $B'Q' = 4\sqrt{5} - OB' = 3\sqrt{5}$. De $(OBH\infty) = (OB'H'Q')$, se tiene:

$\dfrac{OH}{BH} = \dfrac{10\sqrt{15} \cdot 3}{3 \cdot 8\sqrt{15}} = \dfrac{5}{4} = \dfrac{OH'}{OQ'} \div \dfrac{B'H'}{B'Q'} = \dfrac{\left(\sqrt{5} + B'H'\right)3\sqrt{5}}{4\sqrt{5} \cdot B'H'}$, de donde $B'H' = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$, $OH' = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$, $H'Q' = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. En el triángulo AOQ' cortado por la transversal $MJ'H'$, se tiene:

$\dfrac{MA}{MO} \cdot \dfrac{OH'}{H'Q'} \cdot \dfrac{Q'J'}{J'A} = 1 = \dfrac{8\sqrt{5} \cdot \dfrac{5\sqrt{5}}{2} \cdot Q'J'}{10\sqrt{5} \cdot \dfrac{3\sqrt{5}}{2}(10 - Q'J')}$, de donde $Q'J' = \dfrac{30}{7}$,

$L'J' = 10 - 4 - \dfrac{30}{7} = \dfrac{12}{7}$, $K'J' = \sqrt{2^2 + \left(\dfrac{12}{7}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{85}}{7}$, $G'Q' = 10 - 4 - \dfrac{12}{7} - \dfrac{20}{21} = \dfrac{10}{3}$.

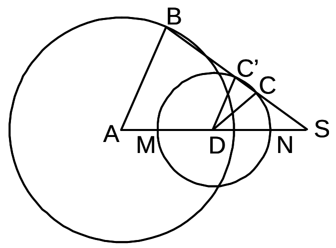
En el triángulo OCQ' cortado por la transversal MHG', se tiene:

$$\frac{MO}{MC}\cdot\frac{CG'}{G'Q'}\cdot\frac{Q'H'}{H'O}=1=\frac{10\sqrt{5}\cdot CG'\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}}{12\sqrt{5}\cdot(10-CG')\cdot\frac{5\sqrt{5}}{2}},\text{ de donde } CG'=\frac{20}{3},$$

$F'G'=\frac{20}{3}-4-\frac{12}{7}=\frac{20}{21}$. En el triángulo MCG' cortado por la transversal $OH'Q'$, se tiene: $\frac{MH'}{H'G'}\cdot\frac{G'Q'}{Q'C}\cdot\frac{OC}{OM}=1$. Como $MH'=\sqrt{MO^2+OH'^2}=\sqrt{\left(10\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{85}}{2}$, se tiene: $\frac{\frac{5\sqrt{85}}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot 2\sqrt{5}}{H'G'\cdot 10\cdot 10\sqrt{5}}=1$, de donde $H'G'=\frac{\sqrt{85}}{6}$. Resumiendo, las longitudes de los lados del polígono $A'\ldots L'$, son: $A'B'=C'B'=5\,\text{cm}$, $A'L'=C'D'=4\,\text{cm}$, $L'K'=D'E'=2\,\text{cm}$, $K'J'=E'F'=\frac{2\sqrt{85}}{7}=2,63\,\text{cm}$, $J'I'=F'G'=\frac{20}{21}=0,95\,\text{cm}$, $I'H'=H'G'=\frac{\sqrt{85}}{6}=1,54\,\text{cm}$.

D 53- Construir un cuadrilátero $ABCD$, conociendo los cuatro lados, y sabiendo que los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son iguales.

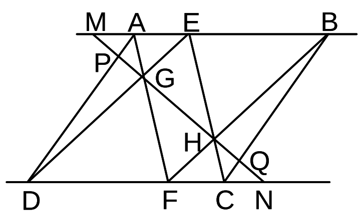
Solución:



Suponiendo resuelto el problema, se trazan las circunferencias de centro A y D, y radios AB y DC. La circunferencia de centro D corta a BC (o a su prolongación) en C'. La recta BC corta en S a AD. Se tiene: $\widehat{DCC'}=\widehat{DC'C}$. Luego $\widehat{BC'D}=\widehat{DCS}$. Como $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{DC'S}$, las rectas AB y DC' son paralelas. Por tanto, BCC' pasa por el centro de semejanza S de las circunferencias, siendo C y B antihomólogos, por lo que $SC\cdot SB=SN\cdot SM$. Como $SB-SC=BC$, se conocen la diferencia y el producto de SB y SC, luego se conocen las posiciones de B y C, y el cuadrilátero se puede construir.

D 54- Se da un paralelogramo $ABCD$, un punto E sobre AB, y un punto F sobre CD. Sea G el punto de intersección de AF y DE, y H el de BF y CE. Demostrar que GH divide al paralelogramo en dos partes equivalentes.

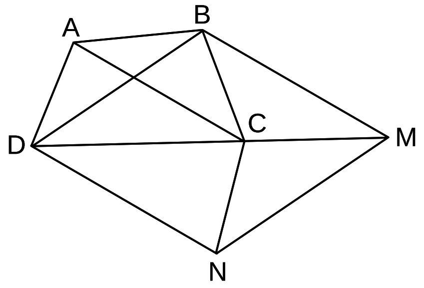
Solución:



En el triángulo DEC cortado por la transversal GH, se tiene: $\frac{GD}{GE}\cdot\frac{HE}{HC}\cdot\frac{NC}{ND}=1$. En el triángulo AFB cortado por la transversal GH, se tiene: $\frac{GF}{GA}\cdot\frac{MA}{MB}\cdot\frac{HB}{HF}=1$. Dividiendo las dos igualdades, y como $\frac{GD}{GE}=\frac{GF}{GA}$ y $\frac{HF}{HB}=\frac{HE}{HC}$, se tiene: $\frac{CN}{DN}=\frac{MA}{MB}$, es decir $\frac{CN}{DC+CN}=\frac{MA}{AB+MA}=\frac{MA}{DC+MA}$. Luego, $CN\cdot DC+CN\cdot MA=DC\cdot MA+CN\cdot MA$. De donde $CN=MA$, por lo que los triángulos semejantes MAP y CQN son iguales, es decir, $QC=AP$, $DP=BQ$. Los trapecios $DPQC$ y $APQB$ tienen las mismas bases y la misma altura, luego son equivalentes.

D 55- Construir un cuadrilátero conociendo las diagonales, el ángulo que forman y dos ángulos opuestos.

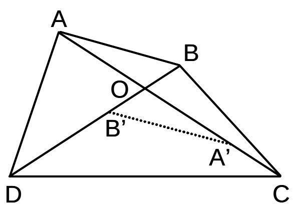
Solución:



Haciendo una traslación paralela a la diagonal AC, se obtiene el paralelogramo $BMND$, en el que los lados son las diagonales, y los ángulos, los de estas. Por tanto, este paralelogramo se puede construir. Por conocerse los ángulos $\widehat{BCD}$ y $\widehat{BAD} = \widehat{MCN}$, se trazan los correspondientes arcos capaces sobre BD y MN, que se cruzan en C. Deshaciendo la traslación, se obtiene el $ABCD$.

D 56- Las diagonales de un cuadrilátero lo dividen en cuatro triángulos. Demostrar que si los radios de las circunferencias inscritas en estos cuatro triángulos, son iguales, el cuadrilátero es un rombo.

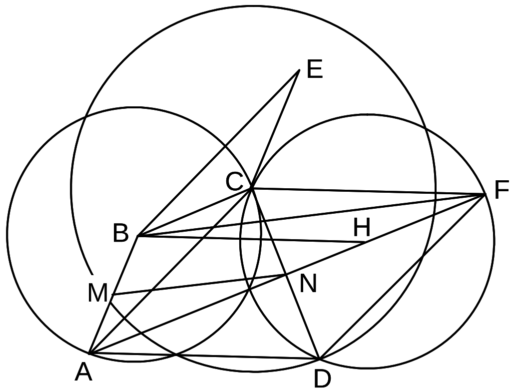
Solución:



Siendo O el punto de intersección de las diagonales, se supone que $AO < OC$ y que $BO < OD$. Sea el triángulo $OA'B'$, simétrico del OAB respecto a O. En el dibujo, el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo $OA'B'$ es menor que el de la inscrita en el triángulo ODC. Como han de ser iguales, el punto O ha de ser el punto medio de las dos diagonales, luego $ABCD$ has de ser un paralelogramo. Como el área S de un triángulo, es $S = pr$, al ser iguales las áreas y los radios de las circunferencias inscritas, los perímetros son también iguales. Luego: $AB = BC$, $AD = DC$. Es decir, el paralelogramo es un rombo.

D 57- Se tienen cuatro varillas de longitudes $AB = 32\,\text{mm}$, $BC = 33\,\text{mm}$, $CD = 48\,\text{mm}$ y $DA = 60\,\text{mm}$, que forman un cuadrilátero $ABCD$ articulado. Por medio de otra varilla se unen los puntos medios M de AB y N de CD, de tal modo que se da al conjunto una posición fija. Construir el cuadrilátero, siendo $MN = 45\,\text{mm}$.

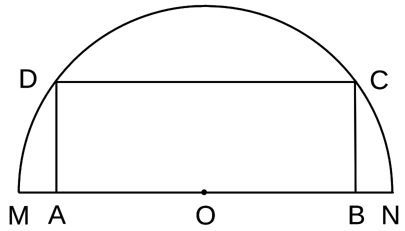
Solución:



Se trata del problema D 6, en el que los datos están cuantificados.

D 58- Inscribir en una semicircunferencia, un rectángulo de área dada.

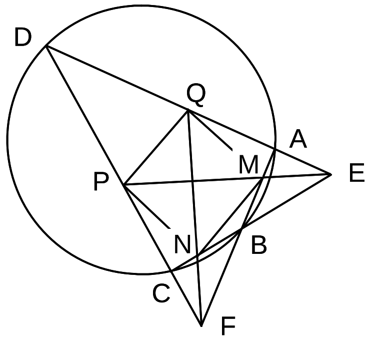
Solución:



Siendo $OA = a$, $AD = b$, y $OD = R$, se tiene $AD^2 = AM \cdot AN$, es decir, $b^2 = (R+a)(R-a)$. Como $a = \dfrac{S}{2b}$, sustituyendo se tiene $4b^4 - 4R^2b^2 + S^2 = 0$. Luego $b^2 = \dfrac{R^2 \pm \sqrt{R^2 - S^2}}{2}$.

D 59- Demostrar que si se prolongan los lados opuestos de un cuadrilátero inscriptible y se trazan las bisectrices de los dos ángulos así formados, estas bisectrices cortan a los lados del cuadrilátero en cuatro puntos que son los vértices de un rombo.

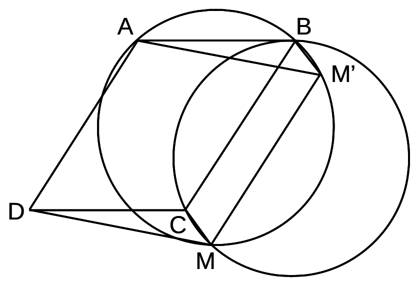
Solución:



Sea el rombo $MNPQ$, inscrito en el cuadrilátero $ABCD$ y formado como se indica en el enunciado. Sus diagonales son QN y MP. Por tanto $\widehat{MQN} = \widehat{PQN} = \widehat{MNQ} = \widehat{QNP}$, y $\widehat{QMP} = \widehat{PMN} = \widehat{QPM} = \widehat{MPN}$. De donde $\widehat{AQN} = \widehat{NQD}$, y $\widehat{BNQ} = \widehat{CNQ}$. Luego QN es la bisectriz de $\widehat{AFD}$, y MP la de $\widehat{DEC}$.

D 60- Se da un paralelogramo $ABCD$. Por los vértices A y B pasa una circunferencia de radio R. Otra circunferencia, también de radio R, pasa por los vértices B y C. Las dos circunferencias se cortan en el punto M. Demostrar que las circunferencias que pasan por A, M, D y por C, M, D, son iguales a las anteriores.

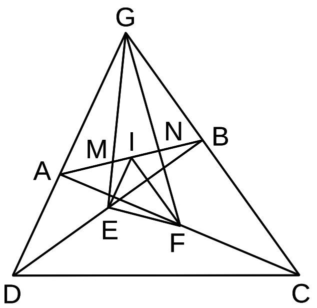
Solución:



Se define el punto M' de forma que el cuadrilátero $BCMM'$ sea un paralelogramo, por lo que M' está en la circunferencia ABM. El cuadrilátero $ADMM'$ también es un paralelogramo, por lo que $AM' = DM$, y los triángulos CDM y ABM' son iguales. Por tanto el radio de la circunferencia que pasa por C, D, M es igual a R. Análogamente, se obtiene que el radio de la circunferencia que pasa por A, M, D, es igual a R.

D 61- Demostrar que el área de un cuadrilátero es igual a cuatro veces la del triángulo que tiene por vértices los puntos medios de las diagonales y el punto de intersección de dos lados opuestos.

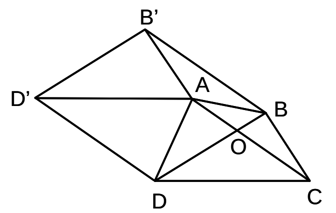
Solución:



Sea el cuadrilátero *ABCD*, y sean *E* y *F* los puntos medios de las diagonales. El cuadrilátero *ABEF* es equivalente a la cuarta parte del *ABCD*, ya que el *ABFD* es equivalente a la mitad, y el *AEFD* es equivalente al *ABFE*. Hay que demostrar que, siendo *G* el punto de intersección de *AD* y *BC*, $S_{EFG} = S_{EFBA}$, es decir $S_{AEM} + S_{NFB} = S_{MNG}$. Trazando por *E* y *F* paralelas a *DG* y *GC* respectivamente, se cortan en *I* sobre *AB*. Por tanto $S_{GBF} = S_{GBI}$, $S_{AGE} = S_{AGI}$, $S_{NBF} = S_{GNI}$, $S_{AEM} = S_{MGI}$. Luego $S_{AEM} + S_{NFB} = S_{MNG}$.

D 62- Demostrar que el perímetro de un cuadrilátero convexo está comprendido entre la suma de las diagonales y el doble de esta suma.

Solución:



Sea el cuadrilátero *ABCD*, y sea $BDB'D'$ el paralelogramo que se forma trasladando las diagonales paralelamente a sí mismas. Se tiene $AB + AB' > AC$, $AB' + AD' > BD$, $AD' + AD > AC$, $AD + AB > BD$. Sumando las cuatro desigualdades, se tiene:

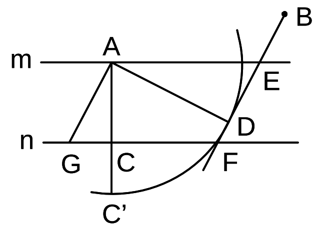
$2(AB + BC + CD + DA) > 2(AC + BD)$, es decir $AB + BC + CD + DA > AC + BD$.

Además, $OA + OB > AB$, $OB + OC > BC$, $OC + OD > CD$, $OD + OA > AD$.

Sumando estas cuatro últimas desigualdades, se tiene: $2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$.

D 63- Dadas dos rectas paralelas *m* y *n*, un punto *A* sobre una de ellas y otro *B* fuera, trazar dos rectas paralelas por *A* y *B* que determinen con las dadas un paralelogramo del que se conoce la razón de dos lados contiguos.

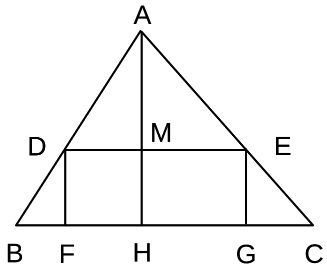
Solución:



Sean *AG* y *BF* las paralelas trazadas por *A* y *B*, y sea *AC* la distancia entre *m* y *n*. Se multiplica *AC* por la razón dada, obteniéndose AC'. Se traza la circunferencia de centro *A* y radio AC', y se traza por *B* la tangente *BD* a dicha circunferencia, que corta en *E* y *F* a *m* y *n*. Se traza la paralela *AG* a *BD*. El paralelogramo pedido es el *AEFG*, pues en los triángulos semejantes *AGC* y *ADE*, se tiene $\frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC'}{AC}$.

D 64- Inscribir en un triángulo dado ABC, un rectángulo de perímetro $2p$ conocido, con un lado en la base del triángulo.

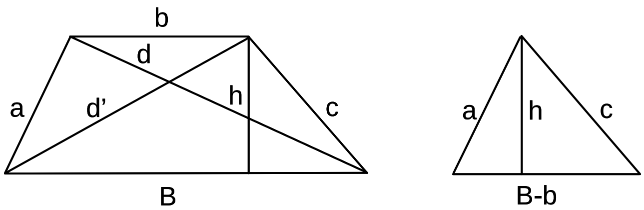
Solución:



Siendo $\dfrac{BF}{BH} = \dfrac{DF}{AH} = \dfrac{EG}{AH} = \dfrac{GC}{HC}$ y $p = FG + DF = BC - BF - GC + DF$, sustituyendo y operando se tiene $DF = \dfrac{AH(BC - p)}{BC - AH}$. La paralela DE trazada a la distancia DF de la base, resuelve el problema.

D 65- Calcular las diagonales de un trapecio conociendo los cuatro lados.

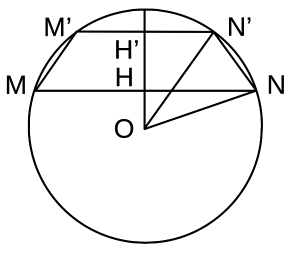
Solución:



En el triángulo de la figura de la derecha, se tiene: $h = \dfrac{2\sqrt{p(p - B + b)(p - a)(p - c)}}{B - b}$, siendo $p = \dfrac{B - b + a + c}{2}$. En la figura de la izquierda: $\sqrt{d^2 - h^2} + \sqrt{c^2 - h^2} = B$, $d^2 = \left(B - \sqrt{c^2 - h^2}\right)^2 + h^2$. Por tanto, $d = \sqrt{\left(B - \sqrt{c^2 - h^2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{B^2 + c^2 - 2B\sqrt{c^2 - h^2}}$, $d' = \sqrt{B'^2 + a^2 - 2B\sqrt{a^2 - h^2}}$.

D 66- Construir un trapecio $ABCD$, inscrito en un círculo dado de radio R, conociendo la altura y la suma de las bases.

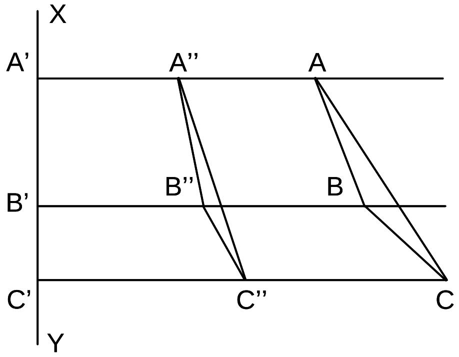
Solución:



Sea el trapecio $MNM'N'$, y sean H y H' los puntos medios de sus bases. Se tiene $2B = MN$, $B = MH$, $2b = M'N'$, $b = M'H'$, $h = HH'$, $S = B + b$, $P = B \cdot b$, $d = OH$, $d' = OH'$, $h = d - d'$, $d = \sqrt{R^2 - B^2}$, $d' = \sqrt{R^2 - b^2}$, $h = \sqrt{R^2 - B^2} - \sqrt{R^2 - b^2}$, $h^2 = R^2 - B^2 + R^2 - b^2 - 2\sqrt{(R^2 - B^2)(R^2 - b^2)}$. Como $h^2 + B^2 + b^2 - 2R^2 = h^2 + S^2 - 2P - 2R^2$, operando $(h^2 + S^2 - 2P - 2R^2)^2 = 4(R^2 - B^2)(R^2 - b^2) =$
$= 4[R^4 - R^2(S^2 - 2P) + P^2]$, de donde $P = \dfrac{(S^2 + h^2)^2 - 4R^2h^2}{4(S^2 + h^2)}$. Luego B y b son las raíces de la ecuación $x^2 - Sx + \dfrac{(S^2 + h^2)^2 - 4R^2h^2}{4(S^2 + h^2)} = 0$, de donde $x = \dfrac{1}{2}\left(S \pm \sqrt{\dfrac{4R^2 - S^2 - h^2}{S^2 + h^2}}\right)$, es decir: $B = \dfrac{1}{2}\left(S + \sqrt{\dfrac{4R^2 - S^2 - h^2}{S^2 + h^2}}\right)$ y $b = \dfrac{1}{2}\left(S - \sqrt{\dfrac{4R^2 - S^2 - h^2}{S^2 + h^2}}\right)$.

D 67- Se da un polígono $ABC\ldots$ de n lados y una recta XY exterior. Se trazan las perpendiculares a dicha recta, AA', BB',...y se considera el polígono $A''B''C''\ldots$, siendo estos vértices los puntos medios de AA', BB',... Demostrar que el área de este es la mitad de la de aquel.

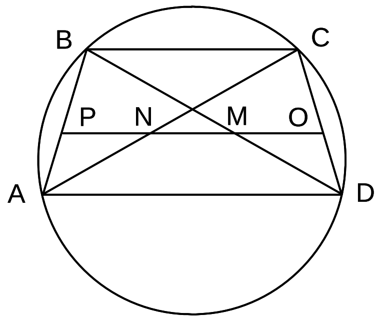
Solución:



Partiendo de un vértice cualquiera, por ejemplo A, se descompone el polígono en triángulos: ABC, ACD, ADE,... Se tiene que: $S_{ABC} = S_{CAC'A'} - S_{ABA'B'} - S_{BCB'C'}$.
Luego, $\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{C''A''C'A'} - S_{A''B''A'B'} - S_{B''C''B'C'} = S_{A''B''C''}$.

D 68- Se considera el cuadrilátero $ABCD$, formado por los lados no paralelos de un trapecio isósceles $AB = CD = a$, y las diagonales AC y $BD = b$. Se toman sobre BD, AC y DC, tres puntos M, N y O, tales que $\frac{MB}{MD} = \frac{NC}{NA} = \frac{OC}{OD} = k$. Demostrar que O, M y N están alineados, y que cuando $ABCD$ se deforma, permaneciendo fijos A y B, el producto $OM \cdot ON$ es constante.

Solución:

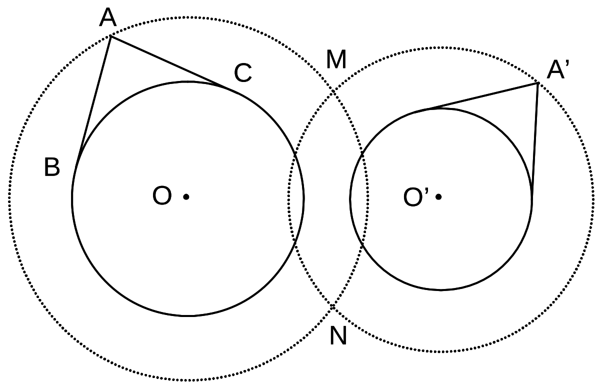


En el trapecio isósceles $ABCD$, la recta MNO es paralela a la base, cortando a AB en P. Como es inscriptible, se tiene $BD \cdot AC = BC \cdot AD + AB \cdot CD$, es decir $b^2 = BC \cdot AD + a^2$, $BC \cdot AD = b^2 - a^2$. En el triángulo ADC, se tiene $ON = \frac{AD \cdot OC}{CD}$. En el BCD, $OM = \frac{BC \cdot OD}{CD}$.
Luego $OM \cdot ON = \frac{AD \cdot OC \cdot BC \cdot OD}{CD^2} = \frac{k(b^2 - a^2)}{(k+1)^2}$, que es constante.

Sección E - CIRCUNFERENCIA

E 1- Determinar un punto desde el que se vean dos circunferencias dadas bajo ángulos dados.

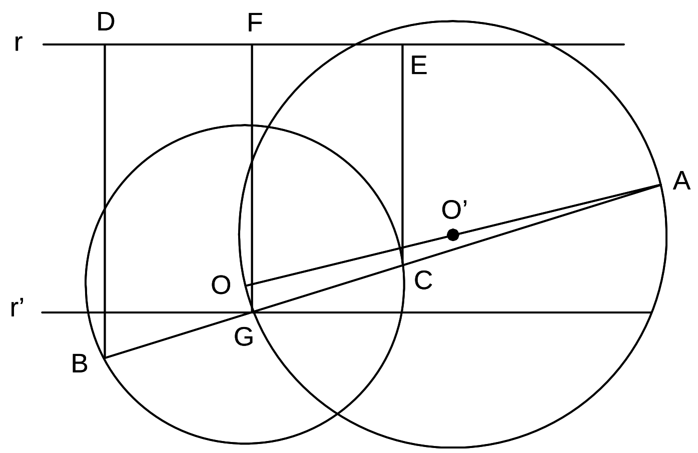
Solución:



Sean las circunferencias *O* y O' (de trazos llenos en la figura). Por un punto cualquiera *B* de *O*, se traza la tangente *BA*, y formando con esta el ángulo dado, se traza la tangente *AC*. La circunferencia de radio *OA* es el lugar de los puntos desde los que se ve la circunferencia *O* bajo el ángulo dado. Se procede de la misma forma con la circunferencia O', obteniéndose la circunferencia de radio OA'. Desde los puntos *M* y *N*, intersección de las dos circunferencias construidas, se ven las dos dadas bajo los ángulos dados (puede haber dos puntos, como en el caso de la figura, uno o ninguno si las circunferencias construidas no tienen ningún punto común)

E 2- Dada una circunferencia *O*, una recta *r* y un punto *A*, trazar por *A* una recta que corte en *B* y *C* a la circunferencia, de modo que la suma de sus distancias a *r* sea una longitud dada.

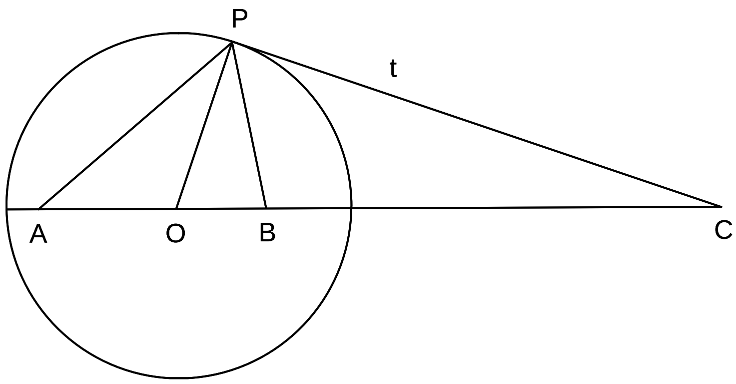
Solución:



Supuesto resuelto el problema, sean *BD* y *CE* las distancias a *r*. En el trapecio *BCED*, la paralela media *FG* tiene como longitud la semisuma de sus bases, es decir la mitad de la distancia dada, por lo que *G* se encuentra sobre r', paralela a *r* a una distancia de ella igual a la mitad de la longitud dada. Por otra parte, siendo *G* el punto medio de *BC*, el ángulo $\widehat{OGA}$ es recto, por lo que *G* se encuentra sobre la circunferencia de centro O', punto medio de *AO*, y radio $O'A$. El punto *G*, intersección de esta circunferencia con la recta r', unido con *A*, determina la recta solución.

E 3- Dados dos puntos A y B sobre un diámetro de una circunferencia O que se supone es un billar circular, en qué dirección hay que lanzar una bola desde A para que llegue a B (se excluye la dirección del diámetro).

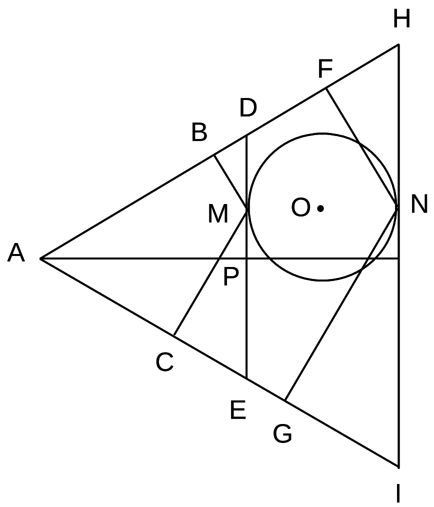
Solución:



Sea P el punto de la circunferencia hacia el que hay que lanzar la bola, de forma que $\widehat{APO} = \widehat{OPB}$, por lo que PO es la bisectriz de $\widehat{APB}$. Siendo PC la tangente en P (bisectriz exterior de $\widehat{APB}$), se tiene $(ABOC) = -1$, pues los pies de las bisectrices, interior y exterior, son conjugados armónicos de los vértices del lado opuesto al ángulo de que se trate. Por tanto, conocido C, se traza la tangente a O, obteniéndose P.

E 4- Dadas dos rectas y una circunferencia, hallar un punto de la circunferencia tal que la suma de sus distancias a las rectas sea mínima, y otro en que sea máxima.

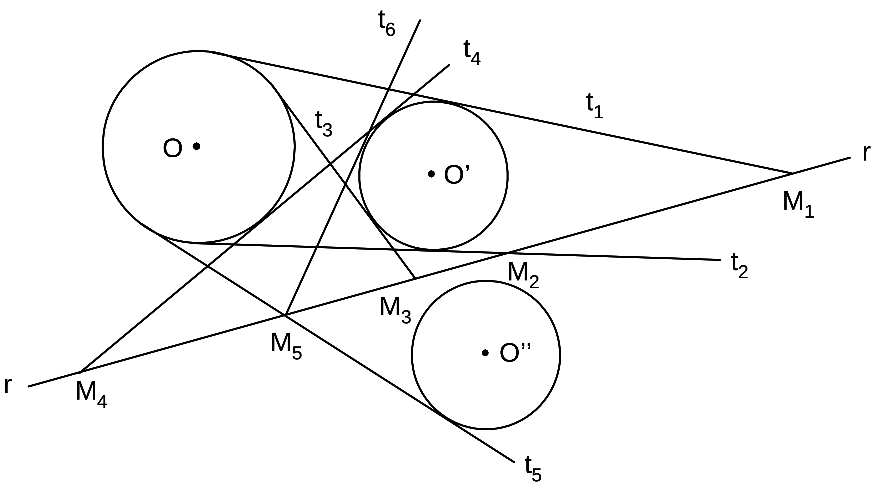
Solución:



Sean las rectas AH y AI, y la circunferencia O. Supuesto resuelto el problema, sea M el punto cuya suma de distancias MB y MC a las rectas, es mínima. La suma $MB + MC$ es igual a la altura de un triángulo isósceles de lados AB y AC prolongados, y base la tangente en M a la circunferencia. Luego esta suma será mínima cuando lo sea la altura de dicho triángulo isósceles (la altura y la bisectriz se confunden). Por tanto, para resolver el problema, se traza la bisectriz AP de $\widehat{BAC}$, y la tangente a O, perpendicular a AP determina el punto M, cuya suma de distancias a las dos rectas es mínima, mientras que al punto N, diametralmente opuesto a M, le corresponde la suma máxima.

E 5- Dada una recta r y dos círculos O y O', hallar un punto M de r, de modo que las tangentes trazadas desde él a las circunferencias, estén igualmente inclinadas sobre r.

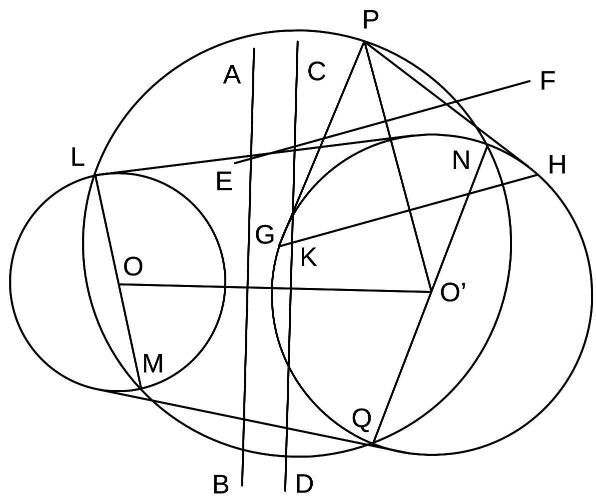
Solución:



Las tangentes comunes a las dos circunferencias representan una solución. Es el caso de las tangentes t_1, t_2, t_3 y t_4 de la figura, cuando O y O' están del mismo lado de r, y los puntos pedidos son M_1, M_2, M_3 y M_4. También es solución el punto M_5, que se determina al trazar las tangentes comunes a O y O'', simétrica de O' respecto a r. Una de estas tangentes es t_5 que determina el punto M_5, desde el que se trazan las tangentes t_5 a O y t_6 a O', siendo t_6 simétrica de t_5 respecto a r. Si r está situada entre las dos circunferencias, caso de O y O'', las tangentes comunes como t_5 determinan el punto solución M_5, y también las tangentes comunes a O y O', simétrica de O'' respecto a r, determinan los puntos solución M_1, etc. En general hay cuatro puntos tipo M_1 y otros cuatro puntos tipo M_5.

E 6- Construir un círculo que corta diametralmente a dos círculos dados O y O', y que pasa por un punto dado P.

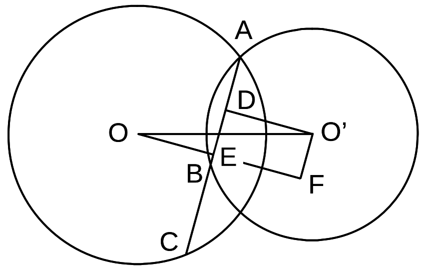
Solución:



El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan diametralmente a dos dadas, es la recta simétrica de su eje radical, respecto del punto medio de la recta que une sus centros. A estos efectos, un punto puede considerarse como un círculo de radio nulo. El eje radical de O y O' es AB, y su recta simétrica es CD. El eje radical de P y O', es EF, y su recta simétrica, GH. El punto K de intersección de CD y GH, es el centro del círculo pedido, siendo su radio KP.

E 7- Por el punto A de intersección de dos circunferencias O y O', trazar una secante que determine dos cuerdas de diferencia dada.

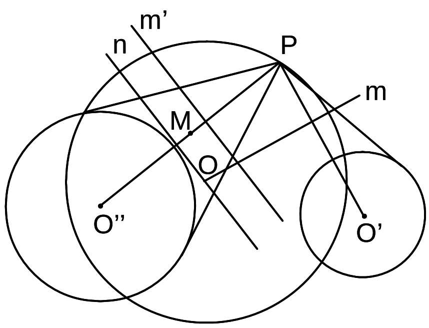
Solución:



Sea AC la secante pedida, que delimita las cuerdas AC en O, y AB en O', siendo BC la diferencia dada. Sea D el punto medio de AB, y E el de AC, siendo por tanto DE la mitad de la diferencia dada. El triángulo rectángulo $OO'F$ se puede construir, pues se conocen sus lados OO' y $O'F = DE$. Construido, se traza por A la perpendicular AC a OF.

E 8- Construir un círculo O, que pase por un punto dado P, sea ortogonal a un círculo dado O', y corte diametralmente a otro círculo dado O''.

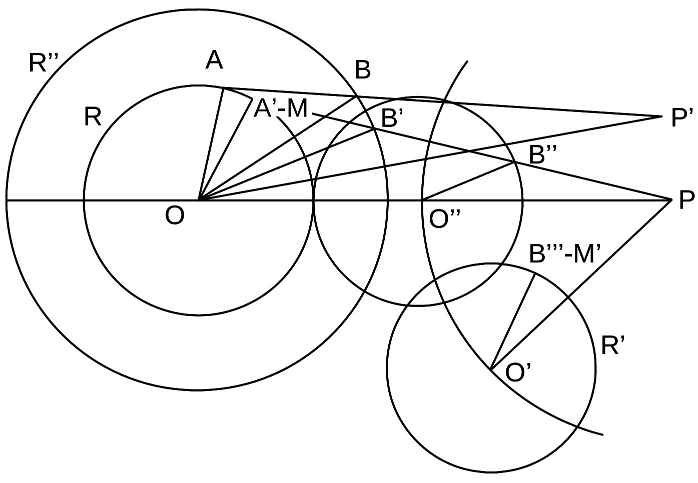
Solución:



El lugar geométrico de los centros de los círculos que cortan ortogonalmente a O' y al círculo "degenerado" P, es su eje radical m. El lugar geométrico de los centros de los círculos que cortan diametralmente a O'' y al círculo "degenerado" P, es la recta n, simétrica del eje radical m' de P y O'', respecto al punto medio M de $O''P$. El punto O de intersección de m y n, es el centro del círculo pedido, cuyo radio es OP.

E 9- Dados dos círculos O y O', de radios R y R', respectivamente, y un punto P, hallar dos radios paralelos OM y $O'M'$, tales que los ángulos $\widehat{OPM}$ y $\widehat{O'PM'}$, sean iguales.

Solución:

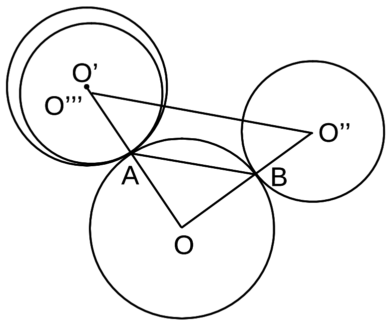


Se gira PO' con centro P, sobre PO, obteniéndose la circunferencia O'' de radio R'. Con centro P y razón $\dfrac{PO}{PO''}$, se traza la circunferencia de centro O y radio R'', homotética de O''. En un punto cualquiera A de O, se traza el radio OA y el radio OB, estando B sobre $O(R'')$, de forma que $\widehat{AOB} = \widehat{OPO'}$, trazándose AB. Sobre esta, se lleva $OP' = OP$, formándose el ángulo $\widehat{P'OP}$. Se lleva $\widehat{MOA} = \widehat{B'OB} = \widehat{P'OP}$, con lo que MB' pasa por P, y corta a O'' en B''. El ángulo formado por $O''B''$ con OM es igual a $\widehat{OPO'}$. Deshaciendo el giro, B'' se sitúa en $B''' - M'$. Luego $O'M'$ y OM son paralelas, y $\widehat{O'PM'} = \widehat{O''PB''} = \widehat{OMP}$.

Nota: Para distinguir las circunferencias concéntricas, se indica a continuación del centro, el radio entre paréntesis.

E 10- Trazar un círculo O tangente a otros dos círculos O' y O'', conociéndose además el punto de tangencia A con O'.

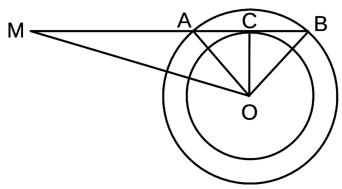
Solución:



Supuesto resuelto el problema, el triángulo OAB es isósceles, pues $OA = OB$. Se une O' con A, y a partir de A hacia O', se lleva $AO''' = O''B$. Se une O''' con O''. Desde A se traza AB, paralela a $O'''O''$. La recta $O''B$ corta a OA en O, que es el centro de la circunferencia pedida, siendo su radio OA.

E 11- Dada una circunferencia O y un punto exterior M, trazar una secante MAB tal que el ángulo $\widehat{AOB}$ sea recto en O.

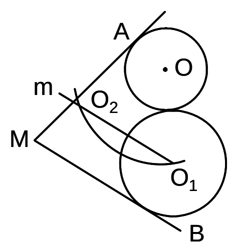
Solución:



Siendo R el radio de O, se traza una circunferencia concéntrica de radio $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Las tangentes desde M a esta, resuelven el problema.

E 12- Se dan dos rectas que se cortan, AM y BM, y un círculo O de radio r tangente en A a AM. Trazar otro círculo O_1 de radio R, tangente al anterior y a la recta BM.

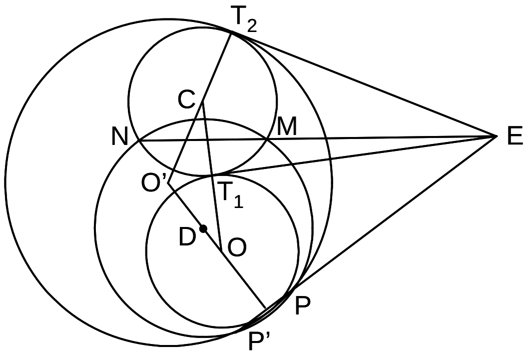
Solución:



Se traza la recta m paralela a MB, a una distancia R. Desde O como centro y radio $r + R$, se corta a m en O_1 y O_2, que son soluciones del problema. También lo son, si se traza m a una distancia $R - r$, siendo las circunferencias, en este caso, tangentes interiores.

E 13- Trazar un círculo que pase por dos puntos dados, P y P', y sea tangente a un círculo C dado.

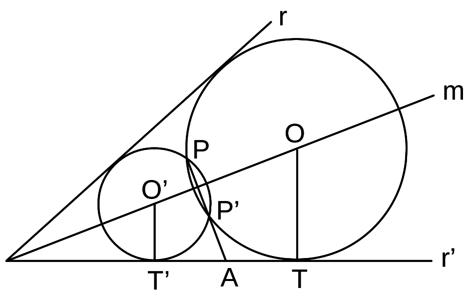
Solución:



Se traza una circunferencia cualquiera D, que pasa por P y P' y corta a la dada C en M y N. Sea E el punto de intersección de PP' y MN. Este punto tiene la misma potencia respecto a C, a D y a la buscada O. Las tangentes desde E a C, también lo serán a O. Por tanto hay dos soluciones, O y O'. El centro O es la intersección de la mediatriz de PP' con la perpendicular OT_1 a la tangente ET_1. El centro O' es la intersección de dicha mediatriz con la perpendicular $O'T_2$ a la tangente ET_2.

E 14- Trazar una circunferencia O que pase por un punto dado P, y sea tangente a dos rectas dadas r y r'.

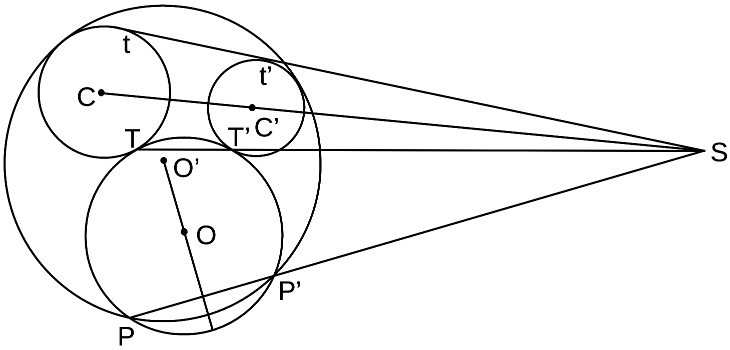
Solución:



El centro O está sobre la bisectriz del ángulo formado por r y r'. Siendo P' el simétrico de P respecto a dicha bisectriz, PP' corta en A a una de las rectas, teniéndose $AT^2 = AP \cdot AP' = AT'^2$, luego hay dos soluciones O y O'.

E 15- Trazar una circunferencia O que pase por un punto dado P, y sea tangente a dos circunferencias dadas C y C', en el caso de centro de semejanza directo.

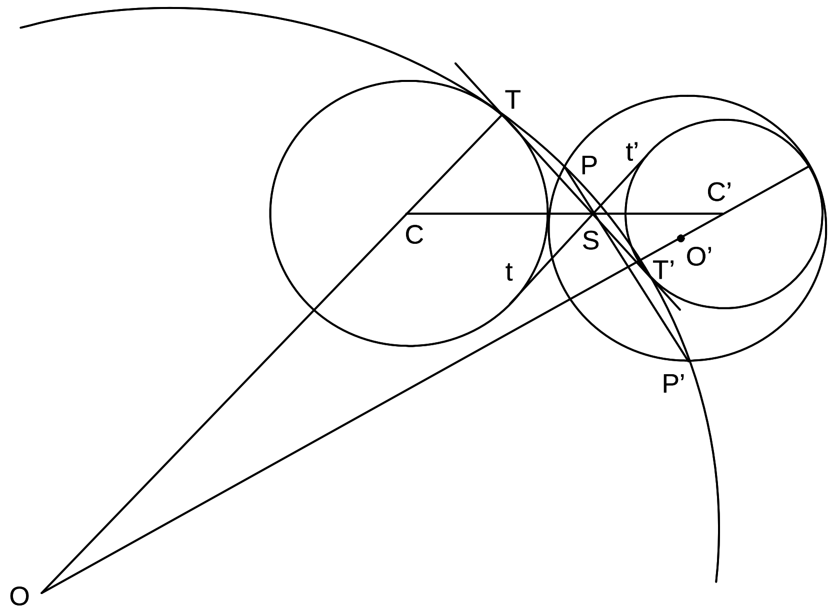
Solución:



Siendo S el centro de semejanza directo de C y C', siendo t y t' los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde S a C y C', y siendo T y T' los puntos de tangencia de O con C y C', se tiene: $St \cdot St' = ST \cdot ST' = SP \cdot SP'$. Por tanto, se conoce P', quedando el problema reducido a trazar una circunferencia que pase por dos puntos y sea tangente a un círculo (E 13). Hay dos soluciones O y O' en este caso de semejanza directa.

E 16- Trazar una circunferencia *O* que pase por un punto dado *P*, y sea tangente a dos circunferencias dadas *C* y C', en el caso de centro de semejanza inverso.

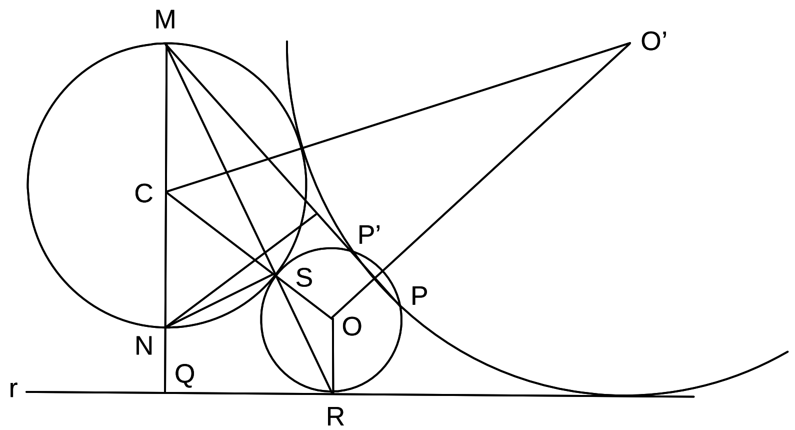
Solución:



Siendo *S* el centro de semejanza inverso de *C* y C', siendo *t* y t' los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde *S* a *C* y C', y siendo *T* y T' los puntos de tangencia de *O* con *C* y C', se tiene: $St \cdot St' = ST \cdot ST' = SP \cdot SP'$. Por tanto, se conoce P', quedando el problema reducido a trazar una circunferencia que pase por dos puntos y tangente a un círculo (E 13). Hay dos soluciones, *O* y O', en este caso de semejanza inverso.

E 17- Trazar una circunferencia *O* que pase por un punto *P*, sea tangente a una recta *r* y a una circunferencia *C*, en el caso de centro de semejanza inverso.

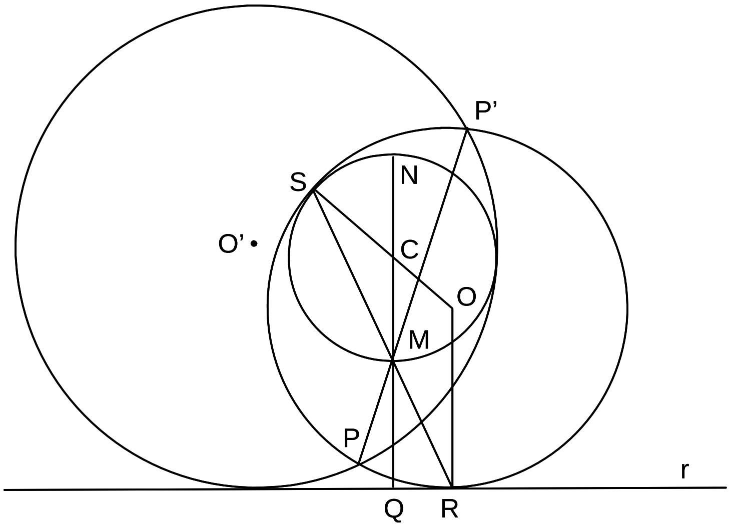
Solución:



Supuesto resuelto el problema, se traza la perpendicular desde *C* a *r*, que corta a *C* en *M* y *N*, y se traza la perpendicular *OR* a *r*. Siendo *S* el centro de semejanza inverso de *C* y *O*, se tiene $MN \cdot MQ = MS \cdot MR$, pues *NS* y *QR* son antiparalelas en el ángulo $\widehat{QMR}$. Como el primer miembro de la igualdad es constante, también lo es la potencia de *M* respecto a *O*, luego se conoce el punto P', tal que $MP' \cdot MP = MS \cdot MR$. El problema se reduce a trazar una circunferencia tangente a otra dada y que pasa por dos puntos dados (E 13). Hay dos soluciones *O* y O'.

E 18- Trazar una circunferencia *O* que pase por un punto *P*, sea tangente a una recta *r* y a una circunferencia *C*, en el caso de centro de semejanza directo.

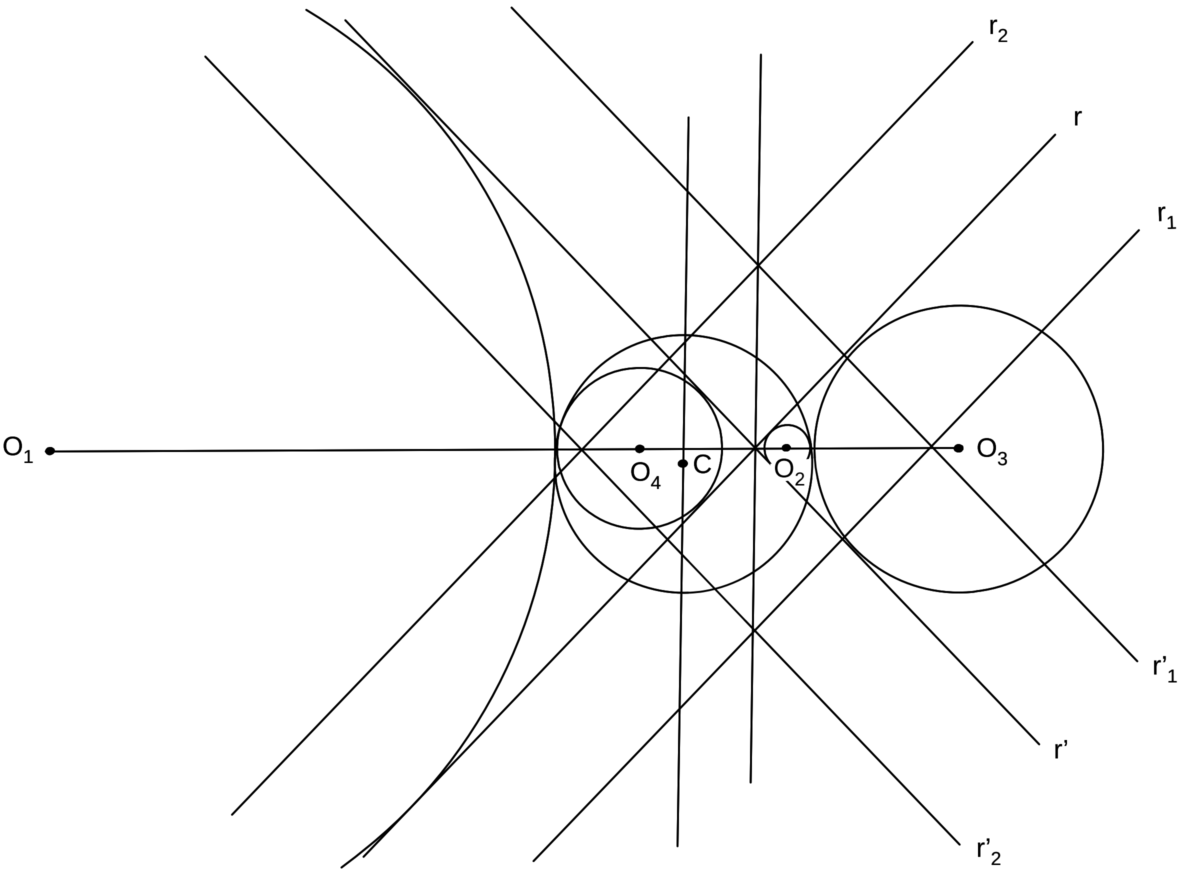
Solución:



Con los mismos razonamientos que en el problema E 17, se obtienen dos soluciones, *O* y O'.

E 19- Trazar una circunferencia *O* que sea tangente a dos rectas dadas *r* y r', y a una circunferencia dada *C*.

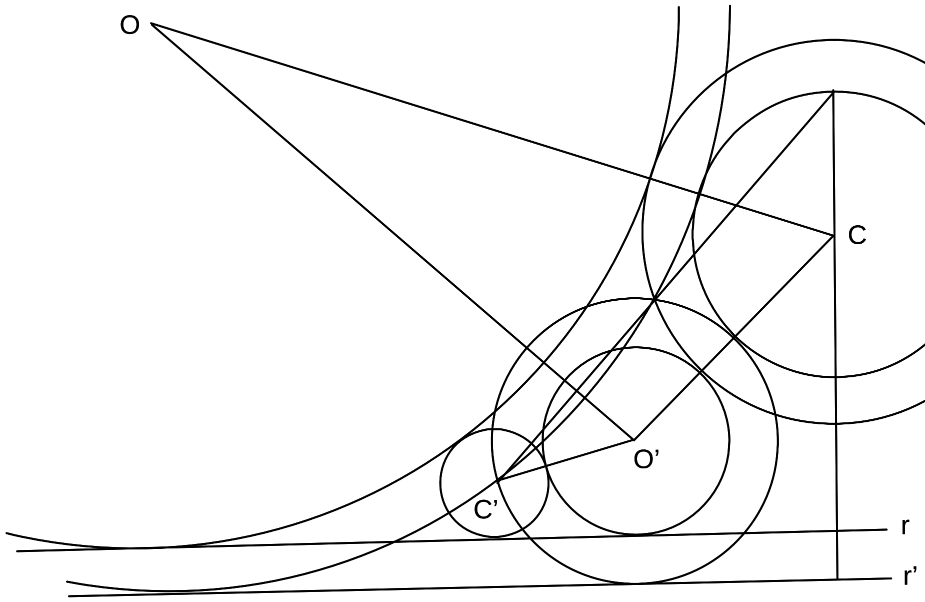
Solución:



Disminuyendo el radio de *C*, de forma de convertirla en un punto, y trasladando las rectas dadas paralelamente a sí mismas en una distancia igual al radio de *C*, el problema se reduce a trazar una circunferencia que pase por un punto y sea tangente a dos rectas dadas (E 14). En total hay ocho soluciones.

E 20- Trazar una circunferencia *O* que sea tangente a una recta dada *r* y a dos circunferencias dadas *C* y C'.

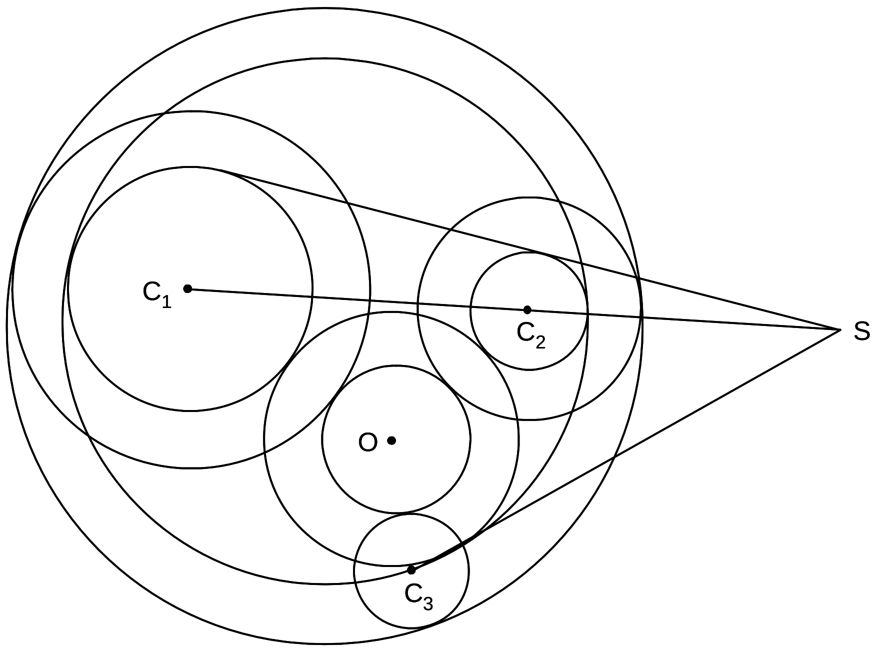
Solución:



Reduciendo una de las circunferencias dadas a un punto y aumentando el radio de la otra en el radio reducido, y trasladando correspondientemente la recta, el problema se reduce a trazar una circunferencia que pase por un punto y sea tangente a una recta y a una circunferencia (E 17 y E 18). En general hay ocho soluciones.

E 21- Trazar una circunferencia *O* que sea tangente a tres circunferencias dadas C_1, C_2 y C_3.

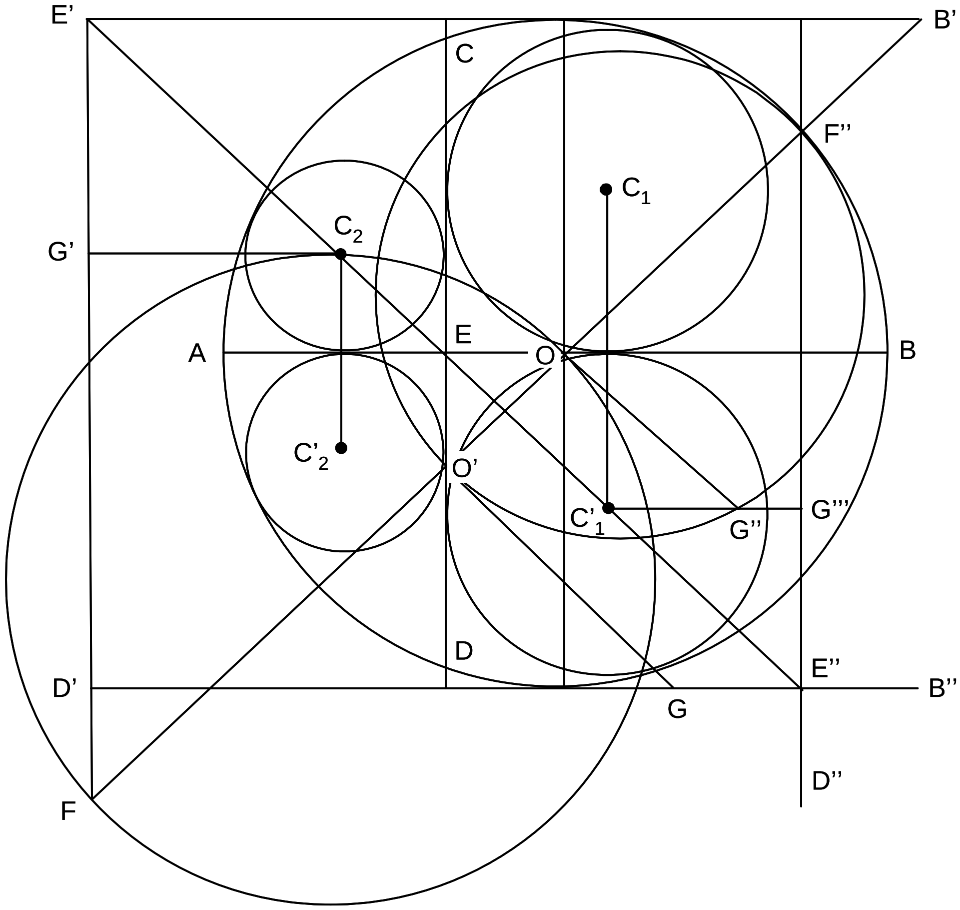
Solución:



Reduciendo una de las circunferencias dadas a un punto y aumentando los radios de las otras dos en la misma cantidad, el problema se reduce a trazar una circunferencia tangente a dos circunferencias dadas y que pase por un punto (E 15 y E 16). Hay ocho soluciones.

E 22- Se da un círculo O, un diámetro AOB, y una cuerda CD perpendicular al diámetro. Trazar los círculos inscritos en las cuatro regiones definidas en el círculo.

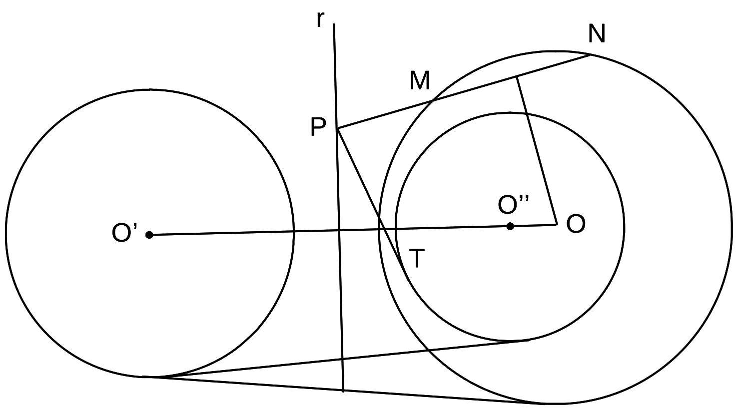
Solución:



Se trata del problema E 19. Basta trazar las dos circunferencias correspondientes a uno de los semicírculos, pues las otras dos son simétricas respecto al diámetro.

E 23- Trazar un círculo O que sea corradical con otros dos dados exteriores O' y O'', e intercepte en una recta dada una cuerda de longitud dada.

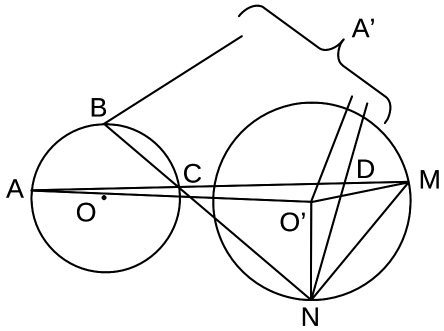
Solución:



Sea r el eje radical de O' y O'' y sea PN la recta dada, siendo P la intersección de la recta dada con r. Siendo PT una tangente a O'', se tiene $PT^2 = PM \cdot PN = PM(PM + MN)$, siendo MN la longitud dada, luego se conocen M y N. La mediatriz de MN corta en O a $O'O''$. El punto O es el centro de la circunferencia pedida, y su radio es OM.

E 24- Se dan dos circunferencias exteriores O y O', y dos puntos A y B en la primera. Hallar otro C, también en O, de forma que AC y BC corten a O' en M y N, siendo MN de longitud conocida.

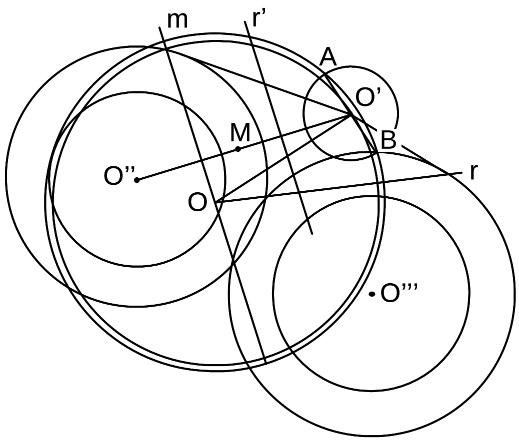
Solución:



Se gira el triángulo AMO', con centro en O', de forma que M coincida con N (el ángulo de giro es $\widehat{MO'N} = \alpha$). El punto A se situará en A'; AM y $A'N$ se cruzan en D, siendo α el ángulo que forman, o bien su suplementario, $\pi - \alpha$. En el triángulo CDN se conocen sus tres ángulos: $\widehat{DCN} = \widehat{ACB} = \beta$ (el arco que subtiende es constante), $\widehat{CDN} = \alpha$ (o $\pi - \alpha$), $\widehat{DNC} = \pi - \alpha - \beta$ (o $\alpha + \beta$), luego se conoce el ángulo $\widehat{BNA'} = \widehat{CND}$. Por todo ello se deduce que N está en el arco capaz de $\widehat{BNA'}$ sobre BA'.

E 25- Trazar un círculo O que corte diametralmente a dos círculos dados O' y O'', y ortogonalmente a otro dado O'''.

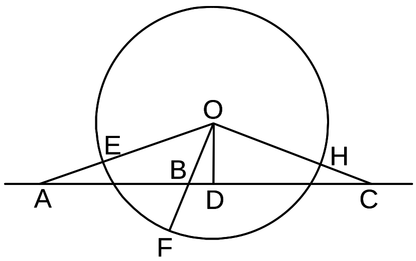
Solución:



Se reduce O' a un punto y se aumentan los radios de O'' y O''' en el radio de O'. El problema se resuelve como E 8.

E 26- Se dan tres puntos A, B y C, sobre una recta. Trazar una circunferencia O que equidiste de los tres puntos.

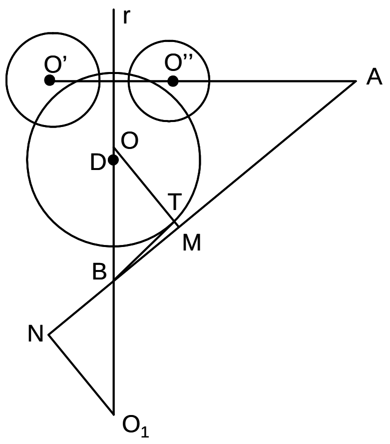
Solución:



Se ha de tener que $AE = BF = CH$. Se trazan tres circunferencias con el mismo radio y centros A, B y C, y se halla la circunferencia tangente a estas tres (E 21). Como en el enunciado no se cuantifica la distancia, hay infinitas soluciones.

E 27- Trazar un círculo O, ortogonal a dos círculos dados exteriores, O' y O'', y tangente a una recta dada AB.

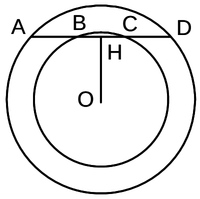
Solución:



El lugar geométrico de los centros de los círculos ortogonales a los dos dados, es su eje radical r, que corta a la recta dada en B. Sea D el centro de una circunferencia ortogonal a las dos dadas. Desde B se traza la tangente BT a este círculo, y se lleva la longitud BT sobre BA, a uno y otro lado de B, obteniéndose los puntos M y N. Las perpendiculares a AB en M y N, cortan a r en O y O_1, centros de dos circunferencias que resuelven el problema.

E 28- Se dan dos círculos concéntricos de centro O. Trazar una recta que sea dividida por aquellos, en tres partes iguales.

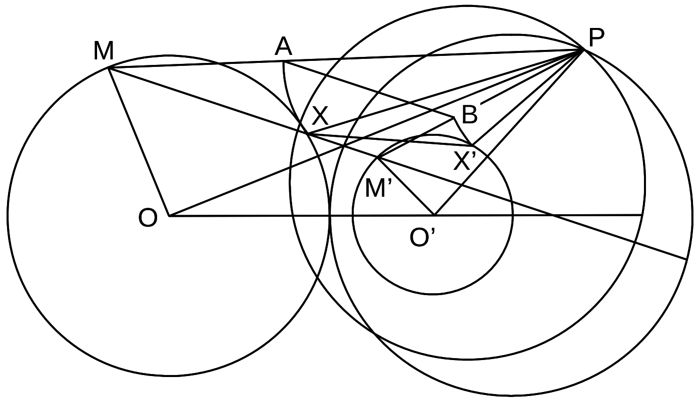
Solución:



Sea $ABCD$ la solución, en la que $AB = BC = CD$. Se traza la perpendicular OH a AD. Siendo $HB = HC = a$, $AB = CD = 2a$, $OH = b$, $OA = OD = R$, $OB = OC = r$. Se tiene que $b = \sqrt{\dfrac{9r^2 - R^2}{8}}$. Cualquier tangente a la circunferencia concéntrica con las dadas, de radio $OH = b$, representa una solución del problema.

E 29- Se dan dos circunferencias exteriores O y O', un punto M sobre la primera y un punto M' sobre la segunda. Hallar otros dos puntos, X y X', situados cada uno de ellos en una de las dos circunferencias, de forma que los ángulos $\widehat{MOX}$ y $\widehat{M'O'X'}$ sean iguales, y el segmento XX' sea de longitud conocida.

Solución:



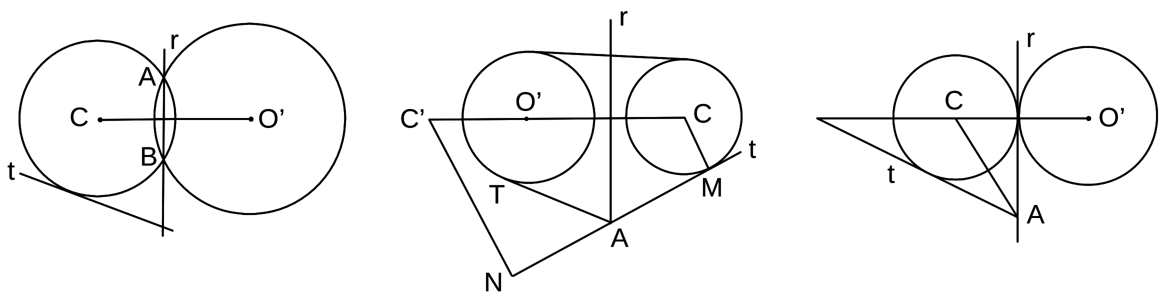
Hay un punto P del plano que unido con O y M, y con O' y M', forma dos triángulos semejantes. Es el polo doble. Este polo se encuentra sobre una circunferencia que pasa por los conjugados armónicos de O y O', en la relación dada $\frac{OM}{O'M'}$, y además está en la circunferencia lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a M y M', es conocida. El caso general es que estas dos circunferencias se corten y den lugar a dos polos dobles. Se forma el triángulo PMM'. Se prolongan PM y PM', de forma que una paralela a MM' tenga la longitud dada. Sea AB esta paralela. La longitud PA se lleva en PX, y la PB en PX'.

E 30- Trazar un círculo O que sea ortogonal a otros dos dados, O' y O'', secantes entre sí, en A y B, y que sea tangente a otro círculo dado O'''.

Solución: Tomando como centro de inversión el punto A y con potencia de inversión la de A respecto a O''', las inversas de O' y O'' son dos rectas, y la de O''' es ella misma. La inversa de O, será ortogonal a estas dos rectas, luego su centro será el punto de intersección de dichas rectas, ya que la inversión conserva los ángulos, y será tangente a O'''. Deshaciendo la inversión, queda resuelto el problema.

E 31- Trazar una circunferencia C perteneciente a un haz definido por su eje radical r y un círculo O', y que sea tangente a una recta dada t.

Solución:



En el caso de un haz elíptico (figura de la izquierda), el problema se reduce a trazar una circunferencia que pase por los puntos A y B, en los que r corta a O', y que sea tangente a t. En el caso de un haz hiperbólico (figura del centro), desde A, intersección de r y t, se traza una tangente AT a O', llevándose a uno y otro lado de A, sobre t, $AM = AN = AT$. Los puntos M y N son los de contacto de la circunferencia pedida. Se levantan las perpendiculares a t, MC y NC', que determinan los centros solución. En el caso de un haz parabólico (figura de la derecha), el centro C está en la intersección de la bisectriz del ángulo formado por r y t, con la perpendicular desde O' a r.

E 32- Trazar un círculo O que pase por un punto P dado y corte a dos círculos dados, O' y O'', bajo ángulos dados.

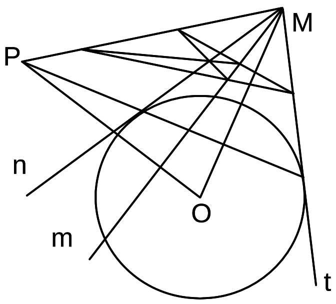
Solución: Con centro de inversión P y potencia de inversión la de P con relación, por ejemplo, a O', esta no varía, O'' se transforma en otra circunferencia, y O se transforma en una recta que corta a aquellas según los ángulos dados, es decir que será tangente a circunferencias concéntricas de ellas de forma que los ángulos de corte sean los dados. Las cuatro tangentes comunes darán, al deshacer la inversión, cuatro círculos solución.

E 33- Trazar una circunferencia O que sea tangente a una recta dada r, que pasa por un punto dado P, y que corta a un círculo dado O' bajo un ángulo dado.

Solución: Con centro de inversión P y potencia de inversión la de P con relación a O', esta no varía, la recta r se transforma en una circunferencia que pasa por P, mientras que el círculo pedido se transforma en una recta, El problema se reduce a trazar una tangente común a la circunferencia inversa de r y a una circunferencia concéntrica de O', trazada de forma que sus tangentes corten a O bajo el ángulo dado.

E 34- Trazar una circunferencia *O*, conociendo la polar *m* de un punto *P* dado, y una tangente *t*.

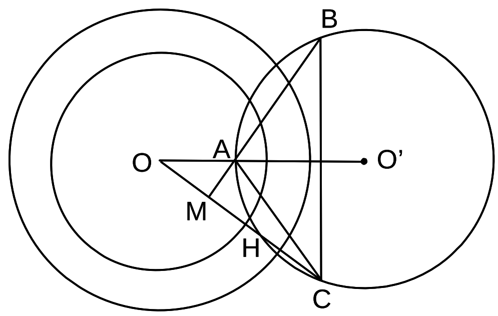
Solución:



Supuesto resuelto el problema, el punto *M* es vértice de un haz armónico formado por las tangentes a *O* trazadas desde *M* (*t* y *n*), el rayo *MP* y la polar *m*. Se halla el rayo conjugado armónico de *t* con relación a *MP* y *m*, obteniéndose el rayo *n*. El centro *O* está en la intersección de la bisectriz de $\widehat{n,t}$ con la perpendicular trazada desde *P* a *m*.

E 35- Probar que la circunferencia circunscrita O' a un triángulo autopolar *ABC* respecto a una circunferencia dada *O* de radio *R*, es ortogonal a una circunferencia de centro *O*, de radio $R\sqrt{2}$.

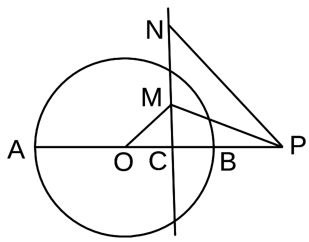
Solución:



El punto *O* es el ortocentro del triángulo *ABC*, pues la perpendicular trazada por el polo a la polar pasa por el centro de la circunferencia de la que el *ABC* es autopolar. El teorema de Carnot define que, siendo *CM* la altura de *C* sobre *AB*, y siendo *O* el ortocentro, $OM = MH$, siendo *H* el punto en que *CM* corta al círculo circunscrito. Siendo *O* el polo de *AB*, se tiene que $OM \cdot OC = R^2$, y como $OH = 2 \cdot OM$, se tiene que $OH \cdot OC = 2R^2 = \left(\sqrt{2}\,R\right)^2$. Luego la potencia de *O* respecto al círculo circunscrito al triángulo autopolar es el cuadrado del radio de la circunferencia ortóptica o de Monge, es decir que es ortogonal a ella.

E 36- Trazar una circunferencia conociendo uno de sus triángulos autopolares.

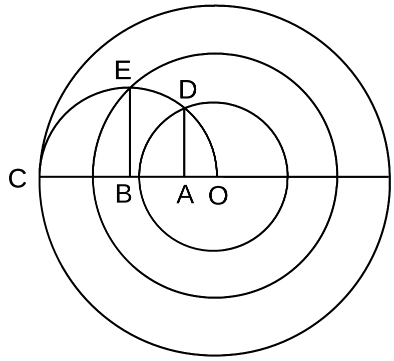
Solución:



Sea *PNM* el triángulo autopolar. Su ortocentro es el centro *O* de la circunferencia pedida. El radio *OB* es media proporcional entre *OC* y *OP*, conocidos.

E 37- Dividir gráficamente el área de un círculo, de dentro hacia fuera, en partes proporcionales a los números 1, 2 y 3, por medio de círculos concéntricos.

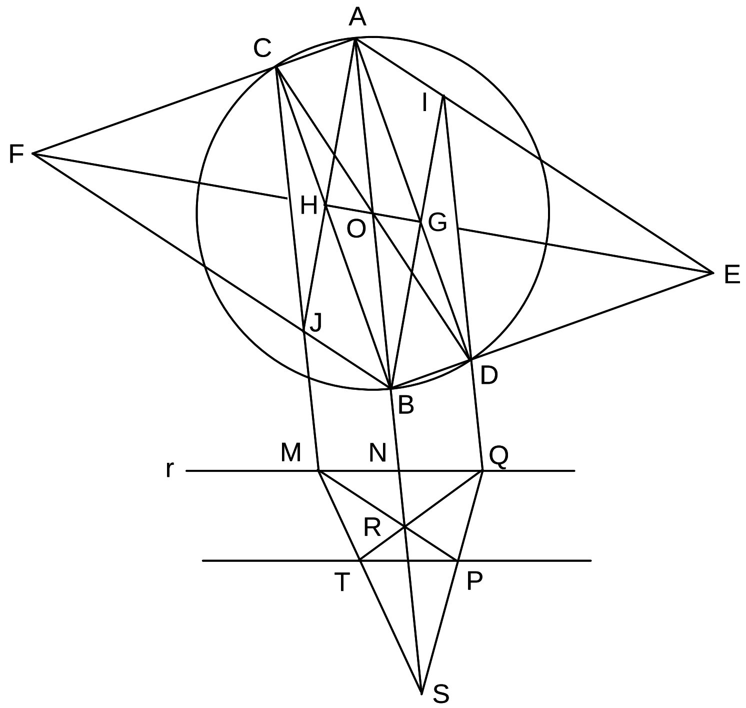
Solución:



Se divide el radio OC en partes proporcionales a los números dados: OA, $AB = 2 \cdot OA$ y $BC = OB$. Se traza una semicircunferencia de diámetro OC, y se levantan las perpendiculares AD y BE. Las cuerdas OD y OE son los radios de los círculos pedidos, pues las áreas de los círculos son proporcionales a los cuadrados de los radios, y estos cuadrados lo son a los números dados.

E 38- Se da un círculo con su centro O, una recta r y un punto P. Trazar por el punto una recta paralela a la dada utilizando solo la regla de un borde.

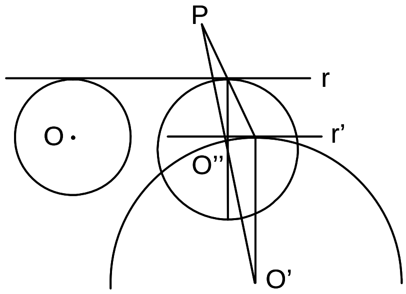
Solución:



Se siguen las construcciones de la figura en el siguiente orden, con el objetivo de determinar en r dos segmentos consecutivos iguales. Se traza el diámetro AB, que se prolonga hasta N en r, y el diámetro CD. Se traza un tercer diámetro EF, en el que BD determina E, y AC determina F. La recta AD corta a EF en G, y CB la corta en H. La recta BG corta a AE en I, e ID corta a r en Q. De forma similar, CB corta a EF en H, AH corta a FB en J, y CJ corta a r en M. Los segmentos MN y NQ son iguales, pues AB es la paralela media de ID y CJ (paralelogramos $ACBD$ y $AIBJ$). La recta PM corta a AN en R, obteniéndose QR. La recta PQ corta a AR en S. La recta MS es cortada por QR en T. La recta pedida es PT, paralela a r.

E 39- Dados dos círculos O y O', y un punto P fuera de ellos, trazar dos tangentes paralelas, r y r', una a cada uno de ellos, de modo que la razón de sus distancias a P, sea dada.

Solución:



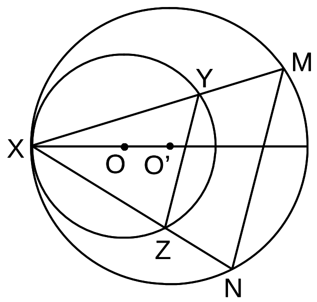
Supuesto resuelto el problema, si se multiplican O' y r', con centro de homotecia P y razón la dada, se obtienen O'' y r. Las tangentes comunes a O y O'' resuelven el problema, tras deshacer la homotecia.

E 40- Se dan tres círculos C_1, C_2 y C_3. A todo otro círculo C se le hace corresponder un triángulo cuyos lados son los ejes radicales de dicho círculo con relación a los tres dados. Demostrar que los triángulos correspondientes a dos cualesquiera de dichos círculos C, son homológicos.

Solución: Sean a y a' los ejes radicales de C y C' con C_1; b y b', con C_2; c y c' con C_3. Las intersecciones de aa', bb', cc', están en línea recta, porque son puntos de la misma potencia con respecto a C y C', luego estas intersecciones forman el eje radical de C y C'. Como los triángulos abc y $a'b'c'$, tienen sus lados de forma que dos a dos, se cortan en puntos de una misma recta, son homológicos.

E 41- Dada una circunferencia O, y dos puntos M y N situados fuera de ella, hallar un punto X de la circunferencia, tal que MX y NX la corten nuevamente en Y y Z, siendo YZ paralela a MN.

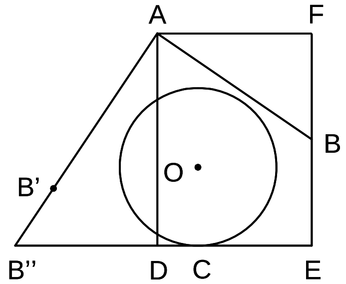
Solución:



Supuesto conocido X, los triángulos XYZ y XMN son semejantes, y MN es homotética de YZ con centro de homotecia X, transformándose la circunferencia O en otra O' que pasa por M y N, y que es tangente a O en X. Por tanto el problema se reduce a hallar una circunferencia O', que pase por M y N, y sea tangente a O (ver E 13). Los puntos de tangencia resuelven el problema.

E 42- Se da una circunferencia O y dos puntos A y B fuera de ella. Trazar una tangente a O, de forma que las distancias de A a la tangente y a una perpendicular trazada por B a la tangente, estén en una relación conocida.

Solución:

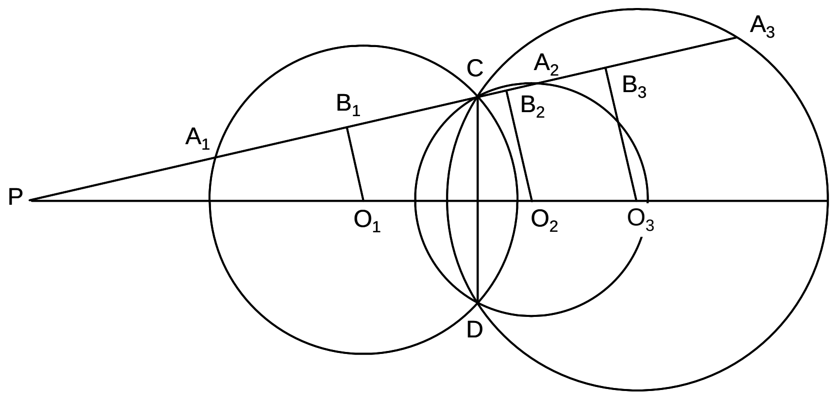


Sea la tangente pedida DE, y sea FE su perpendicular por B. Girando AB con centro en A, un ángulo recto, B se sitúa en B'; y si se multiplica AB' por la razón dada, B' se sitúa en B'', que está en la tangente pedida.

Nota: El lugar geométrico de los puntos de intersección de las tangentes trazadas a O, con las perpendiculares trazadas a ellas desde un punto dado, es un caracol crunodal.

E 43- Tres circunferencias de centros O_1, O_2, O_3, pasan por dos puntos dados, C y D. Una recta que pasa por C, corta a las tres circunferencias en los puntos A_1, A_2, A_3. Demostrar que $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{O_1O_2}{O_2O_3}$.

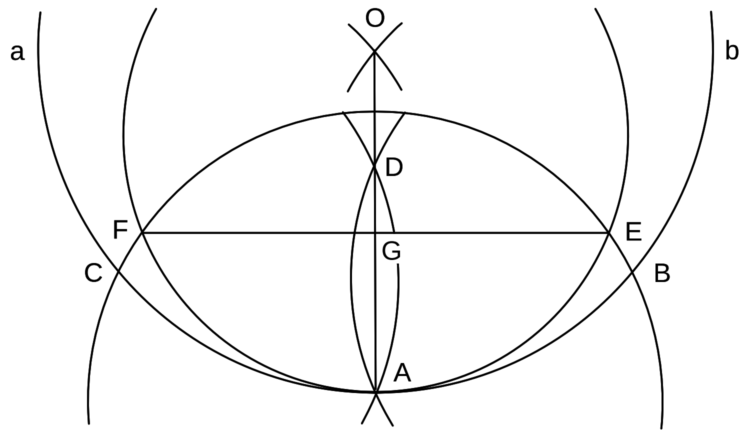
Solución:



Sean O_1B_1, O_2B_2, O_3B_3, las perpendiculares trazadas desde los tres centros sobre la recta $CA_1A_2A_3$. Luego, $B_1B_2 = \frac{A_1A_2}{2}$, y sus análogas. Siendo θ el ángulo que forma la recta $CA_1A_2A_3$ con la recta de los centros, se tiene: $\cos\theta = \frac{O_1O_2}{B_1B_2} = \frac{2O_1O_2}{A_1A_2} = \frac{O_2O_3}{B_2B_3} = \frac{2O_2O_3}{A_2A_3}$. Por tanto, $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{O_1O_2}{O_2O_3}$.

E 44- Dibujado un arco de círculo, encontrar su centro utilizando solo el compás.

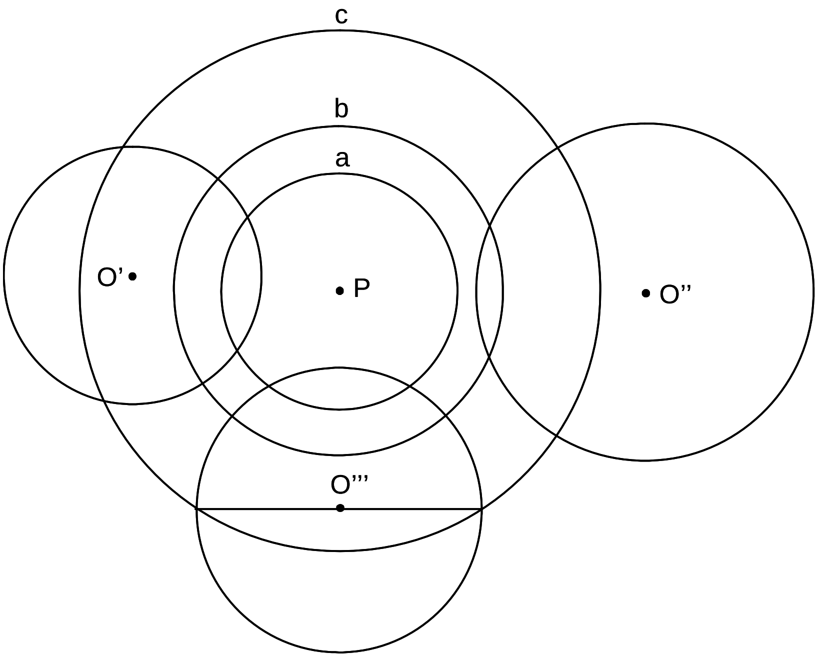
Solución:



Sea el arco ab. Con centro en un punto cualquiera A del arco, se traza una circunferencia cualquiera, que corta a ab en B y C. Con centro en B y C, y radios $BA = CA$, se trazan arcos que se cortan en D. Con centro en D y radio DA, se traza un círculo que corta al anterior en E y F. Con centro en E y F, y radios $EA = FA$, se trazan arcos que se cortan en O. En efecto, sea $AB = a$ y $OA = OB = OC = R$. Se trata de que E y F estén sobre la mediatriz de OA. Es decir, si es G el pie de la perpendicular desde E a OA, $GA = \frac{R}{2}$. El radio $AD = \frac{a^2}{R}$. El círculo con centro A y radio a, es cortado en E por el de centro D y radio $\frac{a^2}{R}$. Por tanto a es media proporcional entre su proyección AG y el diámetro $2 \cdot AD$, es decir, como $2 \cdot AD = \frac{2a^2}{R}$, $a^2 = AG \cdot \frac{2a^2}{R}$, de donde $AG = \frac{R}{2}$.

E 45- Trazar un círculo corradical con otros dos dados exteriores, y que corte diametralmente a otro círculo dado.

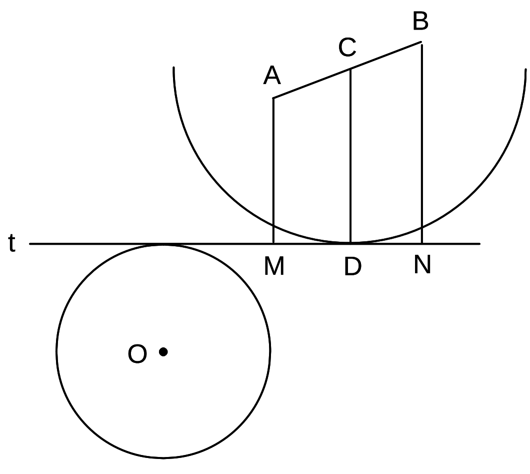
Solución:



Sean O' y O'' los círculos corradicales con el pedido, y sea O''' el que ha de ser cortado diametralmente. Los círculos O' y O'' forman un haz, que al invertirlo tomando como centro de inversión un punto límite P del haz (son exteriores), se transforman en los círculos concéntricos a y b, con centro en P. Por tanto, el centro del círculo pedido es P. Si además, la potencia de inversión es la de P respecto a O''', este círculo permanece invariable. Luego, se traza el círculo c concéntrico con a y b, y que corte diametralmente a O'''. El círculo pedido es el que corresponde a este círculo cuando se deshace la inversión.

E 46- Trazar a una circunferencia dada O, una tangente t cuyas distancia a dos puntos dados A y B, tengan una suma dada.

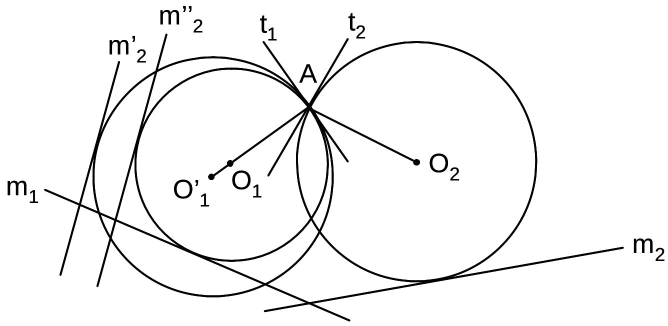
Solución:



Sean AM y AN las distancias desde A y B a t. En el trapecio $ABMN$, se conoce C, punto medio de AB, y la paralela media $CD = \dfrac{AM + BN}{2}$. Se traza el círculo de centro C y radio CD. Las tangentes comunes a los dos círculos resuelven el problema.

E 47- Por un punto dado A, trazar dos circunferencias O_1 y O_2, que se corten bajo un ángulo dado α. Se conoce la relación q entre sus radios y se sabe que cada una de ellas debe ser tangente a una recta dada, m_1 y m_2 respectivamente.

Solución:



El ángulo entre las tangentes t_1 y t_2 en A, es α, y el ángulo $\widehat{O_1AO_2} = \pi - \alpha$. Se gira AO_2 un ángulo $\pi - \alpha$, con lo que O_2 se sitúa en O_1'. Multiplicando O_1' por la relación dada q, se obtiene O_1. Tras estas operaciones m_2 ha pasado a m_2', y luego a m_2''. Se trata ahora de trazar un círculo O_1 que pasa por A y es tangente a m_1 y a m_2'' (ver E 14).

E 48- Trazar un círculo O, que pase por un punto P, sea tangente a una recta r y corte a otro círculo dado O' bajo un ángulo dado α.

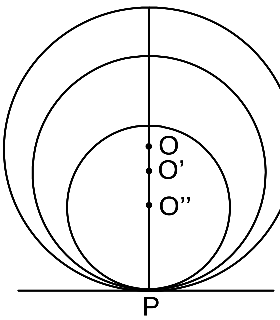
Solución: Aplicando una inversión con centro P y potencia la de P respecto a O', esta circunferencia no varía, r se transforma en un círculo O'' que pasa por P, y el círculo pedido O se transforma en una recta tangente a O'' y a una circunferencia C concéntrica con O' y de radio tal que sus tangentes corten a O' bajo el ángulo dado. Las inversas de las tangentes comunes a C y O'' solucionan el problema.

E 49- Trazar una circunferencia O que corte ortogonalmente a otra circunferencia O' dada, que corte bajo un ángulo dado α a otra circunferencia O'' también dada, y que pase por un punto P dado.

Solución: Aplicando una inversión de centro P y potencia la de P respecto a O'', esta no varía, O' se transforma en otra circunferencia O_1, y O en una recta que es tangente a una circunferencia C concéntrica con O'' y de radio tal que sus tangentes cortan a O'' bajo el ángulo dado, y que pasa por el centro de O_1, pues la corta ortogonalmente. Las inversas de estas rectas que pasan por el centro de O_1 y son tangentes a C, solucionan el problema.

E 50- Dado un círculo O y un punto P de su perímetro, trazar círculos tangentes interiores en P, que lo dividan en tres partes equivalentes.

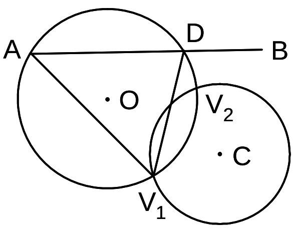
Solución:



Siendo R el radio de O, y R' y R'' los radios de las circunferencias buscadas, se tiene $\pi R^2 = \frac{3}{2}\pi R'^2 = 3\pi R''^2$. De donde $R' = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, $R'' = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

E 51- Dado un círculo C y una semirrecta AB exterior al círculo, se supone un ángulo constante cuyo vértice V recorre la circunferencia C y del que un lado pasa siempre por A. Hallar gráficamente la posición de V para que la longitud del segmento interceptado por el ángulo en AB, sea dada.

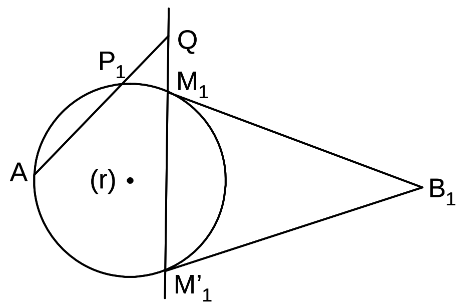
Solución:



Sea AD la longitud dada. Se traza el arco capaz O del ángulo dado V, sobre AD, que corta a C en V_1 y V_2, soluciones del problema (puede haber una, dos o ninguna solución).

E 52- Se dan tres puntos P, A y B. Por P se traza una recta variable r. Se sabe que por A y B se puede hacer pasar dos círculos C y C' tangentes a r en M y M'. Demostrar que el círculo O que pasa por AMM', pasa por un punto fijo, además del A, al girar r alrededor de P.

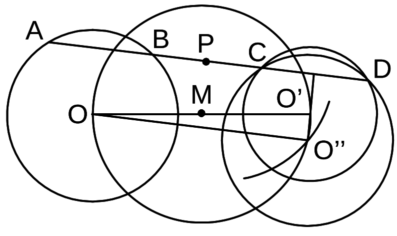
Solución:



Aplicando una inversión de centro A y potencia cualquiera, el punto P se transforma en el P_1, el B en el B_1, los círculos C y C', en las rectas B_1M_1 y $B_1M'_1$, y la recta r en un círculo (r) que pasa por A y es tangente a B_1M_1 y $B_1M'_1$. El círculo AMM' se transforma en la recta $M_1M'_{1,}$, polar de B_1 respecto del círculo (r). La recta $M_1M'_1$ pasa por el punto fijo Q, intersección de AP_1 y $M_1M'_1$, luego todos los círculos O pasan por un punto fijo.

E 53- Se dan dos círculos O y O'. Trazar por un punto dado P, una secante AD que determine en ellos dos segmentos iguales $AB = CD$.

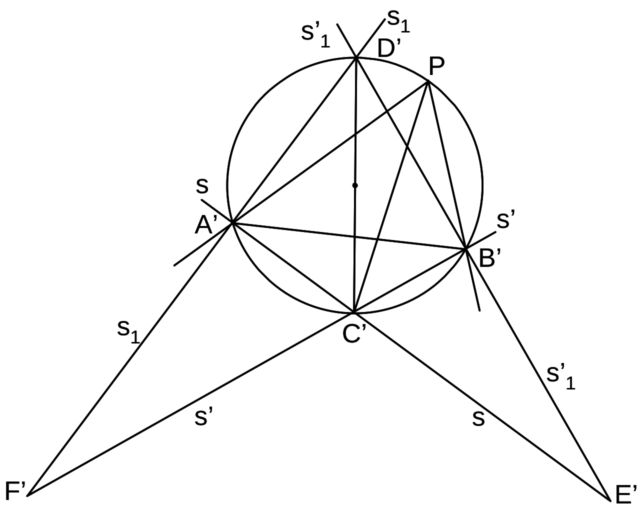
Solución:



Supuesto resuelto el problema, se traslada O paralelamente a la recta pedida AD, situándose en O'', siendo $O'O''$ perpendicular a AD. Al ser $\widehat{OO''O'} = 90º$, el lugar geométrico de O'' es el círculo de diámetro OO'. El punto P pertenece al eje radical de O' y O'', luego $PO'^2 - R'^2 = PO''^2 - R^2$, siendo R el radio de O y O'', y R' el de O'. Como se conocen PO', R y R', la distancia PO'' es conocida. El arco de centro P y radio PO'' corta al círculo de diámetro OO' en O''. La recta AD es paralela a OO''.

E 54- Se dan tres puntos A, B y P. Sobre AB se da un punto variable C. Se consideran las circunferencias S y S' circunscritas a los triángulos PAC y PBC. Se traza la circunferencia S_1 que pasa por P y A, y que es ortogonal a S. Y se traza la circunferencia S_1', que pasa por P y B, y que es ortogonal a S'. 1º) Demostrar que S y S' se cortan bajo un ángulo θ determinado. 2º) Demostrar que S_1 y S_1' se cortan bajo el mismo ángulo θ. 3º) Siendo D, E y F los puntos de encuentro de los pares de circunferencias S_1 y S_1', S y S_1', S' y S_1, hallar el lugar geométrico de D, E y F. 4º) Demostrar que el círculo que pasa por P, C y D, tiene su centro en AB.

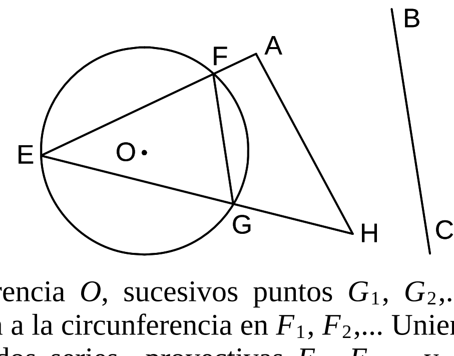
Solución:



Aplicando una inversión de centro P y potencia cualquiera, se realizan las siguientes transformaciones: la recta ABC se transforma en la circunferencia $A'B'C'$ que pasa por P; la circunferencia S se transforma en la recta s que pasa por A' y C', y la S' en la recta s' que pasa por B' y C'; la circunferencia S_1 en la recta s_1 que pasa por A' y es perpendicular a s, y la circunferencia S_1' en la recta s_1' que pasa por B' y es perpendicular a s'; D', E' y F' son los inversos de D, E y F, siendo los puntos de intersección de s_1 y s_1', s y s_1', s_1 y s'; el círculo PCD se transforma en la recta $C'D'$. 1º) el círculo $A'B'C'$ es fijo, así como A' y B', el ángulo $\widehat{A'C'B'} = \theta$ es fijo pues la cuerda que subtiende, $A'B'$, es fija. 2º) s_1 y s_1' son perpendiculares a s y s', luego su ángulo es θ. 3º) El lugar geométrico de D' es el círculo $A'B'C'$, luego el de D es la recta AB. Como $\widehat{A'F'B'} = \widehat{A'E'B'}$, los lugares geométricos de E' y F' son círculos, y los de E y F son sus círculos inversos. 4º) La recta $C'D'$ inversa del círculo PCD, es ortogonal al círculo $A'B'P$ (pasa por su centro), luego AB es ortogonal al círculo PCD, es decir pasa por su centro.

E 55- Se dan dos puntos A y H, una circunferencia O, y una recta BC. Encontrar un punto E sobre la circunferencia, tal que al unirlo con A y H, la cuerda FG que determina en O, sea paralela a BC.

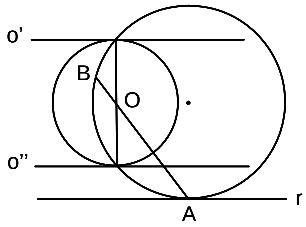
Solución:



Se toman sobre la circunferencia O, sucesivos puntos G_1, G_2,... Se trazan las paralelas a la dirección dada BC, que cortan a la circunferencia en F_1, F_2,... Uniendo G_1,G_2,... con H, y F_1, F_2,... con A, se forman sobre O, dos series proyectivas E_1, E_2,... y E_1', E_2',... cuyos puntos dobles solucionan el problema.

E 56- Se da un círculo O, un punto A y una recta r que pasa por A. Demostrar que 1º) Hay dos círculos, O' y O'', tangentes a O y tangentes a r en A. 2º) La recta que une los puntos de contacto de estos dos círculos con O, pasa por un punto fijo cuando r gira alrededor de A.

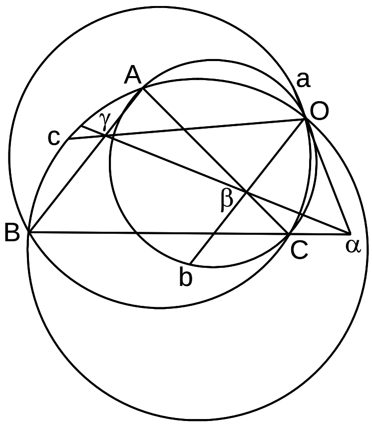
Solución:



Aplicando una inversión de centro A y potencia la de A respecto a O, esta no varía, como tampoco r, mientras que O' y O'' se transforman en dos rectas, o' y o'', paralelas a r y tangentes a O. 1º) Luego al haber dos rectas o' y o'', hay dos círculos inversos de ellas. 2º) La recta que une los puntos de contacto de o' y o'' con O, pasa por el centro de O. Su inversa es una circunferencia que pasa por A y por los dos puntos de tangencia. La potencia de O respecto a este círculo es $-R^2 = -OA \cdot OB$, siendo R el radio de O. Como este es fijo, así como OA, también lo es OB, luego B es fijo.

E 57- En el plano de un triángulo ABC, se da un punto O y una transversal $\alpha\beta\gamma$. Las rectas $O\alpha$, $O\beta$ y $O\gamma$, cortan a los círculos OBC, OCA y OAB en a, b y c. Demostrar que O, a, b y c son concíclicos.

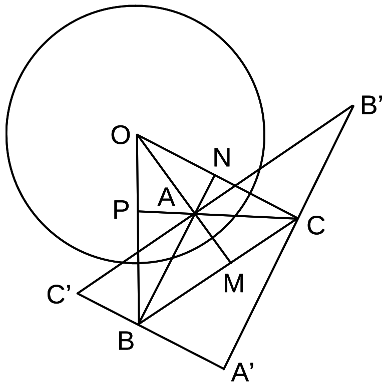
Solución:



En el círculo OBC, se tiene $\alpha O \cdot \alpha a = \alpha B \cdot \alpha C$. En el OAC, $\beta O \cdot \beta b = \beta A \cdot \beta C$. Luego $\alpha\beta$ es el eje radical del círculo Oab y del círculo circunscrito al triángulo ABC, siendo γ el punto donde este eje radical corta a AB. Por tanto $\gamma O \cdot \gamma c = \gamma O \cdot \gamma c'$, siendo c' el punto en que el círculo Oab corta a $O\gamma$. Luego $c \equiv c'$, por lo que c está en la circunferencia Oab.

E 58- Se da una circunferencia O y un triángulo ABC autopolar respecto a O. Demostrar que el triángulo polar recíproco del triángulo órtico del ABC, es semejante a este y hallar la relación de semejanza.

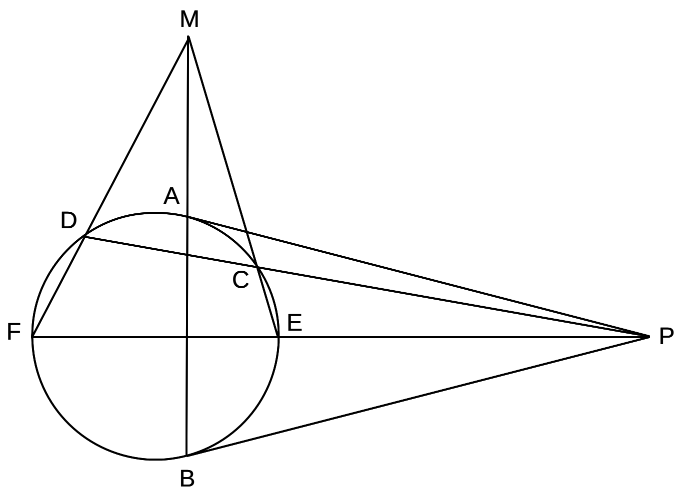
Solución:



Por ser BC polar de A, la altura AM pasa por O, siendo A y M conjugados armónicos respecto a los puntos en que AM corta a O. Luego la polar de M es la perpendicular por A a OM, o sea la paralela a BC por A. Por tanto, el triángulo polar recíproco del MNP, es el $A'B'C'$, respecto al cual el triángulo ABC es el mediano, con lo que queda demostrado que son semejantes con razón $\frac{1}{2}$.

E 59- Desde un punto P exterior a una circunferencia dada, se trazan las tangentes PA y PB, y las secantes PCD y PEF. Demostrar que las rectas AB, CE y DF, se cortan en un punto.

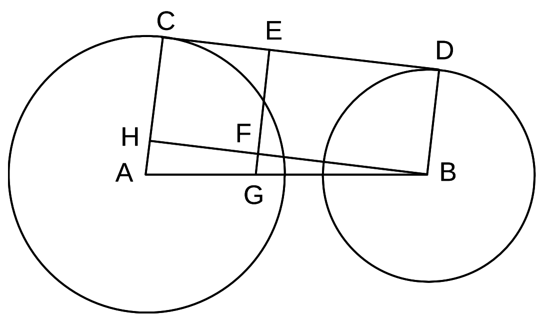
Solución:



Los triángulos PCA y PAD son semejantes, luego: $\frac{CA}{AD} = \frac{PA}{PD}$. También lo son los triángulos PCF y PED, así como los triángulos PEB y PFB, por lo que $\frac{DE}{CF} = \frac{PD}{PF}$, $\frac{FB}{BE} = \frac{PF}{PB}$. Multiplicando las tres igualdades obtenidas, y siendo $PA = PB$, se tiene: $\frac{CA \cdot DE \cdot FB}{AD \cdot CF \cdot BE} = 1$, que es la condición para que AB, CE y DF, sean concurrentes.

E 60- Se dan dos círculos de centros A y B fijos, cuyos radios a y b satisfacen la relación $ma + nb = p$, en la que m, n y p son longitudes dadas. Hallar la envolvente de las tangentes comunes a los dos círculos.

Solución:



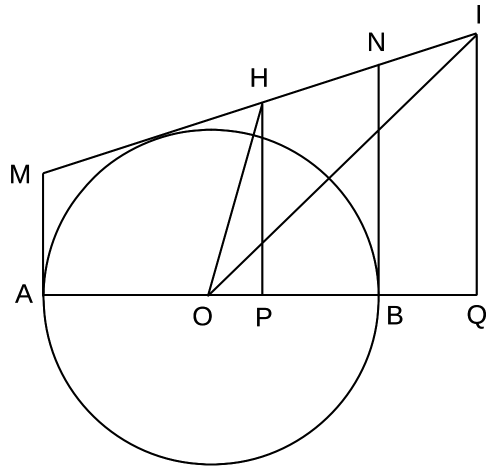
Sea G un punto de AB, tal que $AG = k \cdot AB$. Se tiene que

$EG = b + FG = b + (1-k)(a-b) = (1-k)a + kb = (1-k)a + \frac{k(p-ma)}{n} = a(1-k-\frac{km}{n}) + \frac{kp}{n}$

Por tanto EG será fijo cuando $1 - k - \frac{km}{n} = 0$, es decir cuando $k = \frac{n}{m+n}$, siendo $EG = \frac{p}{m+n}$. Luego la envolvente de la tangente común CD (y de su simétrica respecto a AB) es una circunferencia de centro G, situado sobre AB, a una distancia de A igual a $\frac{n \cdot AB}{m+n}$ y radio $\frac{p}{m+n}$. Un razonamiento similar lleva a definir la circunferencia envolvente de las tangentes comunes interiores.

E 61- Se da una circunferencia O y un diámetro AB en el que se marcan dos puntos P y Q, conjugados armónicos de A y B. Se trazan las tangentes en A y B, y sus paralelas por P y Q. Una tangente variable corta a las tangentes en M y N, y a las paralelas en H e I. Demostrar que al variar la tangente, la relación $\frac{OH}{OI}$ es constante.

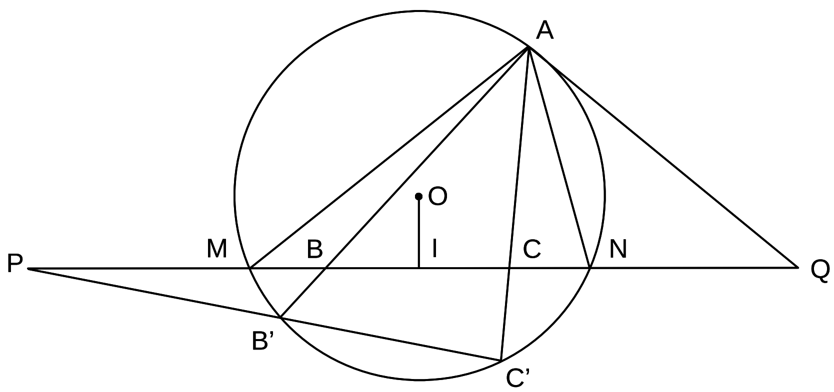
Solución:



Siendo R el radio de O, se tiene $OP \cdot OQ = R^2$. Haciendo $OP = a$, y $AM = b$, se tiene $OQ = \frac{R^2}{a}$, $BN = \frac{R^2}{b}$. Por tanto, $\frac{OH^2}{OI^2} = \frac{a^2 + HP^2}{\frac{R^4}{a^2} + IQ^2}$, $HP = \frac{2b^2R + (R+a)(R^2 - b^2)}{2bR}$, $IQ = \frac{2b^2a + (R+a)(R^2 - b^2)}{2ba}$. Sustituyendo y operando $\frac{OH}{OI} = \frac{a}{R}$, que es constante.

E 62- Se da una circunferencia O, un punto A sobre ella, y una cuerda MN cuyo punto medio es I. Se toman sobre MN dos puntos B y C simétricos respecto a I. Las rectas AB y AC encuentran a O en B' y C'. La recta $B'C'$ corta a MN en P. La tangente en A a O, corta a MN en Q. Demostrar que P y Q son simétricos respecto a I.

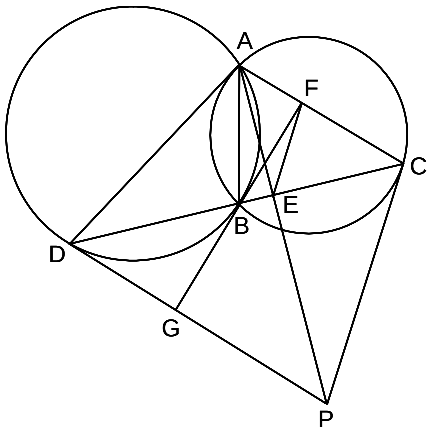
Solución:



Los rayos AM, AB', AC' y AN determinan una involución, siendo P su punto de Frégier. El rayo homólogo de AP es la tangente AQ. Luego sobre MN se tiene una involución definida por los pares de puntos $(B, C)(M, N)(P, Q)$, que tienen el mismo punto medio I.

E 63- Dos circunferencias dadas se cortan en los puntos A y B. Una secante que pasa por B, corta a las circunferencias en C y D. Las tangentes en C y D se cortan en P. Por E, intersección de AP y CD, se traza una paralela a CP, que corta a AC en F. Demostrar que FB es tangente a la circunferencia dada ABD.

Solución:



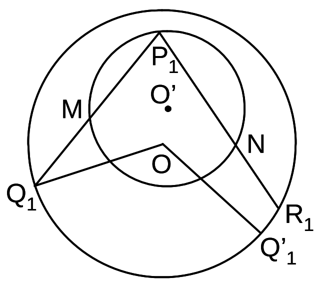
Si la tangente en B corta a AC en F, de forma que FE sea paralela a CP, quedará demostrado el enunciado. Se tiene que $\widehat{BCP}=\widehat{BAC}$, $\widehat{BDP}=\widehat{BAD}$. Luego, $\widehat{DPC}=\pi-\widehat{BDP}-\widehat{BCP}=$ $=\pi-\widehat{BAD}-\widehat{BAC}=\pi-\widehat{DAC}$. Luego el cuadrilátero $ACPD$ es inscriptible, por lo que $\widehat{APC}=\widehat{ADB}$. Como $\widehat{FBE}=\widehat{GBD}=\widehat{BDG}=\widehat{CAP}$, el cuadrilátero $FABE$ también es inscriptible, por lo que $\widehat{FEA}=\widehat{ABF}=\widehat{ADB}=\widehat{APC}$. Es decir, FE es paralela a CP.

E 64- Se dan dos círculos O y O'. Se considera una circunferencia C tangente a O en T, y ortogonal a O', a la que corta en H y K. Demostrar que C es tangente a un círculo fijo.

Solución: Aplicando una inversión con centro un punto cualquiera de O' y potencia, por ejemplo, la de este punto con relación a O, la circunferencia O no varía, la circunferencia O' se transforma en la recta o'_1, sobre la que tiene su centro la circunferencia C_1, inversa de C. Luego C_1 es tangente a la circunferencia simétrica de O respecto a o'_1. Al deshacer la inversión, C es tangente a una circunferencia fija, inversa de la simétrica de O respecto a o'_1.

E 65- Se da una circunferencia O y otra O', interior a aquella. Sobre O' se dan dos puntos M y N. Encontrar sobre O' un tercer punto P, tal que PM y PN determinen en O el lado del triángulo equilátero inscrito.

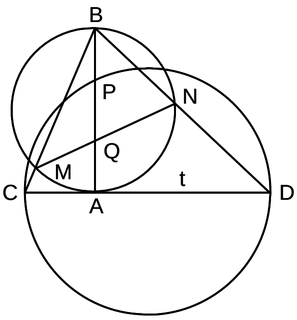
Solución:



El problema se resuelve por falsa posición en tres ensayos. Se eligen tres puntos P_1,... sobre O'. Se unen con M y N, obteniéndose Q_1,... y R_1,... Los puntos Q_1,... se desplazan sobre O, un arco de 120º, obteniéndose Q'_1,... Los puntos dobles de las series R_1,... y Q'_1,... solucionan el problema.

E 66- En un punto A de una circunferencia dada, se traza su tangente t. Sea AB el diámetro perpendicular a t. Sea P un punto dado del diámetro AB. Una circunferencia variable con centro en un punto de t, pasa por P, y corta a t en C y D. Las rectas BC y BD cortan a la circunferencia dada en M y N. Demostrar que MN pasa por un punto fijo.

Solución:



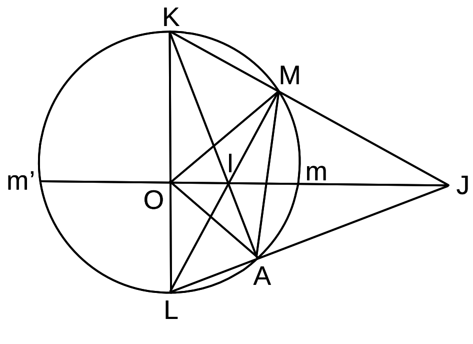
AB y CD son perpendiculares. En el triángulo rectángulo PCD, se tiene: $PA^2 = AC \cdot AD$, luego este producto es constante. Como $\widehat{MAN} = \pi - \widehat{MBN}$, y siendo rectos los ángulos $\widehat{BMA}$, $\widehat{BNA}$ y $\widehat{BAD}$, los triángulos ABM y ABC son semejantes, así como los triángulos ABN y BAD. Siendo Q la intersección de MN y AB, se tiene: $\frac{BQ}{AQ} = \frac{S_{MBN}}{S_{MAN}} = \frac{BM \cdot BN}{MA \cdot AN} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{AB^2}{PA^2}$. Luego $\frac{BQ}{AQ}$ es constante, por lo que Q es un punto fijo por el que pasa MN.

E 67- Demostrar que los inversos de los círculos de un haz F, forman otro haz F'. Estudiar el problema según la clase del haz F.

Solución: a) Caso de que F sea elíptico (el eje radical corta a todas las circunferencias en dos puntos llamados fundamentales): Siendo A y B, los puntos fundamentales de F, sus inversos A' y B' serán puntos fundamentales de F'. Luego F' es otro haz elíptico cuyos puntos fundamentales son los inversos de los de F. b) Caso de que F sea parabólico (el eje radical es tangente a todos los círculos en un punto): Siendo A el punto común de tangencia, los círculos inversos tendrán un punto común de tangencia A', inverso de A. Luego F' es otro haz parabólico, con el punto de tangencia A', inverso de A. c) Caso de que F sea hiperbólico (los círculos son exteriores al eje radical, y hay dos círculos reducidos cada uno de ellos a un punto; estos dos puntos se llaman puntos límites): Si A y B son los puntos límites de F, serán los fundamentales del haz conjugado. Si A' y B' son los inversos de A y B, serán los puntos límites del haz conjugado inverso, y por tanto los puntos fundamentales de F', por lo que F' es elíptico.
Nota: Dos haces son conjugados cuando los círculos de uno son ortogonales a los del otro. Como la inversión conserva los ángulos, los haces inversos de dos haces conjugados, son también conjugados entre sí.

E 68- Se designa por I el centro del círculo inscrito en el triángulo OAM, y por J, K y L, los centros de sus círculos exinscritos. Siendo m el punto en que la bisectriz OIJ corta a la circunferencia de diámetro KL, demostrar que m', simétrico de m respecto a O, está sobre el círculo descrito sobre KL como diámetro, y que los puntos I y J son conjugados respecto a este círculo.

Solución:



Las rectas LM y KA, definen el punto I como conjugado de J respecto al círculo de diámetro KL. Siendo OJ y OK las bisectrices interior y exterior de $\widehat{AOM}$, son perpendiculares entre sí, luego m', simétrico de m respecto a KL, está sobre el círculo de diámetro KL.

E 69- Con los datos del problema anterior E 68, se consideran las inversiones cuyos polos son I, J, K y L, y cuyas potencias respectivas, son $Im \cdot Im'$, $Jm \cdot Jm'$, Km^2 y Lm^2. ¿Còmo transforma cada una de estas cuatro inversiones a los puntos O, A y M? ¿Cuál es el efecto del producto de estas cuatro inversiones sobre O, A y M, en el orden I, J, K y L de sus polos? ¿Cómo transforma este producto de inversiones al círculo OAM, a un círculo que pasa por dos de estos puntos y un punto cualquiera del plano? Hallar el valor de la suma algebraica de los inversos de las potencias de las cuatro inversiones.

Solución: En el siguiente cuadro se expone cómo transforma cada inversión a cada uno de los tres puntos O, A y M:

Polo →	*I*	*J*	*K*	*L*
O	*J*	*I*	*L*	*K*
A	*K*	*L*	*I*	*J*
M	*L*	*K*	*J*	*I*

Por ejemplo, la inversión de polo L transforma al punto A en el punto J. En el segundo cuadro se ve la sucesiva aplicación de productos de inversiones sobre los puntos y círculos indicados en el enunciado:

Inversiones aplicadas →	I	$I \cdot J$	$I \cdot J \cdot K$	$I \cdot J \cdot K \cdot L$
O	*J*	∞	*K*	*O*
A	*K*	*M*	*J*	*A*
M	*L*	*A*	*I*	*M*
Círculo OAM	*Círculo JKL*	*Recta AM*	*Círculo KIJ*	*Círculo OAM*
Círculo OAX	*Círculo* JKX'	*Recta MX”*	*Círculo* KJX'''	*Cìrculo OAX*
Círculo OXM	*Círculo* $JX'L$	*Recta X”A*	*Círculo* $KX'''I$	*Círculo OXM*
Círculo XAM	*Círculo* $X'KL$	*Círculo X”MA*	*Círculo* $X'''JI$	*Círculo XAM*

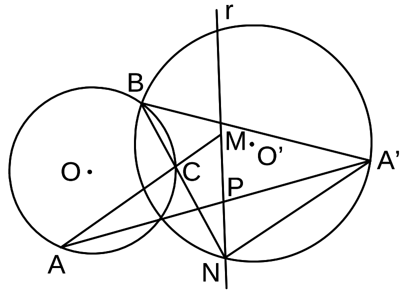
Por ejemplo, el producto de las inversiones I, J y K, transforma al círculo OXM (círculo que pasa por O y M y por un tercer punto cualquiera X), en un círculo que pasa por los puntos K, I y por el inverso X''' de X (al aplicar al punto X el producto de las tres inversiones, se obtiene X''')

Siendo el producto de las cuatro inversiones igual a la unidad, un punto cualquiera del plano se transforma en sí mismo tras la aplicación sucesiva de las cuatro inversiones. El valor de la suma algebraica de los inversos de las potencias de las cuatro inversiones, es:

$$\frac{1}{Im \cdot Im'} + \frac{1}{Jm \cdot Jm'} + \frac{1}{Km^2} + \frac{1}{Lm^2} = \frac{1}{IJ \cdot IO} + \frac{1}{JL \cdot JO} + \frac{1}{KO \cdot KL} + \frac{1}{LO \cdot LK} =$$
$$= \frac{1}{IJ}\left(\frac{1}{IO} - \frac{1}{JO}\right) + \frac{1}{KL}\left(\frac{1}{KO} - \frac{1}{LO}\right) = \frac{1}{IJ} \cdot \frac{JO - LO}{IO \cdot JO} + \frac{1}{KL} \cdot \frac{LO - KO}{KO \cdot LO} =$$
$$= \frac{1}{IJ} \cdot \frac{JI}{IO \cdot JO} + \frac{1}{KL} \cdot \frac{LK}{KO \cdot LO} = \frac{-1}{IO \cdot JO} - \frac{1}{KO \cdot LO} = \frac{-1}{Om^2} + \frac{1}{Om^2} = 0.$$

E 70- Se da una circunferencia O y dos puntos A y B sobre ella, así como una recta r y un punto P sobre esta. Determinar sobre O, un punto C tal que las cuerdas CA y CB determinen sobre r dos puntos M y N, de forma que PM y PN estén en una relación dada $\frac{m}{n}$.

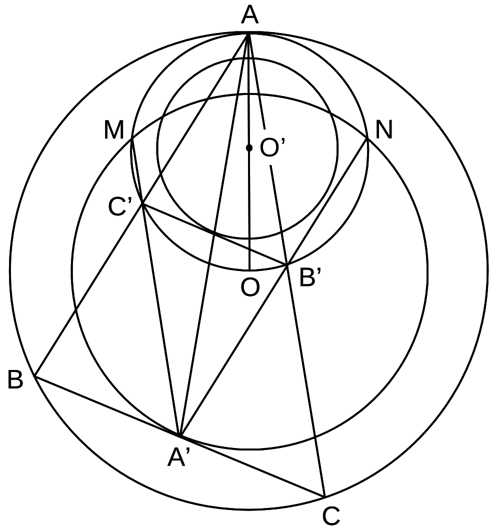
Solución:



Con centro de homotecia P y razón $\frac{n}{m}$, se obtiene A' homotético de A. El homotético de M es N. Siendo AM y $A'N$ paralelas, el ángulo $\widehat{BNA'}$ es conocido, pues vale $\pi - \widehat{ACB}$. Luego trazando el arco capaz del ángulo $\widehat{BNA'}$ sobre $A'B$ (círculo O'), se obtiene N en su intersección con r.

E 71- Un ángulo constante gira alrededor de un punto fijo A de una circunferencia O, y sus lados cortan a esta en B y C. Demostrar que de los tres lados del triángulo mediano del ABC, dos pasan cada uno por un punto fijo, y el tercero envuelve a una circunferencia fija.

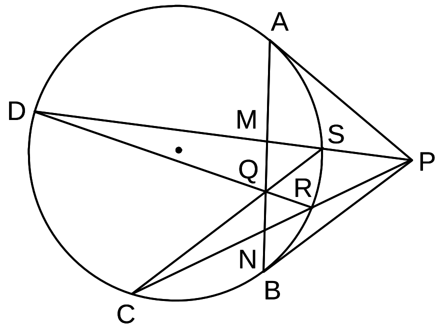
Solución:



La longitud de BC es constante, siendo tangente a una circunferencia concéntrica con O. Aplicando una homotecia de centro A y razón $\frac{1}{2}$, se obtienen las circunferencias concéntricas de centro O', homotéticas de las concéntricas de centro O. Siendo $A'B'C'$ el triángulo mediano del ABC, el lado $B'C'$ es tangente (envuelve) a la circunferencia homotética envuelta por BC, y los lados $A'B'$ y $A'C'$ pasan por N y M, respectivamente, intersecciones del círculo de centro O envuelto por BC, y del círculo homotético de la circunferencia O dada.

E 72- Sean A, B, C y D, cuatro puntos situados sobre una circunferencia, y sea P el polo de AB. Demostrar que la razón anarmónica del haz $(P, ABCD) = (ABCD)^2$ sobre la circunferencia.

Solución:



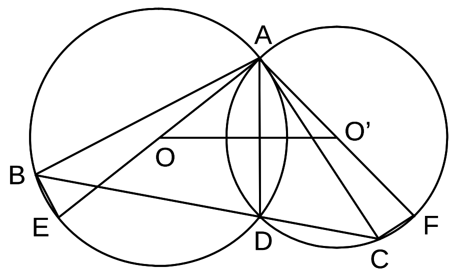
Sean S y M las intersecciones de PD con la circunferencia y con AB; sean R y N las intersecciones de PC con la circunferencia y con AB; y sea Q la intersección de SC, RD y AB, puesto que por construcción Q está sobre la polar de P. Cortando el haz por AB, se tiene $(P, ABCD) = (ABNM)$. Proyectando los cuatro puntos dados desde R y cortando por AB, se tiene que $(R, ABCD) = (ABNQ)$. Proyectándolos desde S y cortando por AB, se tiene que $(S, ABCD) = (ABQM)$. Luego

$$(ABCD)^2 = (R, ABCD) \cdot (S, ABCD) = (ABNQ) \cdot (ABQM) = \left(\frac{AN}{AQ} \div \frac{BN}{BQ}\right) \cdot \left(\frac{AQ}{AM} \div \frac{BQ}{BM}\right)$$

$= \frac{AN}{AM} \div \frac{BN}{BM} = (ABNM) = (P, ABCD)$. Luego $(ABCD)^2 = (P, ABCD)$.

E 73- Sobre la base BC de un triángulo ABC, se toma un punto cualquiera D, y se trazan las circunferencias circunscritas a los triángulos ABD y ADC, cuyos centros son O y O'. 1º) Demostrar que la relación de sus radios es constante cuando varía D. 2º) Determinar la posición de D para que estos radios sean mínimos. 3º) Demostrar que los triángulos AOO' y ABC son semejantes. 4º) Hallar el lugar geométrico del punto M que divide a la recta OO' en una relación dada, examinando el caso en que M sea la proyección de A sobre OO'.

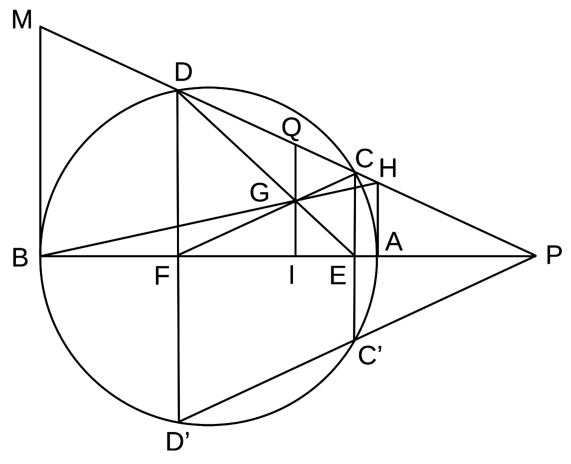
Solución:



1º) En la circunferencia O, se tiene que $\widehat{BEA} = \widehat{BDA}$, pues subtienden el mismo arco. En la O', $\widehat{BDA} = \widehat{AFC}$, pues el cuadrilátero $ADCF$ es inscriptible. Luego al ser $\widehat{BEA} = \widehat{AFC}$, sus complementarios también son iguales, es decir $\widehat{BAO} = \widehat{CAO'}$, siendo semejantes los triángulos BAE y CAF, luego $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{R}{R'}$. 2º) Como O está en la mediatriz de AB, R será mínimo cuando valga $\frac{AB}{2}$, es decir cuando O y O' sean los puntos medios de AB y AC. En este caso D está en la proyección de A sobre BC. 3º) Los triángulos AOO' y ABC son semejantes ya que $\widehat{OAO'} = \widehat{BAC}$ y $\frac{AB}{AC} = \frac{R}{R'}$. 4º) El triángulo AOO' permanece semejante a sí mismo, siendo A fijo, y recorriendo O y O' rectas, que son las mediatrices de AB y AC. Por tanto los puntos homólogos en la serie de estos triángulos semejantes, recorren rectas, por lo que el lugar geométrico de M, es una recta. En el caso en que M sea la proyección de A sobre OO', el lugar de M es la paralela media a BC del triángulo ABC, ya que M es punto medio de AD.

E 74- Se da una circunferencia y un punto P exterior a ella. Se traza la secante PCD, y se proyectan los puntos C y D en E y F sobre el diámetro AB que pasa por P. Las rectas DE y CF se cortan en G, que se proyecta en I sobre AB. La recta BG corta a la secante PCD en H. 1º) Demostrar que GI es la polar de P respecto a la circunferencia dada. 2º) Demostrar que H está sobre la tangente en A a dicha circunferencia.

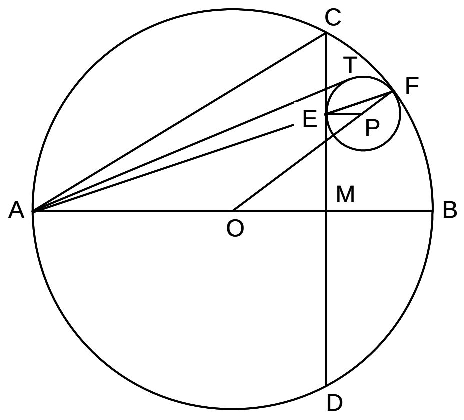
Solución:



1º) La recta $PC'D'$ es simétrica de PCD respecto a AB. Considerando las diagonales DC' y CD' del trapecio isósceles $CDC'D'$, se tiene que $\frac{IE}{IF} = \frac{CC'}{DD'} = \frac{CE}{DF} = \frac{GC}{GF}$. Luego G e I están sobre la misma paralela a DD', es decir sobre la polar de P. 2º) Sea Q el punto de corte de GI con PCD, y H' el de la intersección de la tangente en A con PCD. Se tiene que $(PIAB) = -1 = (PQH'M)$. Proyectando esta cuaterna desde B y cortando por la polar, se tiene $(PIAB) = (IQG'\infty)$. Proyectando $(PQCD) = -1$ desde F y cortando por la polar, $(IQG\infty) = -1$. Luego G y G' se confunden, por lo que H está sobre la tangente en A, confundiéndose H y H'.

E 75- En una circunferencia dada de centro O, se traza el diámetro AB y la cuerda perpendicular CD, que corta a AB en M. Una circunferencia variable de centro P, es tangente a la cuerda CD en E, y al arco CBD en F. Demostrar que la tangente AT, trazada desde A a esta circunferencia, es igual a AC.

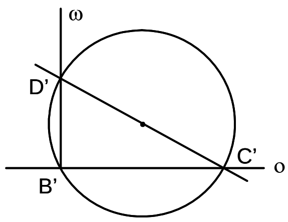
Solución:



Los puntos O, P, F están alineados. Los triángulos isósceles FPE y FOA son semejantes, por lo que los puntos F, E, A están alineados. Se tiene: $AT^2 = AE \cdot AF = AE(AE + EF) = AE^2 + AE \cdot EF =$
$= AM^2 + ME^2 + CE \cdot ED = AM^2 + ME^2 + (CM - EM)(ME + MD) =$
$= AM^2 + ME^2 + (CM - EM)(ME + CM) = AM^2 + ME^2 + CM^2 - ME^2 = AM^2 + CM^2 = AC^2$.
Luego $AT = AC$.

E 76- Se dan dos circunferencias ortogonales O y Ω que se cortan en A y B. Se toma un punto C sobre O, y otro D sobre Ω. Demostrar que las circunferencias ACD y BCD son ortogonales.

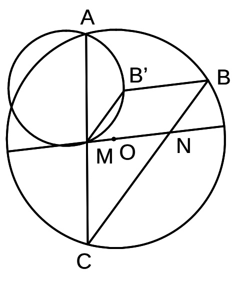
Solución:



Aplicando una inversión de centro A, las dos circunferencias dadas se transforman en dos rectas perpendiculares o y ω, que se cortan en B', inverso de B. El círculo ACD se transforma en la recta $D'C'$, siendo D' y C' los inversos de D y C. Luego esta recta y el círculo $B'C'D'$, inverso del BCD, son ortogonales, pues $C'D'$ es diámetro del $B'C'D'$, al ser $\widehat{C'B'D'} = 90º$. Al deshacer la inversión, los círculos ACD y BCD son ortogonales.

E 77- Se da una circunferencia O, y sobre ella dos puntos A y B, así como un diámetro fijo en posición. Hallar sobre O un tercer punto C tal que las cuerdas CA y CB determinen sobre el diámetro fijo un segmento MN de longitud dada.

Solución:



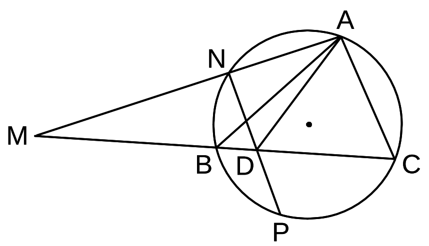
Se traslada el punto B a B', paralelamente al diámetro dado y en una longitud igual a la dada MN. El ángulo $\widehat{AMB'}$ es conocido por ser igual al $\widehat{ACB}$, que es fijo porque lo es el arco AB que lo subtiende. Se traza el arco capaz de este ángulo sobre AB', que corta en M al diámetro dado. La recta AM determina C sobre O. Puede haber dos soluciones (caso de la figura), una o ninguna.

E 78- Transformar por inversión 1º) Tres círculos en otros tres con sus centros situados sobre una línea recta r. 2º) Tres círculos en otros tres iguales entre sí.

Solución: 1º) Sean O_1, O_2 y O_3 los círculos dados, y O_1', O_2' y O_3' sus inversos cuyos centros están en la recta r. Deshecha la inversión, los pies de las polares del polo de inversión respecto a O_1', O_2' y O_3', están sobre el círculo inverso de r, luego este círculo es el lugar geométrico de los polos de inversión que transforman las circunferencias dadas en otras tres cuyos centros están alineados. 2º) Sean R_1, R_2 y R_3 los radios de los círculos dados, sean P_1, P_2 y P_3 las potencias del polo de inversión respecto a ellos, y sea k la potencia de inversión. Se tiene $\frac{R_1 \cdot k}{P_1} = \frac{R_2 \cdot k}{P_2} = \frac{R_3 \cdot k}{P_3}$, es decir $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$ y $\frac{P_1}{P_3} = \frac{R_1}{R_3}$. Luego el polo de inversión es el punto cuya relación de potencias respecto a los tres círculos, tomados de dos en dos, es igual a la relación de sus radios. La potencia de inversión puede ser cualquiera.

E 79- En el círculo circunscrito al triángulo dado ABC, se toma un punto variable N. La polar de este punto respecto al ángulo $\widehat{A}$, corta a BC en D. Demostrar que ND pasa por un punto fijo.

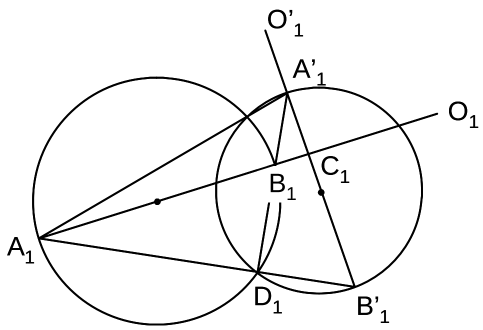
Solución:



AD es el rayo conjugado de AN respecto a $\widehat{BAC}$, por tanto $\left(A, BCDN\right) = -1$. Cortando este haz por BC, se tiene $(BCDM) = -1$. Proyectando desde N y cortando por la circunferencia, se tiene: $\left(N, BCDM\right) = (BCPA) = -1$. Como A, B y C son fijos, también lo es P, que es el punto fijo por donde pasa ND.

E 80- Se dan dos círculos ortogonales O y O', que se cortan en C y D. Sea AB un diámetro cualquiera de O, y $A'B'$ un diámetro de O' perpendicular a AB, Demostrar que de las cuatro rectas que unen los puntos A, B, A' y B', dos pasan por C y las otras dos por D.

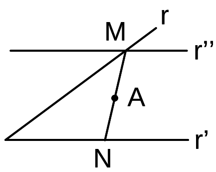
Solución:

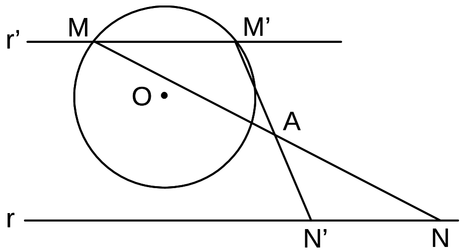


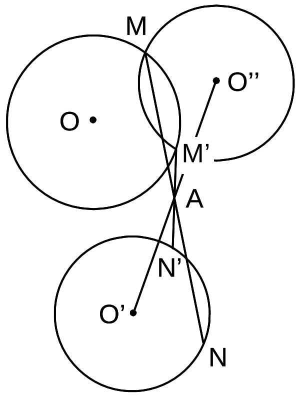
En la figura se presenta la situación tras la aplicación de una inversión de centro D, manteniendo las mismas letras con el subíndice 1, para denominar los elementos inversos, que las utilizadas en el enunciado para los datos. Las rectas perpendiculares O_1 y O_1' son las inversas de los círculos dados. Los círculos ortogonales que se cortan en $D_1 \equiv D$ son los inversos de los diámetros dados, que cortan a las dos perpendiculares O_1 y O_1', en A_1B_1 y $A_1'B_1'$. La recta $A_1B_1'D_1$, al deshacer la inversión, sigue pasando por D. Igualmente, la recta $A_1'B_1D_1$, también seguirá pasando por D al deshacer la inversión. El círculo $A_1A_1'D_1$ pasa por C_1 (siendo $\widehat{A_1D_1A_1'} = \widehat{A_1C_1A_1'} = 90º$). Al deshacer la inversión, se transforma en la recta AA' que pasa por C. El círculo $B_1B_1'D_1$ pasa por C_1 (siendo $\widehat{A_1'D_1B_1'} = \widehat{B_1C_1B_1'} = 90º$). Al deshacer la inversión, se transforma en la recta BB' que pasa por C.

E 81- Se da un punto *A* y dos líneas. Trazar una secante *MAN* limitada en esas dos líneas, de forma que *AM* = *AN*, analizando las siguientes clases de líneas: 1º) Las líneas son dos rectas. 2º) Las líneas son una recta y una circunferencia. 3º) Las líneas son dos circunferencias.

Solución:



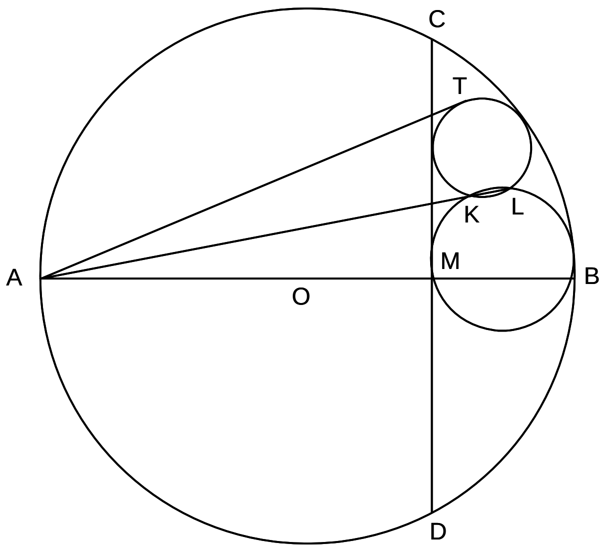




En los tres casos se procede de la siguiente forma: se traza la simétrica de una de las líneas con relación a *A*. Donde corta a la segunda línea se tendrá el punto *M*, siendo *N* el simétrico de *M* respecto a *A*. Para que exista solución, la simétrica de la primera línea debe cortar a la segunda línea. En los casos 2º y 3º puede haber uno (tangencia) o dos puntos *M*, o ninguno.

E 82– Se determina un segmento circular fijo en una circunferencia dada. Se trazan dos circunferencias inscritas en dicho segmento circular, que se cortan en los puntos *K* y *L*. Demostrar que las rectas *KL*, al variar las dos circunferencias inscritas, pasan por un punto fijo.

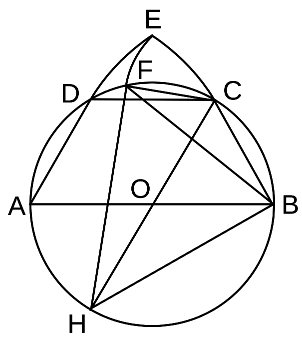
Solución:

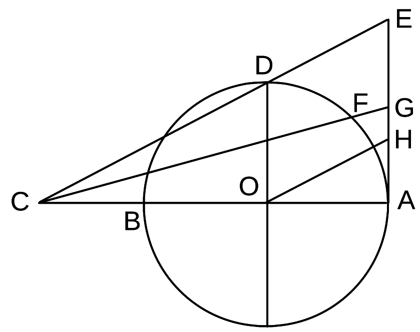


Sea el segmento circular limitado por la cuerda *CD* y el arco *CBD* subtendido por ella. Sea *AB* el diámetro perpendicular a la cuerda *CD*, a la que corta en *M*. Por el problema E 75, se sabe que las tangentes trazadas desde *A* a las circunferencias inscritas en el segmento circular definido, son iguales a *AC*. Luego *A* se halla en el eje radical de las dos circunferencias inscritas, es decir en la recta *KL*. Luego esta recta pasa por el punto fijo *A*.

E 83- Exponer diferentes modos de rectificar arcos de circunferencia.

Solución:





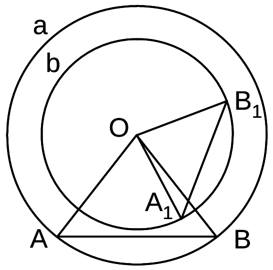
En la figura de la izquierda se expone un método para rectificar un cuadrante de la circunferencia O. En la semicircunferencia ADB se toman tres cuerdas AD, DC y CB, iguales cada una de ellas al radio. Desde B, con radio BD, se traza el arco DE. Desde A, con radio AC, se traza el arco CE. Desde C, con radio CE, se traza el arco EF. El segmento FB equivale aproximadamente a un cuadrante de la circunferencia O. En efecto, en el cuadrilátero $FCBH$, se tiene $FC \cdot HB + FH \cdot CB = FB \cdot HC$; suponiendo $AD = DC = \; = CB = 1$, $HC = 2$, $HB = \sqrt{3}$, $FH = \sqrt{4 - FC^2}$, $FC = \sqrt{EG^2 + GC^2} = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$,

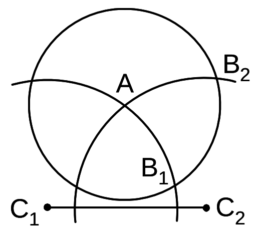
$2 \cdot FB = \sqrt{3} \cdot FC + \sqrt{4 - FC^2} = \sqrt{9 - 3\sqrt{6}} + \sqrt{1 + \sqrt{6}} = 3,1424.$

Para rectificar un arco cualquiera, se puede seguir el procedimiento de la figura de la derecha. Sea AD el arco a rectificar. En el diámetro AB se toma $BC = 0,752 \cdot R$. Sea OD el radio perpendicular al diámetro AB. La recta CD corta en E a la tangente en A, siendo AE la longitud aproximada del cuadrante AD. Para rectificar cualquier arco, por ejemplo el AF, la recta CF corta en G a la tangente en A, siendo AG la longitud aproximada del arco AF. La demostración para el cuadrante, es la siguiente. Se traza OH paralela a CDE. Si $AE = \frac{\pi R}{2} = 1,5708$, para $R = 1$, $AH = 0,5708$. Ahora bien, en los triángulos semejantes CEA y OHA, se tiene $AH = \frac{OD \cdot OA}{CO} = \frac{1}{1,752} = 0,5708$.

E 84- Encontrar la cuarta proporcional a tres segmentos dados a, b y c, utilizando solo el compás.

Solución:

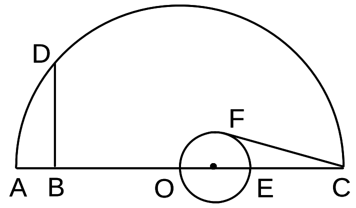




Con centro el punto O (figura de la izquierda), se trazan las circunferencias de radio a y b. Desde un punto A de la circunferencia $O(a)$, se lleva $AB = c$. Con centro en A y en B, y con radio $AA_1 = BB_1$, cualquiera, se corta a $O(b)$ en A_1 y B_1. El segmento A_1B_1 es la cuarta proporcional de a, b y c. En efecto, los triángulos AOA_1 y BOB_1 son iguales; son semejantes los triángulos isósceles AOB y A_1OB_1; luego $\frac{a}{b} = \frac{c}{A_1B_1}$. También se puede construir según la figura de la derecha. Desde los extremos C_1 y C_2 del segmento $C_1C_2 = c$, se trazan con radio a dos circunferencias que se cortan en A. Con centro A se traza la circunferencia de radio b, que corta a las anteriores en B_1 y B_2. El segmento B_1B_2 es la cuarta proporcional buscada. En efecto, los triángulos C_1B_1A y C_2B_2A son iguales, y son semejantes los C_1AC_2 y B_1AB_2, luego $\frac{a}{b} = \frac{c}{B_1B_2}$.

E 85- Demostrar gráficamente que la media geométrica de dos números positivos, está comprendida entre su media aritmética y su media armónica.

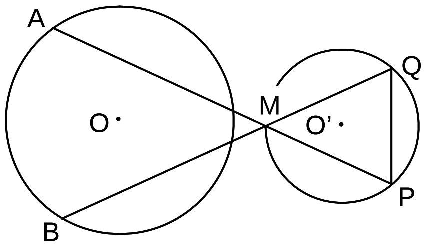
Solución:



Siendo los números dados a y b, su media aritmética es $\frac{a+b}{2} = m$, su media geométrica es $\sqrt{a \cdot b} = g$, y su media armónica $\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = h = \frac{g^2}{m}$. Sea $a+b = AC$. Se traza el semicírculo de centro O, siendo $AO = \frac{a+b}{2} = m$. Siendo $AB = a$ y $BC = b$, se traza la perpendicular $BD = g$, siempre menor que AO, salvo que $a = b$. Se traza una semicircunferencia OFE, de forma que $CF = g$ y $CO = m$. Se tiene que $EC = h$, pues $CE \cdot CO = CF^2$. Siempre EC será menor que CO, salvo que $a = b$. Luego con carácter general, $h < g < m$.

E 86- Se dan dos círculos O y O', y dos puntos A y B situados sobre O. Encontrar sobre O' un punto M tal que si P y Q son los puntos en que AM y BM cortan a O', PQ sea de longitud dada.

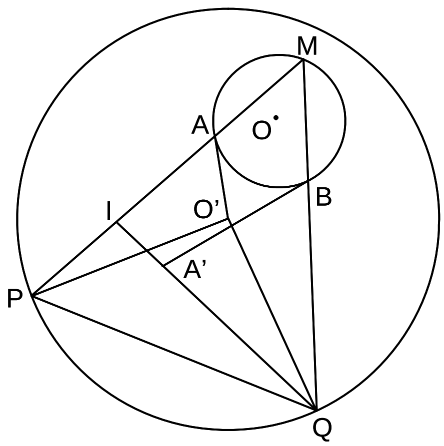
Solución:



Se conoce el ángulo $\widehat{AMB} = \widehat{PMQ}$, que es fijo por subtender el arco dado PQ. Se traza el arco capaz de $\widehat{AMB}$ sobre AB, que corta a O' en el punto pedido M (puede haber dos soluciones, una o ninguna).

E 87- Se dan dos círculos O y O', y dos puntos A y B situados sobre O. Encontrar sobre O un punto M tal que si P y Q son los puntos en que AM y BM cortan a O', PQ sea de longitud dada.

Solución:

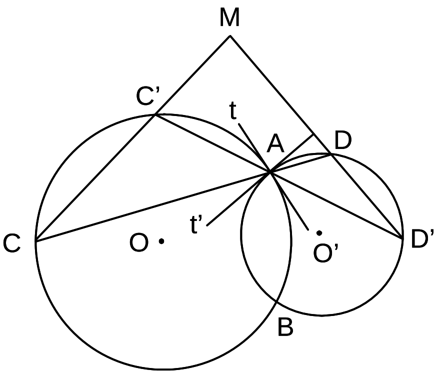


El ángulo $\widehat{PO'Q}$ es conocido, pues subtiende un arco dado; por tanto el triángulo $PO'Q$ es conocido. El ángulo $\widehat{AMB}$ es conocido, pues subtiende un arco conocido. Se gira el triángulo $O'PA$

alrededor de O', un ángulo $\widehat{PO'Q}$, con lo que $O'P$ se sitúa sobre $O'Q$, y $O'A$ se sitúa en $O'A'$. Las rectas PA y QA' se cortan en I, siendo $\widehat{MIQ}$ igual al ángulo rotado, o a su suplementario. En el triángulo MIQ se conocen sus tres ángulos, por lo que se conoce el ángulo $\widehat{BQA'}$. Como B y A' se conocen (A' se obtiene girando $O'A$ alrededor de O' un ángulo $\widehat{PO'Q}$), Q está sobre el arco capaz del ángulo $\widehat{BQA'}$ trazado sobre BA'. Luego Q viene dado por la intersección de este arco capaz con O'.

E 88- Dos circunferencias O y O' se cortan en A y B. Por A se trazan dos secantes cualesquiera CAD y $C'AD'$. Demostrar que el ángulo formado por CC' y DD' es constante.

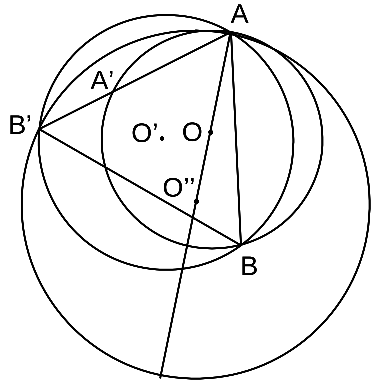
Solución:



Sea θ el ángulo que forman las dos tangentes t y t' en A. Las rectas CC' y DD' se cortan en M, bajo el ángulo $\widehat{M}$. Sea $\alpha = \widehat{MCA}$ y $\beta = \widehat{MC'A}$. Se tiene $\widehat{C'AD} = \pi + \alpha - \beta$, $\widehat{MDA} = \pi - \theta - \alpha$. Por tanto $\widehat{M} = 2\pi - \beta - (\pi + \alpha - \beta) - (\pi - \theta - \alpha) = \theta$. Luego el ángulo $\widehat{M}$ es constante e igual al ángulo bajo el cual se cortan los dos círculos.

E 89- Dada una circunferencia O y dos puntos A y B sobre ella, trazar por A una recta que corte a O en A', y por B otra recta que corte a la recta anterior en B', de modo que $\frac{AA'}{BB'} = \frac{1}{m}$, y que el ángulo que forman AA' y BB' sea dado.

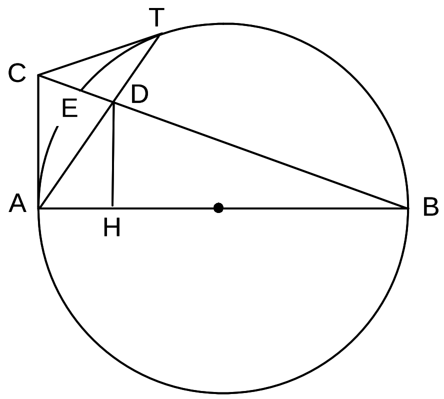
Solución:



B' está sobre el arco capaz O' del ángulo dado, trazado sobre AB. El círculo homotético de O, con centro de homotecia A y razón m, es O'', que corta a O' en B'.

E 90- Sean A y B dos puntos diametralmente opuestos en una circunferencia dada. Por un punto C de la tangente en A, se traza la tangente CT. La recta BC corta a la circunferencia en E y a la recta AT en D. Demostrar que los puntos C y D dividen a EB en una razón constante cuando varía C, y que la distancia de D a AB es media proporcional entre DB y DE.

Solución:



AT es la polar de C, luego $(CDEB) = -1$, por lo que C y D dividen a EB en una razón constante. $\left(\frac{CE}{ED} = \frac{CB}{DB}\right)$. En los triángulos semejantes ACB y HDB, se tiene $\frac{DB}{CB} = \frac{DH}{CA} = \frac{ED}{CE}$ (por la igualdad anterior). Luego, $DB = \frac{CB \cdot DH}{CA}$, $ED = \frac{CE \cdot DH}{CA}$.

Por tanto, $DB \cdot DE = \frac{DH^2 \cdot CB \cdot CE}{CA^2} = DH^2$.

E 91- Se llama cuerda de Apolonio la que está determinada por los puntos fundamentales del haz de círculos de Apolonio correspondientes a un triángulo ABC. Demostrar que la cuerda pasa por el centro del círculo circunscrito, y que la polar de uno de los puntos fundamentales (centro isodinámico) respecto al círculo circunscrito, pasa por el otro centro.

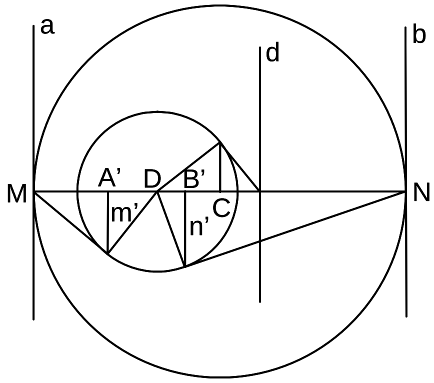
Solución: Sean U y U' los centros isógonos del triángulo ABC. Sus inversos son los centros isodinámicos W y W'. Se tiene $\frac{BW}{CW} = \frac{BA}{CA} = \frac{BW'}{CW'}$. W y W' están en el círculo de Apolonio. Este corta ortogonalmente al círculo circunscrito. Luego los tres círculos de Apolonio se cortan en W y W', y sus centros están sobre la polar de K, punto de Lemoine. Por tanto, W y W' están sobre el diámetro OK, es decir que la cuerda de Apolonio pasa por el centro del círculo circunscrito. El punto medio de WW' pertenece a OK, teniéndose $OW \cdot OW' = R^2$, es decir que la polar de W respecto al círculo circunscrito, pasa por W'.

E 92- Transformar por polares recíprocas las siguientes propiedades. 1º) El radio y la tangente en un punto de un círculo, son perpendiculares. 2º) Un ángulo de magnitud constante, cuyo vértice es un punto fijo de un círculo, corta a este según una cuerda que envuelve a un círculo concéntrico con el dado.

Solución: El ángulo formado por dos rectas es igual al formado por las rectas que unen sus polos con el centro del círculo director. 1º) El polo de la tangente es un punto de la cónica polar recíproca. El polo del radio es un punto de la directriz, tal que por él pasa la tangente en el punto de la cónica. Luego la propiedad transformada es: El radio vector de un punto de una cónica, y la recta que pasando por el foco corta a la directriz en el punto de intersección con la tangente de dicho punto, son perpendiculares. 2º) El vértice se transforma en una tangente. El ángulo de magnitud constante, tiene ahora su vértice en el foco. El círculo envuelto se transforma en una cónica de mismo foco y misma directriz. Luego la propiedad transformada es: Un ángulo de magnitud constante y de vértice un foco de una cónica, corta a una tangente fija en dos puntos A y B. Por A y B se trazan las tangentes a la cónica. El punto de corte de estas tangentes describe una cónica que tiene el mismo foco y la misma directriz que la dada.

E 93- Demostrar que la polar recíproca de una circunferencia C respecto a otra D, es una cónica.

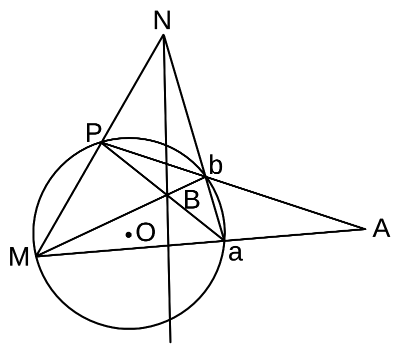
Solución:



Sea MN el diámetro de la circunferencia C que pasa por los centros C y D. Los homólogos de las tangentes a y b, trazadas en M y N, son A' y B', polos de a y b respecto a D. Las tangentes en A' y B' son las polares de M y N, pero como m' y n' son paralelas, $A'B'$ es un diámetro. El centro D es un foco de la polar recíproca, luego $A'B'$ es el eje. La directriz d, es la polar del centro C respecto a D, y la excentricidad es $\frac{CD}{CN}$. Si D está dentro de C, la cónica es una elipse. Si está en la circunferencia de centro C, es una parábola. Si es exterior a C, es una hipérbola.

E 94- Se da una circunferencia O y dos puntos A y B conjugados con relación a O. Se unen estos puntos con uno variable M situado sobre la circunferencia. Las rectas. AM y BM cortan a O en a y b. Demostrar que Ab y Ba se cortan sobre la circunferencia, y que ab pasa por un punto fijo.

Solución:



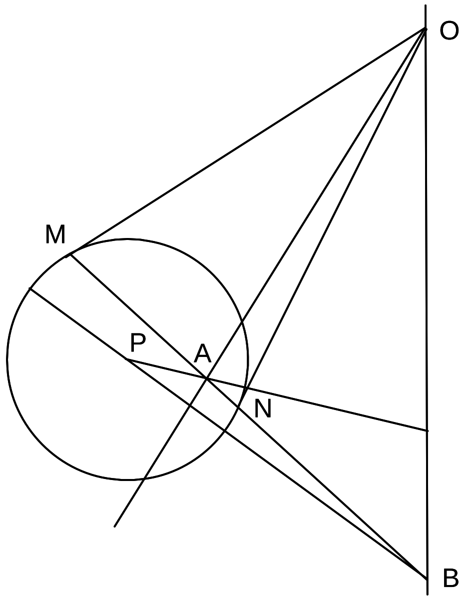
Sea P el punto de intersección de Ab y Ba. El círculo dado pasa por M, a y b, vértices del cuadrilátero $PMab$, que es armónico por ser conjugados los puntos A y B, luego es inscriptible y por tanto Ab y Ba se cortan en P sobre O. Las rectas PM y ab se cortan en N sobre la polar de A, siendo N el polo de AB.

E 95- Se dan tres circunferencias, C_1, C_2, C_3, que pasan por el punto O. Además de cortarse en este punto O, las circunferencias C_1 y C_2 se cortan en A_3, las circunferencias C_1y C_3 se cortan en A_2, y las circunferencias C_2 y C_3 lo hacen en A_1. Se sabe que la recta A_3O pasa por el centro de C_3, y que la recta A_1O pasa por el centro de C_1. Demostrar que la recta A_2O pasa por el centro de C_2.

Solución: Invirtiendo con centro en O, las tres circunferencias se transforman en tres rectas que forman el triángulo $B_1B_2B_3$, siendo B_3O perpendicular a B_1B_2, y B_1O perpendicular a B_2B_3. Por tanto, O es el ortocentro de dicho triángulo, por lo que la altura del tercer lado B_1B_3 es B_2O.

E 96- Desde un punto dado O exterior a una circunferencia dada, se trazan rectas conjugadas que forman dos haces en involución. Demostrar que los rayos dobles de esta involución, son las tangentes trazadas desde O.

Solución:



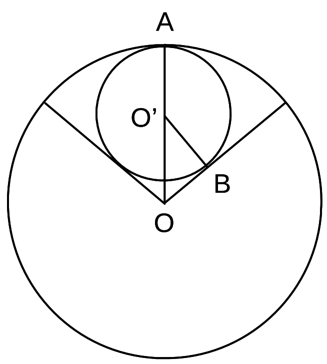
Sean las rectas conjugadas OA y OB que pasan por O (el polo A de OB está en OA, y el polo B de OA está en OB). Siendo OM y ON las tangentes desde O, la recta MN es la polar de O que pasa por A y B. Luego $(MNAB) = \left(O, MNAB\right) = -1$. Por tanto, todas las rectas conjugadas que pasan por O son rayos conjugados armónicos con respecto a OM y ON, es decir, forman una involución cuyos rayos dobles son las tangentes OM y ON.

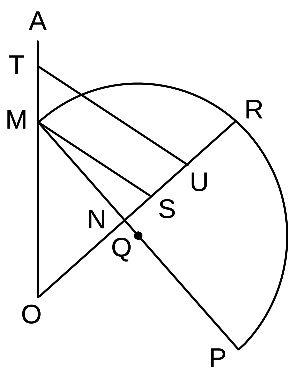
E 97- Trazar un círculo O que pase por dos puntos dados A y B, y que sea ortogonal a un círculo dado O'.

Solución: El lugar geométrico de los centros de los círculos que cortan ortogonalmente a dos dados, es su eje radical. Un punto tiene la consideración de un círculo de radio nulo. Por tanto, el centro del círculo pedido está en la intersección de la mediatriz de AB con el eje radical de O' y de uno de los puntos A o B.

E 98- En un sector circular de radio a y ángulo 2α, se inscribe un círculo y en el mixtilíneo que este círculo forma con los radios extremos del sector, se inscribe un nuevo círculo. En el nuevo mixtilíneo que este último círculo forma con aquellos lados, se inscribe un tercer círculo, y así sucesivamente. Calcular la suma de las áreas de todos los círculos que así se pueden inscribir. Determinar el radio del círculo equivalente a la suma encontrada. ¿Qué condición debe cumplir α, para que este círculo equivalente, supuesto concéntrico con el círculo al que pertenece el sector considerado, sea tangente al mayor de los inscritos, indicando si existe, o no, solución real?

Solución:





$\alpha = \widehat{AOB}$, $a = OA$, $R_1 = O'A = O'B$, $\sin\alpha = \dfrac{R_1}{a - R_1}$, $R_1 = \dfrac{a\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, $a_1 = \dfrac{a(1-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha}$, $R_2 = \dfrac{a\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)^2}$, $\ldots R_n = \dfrac{a\sin\alpha(1-\sin\alpha)^{n-1}}{(1+\sin\alpha)^{n-1}}$. La suma de las áreas es:

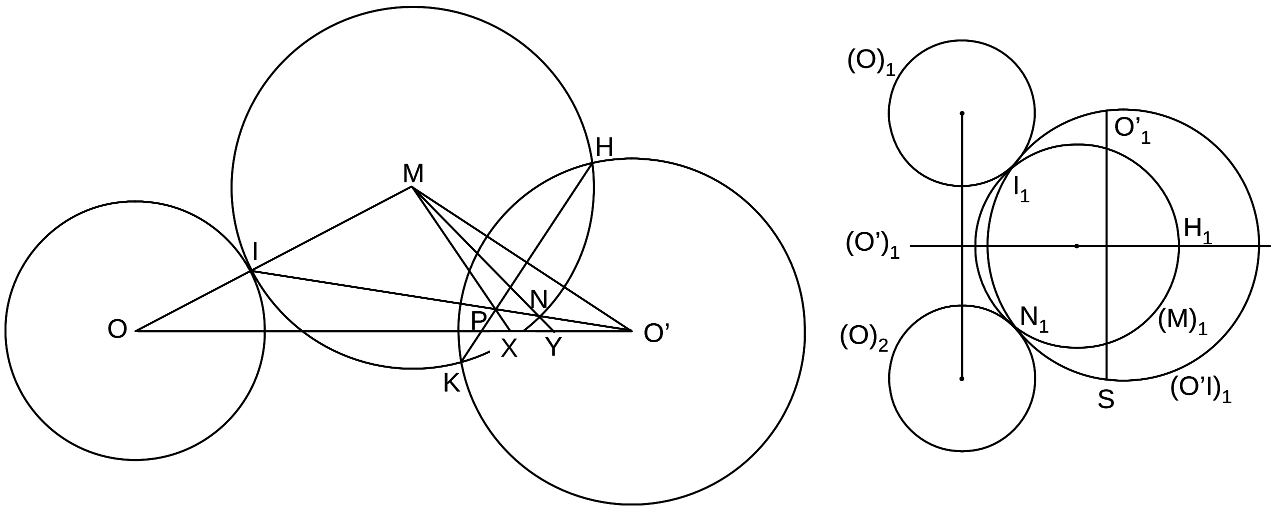
$$\sum S = \pi\sum R^2 = \frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}\sum\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^{2n} = \frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2} = \frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\sin\alpha}$$

$= \dfrac{\pi a^2\sin\alpha}{4}$. Siendo ρ el radio del círculo equivalente a la suma de las áreas, $\pi\rho^2 = \dfrac{\pi a^2\sin\alpha}{4}$, luego $\rho = \dfrac{a\sqrt{\sin\alpha}}{2}$. Para que este círculo sea tangente al mayor de los inscritos, debe cumplirse $\dfrac{a\sqrt{\sin\alpha}}{2} = a - \dfrac{2a\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, es decir que $\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha + 9\sin\alpha - 4 = 0$. Como para $\sin\alpha < 0$, este polinomio toma valores negativos, y para $\sin\alpha = 1$ el valor es positivo, siempre hay solución real.

E 99- Se dan dos círculos (O) y (O'), y se traza otro (M) variable, tangente a (O) en I, y ortogonal a (O') en H y K. Sea P la intersección de HK e IO', y N el segundo punto de intersección de IO' con (M). Demostrar que (M) es tangente a un segundo círculo fijo, y que MN y MP cortan a OO' en dos puntos fijos.

Nota: En este problema, las circunferencias de centros O, O' y M, se designan por (O), (O') y (M). El elemento inverso de uno dado, lleva el símbolo de este con el subíndice 1.

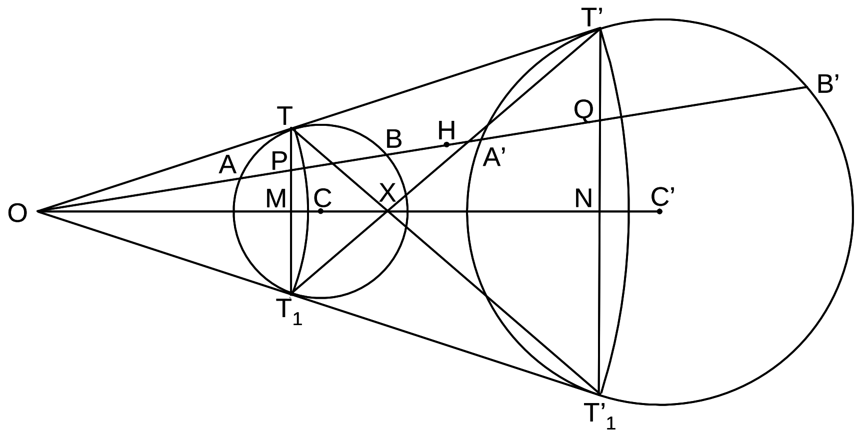
Solución:



Invirtiendo con polo un punto cualquiera S de (O'), se tiene que (M) se transforma en un círculo $(M)_1$ (figura de la derecha), cuyo centro está en la recta $(O')_1$ inversa de (O'), y que es tangente a la circunferencia $(O)_1$, inversa de (O). Al ser $(M)_1$ simétrica respecto a $(O')_1$, es tangente al círculo $(O)_2$ simétrico de $(O)_1$ respecto a $(O')_1$. Al deshacer la inversión, el inverso de $(O)_2$ sigue siendo un círculo fijo al que es tangente (M). El círculo inverso de la recta $O'I$ es $(O'I)_1$, que pasa por I_1 (inverso de I), por O'_1 (inverso del centro de O', que es simétrico de S respecto a $(O')_1$) y por S. Luego N_1 (inverso de N) recorre la circunferencia $(O)_2$. Al deshacer la inversión, N recorre el círculo fijo (N) (inverso de $(O)_2$), al que es tangente (M), estando su centro Y sobre OO' y alineado con MN, pues los círculos (M) y (N) son tangentes. Luego el punto Y, intersección de MN y OO', es fijo. Siendo HK la polar de O' respecto a (M), se tiene sobre IO' que $(INPO') = -1$. Proyectando desde M y cortando por OO', se tiene $\left(M, INPO'\right) = (OYXO') = -1$. Como O, Y y O' son fijos, también lo es X. Luego MN y MP cortan a OO' en dos puntos fijos Y y X.

E 100- Se dan sobre una recta cuatro puntos A, B, A' y B', siendo $AB < A'B'$. 1º) Demostrar que $A'B'$ es homotético de AB, con una cierta homotecia de la que se pide el centro O y la razón. 2º) Sea C un círculo que pasa por A y B. Sea C' su homotético. Demostrar que C' es el inverso de C con polo O, en una inversión independiente de C, y hallar los puntos comunes a C y C'. 3º) Estudiar cómo varía el eje radical de C y C', y hallar el lugar geométrico de la intersección de dicho eje con la línea de los centros de C y C'. 4º) Por O se trazan las tangentes a C, y sean T y T_1 los puntos de tangencia con C, y T' y T_1' los de C'. Los cuatro puntos de tangencia son concíclicos. Demostrar que este círculo pasa por dos puntos fijos al variar C, y hallar el lugar geométrico de la intersección de TT_1' y T_1T'.

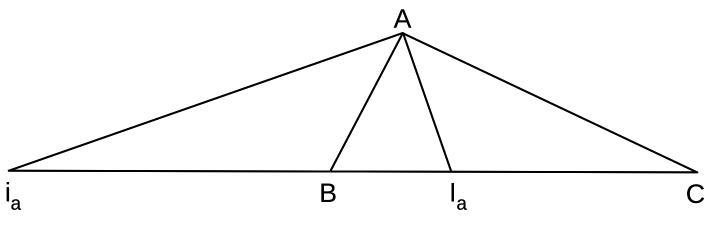
Solución:



1º) Se puede considerar una homotecia de razón $\frac{A'B'}{AB}$ y centro un punto O tal que $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$. Ahora bien, considerando A' homólogo de B, se tendría otra homotecia de centro O_1 y razón $\frac{-A'B'}{AB}$. Para construir O, basta trazar los círculos de diámetros AB y $A'B'$, y sus tangentes exteriores cortan a la recta $ABA'B'$ en O. 2º) Tiene que suceder que $OA \cdot OB' = OB \cdot OA' = k$. En efecto, $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, con lo que se demuestra que es independiente de C. Sea M un punto común a C y C', se tiene que $OM \cdot OM = k$, $OM = \sqrt{k}$. Luego el lugar geométrico de M es un círculo de centro O y radio la raíz cuadrada de la potencia de la inversión. 3º) Existe el punto H en OA, tal que $HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$. Luego el eje radical pasa por H y varía pivotando alrededor de él. Como el eje radical es perpendicular a la línea de los centros, el lugar geométrico de su intersección con esta, es el círculo de diámetro OH. 4º) Los ángulos $\widehat{TT'T_1'}$ y $\widehat{TT_1T_1'}$ son suplementarios, pues $\widehat{OT_1T} = \widehat{OTT_1} = \widehat{OT'T_1'}$, luego el cuadrilátero $TT'T_1T_1'$ es inscriptible. Su círculo circunscrito corta a OA en a y b. Se tiene $OT \cdot OT' = Oa \cdot Ob = k$, y además $\frac{Ob}{Oa} = \frac{A'B'}{AB}$, luego a y b son fijos. Siendo X la intersección de TT_1' y T_1T', se cumple que $\frac{XN}{XM} = \frac{T_1'T'}{TT_1} = \frac{A'B'}{AB}$. Luego M y N describen círculos de diámetros OP y OQ, y X describe el círculo de diámetro OR, siendo R un punto tal que $\frac{RP}{RQ} = \frac{A'B'}{AB}$.

E 101- Demostrar que: 1º) Los ejes radicales de los círculos de Apolonio y del círculo circunscrito de un triángulo dado ABC, son simétricos de las medianas respecto de las bisectrices interiores. 2º) El inverso del radio del círculo de Apolonio relativo al lado mediano, es igual a la suma de los inversos de los otros dos radios.

Solución:

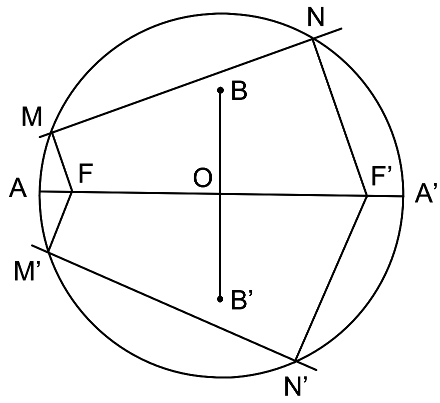


1º) Sean W y W' los centros isodinámicos del ABC, que son inversos de sus centros isógonos U y U'. Se sabe que $\frac{BW}{CW} = \frac{BA}{CA} = \frac{BW'}{CW'}$, luego W y W' pertenecen al círculo (círculo de Apolonio) que tiene por diámetro la distancia $I_a i_a$ entre los pies de las bisectrices interior y exterior del ángulo opuesto, y que corta ortogonalmente al círculo circunscrito al ABC. Luego los tres círculos de Apolonio se cortan en los centros isodinámicos W y W', y sus centros están sobre la polar de K, punto de Lemoine. Los ejes radicales de los círculos de Apolonio respecto al círculo circunscrito, son las polares de sus centros con relación al círculo circunscrito al ABC, que son las simedianas AK, BK y CK, es decir que son simétricos de las medianas respecto de las bisectrices interiores. 2º) El radio del círculo de Apolonio $AI_a i_a$ es $\frac{I_a i_a}{2}$. Ahora bien, de $\frac{BI_a}{BA} = \frac{CI_a}{CA}$ y de $\frac{Bi_a}{BA} = \frac{Ci_a}{CA}$, se tiene $BI_a = \frac{ac}{b+c}$, $Bi_a = \frac{ac}{b-c}$. Suponiendo $a > b > c$ $(BC = a,\ CA = b,\ AB = c)$, $I_a i_a = ac\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b-c}\right) = \frac{2abc}{b^2 - c^2}$, y el inverso del radio es $\frac{b^2 - c^2}{abc}$. Por tanto, sustituyendo este valor y sus análogos, en la expresión $\frac{2}{I_b i_b} = \frac{2}{I_a i_a} + \frac{2}{I_c i_c}$, se tiene $\frac{a^2 - c^2}{abc} = \frac{b^2 - c^2}{abc} + \frac{a^2 - b^2}{abc}$, luego el inverso del radio del círculo de Apolonio relativo al lado mediano, es igual a la suma de los inversos de los otros dos radios.

Sección F - CÓNICAS

F 1- Construir una cónica conociendo el círculo principal y dos tangentes.

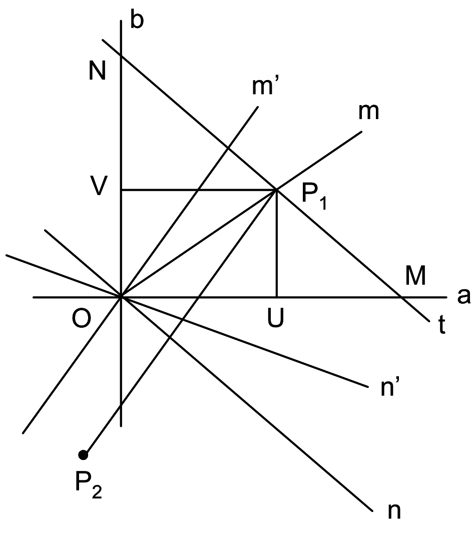
Solución:



Sean M, N, M' y N', los puntos en los que las tangentes cortan al círculo principal. Las perpendiculares por estos puntos a las tangentes, se cortan en los focos F y F', siendo $FF' = 2c$. La recta FF' corta al círculo principal en los vértices A y A', siendo $AA' = 2a$, el eje mayor. Con centro en F y radio a, se corta a la mediatriz de FF' en B y B', siendo $BB' = 2b$, el eje menor. Si $a > c$, la cónica es una elipse; si $a < c$, la cónica es una hipérbola.

F 2- Construir una cónica conociendo el centro O, dos puntos P_1 y P_2, y la tangente t en P_1.

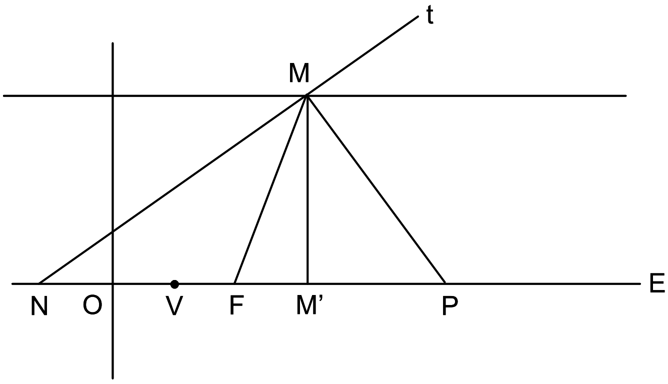
Solución:



Se traza por O la recta n' que pasa por el punto medio de P_1P_2. El diámetro conjugado de n' es m', paralela a P_1P_2 trazada por O. El conjugado del diámetro $m = OP_1$, es n, paralela a t trazada por O. Los ejes de la cónica son los rayos dobles de la involución formada por los dos pares de diámetros conjugados dibujados. Uniendo el punto de Frégier de la involución con O, se obtiene en posición un eje, siendo el otro su perpendicular por O. Para determinar la magnitud de los ejes, se proyecta P_1 sobre los ejes en U y V, y como M y N (puntos de corte de t con los ejes) son los respectivos polos de P_1U y P_1V, se tiene que $OA^2 = OU \cdot OM$ y $OB^2 = OV \cdot ON$, de donde se obtienen las magnitudes de los semiejes, $a = \sqrt{OU \cdot OM}$ y $b = \sqrt{OV \cdot ON}$.

F 3- Construir una parábola conociendo el eje E, una tangente t, y el parámetro p (distancia del foco a la directriz).

Solución:



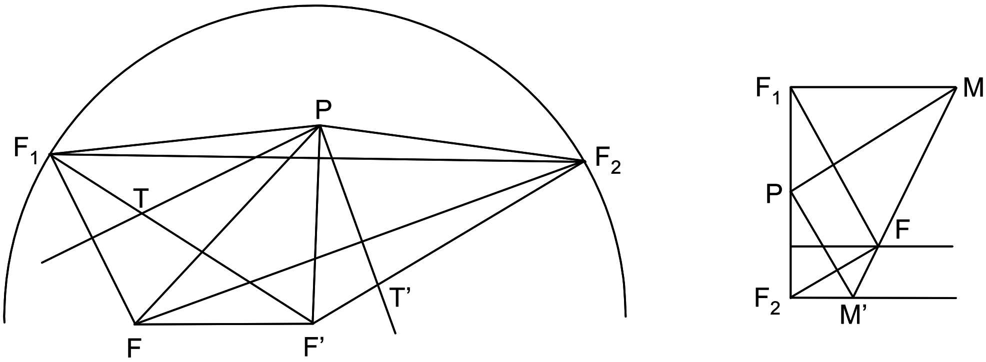
La subnormal de una parábola, es constante e igual a p, por lo que el triángulo $MM'P$ se puede construir, pues $M'P = p$, y el ángulo $\widehat{MPM'}$ es conocido, pues MP es perpendicular a t, y MM' lo es al eje E. Se traza una paralela a E a la distancia MM', que corta a t en el punto de tangencia M. Siendo N la intersección de E y t, el foco F es el punto medio de NP. El vértice V corresponde a la distancia $VF = \frac{p}{2}$, y la directriz es la perpendicular a E trazada por O, siendo $FO = p$.

F 4- Construir una parábola conociendo tres tangentes y el punto de contacto de una de ellas.

Solución: Sea T el punto de contacto de la tangente t_1. Se trazan dos círculos que pasando por T sean tangentes cada uno de ellos, a una de las otras dos tangentes. El segundo punto de intersección de estos círculos, es el foco de la parábola.

F 5- Determinar analítica y gráficamente el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos circunscritos a una cónica.

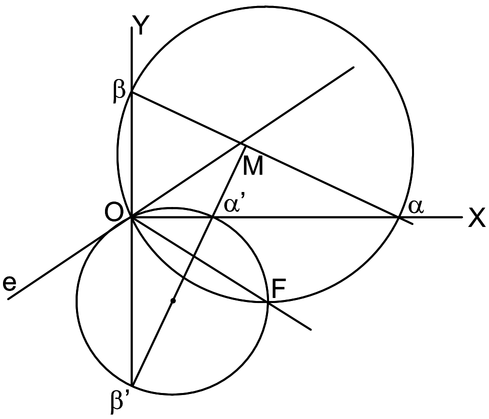
Solución:



a) Elipse: La ecuación $(x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + (y_1^2 - b^2) = 0$, da los coeficientes angulares de las tangentes trazadas desde un punto a una elipse. Debe cumplirse que $\frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = -1$. Luego el lugar pedido es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. En la figura de la izquierda sean PT y PT' las tangentes perpendiculares entre sí, trazadas desde P, siendo T y T' los puntos de tangencia. Los simétricos del foco F respecto a las dos tangentes, son F_1 y F_2. El ángulo $\widehat{F_1FF_2}$ es recto y está inscrito en una circunferencia de centro P, cuyo diámetro es F_1F_2. El lugar geométrico de P es el descrito por el punto medio de la cuerda F_1F_2 en la circunferencia focal, según un ángulo recto que gira alrededor del punto fijo F. Como $PF^2 + PF'^2 = PF_1^2 + PF'^2 = PF_2^2 + PF^2 = F'F_1^2 = 4a^2$, es constante, el lugar pedido es una circunferencia concéntrica con la elipse y cuyo radio es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esta circunferencia se denomina ortóptica o de Monge. b) Hipérbola: Los razonamientos son similares, siendo la ecuación de los coeficientes angulares $(x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + (y_1^2 + b^2) = 0$, y la ecuación del lugar es $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$, siendo el radio de esta circunferencia $\sqrt{a^2 - b^2}$. Si la hipérbola es equilátera, $a = b$, y la circunferencia degenera en un punto. c) Parábola; La ecuación de los coeficientes angulares de las tangentes, es $2x_1m^2 - 2y_1m + p = 0$ .Luego el lugar pedido es la recta $x = \frac{-p}{2}$, es decir, la directriz. En la figura de la derecha, sean PM y PM', las tangentes perpendiculares entre sí, trazadas desde P. Las rectas que unen el foco F con sus simétricos F_1 y F_2 respecto a las dos tangentes, son perpendiculares. Luego F_1 y F_2 tienen que ser extremos de un diámetro de la circunferencia de centro P. Como F_1 y F_2 están en la directriz, los vértices P del ángulo lo están también. Luego el lugar pedido es la directriz (corresponde al círculo ortóptico cuando su centro es impropio).

F 6- Se da la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La tangente en un punto M de la misma, corta a OX y OY en α y β. La normal en M, los corta en α' y β'. Sea (P) la parábola tangente en O a OX, y tangente además a las paralelas a la tangente y a la normal trazadas, respectivamente, por α y α'. Sea (P') la parábola análogamente obtenida, reemplazando OX por OY. Demostrar que las parábolas (P) y (P') son homofocales y coaxiales, y construir geométricamente el eje y foco comunes.

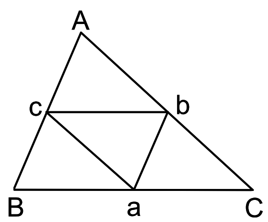
Solución:



El foco común de las parábolas (P) y (P') es el punto de intersección F de las circunferencias circunscritas a los triángulos $O\alpha\beta$ y $O\alpha'\beta'$, de acuerdo con la construcción del foco de una parábola de la que se conocen tres tangentes y el punto de contacto de una de ellas. La dirección común del eje de estas parábolas es la simétrica de la recta OF respecto a OX, o bien respecto a OY.

F 7- Demostrar que si una parábola es conjugada respecto a un triángulo, el foco de la parábola está situado sobre el círculo de los nueve puntos y la directriz pasa por el centro del círculo circunscrito.

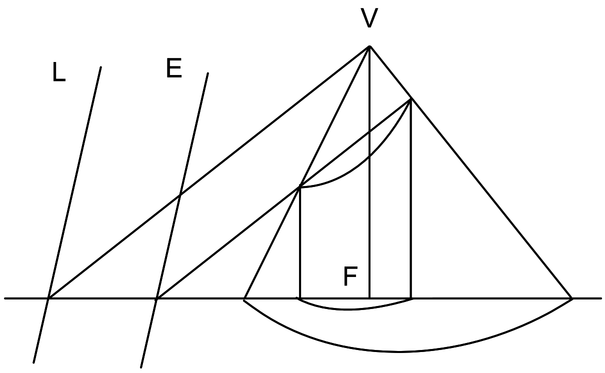
Solución:



Se considera una parábola conjugada respecto al triángulo ABC. Sea abc el triángulo mediano del ABC. Puesto que BC es la polar de A, bc es tangente a la parábola, y lo mismo para ca y ab. Luego la parábola está inscrita en el triángulo abc. Por tanto su foco está sobre el círculo circunscrito al abc, que es el círculo de los nueve puntos del ABC. La directriz pasa por el ortocentro del abc, que es el circuncentro del ABC.

F 8- Se da un cono cuya base es una elipse, siendo uno de sus focos el pie de la altura del cono. Hallar gráficamente el foco y la directriz de la proyección sobre la base de una sección plana cualquiera. Encontrar la condición para que esta sección sea un círculo. Estudiar el caso en el que el cono es de revolución y su base una circunferencia.

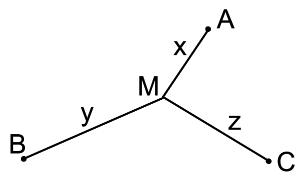
Solución:



Si dos figuras perspectivas se proyectan desde un punto P sobre un plano, sus proyecciones son homológicas en una homología de centro la proyección del centro perspectivo y eje la proyección de la recta intersección de los planos de las dos figuras. Luego si P es el punto impropio de la dirección FV, F será el centro, E el eje, y L la recta límite. Al ser F centro de homología y foco de la cónica base, al considerar la involución rectangular, será foco de la cónica proyección. Su directriz será la homológica de la directriz de la cónica base, al conservarse polo y polar. Cuando la recta límite coincide con la directriz de la cónica base, la proyección es un círculo, es decir cuando la sección es paralela al plano determinado por dicha directriz y V. En el caso de ser un cono de revolución, el centro de la base seguirá siendo el foco, y la directriz la intersección del plano de la base con el plano paralelo por V al plano de la sección, es decir, la recta límite de la homología.

F 9- Hallar un punto M tal que la suma de sus distancias a tres puntos dados A, B y C, sea mínima.

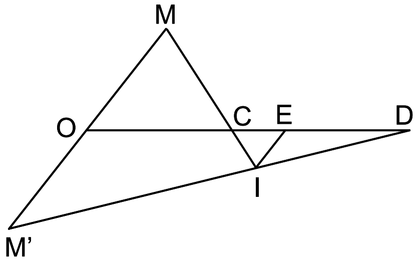
Solución:

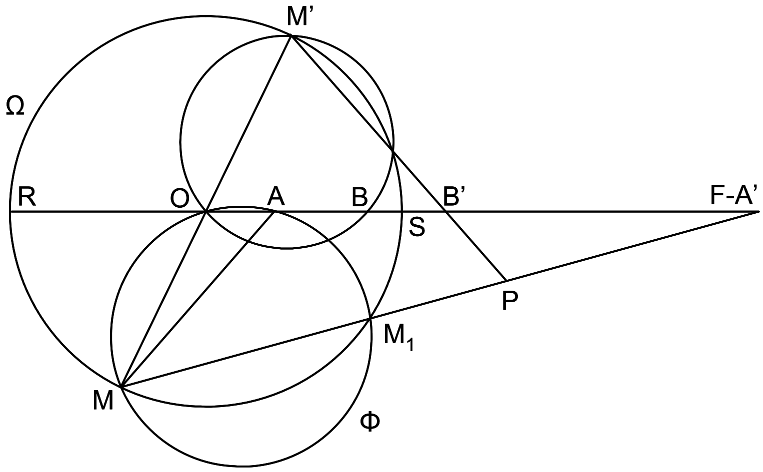


Si se deja $MC = z = k$, constante, el máximo o mínimo será el de la función $MA + MB$. Para hallarlo, se aplica el teorema de Rolle, de la siguiente forma. La elipse $x + y = k'$ (constante) corta a la circunferencia $z = k$ en dos puntos, entre los que está el mínimo buscado, y este se halla cuando elipse y circunferencia sean tangentes, es decir cuando CM es la bisectriz del ángulo $\widehat{AMB}$. Análogamente, BM será la bisectriz de $\widehat{AMC}$, y AM la de $\widehat{BMC}$. Por tanto, M es el punto de intersección de los arcos capaces de 120º levantados sobre AB, BC y CA.

F 10- Se dan tres puntos alineados O, C y D, y dos puntos M y M' variables, simétricos respecto a O. Las rectas MC y $M'D$ se cortan en I. La paralela a MM' trazada por I, corta a OC en E. 1º) Comparar los cocientes $\frac{EC}{ED}$ y $\frac{OC}{OD}$, deducir que E es fijo y que los cocientes $\frac{DI}{DM'}$ y $\frac{CI}{CM}$ son constantes. 2º) Seguidamente se consideran tres puntos fijos alineados OAB, estando A entre O y B, de forma que $OA = 2a$, $AB = 3a$, y se considera el círculo Ω de centro O y radio $6a$. Demostrar que cuando M describe Ω, el eje radical de Ω y del círculo Φ circunscrito al triángulo OAM, pasa por un punto fijo A' que se definirá. 3º) Sean M y M' dos puntos diametralmente opuestos de Ω. Los ejes radicales de Ω y Φ, y de Ω y del círculo circunscrito al triángulo $OM'B$, se cortan en P. Hallar el lugar geométrico de P cuando M y M' describen el círculo Ω. 4º) Hallar el lugar geométrico del punto medio de PM, y demostrar que la mediatriz de PM es tangente a una hipérbola de la que se precisarán sus elementos geométricos, y se construirá el punto de tangencia de la mediatriz y la hipérbola.

Solución:



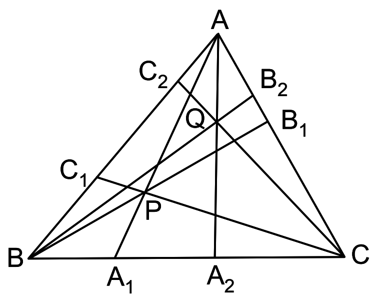


1º) En la figura de la izquierda, se tiene: $\frac{IE}{OM} = \frac{EC}{OC} = \frac{IC}{CM}$, $\frac{IE}{OM'} = \frac{ED}{OD} = \frac{ID}{M'D}$. Siendo $OM = -OM'$, se cumple que $\frac{-EC}{OC} = \frac{ED}{OD}$, es decir $\frac{EC}{ED} = \frac{-OC}{OD} = q$, constante. Luego el punto E es fijo. Por tanto $\frac{DI}{DM'} = \frac{ED}{OD} = m$, constante, y $\frac{CI}{CM} = \frac{EC}{OC} = n$, constante.

2º) La recta OAB corta a Ω en R y S. El eje radical de Ω y Φ corta a OAB en F, teniéndose $FO \cdot FA = FR \cdot FS = FM \cdot FM_1$. Luego F es un punto fijo ya que $FO \cdot FA = FR \cdot FS$, constante. Es decir, que todos los ejes radicales pasan por F, punto A' del enunciado. Siendo $OA' = x$, se tiene $x(x-2a) = (x+6a)(x-6a)$, $x = OA' = 18a$. Similarmente se obtiene el punto B', siendo $OB' = \frac{36a}{5} = 7,2a$. 3º) Asimilando a las letras B', A' y P, las C, D e I, del primer punto, se tiene que $\frac{A'P}{A'M'} = m$, constante, luego P describe un círculo homotético de Ω, con centro de homotecia A' y razón m positiva (o lo que es lo mismo, con centro de homotecia B' y razón n negativa). 4º) Por ser Q el punto medio de PM, $\frac{A'Q}{A'M} = p$, constante, luego Q describe un círculo homotético de Ω con centro de homotecia A' y razón p. Como el lugar geométrico de las proyecciones de los focos de una hipérbola sobre sus tangentes, es la circunferencia descrita sobre el eje transverso como diámetro, la mediatriz de PM envuelve una hipérbola de foco A' y cuyo eje transverso es el diámetro del círculo descrito por Q. Dicha hipérbola se puede construir por conocerse su foco y el círculo principal. Se une A' con un punto a del círculo director correspondiente al otro foco A'_1, se traza la perpendicular en el punto medio de $A'a$, y esta perpendicular encuentra a A'_1a en un punto M de la hipérbola, con lo que está construido el punto de tangencia de dicha mediatriz con la hipérbola.

F 11- Se da un triángulo ABC, dos puntos P y Q, y las cevianas correspondientes a estos dos puntos, que determinan sobre los lados, los puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2. Demostrar que estos seis puntos están sobre una cónica.

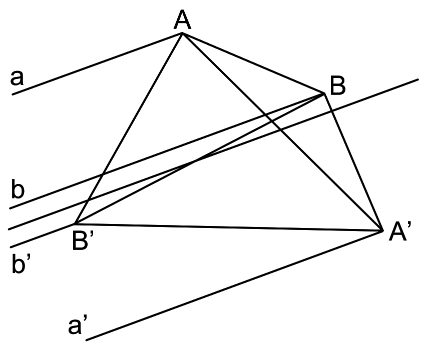
Solución



Por ser cevianas, se tiene $\left(A_1, C_1C_2B_2B_1\right) = \left(A_2, C_1C_2B_2B_1\right)$. Si la cónica que pasa por $C_1C_2B_1B_2A_2$, corta a BC en otro punto A' distinto de A_1, se tendría $\left(A', C_1C_2B_2B_1\right) = \left(A_2, C_1C_2B_2B_1\right)$, luego por la primera igualdad, $A' \equiv A_1$

F 12- Hallar el lugar geométrico de los centros de las cónicas tangentes a cuatro rectas dadas.

Solución:



Las cónicas forman un haz tangencial, en el que los polos de una recta r respecto de las cónicas del haz, están sobre una recta r'. A las rectas r y r' se les llama asociadas. Cuando r es la recta impropia, sus polos son los centros de las cónicas del haz, que están sobre una recta, llamada recta de Newton. Sean $ABA'B'$ los vértices del cuadrilátero circunscrito al haz. Cortando por AA' la involución (aa') (bb'), como la recta impropia corta a AA' en el punto impropio A_∞, la recta de Newton pasará por el punto medio de AA'. El mismo razonamiento para BB'. Luego dicha recta, lugar de los centros de las cónicas, pasa por los puntos medios de las diagonales.

F 13- Por un punto de una cónica, se trazan paralelas a un sistema de diámetros conjugados de otra cónica. Demostrar que la cuerda determinada por estas rectas, pasa por un punto fijo.

Solución: La ecuación que da los coeficientes angulares de los diámetros conjugados, es $a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0$, que es la ecuación de una involución. Luego al trazar las paralelas por un punto de otra cónica, se tiene un haz involutivo, por lo que las cuerdas determinadas pasan por el punto de Frégier de dicha involución.

F 14- Si por un punto P de una cónica, se trazan pares de rectas PQ, PR que están igualmente inclinadas respecto a una recta r dada, las rectas QR concurren en un punto.

Solución: Trazando PH perpendicular a r, las rectas PQ y PR, son simétricas respecto a PH, es decir, forman una involución. Luego todas las rectas QR pasan por el punto de Frégier de dicha involución.

F 15- Hallar el lugar geométrico de los puntos P, desde los que se proyecta un cuadrivértice $ABCD$ según un haz de razón constante.

Solución: Aplicada una homología adecuada, el cuadrivértice se transforma en un cuadrilátero inscriptible. El círculo circunscrito es el lugar geométrico de los puntos P. Deshaciendo la homología, como las razones dobles no varían, la cónica homológica del círculo, es el lugar pedido, o sea una cónica circunscrita al cuadrivértice dado. El lugar geométrico completo es el haz de cónicas circunscritas.

F 16- Una cónica está determinada por cinco tangentes. Trazar una sexta tangente y hallar su punto de contacto.

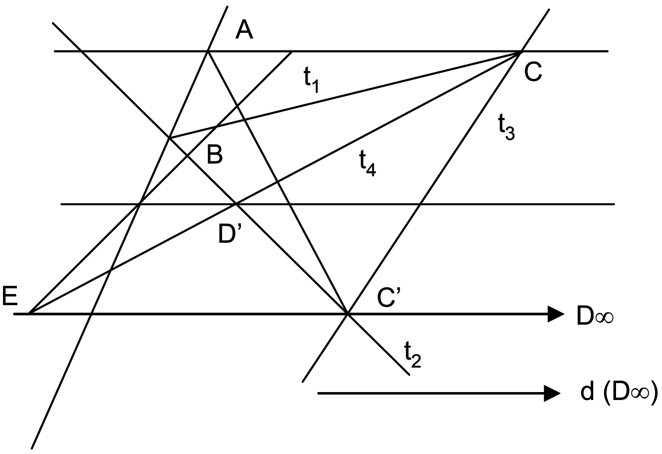
Solución: Sean las tangentes conocidas t_1, t_2, AA', BB' y CC'. Tomando t_1 y t_2, por ejemplo, como bases, se forman dos series proyectivas con las intersecciones con las otras tres tangentes. El eje perspectivo de estos haces, corta a las dos bases en sus puntos de tangencia. Sea P un punto de una de las bases. Se une con A'. La recta PA' corta al eje perspectivo en D. La recta DA corta a t_2 en P'. La recta PP' es la tangente en el punto de tangencia P.

F 17- Una cónica está determinada por cinco tangentes. Trazar las tangentes a la cónica desde un punto dado.

Solución: Sean las tangentes conocidas t_1, t_2, AA', BB' y CC'. Se forman sobre t_1 y t_2, dos series proyectivas (ABC) y $(A'B'C')$. Uniendo el punto P dado, con estos puntos, se tienen dos haces perspectivos. Los rayos dobles de estos dos haces concéntricos, son las tangentes pedidas.

F 18- Una cónica está determinada por cuatro tangentes y un punto de tangencia. Trazar una quinta tangente a la cónica, paralela a una dirección dada.

Solución:



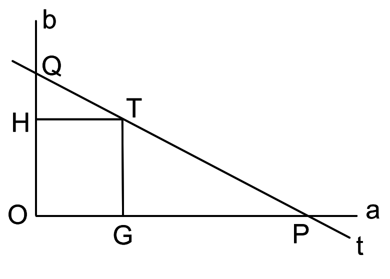
Sean t_1, t_2, t_3 y t_4 las tangentes dadas. Sea AB el eje perspectivo correspondiente a la base t_1 y a t_2. Y sea d la dirección dada (D_∞). Se trata de hallar en la tangente t_2, el homólogo D' de D_∞. Como $C'D_\infty$ y $D'C$ se cortan en el eje perspectivo (punto E), queda determinado D' (intersección de CE con t_2). La paralela a d desde D', es la tangente pedida.

F 19- Una cónica está determinada por cinco puntos. Hallar la clase de la cónica.

Solución: Siendo A, B, C, D y E, los puntos dados, se toman como vértices los puntos A y B, teniéndose los haces (A, CDE) y (B, CDE). Se traslada B sobre A, con lo que se tienen dos haces perspectivos concéntricos, cuyos rayos dobles se determinan. Si hay dos rayos dobles, la cónica es una hipérbola; si hay un solo rayo doble, la cónica es una parábola; si los rayos dobles son imaginarios, la cónica es una elipse.

F 20- Hallar los ejes de una cónica determinada por dos diámetros conjugados.

Solución: Sean AB y CD los dos diámetros conjugados que se cortan en su punto medio O. Por A y B se trazan las paralelas a CD, y por C y D las paralelas a AB, obteniéndose el paralelogramo de vértices E, F, G y H. Sus diagonales EG y FH, son diámetros conjugados de la cónica. Por tanto, se tienen dos haces en involución, de vértice O. Sus rayos homólogos perpendiculares son los ejes de la cónica. Una vez determinados los ejes en posición, para obtener su magnitud, se procede de la siguiente forma.



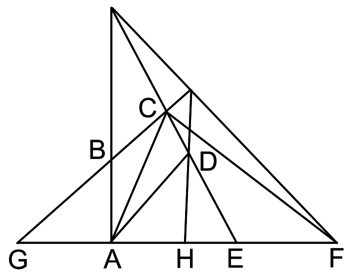
Sean a y b los ejes, y t una tangente a la cónica, siendo T el punto de tangencia. La tangente corta a los ejes en P y Q, y son G y H las proyecciones de T sobre los ejes. Q es el polo de TH, y P el de TG. Por tanto, siendo A y A', B y B', los vértices, se tiene $OA^2 = OG \cdot OP$ y $OB^2 = OH \cdot OQ$, con lo que se obtienen los ejes en magnitud.

F 21- Se dan cinco puntos A, B, C, D y E, en una cónica. Se traza una recta que pasa por A. Hallar su segundo punto de intersección con la cónica.

Solución: Una transversal corta a los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito en una cónica, y a esta, en tres pares de puntos que están en involución (Desargues). Siendo la transversal, la recta dada, se halla sobre ella el punto A', homólogo de A, que será el segundo punto de intersección de la recta dada.

F 22- Se da un sistema de cónicas que pasan por cuatro puntos A, B, C y D. Demostrar que el rayo conjugado armónico de AC con relación a AB y AD, corta a las cónicas y a la tangente en C, formando una involución.

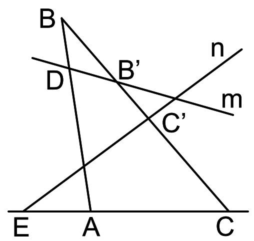
Solución



Sea AE el conjugado armónico de AC con relación a AB y AD. Sea CF la tangente en C. Siendo H el punto en que AE corta a la cónica, se tiene $\left(A, BDCH\right) = \left(C, BDCH\right) = -1$. Por tanto, cortando por AE se tiene $(GEFH) = -1$, por lo que F y H son conjugados en una involución, en la que G y E son dos puntos dobles.

F 23- Dibujar una cónica de la que se conoce un punto A y las polares m y n de dos puntos dados B y C, respectivamente.

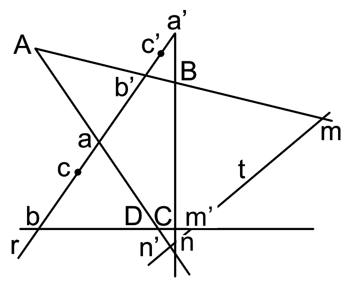
Solución:



En la recta AB se encuentra un nuevo punto de la cónica, que será el conjugado de A con relación a BD (D es la intersección de AB con m, polar de B). Siendo E la intersección de AC con n, polar de C, habrá un nuevo punto en la cónica, que será el conjugado armónico de A con relación a EC. La recta BC, en sus intersecciones con m y n, da los puntos B' y C'. Por tanto, los puntos en que BC corta a la cónica, son conjugados armónicos con relación a BB' y CC', luego serán los puntos dobles de la involución determinada por BB' y CC'.

F 24- Hallar el punto de contacto de la recta t, tangente a una cónica, de la que se conocen cuatro puntos A, B, C y D (t no pasa por ninguno de estos cuatro puntos).

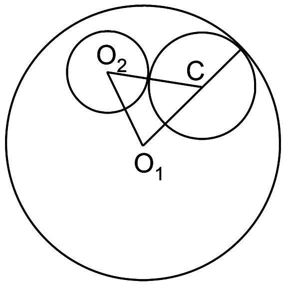
Solución:



Aplicando el teorema de Desargues a una transversal que corta a los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito en una cónica, en los puntos a, a', b y b', y a la cónica en c y c', se tiene: $\left(A, cDc'B\right) = \left(C, cDc'B\right) = (cac'b') = (cbc'a') = (c'a'cb)$. Por tanto, los pares de puntos aa', bb' y cc', forman una involución. Al ser la transversal una tangente, los puntos c y c' se confunden, y son los puntos dobles de la involución. Por tanto, en la tangente t, los puntos dobles de la involución determinada por mm' y nn', son los puntos de tangencia.

F 25- Dados dos círculos, uno interior al otro, hallar el lugar geométrico de los centros de los círculos tangentes a aquellos.

Solución:

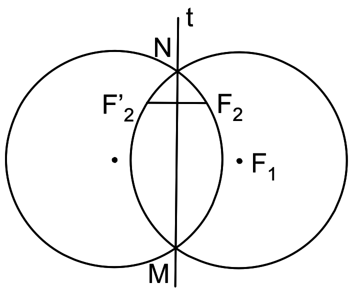


Sean O_1 y O_2 los círculos dados (O_2 interior al O_1), de radios r_1 y r_2, y sea C el círculo de radio R, tangente a aquellos. Se tiene: $O_2C = R + r_2$, $O_1C = r_1 - R$. Luego $O_2C + O_1C = r_1 + r_2$. Por tanto, C describe una elipse de focos O_1 y O_2, midiendo su eje mayor $r_1 + r_2$.

Nota: Ver el problema F 47, para el caso en que O_1 y O_2 son exteriores entre sí.

F 26- Se conoce un círculo focal de una elipse y una de sus tangentes. Hallar el lugar geométrico del otro foco.

Solución:



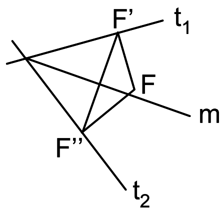
Sea F_1 el círculo focal y t la tangente, que corta a F_1 en M y N. Siendo F_2 el segundo foco, su simétrico F'_2 respecto a t, se encuentra en el círculo F_1. Luego F_2 está en el arco MF_2N, simétrico del MF'_2N respecto a t. El lugar geométrico de F_2 es dicho arco MF_2N.

F 27- Determinar el eje y el centro de una elipse de la que se conocen sus focos F_1 y F_2, y un punto P de ella.

Solución: Siendo $F_1P + F_2P = 2a$, se conoce el eje y su centro O.

F 28- Hallar el lugar geométrico de los centros O de las elipses que tienen un foco común conocido F, y son tangentes a dos rectas dadas t_1 y t_2.

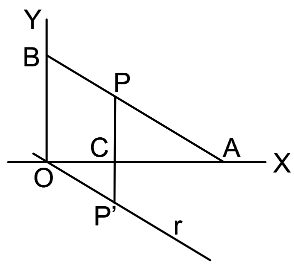
Solución:



Se proyecta F sobre t_1 y t_2, obteniéndose F' y F''. La mediatriz m de $F'F''$ es el lugar geométrico de O.

F 29- Demostrar que un punto P de un segmento AB de longitud constante, cuyos extremos se deslizan sobre dos rectas perpendiculares, describe una elipse.

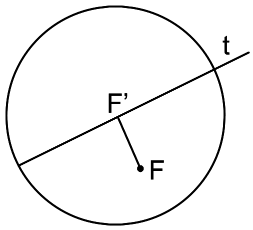
Solución:



Sean OX y OY las rectas perpendiculares. Se traza por O la paralela r a AB. Sea P' el punto en que la perpendicular PC a OX corta a r. Los triángulos PAC y $P'OC$ son semejantes, luego $\dfrac{CP}{CP'} = \dfrac{PA}{P'O}$. Por tanto P describe la elipse afín a la circunferencia de centro O y radio OP', y cuyos ejes son $OP' = BP$ y PA.

F 30- Un conjunto de elipses tienen el foco F común, son tangentes a la recta t, y su eje mayor tiene el mismo tamaño $2a$. Hallar el lugar geométrico de su centro O.

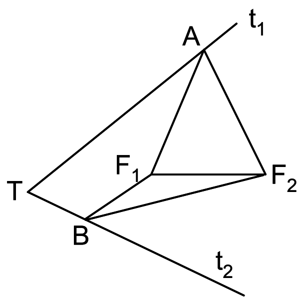
Solución:



Sea F' la proyección de F sobre t. El centro O estará sobre la circunferencia de centro F' y radio a (hay que tener en cuenta que $OF < OF'$).

F 31- Demostrar que los cuatro radios vectores que unen los focos F_1 y F_2 de una elipse con dos de sus puntos A y B, son tangentes a un mismo círculo.

Solución



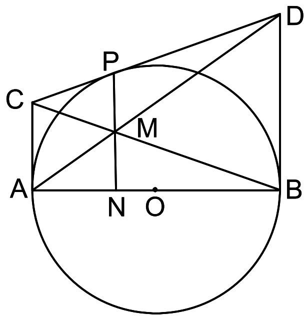
Sean t_1 y t_2 las tangentes en A y B, que se cortan en T. La recta TF_1 es bisectriz de $\widehat{ATB}$, por lo que T equidista de F_1A y F_1B. También equidista de F_2A y F_2B. Por tanto, un círculo de centro T, tangente a uno cualquiera de los radios vectores, lo será también a los otros tres (ver F 57).

F 32- Se dan dos elipses iguales. Una es fija, siendo sus focos F_1 y F_2. La segunda es móvil, moviéndose rodando sobre la fija. Hallar el lugar geométrico de F_1' y F_2', focos de la móvil.

Solución: En cualquier posición, F_1' es simétrico de F_1 en relación a la tangente común. Como también F_2' lo es de F_2. Luego el lugar geométrico de F_1' es el círculo focal correspondiente a F_1, y el de F_2' el correspondiente a F_2.

F 33- Se da una circunferencia de diámetro AB. Se trazan las tangentes en A y B. La tangente en un punto móvil P de la circunferencia, corta en C y D a las tangentes en A y B. Hallar el lugar geométrico de M, intersección de AD y CB.

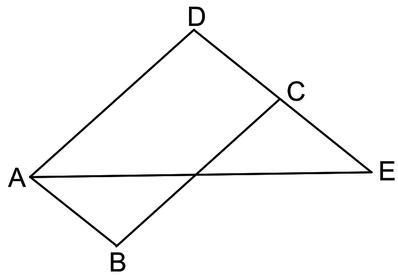
Solución:



En los triángulos semejantes *AMC* y *BMD*, se tiene $\frac{DB}{CA} = \frac{DM}{AM}$, y como $DB = DP$ y $CA = CP$, $\frac{DP}{CP} = \frac{DM}{AM}$. Luego *PM* es paralela a las bases del trapecio *ACDB*. Como la paralela a las bases de un trapecio, trazada por el punto de intersección de las diagonales, queda dividida por estas en dos partes iguales, se tiene que $PM = MN$. Por tanto *M* describe una elipse afín a la circunferencia dada, con eje mayor *AB*, y eje menor la mitad de *AB*, puesto que la razón de la afinidad es $\frac{MN}{NP} = \frac{1}{2}$.

F 34- En un paralelogramo *ABCD*, el vértice *A* es fijo, así como la bisectriz del ángulo $\widehat{A}$. Hallar el lugar geométrico del vértice *C*.

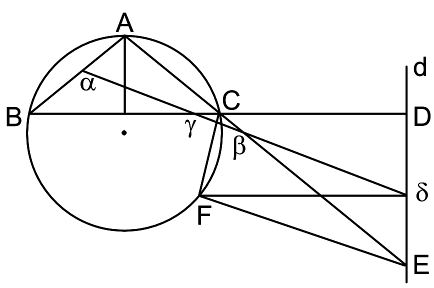
Solución:



Prolongando la bisectriz hasta su intersección *E* con *DC*, se tiene que el triángulo *ADE* es isósceles, luego *DE* es constante, al serlo *AD* y *DC*. Como *D* describe una circunferencia de centro *A* y radio *AD*, *C* describe una elipse afín de ejes $2(AD + DC)$ y $2(AD - DC)$.

F 35- Se dan en una elipse dos tangentes *AB* y *AC*, estando *A* sobre el eje menor, siendo *B* y *C* los puntos de tangencia, dándose también la directriz *d*. Demostrar que las proyecciones del foco *F* correspondiente a *d*, sobre *AB*, *AC*, *BC* y *d*, están en línea recta.

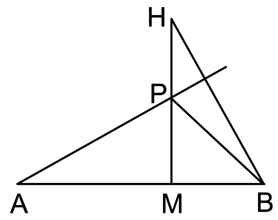
Solución:



La circunferencia circunscrita a *ABC* pasa por *F*, por lo que las tres proyecciones de *F* sobre sus tres lados, están en línea recta. La circunferencia que pasa por *C*, *D* (punto de corte de *AC* con *d*) y *E* (punto de corte de *AC* con *d*), pasa por *F*, al ser rectos los ángulos en *D* y en *F*. Por tanto, el cuadrilátero *FCDE* es inscriptible. Luego las proyecciones de *F* sobre los lados del triángulo *CDE*, están alineadas, por lo que lo están las proyecciones de *F* sobre las cuatro rectas del enunciado.

F 36- Hallar el lugar geométrico del ortocentro H de los triángulos formados por los vértices A y B, y un punto cualquiera P, de una elipse dada.

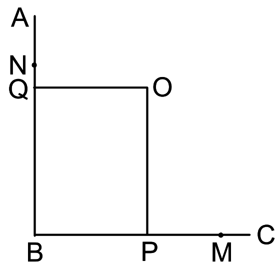
Solución:



Los triángulos MHB y PMA son semejantes, luego $MH \cdot MP = MA \cdot MB$. En la elipse se cumple $PM^2 \cdot a^2 = b^2 \cdot MA \cdot MB$, siendo a y b los semiejes de la elipse. Luego $\frac{MH}{MP} = \frac{a^2}{b^2}$. Por tanto H describe una elipse afín a la dada, con eje de afinidad AB y razón $\frac{a^2}{b^2}$.

F 37- Hallar el lugar geométrico del centro O de una elipse dada que se desliza tangencialmente a los dos catetos AB y BC de un ángulo recto.

Solución:



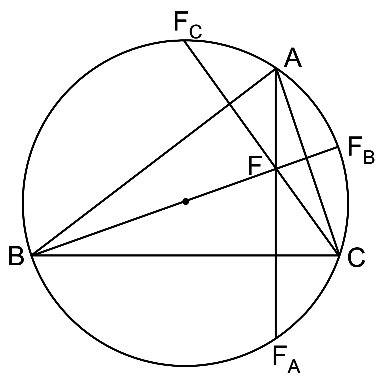
Los vértices de los ángulos rectos circunscritos a una elipse describen la circunferencia de radio $\sqrt{a^2+b^2}$ y centro O (problema F5). Luego O describe un arco de círculo de centro B y radio $\sqrt{a^2+b^2}$. En efecto, siendo P y Q las proyecciones de O sobre los catetos, se tiene $OP^2 + OQ^2 = a^2 + b^2$.

F 38- Trazar las tangentes comunes a dos elipses que tienen un foco común.

Solución: Los círculos focales de los focos no comunes se cortan en los puntos que corresponden a los simétricos del foco común con relación a las tangentes comunes pedidas.

F 39- Demostrar que si dos lados de un triángulo inscrito en un círculo focal de una elipse, son tangentes a la misma, el tercer lado también es tangente a la elipse dada.

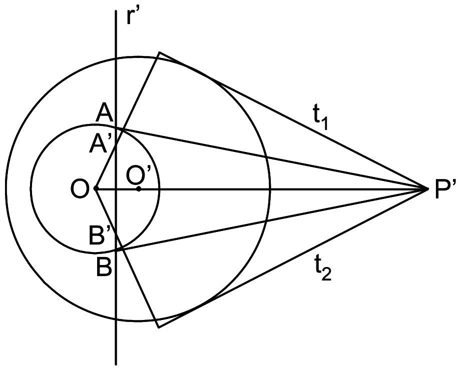
Solución:



Los punto simétricos del ortocentro de un triángulo, con relación a sus lados, se encuentran sobre su circunferencia circunscrita. Siendo F_C y F_B los simétricos de F respecto a AB y AC, que están sobre el círculo focal, F tiene que ser el ortocentro del triángulo ABC. Por tanto F_A es simétrico de F respecto a BC, por lo que BC es tangente a la elipse.

F 40- Hallar la intersección de la recta r' con la elipse polar recíproca de la circunferencia O' (directa) respecto a la circunferencia O (directriz).

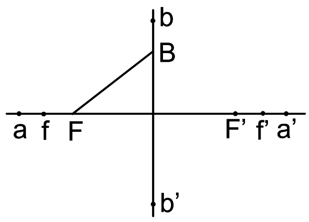
Solución:



La recta r' corta a O en A y B. Las tangentes a O en A y B, determinan P', polo de r' respecto a O. Desde P' se trazan las tangentes t_1 y t_2 a O'. Los polos de t_1 y t_2 respecto a O, son los puntos A' y B' de intersección de r' con la elipse polar recíproca de O'.

F 41- Dibujar la elipse de la que se conocen los focos F y F', y la relación de sus semiejes $\frac{b}{a}$.

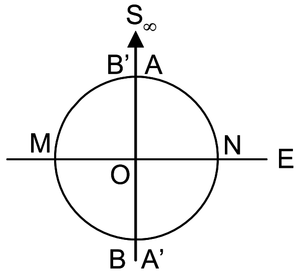
Solución:



Se traza una elipse cuyos semiejes cumplen la relación dada. Sean sus ejes aa' y bb', y sus focos ff'. La elipse buscada es homotética con la anterior. Se traza FB paralela a fb, obteniéndose el vértice B, con lo que se conocen todos los elementos de la elipse pedida.

F 42- Dibujar la elipse afín de la circunferencia de centro O, tomando como eje de afinidad el punto del infinito perpendicular a E, siendo el coeficiente de afinidad -1.

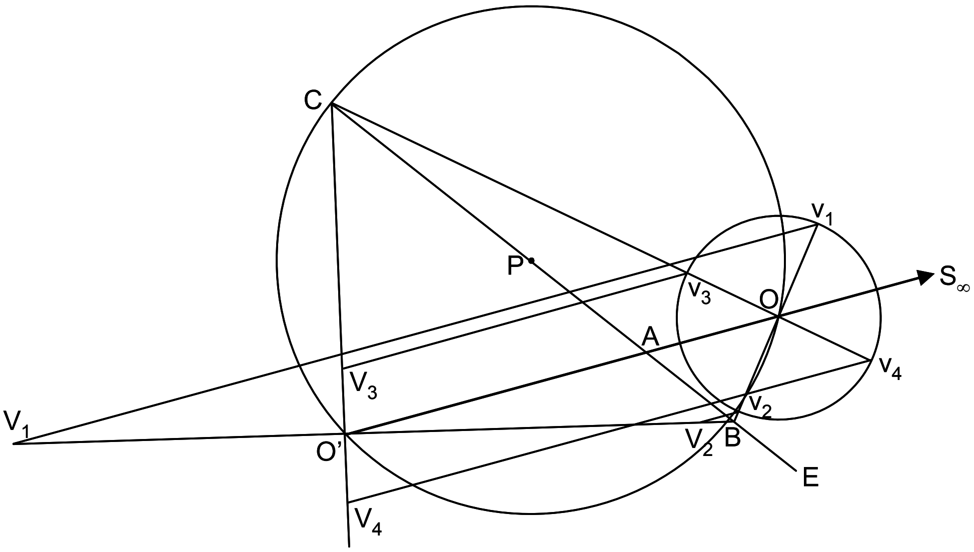
Solución:



El coeficiente de afinidad es $(S_\infty OAA') = -1 = \frac{A'O}{AO}$. Por tanto, los puntos homólogos son simétricos respecto a E, siendo la afín de la circunferencia ella misma. El homólogo del arco MAN es el arco $MA'N$. Generalizando el problema, para definir la homología que transforma una cónica en ella misma, tomando como centro un punto cualquiera del plano, se toma como eje la polar de ese punto y como coeficiente de homología -1. Para el caso del problema, el centro está en el infinito y su polar es el diámetro perpendicular.

F 43- Hallar ejes y vértices de una elipse afín de una circunferencia dada *O*, siendo *E* el eje de afinidad, S_∞ su centro, y –2 el coeficiente de afinidad.

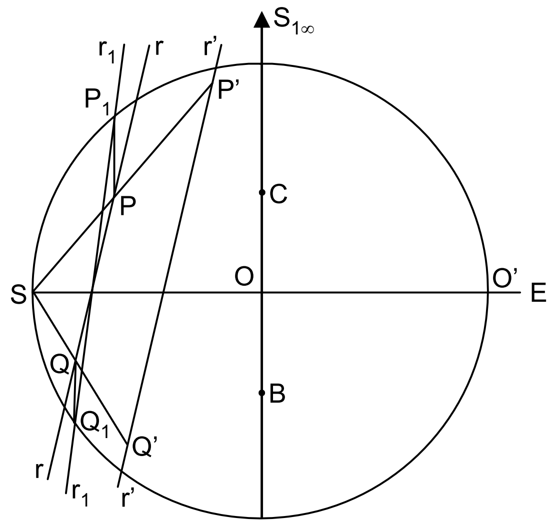
Solución:



El coeficiente de afinidad es $(S_\infty AOO') = (O'OAS_\infty) = \dfrac{O'A}{OA} = -2$, con lo que se determina O'. Se traza la circunferencia que pasa por O y O' con centro P en E, siendo su diámetro BC. Sean las rectas homólogas CO, CO' y BO, BO'. Como OB y OC son perpendiculares, $O'B$ y $O'C$ son diámetros conjugados, y como son perpendiculares, son los ejes de la elipse. Para hallar sus vértices, se determinan los homólogos de v_1, v_2, v_3 y v_4 (intersecciones de OC y OB con la circunferencia O). Para ello se trazan las paralelas a AS_∞ por dichos cuatro puntos, obteniéndose los vértices V_1, V_2, V_3 y V_4 de la elipse.

F 44- Hallar la intersección de una recta dada con la homotética de una elipse, siendo *S* el centro de homotecia, *O* y O' un par de puntos homotéticos, y SO' y BC los ejes de la elipse.

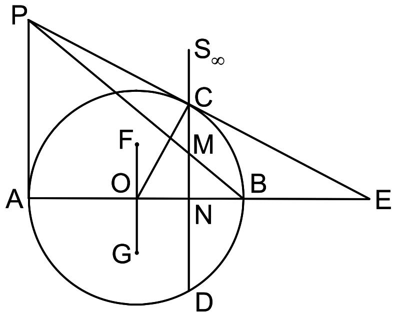
Solución:



Se plantea una afinidad de eje SO', centro $S_{1\infty}$ y coeficiente de afinidad $(S_{1\infty}OBB_1) = (B_1BOS_{1\infty}) = \dfrac{B_1O}{BO}$, con lo que se obtiene la circunferencia de centro O y diámetro SO'. Siendo r' la recta dada, su homotética es la recta paralela r. Y la afín de esta, es la recta r_1, que corta a la circunferencia en P_1 y Q_1. Deshaciendo la afinidad, se obtienen los puntos P y Q, que son los de intersección de r con la elipse dada, siendo sus homotéticos P' y Q', los puntos pedidos.

F 45- Se da la circunferencia O, de diámetro AB. Un punto P recorre la tangente en A. Desde P se traza la tangente PC a O en el punto C. Se traza CD, paralela a PA. Hallar el lugar geométrico de M, intersección de CD con PB.

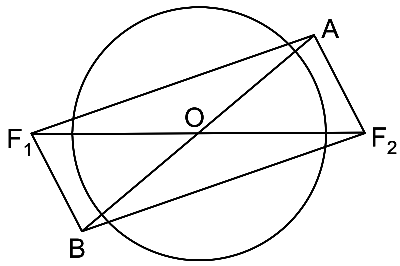
Solución:



Siendo E la intersección de PC con AB, como CD es la polar de E, se tiene $(ENBA) = -1$. Proyectando desde P y cortando por CD, se tiene $(CNMS_\infty) = -1$. Luego M es el punto medio de CN. Planteando una afinidad de eje AB, centro S_∞ y razón de afinidad $\frac{1}{2}$, la curva afín de la circunferencia O, es una elipse de ejes AB y $FG = \frac{AB}{2}$. Y como el afín de C es M, el lugar geométrico de M es la citada elipse.

F 46- Se da el círculo principal O y un punto A de una hipérbola, hallar el lugar geométrico de sus focos.

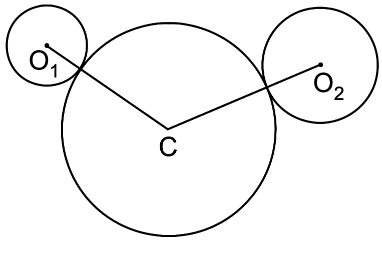
Solución:



Sean F_1 y F_2 los focos. La hipérbola pasa también por B, simétrico de A respecto a O. Por tanto: $AF_1 - AF_2 = BF_2 - BF_1$, cantidad que es constante. Luego F_1 y F_2 describen una hipérbola de focos A y B, siendo su círculo principal O.

F 47- Hallar el lugar geométrico de los centros C de los círculos tangentes a dos círculos dados O_1 y O_2, exteriores entre sí.

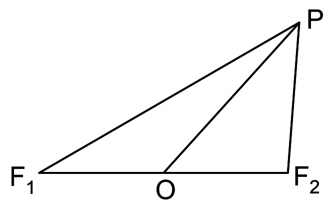
Solución:



$CO_1 = R + r_1$, $CO_2 = R + r_2$, siendo r_1 y r_2 los radios conocidos de O_1 y O_2, y R el de C. Luego $CO_1 - CO_2 = r_1 - r_2$, por lo que C describe una hipérbola de focos O_1 y O_2.
Nota: Ver el problema F 25, para el caso en que O_1 y O_2 sean uno interior al otro.

F 48- Demostrar que en una hipérbola equilátera, la recta que une un punto P de la hipérbola con su centro O, es media proporcional de los dos radios vectores de dicho punto P.

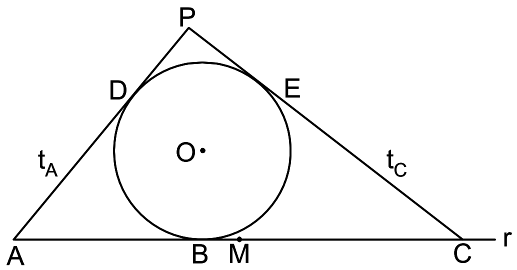
Solución:



Sean d_1 y d_2 las distancias de P a los focos F_1 y F_2. Luego $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot OP^2 + 2c^2$, siendo $2c = F_1F_2$. Además $(d_1 - d_2)^2 = 4a^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2$, siendo $2a$ el eje. Restando ambas expresiones, se tiene: $2d_1d_2 = 2 \cdot OP^2 + 2c^2 - 4a^2$. Como $c^2 = 2a^2$, se tiene $d_1d_2 = OP^2$.

F 49- Dada la recta r, se determinan sobre ella tres puntos A, B y C, en ese orden. Se trazan desde A y C, las tangentes t_A y t_C a los círculos O que son tangentes a r en B. Hallar el lugar geométrico de los puntos P de intersección de t_A y t_C.

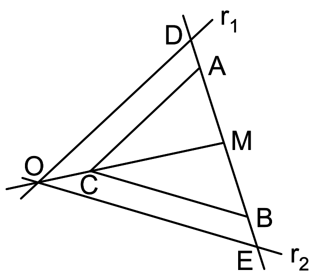
Solución:



Sean D y E los puntos de tangencia de t_A y t_C. Se tiene: $AP = AD + DP = AB + DP$, y $CP = CE + EP = CB + DP$. Restando ambas expresiones, se tiene $AP - CP = AB - CB$. Siendo M el punto medio de AC, se tiene $AP - CP = 2 \cdot MB$. Luego P describe una hipérbola de focos A y C, y centro M, siendo B uno de sus vértices.

F 50- Hallar el lugar geométrico de los centros O de las hipérbolas que pasan por dos puntos dados A y B, y sus asíntotas son paralelas a dos rectas dadas r_1 y r_2.

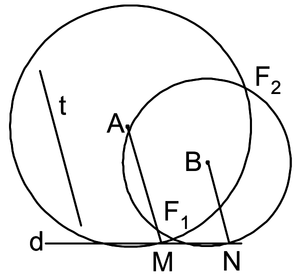
Solución:



Se trazan desde A y B las paralelas a r_1 y r_2, que se cortan en C. Sean D y E los puntos en que las asíntotas de una de las hipérbolas, cortan a AB. Los segmentos DA y BE han de ser iguales. Luego O está en la mediana OCM, siendo M el punto medio de AB. El lugar geométrico pedido es la recta CM.

F 51- Determinar los focos de una hipérbola que pasa por los puntos A y B dados, siendo una de sus directrices la recta d dada, y sabiendo que una de sus asíntotas es paralela a la recta t dada.

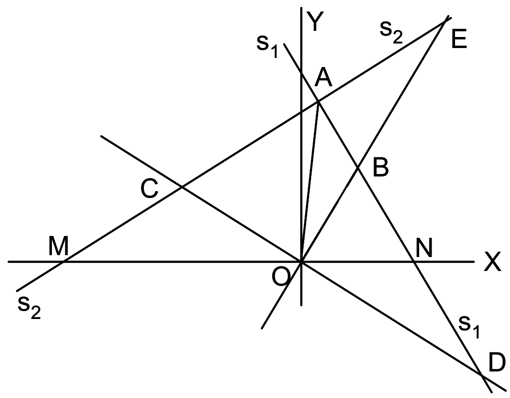
Solución:



Se trazan por A y B paralelas a t, que cortan a d en M y N respectivamente. Los puntos de intersección de las circunferencias trazadas con centros A y B, y radios AM y BN, son los focos buscados.

F 52- Demostrar que en una hipérbola equilátera son concíclicos su centro O, el punto de intersección A de dos secantes s_1 y s_2, y los puntos de intersección B y C de cada secante con el diámetro conjugado de la otra.

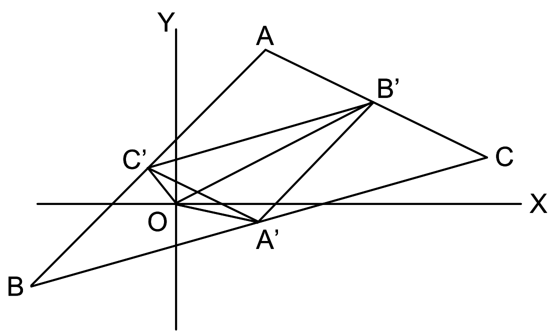
Solución:



Sean OX y OY las asíntotas. Sean OBE y OCD los diámetros conjugados de s_1 y s_2, respectivamente. Luego $\widehat{CMO} = \widehat{COM}$, $\widehat{BON} = \widehat{BNO}$, $\widehat{COB} = \pi - \widehat{COM} - \widehat{BON}$, $\widehat{CAB} = \pi - \widehat{CMO} - \widehat{BNO}$, $\widehat{COB} = \widehat{CAB}$. Luego $\widehat{AEO} = \pi - \widehat{ACO} - \widehat{COB} = \pi - \widehat{ACO} - \widehat{CAB} = \widehat{ADO}$. Por tanto, al verse OA desde E y desde D bajo el mismo ángulo (o suplementario), O, A, E y D son concíclicos.

F 53- Demostrar que si un triángulo ABC está inscrito en una hipérbola equilátera, el centro O de esta se encuentra sobre el círculo de Euler de aquel.

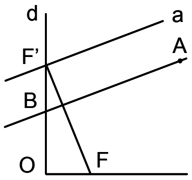
Solución:



Sean las asíntotas OX y OY, y sea ABC el triángulo inscrito. El círculo de Euler pasa por los puntos medios A', B' y C' de los lados del triángulo. Por tanto hay que demostrar que dichos puntos medios y el centro O de la hipérbola, son concíclicos. Se ha visto en el problema F 52, que $\widehat{A'OB'} = \widehat{BCA} = \widehat{A'CB'}$. Por tanto, $A'B'$ se ve bajo el mismo ángulo desde O y desde C, luego O, A', B' y C' son concíclicos.

F 54- Determinar la directriz d y el centro O de una hipérbola de la que se conocen un foco F, una asíntota a y un punto A.

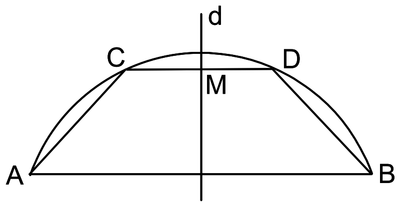
Solución:



La proyección F' de F sobre a, pertenece a d. Se fija el punto B sobre la paralela a a trazada desde A, siendo $AB = AF$. Luego $F'B$ es la directriz. El pie de la perpendicular a d desde F, es el centro O.

F 55- Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen en tres partes iguales a los arcos de circunferencia que pasan por dos puntos dados AB.

Solución:



Sea $ACDB$ un arco, siendo C y D los puntos que lo dividen en tres partes iguales $\left(arco\ AC = arco\ CD = arco\ DB\right)$. Luego también son iguales las cuerdas $AC = CD = DB$. Sea M el punto medio de la cuerda CD, se tiene $AC = 2 \cdot CM$. Luego C describe una hipérbola de foco A y directriz d (perpendicular a AB por M) y excentricidad 2.

F 56- Determinar el centro O de una hipérbola, conociendo un foco F, una asíntota a y una tangente t.

Solución: Sean A y B las proyecciones de F sobre a y t. La mediatriz de AB corta a a en O.

F 57- Demostrar que los cuatro radios vectores que unen los focos F_1 y F_2 de una hipérbola con dos de sus puntos A y B, son tangentes a un mismo círculo.

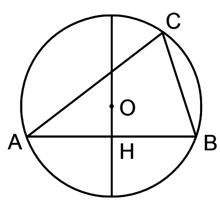
Solución: Las tangentes en A y B a la hipérbola son bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores. Por tanto, el punto P, intersección de dichas tangentes, equidista de los cuatro radios vectores (ver F 31).

F 58- Hallar el lugar geométrico del centro O y del foco F_1 de las hipérbolas que tienen un foco F_2 fijo y pasan por dos puntos A y B dados.

Solución: Se verifica que $F_2A - F_2B = F_1A - F_1B$. Luego F_1 describe una hipérbola de focos A y B. Como $\frac{F_2O}{F_2F_1} = \frac{1}{2}$, el centro O describe una hipérbola homotética de la anterior, con centro de homotecia F_2 y razón $\frac{1}{2}$.

F 59- Hallar el lugar geométrico del vértice C de un triángulo ABC, en el que AB es fijo, y el ángulo $\widehat{B}$ es doble del $\widehat{A}$.

Solución:



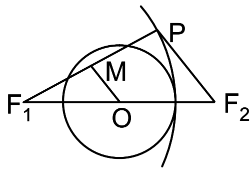
Sea O el círculo circunscrito al triángulo. El arco AC es doble del arco BC. Por tanto C describe una hipérbola de foco B y directriz OH (mediatriz de AB).

F 60- Determinar el centro O de una hipérbola de la que se conocen el foco F, el vértice V y una tangente t.

Solución: Sea P la proyección de F sobre t. La mediatriz de PV corta a FV en O.

F 61- Siendo P un punto de una hipérbola de centro O, y F_1 uno de sus focos, demostrar que el círculo que tiene por diámetro F_1P es tangente al círculo principal.

Solución:



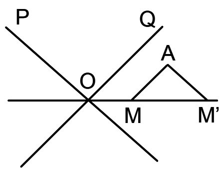
Siendo M el punto medio de PF_1, se tiene $2 \cdot F_1M - 2 \cdot OM = 2a$, es decir $F_1M - OM = a$, $OM = F_1M - a$. Luego el círculo principal es tangente interior al de diámetro F_1P.

F 62- Desde un punto P exterior a una hipérbola, se trazan las tangentes a la curva. Hallar el lugar geométrico de P para que estas tangentes lo sean a una sola de las ramas de la hipérbola, o a las dos.

Solución: Si P se encuentra dentro del ángulo formado por las asíntotas que no contiene ninguna rama de la hipérbola, se pueden trazar desde él dos tangentes, una a cada rama. Si P se encuentra entre las asíntotas y la curva, se pueden trazar dos tangentes desde él, y las dos a la misma rama de la hipérbola.

F 63- Hallar los vértices de una hipérbola de la que se conocen sus asíntotas OP y OQ, y un punto A.

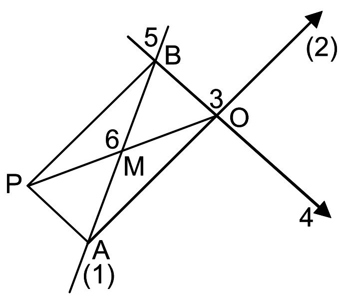
Solución:



Se traza el eje, bisectriz de OP y OQ en el ángulo en el que se encuentra A. Sobre él se forman dos series proyectivas en involución. Considerando a $P_\infty Q_\infty$, recta del infinito, como del vértice P_∞, el homólogo del infinito del eje es su intersección con la asíntota Q_∞, es decir O es punto límite. Y si se considera a la recta del infinito como del vértice Q_∞, el homólogo del infinito del eje es su intersección con P_∞, es decir O es punto límite. Los dos puntos límites se confunden en O. Por tanto, O es centro de una involución en la que M y M' (intersección con el eje, de las paralelas a las asíntotas trazadas desde A) son homólogos. Como los puntos dobles de esta involución son los vértices, se tiene que $OV^2 = OM \cdot OM'$.

F 64- Sean A y B los puntos en que la tangente AB corta a las asíntotas OA y OB de una hipérbola. Por A y B se trazan las paralelas AP y BP a las asíntotas. Demostrar que OP corta a AB en M, punto de contacto de la tangente, siendo $AM = MB$.

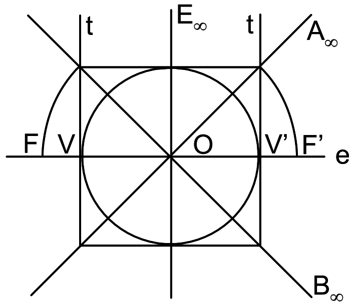
Solución:



Aplicando el teorema de Brianchon, se tiene que AP es $(1-4)$, BP es $(5-2)$, y uniendo P con O (3) da M, punto de contacto. En el paralelogramo $AOBP$, la diagonal AB, que es la tangente, queda dividida en dos partes iguales por el punto de contacto M.

F 65- Hallar la polar recíproca de una hipérbola equilátera (directa), cuyo eje principal es VV', respecto a la circunferencia principal (directriz).

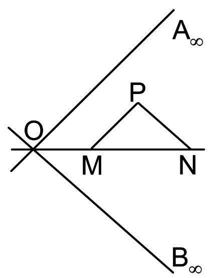
Solución:



Las tangentes a la hipérbola dada, trazadas desde el centro O, son sus asíntotas. Se hallan las polares de A_∞ y B_∞ (asíntotas de la hipérbola), que son las asíntotas de la recíproca, que coinciden con las de la directa. Para hallar los vértices, se determina el polo E_∞ del eje e, respecto a la directriz. Para ello se trazan las tangentes t a la directriz, cuyos polos V son los vértices pedidos.

F 66- Desde un punto P de una hipérbola se trazan paralelas a las asíntotas, que cortan a uno de sus diámetros en los puntos M y N. Demostrar que el semidiámetro es media proporcional entre las distancias del centro a M y N.

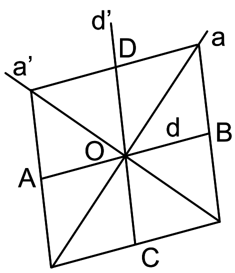
Solución:



Sea Q el punto en que el diámetro MN corta a la curva. Proyectando desde los puntos A_∞ y B_∞ de las asíntotas, la cuaterna P, Q, A_∞ y B_∞, se tiene $\left(A_\infty, A_\infty B_\infty PQ\right) = \left(B_\infty, A_\infty B_\infty PQ\right)$. Cortando por OMN, se tiene $(O\infty MQ) = (\infty ONQ)$. Por tanto $\frac{OM}{OQ} = \frac{OQ}{ON}$, es decir $OQ^2 = OM \cdot ON$.

F 67- Una hipérbola equilátera está determinada por un diámetro AB en posición y magnitud, y por su diámetro conjugado, aunque este sólo en posición: Hallar su magnitud y trazar las asíntotas.

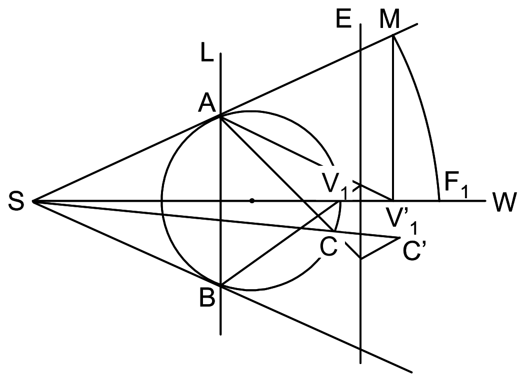
Solución:



Sean los diámetros conjugados d y d' (d está limitado por los puntos A y B). Las asíntotas a y a', son las bisectrices de los ángulos formados por d y d'. El paralelogramo formado por las tangentes en A y B, es un rombo que limita a d' en los puntos C y D ($CD = AB$).

F 68- Hallar los focos de una hipérbola de la que se conocen las asíntotas y un punto.

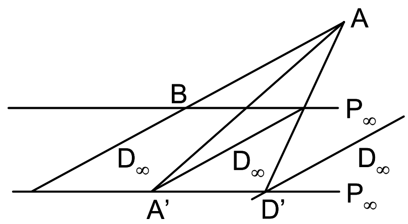
Solución:



Se plantea una homología en la que el centro es *S*, intersección de las asíntotas, siendo la homóloga de la hipérbola, una circunferencia cualquiera que sea tangente en *A* y *B* a las asíntotas. La recta límite es *AB*. Siendo C' el punto dado, la construcción de su homólogo *C* determina el eje *E* (el eje es la paralela a *L* por el punto de intersección de *AC* con la paralela a A'_∞ trazada por C'). Se traza la bisectriz *SW* de las asíntotas y el homólogo V'_1 de V_1 es un vértice de la hipérbola. La perpendicular a la bisectriz por V', da *M*. La distancia $SM = SF_1$, da el foco F_1.

F 69- En una hipérbola se conocen una asíntota, dos tangentes y el punto de contacto de una de ellas. Trazar una tangente paralela a una de las dadas.

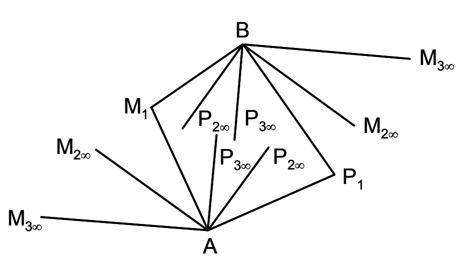
Solución:



Las tangentes son *AB* (*B* es su punto de contacto) y AA', y la asíntota es $A'D'$. Se toman como transversales $A'D'$ y *AB*, y sea BP_∞ (recta que une los puntos de contacto de tangente y asíntota) el eje perspectivo. Para trazar la tangente desde B_∞ (es paralela a la tangente *AB*), se halla su homólogo D'. La tangente pedida es $D'D_\infty$.

F 70- Hallar el lugar geométrico de *P*, intersección de las perpendiculares *AP* y *BP* a *AM* y *BM* respectivamente, siendo *A* y *B* dos puntos fijos de una hipérbola y *M* un punto móvil sobre ella.

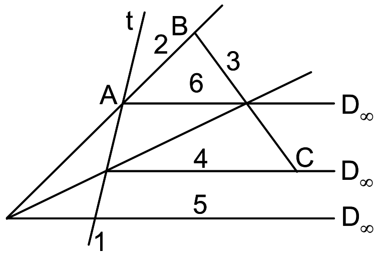
Solución:

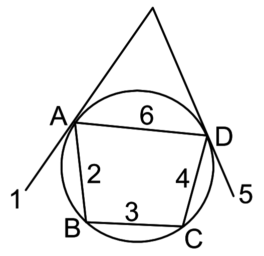


Se forman dos haces proyectivos en *A* y *B* cuando *M* recorre la hipérbola, que seguirán siendo proyectivos cuando se les dé un giro cualquiera. $\left(A, P_1P_2..\right) = \left(B, P_1P_2..\right)$, por lo que *P* recorre una cónica. Si *AM* y *BM* son paralelas, *AP* y *BM* también lo son, luego la cónica es una hipérbola que pasa por *A* y *B*.

F 71- En una cónica se conocen cuatro puntos *A*, *B*, *C* y D_∞, y la tangente *t* en *A*. Determinar la clase de la cónica.

Solución:



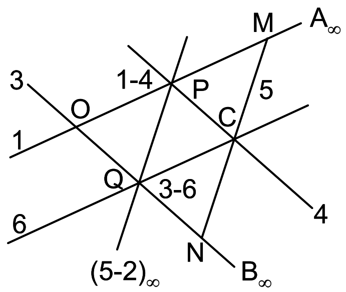


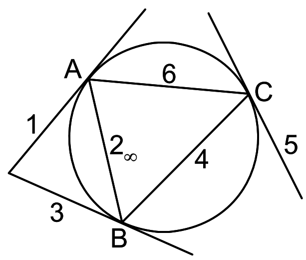
Por el teorema de Pascal, se traza la tangente en D_∞, que como es infinito, la curva es una hipérbola.

F 72- En una hipérbola se conocen las asíntotas y un punto *C*. 1º) Trazar la tangente en *C*. 2º) Hallar su intersección con una secante que pase por *C*.

Solución:

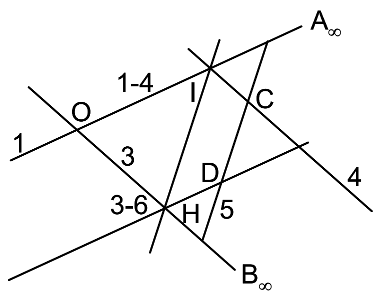
1º)

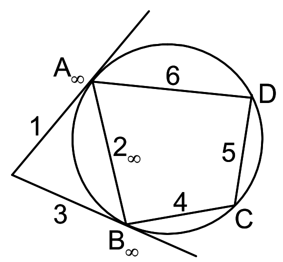




Las asíntotas son A_∞ y B_∞. La tangente es *MN*. Se deduce que si una recta corta a la hipérbola en C_1 y C_2, y a las asíntotas en *M* y *N*, se tiene que $C_1M = C_2N$ (en el caso de la figura C_1 y C_2 se confunden en *C*).

2º)

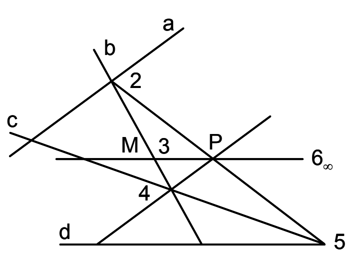


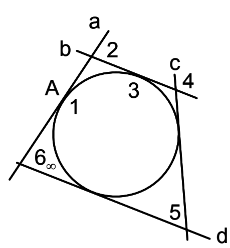


De acuerdo con la construcción, el punto buscado es *D*.

F 73- En una hipérbola se conocen una asíntota *a* y tres tangentes *b*, *c* y *d*. Hallar el punto de contacto de la tangente *b*.

Solución:

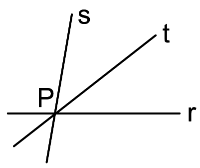




De acuerdo con la construcción, el punto de contacto es *M*.

F 74- Una serie de parábolas pasan por un punto P y tienen la misma tangente t en dicho punto, siendo sus ejes paralelos a la recta r. Hallar el lugar geométrico de sus focos.

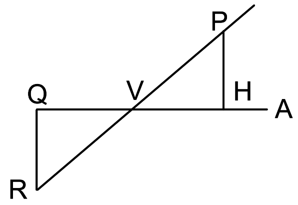
Solución:



Siendo la tangente, bisectriz del ángulo formado por los radios vectores, los focos F están sobre la recta s, simétrica de r respecto a t.

F 75- Una serie de parábolas pasan por un punto fijo P, y tienen su vértice V fijo. Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de la tangente en P, con el eje.

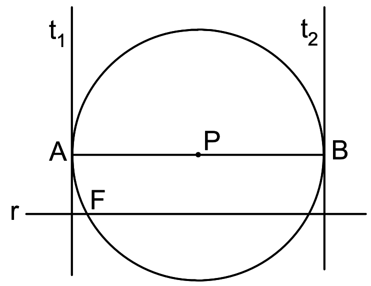
Solución:



Sea VA el eje de una de las parábolas. Sea H la proyección de P sobre VA. Y sea Q el simétrico de H respecto a V. La tangente en P es PQ, pues $QV = VH$. Se traza QR perpendicular a VQ, siendo $VR = VP$, por lo que R es fijo. Luego Q está en la circunferencia de diámetro VR.

F 76- Demostrar que dada la recta r y un punto F sobre ella, para todo punto P del plano, hay dos parábolas que tienen por eje r, por foco F, y que estas dos parábolas se cortan ortogonalmente.

Solución:



La circunferencia de centro P y radio PF, tiene dos tangentes t_1 y t_2 perpendiculares a r, que son las directrices de las dos parábolas. Las tangentes en P a las dos parábolas son las bisectrices de $\widehat{APF}$ y $\widehat{BPF}$, que son suplementarios, luego las tangentes son perpendiculares y las parábolas se cortan ortogonalmente.

F 77- Determinar la directriz de una parábola conociendo el foco F, un punto P, y una tangente t.

Solución: Se traza el círculo de centro P y radio FP. Sea F' el simétrico de F respecto a t. Desde F' se trazan las tangentes a dicho círculo, que son las directrices de las dos parábolas que cumplen el enunciado.

F 78- Inscribir en una parábola dada, un triángulo cuyos lados sean paralelos a tres direcciones dadas.

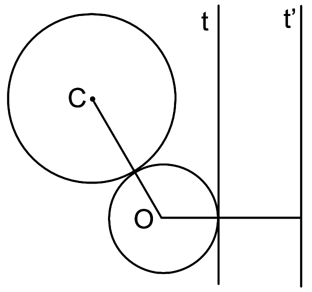
Solución: Se traza un triángulo $A'B'C'$ de lados paralelos a las tres direcciones dadas y se le circunscribe una parábola cuyo eje sea paralelo al eje de la parábola dada. Esta y aquella son homotéticas. Se une el centro de homotecia con los tres vértices A', B' y C'. Estas tres rectas cortarán a la parábola dada en A, B y C, que determinan el triángulo pedido.

F 79- Determinar el foco de una parábola que pasa por dos puntos dados A y B, y cuya directriz d es conocida.

Solución: Con centros en A y B se trazan dos circunferencias tangentes a d. Los puntos de corte de las circunferencias son los focos buscados.

F 80- Hallar el lugar geométrico de los centros O de los círculos tangentes a un círculo C dado, y a una recta t dada, exterior a C.

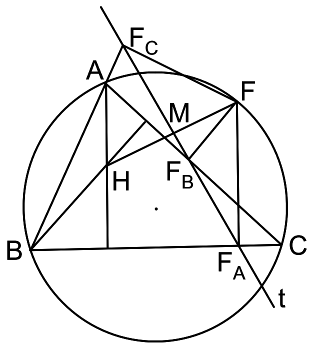
Solución:



Se traza t', paralela a t, a una distancia de t igual a r, radio de C, situada al lado de t opuesto a C (en el dibujo C está a la izquierda de t, y t' a la derecha). Las distancias de O a C y a t', son iguales. Luego O describe una parábola cuyo foco es C y cuya directriz es t'.

F 81- Demostrar que el ortocentro de un triángulo ABC, cuyos lados son tangentes a una parábola, se encuentra sobre su directriz.

Solución:



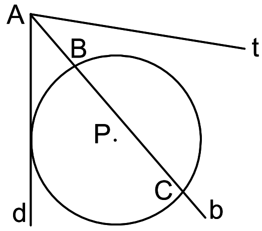
El foco F de la parábola se encuentra sobre el círculo circunscrito al triángulo ABC. Las proyecciones F_A, F_B y F_C de F sobre los tres lados del triángulo, están sobre la tangente t en el vértice, y esta es la recta de Simson correspondiente a F. Como la recta que une el ortocentro de un triángulo con cualquier punto del círculo circunscrito, queda dividida en su punto medio por la recta de Simson de dicho punto, la recta FH (H es el ortocentro del ABC) queda dividida en dos partes iguales por t, luego H está sobre la directriz.

F 82- Determinar la directriz d de una parábola conociendo dos tangentes t_1 y t_2, y el foco F.

Solución: Los puntos simétricos F_1 y F_2 de F respecto a las tangentes, definen la directriz.

F 83- Determinar el foco F de una parábola, conociendo uno de sus puntos P, una tangente t, y la directriz d.

Solución:



El punto A es la intersección de d y t. Sea b la bisectriz del ángulo formado por d y t. Sobre dicha bisectriz se encuentra F. Con centro en P se traza la circunferencia tangente a d. Los puntos B y C

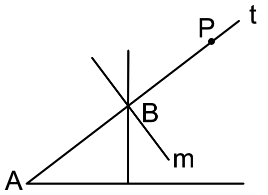
de intersección con b, dan las soluciones de F.

F 84- Dada una parábola, trazar la normal a la misma que pasa por un punto P dado del eje.

Solución: Sean F y V el foco y el vértice de la parábola. Sobre el eje se determina el punto A, de forma que PA sea igual al parámetro de la parábola. Se determina, también sobre el eje, un punto B, de manera que AB sea igual al doble de AV. Sobre PB como diámetro, se traza una circunferencia que corta a la perpendicular al eje trazada en A, en los pies de las dos normales pedidas.

F 85- Hallar el lugar geométrico del foco F de una parábola de la que se conocen un punto P, la tangente t en dicho punto, y el punto A en que t corta la eje.

Solución:



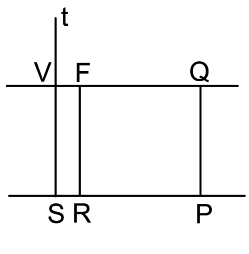
Sea B el punto medio de AP. Por él pasan las tangentes en el vértice de todas las parábolas que cumplen las condiciones del enunciado. Luego F describe la perpendicular a t en B.

F 86- Hallar el lugar geométrico de los focos de las parábolas tangentes a tres rectas dadas.

Solución: El lugar geométrico buscado es la circunferencia circunscrita al triángulo formado por las tres tangentes, puesto que las proyecciones del foco sobre las tres tangentes, están en línea recta.

F 87- Hallar el lugar geométrico de los focos F de las parábolas tangentes en el vértice V a una recta dada t, y que pasan por un punto P dado.

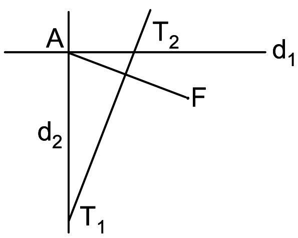
Solución:



Sea Q la proyección de P sobre el eje. Por tanto $PQ^2 = 4 \cdot VF \cdot VQ$, luego $FR^2 = 4 \cdot RS \cdot SP$. Si se toman como ejes coordenados SP y SV, se tiene $y^2 = 4x \cdot SP$. Luego F describe una parábola de foco P, siendo t la tangente en su vértice.

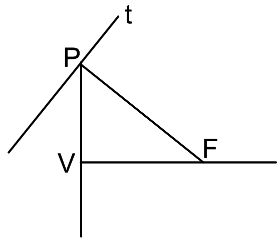
F 88- Dos parábolas tienen el mismo foco F, siendo sus directrices d_1 y d_2 perpendiculares. Demostrar que los puntos de contacto T_1 y T_2 de la tangente común t, están sobre las directrices d_2 y d_1 respectivamente.

Solución:



Las directrices d_1 y d_2 se cortan en A. Se traza la mediatriz de AF que es la tangente común, y por tanto sus intersecciones con d_1 y d_2 dan T_2 y T_1, F 89- Hallar el lugar geométrico de los focos *F* de las parábolas que tienen el vértice fijo *V* y una tangente *t* fija.

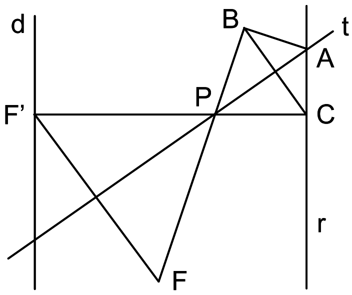
Solución:



Sea *P* la proyección de *F* sobre *t*. El punto *P* está sobre la tangente en el vértice *V*, que es la recta *PV*. Luego el triángulo *FVP* es rectángulo. El foco *F* describe una parábola de vértice *V* y cuyo eje es perpendicular a *t*.

F 90- Se conocen de una parábola, su foco *F*, la directriz *d*, y una recta *r* perpendicular a su eje. Por cada punto *P* de la parábola, se traza su tangente *t*, que corta a *r* en *A*. Se pide el lugar geométrico del punto *B*, proyección de *A* sobre *FP*,

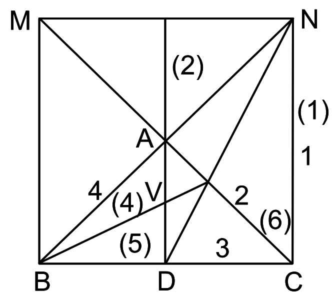
Solución:



Sea *C* la proyección de *P* sobre *r*. Los triángulos *PBA* y *PCA* son iguales, pues sus ángulos son iguales y tienen la misma hipotenusa, luego $PB = PC$. Como $PF = PF'$, se tiene que $BF = CF'$, que es constante. Luego el lugar geométrico de *B* es un círculo de centro *F* y radio CF'.

F 91- Se da un triángulo isósceles *ABC*, cuyos lados iguales *AB* y *AC*, son tangentes a una cónica en *B* y *C*. Siendo *D* el punto medio de *BC*, *AD* es la dirección de un punto del infinito de la cónica. Hallar la clase de la cónica y su vértice.

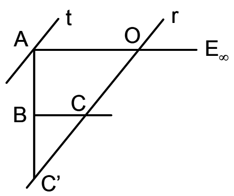
Solución:



Se traza el rectángulo *MNBC*. Se aplica Pascal para trazar la tangente en el punto del infinito. Para ello, se traza desde el punto del infinito de *MN*, la paralela *NC* a *AD*, es decir que la recta del infinito es tangente a la curva, luego es una parábola. Como *BC* es una cuerda, y *AD* es paralela al eje, esta la divide en dos partes iguales, luego *AD* es el eje de la parábola. Para hallar su vértice *V*, basta hallar el segundo punto en que el eje *AD* corta a la curva.

F 92- Determinada una parábola por la tangente t en un punto A de la misma, por otro punto B, y por la dirección E_∞ del eje, hallar los puntos de intersección de una recta r paralela a la tangente en A.

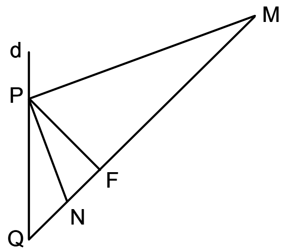
Solución:



Tomando como vértices A y E_∞, se forman sobre r dos series proyectivas en involución. En efecto, el punto O, tomando AE_∞ como del vértice A, tiene por homólogo el punto r_∞, luego O es el punto límite J'. Si AE_∞ se considera como del vértice E_∞, O será homólogo del punto en que r corta a la tangente en A, a la que es paralela, luego O es el punto límite I. Al confundirse los dos puntos límites, O es el punto central de la involución. Siendo P y Q los puntos dobles, de intersección de r con la curva, se tiene $OP^2 = OQ^2 = OC \cdot OC'$.

F 93- Demostrar que las tangentes trazadas en los extremos de una cuerda focal de una parábola, se cortan en la directriz formando un ángulo recto.

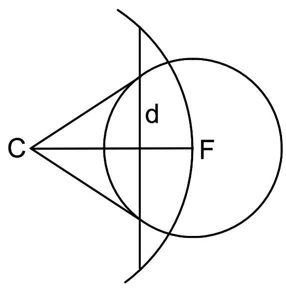
Solución:



Sea d la directriz, F el foco, PM y PN las tangentes. Como $\left(P, MNFQ\right) = -1$, y como PM y PN son bisectrices de $\widehat{d,PF}$ y de $\widehat{FPQ}$, son perpendiculares.

F 94- Se da una parábola determinada por su foco F y su directriz d, y un círculo de centro F. Trazar la circunferencia polar recíproca de la parábola con respecto al círculo dado.

Solución:



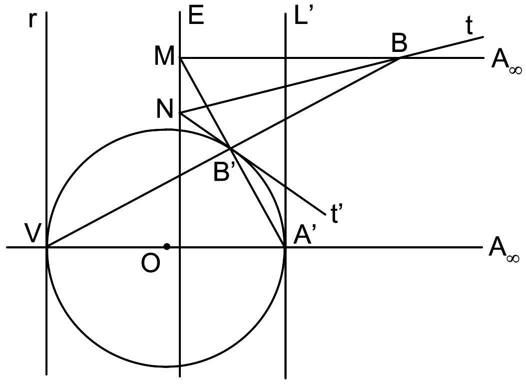
El centro del círculo director es F, y la polar de su centro es d. Por tanto, hallando el polo de d, se obtiene C, centro del círculo pedido. Y como F tiene que estar en este círculo, su radio es CF.

F 95- Demostrar que si en una parábola se conocen tres puntos fijos A, B y C, y otro P variable, las rectas PA y PB cortan al diámetro que pasa por C en A' y B', siendo constante la razón $\dfrac{CA'}{B'C}$.

Solución: Proyectando desde cualquier punto de la curva, los cuatro puntos fijos A, B, C e ∞, se obtiene siempre la misma relación $(ABC\infty)$. Luego cortando el haz $\left(P, ABC\infty\right)$ por el diámetro que pasa por C, se tiene $\left(P, ABC\infty\right) = (A'B'C\infty) = \dfrac{A'C}{B'C}$, que es constante.

F 96- En una parábola se conocen su vértice V, la tangente r en el vértice, y un punto B. Trazar la tangente en dicho punto B.

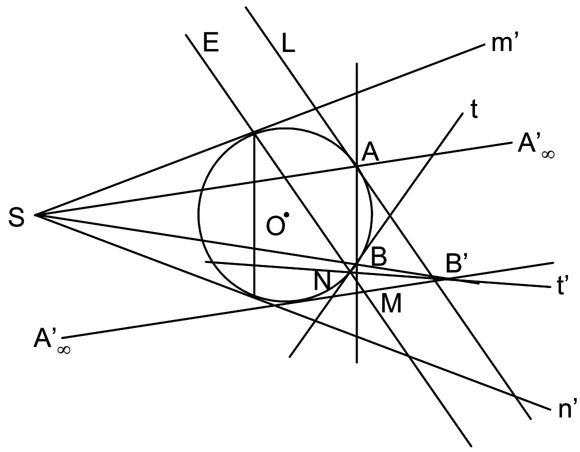
Solución:



Se plantea una homología de centro V, siendo la homóloga de la parábola, una circunferencia O, tangente en V a r. El punto A' está en VOA_∞, que es perpendicular a r. La recta del infinito es tangente a la parábola en A_∞, por lo que la recta límite L' es tangente a O en A'. Las rectas $A_\infty B$ y $A'B'$ determinan M, punto del eje E. La tangente t en B a la parábola, es NB, homóloga de la tangente t' en B' a la circunferencia O.

F 97- En una parábola se conocen dos tangentes m' y n', y dos puntos A'_∞ y B'. Trazar la tangente en B'.

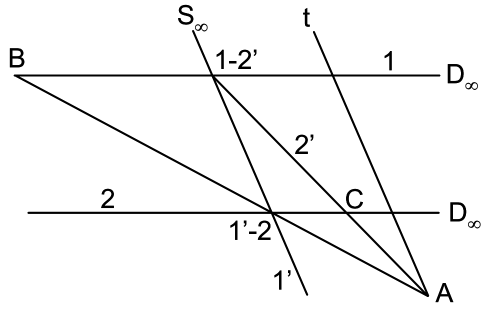
Solución



Se plantea una homología en la que la homóloga de la parábola es una circunferencia O, tangente a m' y n', siendo el centro de la homología S, intersección de m' y n'. El punto A está en la intersección de SA'_∞ con O, y el punto B en la de SB' con O. Como la recta del infinito es tangente a la parábola en A'_∞, la recta límite es la tangente a O en A. El eje E es la paralela a L trazada por M, intersección de AB y $A'_\infty B'$. La tangente en B' es t' (es decir $B'N$, siendo N la intersección de t con E), homóloga de la tangente t en B.

F 98- En una parábola se conocen cuatro puntos A, B, C y D_∞. Trazar la tangente t en A.

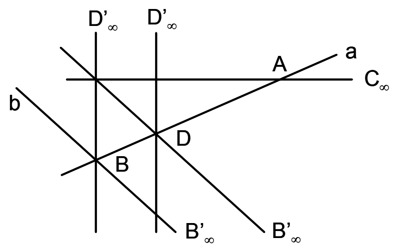
Solución:



La tangente en D_∞ es la recta del infinito. Por tanto, se conocen cuatro puntos y la tangente en uno de ellos. Al tomar *A* y D_∞ como vértices de haces, el centro perspectivo está en el infinito. La tangente *t* pedida es paralela a $1'$.

F 99- En una parábola se conocen dos tangentes, el punto de contacto de una de ellas, y el punto del infinito. Trazar la tangente en el vértice.

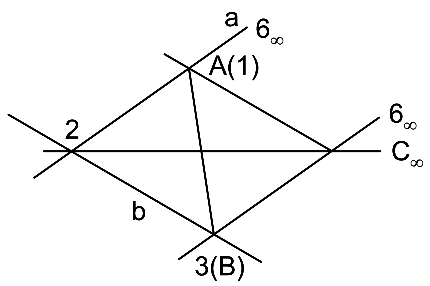
Solución:

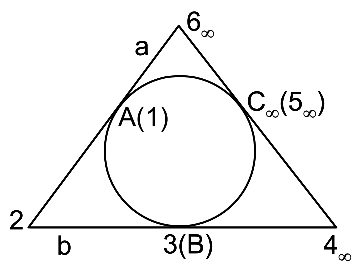


Se conocen tres tangentes: *a*, *b* y la recta del infinito. Y se conocen dos puntos de contacto: *A* de la tangente *a*, y C_∞ de la recta del infinito. Se trata de trazar la tangente desde el punto D'_∞, normal a C_∞ por ser la tangente en el vértice perpendicular al eje. Se toman como bases las dos tangentes, *a* y la recta del infinito, cuyos puntos de contacto se conocen, *A* y C_∞. El eje perspectivo es la recta AC_∞. Basta hallar *D*, homólogo de D'_∞. La recta DD'_∞ es la tangente en el vértice.

F 100- En una parábola se conocen las tangentes *a* y *b*, el punto de contacto *A* de la primera, y el punto C_∞. Hallar el punto de contacto *B* de la tangente *b*.

Solución:

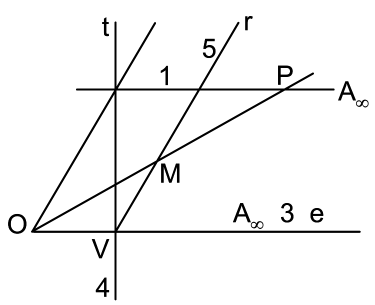


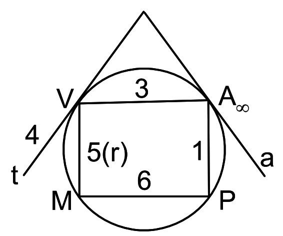


La obtención de *B* se expone en la figura. Se deduce de ella la siguiente propiedad de la parábola: el punto del infinito de una parábola está determinado por la recta que une un punto cualquiera con el punto medio de la recta que une los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde él.

F 101- En una parábola se conocen el eje *e*, el vértice *V*, y un punto *P*. Por *V* se traza una recta *r*. Hallar su intersección con la parábola.

Solución:



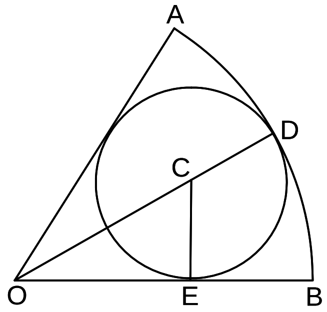


Conociendo *e*, se conoce A_∞ y la tangente en él (la recta del infinito). La tangente en *V* es perpendicular a *e*. Se conocen, por tanto, tres puntos (*V*, A_∞ y *P*) y dos tangentes (la recta del infinito en A_∞, y la perpendicular a *e* por *V*). El punto de intersección pedido es *M*.

Sección G - ÁREAS

G 1- Hallar el área de un sector circular de 60º en el que hay inscrito un círculo de área $\frac{4\pi}{9}$.

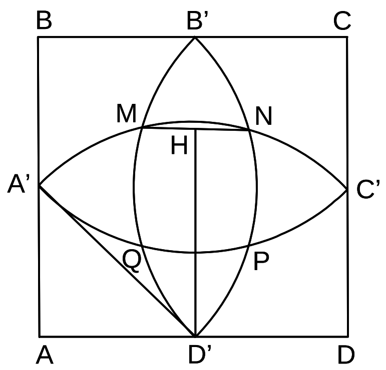
Solución:



Siendo $OA = R$, el área del sector es $S = \frac{\pi R^2 60º}{360º} = \frac{\pi R^2}{6}$. Siendo $CE = r$, el área del círculo es $\pi r^2 = \frac{4\pi}{9}$, de donde $r = \frac{2}{3}$. En el triángulo ODB, se tiene $\sin 30º = \frac{CE}{OC} = \frac{r}{R-r} = \frac{\frac{2}{3}}{R - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$. De donde $R = 2$, y el área pedida es $S = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

G 2- Siendo $A'B'C'D'$ los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$, hallar en función del lado de este, el área del cuadrado curvilíneo dibujado $MNPQ$.

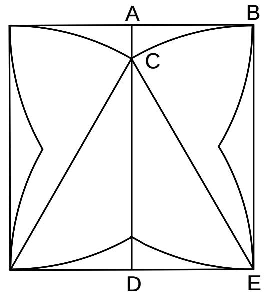
Solución:



Los ángulos en D' valen: $\widehat{AD'A'} = 45º$, $\widehat{A'D'M} = 30º$, $\widehat{MD'B'} = 15º$. El radio $D'A' = r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, siendo $a = AB$. Llamando b a MN, se tiene $\sin 15º = \frac{\frac{b}{2}}{D'M} = \frac{b}{2r} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Luego, $b = a\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Llamando h a la altura $D'H$ trazada desde D' sobre MN, se tiene: $h = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{8}} = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. El área del triángulo $MD'N$ es $\frac{bh}{2} = \frac{a^2}{8} = \frac{r^2}{4}$. El segmento circular limitado por la cuerda MN tiene por área $\frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2}{4} = \frac{r^2(\pi-3)}{12}$. El cuadrado $MNPQ$ tiene por área $b^2 = r^2\left(2-\sqrt{3}\right)$. Luego el área del cuadrado curvilíneo $MNPQ$ es igual a $r^2(2-\sqrt{3}+4\frac{\pi-3}{12}) = r^2\left(1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{6}\left(3-3\sqrt{3}+\pi\right)$.

G 3- Calcular el área de la estrella formada por arcos de un cuadrante, trazados haciendo centro en los vértices de un cuadrado de lado a.

Solución:



$\widehat{BEC} = 30^o$. Área del sector $EBC = \dfrac{\pi a^2 30^o}{360^o} = \dfrac{\pi a^2}{6}$. Área del rectángulo $ABDE = \dfrac{a^2}{2}$.

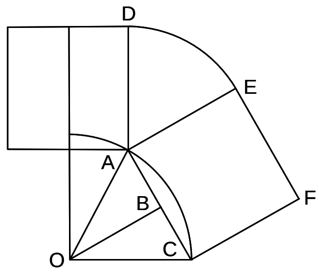
Área del triángulo $CDE = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot a \sin 60^o = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Área del triángulo mixtilíneo $ABC = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{\pi a^2}{12} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a^2\left(12 - 2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{24}$.

Área de la estrella $= a^2 - 8 \cdot \dfrac{a^2\left(12 - 2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{24} = \dfrac{a^2}{3}\left(2\pi + 3\sqrt{3} - 9\right)$.

G 4- Sobre los lados de un exágono regular de lado a, se construyen cuadrados exteriores cuyos vértices se unen mediante arcos de radio a con centro en los vértices del exágono dado. Hallar el área de la figura resultante, en función de a.

Solución:

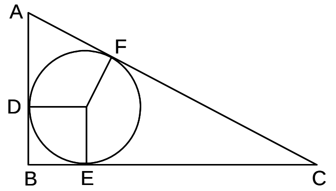


En la figura se ha representado el cuadrante superior derecho. Los vértices del exágono son A y C. Sobre AC se ha construido el cuadrado $ACFE$, cuyo vértice E se ha unido al vértice D mediante el arco DE de centro A y radio $AE = a$. El área pedida corresponde a seis veces el área de $OADEFCO = 6(S_{OAC} + S_{ADE} + S_{ACFE})$.

Como $S_{OAC} = \dfrac{1}{2} a \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{ADE} = \dfrac{\pi a^2 60^o}{360^o} = \dfrac{\pi a^2}{6}$ y $S_{ACEF} = a^2$, el área pedida es $6a^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi}{6} + 1\right) = \dfrac{a^2}{2}\left(3\sqrt{3} + 2\pi + 12\right)$.

G 5- Hallar el área de un triángulo rectángulo, conociendo el radio del círculo inscrito $r = 1$, y la hipotenusa $a = 5$.

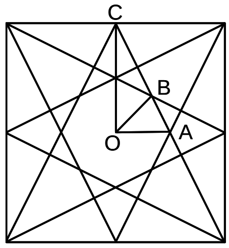
Solución:



Se tiene que $BD = BE = 1$, $AD = AF = x$, $CF = CE = 5 - x$. Luego $(x+1)^2 + (6-x)^2 = 25$. De donde $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. El área pedida es $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

G 6- Se da un cuadrado de lado a y se unen los puntos medios de cada lado con los vértices del lado opuesto, formando estas rectas al cortarse, un octógono convexo cuya área se pide.

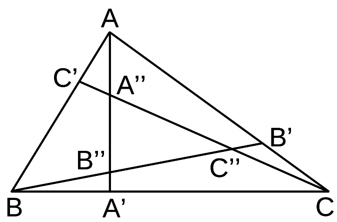
Solución:



El octógono está formado por ocho triángulos OAB. Se tiene $OA = \dfrac{a}{4}$, $\widehat{AOB} = 45º$, $\tan\widehat{OAB} = \dfrac{OC}{OA} = 2$, $\sin\widehat{OAB} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\widehat{OBA} = \sin\left(180º - 45º - \widehat{OAB}\right) = \sin\left(135º - \widehat{OAB}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. En el triángulo OAB, se tiene: $\dfrac{OA}{\sin\widehat{OBA}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}} = \dfrac{OB}{\sin\widehat{OAB}}$. De donde $AB = \dfrac{a\sqrt{5}}{12}$, $OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$,
$S_{OAB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot OA \cdot \sin\widehat{OAB} = \dfrac{a^2}{48}$. El área del octógono es $\dfrac{a^2}{6}$.

G 7- Dado un triángulo ABC, se toman sobre los lados los puntos A', B' y C', de forma que $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{m}{n}$. Se unen AA', BB' y CC'. Calcular el área S' de un triángulo cuyos lados sean iguales a estas tres rectas, en función del área S del triángulo ABC. Sean A'', B'' y C'' las intersecciones de las rectas AA', BB' y CC'. Calcular el área S'' del triángulo $A''B''C''$, en función de S.

Solución:



Sean a, b y c los lados del triángulo ABC, y sean $a' = AA'$, $b' = BB'$ y $c' = CC'$. Se tiene $a'^2 = \dfrac{m^2}{(m+n)^2}a^2 + c^2 - \dfrac{2mac\cos B}{m+n}$. Como $-2ac\cos B = b^2 - a^2 - c^2$, se tiene que:

$a'^2(m+n)^2 = m^2a^2 + c^2(m+n)^2 + m(b^2 - a^2 - c^2)(m+n) = -mna^2 + m(m+n)b^2 + n(m+n)c^2$.

Obteniendo las expresiones análogas para b' y c', y sumándolas, se tiene:

$(m+n)^2(a'^2 + b'^2 + c'^2) = \left[(m+n)^2 - mn\right](a^2 + b^2 + c^2)$, es decir:

$\dfrac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \dfrac{m^2 + mn + n^2}{(m+n)^2}$. Como $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, sustituyendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ y operando, se tiene: $16S^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)$. Análogamente:

$$S'^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)^2 - 2(a'^4 + b'^4 + c'^4) = \left(\frac{m^2 + mn + n^2}{(m+n)^2}\right)^2\left[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)\right]$$

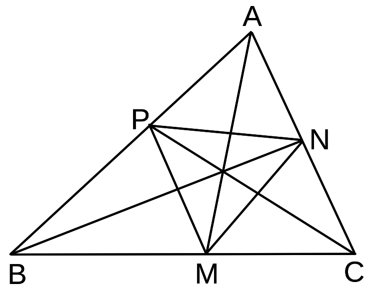
Luego, $S' = \dfrac{m^2 + mn + n^2}{(m+n)^2}S$. Por otra parte se tiene que $\dfrac{AB''}{AC''} = \dfrac{m}{n}$, $\dfrac{A'B''}{A'C''} = \dfrac{n^2}{m^2}$, $\dfrac{B''C''}{a'} = \dfrac{n^2 - m^2}{m^2 + mn + n^2}$.

Luego: $\dfrac{S''}{S'} \cdot \dfrac{S'}{S} = \left(\dfrac{n^2 - m^2}{m^2 + mn + n^2}\right)^2\left(\dfrac{m^2 + mn + n^2}{(m+n)^2}\right) = \dfrac{(n-m)^2}{m^2 + mn + n^2}$.

Por tanto: $S'' = \dfrac{(n-m)^2}{m^2 + mn + n^2}S$.

G 8- Hallar el área del triángulo que tiene por vértices los pies de las bisectrices interiores del triángulo ABC, cuyos lados son a, b y c.

Solución:



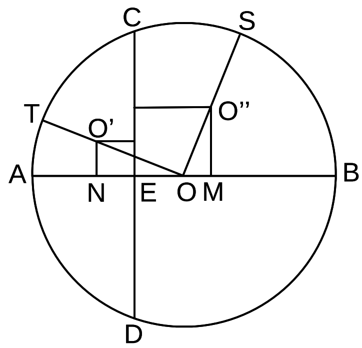
Se tienen las siguientes igualdades: $S = S_{ABC}$, $\sum = S_{MNP}$, $S_1 = S_{APN}$, $S_2 = S_{BPM}$, $S_3 = S_{CMN}$, $MC = \frac{ab}{b+c}$, $MB = \frac{ac}{b+c}$, $PA = \frac{bc}{a+b}$, $PB = \frac{ac}{a+b}$, $NC = \frac{ab}{a+c}$, $NA = \frac{bc}{a+c}$, $\sum = S - S_1 - S_2 - S_3$, $\frac{\sum}{S} = 1 - \frac{S_1}{S} - \frac{S_2}{S} - \frac{S_3}{S}$, $\frac{S_1}{S} = \frac{BM \cdot BP}{BC \cdot BA} = \frac{ac}{(b+c)(a+b)}$. Se obtienen expresiones análogas para S_2 y S_3. De donde:

$$\frac{\sum}{S} = 1 - \frac{ac}{(b+c)(a+b)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Por tanto el área pedida es: $\sum = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} S$.

G 9- Se da un círculo O, un diámetro AOB, y una cuerda CD perpendicular al diámetro. Calcular el área de los círculos inscritos en las cuatro regiones definidas en el círculo, sabiendo que $AB = 10$ y $CD = 6$ (ver problema E 22)

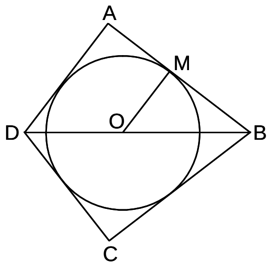
Solución:



$CE^2 = AE \cdot EB$, es decir, $9 = AE(10 - AE)$, $AE = 1$, $EB = 9$. Sean O y O' los centros de los círculos inscritos en el semicírculo superior, sean T y S sus puntos de tangencia con O y sean sus radios $r' = O'T = O'N = NE$, y $r'' = O''S = O''M = ME$. Se tiene $OT = 5$, $O'O = 5 - r'$, $O'N = r'$, $EO = AO - AE = 4$. Luego en el triángulo $OO'N$, se tiene $(5 - r')^2 = r'^2 + (r' + 4)^2$, de donde $r' = 3\sqrt{10} - 9$. Se tiene $OS = 5$, $OO'' = 5 - r''$, $O''M = r''$, $EO = AO - AE = 4$, $OM = r'' - 4$. En el triángulo $OO''M$, se tiene $(5 - r'')^2 = r''^2 + (r'' - 4)^2$, de donde $r'' = \sqrt{10} - 1$. Por tanto el área del círculo O' es: $\pi\left(3\sqrt{10} - 9\right)^2 = 9\pi\left(19 - 6\sqrt{10}\right)$. Y el área del círculo O'' es: $\pi\left(\sqrt{10} - 1\right)^2 = \pi\left(11 - 2\sqrt{10}\right)$.

G 10- Calcular el área de un cuadrilátero $ABCD$ circunscrito a una circunferencia de radio 5, sabiendo que los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ son rectos, y que la diagonal $BD = 15$.

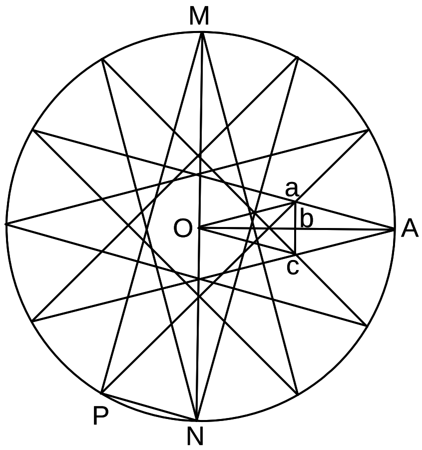
Solución:



Sea S el área pedida, p el semiperímetro del cuadrilátero, $a = AD$, $b = AB$, r el radio OM, se tiene: $p = a + b$, $S = pr = 5p = ab$, $a^2 + b^2 = 225 = (a+b)^2 - 2ab = p^2 - 2S = \frac{S^2}{25} - 2S = 225$. De donde $S = 25\left(1 + \sqrt{10}\right)$.

G 11- Hallar el lado y el área del dodecágono estrellado

Solución:

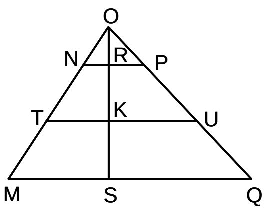


En el triángulo rectángulo MNP, se tiene $MN = 2R$, $NP = l_{12}$, lado del dodecágono regular convexo que mide $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, y $MP = l'_{12}$, lado del dodecágono estrellado.

Luego, $l'_{12} = \sqrt{4R^2 - l_{12}^2} = \frac{R\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{2}$. En el paralelogramo $OaAc$, se tiene: $\widehat{aOc} = 30º$, $\widehat{aOb} = 15º$, $\tan 15º = \frac{ab}{Ob} = \frac{2 \cdot ab}{R}$, $ab = \frac{R \tan 15º}{2} = \frac{R\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2}$. Por tanto, $S_{OaA} = \frac{R^2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{4}$, y el área del dodecágono estrellado es: $S'_{12} = 24 \cdot S_{OaA} = 6R^2\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

G 12- Dividir un trapecio en dos partes equivalentes por una recta paralela a las bases

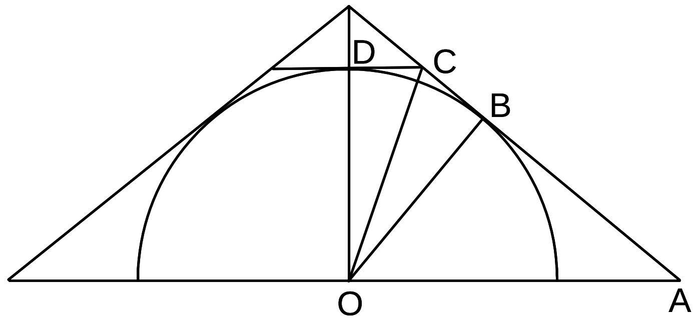
Solución:



Sea el trapecio $NPQM$. Se prolongan sus lados oblicuos hasta su intersección en O. teniéndose que $B = MQ$, $b = NP$, $H = OS$, $h = OR$. Luego $S_{OMQ} = k \cdot OS^2 = k \cdot H^2$, $S_{ONP} = k \cdot OR^2 = k \cdot h^2$, $S_{OTU} = k \cdot OK^2$. Como $S_{OMQ} - S_{OTU} = S_{OTU} - S_{ONP}$, se tiene $OK = \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{2}}$, o bien $TU = \sqrt{\frac{B^2 + b^2}{2}}$.

G 13- La base menor y los lados no paralelos de un trapecio isósceles, son tangentes a un semicírculo de radio a, cuyo centro es el punto medio de la base mayor. Hallar en función de los ángulos del trapecio, su área, y calcular dichos ángulos en el caso en que el trapecio sea equivalente a un cuadrado de lado $2a$.

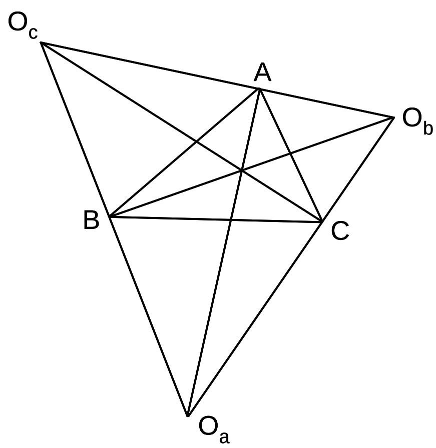
Solución:



El área del trapecio es el doble del área del cuadrilátero $OACD$. Luego, siendo $\alpha = \widehat{OAB}$, su área es $S = 2 \cdot S_{OBA} + 4 \cdot S_{OCB} = 2 \cdot \dfrac{a^2}{2\tan\alpha} + 4 \cdot \dfrac{a^2 \tan\frac{\alpha}{2}}{2} = a^2\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} + 2\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Para $S = 4a^2$, se tiene la ecuación $3\tan^2\dfrac{\alpha}{2} - 8\tan\dfrac{\alpha}{2} + 1 = 0$, cuyas raíces dan $\alpha_1 = 14º58'51''$ y $\alpha_2 = 43º03'17''$. Los correspondientes valores del ángulo $\widehat{C}$ son los suplementarios del ángulo $\widehat{A}$.

G 14- Calcular el área del triángulo formado por los exincentros de un triángulo ABC, en función de los lados a, b y c, de este.

Solución:



El área pedida es $\sum = S_{ABC} + S_{BCO_a} + S_{CAO_b} + S_{ABO_c} = S_{ABC} + \dfrac{a \cdot r_a}{2} + \dfrac{b \cdot r_b}{2} + \dfrac{c \cdot r_c}{2} =$ $= S_{ABC} + \dfrac{a \cdot S_{ABC}}{2(p-a)} + \dfrac{b \cdot S_{ABC}}{2(p-b)} + \dfrac{c \cdot S_{ABC}}{2(p-c)} = S_{ABC}\left[1 + \dfrac{a}{2(p-a)} + \dfrac{b}{2(p-b)} + \dfrac{c}{2(p-c)}\right] =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\left[1 + \dfrac{a}{2(p-a)} + \dfrac{b}{2(p-b)} + \dfrac{c}{2(p-c)}\right]$, donde p es el semiperímetro $\dfrac{a+b+c}{2}$ del ABC.

G 15- Si se hace rodar sobre una recta un polígono regular de n lados, determinar el camino recorrido por cada vértice durante una revolución completa y calcular la suma de las áreas de los sectores circulares barridos por los radios de giro de cada vértice.

Solución: Siendo R el radio del círculo circunscrito, el lado es $l=2R\sin\frac{\pi}{n}$, y la diagonal $d_j=2R\sin\frac{(j+1)\pi}{n}$. Luego el recorrido de un vértice es:

$$2\frac{\pi}{n}2R\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]=\frac{4\pi R}{n}S,\text{ siendo } S=\sum_{j=1}^{n-1}\sin\frac{\pi j}{n}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{2n}}{-2\sin\frac{\pi}{2n}}.\text{ Por tanto el recorrido es:}$$

$$\frac{4\pi R}{n}\cdot\frac{\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{2n}}{-2\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{2\pi R}{n}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right]=\frac{2\pi R}{n}\cdot\frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=$$

El área pedida es:

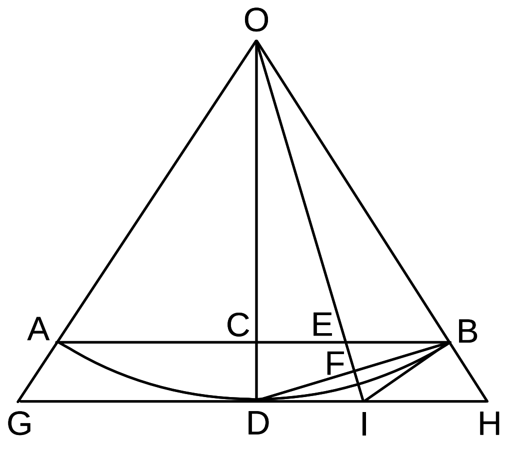
$$\frac{4\pi R^2}{n}\left[\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right]=\frac{4\pi R^2}{n}\left[\frac{2n-1}{4}-\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right]=$$

$$=\frac{\pi R^2}{n}\left[2n-1-\frac{-\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]=2\pi R^2.$$

Nota: Para calcular $S=\sum_{j=1}^{n-1}\sin\frac{\pi j}{n}$, se le suma $iC=i\sum_{j=1}^{n-1}\cos\frac{\pi j}{n}$, obteniéndose $S+iC=\sum e^{\frac{\pi ji}{n}}$. Calculada esta suma, se separa la parte real y la imaginaria (ver como ejemplo el problema O 23 de mi libro *Problemas de Matemáticas*).

G 16- Dadas las áreas a y A de dos polígonos regulares semejantes, uno inscrito y el otro circunscrito a un mismo círculo, hallar las áreas a' y A' de los polígonos regulares, inscrito y circunscrito al mismo círculo, de doble número de lados.

Solución:

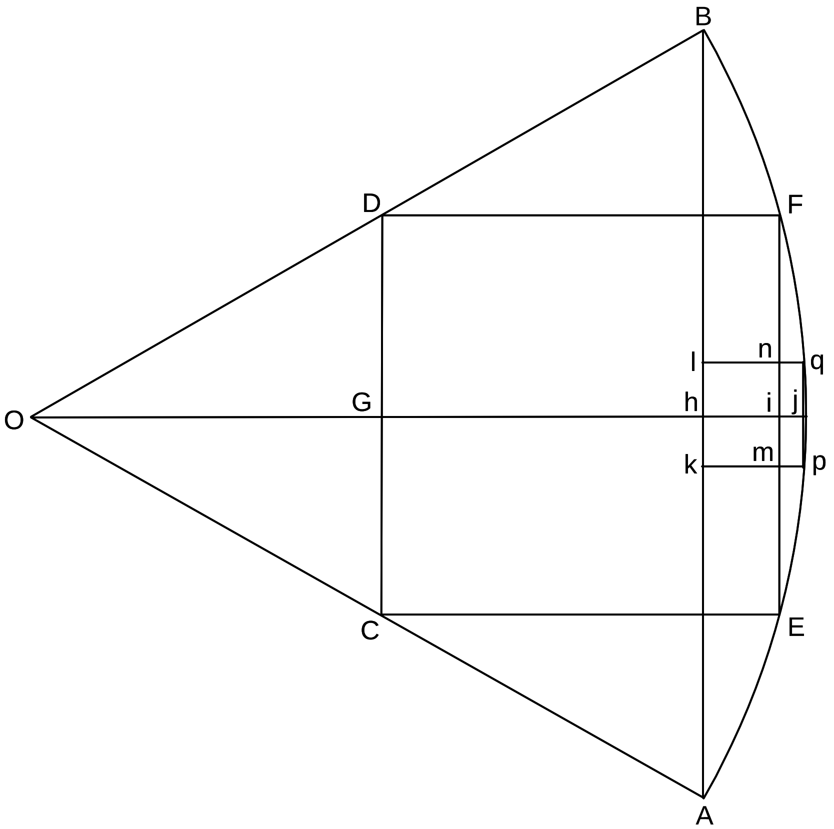


Siendo $a=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$, $A=nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$, se tiene que: $a'=nR^2\sin\frac{\pi}{n}=\sqrt{aA}$,

$$A'=A\sqrt{\frac{a}{A-a}}\,2\tan\frac{\pi}{2n}=2A\sqrt{\frac{a}{A-a}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{a}{A}}}{1+\sqrt{\frac{a}{A}}}}=\frac{2A\sqrt{a}}{A-a}\left(\sqrt{A}-\sqrt{a}\right)=\frac{2Aa}{a+\sqrt{Aa}}.$$

G 17- Calcular en función del radio, el área de la parte común de los cuadrados inscritos en un sector de 60º y en el segmento correspondiente.

Solución:

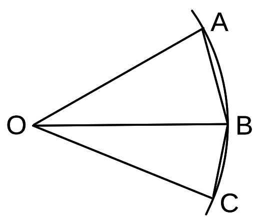


El cuadrado inscrito en el sector es *CDEF*, el inscrito en el segmento es *klpq*, siendo la parte común *klmn*. De las igualdades $CD = 2a$, $kl = 2b$, $OG = \dfrac{a}{\tan 30º} = a\sqrt{3}$, $OF^2 = R^2 = Oi^2 + iF^2 =$ $= (OG + 2a)^2 + a^2$, se obtiene: $a = \dfrac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $Oh = R\cos 30º = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, $Oq^2 = R^2 = Oj^2 + jq^2 = = (Oh + 2b)^2 + b^2$, donde j es el punto medio de la cuerda pq. Luego $b = \dfrac{R\left(\sqrt{17} - 2\sqrt{3}\right)}{10}$, $hi = OG + Gi - Oh = a\sqrt{3} + 2a - \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)}{2}$. Por tanto, el área pedida es:

$$2b \cdot hi = 2R^2 \frac{\left(\sqrt{17} - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)}{20} = \frac{R^2}{20}\left(\sqrt{17} - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right).$$

G 18- Calcular uno de los lados de un dodecágono semirregular equiángulo inscrito en una circunferencia de radio 3, midiendo el otro lado 1, y hallar su área.

Solución:



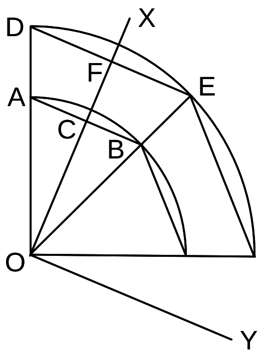
De las igualdades $OA = 3$, $AB = x$, $BC = 1$, $\widehat{AOB} = \alpha$, $\widehat{BOC} = \beta$, $\widehat{AOC} = 60º$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{x}{6}$, $\sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{6}$, $\sin\left(30º - \dfrac{\beta}{2}\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, se obtiene $x = BC = \dfrac{\sqrt{35} - \sqrt{3}}{2}$. El área pedida es igual a

$6(S_{AOB}+S_{BOC})$. Como $S_{AOB} = \dfrac{\sqrt{35}-\sqrt{3}}{4}\sqrt{\left[3^2-\left(\dfrac{\sqrt{35}-\sqrt{3}}{4}\right)^2\right]} = \dfrac{\sqrt{35}-\sqrt{3}}{8}\sqrt{\dfrac{53+\sqrt{105}}{2}}$ y $S_{BOC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3^2-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{35}}{4}$, el área pedida es:

$$6\left[\frac{\sqrt{35}-\sqrt{3}}{8}\sqrt{\frac{53+\sqrt{105}}{2}}+\frac{\sqrt{35}}{4}\right] = \frac{3}{4}\left(17\sqrt{3}+\sqrt{35}\right).$$

G 19- Dos octógonos regulares convexos están colocados de modo que coinciden sus centros y que cada lado de uno de ellos tiene su correspondiente lado paralelo en el otro. Trazando dos ejes de simetría perpendiculares entre sí, comunes a ambos polígonos, pasando cada uno de ellos por los puntos medios de los lados, se comprueba que en uno de los octógonos, la suma de las distancias desde un vértice cualquiera a los dos ejes de simetría trazados, es constante e igual a 3, mientras que en el otro octógono la diferencia de distancias a los ejes citados, es constante e igual a 3. Con estos datos, hallar el área de la superficie comprendida entre los dos polígonos.

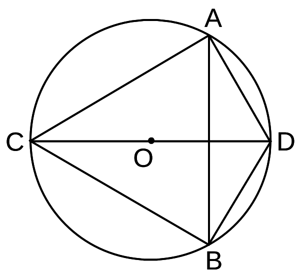
Solución:



Sean los ejes de simetría OX y OY. En el octógono menor, sea el lado $AB = x$ y la apotema $a = OC$. En el octógono mayor, el lado $DE = y$, siendo la apotema $b = OF$. Se tiene, en el menor, $a+\dfrac{x}{2} = 3$. Y en el mayor, $b-\dfrac{y}{2} = 3$. Siendo $x = 2a\left(\sqrt{2}-1\right)$, $y = 2b\left(\sqrt{2}-1\right)$, se obtiene: $a = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $b = \dfrac{3\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$. Luego el área pedida es $\dfrac{8yb}{2}-\dfrac{8xa}{2} = 72$.

G 20- En una circunferencia de radio R se considera un diámetro CD y una de las cuerdas AB perpendicular a él. Calcular el máximo de la diferencia de las áreas de los dos triángulos que tienen la cuerda por base, y por vértices los extremos del diámetro, y calcular esta diferencia para el caso en que $R = 2\sqrt{58}$.

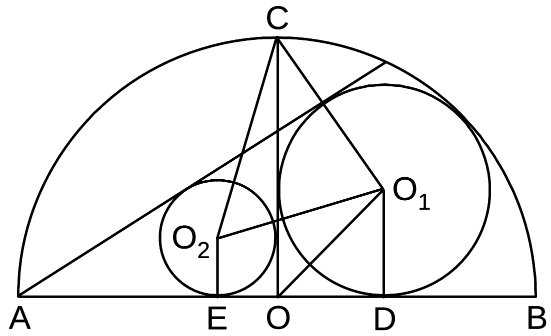
Solución:



Los triángulos son ABC y ABD. Siendo $AB = 2a$, se tiene $S_{ABC} = a\left(R+\sqrt{R^2-a^2}\right)$ y $S_{ABD} = a\left(R-\sqrt{R^2-a^2}\right)$. La diferencia de las áreas es $\Delta = 2a\sqrt{R^2-a^2}$, de donde $4a^4-4R^2a^2+\Delta^2 = 0$, luego $a^2 = \dfrac{R^2\pm\sqrt{R^4-\Delta^2}}{2}$. El mayor valor que puede tomar Δ corresponde a: $R^4-\Delta^2 = 0$. Es decir, $\Delta = R^2$. Para $R = 2\sqrt{58}$, $\Delta = 232$.

G 21- En una semicircunferencia de radio R, se traza el radio OC perpendicular al diámetro AB. Se inscribe en uno de los cuadrantes, la circunferencia O_1. Desde el otro extremo A del diámetro, se traza una tangente a esta circunferencia y en el ángulo que se forma, se inscribe una nueva circunferencia O_2, tangente al radio OC. Hallar el área del triángulo que se forma uniendo los centros de estas dos circunferencias entre sí y con C, extremo del radio perpendicular.

Solución:



En el triángulo rectángulo OO_1D, se tiene $(R-r_1)^2 = r_1^2 + r_1^2$, de donde el radio $r_1$de O_1 es $R\left(\sqrt{2}-1\right)$. En los triángulos semejantes AO_2E y AO_1D, se tiene, siendo r_2 el radio de O_2:

$\frac{r_2}{r_1} = \frac{AE}{AD} = \frac{R-\sqrt{2}}{R+r_1}$, de donde $r_2 = \frac{3-\sqrt{2}}{7}R$.

Como $O_1C = \sqrt{(R-r_1)^2 + r_1^2} = R\sqrt{9-6\sqrt{2}} = 0,717439R$,

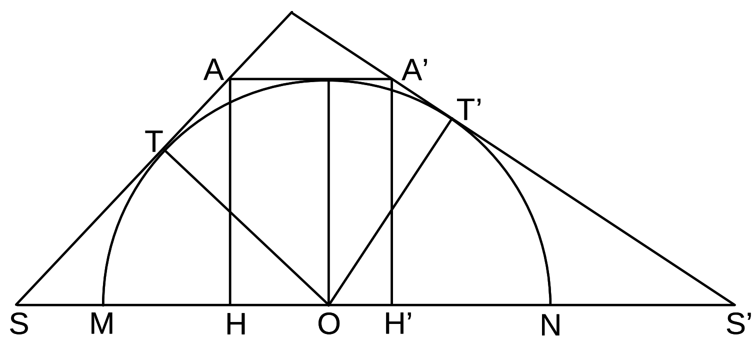
$O_2C = \sqrt{(R-r_2)^2 + r_2^2} = \frac{R\sqrt{29+2\sqrt{2}}}{7} = 0,805953R$,

se tiene: $O_1O_2 = \sqrt{(r_1+r_2)^2 + (r_1-r_2)^2} = \frac{4R\sqrt{20-13\sqrt{2}}}{7} = 0,726237R$.

Aplicando la fórmula $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, se obtiene $S = 0,241321R^2$.

G 22- Dada una circunferencia de radio R y una tangente paralela al diámetro MN, se toma sobre este y en sentidos opuestos, dos longitudes OS y OS'. Por S y S' se trazan las tangentes que encuentran en A y en A', respectivamente, a la tangente paralela a MN. Calcular en función de R y de los ángulos $\alpha = \widehat{OSA}$ y $\beta = \widehat{OS'A'}$, la superficie del trapecio $ASS'A'$.

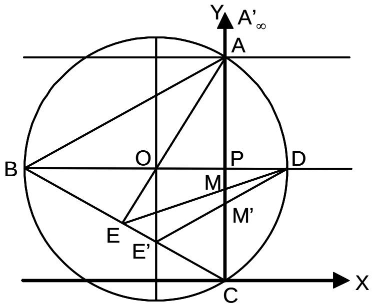
Solución:



Los triángulos rectángulos OST y SAH son iguales, luego $OS = SA$ (análogamente $OS' = S'A'$). Siendo $OS = a$ y $OS' = b$, se tiene que $AA' = a+b-a\cos\alpha - b\cos\beta$. La superficie pedida es: $S = \frac{AH \cdot (AA' + SS')}{2} = R\left(a+b+\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{2}\right)$. Como $R = a\sin\alpha = b\sin\beta$, se tiene que: $S = \frac{R^2}{2}\left(\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{2-\cos\beta}{\sin\beta}\right)$.

G 23- Se da un triángulo equilátero ABC de lado $8\sqrt{3}$. Se traza la altura referente al vértice B, y se toma sobre ella y a partir del punto P de intersección con AC y hacia el exterior, una magnitud $PD = 4$. Se une D con E (punto medio de BC), y la recta DE corta al lado AC en M. Se define una homología en la que el punto C es el centro, DB el eje, y A es un punto de la recta límite de la primera figura. 1º) Hallar el homológico del cuadrilátero $BEMP$. 2º) Hallar el área común a los dos cuadriláteros homológicos $BEMP$ y $B'E'M'P'$. 3º) Realizar la comprobación analítica.

Solución:



1º) El homólogo de A es A'_∞. La recta AE corta al eje en O. La paralela por O a AC, define el punto E' sobre BC. La recta DE' corta en M' a AC. $BO = R = 8$. $BP^2 = 64 \cdot 3 - 16 \cdot 3 = 144$, luego $BP = 12$. $PD = 4$. Como $B' \equiv B$ y $P' \equiv P$, el cuadrilátero homológico $B'E'M'P'$ ya está determinado. 2º) El área pedida coincide con la del cuadrilátero $BEMP = S_{BDE} - S_{PDM}$. Cortando el triángulo BPC por la transversal DE, se tiene: $\frac{DP}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{MC}{MP} = 1$. Y como $EB = EC$ y $\frac{DP}{DB} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, $MC = 4 \cdot MP$, $MP = \frac{PC}{5} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$. Por tanto, $S = \frac{1}{2} BD \cdot BE \cdot \sin\widehat{PBC} - \frac{1}{2} MP \cdot MD =$

$= 16 \cdot 4\sqrt{3} \sin 30º - \frac{1}{2} 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{72\sqrt{3}}{5} = 24{,}94$. 3º) La ecuación de la homología es: $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{t'}{ax + by + ct}$. El eje es $x' = x, y' = y$, luego $ax + by + ct = t'$. Es decir: $ax + by + c - 1 \equiv y - 4\sqrt{3}$. De donde $a = 0$, $\frac{c-1}{b} = -4\sqrt{3}$, $c = -4\sqrt{3}\,b + 1$. Como la recta límite de la primera figura es $by + ct = y - 8\sqrt{3} = 0$, se obtiene $\frac{c}{b} = -8\sqrt{3}$, $-8\sqrt{3}\,b = -4\sqrt{3}\,b + 1$, $b = \frac{-1}{4\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{12}$, $c = -8\sqrt{3} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{12} = 2$. Por tanto, la ecuación de la homología es:
$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{12}y + 2}$. De donde $x' = \frac{x}{\frac{-\sqrt{3}}{10}y + 2}$, $y' = \frac{y}{\frac{-\sqrt{3}}{10}y + 2}$. Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $BEMP$ son: $B(-12, 4\sqrt{3})$, $E\left(-6, 2\sqrt{3}\right)$, $M\left(0, \frac{16\sqrt{3}}{5}\right)$, $P\left(0, 4\sqrt{3}\right)$. Aplicando la ecuación de la homología, se obtiene: $B'\left(-12, 4\sqrt{3}\right)$, $E'\left(-4, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $M'\left(0, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$, $P'\left(0, 4\sqrt{3}\right)$. Siendo las coordenadas de D $\left(4, 4\sqrt{3}\right)$, la superficie buscada es:

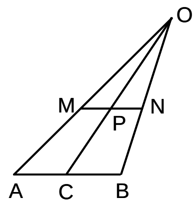
$$S_{BEMP} = S_{BED} - S_{PMD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -12 & 4\sqrt{3} & 1 \\ -6 & 2\sqrt{3} & 1 \\ 4 & 4\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4\sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{16\sqrt{3}}{5} & 1 \\ 4 & 4\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{72\sqrt{3}}{5}.$$

Problemas de Geometría del Espacio

Sección H - LUGARES GEOMÉTRICOS

H 1- Se da una circunferencia C y un punto O fuera de su plano. Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen en una relación dada, a los segmentos limitados por el punto O y los puntos de la circunferencia.

Solución:



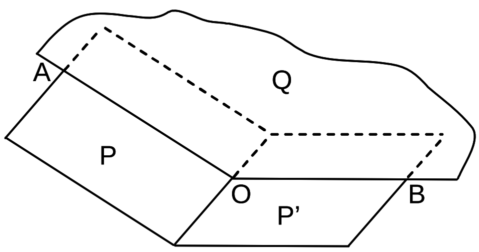
Se corta el cono formado por el punto O y la circunferencia C, por un plano que pasa por la recta OC, siendo C el centro de la circunferencia dada. Dicho plano corta a la circunferencia según un diámetro AB. Se tiene $\frac{OM}{OA} = \frac{OP}{OC} = \frac{ON}{OB} = k$, luego los puntos M, P y N están sobre un plano paralelo al dado en el que se encuentra la circunferencia dada. Como $\frac{PM}{CA} = \frac{PN}{CB}$, siendo $CA = CB$, se tiene que $PM = PN$, luego el lugar geométrico pedido es una circunferencia de centro P y radio PM, situada en un plano paralelo al dado. La relación de distancias de O a ambos planos, es la relación dada.

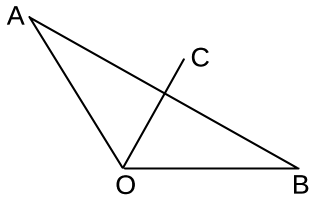
H 2- Hallar el lugar geométrico de los puntos P de un plano, desde los que se ve bajo un ángulo recto, un segmento de recta AB no situado en dicho plano.

Solución: El lugar geométrico de los puntos desde los que se ve el segmento dado bajo un ángulo recto, es una esfera de centro O, punto medio de AB, y radio $OA = OB$. Al estar el punto P en un plano dado, el lugar geométrico pedido es la circunferencia intersección de la esfera anterior por el citado plano. Si el plano es tangente a la esfera, el lugar es el punto de tangencia. Y si el plano no corta a la esfera, no existe el lugar pedido.

H 3- Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos planos dados, es constante.

Solución:

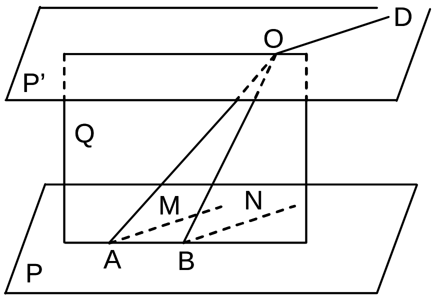




Sean P y P' los planos dados. Trabajando en el plano Q, perpendicular a los dos dados, el lugar geométrico (figura de la derecha), es una recta AB perpendicular a la bisectriz OC del ángulo intersección de los tres planos. Luego el lugar geométrico pedido es un plano perpendicular al plano bisector del diedro formado por los dos planos dados.

H 4- Se dan sobre un plano P, dos puntos A y B, y se da un punto O exterior a dicho plano. Hallar el lugar geométrico de las rectas OD intersección de los dos planos M y N, que pasando respectivamente por OA y OB, cortan al plano P según dos rectas paralelas.

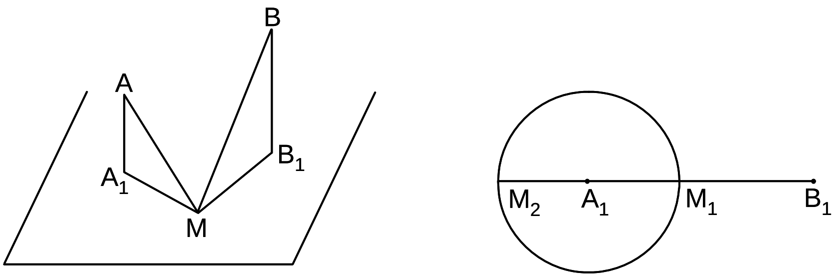
Solución:



Las rectas intersección OD de los dos planos M y N con el plano P', paralelo al P pasando por O, están situadas en dicho plano P', luego el lugar pedido es este plano P'.

H 5- Hallar el lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que las rectas que los unen a dos puntos dados A y B exteriores a dicho plano, están igualmente inclinadas con relación al citado plano.

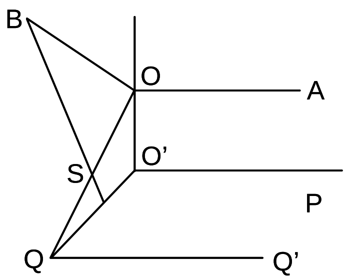
Solución:



Sean A_1 y B_1 las proyecciones de A y B sobre el plano dado, siendo a y b sus cotas AA_1 y BB_1. Siendo M un punto del lugar, los triángulos AMA_1 y BMB_1 son semejantes, luego $\dfrac{A_1M}{B_1M} = \dfrac{a}{b}$, por lo que en el plano dado el lugar es una circunferencia de diámetro M_1M_2, siendo estos puntos los que dividen el segmento A_1B_1 en la relación $\dfrac{a}{b}$.

H 6- Dado un ángulo recto AOB, que tiene el lado OA paralelo a un plano P dado, hallar el lugar geométrico de los puntos S, tales que los planos SOA y SOB cortan al plano P según dos rectas perpendiculares.

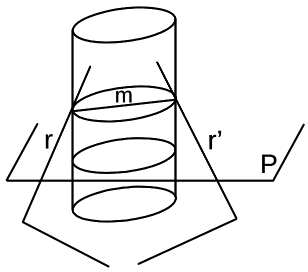
Solución:



El lado OB está en el plano perpendicular a OA por O. Cualquier plano SOA corta al plano P según una paralela a OA. El plano SOB corta al plano P según una recta perpendicular a QQ', es decir paralela a $O'Q$. Luego S debe estar sobre el plano perpendicular a OA en O, que es su lugar geométrico.

H 7- Por dos rectas fijas r y r' del espacio, se hacen pasar planos perpendiculares entre sí. Hallar el lugar geométrico de los puntos en que la recta intersección de estos planos, corta a un plano fijo perpendicular a una de las rectas dadas.

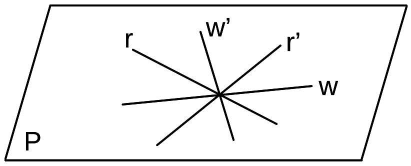
Solución:



Sea m la perpendicular común a r y r'. La recta intersección de dichos planos perpendiculares entre sí, forma una superficie cilíndrica, pues un punto de ella que esté en el plano perpendicular a r y r' conteniendo a m, está en el arco capaz de 90º sobre m. Luego el lugar pedido es la intersección de la superficie cilíndrica con el plano dado P. Como este plano es perpendicular a una de las dos rectas dadas, la intersección es una circunferencia.

H 8- Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos rectas concurrentes.

Solución:



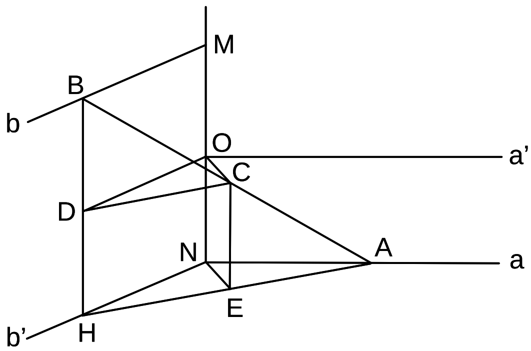
En el plano P formado por las dos rectas r y r', se trazan las bisectrices w y w'. Levantando por w y w' planos perpendiculares al formado por r y r', se obtiene el lugar pedido.

H 9- Hallar el lugar geométrico de las rectas que, pasando por un punto dado, forman ángulos iguales con dos rectas no coplanarias.

Solución: Se trazan los dos planos que pasando por cada recta, pasan por el punto dado. El lugar geométrico pedido lo forman los planos bisectores de estos dos.

H 10- Hallar el lugar geométrico del punto medio de un segmento AB de longitud constante cuyos extremos se deslizan por dos rectas ortogonales a y b que se cruzan.

Solución:



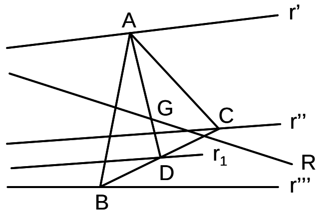
MN es la perpendicular común de a y b, cuyo punto medio es O. Trazando por N la paralela b' a b, se tiene el plano ANH, siendo H la proyección de B sobre este plano. El plano paralelo al ANH por O, contiene a C y a D, puntos medios de AB y BH. Siendo $\widehat{BHA} = 90º$, se tiene $HA^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - MN^2$, por lo que HA es constante. En el triángulo ANH, el punto E, proyección de C, es punto medio de HA, luego $NE = \dfrac{HA}{2}$, describiendo E la circunferencia de centro N y radio NE. Por tanto C describe una circunferencia de centro O y radio $OC = NE$, situada en el plano perpendicular a MN en su punto medio O.

H 11- Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que son paralelos a un plano dado, y cuyos extremos se deslizan sobre dos rectas que se cruzan.

Solución: Sea P el plano dado, y a y b las rectas dadas. Un plano P, paralelo al dado, corta a a en A, y a b en B, siendo M el punto medio de AB. Por M se trazan las paralelas a' y b' a las rectas dadas. El plano P', paralelo al dado, corta a las rectas dadas en A', B' y a dichas paralelas en A'_1 y B'_1. El punto M' es el punto medio de $A'B'$, y como $A'A'_1 = AM$, y $B'B'_1 = BM$, resulta que M' es el punto medio de $A'_1B'_1$. Luego el lugar pedido es una recta situada en el plano formado por las rectas a' y b'.

H 12- Hallar el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos que resultan al cortar tres rectas que se cruzan dos a dos, por un plano paralelo a uno dado.

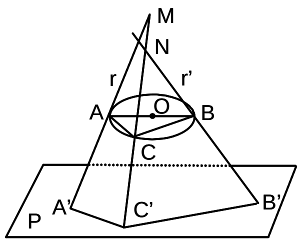
Solución:



Sea un plano paralelo al dado, que corta a las rectas dadas r', r'' y r''', en A, B y C. El lugar geométrico del punto medio D de los segmentos paralelos a BC, que se apoyan en r'' y r''', es la recta r_1 (ver el problema H 11). El lugar geométrico de los puntos G, de los segmentos paralelos a AD, que se apoyan en las rectas r' y r_1, de forma que $\dfrac{GA}{GD} = 2$, es la recta R.

H 13- Se dan dos rectas r y r' que se cruzan. La primera pasa por el punto A, y la segunda por el B, siendo estos dos puntos diametralmente opuestos en un círculo O dado. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección con un plano paralelo al plano del círculo dado O, de las rectas que se apoyan en las dos rectas dadas y en la circunferencia.

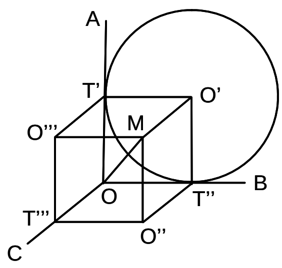
Solución:



Sea P el plano paralelo al de O. La recta r que pasa por A, corta a P en A'. La recta r' que pasa por B, corta a P en B'. Sea la recta MNC, que corta en M a r, en N a r', y en C a O, y que corta a P en C'. Las rectas AC y BC son perpendiculares, luego las rectas $A'C'$ y $C'B'$ también lo son, por lo que C' describe una circunferencia situada en el plano P, de diámetro $A'B'$.

H 14- Hallar el lugar geométrico de los vértices de los triedros trirrectángulos cuyas aristas son tangentes a una esfera dada de radio R.

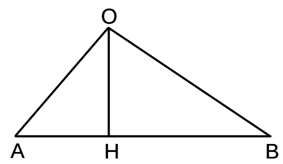
Solución:



Sea el triedro trirrectángulo *OABC*. Sus caras cortan a la esfera según los círculos de centros O', O'' y O''', tangentes entre sí dos a dos. El centro de la esfera dada se encuentra en la intersección *M* de las tres perpendiculares a las caras del triedro, levantadas por O', O'' y O'''. Como en el cubo $T'O'MO'''T'''OT''O''$, la diagonal MT' de la cara es *R*, la diagonal *OM* del cubo es constante e igual a $\frac{R\sqrt{6}}{2}$. Por tanto, el lugar pedido es una esfera concéntrica con la dada y cuyo radio es $\frac{R\sqrt{6}}{2}$.

H 15- Hallar el lugar geométrico de las rectas del espacio que pasando por un punto fijo, las proyecciones sobre ellas de dos segmentos dados de una manera cualquiera en el espacio, sean iguales en magnitud.

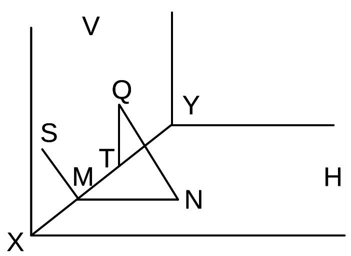
Solución:



Se trazan por el punto dado *O*, las paralelas *OA* y *OB* a los segmentos dados, siendo *OA* y *OB* las magnitudes de dichos segmentos. En el plano definido por estas dos rectas, se tiene el triángulo *OAB*, en el que *OH* es la altura sobre *AB*. Las proyecciones de *OA* y *OB* sobre *OH* son iguales a *OH*. Luego el lugar pedido es el plano perpendicular al *OAB* trazado por *OH*.

H 16- Se consideran dos planos perpendiculares *H* y *V*, y su intersección *XY*. 1º) Demostrar que existe una infinidad de planos *P* que cortan a los dos dados, según dos rectas perpendiculares, y determinar su posición. 2º) Probar que por cualquier recta *R* del espacio, pasan en general dos planos *P*. Determinar las posiciones de *R* para que los correspondientes planos *P* sean solamente uno, ninguno o infinitos. 3º) Se consideran todas las rectas del espacio que pasan por un punto fijo *A*, y todos los planos *P* que las contienen. Desde un punto *B* cualquiera de la recta *XY*, se trazan las perpendiculares a estos planos. Hallar el lugar geométrico de estas perpendiculares, y el lugar geométrico de sus intersecciones con los correspondientes planos *P*.

Solución:



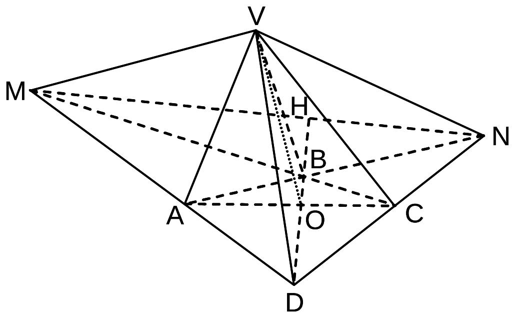
1º) Sea *M* un punto de *XY*. En el plano *H* se traza *MN* perpendicular a *XY*. Cualquier recta *MS* situada en el plano *V* es perpendicular a *MN*. Por tanto, el plano determinado por *MN* y por *MS*, cumple las condiciones de ser un plano *P*. Todo plano que contiene a *MN* es un plano *P*, luego son infinitos. 2º) Sean *Q* y *N* las intersecciones de *R* con los planos *H* y *V*. Siendo *NM* y *QT* las perpendiculares a *XY* por *N* y *Q*, respectivamente, se determinan dos planos *P*, el *NQT* y el *QNM*, siempre que *QN* se cruce oblicuamente con *XY*. Si *QN* es perpendicular a *XY*, sin ser paralela a *H* o a *V*, solo hay un plano *P*. Si *QN* es paralela a *H* o a *V*, hay infinitos planos *P*. Si *QN* es paralela a *XY*, no hay ningún plano *P*. 3º) Siendo *A* y *B* fijos, el lugar de las proyecciones de *B* sobre los planos *P* que pasan por *A*, es la esfera de diámetro *AB*.

H 17- Hallar el lugar geométrico de los centros de homotecia de relación *k* dada, y tales que la homotética de una recta encuentre siempre a una circunferencia dada en el espacio.

Solución: Siendo *r* la recta dada, y *C* el círculo dado, todas las rectas homotéticas de *r* forman un cilindro *Q*, de directriz *C* y generatrices paralelas a *r*. El lugar pedido es un cilindro semejante al *Q*.

H 18- Se da un cuadrilátero convexo $ABCD$, base de una pirámide de vértice V, siendo O el punto de intersección de sus diagonales. Hallar el lugar geométrico de V, para que los planos perpendiculares a VO, corten a la pirámide según paralelogramos.

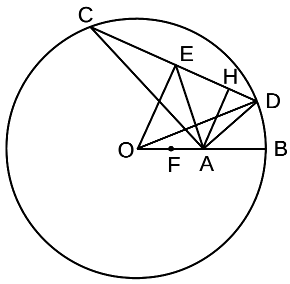
Solución:



Sea V un vértice buscado. Los planos que dan como sección un paralelogramo, son paralelos al plano VMN (M y N son las intersecciones de los lados opuestos del cuadrilátero). Para que además sean perpendiculares a VO, se cumple que $\widehat{OVN} = \widehat{OVM} = 90^\circ$. Por tanto, V pertenece al círculo de intersección de las esferas de diámetros OM y ON, o sea el círculo de diámetro OH y plano perpendicular al de la base (H es la intersección de la diagonal DB con MN).

H 19- En una esfera de centro O y radio R, se da un radio OB y su punto medio A. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios E de las cuerdas CD de la esfera que se ven desde A bajo ángulo recto.

Solución:



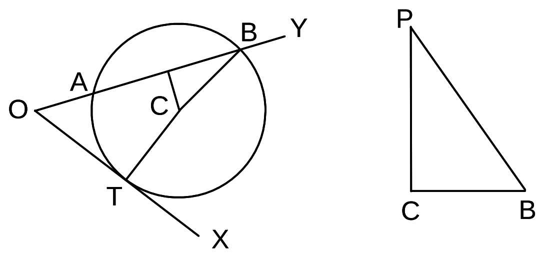
Resolviendo el problema en un plano diametral de la esfera que contenga el radio OB, se tiene: $\widehat{CAD} = 90^\circ$, $EC = ED = AE = R$. Siendo OE la mediatriz de CD, se tiene $OD^2 = OE^2 + ED^2 = OE^2 + EA^2 = R^2$. Luego en dicho plano, el lugar geométrico de E es una circunferencia de centro F, punto medio de OA, siendo su radio r tal que $2r^2 = R^2 - 2\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{7R^2}{8}$, es decir $r = \frac{R\sqrt{7}}{4}$. Por tanto, generalizando el problema, el lugar pedido es una esfera de centro F, punto medio de OA, y radio $\frac{R\sqrt{7}}{4}$.

H 20- Se dan dos rectas en el espacio XX', YY', siendo su perpendicular común AB (A sobre XX', B sobre YY'). Se elige un sentido sobre cada recta, tomándose A y B como orígenes de abscisas en sus respectivas rectas. 1º) Se toma sobre XX' un punto M, y sobre YY' un punto N, de forma que $AM = BN = x$, y se hace variar x de $-\infty$ a $+\infty$. Hallar el lugar geométrico del punto medio O de MN. b) Demostrar que $AN = BM$, y que MN forma ángulos iguales con XX' e YY'. c) Hallar el lugar geométrico de la recta intersección del plano que pasando por M es perpendicular a XX', con el plano que pasando por N es perpendicular a YY'. 2º) En el caso en que XX' e YY' sean ortogonales, que $AB = a$, y que los puntos M y N se desplazan de forma que la distancia MN es constante e igual a h, a) Demostrar que $AM^2 + BN^2$ permanece constante cuando varía x. b) Demostrar que las longitudes de los segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas del tetraedro $ABMN$, son constantes, y hallar su valor en función de a y h. c) Demostrar que A y B están sobre la esfera de diámetro MN, y hallar el lugar geométrico de los centros de estas esferas.

Solución: 1º) a): Se trazan por O', punto medio de AB, las paralelas a XX' e YY'. Sobre estas paralelas se llevan las distancias $O'M' = O'N' = x$, encontrándose O en el punto medio de $M'N'$. En el triángulo isósceles $O'M'N'$, el punto O está sobre la bisectriz del ángulo $\widehat{M'O'N'}$, que es el lugar pedido. b) $AN^2 = AB^2 + BN^2$, $BM^2 = AB^2 + AM^2 = AB^2 + BN^2 = AN^2$, luego $AN = BM$. Los triángulos rectángulos ABM y ABN son iguales, luego $\widehat{MN, XX'} = \widehat{MN, YY'}$. c) Trazando por O las paralelas a XX' e YY', la recta intersección de los planos definidos, describe el plano perpendicular al formado por dichas paralelas, cortando a este plano en la bisectriz del ángulo formado por estas paralelas. 2º) a) $AM^2 + AB^2 + BN^2 = h^2$, luego $AM^2 + BN^2 = h^2 - a^2$, que es constante. b) El segmento que une los puntos medios de AB y MN, mide $\dfrac{\sqrt{AM^2 + BN^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{h^2 - a^2}}{2}$, que es constante. El segmento que une los puntos medios de AM y BN, es igual a $\sqrt{\dfrac{AM^2 + BN^2}{4} + a^2} = \dfrac{\sqrt{h^2 + 3a^2}}{2}$, constante. c) $AM^2 + AN^2 = AM^2 + AB^2 + BN^2 = MN^2$, luego $\widehat{MAN} = 90º$. Análogamente $\widehat{MBN} = 90º$. Por tanto A y B están sobre la esfera de diámetro MN. El segmento que une A con el punto medio de MN, mide $\dfrac{h}{2}$. Además el punto medio de MN está en el plano perpendicular a AB trazado por su punto medio, por lo que este punto medio está en la intersección de dicho plano con la esfera de centro A y radio $\dfrac{h}{2}$, siendo su lugar geométrico un círculo.

H 21- Se da un ángulo XOY y dos puntos A y B situados en OY. Probar que existe una infinidad de esferas que pasan por A y B, siendo tangentes a OX. Hallar el lugar geométrico de los centros de estas esferas. Determinar la distancia al plano XOY de aquellas esferas cuyo radio es igual a R.

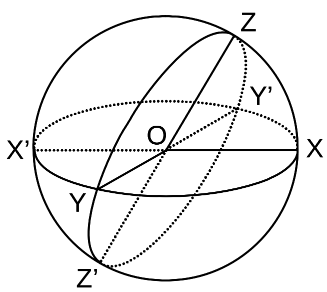
Solución:



Por pasar por A y B, el centro de las esferas está sobre el plano mediatriz de AB. El punto T de tangencia con OX, está definido por ser $OT^2 = OA \cdot OB$, luego el centro de la esfera está sobre el plano perpendicular a OX por T. La recta intersección de ambos planos es el lugar geométrico del centro de dichas esferas, siendo esta recta perpendicular al plano XOY. En la figura se ha representado la sección de la esfera por el plano XOY, según un círculo de centro C y radio $r = CA = CB = CT$. El centro P de la esfera (figura de la derecha) está a una distancia de XOY igual a $PC = \sqrt{R^2 - r^2}$.

H 22- Un triedro $OXYZ$ tiene sus aristas OX y OY fijas, y sus caras XOZ e YOZ variables, pero suplementarias. Hallar el lugar geométrico de la arista OZ.

Solución:



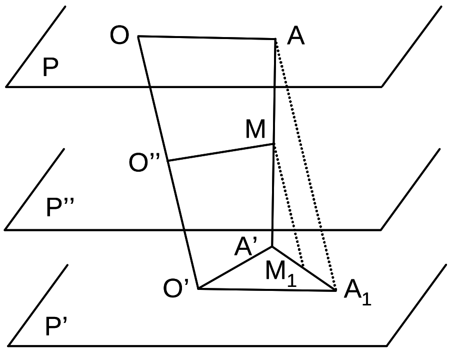
Se traza una esfera de centro O, que corta a las aristas en X, Y y Z. La esfera está representada en la figura, por sus círculos máximos $ZXZ'X'Z$, $XYX'Y'X$ y $ZY'Z'YZ$. Se tiene: $arco\ ZX + arco\ ZY = \pi = arco\ XZX' = arco\ XZ + arco\ ZX'$. Luego $arco\ ZY = arco\ ZX'$, siendo isósceles el triángulo esférico YZX'. Luego el lugar geométrico de Z es el círculo máximo cuyo plano es perpendicular al diámetro determinado por el punto medio del $arco\ XY$. El lugar geométrico de OZ es ese plano perpendicular.

H 23- Los puntos A y B describen respectivamente dos rectas dadas no concurrentes, r' y r'', de manera que la recta AB permanece paralela a un plano dado. Encontrar el lugar geométrico de los puntos que dividen a AB según una relación dada.

Solución: Para un determinado plano P, paralelo al dado, es M el punto que divide AB según la relación dada. Por M se trazan las paralelas r_1' y r_1'' a las rectas dadas. El plano P', paralelo al dado, corta a las rectas dadas en A'y B', y a las paralelas en A_1' y B_1'. El punto M' divide a $A'B'$ en la relación dada, y como $A'A_1' = AM$ y $B'B_1' = BM$, resulta que $A_1'B_1'$ está dividido por M' en la relación dada. Luego el lugar pedido es una recta situada en el plano formado por las rectas r_1' y r_1''.

H 24- Se dan dos planos paralelos P y P'. En P se da un segmento $OA = a$, y en P' se da otro segmento $O'A' = a'$. Estos segmentos son ortogonales y giran cada uno en su plano alrededor de O y O', manteniendo su ortogonalidad. Hallar el lugar geométrico de M, punto medio de AA'.

Solución:



La recta OO' corta al plano P'', paralelo medio de P y P', en O''. El punto M ha de estar en P''. Se traslada el plano P paralelamente a OO', de forma que coincida con el plano P'. El punto A se sitúa en A_1, proyección de A. La proyección de M según la misma dirección OO', es M_1, punto medio de $A'A_1$. Luego el lugar geométrico de M_1 es una circunferencia de centro O' y radio $OM_1 = \dfrac{\sqrt{a^2 + a'^2}}{2}$. Llevando M_1 al plano P'', su lugar geométrico es una circunferencia situada en dicho plano, de centro O'' y radio $\dfrac{\sqrt{a^2 + a'^2}}{2}$.

Sección I - PLANOS - DIEDROS

I 1- Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un plano sea perpendicular a una recta, es que contenga dos rectas no paralelas, perpendiculares a ella.

Solución: La condición es suficiente, puesto que para que una recta sea perpendicular a un plano basta que lo sea a dos rectas no paralelas situadas en el plano (o paralelas al plano), luego si el plano contiene dos rectas no paralelas, perpendiculares a la recta, esta es perpendicular al plano. La condición es necesaria, pues si la recta no fuera perpendicular a dos rectas no paralelas del plano, no lo sería a todas.

I 2- Realizar los siguientes ejercicios: a) Trazar por un punto una recta paralela a un plano. b) Trazar por un punto un plano paralelo a otro plano. c) Trazar por un punto una recta paralela a dos planos. d) Trazar por un punto un plano paralelo a dos rectas. e) Trazar por una recta, un plano paralelo a otra recta. f) Trazar por un punto una recta que se apoya en otras dos.

Solución: a) Se traza una recta cualquiera en el plano, y se traza el plano que pasa por esta recta y por el punto. En este plano se traza por el punto una recta paralela a la anterior. Hay infinitas soluciones. b) Se trazan por el punto dos rectas paralelas al plano, que definen el plano pedido. c) Se traza la recta intersección de los dos planos, y por el punto se traza una recta paralela a ella. d) Se trazan por el punto dos rectas paralelas a las dadas, que forman el plano pedido. e) Por un punto cualquiera de la recta se traza una recta paralela a la otra. El plano definido es el pedido. f) Se trazan los dos planos definidos por cada recta y el punto. La recta intersección de estos dos planos es la solución.

I 3- Realizar los siguientes ejercicios: a) Trazar por un punto una recta paralela a un plano y que se apoye en otra recta dada. b) Trazar una recta paralela a una dada y que se apoye en otras dos. c) Trazar por un punto una perpendicular a un plano. d) Trazar por una recta un plano perpendicular a otro plano. e) Trazar por un punto una recta perpendicular a dos rectas que se cruzan.

Solución: a) Se traza por el punto un plano paralelo al dado, que corta a la recta en un punto. La recta que une este punto con el dado es la solución. b) Por un punto cualquiera de una de las dos últimas rectas dadas, se traza una recta paralela a la primera dada. El plano formado corta a la tercera recta en un punto que unido con el anterior da la solución. c) Se trazan en el plano dos rectas que se cortan. Por el punto dado se trazan las paralelas a estas dos, que definen un plano paralelo al dado. La recta intersección de los planos que pasando por estas dos últimas rectas, son perpendiculares al plano dado, es la perpendicular pedida. d) Por un punto cualquiera de la recta se traza una recta perpendicular al plano dado. El plano definido por las dos rectas es el pedido. e) Por un punto cualquiera de una de las rectas, se traza el plano perpendicular a ella, que corta a la segunda recta en un punto, por el que se traza el plano perpendicular a esta segunda recta. Los dos planos se cortan según una recta perpendicular a ambas rectas dadas. La recta paralela a esta, trazada por el punto dado, es la solución.

I 4- Se dan cuatro puntos A, B, C y D no coplanarios. Dibujar un plano que equidiste de los cuatro puntos, hallando el número de soluciones.

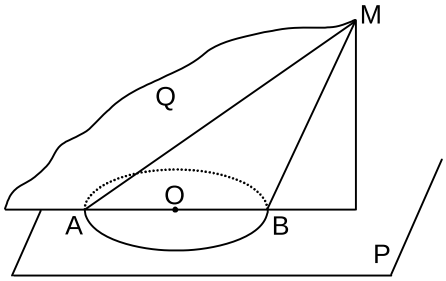
Solución: Por tres de los puntos dados pasa un plano; el plano que equidista de este y del cuarto punto, es una solución. Como se pueden elegir de cuatro maneras diferentes, los cuatro puntos de tres en tres, existen cuatro soluciones de este tipo. Tomando de dos en dos, los cuatro puntos dados, se pueden formar tres pares de rectas. Cada par de estas rectas tienen una perpendicular común. El plano perpendicular a esta recta, trazado por su punto medio, representa una solución, por lo que hay tres soluciones de esta clase. En total hay siete soluciones.

I 5- Se da un segmento AB y un plano Q que no contiene al segmento. Construir un triángulo equilátero ABC, de forma que el vértice C sea un punto de Q.

Solución: Las esferas con centro en A y B, y radio AB, cortan al plano Q según dos circunferencias que pueden ser tangentes (un punto C), secantes (dos puntos C), o no cortarse (ninguna solución).

I 6- Se da una circunferencia *O*, y un punto *M* exterior al plano *P* de la circunferencia. Hallar el mayor y el menor segmento que unen *M* con un punto de la circunferencia.

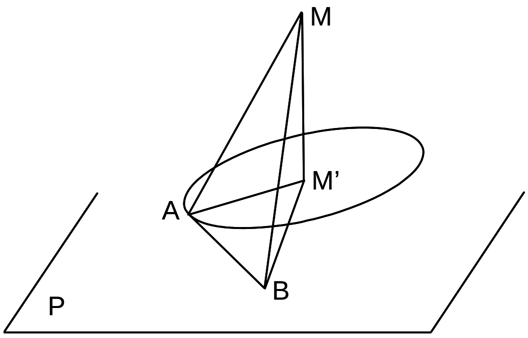
Solución:



Se traza por *M* el plano *Q*, perpendicular al *P* y pasando por el centro *O* de la circunferencia. Este plano corta a la circunferencia según el diámetro *AB*. Los segmentos pedidos son *MA* (el mayor) y *MB* (el menor).

I 7- Dado un plano *P* y un punto *M* exterior al plano, dibujar un plano que pasando por *M*, forme con *P* un ángulo dado α, y sea paralelo a una recta *r* que no es paralela al plano *P*.

Solución:



Se traza por *M* la paralela *MB* a la recta *r*, siendo *B* el punto en que corta al plano *P*. Siendo M' la proyección de *M* sobre *P*, el ángulo $\widehat{MBM'} = \beta$ es conocido. Suponiendo que el plano buscado es el MAM', se tiene que $\widehat{MAM'} = \alpha$, por lo que $M'A = \dfrac{M'B \cdot \tan\beta}{\tan\alpha}$. Se traza en el plano *P* la circunferencia de centro M' y radio $M'A$, y por *B* se trazan las tangentes. Siendo *BA* una de ellas, el plano *MAB* es solución del problema.

I 8- Se da un punto *A* y una recta *r*. Trazar por *A* un plano *P*, y por *r* un plano *Q*, de forma que los dos planos sean paralelos y que disten entre sí una longitud dada *m*.

Solución: Con eje *r* y radio *m*, se traza una superficie cilíndrica. Desde *A* se le trazan los planos tangentes. Por *r* se trazan los planos paralelos a los tangentes, que son las soluciones.

I 9- Se da un plano *P*, un punto *M* del plano, y una recta *r* exterior al plano. Trazar por *M* una recta contenida en *P*, que sea perpendicular a *r*.

Solución: Se traza por *M* el plano *Q* perpendicular a *r*. La recta pedida es la intersección de *P* y *Q*.

I 10- En un plano dado *P*, y por un punto *M* de él, trazar una recta que forme un ángulo dado con otro plano *Q* dado.

Solución: Se traza por *M* la perpendicular a *Q*, que lo corta en *N*. Se construye un cono de vértice *M*, eje *MN*, y cuyo ángulo en la base es igual al dado (el ángulo en el vértice es el complementario de aquel). Las generatrices intersección del cono con *P*, son soluciones del problema.

I 11- Demostrar que cuando se proyecta ortogonalmente un ángulo $\widehat{AOB}$ sobre un plano paralelo a su bisectriz OC, la proyección es un ángulo cuya bisectriz es paralela a OC.

Solución: Se toma $OA = OB$, con lo que OC es perpendicular a AB. Las proyecciones $O'C'$ y $A'B'$, de OC y AB sobre un plano paralelo a OC, son perpendiculares entre sí, siendo $C'A' = C'B'$, por lo que $O'C'$ es la bisectriz de $A'O'B'$, y paralela a OC.

I 12- Trazar por un punto dado una recta que forme ángulos iguales con tres rectas que se cortan dos a dos.

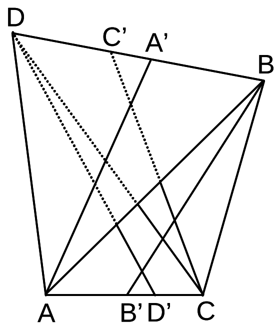
Solución: Se trazan por el punto dado las paralelas a las tres rectas dadas, que definen ocho octantes que tienen cuatro bisectrices diferentes, que son las soluciones del problema.

I 13- Dados dos puntos A y B situados a un mismo lado de un plano P, hallar un punto M del plano tal que la diferencia $MA - MB$ sea máxima.

Solución: La recta AB corta a P en M, siendo $MA - MB = AB$. Para otro punto M' del plano, se verifica en el triángulo $M'AB$, que $M'A - M'B < AB$. Luego la solución es el punto M de intersección de AB con P.

I 14- En un cuadrilátero alabeado $ABCD$, se trazan las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$, que encuentran a BD en A' y C', respectivamente, y las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$, que encuentran a AC en B' y D', respectivamente. Demostrar que $(BDA'C') = (ACB'D')$.

Solución:



Hay que demostrar que $\frac{BA'}{BC'} \div \frac{DA'}{DC'} = \frac{AB'}{AD'} \div \frac{CB'}{CD'}$, es decir $\frac{BA' \cdot DC'}{BC' \cdot DA'} = \frac{AB' \cdot CD'}{AD' \cdot CB'}$. Como $\frac{AB'}{B'C} = \frac{BA}{BC}$, $\frac{AD'}{D'C} = \frac{DA}{DC}$, $\frac{DA'}{A'B} = \frac{AD}{AB}$ y $\frac{DC'}{C'B} = \frac{CD}{CB}$, sustituyendo en la expresión anterior estos valores, se tiene: $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = \frac{BA \cdot DC}{BC \cdot DA}$, con lo que queda demostrado.

I 15- Trazar un segmento de longitud a dada, paralelo a un plano P dado, y que se apoye en dos rectas dadas r y r', que se cruzan.

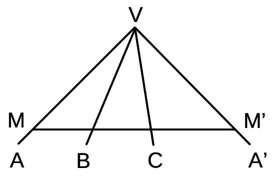
Solución: Las rectas r y r' cortan a P en los puntos A y A'. En AA' se toma un segmento $A'A'' = a$. Se traza la circunferencia en el plano P, de centro A' y radio $A'A'' = a$. Se traza el cilindro de directriz esa circunferencia y generatrices paralelas a r'. Este cilindro corta a r en B y B'. Trazando por estos puntos, planos P' y P'' paralelos a P, estos planos cortan a r' en C y C'. Los segmentos CB y $C'B'$ son las soluciones.

I 16- Trazar por una recta dada r, un plano que esté inclinado un ángulo dado α con relación a un plano P dado.

Solución: La recta r corta a P en A. Se toma otro punto B en r, que se proyecta en B' sobre P. Se traza por B, en el plano $BB'A$, una recta BC que forme con BB' un ángulo 90º – α, es decir que el ángulo $\widehat{BAB'} = \alpha$, siendo C el punto en que corta a P. El lugar geométrico de los puntos de P que unidos con B forman un ángulo α con P, es una circunferencia del plano P, cuyo centro es B' y su radio $B'C$. Trazando por A las tangentes AT y AT' a esta circunferencia, los planos BAT y BAT' son los pedidos.

I 17- Cortar un triedro *VABC* por un plano que pasa por un punto dado *M* de *VA*, de modo que la sección sea de perímetro mínimo.

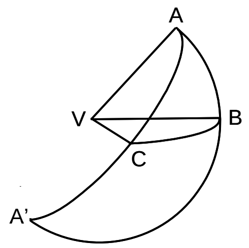
Solución:



Se abaten las caras *VBA* y *VCA*, sobre el plano de la cara *VBC*, obteniéndose el ángulo AVA'. Se lleva *VM* sobre VA', obteniéndose VM'. Se traza la recta MM' que corresponde a la sección de perímetro mínimo.

I 18- Construir un triedro *VABC* conociendo el diedro *VA*, la cara *AVB*, y sabiendo que las otras dos caras son suplementarias.

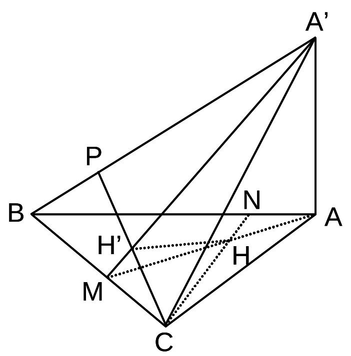
Solución:



Cortando el triedro por una esfera de centro *V* y radio la unidad, sean *A*, *B* y *C* los puntos de corte con las aristas. Los arcos de círculo máximo *AC* y *AB* se cortan en A'. En el triángulo esférico *ABC*, se conocen $\widehat{CAB}$ y el arco *AB*. Por ser suplementarios los arcos *AC* y *CB*, los arcos *CB* y CA' son iguales. Ahora bien, $\widehat{A'} = \widehat{A} = \widehat{CBA'}$, por ser isósceles el BCA'. Además los arcos *AB* y BA' son suplementarios. Luego se conocen todos los elementos del triángulo esférico BCA', por lo que se puede construir. Prolongando sus lados $A'C$ y $A'B$, se obtiene el vértice *A*. Conocidos los tres vértices, se unen con *V*.

I 19- Se dan dos triángulos en el espacio *BCA* y BCA', que tienen común el lado *BC*, siendo la recta AA' perpendicular al plano *ABC*. Demostrar que la recta HH' que une los ortocentros de los dos triángulos, es también perpendicular a uno de los dos planos *ABC* o $A'BC$.

Solución:



Siendo $A'A$ perpendicular al plano *ABC*, las alturas trazadas desde *A* y A' sobre *BC*, coinciden en el mismo punto *M* de *BC*. En el triángulo *ABC*, se traza la altura *CN*, y el plano perpendicular a BA' que contiene a *CN* y a la altura *CP*, y es perpendicular a las caras del diedro $A'B$ y en particular a la cara $A'BC$. La intersección de los planos $A'AM$ y *PCN*, es la recta HH', que por tanto es perpendicular al plano $A'BC$.

I 20- Demostrar que en un triedro trirrectángulo de aristas *OM*, *ON* y *OQ* cuyas longitudes son iguales a *a*, la suma de los cuadrados de las proyecciones de las tres aristas sobre un plano *P* cualquiera que pasa por *O*, es constante, y hallar su valor.

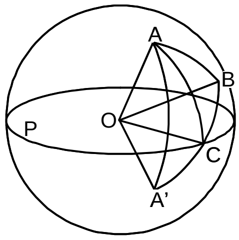
Solución: Sean OM', ON' y OQ' las proyecciones de OM, ON y OQ sobre el plano P. Sean α, β y γ los ángulos que forma la perpendicular al plano P con las aristas del triedro trirrectángulo. Se sabe que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Ahora bien, $\cos(90º - \alpha) = \sin\alpha = \frac{OM'}{a}$, es decir $\cos^2\alpha = 1 - \frac{OM'^2}{a^2}$. Teniendo en cuenta las expresiones análogas, se tiene:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3 - \left(\frac{OM'^2}{a^2} + \frac{ON'^2}{a^2} + \frac{OQ'^2}{a^2}\right) = 1.$$

Luego $OM'^2 + ON'^2 + OQ'^2 = 2a^2$.

I 21- Se da un plano P y un punto O sobre él, y se dan dos rectas OA y OB situadas al mismo lado de P. Trazar en el plano una recta OC, tal que la suma de los ángulos $\widehat{COB}$ y $\widehat{COA}$, sea mínima.

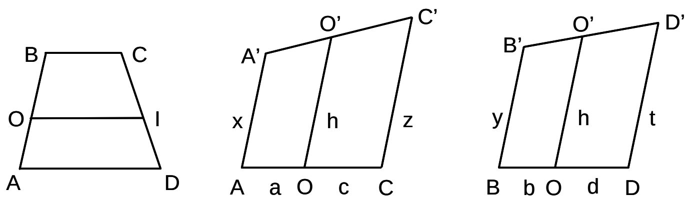
Solución:



Supuesto resuelto el problema, con centro O se traza una esfera que corta a las aristas en A, B y C. El plano P corta a la esfera según un círculo máximo en el que se sitúa C. El simétrico de A respecto a P, es A', siendo $\widehat{COA'} = \widehat{COA}$. La suma $\widehat{BOC} + \widehat{COA} = \widehat{BOC} + \widehat{COA'}$ es mínima cuando los tres puntos B, C y A' están sobre un mismo círculo máximo. Por tanto se traza el círculo máximo que pasa por B y A', que corta en C al círculo máximo situado en P.

I 22- 1º) Se traza una paralela a las bases AD y BC de un trapecio $ABCD$, que corta a AB en O, y a CD en I. Calcular OI en función de OA, OB, AD y BC. 2º) Se da un cuadrilátero $ABCD$, cuyas diagonales se cortan en O. Sean $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ y $CD = d$. Se trazan por A, B, C y D paralelas exteriores al plano $ABCD$, y en el mismo sentido se llevan sobre estas paralelas las longitudes $AA' = x$, $BB' = y$, $CC' = z$, $DD' = t$. Hallar la relación que deben verificar x, y, z, t para que los cuatro puntos A', B', C' y D' sean coplanarios. 3º) Se consideran rombos $ABCD$, de diagonales $AC = 6a$ y $BD = 8a$. Se levantan perpendiculares en B, C y D al plano del rombo, y se lleva sobre las dos primeras, respectivamente y en el mismo sentido, las longitudes $BB' = x$, $CC' = 10a$. El plano $AB'C'$ corta en D' a la perpendicular en D. Calcular DD' y determinar x para que el cuadrilátero $AB'C'D'$, sea a) un rombo, b) un rectángulo.

Solución:



1º) Aplicando la solución del problema D 47, se tiene (figura de la izquierda) $OI = \frac{OA \cdot BC + OB \cdot AD}{AB}$. 2º) En las figuras del centro y de la derecha se representan los alzados correspondientes a las dos diagonales del cuadrilátero. De acuerdo con la fórmula anterior, las paralelas $OO' = h$ en ambas figuras, han de ser iguales para que A', B', C', D' sean coplanarios, luego $h = \frac{az + cx}{a + c} = \frac{bt + dy}{b + d}$, es decir $\frac{az + cx}{bt + dy} = \frac{a + c}{b + d}$. 3º) Aplicando la misma fórmula para hallar DD', se tiene: $\frac{4a \cdot DD' + 4ax}{30a^2} = \frac{8a}{6a}$, de donde $DD' = 10a - x$. Como $AB'^2 = 25a^2 + x^2$, $B'C'^2 = 25a^2 + (10a - x)^2$, $D'C'^2 = 25a^2 + x^2$, $AD'^2 = 25a^2 + (10a - x)^2$.

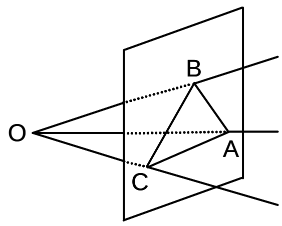
Para que sea rombo $x = 10a - x$, luego $x = 5a$.

Para que sea rectángulo $AC'^2 = 136a^2 = AD'^2 + D'C'^2 = 50a^2 + 100a^2 + 2x^2 - 20ax$.

De donde $x^2 - 10ax + 7a^2 = 0$. Luego $x = a\left(5 \pm 3\sqrt{2}\right)$.

I 23- En el triedro *OABC*, el ángulo diedro correspondiente a la arista *OA* es recto. Demostrar que todo plano que corta a las tres aristas, y a una de ellas perpendicularmente, da como sección un triángulo rectángulo, de forma que el vértice del ángulo recto está sobre *OA*.

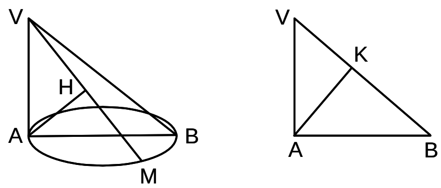
Solución:



Sea *ABC* la sección por un plano perpendicular a la arista *OB*. El plano *OBA* contiene a *OB*, que es perpendicular a *ABC*, luego dicho plano es perpendicular a *ABC*. El plano *OCA* es perpendicular al *BOA*, por definición. La traza de *AOC* y *ABC*, planos perpendiculares a *BOA*, será también perpendicular a *BOA*. Luego *CA* es perpendicular a *AM* que es una recta de *BOA*. En consecuencia, $\widehat{CAB}$ es recto.

I 24- Se da un círculo de diámetro $AB = 2R$, y un punto *V* sobre la perpendicular en *A* al plano del círculo ($VA = h$). Siendo *M* un punto cualquiera de la circunferencia dada, se traza *VM*, siendo *H* el pie de la perpendicular por *A* a *VM*. 1º) Demostrar que *AH* es ortogonal a *VB*. Deducir que cuando *M* varía, la recta *AH* está en un plano fijo, siendo el lugar de *H* un círculo *O*, cuyo radio se calculará en función de *R* y *h*. 2º) Cuando *M* es fijo, y varía *V*, determinar el lugar geométrico de *H*. Hallar la superficie engendrada por este lugar cuando *M* varía.

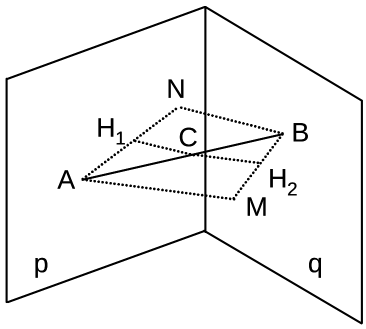
Solución:



1º) *AH* es perpendicular al plano *VMB*, luego es ortogonal a *VB*. Al ser *AH* ortogonal a *VB*, y pasar por *A*, *AH* describe el plano que pasando por *A* es perpendicular a *VB*. Este plano corta a *VB* en *K*, teniéndose que $\widehat{BKA} = 90º$. Luego el lugar geométrico de *H* es el círculo *O*, cuyo radio es la mitad de *AK*, es decir $\dfrac{Rh}{\sqrt{4R^2+h^2}}$. 2º) Como $\widehat{AHM} = 90º$, *H* describe el círculo de diámetro *AM*, por lo que la superficie engendrada por él, cuando *M* varía, es una esfera de diámetro *AB*.

I 25- Dado un segmento *AB* cuyos extremos *A* y *B* están sobre las caras *p* y *q* de un diedro dado, y son tales que la distancia de *A* a *q* es igual a la de *B* a *p*, demostrar que la suma de distancias de un punto cualquiera de *AB* a los planos *p* y *q*, es constante.

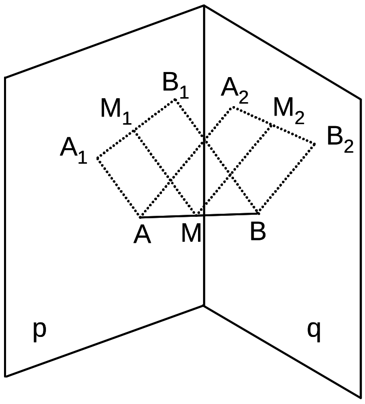
Solución:



Sea *AM* la distancia de *A* a la cara *q*, y sea *BN* la de *B* a la cara *p*. Sea *C* un punto del segmento *AB*, y sean CH_1 y CH_2 sus distancias a los planos *p* y *q*. Se tiene $CH_1 = \dfrac{BN \cdot AC}{AB}$ y $CH_2 = \dfrac{AM \cdot BC}{AB}$. Como $AM = BN$, se tiene $CH_1 + CH_2 = \dfrac{AM(AC+BC)}{AB} = AM$, que es constante.

I 26- Se dan dos puntos A y B en el interior de un diedro de caras p y q. La suma de las distancias de A a las dos caras es igual a la suma de las distancias de B a dichas dos caras. Demostrar que si un punto varía sobre AB, la suma de sus distancias a las dos caras, es constante.

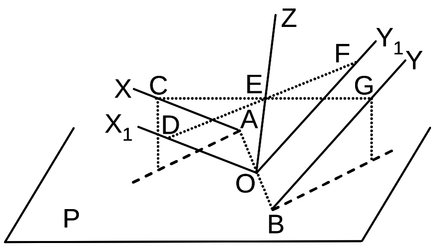
Solución:



Se tiene que $AA_1 + AA_2 = BB_1 + BB_2$. Sea $AM = m$ y $MB = n$, siendo $m + n = AM$. Se tiene que $MM_1 + MM_2 = AA_1 + \dfrac{m}{AB}(BB_1 - AA_1) + BB_2 + \dfrac{n}{AB}(AA_2 - BB_2)$. Operando, se obtiene que $MM_1 + MM_2 = AA_1 + AA_2$, que es constante.

I 27- Se dan dos rectas X e Y no situadas en un mismo plano y cuyas proyecciones sobre un plano P son paralelas. Demostrar que las rectas que se apoyan en X e Y, siendo paralelas a P, pasan por una misma recta y determinarla.

Solución:



Sean A y B los puntos en que X e Y cortan a P. Siendo O el punto medio de AB, se trazan por él X_1 e Y_1, paralelas a X e Y. Sea OZ la bisectriz de X_1 e Y_1. Un plano paralelo a P corta a X e Y, respectivamente, en C y G, y a X_1 e Y_1 en D y F. La recta CG pasa por un punto E de OZ, ya que $EC = EG$, $DC = FG$, $\widehat{DCE} = \widehat{EGF}$. Por tanto $ED = EF$, y E está en OZ. La recta pedida es OZ, bisectriz de X_1 e Y_1.

I 28- Las rectas r y r' son ortogonales, siendo su perpendicular común $AA' = a$. Un segmento BB' de longitud b, tiene sus extremos en r y r'. Demostrar que 1º) BB' forma con AA' un ángulo constante. 2º) La suma de los cuadrados de los lados del cuadrilátero $AA'BB'$ es constante.

Solución: 1º) Se traza por r el plano paralelo a r'. La proyección de B' sobre este plano es B''. El triángulo $BB'B''$ es siempre igual, pues $BB' = b$, $B'B'' = a$, $\widehat{BB''B'} = 90º$, por lo que $\widehat{BB'B''}$ es constante. 2º) Se tiene $AB^2 = x^2$, $AA'^2 = a^2$, $BB'^2 = b^2$, $A'B^2 = x^2 + a^2$, $A'B'^2 = b^2 - a^2 - x^2$. La suma de los cuadrados de los cuatro lados es $2b^2$.

I 29- Sean XX' e YY' dos rectas ortogonales, cuya perpendicular común es $OI = d$. Se toma sobre XX', las distancias $OA = a$ y $OB = b$, y se une A con un punto cualquiera M de YY'. Demostrar que 1º) A cada M de YY' le corresponde un punto N de YY', de forma que AM y BN son ortogonales. 2º) $IM \bullet IN = k^2$.

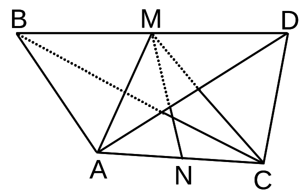
Solución: 1º) Se traza por B el plano perpendicular a AM, que corta a YY' en N. Luego BN, recta del plano, es perpendicular a AM. 2º) Se traza el plano que pasando por XX', es paralelo a YY'. Los segmentos IM e IN se proyectan sobre este plano, en verdadera magnitud, y BN y AM siguen siendo perpendiculares en sus proyecciones. En los triángulos semejantes OBN y AOM se tiene $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{OA}{OM}$, $OM \bullet ON = IM \bullet IN = a \bullet b = k^2$.

I 30- Trazar por un punto A de un plano P, una recta tal que su mínima distancia a una recta dada r, no paralela a P, tenga una longitud dada a.

Solución: Tomando como eje la recta r y con radio igual a a, se traza una superficie cilíndrica. Desde A se trazan los planos tangentes al cilindro, que lo son a lo largo da las generatrices m y n, que cortan a P en M y N. Las rectas AM y AN son las pedidas.

I 31- Demostrar que en un cuadrilátero alabeado $ABCD$, de lados iguales, la recta MN que une los puntos medios de las diagonales BD y AC, es la mínima distancia entre ellas.

Solución:



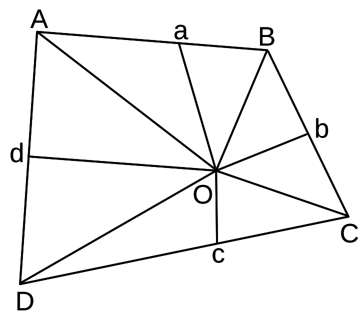
Los triángulos ABD y BDC son isósceles, luego AM y CM son perpendiculares a BD. El plano AMC es perpendicular a BD, y por tanto MN también lo es. El triángulo AMC es isósceles, luego MN es perpendicular a AC. Luego MN es la mínima distancia entre las diagonales.

I 32- Determinar los planos sobre los que un cuadrilátero alabeado se proyecta según paralelogramos.

Solución: En un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio. Uniendo los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero alabeado, se obtiene una recta. Siempre que se proyecte el cuadrilátero paralelamente a esa recta, se obtendrá un paralelogramo, sea cual sea el plano sobre el que se proyecte.

I 33- Se da un cuadrilátero alabeado $ABCD$ y un punto O. Demostrar que los pies de las bisectrices interiores de los ángulos en O de los triángulos OAB, OBC, OCD y ODA, son cuatro puntos coplanarios.

Solución:

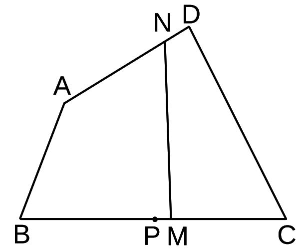


Sean a, b, c y d los pies de las bisectrices. Se tiene:

$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{cD}{cA}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}\cdot\frac{OC}{OD}\cdot\frac{OD}{OA}=1$, luego a, b, c y d son coplanarios.

I 34- Construir un cuadrilátero alabeado $ABCD$, conociendo $AB=2a$, $BC=2b$, $CD=2c$, y sabiendo que los lados opuestos son ortogonales y que sus perpendiculares comunes también lo son.

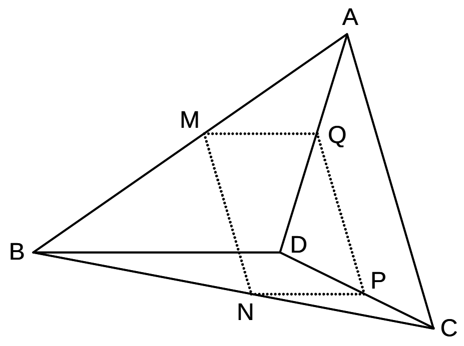
Solución:



Siendo P el punto medio de BC, $MP=\alpha$, $BM=b+\alpha$, $MC=b-\alpha$. Sea $MN=\beta$, $DN=\gamma$ y $NA=\delta$. Conociendo α, β, γ y δ, se puede construir el cuadrilátero. En el triángulo BMN, se tiene $BN^2=(b+\alpha)^2+\beta^2$. En el triángulo ABN, se tiene: $4a^2-\delta^2=(b+\alpha)^2+\beta^2$. Análogamente en los triángulos NMC y CDN, se tiene $4c^2-\gamma^2=(b-\alpha)^2+\beta^2$. Por ser AB y CD perpendiculares, se tiene $MB \cdot MC + NA \cdot ND + MN^2 = 0$, es decir $(b-\alpha)(b+\alpha)+\delta\gamma+\beta^2 = 0$. Por ser la perpendicular común a AB y CD ortogonal con MN, se tiene $MC \cdot ND = MB \cdot NA$, es decir $(b+\alpha)\gamma = (b-\alpha)\delta$. Las soluciones de este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, son: $\alpha = \dfrac{b(a^2-c^2)}{a^2+c^2}$, $\beta = \dfrac{2ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$, $\gamma = \dfrac{2c^2\sqrt{a^2-b^2+c^2}}{a^2+c^2}$, $\delta = \dfrac{2a^2\sqrt{a^2-b^2+c^2}}{a^2+c^2}$.

I 35- Demostrar que si en los lados de un cuadrilátero alabeado $ABCD$, se determina un punto en cada lado, de forma que los lados queden divididos según una misma razón, el cuadrilátero formado por dichos cuatro puntos, es un paralelogramo.

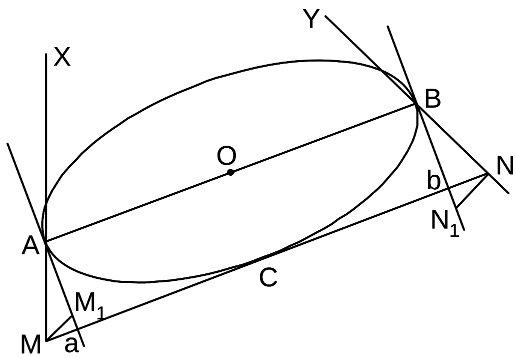
Solución:



Sean M,N,P,Q, los cuatro puntos, de forma que: $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NC}{NB} = \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{QA}{QD} = k$. Luego MN y PQ son paralelas a AC. Análogamente, MQ y NP son paralelas a BD. Luego $MNPQ$ es un paralelogramo.

I 36- Se da una circunferencia de diámetro AB. Se consideran las rectas AX y BY, perpendiculares a AB, inclinadas un ángulo θ sobre el plano P de la circunferencia, y no paralelas entre sí. Demostrar que toda recta que corta a estas dos rectas y a la circunferencia, forma el mismo ángulo θ con el plano de la circunferencia, y que sus proyecciones son tangentes a la misma.

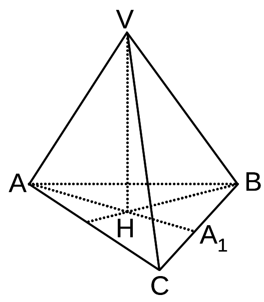
Solución:

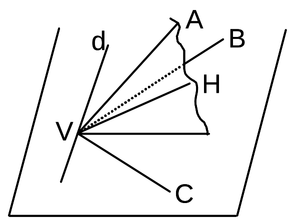


Las proyecciones sobre P de AX y BY son Aa y Bb. Sea la recta MCN que corta respectivamente en M y N a AX y BY, y a la circunferencia en C. Las proyecciones sobre P de M y N son M_1 y N_1. Si M_1N_1 cortara a la circunferencia en dos puntos C y C', el punto cuya proyección sería C', estaría en MN y en la circunferencia, lo que no es posible, pues MN solo corta en un punto C a la circunferencia. Luego M_1CN_1 es tangente a la circunferencia en el punto C. Como $M_1C = M_1A$, por ser ambas tangentes a la circunferencia, se tiene que los triángulos MM_1C y MM_1A son iguales, pues MM_1 es común y $\widehat{MM_1C} = \widehat{MM_1A} = 90^\circ$. Por tanto $\widehat{MAM_1} = \widehat{MCM_1} = \theta$.

I 37- Demostrar que: 1º) Los planos trazados por cada arista de un triedro, perpendiculares a la cara opuesta, tienen una recta común. 2º) Correlativamente, las rectas trazadas desde el vértice de un triedro, perpendiculares en el plano de cada cara a las aristas opuestas, están en un plano.

Solución:

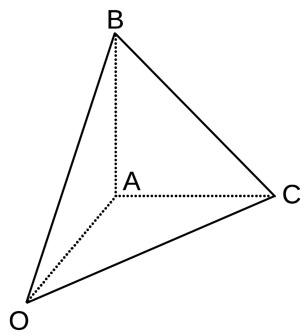




1º) Sea el triedro *VABC* cortado por el plano *ABC*. Las trazas AA_1, BB_1 y CC_1 de los tres planos del enunciado son perpendiculares, respectivamente, a *BC*, *CA* y *AB*. Luego se cortan en *H*, ortocentro del triángulo *ABC*, por lo que *VH* es común a los tres planos. 2º) Se traza la recta *d* en el plano *VBC*, que pasa por *V* y es perpendicular a *VH*, por lo que es perpendicular al plano *VAH* y por tanto a la recta *VA*. Por tanto, las rectas trazadas desde *V* y perpendiculares a las aristas opuestas, están en el plano *P* perpendicular a *VH* que pasa por *V*.

I 38- En un triedro *OABC*, calcular la cara *a*, sabiendo que el diedro $\widehat{A}$ es recto, y que las caras *b* y *c* son de 45º.

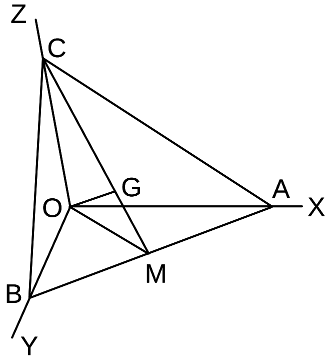
Solución:



Sea *ABC* una sección recta del diedro $\widehat{A}$. Por ser $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 45º$, $AO = AB = AC$. Luego $CB = OB = OC$, por lo que el triángulo *OBC* es equilátero, es decir que la cara *a* (ángulo $\widehat{COB}$) mide 60º.

I 39- Dado un triedro *OXYZ* y un punto *G* en su interior, construir la sección del triedro que admite a *G* como su baricentro.

Solución:



Se trata de hallar el plano sección ABC de forma que G sea el baricentro del triángulo ABC. Como $GC = 2 \cdot GM$, se obtiene en el plano ZOG la recta homotética de OZ con centro de homotecia G y razón $\frac{-1}{2}$, que corta al plano OXY en M. En el plano XOY se obtiene la recta homotética de OX, con centro de homotecia M y razón -1, que corta en B a OY. Obtenido B, A es su simétrico respecto a M. El vértice C está en la intersección de OZ con GM.

I 40- Demostrar que un ángulo poliedro convexo no puede tener más de tres caras cuyos ángulos sean obtusos o rectos, ni más de tres diedros agudos.

Solución: Como la suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro ángulos rectos, no es posible que tenga más de tres caras rectas u obtusas. En el segundo caso, obteniendo el poliedro suplementario del dado, cada cara de aquel mide un ángulo suplementario de un diedro de este; luego este no puede tener más de tres diedros agudos, pues si no fuera así, aquel tendría más de tres caras rectas u obtusas, lo que es imposible.

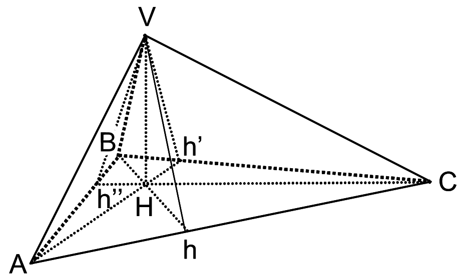
I 41- Dado un triedro $OABC$, en el que el diedro $\widehat{C}$ es igual a la suma de los otros dos diedros, hallar las condiciones para que la arista OC forme con la bisectriz OD de la cara opuesta, un ángulo igual a la mitad de esta cara.

Solución: Se divide el triedro dado en dos triedros $OCBD$ y $OCAD$, quedando el diedro $\widehat{C}$, dividido en $\widehat{C_1}$ (en el triedro $OCAD$) y $\widehat{C_2}$ (en el triedro $OCBD$). En el triedro $OCAD$ se tiene que los ángulos $\widehat{AOD}$ y $\widehat{COD}$ son iguales por definición, luego el triedro es isósceles, y como a caras iguales se oponen diedros iguales, los diedros $\widehat{C_1}$ y $\widehat{A}$ son iguales. Análogamente, los diedros $\widehat{C_2}$ y $\widehat{B}$ son iguales. Luego la condición a cumplir consiste en que el plano COD divida al diedro C en dos diedros C_1 y C_2, de forma que $\widehat{C_1} = \widehat{A}$, $\widehat{C_2} = \widehat{B}$.

Sección J - CUERPOS

J 1- Dada una pirámide con un vértice V que es un triedro trirrectángulo, probar que V se proyecta ortogonalmente sobre la base opuesta en el ortocentro de esta.

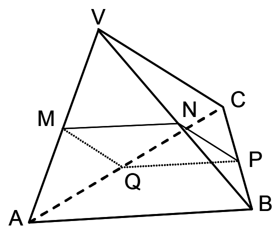
Solución:



Las alturas de la base son Bh, Ah' y Ch'', que se cortan en el ortocentro H. El plano VBh es perpendicular a AC, y el plano VAh' lo es a BC. Luego VH es perpendicular a AC y a BC, siéndolo por tanto, al plano ABC. Luego H es la proyección de V sobre ABC.

J 2- Cortar una pirámide triangular por un plano de manera que la sección sea un paralelogramo.

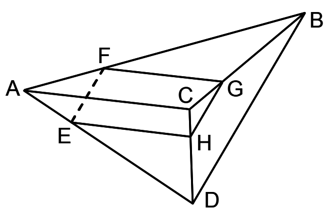
Solución:



Sea la pirámide $VABC$. Por un punto M de la arista VA se traza en la cara VAB, la paralela MN a AB, estando N sobre la arista VB. En el plano VBC se traza NP paralela a VC, que corta en P a CB. En la cara ABC se traza PQ paralela a MN, estando Q sobre AC. En la cara VAC, MQ es paralela a NP.

J 3- Cortar una pirámide triangular por un plano de modo que la sección sea un paralelogramo de área máxima.

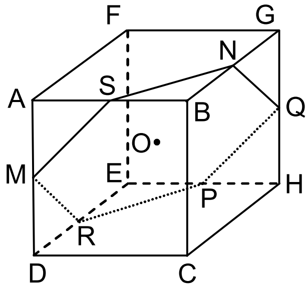
Solución:



Sea la pirámide $ABCD$ y sea el paralelogramo $EFGH$, en el que los lados EH y FG son paralelos a AC, y EF y GH lo son a BD. El área del paralelogramo es $S = EH \cdot EF \cdot \cos\widehat{FEH}$. Como el ángulo es fijo, el área será máxima cuando lo sea el producto $EH \cdot EF$. Como $EH = \dfrac{AC \cdot ED}{AD}$ y $EF = \dfrac{DB \cdot AE}{AD}$, su producto es proporcional a $AE \cdot ED$. Y como la suma de estos dos factores es constante e igual a AD, su producto es máximo cuando los dos factores sean iguales, es decir cuando E sea el punto medio de AD, y análogamente F, G y H sean los puntos medios de sus respectivas aristas.

J 4- En un cubo de 4 m de arista, se traza el plano determinado por los puntos medios de tres aristas que no sean ni consecutivas ni paralelas entre sí. Determinar la forma de la sección definida por ese plano en el cubo, calculando sus elementos y su superficie.

Solución:



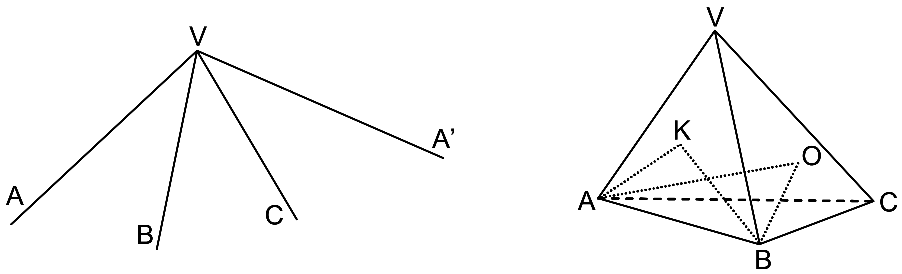
Sean las tres aristas consideradas *AD*, *BG* y *EH*, y sus correspondientes puntos medios *M*, *N* y *P*. El plano *MNP* pasa por *O*, centro del cubo, por lo que pasa también por los puntos medios *Q*, *R* y *S* de las aristas opuestas a las consideradas. La sección es el exágono regular *MSNQPR*, cuyo lado mide $2\sqrt{2}$ m, inscrito en el círculo de centro *O* y radio $2\sqrt{2}$, siendo su área $12\sqrt{3}$ m^2.

J 5- Se da una esfera *O* y una recta *d*. Trazar una esfera Ω de radio conocido, que corte a *O* bajo ángulo θ dado y tal que el plano de intersección de ambas esferas, pase por *d*.

Solución: Sea *R* el radio de *O*, y *r* el de Ω. Siendo *P* uno de los puntos de intersección de ambas esferas, se tiene el triángulo *OP*Ω, en el que el ángulo en *P* es suplementario de θ, $OP = R$, $\Omega P = r$, $O\Omega = \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta}$. Por tanto los centros de Ω están en una esfera O', concéntrica con *O* y cuyo radio es $\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta}$. El plano sección de ambas es tangente a una esfera O'', concéntrica con *O* y cuyo radio es la proyección de *OP* sobre *O*Ω. Se trazan los planos que, conteniendo a *d*, son tangentes a O'' (en general, serán dos planos). Estos dos planos son los planos radicales de *O* y Ω. Las perpendiculares trazadas desde *O* a estos dos planos radicales, cortan a la esfera O' en dos puntos, que son centros de la esfera pedida Ω.

J 6- Se da un triedro *VXYZ*. 1º) Construir un tetraedro *VABC*, de forma que *A*, *B* y *C* estén sobre *VX*, *VY* y *VZ*, respectivamente, y tal que las tres caras laterales *VAB*, *VBC* y *VCA* sean equivalentes. 2º) Demostrar que en este tetraedro, uno cualquiera de los lados del triángulo *ABC*, por ejemplo el *AB*, está igualmente inclinado con respecto a las caras laterales que no contienen a dicho lado (*VAC* y *VCB* en el caso del lado *AB*).

Solución:



1º) Desarrollando el triedro sobre el plano de una de sus caras (por ejemplo *VBC* en la figura de la izquierda) y fijando una longitud arbitraria $VA = VA'$, se tiene que:

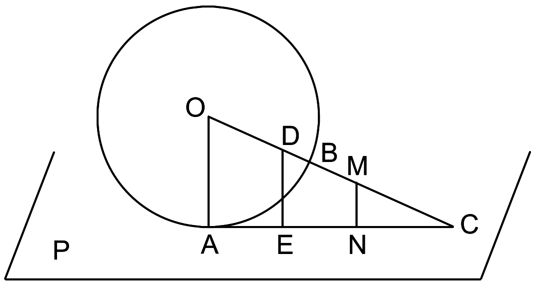
$VA \cdot VB \cdot \sin\widehat{AVB} = VB \cdot VC \cdot \sin\widehat{BVC} = VC \cdot VA \cdot \sin\widehat{CVA}$. Luego *VA* es proporcional a $\sin\widehat{BVC}$, *VB* a $\sin\widehat{CVA}$, y *VC* a $\sin\widehat{AVB}$. 2º) Se traza (figura de la derecha) *BK* perpendicular a la cara *VAC*, y *AO* perpendicular a la cara *VBC*. Los segmentos *BK* y *AO* son iguales, puesto que $\frac{1}{3}S_{VBC} \cdot AO = \frac{1}{3}S_{VAC} \cdot AK$, y como $S_{VBC} = S_{VAC}$, se tiene que $BK = AO$. Los triángulos rectángulos *AKB* y *AOB* son iguales, luego $\widehat{KAB} = \widehat{ABO}$.

J 7- Trazar una esfera que sea tangente a las tres caras de un triedro dado y corte ortogonalmente a otra esfera dada.

Solución: Un lugar geométrico del centro de la esfera es la recta intersección de los tres planos bisectores de los diedros del triedro dado. Las esferas ortogonales a una dada, con sus centros en una recta dada, forman un haz de segundo género, es decir pasan por un punto fijo *P* exterior a la esfera. Por tanto, se trata de trazar una esfera tangente a las caras del triedro y que pasa por un punto. Este problema se resuelve como el análogo E 14, de geometría plana, y como él, tiene dos soluciones (el problema sólo tiene solución si el punto *P* es interior al triedro).

J 8- Una esfera *O* es tangente al plano *P* en el punto *A*. Se traza un radio cualquiera que corta a la esfera en *B* y al plano en *C*. Se halla el conjugado armónico *M* del punto *O* respecto a *BC*. Con centro en *M*, se describe una esfera tangente a *P*. Demostrar 1º) Que esta esfera es tangente a la dada. 2º) Que la esfera de diámetro *OM* es tangente a *P*.

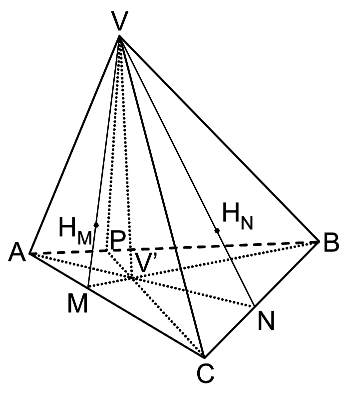
Solución:



1º) Sea $OA = OB = R$, $BM = r$, $MC = a$. $(OMBC) = \frac{R}{R+r+a} \div \frac{-r}{a} = -1$, de donde $aR = r(R+r+a)$. En los triángulos semejantes *OAC* y *MCN*, donde *N* es la proyección de *M* sobre *P*, se tiene $\frac{MN}{R} = \frac{a}{R+r+a}$, es decir $aR = MN(R+r+a)$. Luego $MN = r$, siendo las dos esferas tangentes. 2º) Siendo *D* el punto medio de *OM*, y *E* su proyección sobre *P*, se tiene $DE = \frac{OA+MN}{2} = \frac{R+r}{2} = \frac{OM}{2}$, luego la esfera de diámetro *OM* es tangente a *P*.

J 9- Demostrar que las perpendiculares trazadas a las tres caras de un tetraedro cualquiera, por sus ortocentros respectivos, se proyectan ortogonalmente sobre la cuarta cara, según rectas concurrentes.

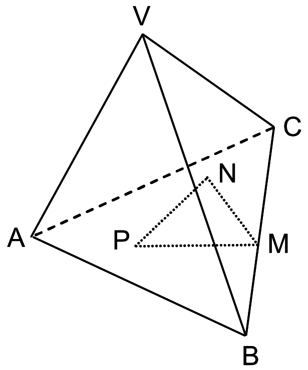
Solución:

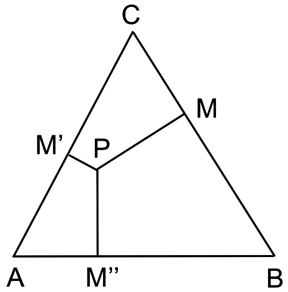


Proyectando ortogonalmente las alturas *VM*, *VN* y *VP* sobre la base *ABC*, se obtienen los planos $VV'M$, $VV'N$ y $VV'P$, perpendiculares a la base y cuyas trazas son $V'M$, $V'N$ y $V'P$. Toda recta contenida en dichos tres planos, se proyecta sobre *ABC* según dichas trazas. Las perpendiculares a las caras laterales por sus ortocentros, están contenidas en dichos planos, por lo que sus proyecciones son concurrentes en V'.

J 10- Demostrar que en toda pirámide regular, si por un punto cualquiera de la base se traza a cada cara lateral rectas que forman con estas caras ángulos de 45º, la suma de estos segmentos es constante.

Solución:



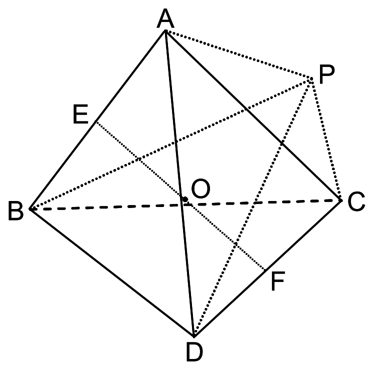


Sea P el punto, y PN, PN', ... los segmentos tales que $\widehat{PNM} = \widehat{PN'M'} = \ldots = 45º$, siendo NM, por ejemplo, la perpendicular trazada en la cara VBC desde N sobre BC. Como los triángulos PNM, $PN'M'$, ... son semejantes, si $PN + PN' + \ldots$ es constante, también lo es $PM + PM' + \ldots$.

Como (figura de la derecha), la superficie S de la base es:
$\frac{1}{2}(BC \cdot PM + CA \cdot PM' + \ldots) = \frac{AB}{2}(PM + PM' + \ldots)$,
se tiene que $PM + PM' + \ldots = \frac{2S}{AB}$, constante.

J 11- Encontrar un punto para el que la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices de un tetraedro, sea mínima.

Solución:



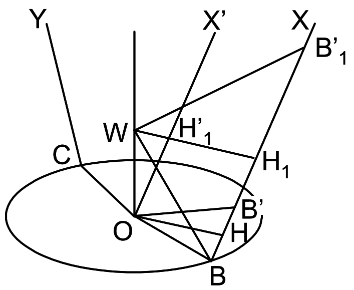
Sea $ABCD$ el tetraedro y P el punto. Se tiene $PA^2 + PB^2 = 2 \cdot PE^2 + \frac{AB^2}{2}$, siendo E el punto medio de AB. Análogamente, $PC^2 + PD^2 = 2 \cdot PF^2 + \frac{DC^2}{2}$, siendo F el punto medio de DC. Luego la suma considerada es igual a $2(PE^2 + PF^2) + \frac{AB^2 + DC^2}{2}$. Como el segundo sumando es constante, el primero ha de ser mínimo, para lo cual P ha de ser el punto medio O de EF.

J 12- Construir un triángulo esférico conociendo el arco de su base BC, el arco de la altura h_a correspondiente a la base, y su área.

Solución: Se lleva sobre la esfera, la base dada, es decir el arco BC. El vértice A se encuentra en los paralelos cuya distancia a BC es el arco h_a. Aplicando el teorema de Lexell, el lugar geométrico de los vértices A de los triángulos esféricos de base dada BC y de igual área S, se compone de dos arcos de círculos menores simétricos con relación al plano del círculo máximo de la base, pasando por los puntos B' y C', diametralmente opuestos a B y C. La intersección de estos círculos con los paralelos anteriores, resuelven el problema.

J 13- Se da una circunferencia O y dos rectas BX y CY que cortan a la circunferencia en B y C, que no son coplanarias entre sí ni con el plano de la circunferencia. Se considera una esfera variable que contiene a la circunferencia y corta a las dos rectas en B' y C'. Demostrar que al variar la esfera, B' y C' describen segmentos proporcionales.

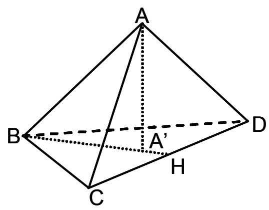
Solución:



La perpendicular al plano del círculo, levantada por su centro O, es el lugar geométrico de los centros W de las esferas. La esfera de centro O corta a BX en B', siendo H el pie de la perpendicular trazada desde O a BB'. La esfera de centro W corta a BX en B y B_1', siendo H_1 el pie de la perpendicular trazada desde W a BB_1'. Por tanto, el recorrido de B' es $BB_1' - BB' = 2(BH_1 - BH) = 2 \bullet HH_1$. Trazando por O la paralela OX' a BX, se tiene que $HH_1 = OH_1' = OW\cos\alpha$, siendo α el ángulo $\widehat{WOX'}$, que es el ángulo de OW con BX. Luego el recorrido de B' es $2\cos\alpha \bullet OW$. Análogamente, el recorrido de C' es $2\cos\beta \bullet OW$, siendo β el ángulo que forma OW con CY'. Luego los recorridos de B' y C' son proporcionales al recorrido del centro W de la esfera.

J 14- En el tetraedro $ABCD$ sean A', B', C' y D' las proyecciones ortogonales de sus vértices sobre las caras opuestas. 1º) Demostrar que si A' está situado sobre la altura BH del triángulo BCD, las aristas AB y CD son ortogonales. 2º) Enunciar y demostrar el recíproco. 3º) Demostrar que si A' se confunde con el ortocentro del triángulo BCD, los puntos B', C' y D' están confundidos respectivamente con los ortocentros de los triángulos ACD, ABD y ABC.

Solución:



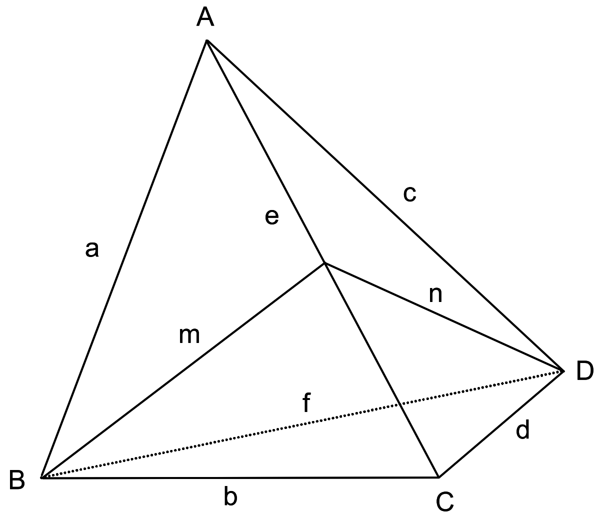
1º) Al proyectar AB sobre BCD, se tiene BH, perpendicular a CD. Luego AB y CD son ortogonales. 2º) Si dos aristas opuestas de un tetraedro son ortogonales, los vértices de una de las aristas ortogonales, se proyectan en las caras opuestas sobre la altura trazada en dichas caras sobre la segunda arista ortogonal. Por ser AB y CD ortogonales, el plano que pasa por AB perpendicular a CD, corta a la cara BCD según la altura BH. Luego la recta AA' contenida en el plano ABH, corta a BH en A', proyección ortogonal de A. 3º) Por estar A' en BH, las aristas AB y CD son ortogonales. Por estar en CH', las aristas BD y AC lo son también, y por tanto también lo son BC y AD. Luego el tetraedro tiene sus aristas opuestas ortogonales, con lo que al proyectar cualquiera de sus vértices sobre la cara opuesta, ha de estar en los tres planos alturas, luego su proyección coincide con el ortocentro.

J 15- Se da una semiesfera y el círculo que la limita. Se traza interiormente una esfera tangente a la semiesfera en B y al plano del círculo, en C. Demostrar que BC pasa por un punto fijo.

Solución: Aplicando una inversión con centro un punto cualquiera de la circunferencia, el plano de esta no varía, la esfera a la que le corresponde la semiesfera dada, se transforma en un plano perpendicular al anterior. La esfera tangente a la semiesfera y al plano, sigue siendo una esfera, ahora tangente a ambos planos. Las rectas BC se transforman en circunferencias que pasan por el centro de inversión y por los puntos de tangencia de las esferas con los dos planos. Como estos círculos son simétricos respecto al plano bisector de los dos planos, y el centro de inversión está en uno de ellos, todas estas circunferencias pasan por el simétrico del centro de inversión respecto del citado plano bisector. Luego todas las circunferencias pasan por un punto fijo, por lo que las rectas BC pasan por un punto fijo situado en la intersección de la semiesfera no considerada, con la perpendicular por el centro al plano dado.

J 16- Demostrar que en un tetraedro 1º) La suma de los cuadrados de dos pares de aristas opuestas es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos aristas, más cuatro veces el cuadrado de la distancia entre los puntos medios de estas últimas. 2º) La suma de los cuadrados de las seis aristas es igual a cuatro veces la suma de los cuadrados de los tres segmentos que unen los puntos medios de aristas opuestas.

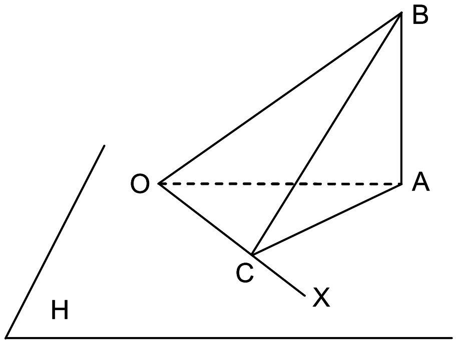
Solución:



Sean los pares de aristas opuestas ad, bc, ef. Sean las distancias entre sus puntos medios D_{ad}, D_{bc}, D_{ef}. Y sea m la mediana en el triángulo ABC, trazada desde B sobre AC, y n la mediana en el triángulo ACD, trazada desde D sobre AC. 1º) Se tiene: $a^2+b^2=\dfrac{e^2}{2}+2m^2$, $c^2+d^2=\dfrac{e^2}{2}+2n^2$, $m^2+n^2=\dfrac{f^2}{2}+2dD_{ef}^2$. Sumando las dos primeras igualdades y teniendo en cuenta la tercera, se obtiene: $a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4D_{ef}^2$. 2º) Sumando las tres igualdades siguientes:
$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4D_{ef}^2$, $a^2+d^2+e^2+f^2=c^2+b^2+4D_{bc}^2$, $b^2+c^2+e^2+f^2=$
$=a^2+d^2+4D_{ad}^2$, se obtiene: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=4(D_{ad}^2+D_{bc}^2+D_{ef}^2)$.

J 17- En un plano H se considera un segmento fijo OA de longitud a, y una semirrecta variable OX que forma en O con OA el ángulo θ agudo. Sobre la perpendicular al plano H por A, se lleva $AB=a$. Sea C el pie de la perpendicular bajada desde B sobre OX. 1º) ¿Qué propiedad es común a todas las caras del tetraedro $OABC$? 2º) Calcular las longitudes de las aristas y el volumen V del tetraedro en función de a y θ. Determinar θ para que $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$, obteniéndose dos soluciones. 3º) ¿Cuál es el volumen del sólido común a los tetraedros correspondientes a dichas dos soluciones? 4º) Hallar en función de a y θ, el ángulo $\varphi=\widehat{BOC}$. Aplicar el resultado al cálculo de φ cuando $\theta=45º$. 5º) Cuando θ varía, ¿cuál es el lugar de C? Demostrar que la esfera circunscrita al tetraedro $OABC$ está fija. Demostrar que el plano tangente en C a esta esfera pasa por un punto fijo a determinar.

Solución:



1º) Las cuatro caras son triángulos rectángulos, pues $\widehat{OCA}=\widehat{CAB}=\widehat{OCB}=\widehat{OAB}=90º$.

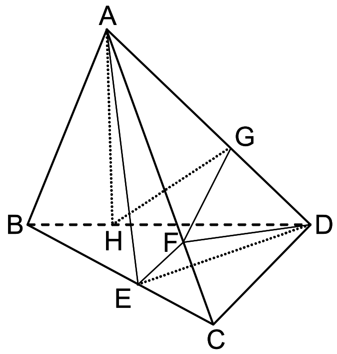
2º) $OA = AB = a$, $OB = a\sqrt{2}$; $\theta = \widehat{AOC}$, $OC = a\cos\theta$, $AC = a\sin\theta$, $BC = a\sqrt{1+\sin^2\theta}$; $V = \frac{1}{6} \cdot OC \cdot AC \cdot AB = \frac{a^3 \sin\theta\cos\theta}{6} = \frac{a^3 \sin 2\theta}{12}$; $\frac{a^3\sqrt{3}}{24} = \frac{a^3 \sin 2\theta}{12}$, $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de donde los dos valores de θ son 30º y 60º. 3º) El área de la base común es $\frac{1}{2}a\frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. El volumen común es $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. 4º) $\tan\varphi = \frac{BC}{OC} = \frac{a\sqrt{1+\sin^2\theta}}{a\cos\theta} = \frac{\sqrt{1+\sin^2\theta}}{\cos\theta}$, luego $\cos\varphi = \frac{OC}{OB} = \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2}$, $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2}\right) = \arccos\frac{1}{2} = 60º$. 5º) Como el ángulo $\widehat{OCA} = 90º$, el punto C describe la circunferencia de diámetro OA. La esfera circunscrita es la determinada por este círculo y el punto B, por lo que es fija. Como C describe un círculo menor, todos los planos tangentes lo son también a las generatrices del cono tangente, luego todos los planos pasan por el vértice del cono, siendo este punto el conjugado armónico del punto medio de OA respecto de los puntos en que corta a la esfera el diámetro perpendicular a OA.

J 18- Se da un triángulo equilátero ABC de lado a. 1º) Demostrar que existe un punto P del espacio, tal que el tetraedro $PABC$ formado sea regular. ¿Este punto es único? Calcular la altura y el volumen en función de a. 2º) ¿Existe un punto O tal que los triángulos AOB, BOC y COA sean rectángulos en O? ¿Sobre qué recta se encontrará? Precisar su posición calculando su distancia al plano ABC. Exponer qué les pasa a estos triángulos si el punto O es único. 3º) M es un punto de PB. Se pone $PM = x \cdot PB$. Sea M' el punto de PC tal que $CM' = PM$. Calcular en función de a y de x los volúmenes V y V' de los tetraedros $PACM$ y $PAM'M$. 4º) Estudiar las variaciones del cociente $y = \frac{V'}{v}$ en función de x, siendo v el volumen del tetraedro $PABC$, cuando el punto M se desplaza entre P y B. Determinar las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje X, calculando el ángulo que forma con este eje.

Solución: 1º) La altura del tetraedro es $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, luego trazando por el centro del triángulo ABC una perpendicular a su plano, y llevando la distancia $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ sobre la perpendicular, a ambos lados del plano, se obtienen los puntos simétricos P y P' que dan dos tetraedros regulares de volumen $v = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
2º) Existen dos puntos O simétricos respecto al plano ABC, que se encuentran sobre la perpendicular a dicho plano, trazada por el centro del triángulo ABC, de forma que $OA = OB = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. La distancia H desde O al citado plano, viene dada por $H^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}$, es decir $H = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Todos los triángulos de las caras, en este caso, son isósceles. 3º) Superficie del triángulo $PAM = \frac{1}{2}aax\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}\,x}{4}$. Altura de C sobre $APB = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Luego $V = \frac{a^3\sqrt{2}\,x}{12}$. Altura de M' sobre $APB = \frac{a(1-x)\sqrt{6}}{3}$. Luego $V' = \frac{a^3x(1-x)\sqrt{2}}{12}$. 4º) $y = \frac{a^3x(1-x)\sqrt{2}}{12} \div \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = x(1-x)$. Se trata de una parábola que corta al eje X en los puntos (0, 0) y (1, 0). La tangente en (0, 0) forma un ángulo de 45º con el eje X, y la tangente en (1, 0), lo forma de 135º.

J 19- Un plano divide a dos aristas opuestas de un tetraedro en una relación dada. Estudiar esta relación para que el tetraedro quede dividido en dos sólidos cuyos volúmenes estén en la misma relación.

Solución:



El plano corta a las aristas AD y BC en los puntos G y E, teniéndose $\frac{GA}{GD} = \frac{EB}{EC} = k$. El plano corta también al par de aristas opuestas AC y BD en F y H, respectivamente, quedando el tetraedro dividido en dos cuerpos: $ABEFGH$ y $CDEFGH$. En el cuadrilátero alabeado $ADBC$ cuyos lados son cortados por el plano en G, H, E y F, se tiene que $\frac{GA}{GD} \cdot \frac{HD}{HB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1 = k^2 \cdot \frac{HD}{HB} \cdot \frac{FC}{FA}$. Luego $\frac{HD}{HB} = \frac{m}{k}$ y $\frac{FC}{FA} = \frac{1}{km}$. El cuerpo $ABEFGH$ está formado por la pirámide cuadrangular $AEFGH$ y la pirámide triangular $ABHE$. Análogamente, el cuerpo $CDEFGH$ está formado por la pirámide cuadrangular $DEFGH$ y la pirámide triangular $DEFC$. Las dos pirámides cuadrangulares tienen la misma base $EFGH$ y sus respectivas alturas son proporcionales a AG y DG, luego la relación de sus volúmenes es la de $\frac{AG}{DG} = k$. La relación entre el volumen de la pirámide triangular $ABHE$ y el volumen del tetraedro dado, es igual a la relación de sus bases, pues tienen la misma altura, que es la distancia de A al plano BCD. La relación de sus bases es:

$$\frac{BH \cdot BE}{BD \cdot BC} = \frac{BH \cdot BE}{(BH+HD)(BE+EC)} = \frac{1}{\left(1+\frac{HD}{BH}\right)\left(1+\frac{EC}{BE}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{m}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \frac{k^2}{(k+m)(k+1)}.$$

La relación de los volúmenes del tetraedro dado y de la pirámide triangular $DEFC$, es igual a la relación de sus bases ABC y EFC, pues sus alturas son iguales (la distancia de D al plano ABC). La relación de sus bases es $\frac{CB \cdot CA}{CE \cdot CF} = \frac{(CE+EB)(CF+FA)}{CE \cdot CF} = \left(1+\frac{EB}{CE}\right)\left(1+\frac{FA}{CF}\right) = (1+k)(1+km)$.

Multiplicando las dos relaciones se tiene la relación entre los volúmenes de las dos pirámides triangulares, que es $\frac{k^2(1+k)(1+km)}{(k+m)(k+1)} = \frac{k^2(1+km)}{k+m}$. Para que la relación de los volúmenes de los dos cuerpos, sea k, y como la de las pirámides cuadrangulares es k, la de las pirámides triangulares ha de serlo también, luego $\frac{k^2(1+km)}{k+m} = k$, de donde $k = 1$, pudiendo tomar m cualquier valor. Por tanto, se deduce que todo plano trazado por los puntos medios ($k = 1$) de dos aristas opuestas de un tetraedro, divide a este en dos partes equivalentes.

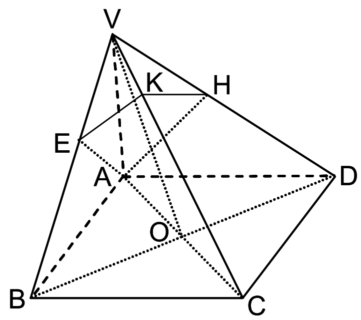
J 20- Se da un tetraedro $ABCD$. Hallar un punto P tal que la potencia de A respecto a la esfera de diámetro PC, la potencia de C respecto a la esfera de diámetro PB, la de B respecto a la esfera de diámetro PD, y la de D respecto a la esfera de diámetro PA, sean proporcionales a las cantidades dadas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

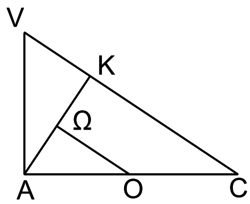
Solución: La potencia de A respecto a la esfera de diámetro PC, es $AC \cdot AA' = k\alpha$, de donde $AA' = \frac{k\alpha}{AC}$. Análogamente, $CC' = \frac{k\beta}{CB}$, $BB' = \frac{k\gamma}{BD}$, $DD' = \frac{k\delta}{DA}$. Las rectas PA', PB', PC' y PD' son perpendiculares, respectivamente, a AC, BD, BC y AD. Siendo x, y, z, t las distancias de P a AC, BD, BC y AD, se tiene $PA^2 = x^2 + AA'^2 = t^2 + AD'^2 = x^2 + \frac{k^2\alpha^2}{AC^2} = t^2 + \left(AD - \frac{k\delta}{AD}\right)^2$. Sus análogas son $y^2 + \frac{k^2\gamma^2}{BD^2} = z^2 + \left(BC - \frac{k\beta}{CB}\right)^2$, $z^2 + \frac{k^2\beta^2}{CD^2} = x^2 + \left(AC - \frac{k\alpha}{AC}\right)^2$,

$t^2 + \dfrac{k^2\gamma^2}{DA^2} = y^2 + \left(DB - \dfrac{k\gamma}{BD}\right)^2$. Sumando estas cuatro igualdades se tiene $k = \dfrac{AD^2 + BC^2 + AC^2 + DB^2}{2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} = \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$. Por tanto se conocen los puntos A', B', C' y D', pues $AA' = \dfrac{\alpha}{AC} \cdot \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$, etc. Se trazan los planos perpendiculares a AC en A', a CD en C', etc., que se cortan en P.

J 21- Se considera la pirámide *VABCD*, cuya base es un cuadrado de lado a, estando el vértice V en la perpendicular por A a la base y a una distancia $AV = h$. Desde A se traza AE perpendicular a VB, y AH perpendicular a VD. 1º) Demostrar que AE y AH son perpendiculares a las caras *VBC* y *VDC*, y que el plano *EAH* es normal a la arista VC en el punto K. 2º) Demostrar que las diagonales del cuadrilátero *AEKH* son rectangulares. Hallar su superficie en función de a y h. Calcular el volumen w de la pirámide *VAEKH* y el cociente $\dfrac{w}{W}$, siendo W el volumen de *VABCD*. Calcular las longitudes de VA, VC y VD para que $\dfrac{w}{W} = \dfrac{1}{3}$. 3º) Demostrar que el centro O del cuadrado *ABCD* equidista de los puntos A, E, K y H, que $BK = DK = a$, y que la distancia del punto O al plano *AEKH* es igual a la mitad de CK. Dar la expresión del volumen de la porción de esfera de centro O y radio OA, comprendida entre los planos *ABCD* y *AEKH*.

Solución:





1º) La arista BC es perpendicular a *VAB*, y en particular a AE. Como AE es perpendicular a VB, AE lo es a *VBC*. Análogamente, AH es perpendicular a *VDC*. Como VC es perpendicular a AE y a AH, lo es a su plano *AEH* en su punto de corte K. 2º) Se tiene que $AE = AH$ y $CE = CH$, ya que el plano *VAC* es de simetría del tetraedro. Luego AK y EH son perpendiculares. La superficie del cuadrilátero es $S_{AEKH} = \dfrac{EH \cdot AK}{2}$. En el triángulo *VAC*, la altura es AK, luego $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{VA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{2a^2}$, de donde $AK = \dfrac{ah\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. En los triángulos homotéticos *VEH* y *VBD*, se tiene $\dfrac{EH}{BD} = \dfrac{VE}{VB}$, $EH = \dfrac{BD \cdot VE}{VB}$. Como $VE = \dfrac{VA^2}{VB}$, $EH = \dfrac{ah^2\sqrt{2}}{a^2+h^2}$, luego $S_{AEKH} = \dfrac{a^2h^3}{(a^2+h^2)\sqrt{2a^2+h^2}}$. En el triángulo *VAC*, $VK = \dfrac{VA^2}{VC} = \dfrac{h^2}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. Luego $w = S_{AEKH} \cdot \dfrac{VK}{3} = \dfrac{a^2h^5}{3(a^2+h^2)(2a^2+h^2)}$. Como $W = \dfrac{a^2h}{3}$, se tiene que: $\dfrac{w}{W} = \dfrac{h^4}{(a^2+h^2)(2a^2+h^2)}$. Para $\dfrac{w}{W} = \dfrac{1}{3}$, se tiene $2h^4 - 3a^2h^3 - 2a^4 = 0$, de donde $h = a\sqrt{2}$. Luego $VA = a\sqrt{2}$, $VC = 2a$, $VD = VB = a\sqrt{2}$. 3º) Como $VA^2 = VB \cdot VE = VK \cdot VC = VH \cdot VD$, los puntos A, E, B, K, C, H y D están en una esfera tangente a VA en A, de centro O y radio $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. En el triángulo rectángulo *BOK*, se tiene que $BK^2 = BO^2 + OK^2 = a^2$. Análogamente, $DK^2 = a^2$. Luego $BK = DK$. Los planos *VAC* y *EAH* son perpendiculares. El plano *VAC* contiene a $O\Omega$, perpendicular por O al plano *EAH*. Como $O\Omega$ y CK son perpendiculares a AK (figura de la derecha), $O\Omega$ es paralela a CK. Siendo O el punto medio de AC, se tiene que $O\Omega = \dfrac{CK}{2} = \dfrac{a^2}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. El volumen pedido correspondiente a la esfera de centro O y radio OA, comprendido entre los planos *ABCD* y *AEKH*, es igual a la mitad del volumen de la esfera menos el volumen del segmento esférico limitado por el plano *AEKH*. El volumen de la semiesfera es:

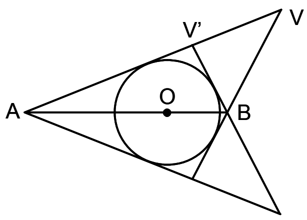
$\dfrac{2\pi \bullet OA^3}{3} = \dfrac{a^3\pi\sqrt{2}}{6}$. La altura del segmento esférico es:

$OA - O\Omega = OA - \dfrac{CK}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - \dfrac{a^2}{\sqrt{2a^2+h^2}}$, y su volumen, $\dfrac{\pi a^3}{6}\left[\sqrt{2} - a\dfrac{4a^2+3h^2}{(2a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$.

Por tanto, el volumen pedido es: $\dfrac{\pi a^4(4a^2+3h^2)}{6(2a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

J 22- Se da una esfera de centro *O*, y dos puntos fijos, *A* y *B*, situados en la prolongación de uno de sus diámetros. Hallar el lugar geométrico de los vértices de las superficies cónicas tangentes a la esfera y que pasan por los puntos *A* y *B*.

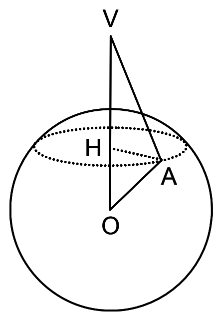
Solución:



Sea una superficie cónica de vértice *V*, tangente a la esfera *O*. El plano *P* que pasa por *AB*, corta a la esfera según un círculo máximo. Sean las tangentes *VA* y *VB* que se cortan en *V* y que están contenidas en el plano *P*. Al girar este plano alrededor de *AB*, *V* describe una circunferencia, que es el lugar pedido. El mismo razonamiento para el vértice V'.

J 23- Demostrar que si un polígono está inscrito en una esfera, los planos tangentes a la esfera en los vértices del polígono, se cortan en un punto.

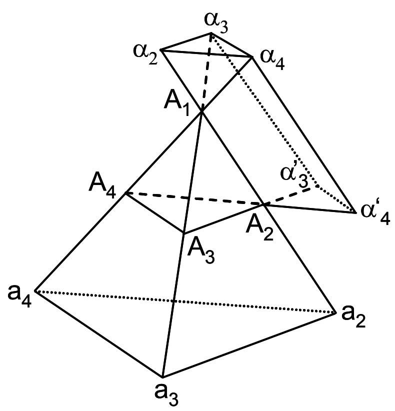
Solución:



Sea *O* el centro de la esfera, y sea *H* el centro de la circunferencia que forma el plano del polígono al cortar la esfera, y sobre la que están los vértices del polígono. Sea *A* uno de estos. Sea *V* la intersección del plano tangente a la esfera en *A*, con la perpendicular *OH* al plano del polígono. En el triángulo rectángulo *OAV*, se tiene: $OA^2 = OH \bullet OV$, luego *OV* es constante, y el punto *V* es fijo.

J 24- Hallar y razonar el número de esferas tangentes a un tetraedro cualquiera.

Solución:



Los planos de las caras de un tetraedro dividen el espacio en quince regiones: a) Espacio $A_1A_2A_3A_4$, ocupado por el tetraedro. b) Cuatro triedros, uno por cada vértice, opuestos en cada vértice al triedro correspondiente al tetraedro (por ejemplo, $A_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$). c) Cuatro troncos de pirámide, indefinidos, uno por cada cara (por ejemplo, $A_2A_3A_4a_2a_3a_4$). d) Seis "tejados", uno por cada arista (por ejemplo, $A_1A_2\alpha_3\alpha_4\alpha_3'\alpha_4'$). A la región definida en a) le corresponde una esfera inscrita. A las regiones definidas en b), no les corresponde ninguna esfera inscrita tangente a las cuatro caras, pues, por ejemplo, la esfera situada en el triedro $A_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, no puede ser tangente a la cara $A_2A_3A_4$. A las regiones definidas en c), les corresponde cuatro esferas, una por cada tronco, llamadas esferas exinscritas. En cuanto a los seis "tejados", definidos en d), pueden tener uno de cada dos, cuyas aristas sean opuestas, una esfera tangente o ninguna; por tanto, en estas regiones, puede haber una, dos, tres o ninguna esfera tangente a las cuatro caras. En total, hay como mínimo cinco esferas tangentes a los cuatro planos de un tetraedro (una inscrita y cuatro exinscritas), y como máximo, ocho esferas.

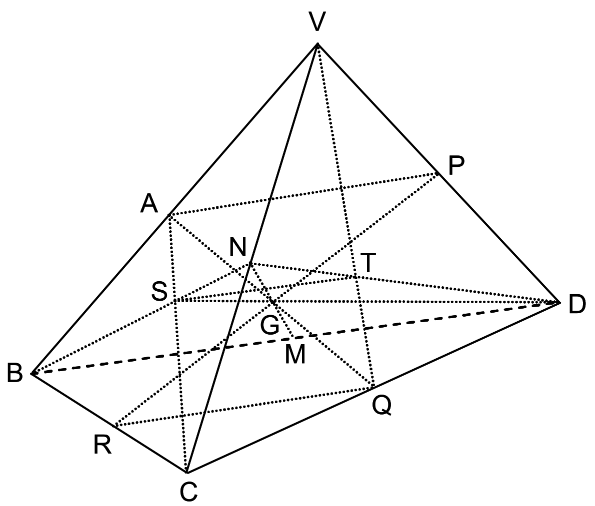
Nota: Para estudiar en detalle las regiones d), se utilizan a continuación las coordenadas tetraédricas de un punto M del espacio, definidas como las distancias del punto a las caras del tetraedro, consideradas como positivas si el punto y el vértice están en el mismo lado de la correspondiente cara, y negativas en el caso contrario. Las coordenadas tetraédricas de un punto del espacio, satisfacen la relación $s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3+s_4x_4=3v$, siendo s_k el área de la cara opuesta al vértice A_k, y v el volumen del tetraedro. Siendo r el radio de la esfera tangente a las caras del tetraedro, situada en una región d), en la que la arista es A_iA_k y la arista opuesta $A_i'A_k'$, las coordenadas del centro de la esfera son: $x_i=r,\quad x_k=r,\quad x_i'=-r,\quad x_k'=-r$. Luego $r=\dfrac{3v}{s_i+s_k-s_i'-s_k'}$, con lo que si $s_i+s_k>s_i'+s_{k,}'$, hay una esfera tangente en el "tejado" definido por la arista A_iA_k, no pudiendo haberla en el correspondiente a la arista opuesta. Si $s_i+s_k=s_i'+s_k'$, no hay esfera tangente en ninguno de los dos "tejados".

J 25- Construir un tetraedro conociendo los seis puntos medios de las aristas. Definir las condiciones de posibilidad de la construcción.

Solución: Las rectas que unen los puntos medios de aristas opuestas de un tetraedro, se cortan en un punto que es el punto medio de cada una de dichas rectas. Luego los puntos medios de las seis aristas del tetraedro, forman un octaedro cuyas aristas opuestas son iguales y paralelas. Tomando tres puntos medios, se obtiene un plano que es una de las caras del octaedro. Se traza el triángulo cuyo triángulo mediano es el anterior, y este triángulo es una cara del tetraedro. Procediendo de la misma forma con otra cara, se obtiene el cuarto vértice. La condición de posibilidad consiste en que los seis puntos dados deben formar un octaedro cuyas aristas opuestas han de ser iguales y paralelas.

J 26- Demostrar que en un tetraedro 1º) Las tres rectas que unen los puntos medios de aristas opuestas se cortan en un mismo punto G, que es el punto medio de cada una de ellas. 2º) Los seis planos medianos (planos que pasan por una arista y por el punto medio de la arista opuesta) pasan por G. 3º) Las cuatro medianas (rectas que unen cada vértice con el centro de gravedad de la cara opuesta) pasan por G, que está situado a $\frac{1}{4}$ de la mediana a partir del centro de gravedad de la cara.

Solución:



Sea el tetraedro $VBCD$. Los puntos medios de las aristas son A, N, P, R, Q y M. 1º) Las rectas AQ

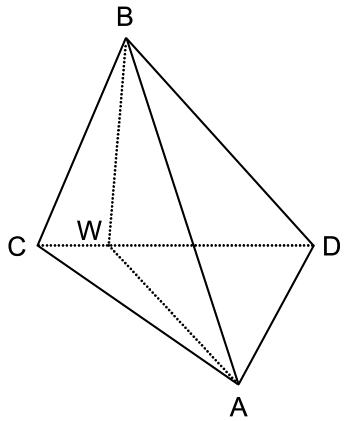
y *PR* son diagonales del paralelogramo *APQR*, cortándose en su punto medio *G*. Lo mismo para *AQ* y *MN*, que por la misma razón se cortan en *G*. 2º) El plano *VBQ*, que contiene a la recta *AQ*, pasa por *G*. De la misma forma los otros cinco planos medianos también pasan por *G*. 3º) Los triángulos *SGT* y *GBD* son semejantes, luego $\frac{ST}{BD} = \frac{SG}{GD}$. Las medianas *NB* y *ND* dan $\frac{NS}{NB} = \frac{NT}{ND} = \frac{ST}{BD} = \frac{1}{3}$. Luego, $\frac{SG}{GD} = \frac{1}{3}$, y $\frac{SG}{SD} = \frac{1}{4}$. Por tanto, el punto *G* es el baricentro o centro de gravedad del tetraedro.

J 27- Demostrar que el punto *G*, intersección de las medianas, es el centro de gravedad del conjunto de las caras del tetraedro.

Solución: Sustituyendo una cara del tetraedro por su centro de gravedad con coeficiente tres, el centro de gravedad del tetraedro está a $\frac{3}{4}$ de la mediana contando a partir del vértice opuesto, es decir que está en *G*. Sustituyendo las cuatro caras, su centro de gravedad es *G*.

J 28- Demostrar que los planos bisectores de los diedros de un tetraedro, dividen a las aristas opuestas en dos segmentos proporcionales a las áreas de las caras que forman el diedro.

Solución:



Sea *ABW* el plano bisector del diedro cuya arista es *AB*. Se tiene que $\frac{S_{BCW}}{S_{DBW}} = \frac{WC}{WD}$, por tener los triángulos *SWC* y *SWD* la misma altura. Las pirámides *BWAC* y *BWAD* tienen la misma altura, por lo que $\frac{V_{BWAC}}{V_{BWAD}} = \frac{S_{BCW}}{S_{DBW}} = \frac{WC}{WD}$. Como las distancias de *W* a *ABC* y a *ABD* son iguales, se tiene que $\frac{V_{BWAC}}{V_{BWAD}} = \frac{S_{BCA}}{S_{BDA}} = \frac{WC}{WD}$.

J 29- Demostrar que en un tetraedro cuyas aristas son tangentes a una esfera, la suma de las aristas opuestas es constante.

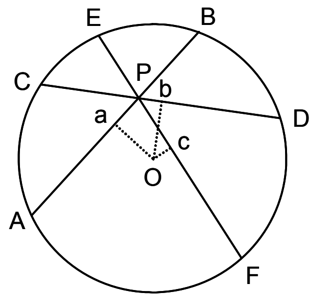
Solución: Sea el tetraedro *ABCD*, y sean *E*, *F*, *G*, *H*, *I* y *J* los puntos de tangencia respectivamente, de *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD* y *CD*. Como $AE = AF$, $BE = BI$, $CJ = CF$, $DJ = DI$, se tiene que $AE + EB + CJ + DJ = AF + BI + CF + DI = AC + BD$.

J 30- Demostrar que en todo paralelepípedo, la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las doce aristas.

Solución: Las cuatro diagonales del paralelepípedo se cortan en un punto, formándose seis paralelogramos al combinar dos a dos las cuatro diagonales. Aplicando a cada paralelogramo que la suma de los cuadrados de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus cuatro lados, y sumando las seis igualdades, se obtiene lo expuesto en el enunciado.

J 31- Demostrar que si por un punto P, situado en el interior de una esfera de radio R y centro O, se trazan tres planos perpendiculares entre sí, la suma de las áreas de los círculos que determinan en la esfera, es constante.

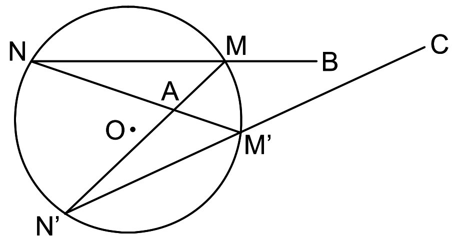
Solución:



Cortando el conjunto por un plano que pase por OP, se tienen las trazas de los tres planos, AB, CD, EF. Trazando desde O las perpendiculares a los tres planos, se tienen los pies a, b, c. Se tiene: $Oa^2 = R^2 - aB^2$, $Ob^2 = R^2 - bD^2$, $Oc^2 = R^2 - cE^2$. Sumando estas tres igualdades y multiplicando por π, se tiene: $\pi(Oa^2 + Ob^2 + Oc^2) = 3\pi R^2 - \pi(aB^2 + bD^2 + cE^2)$. Ahora bien, como Oa, Ob, Oc son las aristas de un paralelepípedo recto de diagonal OP, se tiene: $\pi(aB^2 + bD^2 + cE^2) = 3\pi R^2 - OP^2$, constante.

J 32- Se da una esfera de centro O, y un punto A. Se corta la esfera por un plano P, y se toma el círculo así obtenido como directriz de un cono que tiene por vértice A. Este cono corta de nuevo a la esfera según una circunferencia situada en el plano Q. Demostrar que si se hace variar el plano P de manera que pase siempre por un punto fijo B, el plano Q pasa también por un punto fijo C.

Solución:



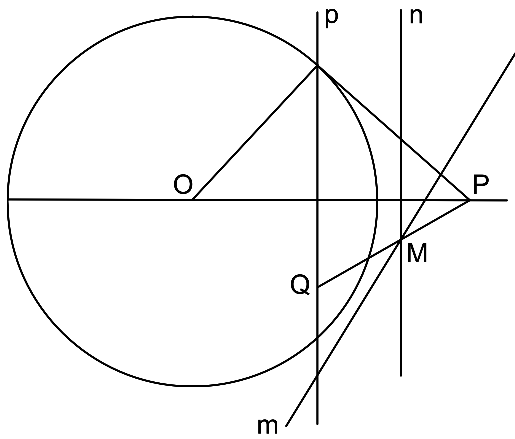
Cortando la esfera por el plano OAB, las secantes BMN forman una involución sobre el círculo sección. Proyectándola desde A, se tiene otra involución $M'N'$. Las rectas $M'N'$ pasan por un punto fijo C, que es el punto de Frégier de esta involución. Por tanto, todos los planos Q pasan por C.

J 33- Determinar razonadamente los valores numéricos entre los que puede oscilar el número V de vértices de los poliedros convexos de cien aristas.

Solución: Como $2A > 3V$, $200 > 3V$, luego el número de vértices ha de ser igual o menor que 66. Como $2A > 3C$, el número de caras ha de ser igual o menor que 66. Como $V + C = 102$, el número de vértices ha de ser mayor que $102 - 66$, es decir ≥ 36. Luego $36 \leq V \leq 66$.

J 34- Demostrar que los planos polares de un punto cualquiera del espacio respecto a las esferas de un haz, pasan por una determinada recta fija.

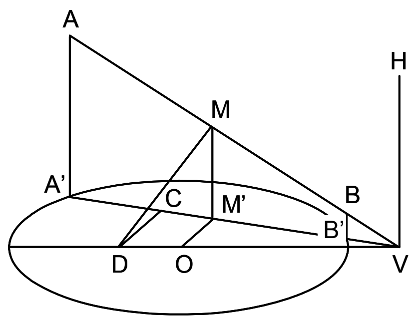
Solución:



En el plano, las polares de un punto P cualquiera respecto a un haz de círculos, pasan por un punto fijo. En efecto, sea O un círculo del haz y sea m el eje radical del haz. Sea n el eje radical de P y O, que equidista de P y de su polar p respecto a O. El punto M, intersección de m y n, tiene la misma potencia respecto a P y a todos los círculos del haz. Luego todos los ejes radicales de P y de cualquier círculo del haz, pasan por M. Como el eje radical correspondiente a un punto y a un círculo, equidista del punto y de su polar respecto a dicho círculo, las polares de P respecto a todos los círculos del haz, pasan por Q, simétrico de P respecto de M. Razonando similarmente en el espacio, sea Ω una esfera del haz, y Π el plano radical del haz. Sea Π' el plano radical de P y Ω, que equidista de P y de su plano polar Π'' respecto a Ω. Todos los puntos de la recta m, intersección de Π y Π', tienen la misma potencia respecto a P y a todas las esferas del haz. Luego todos los planos radicales de P y de cualquier esfera del haz, pasan por m. Como el plano radical correspondiente a un punto y a una esfera, equidista del punto y de su plano polar respecto a dicha esfera, los planos polares de P respecto a todas las esferas del haz, pasan por la recta n, situada en el plano formado por p y m, y tal que la recta m equidista de ella y de P.

J 35- Demostrar que la intersección de una superficie cilíndrica de revolución con una superficie cónica de revolución, es una línea esférica.

Solución:



Sea la base del cilindro de revolución la circunferencia de centro O y radio r, siendo sus generatrices perpendiculares al plano de la base. Sea V el vértice del cono, situado en dicho plano, siendo θ el ángulo cónico formado por sus generatrices con el eje, y sea este la perpendicular trazada por V al plano del círculo de centro O. Sea VBA una generatriz del cono, cuya proyección sobre el plano del círculo, es $VA'B'$. Los puntos de dicha generatriz, comunes con generatrices del cilindro, son A y B. Siendo M el punto medio de AB, se traza por él el plano perpendicular a VAB, que corta a VO en D, y a VA' en C. Siendo M' la proyección de M sobre el plano del círculo, se tiene: $VC = \dfrac{VM}{\sin\theta}$, $VM' = VM\sin\theta$, $VD = \dfrac{VO \cdot VC}{VM'} = VO \cdot \dfrac{VM}{\sin\theta} \cdot \dfrac{1}{VM\sin\theta} = \dfrac{VO}{\sin^2\theta}$.

Luego D es un punto fijo situado en VO a una distancia de V igual a $\dfrac{VO}{\sin^2\theta}$. Como $VB \cdot VA = VD^2 - AD^2 = \dfrac{VO^2}{\sin^4\theta} - AD^2$, y siendo $VA \cdot VB = \dfrac{VA'}{\sin\theta} \cdot \dfrac{VB'}{\sin\theta} = \dfrac{VO^2 - r^2}{\sin^2\theta}$, se tiene: $AD^2 = \dfrac{VO^2}{\sin^4\theta} - \dfrac{VO^2 - r^2}{\sin^2\theta} = \dfrac{VO^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{\sin^4\theta}$, que es constante. Por tanto, siendo D fijo, y constante la distancia AD, el lugar geométrico de A es una línea esférica.

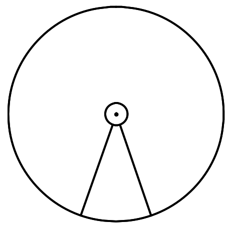
J 36- Demostrar que en un tetraedro de aristas opuestas ortogonales, los productos de las aristas opuestas son inversamente proporcionales a sus mínimas distancias.

Solución: Sean aa', bb', cc', las aristas opuestas de un tetraedro $ABCD$. Y sean α, β, γ sus respectivas distancias mínimas. El volumen del tetraedro viene dado por las expresiones $V = \dfrac{aa'\alpha}{6} = \dfrac{bb'\beta}{6} = \dfrac{cc'\gamma}{6}$. Luego: $\dfrac{aa'}{\frac{1}{\alpha}} = \dfrac{bb'}{\frac{1}{\beta}} = \dfrac{cc'}{\frac{1}{\gamma}}$.

Sección K - ÁREAS Y VOLÚMENES

K 1- El desarrollo del área lateral de un tronco de cono es un sector de corona circular de radios $1\,\text{cm}$ y $15\,\text{cm}$, y de ángulo central $\frac{\pi}{5}$ rad. Calcular el área total y el volumen del tronco de cono.

Solución:



Área lateral del tronco de cono: $\pi(15^2 - 1^2) \cdot \dfrac{\frac{\pi}{5}}{2\pi} = 22{,}4\pi\,\text{cm}^2$. Radio de la base menor: $\dfrac{2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \frac{1}{2\pi}}{2\pi} = 0{,}1\,\text{cm}$. Radio de la base mayor: $\dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \frac{1}{2\pi}}{2\pi} = 1{,}5\,\text{cm}$. Área de la base menor: $0{,}01\pi\,\text{cm}^2$. Área de la base mayor: $2{,}25\pi\,\text{cm}^2$.

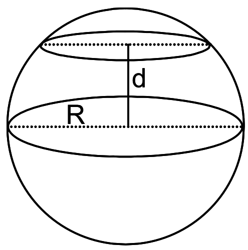
Área total: $22{,}4\pi + 2{,}26\pi = 24{,}66\pi\,\text{cm}^2 = 77{,}58\,\text{cm}^2$.

Altura del tronco de cono: $\sqrt{(15-1)^2 - (1{,}5-0{,}1)^2} = \sqrt{194{,}04}$.

Volumen del tronco de cono: $\frac{\pi}{3}\sqrt{194{,}04}\,(1{,}5^2 + 0{,}1^2 + 1{,}5 \cdot 0{,}1) = 11{,}19\pi\,\text{cm}^3 = 35{,}15\,\text{cm}^3$.

K 2- ¿A qué distancia del centro de una esfera de radio R hay que trazar un plano para que la relación de las áreas de los dos casquetes sea $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$?

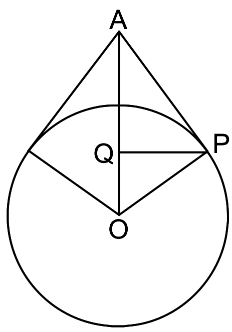
Solución:



Área de la esfera: $4\pi R^2$. Área del casquete menor: $2\pi Rh = 2\pi R(R-d)$. Área del casquete mayor: $4\pi R^2 - 2\pi R(R-d)$. Luego $\dfrac{2\pi R(R-d)}{4\pi R^2 - 2\pi R(R-d)} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. De donde $d = R\left(\sqrt{5}-2\right)$.

K 3- Un aviador se eleva a $12\,\text{km}$ sobre el nivel del mar. Supuesta la Tierra esférica y de radio $6400\,\text{km}$, hallar el área visible desde esa altura.

Solución:

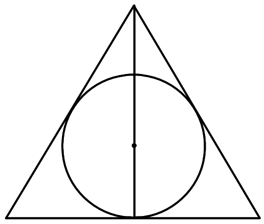


La superficie del casquete visible es:

$2\pi R(R - OQ) = 2\pi \cdot 6400\left(6400 - \dfrac{R^2}{6412}\right) = 153312{,}539\pi = 481645{,}5462\,\text{km}^2$.

K 4- Circunscribir a una esfera dada, un cono de revolución de volumen mínimo, con la base tangente a la esfera.

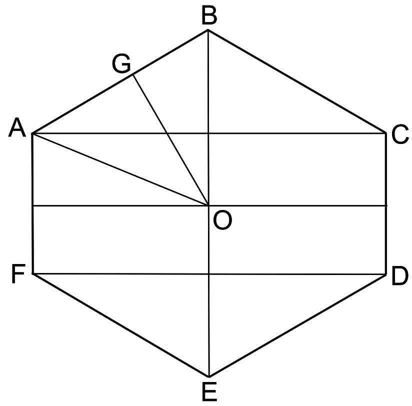
Solución:



Siendo R el radio de la esfera, r el radio de la base del cono, y h su altura, el volumen del cono es: $V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2h^2}{h-2R}$. Derivando e igualando a cero: $2h(h-2R) - h^2 = 0$. De donde $h = 4R$, y $r = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 4R}{4R-2R}} = R\sqrt{2}$. Luego la altura del cono es $4R$ y el radio de su base $R\sqrt{2}$.

K 5- Determinar los elementos del dodecaedro regular, en función de su arista a.

Solución:



Diagonal del pentágono de las caras: $d = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$.

Altura del pentágono de las caras: $h = \sqrt{d^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$.

Distancia δ entre dos aristas opuestas: $\frac{a^2\left(5+2\sqrt{5}\right)}{4} + \frac{\delta^2}{4} = \frac{\delta^2}{4} - \frac{a\delta}{2} + \frac{a^2}{4}$. De donde, $\delta = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2}$.

Radio de la esfera circunscrita: $R = \frac{\delta}{2} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$.

Radio de la esfera tangente a las aristas: $\rho = \frac{\delta}{2} = \frac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$.

Diagonal: $\Delta = \sqrt{\frac{a^2}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{2} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$.

Radio de la esfera inscrita: $r = \sqrt{\frac{a^2}{16}3\left(6+2\sqrt{5}\right) - \frac{4a^2}{10-2\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

Altura: $D = 2r = a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

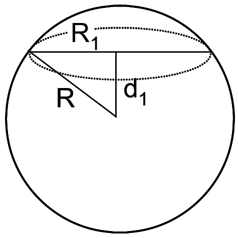
Ángulo de dos caras: $2\arctan\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 116º33'54''2$.

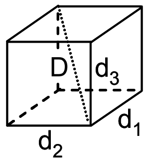
Área: $S = 30a\frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.

Volumen: $V = S\frac{r}{3} = \frac{a^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}} = \frac{a^3}{4}\left(7\sqrt{5}+15\right)$.

K 6- Probar que si la distancia desde el vértice de un triedro trirrectángulo al centro de una esfera es constante, también lo es la suma de las áreas de las secciones producidas en la esfera por las caras del tetraedro.

Solución:

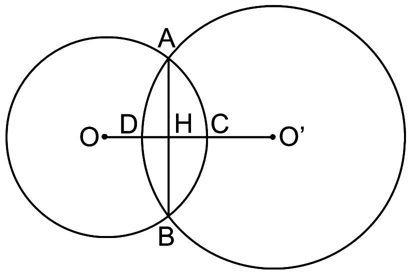




Siendo R_i el radio del círculo que se forma al cortar la esfera por el plano de una cara del triedro, y d_i la distancia del centro de la esfera a dicho plano, se tiene:
$S = \pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) = \pi[3R^2 - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)] = \pi(3R^2 - D^2)$, que es constante.

K 7- Hallar el volumen de una lente esférica biconvexa, en función de su área y de su máximo espesor.

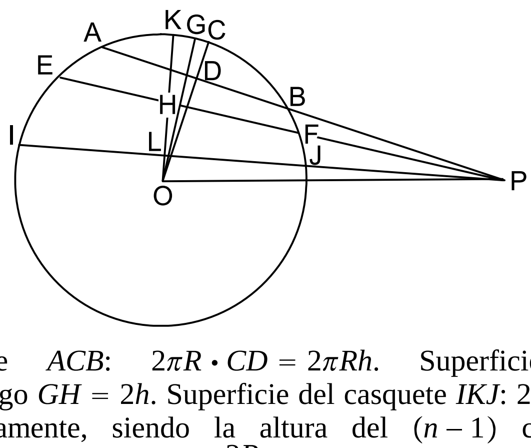
Solución:



Se conoce $S = s + s'$ y $E = e + e'$, siendo s y s' las superficies de los casquetes esféricos de las lentes, y e y e' sus espesores (alturas de los casquetes). $S = \pi(r^2 + e^2) + \pi(r^2 + e'^2)$, siendo r el radio de la base de los casquetes esféricos. Luego $r^2 = \dfrac{S}{2\pi} - \dfrac{e^2 + e'^2}{2}$. El volumen de la lente es:
$V = v + v' = \dfrac{\pi}{2}e\left(r^2 + \dfrac{e^2}{3}\right) + \dfrac{\pi}{2}e'\left(r^2 + \dfrac{e'^2}{3}\right)$. Operando, $V = \dfrac{E}{12}(3S - \pi E^2)$.

K 8- Dada una recta r a una distancia d del centro de una esfera, trazar $n-1$ planos que pasen por ella, dividiendo el área de la esfera en n partes equivalentes.

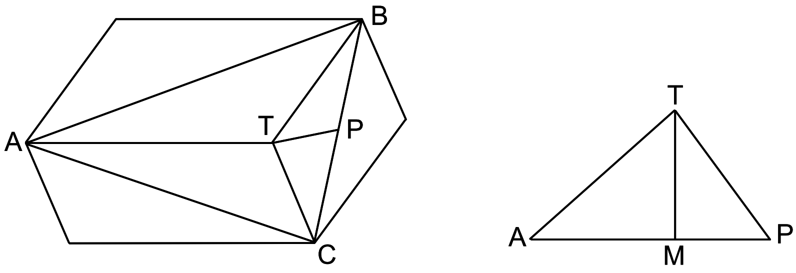
Solución:



Superficie del casquete ACB: $2\pi R \cdot CD = 2\pi Rh$. Superficie del casquete EGF: $2\pi R \cdot GH = 2 \cdot 2\pi Rh$. Luego $GH = 2h$. Superficie del casquete IKJ: $2\pi R \cdot KL = 3 \cdot 2\pi Rh$. Luego $KL = 3h$, y así sucesivamente, siendo la altura del $(n-1)$ casquete: $(n-1)h$. Luego $4\pi R^2 - 2\pi R(n-1)h = 2\pi Rh$, de donde $h = \dfrac{2R}{n}$. Luego han de trazarse $(n-1)$ planos, siendo la distancia del plano i al centro de la esfera $\sqrt{d^2 - \left(\dfrac{n-2i}{n}\right)^2 R^2}$.

K 9- Hallar el volumen de un romboedro formado por seis rombos, conociendo el lado a de una cara y la mayor de las diagonales d de una cara.

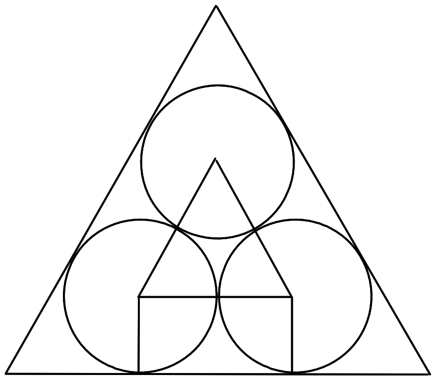
Solución:



El volumen del romboedro es seis veces el del tetraedro *TABC*, cuya base es un triángulo equilátero de lado d, y cuya altura es la del triángulo *ATP* sobre su base *AP*, siendo P el punto medio de *BC*. Por tanto $V = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{3a^2 - d^2}{3}} = \frac{d^2\sqrt{3a^2 - d^2}}{2}$.

K 10- Hallar el volumen del tetraedro circunscrito a una pila de cuatro esferas de radio r, tangentes entre sí.

Solución:



El lado del tetraedro formado por los centros de las esferas, es $2r$, siendo el radio de la esfera inscrita en este tetraedro $r' = 2r \cdot \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{r\sqrt{6}}{6}$. El radio de la esfera inscrita en el tetraedro del enunciado es igual a $r' + r = r\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + 1\right)$.

Por tanto su lado es: $a = \frac{12}{\sqrt{6}} r\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + 1\right) = 2r\left(1 + \sqrt{6}\right)$.

El volumen del tetraedro es $V = \frac{\sqrt{2}}{12}\left[2r\left(1 + \sqrt{6}\right)\right]^3 = \frac{2}{3}\left(19\sqrt{2} + 18\sqrt{3}\right)r^3$.

K 11- Se considera un tronco de cono de bases paralelas y cuya altura mide 8 cm. Las áreas de las bases miden 14 y 25 cm^2. Trazar dos planos paralelos a las bases que dividan al tronco en tres partes equivalentes.

Solución: El volumen del tronco de cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi 8\left(\frac{14}{\pi} + \frac{25}{\pi} + \frac{\sqrt{14 \cdot 25}}{\pi}\right) = \frac{8\left(39 + 5\sqrt{14}\right)}{3} = 153,8888\,\text{cm}^3.$$

La altura del cono es: $H = \dfrac{8\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}}{\dfrac{5 - \sqrt{14}}{\sqrt{\pi}}} = \dfrac{40\left(5 + \sqrt{14}\right)}{11} = 31,7878\,\text{cm}$.

El volumen del cono es: $\frac{1}{3} 25 \cdot 31,7878 = 264,8987\,\text{cm}^3$.

El volumen del cono disminuido en un tercio del volumen del tronco de cono es:
$264,8987 - \frac{153,8888}{3} = 213,6025\,\text{cm}^3$.

La altura de este cono es: $31,7878\left(\frac{213,6025}{264,8987}\right)^{\frac{1}{3}} = 29,5872\,\text{cm}$.

El volumen del cono disminuido en dos tercios del volumen del tronco de cono es:
$213,6025 - \frac{153,8888}{3} = 162,3062\,\text{cm}^3$.

La altura de este cono: $31,7878\left(\frac{162,3062}{264,8987}\right)^{\frac{1}{3}} = 26,9989\,\text{cm}$.

Luego los planos se trazarán a $2,20\,\text{cm}$ ($= 31,7878 - 29,5872$) y $4,79\,\text{cm}$ ($= 31,7878 - 26,9989$) de la base mayor del tronco de cono.

K 12- En tres cajas iguales de forma cúbica, cuya arista es $1,75\,\text{m}$, se desea colocar el mayor número posible de pastillas de jabón cúbicas de $1\,\text{dm}$ de lado en la primera, cúbicas de $0,5\,\text{dm}$ de lado en la segunda, y paralelepipédicas de base cuadrada de $1\,\text{dm}$ de lado y $0,5\,\text{dm}$ de altura en la tercera. 1º) Hallar el número máximo de pastillas en cada caja. 2º) Hallar el hueco que queda después de que se hayan colocado las pastillas. 3º) Qué dimensiones ha de tener cada caja, de forma que no quede ningún hueco tras colocar el número de pastillas calculado anteriormente.

Solución: Seguidamente se resuelven las tres cuestiones para cada tipo de caja.

A) Primera caja:

1º) $17^3 = 4913$ pastillas. 2º) $17,5^3 - 4913 = 446,375\,\text{dm}^3$. 3º) $17\,\text{dm} \cdot 17\,\text{dm} \cdot 17\,\text{dm}$.

B) Segunda caja:

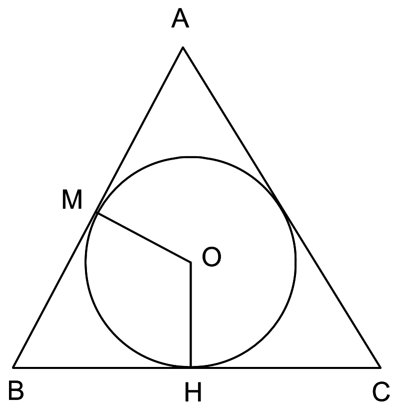
1º) $\left(\frac{17,5}{0,5}\right)^3 = 42875$ pastillas. 2º) No queda hueco. 3º) Las dimensiones dadas.

C) Tercera caja:

1º) $17^2 \cdot 35 + 2 \cdot 17^2 = 10693$ pastillas. 2º) $17,5^3 - 10693 \cdot 0,5 = 12,875\,\text{dm}^3$.
3º) $17\,\text{dm} \cdot 17\,\text{dm} \cdot 18,5\,\text{dm}$.

K 13- Circunscribir a una esfera dada, una pirámide regular de n lados de volumen mínimo, hallando este volumen.

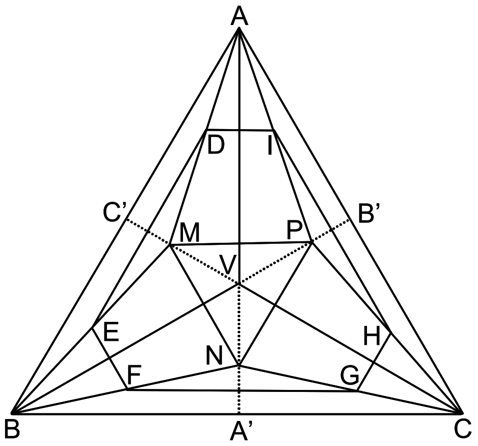
Solución:



Es el mismo problema que el de circunscribir a la esfera un cono de volumen mínimo. Siendo $AH = h$,$HB = MB = a$ y $OM = OH = R$, se tiene $AM^2 = (h-R)^2 - R^2$ y $AB^2 = \left(a + \sqrt{(h-R)^2 - R^2}\right)^2 = a^2 + h^2$, de donde $h = \frac{2Ra^2}{a^2 - R^2}$. El volumen es $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$, por lo que será mínimo cuando lo sea $\frac{a^4}{a^2 - R^2} = \lambda$. Luego $a = \sqrt{\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda R^2}}{2}}$, que será mínimo para $\lambda = 4R^2$, con lo que $a = R\sqrt{2}$ y $h = 4R$. Siendo l el lado del polígono de la base y a la apotema, $V = \frac{1}{3} n \frac{la}{2} h = \frac{2\sqrt{2}}{3} nlR^2$.

K 14- Se da un tetraedro de vértice V y de base un triángulo ABC. Su volumen es $27\,\mathrm{m}^3$. Siendo M, N y P los baricentros de las caras laterales, se unen entre sí y con los vértices de la base, formándose un cuerpo cuyo volumen se pide.

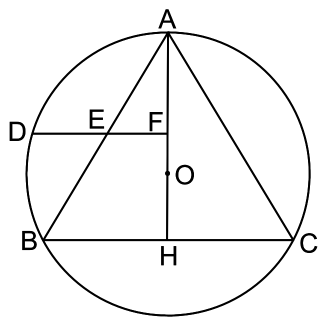
Solución:



Estando situadas las bases en planos paralelos y siendo sus caras triángulos, se aplica la fórmula $V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B'')$, en la que h es la distancia entre las dos bases, B y B' son las superficies de dichas bases, y B'' la superficie de la sección equidistante de las dos bases. En la figura se ha proyectado sobre la base, el cuerpo $MNPABC$ cuyo volumen se pide. El volumen del tetraedro es $V_{VABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot H = 27$. El volumen pedido es $V_{MNPABC} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot (S_{ABC} + S_{MNP} + 4S_{DEFGHID})$, siendo $DEFGHID$, la sección media del cuerpo. La superficie del triángulo MNP es $S_{MNP} = \frac{1}{9}S_{ABC}$, pues sus lados son un tercio de los del triángulo ABC. La superficie de la sección media es: $S_{DEFGHID} = S_{ABC} - \frac{1}{4}(S_{AMP} + S_{BMN} + S_{CPN}) - \frac{3}{4}(S_{ABM} + S_{BCN} + S_{CAP}) =$
$= S_{ABC} - \frac{1}{4}(S_{ABC} - S_{MNP}) - \frac{1}{2}(S_{ABM} + S_{BCP} + S_{CAN}) = S_{ABC} - \frac{8}{4 \cdot 9}S_{ABC} - \frac{1}{2 \cdot 3}S_{ABC} = \frac{11}{18}S_{ABC}$.
La altura del cuerpo es $h = \frac{H}{3}$. Por tanto, aplicando la fórmula expuesta al principio, $V_{MNPABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{H}{3} \cdot S_{ABC}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{4 \cdot 11}{18}\right) = \frac{1}{6} \cdot 27 \cdot \frac{32}{9} = 16\,\mathrm{m}^3$.

K 15- En una esfera se inscribe un cono equilátero. Trazar un plano paralelo a la base, de tal forma que la diferencia de las secciones producidas en cono y esfera, sea máxima o mínima.

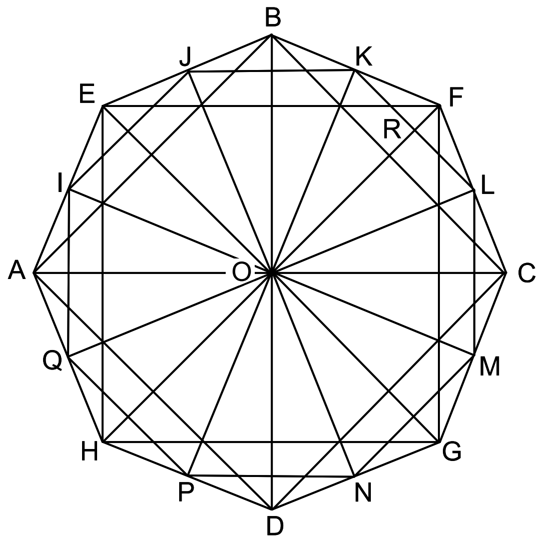
Solución:



En la figura se presenta la sección EF del cono y DF de la esfera, por un plano perpendicular a la base BC del cono y pasando por el centro O de la esfera. Sea $h = FH$, $AB = AC = BC = R\sqrt{3}$, $AH = \frac{3R}{2}$, $EF = \frac{3R - 2h}{2\sqrt{3}}$, $DF = \frac{1}{2}\sqrt{(3R - 2h)(R + 2h)}$. La diferencia de las secciones es: $\pi\left[\frac{(3R - 2h)(R + 2h)}{4} - \frac{(3R - 2h)^2}{12}\right] = \frac{2\pi}{3}h(3R - 2h)$. La diferencia es máxima para $h = \frac{3R}{4}$, tomando el valor de $\frac{3\pi R^2}{4}$. La diferencia es nula (mínima) para $h = 0$, o para $h = \frac{3R}{2}$.

K 16- Dos cuadrados iguales están situados en planos paralelos. Sus centros están sobre una misma perpendicular a dichos planos, y las diagonales de uno son perpendiculares a los lados del otro. Siendo a el lado de los cuadrados, y h la distancia entre los dos planos, hallar el volumen del prismatoide formado.

Solución:



Se aplica la misma fórmula que en el problema K 14.
$V = \frac{h}{6}(a^2 + a^2 + 4 \cdot S_{IJKLMNPQI}) = \frac{h}{3}(a^2 + 16 \cdot S_{OKL})$. La superficie del triángulo OKL es:
$S_{OKL} = OR \cdot KR = \sqrt{OK^2 - KR^2} \cdot KR = \sqrt{OB^2 - BK^2 - KR^2} \cdot KR$. Como $KR = \frac{a}{4}$,
$OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $BK = a\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{8}}$, la superficie del citado triángulo es: $S_{OKL} = \frac{a^2(1+\sqrt{2})}{16}$. Luego el volumen del prismatoide es: $V = \frac{ha^2}{3}\left(2+\sqrt{2}\right)$.

K 17- Determinar la posición de un punto en el interior de un tetraedro, de modo que unido con los vértices, se formen cuatro tetraedros equivalentes.

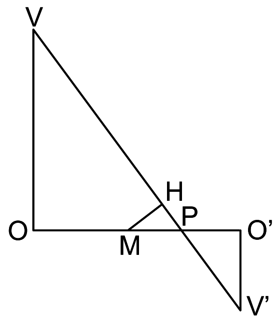
Solución: Sean S_1, S_2, S_3 y S_4 las superficies de las cuatro caras del tetraedro. Sean x_1, x_2, x_3 y x_4 las distancias del punto buscado a las cuatro caras (coordenadas tetraédricas del punto). Siendo V el volumen del tetraedro, se tiene $3V = x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3 + x_4S_4$. Como $x_1S_1 = x_2S_2 = x_3S_3 = x_4S_4 = \frac{3V}{4}$, $x_1 = \frac{3V}{4S_1} = \frac{S_1h_1}{4S_1} = \frac{h_1}{4}$. Luego las coordenadas tetraédricas del punto pedido son las del centro de gravedad del tetraedro, siendo este el punto pedido.

K 18- Calcular el radio r de la base y la altura h de un cono recto, sabiendo que su volumen es igual al de una esfera de radio R, y que su superficie total está en relación con la de dicha esfera como están entre sí los volúmenes de los conos equiláteros circunscrito e inscrito a una misma esfera.

Solución: Se tiene que $\frac{\pi}{3}r^2h = \frac{4\pi}{3}R^3$, luego $r^2h = 4R^3$. El volumen del cono circunscrito es 8 veces el del inscrito, por tanto $\frac{\pi r^2 + \pi rg}{4\pi R^2} = 8$, siendo g la generatriz del cono, es decir $g = \sqrt{r^2 + h^2}$. Operando se obtiene la ecuación $h^2 - 256Rh + 64R^2 = 0$, de donde $h = 8R\left(16 \pm \sqrt{255}\right)$, y $r = \frac{R}{\sqrt{32 \pm 2\sqrt{255}}} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{17} \pm \sqrt{15}\right)$.

K 19- Dos pirámides cuadrangulares tienen iguales los lados de sus bases que miden 3 m. Sus bases están situadas en el mismo plano, teniendo un lado AB común. Los vértices V y V' están situados a distinto lado del plano de la base, siendo sus alturas 5 m y 2 m. Determinar el volumen del tetraedro que la recta VV' forma con AB.

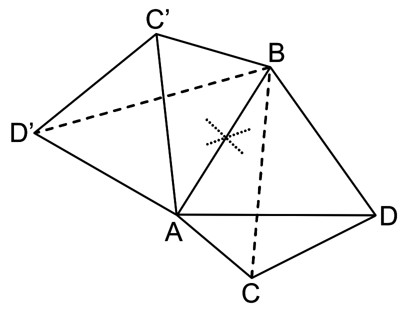
Solución:



El volumen de un tetraedro en función de dos aristas opuestas, es $V = \frac{1}{6}abh\sin\theta$, en donde a y b son las longitudes de las aristas opuestas, h la mínima distancia entre ellas, y θ el ángulo que forman entre sí. En la figura se representa una sección por el plano perpendicular a las bases pasando por los vértices de los tetraedros. Las proyecciones de los vértices sobre el plano de la base, son O y O', siendo $OO' = 3$ m. Siendo M el punto medio de AB, la mínima distancia entre AB y VV' es $MH = h$. Siendo P el punto de intersección de VV' con la base, se tiene $\frac{OP}{VO} = \frac{O'P}{V'O'} = \frac{3-OP}{VO'}$. Luego $OP = \frac{15}{7}$, $OM = \frac{3}{2}$, $\frac{h}{5} = \frac{MP}{VP} = \frac{\frac{15}{7}-\frac{3}{2}}{\sqrt{25+\frac{15^2}{7^2}}}$, $h = \frac{9}{2\sqrt{58}}$. Como AB y VV' son perpendiculares, $\theta = 90º$. Como $VV' = \sqrt{58}$, el volumen pedido es $V = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \sqrt{58} \cdot \frac{9}{2\sqrt{58}} = \frac{9}{4}\,\mathrm{m}^3$.

K 20- Se dan dos tetraedros con una arista común, siendo iguales los diedros correspondientes a dicha arista. Demostrar que los volúmenes de dichos tetraedros están entre sí como los productos de las superficies de las caras que forman los citados diedros.

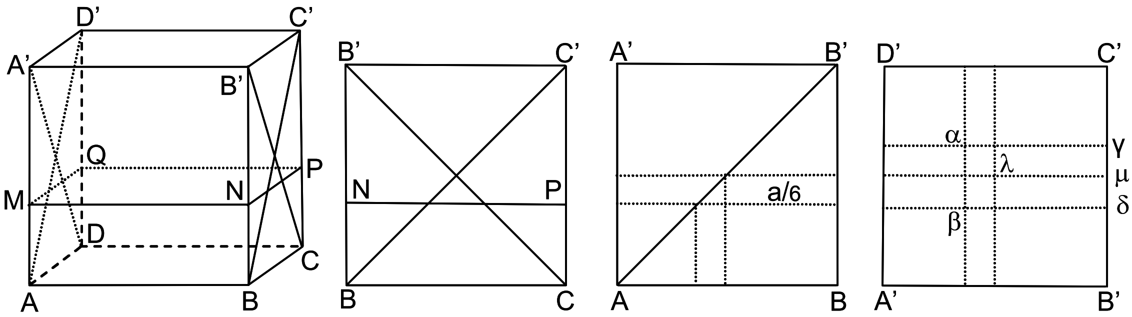
Solución:



El volumen V del tetraedro $ABCD$ es igual a $\frac{1}{3}S_{ABD} \cdot H_C$, donde H_C es la altura de C sobre ABD. Siendo h_C la altura sobre AB del triángulo ABC, se tiene $H_C = h_c\sin\theta$, donde θ es el ángulo del diedro formado por los planos ABC y ABD. Ahora bien, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h_C$, luego $H_C = \frac{2 \cdot S_{ABC} \cdot \sin\theta}{AB}$. Por tanto, $V = \frac{1}{3}S_{ABD} \cdot \frac{2 \cdot S_{ABC} \cdot \sin\theta}{AB}$. Análogamente, el volumen V' del tetraedro $ABC'D'$, es: $V' = \frac{1}{3}S_{ABD'} \cdot \frac{2 \cdot S_{ABC'} \cdot \sin\theta}{AB}$. De donde $\frac{V}{V'} = \frac{S_{ABC} \cdot S_{ABD}}{S_{ABC'} \cdot S_{ABD'}}$.

K 21- En un cubo de arista a, se trazan los planos diagonales $ABC'D'$ y $A'B'CD$, y un tercer plano, paralelo a la base, cuya sección $MNPQ$ queda dividida en tres partes iguales por dichos planos diagonales, estando situado al mismo lado que la base $ABCD$ respecto al centro del cubo. Calcular el volumen del cuerpo que forman los cuatro planos siguientes: los dos planos diagonales citados, el plano $MNPQ$ y el plano $ADB'C'$, estando el cuerpo situado debajo de este último plano.

Solución:

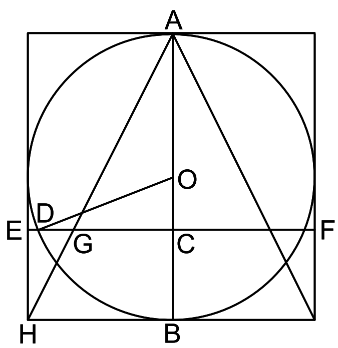


Los tres planos $A'B'CD$, $ABC'D'$ y $MNPQ$ forman con el cubo un prisma de altura a y base un triángulo isósceles rectángulo de hipotenusa $\frac{a}{3}$. El área de este triángulo es $\frac{a^2}{36}$. El plano $ADB'C'$ corta al prisma según se ve en las dos últimas figuras de la derecha, formándose por debajo de este plano, un tronco de prisma cuya sección recta es $\frac{a^2}{36}$, siendo sus tres aristas laterales $\alpha\gamma = \frac{2a}{3}$, $\beta\delta = \frac{2a}{3}$, $\lambda\mu = \frac{a}{2}$. El volumen pedido de este tronco de prisma es: $\frac{a^2}{36}\left(\frac{\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}+\frac{a}{2}}{3}\right) = \frac{11a^3}{648}$.

Nota: El volumen del tronco de prisma que queda por encima del plano $ADB'C'$ es: $\frac{7a^3}{648}$.

K 22- Se da una esfera de radio R, un cilindro circunscrito cuyo eje es el diámetro AB de la esfera, y un cono de vértice A cuya base es la misma que la del cilindro, estando situada en el plano tangente a la esfera en el punto B. Calcular en función de R, la distancia de A al plano secante perpendicular a AB, cuyas secciones con el cono, la esfera, y el cilindro, son círculos cuyas áreas S_1, S_2 y S_3, están en progresión aritmética.

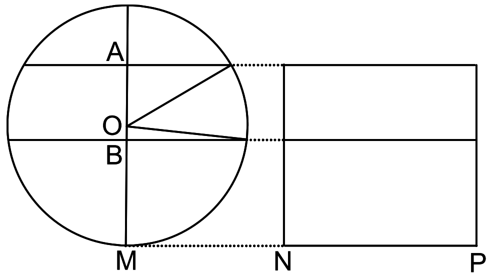
Solución:



Siendo $OC = d$, se tiene que los radios de las tres secciones son: con el cono, $CG = \frac{R+d}{2}$; con la esfera, $CD = \sqrt{R^2 - d^2}$; y con el cilindro, $CE = R$. Como $\pi CE^2 - \pi CD^2 = \pi CD^2 - \pi CG^2$, se tiene que $R^2 - \left(\sqrt{R^2-d^2}\right)^2 = \left(\sqrt{R^2-d^2}\right)^2 - \left(\frac{R+d}{2}\right)^2$. De donde operando se obtiene la ecuación $9d^2 + 2Rd - 3R^2 = 0$, cuyas raíces son $d = \frac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{9}R$. Por lo que $AC = R + d = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{9}$.

K 23- Una esfera de radio 5 m y un cilindro recto de radio de la base 4 m, descansan sobre un mismo plano. Se trazan dos planos paralelos al de la base, cuya distancia mutua es de 1 m, de forma que la superficie total de la zona esférica que estos dos planos interceptan en la esfera (incluyendo las superficies de los dos círculos sección) es igual a la superficie total que dichos dos planos interceptan en el cilindro. Calcular los radios de las secciones producidas en la esfera, y las distancias de los dos planos al plano de la base.

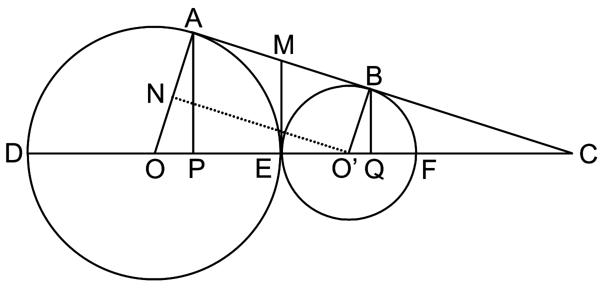
Solución:



Siendo $h = OM$, la superficie total de la zona esférica es:
$2\pi 5 \cdot 1 + \pi\left[25 - (h-5)^2 + 25 - (h-4)^2\right] = \pi(-2h^2 + 18h + 19)$. La superficie total del tronco de cilindro es $2\pi 4 + 2\pi 4^2 = 40\pi$. Igualando las dos expresiones, se tiene $2h^2 - 18h + 21 = 0$, de donde las distancias de los planos al plano de la base, son $\dfrac{9 \pm \sqrt{39}}{2}$ m y $\dfrac{11 \pm \sqrt{39}}{2}$ m. Los radios de las secciones de la esfera, son $\sqrt{\dfrac{30 \pm \sqrt{39}}{2}}$ m.

K 24- Se dan dos circunferencias O y O', tangentes entre sí, de radios $R = 3$ y $r = 0,3$. 1º) Calcular el área engendrada por la tangente común AB al girar alrededor de OO'. 2º) Calcular dicha área en función de las áreas S_1 y S_2, que engendran las semicircunferencias DAE y EBF al girar en torno a OO'. 3º) Hallar el volumen comprendido entre AB y los arcos AE y BE al girar en torno a OO'.

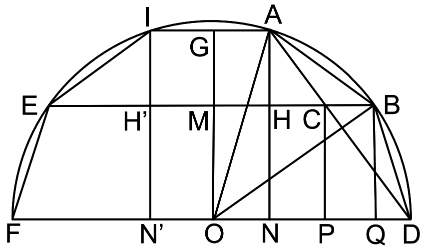
Solución:



En la figura no se ha mantenido la proporción entre los radios de los dos círculos, con objeto de obtener una mayor claridad en el dibujo. 1º) El área engendrada por AB al girar alrededor de OO' es
$S = 2\pi \cdot ME \cdot AB = 2\pi \cdot \dfrac{AB}{2} \cdot AB = \pi[OO'^2 - ON^2] = \pi\left[(R+r)^2 - (R-r)^2\right] = 4\pi Rr = 3,6\pi$.
2º) Como $S = 4\pi Rr = \sqrt{4\pi R^2} \cdot \sqrt{4\pi r^2} = \sqrt{S_1} \cdot \sqrt{S_2}$, es decir que S es la media proporcional de S_1 y S_2. 3º) El volumen V engendrado por ABE es igual a $V_1 - V_2 - V_3$, siendo V_1 el engendrado por AB, V_2 el engendrado por el arco AE, y V_3 el engendrado por el arco BE. Se tiene $CO = \dfrac{R(R+r)}{R-r}$, $OP = \dfrac{R(R-r)}{R+r}$, $AP^2 = \dfrac{4R^3r}{R+r}$, $PQ = \dfrac{4Rr}{R+r}$, $CO' = \dfrac{r(R+r)}{R-r}$, $O'Q = \dfrac{r(R-r))}{R+r}$, $BQ = \dfrac{4Rr^3}{R+r}$.
Por tanto, $V_1 = \dfrac{\pi}{3} \cdot PQ \cdot (AP^2 + BQ^2 + AP \cdot BQ) = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{16R^2r^2}{(R+r)^2}(R^2 + r^2 + Rr)$,
$V_2 = \pi \cdot PE^2\left(R - \dfrac{PE}{3}\right) = \dfrac{4\pi R^3 r^2}{3(R+r)^3}(3R+r)$, $V_3 = \pi \cdot EQ^2\left(r - \dfrac{EQ}{3}\right) = \dfrac{4\pi R^2 r^3}{3(R+r)^3}(R+3r)$.
De donde, $V = \dfrac{4\pi R^2 r^2}{3(R+r)} = \dfrac{18\pi}{55}$.

K 25- Se da un decágono de lado DB inscrito en una circunferencia de diámetro FD. Se traza el lado AD de un pentágono inscrito en dicha circunferencia. Por B se traza BE paralela a FD, que corta en C a AD. Siendo 1 el radio de la circunferencia, calcular el área del triángulo ABC y el volumen que engendra al girar alrededor de FD.

Solución:



El lado del decágono regular convexo es $IA = BD = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. El lado del decágono regular estrellado es $EB = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. La apotema del decágono regular convexo es $OG = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, y la del estrellado es $OM = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Luego $AH = MG = OG - OM = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

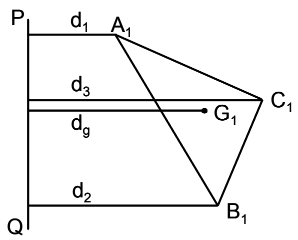
Además, $2 \cdot HB = EB - IA = 1$, $HB = \dfrac{1}{2}$, $2 \cdot ND = 2 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $ND = \dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Los triángulos AHC y AND son semejantes, de donde $HC = \dfrac{ND \cdot AH}{AN} = \dfrac{5-2\sqrt{5}}{2}$. Luego $CB = HB - HC = \sqrt{5} - 2$. Por tanto la superficie del triángulo ABC es $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \dfrac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}{8}$. El volumen V pedido es igual a $V_1 - V_2 - V_3$, siendo V_1 el volumen del tronco de cono engendrado por AB, V_2 el volumen del tronco de cono engendrado por AC, y V_3 el volumen del cilindro engendrado por BC. Como $V_1 = \dfrac{\pi\left(5+\sqrt{5}\right)}{24}$, $V_2 = \dfrac{\pi\left(15-5\sqrt{5}\right)}{24}$, $V_3 = \dfrac{\pi\left(7\sqrt{5}-15\right)}{8}$, se tiene que:

$V = \dfrac{\pi\left(35-15\sqrt{5}\right)}{24}$.

K 26- Se da un prisma triangular recto $ABCA'B'C'$, siendo G y G' los centros de gravedad de sus bases. Sea PQ un segmento cualquiera en el espacio. Se unen los puntos P y Q con los vértices del prisma, formándose tres tetraedros $PQAA'$, $PQBB'$ y $PQCC'$. Calcular la suma de los volúmenes de estos tres tetraedros en función del volumen del tetraedro $PQGG'$.

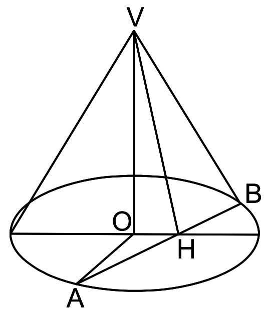
Solución:



Sean: a, la arista lateral del prisma, que es igual a GG'; θ, el ángulo que forman estas aristas y GG' con PQ; d_1, d_2 y d_3, las mínimas distancias entre PQ y las tres aristas laterales; g, la mínima distancia entre GG' y PQ. La suma V de los volúmenes de los tres tetraedros, es $\dfrac{a}{6} \cdot PQ \cdot \sin\theta \cdot (d_1 + d_2 + d_3)$, y el volumen v del tetraedro $PQGG'$ es $\dfrac{a}{6} \cdot PQ \cdot \sin\theta \cdot g$. Los puntos A_1, B_1, C_1 y G_1, pies de las mínimas distancias trazadas, son coplanarios pues todos se hallan en el plano que pasa por PQ y es perpendicular a las aristas laterales y a GG'. Como G_1 es el centro de gravedad del triángulo $A_1B_1C_1$, se tiene que $3g = d_1 + d_2 + d_3$. Por tanto $V = 3v$.

K 27- Se considera un cono de revolución de vértice V, altura h, y radio de la base R. 1º) Determinar en el círculo de la base una cuerda AB tal que el área S del triángulo AVB venga dada en función de la distancia x del centro O de la base a AB. 2º) Determinar los lados y los ángulos del triángulo AVB para que su área sea mínima.

Solución:

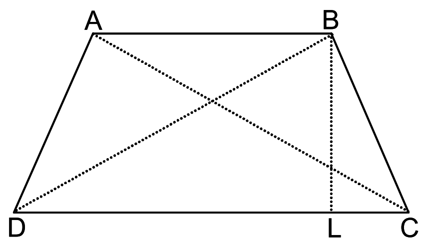


1º) El área del triángulo AVB es $S_{AVB} = AH \cdot VH = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{h^2 + x^2}$, de donde se obtiene que: $x = \sqrt{\dfrac{R^2 - h^2 \pm \sqrt{(R^2 + h^2)^2 - 4S^2}}{2}}$. 2º) Para que S sea mínimo, también lo será el valor de $S^2 = (R^2 - x^2)(h^2 + x^2)$, es decir cuando $R^2 - x^2 = h^2 + x^2$, de donde $x = \sqrt{\dfrac{R^2 - h^2}{2}}$.

Por tanto: $S = \dfrac{R^2 + h^2}{2}$, $AB = \sqrt{2(R^2 + h^2)}$, y $VA = VB = \sqrt{R^2 + h^2}$. Los ángulos miden $\widehat{VAB} = \widehat{VBA} = 45º$, $\widehat{AVB} = 90º$.

K 28- Calcular los ángulos de un trapecio y el volumen engendrado por él al girar alrededor de su base mayor, sabiendo que esta mide 1 m, que las diagonales miden también 1 m, y que la base menor es igual al lado oblicuo.

Solución:

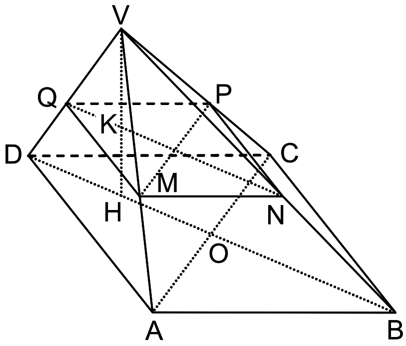


El trapecio ha de ser isósceles, como también los triángulos BDC y ACD, luego $\widehat{CBD} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{ACD} = \alpha$ y $\widehat{ABD} = \widehat{BAC} = \beta$. En el triángulo ABC se tiene $\beta + \beta + \alpha + \beta = 180º$, y en el triángulo CBD se tiene $\alpha + \alpha + \alpha - \beta = 180º$, de donde $\alpha = 72º$ y $\beta = 36º$. Por tanto los ángulos del trapecio miden $\widehat{C} = \widehat{D} = 72º$ y $\widehat{A} = \widehat{B} = 108º$. Por ser $\widehat{BDC} = 72º$, el lado BC es el de un decágono regular de radio 1, es decir $AB = BC = AD = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, y BL es la mitad del lado del pentágono, o sea $\dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$. Por tanto $LC = \sqrt{BC^2 - BL^2} = \dfrac{\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}{4}$. El volumen se compone de dos conos iguales de altura LC y radio de la base BL, y de un cilindro de radio BL y altura AB. Luego el volumen pedido es:

$$V = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} \cdot \frac{\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}{4} + \pi \cdot \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5\pi\left(\sqrt{5} - 1\right)}{24}.$$

K 29- Se da una pirámide *VABCD*, de vértice *V*, cuya base es un cuadrado de centro *O* y lado *a*. La proyección *H* de *V* sobre la base es el punto medio de *OD*. El ángulo $\widehat{CVD}$ es recto. 1º) Calcular la altura $h = VH$ y las cuatro aristas laterales. 2º) Por un punto *K* entre *V* y *H*, se traza un plano paralelo a la base, que corta a la pirámide según un cuadrado *MNPQ*. Se considera el tronco de pirámide que tiene por bases *ABCD* y *MNPQ*. Expresar en función de *a* y de $VK = x$, el área total *S* del tronco de pirámide y el volumen *V* de la pirámide de vértice *C* y base *MNPQ*.

Solución:



1º) $BD = AC = a\sqrt{2}$, $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $HD = HO = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $HB = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$, $HA = HC = a\sqrt{\dfrac{5}{8}}$, $VD = \sqrt{DH^2 + h^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 + 8h^2}{8}}$, $VC = \sqrt{CH^2 + h^2} = \sqrt{\dfrac{5a^2 + 8h^2}{8}}$. Como $VD^2 + VC^2 = a^2$, se tiene que $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $VD = \dfrac{a}{2}$, $VC = VA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $VB = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. 2º) $\dfrac{VK}{VH} = \dfrac{x}{h} = \dfrac{2\sqrt{2}\,x}{a}$. Luego $MN = NP = PQ = QM = 2\sqrt{2}\,x$. La distancia de *H* a los lados *CD* y *DA* es $\dfrac{a}{4}$, y a los lados *AB* y *BC* es $\dfrac{3a}{4}$. Luego las alturas de las caras laterales de la pirámide son $h_{AB} = h_{BC} = \dfrac{a\sqrt{11}}{4}$ y $h_{AD} = h_{DC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Por tanto la suma de las áreas de las caras laterales del tronco de pirámide es $\dfrac{2\sqrt{2}\,x + a}{2} \cdot \dfrac{h - x}{h} \cdot 2\left(\dfrac{a\sqrt{11}}{4} + \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Luego: $S = \dfrac{2\sqrt{2}\,x + a}{2} \cdot \dfrac{h - x}{h} \cdot 2\left(\dfrac{a\sqrt{11}}{4} + \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right) + a^2 + 8x^2$.

Como $\dfrac{h - x}{h} = \dfrac{a - 2\sqrt{2}\,x}{a}$, $S = \dfrac{\left(4 + \sqrt{11} + \sqrt{3}\right)a^2 + 8\left(4 - \sqrt{11} - \sqrt{3}\right)x^2}{4}$.

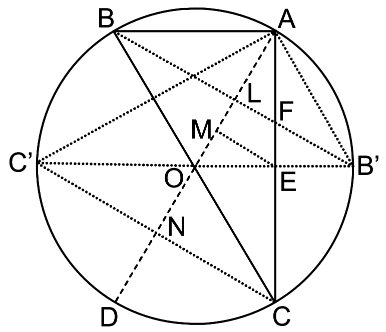
El volumen de la pirámide *CMNPQ* es: $V = \dfrac{8x^2}{3} \cdot KH = \dfrac{8x^2}{3}(h - x) = \dfrac{2x^2\left(a\sqrt{2} - 4x\right)}{3}$.

K 30- Se da una pirámide cuadrangular regular *VABC* de lado de la base 4 y altura 8. Se traza la sección media en la que se inscribe el cuadrado de área mínima. Este cuadrado se toma como base de otra pirámide regular de altura 8, cuyo vértice se encuentra del mismo lado que *V* respecto a la sección media. Se prolonga la superficie lateral de esta última pirámide, hasta cortar a la base de la dada. Hallar el volumen del tronco de esta segunda pirámide limitado por la citada sección y el plano de la base de la dada.

Solución: El lado de la sección media es 2, y el lado del cuadrado de área mínima es $\sqrt{2}$. Siendo *x* el lado del cuadrado de la base mayor del tronco, se tiene $\dfrac{\sqrt{2}}{8} = \dfrac{x}{12}$, luego $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. El área de la base mayor es $\dfrac{9}{2}$, la de la base menor es 2, y la altura es 4. El volumen pedido es $V = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{9}{2} + 2 + \sqrt{\dfrac{9}{2} \cdot 2}\right) = \dfrac{38}{3}$.

K 31- En una circunferencia de radio 5, se inscribe un triángulo ABC en el que la longitud del lado AC es la del lado del triángulo equilátero inscrito, y la del lado AB es la del lado del exágono regular inscrito. Se gira este triángulo alrededor del diámetro que pasa por A. Calcular la superficie y el volumen del cuerpo engendrado.

Solución:



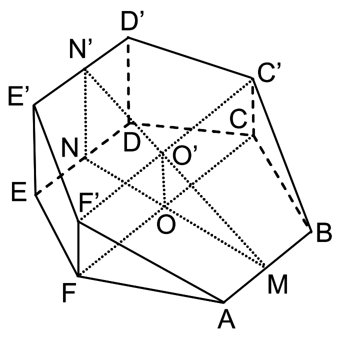
El lado AC mide $5\sqrt{3}$ y el lado AB mide 5, con lo que el triángulo ABC es rectángulo en A, y el lado BC pasa por el centro O de la circunferencia. Se forman los siguientes cuerpos: a) Cono de radio de la base LB, generatriz AB, altura AL. b) Tronco de cono de radios de las bases LB y ME, generatriz $B'E$, altura LM. c) Tronco de cono de radios de las bases ME y NC, generatriz EC, altura MN. d) Cono de radio de la base NC, generatriz OC, altura ON. La superficie engendrada es igual a la suma de las superficies laterales de los cuatro cuerpos. El volumen engendrado es igual a la suma de los volúmenes de los tres primeros menos el volumen del cuarto, es decir que es igual a la suma de los volúmenes de b) y c). Las longitudes que intervienen son: $AB = 5$, $AC = 5\sqrt{3}$, $LB' = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $AL = \frac{5}{2}$, $ME = \frac{5\sqrt{3}}{4}$, $B'E = \frac{5}{2}$, $LM = \frac{5}{4}$, $NC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $EC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $MN = \frac{5}{4}$, $OC = 5$, $ON = \frac{5}{2}$. La superficie engendrada es:

$$\frac{25\sqrt{3}\,\pi}{2} + \frac{75\sqrt{3}\,\pi}{8} + \frac{225\pi}{8} + \frac{25\sqrt{3}\,\pi}{2} = \frac{25\left(11\sqrt{3}+9\right)\pi}{8}.$$

El volumen engendrado es: $\frac{\pi}{3}\left(\frac{2625}{64} + \frac{7875}{64}\right) = \frac{875\pi}{16}$.

K 32- La base $ABCDEF$ de un prisma exagonal regular mide 1039,23. Por el lado AB de la base, pasa un plano que forma un ángulo de 30º con el plano de la base, cortando a todas las aristas laterales. Hallar la superficie total y el volumen del cuerpo comprendido entre el plano y la base.

Solución:

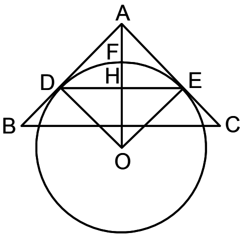


Superficie del exágono $ABCDEF = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2} = 1039{,}23$, luego $a = 20$. Apotema $OM = 10\sqrt{3}$. $NN' = 20$, $FF' = 10$. Superficie lateral, $S_L = 2 \cdot 20(20+10) = 1200$. Superficie de la base superior, $S_{ABC'D'E'F'} = \frac{2 \cdot 1039{,}23}{\sqrt{3}} = 1200$. Superficie total, $S_T = 3439{,}23$.

Volumen, $V = \frac{1}{2} 1039{,}23 \cdot 20 = 10392{,}30$.

K 33- Un cono de revolución tiene su altura y el radio de la base iguales, e iguales a 18. En el cono se introduce una esfera de manera que la parte del cono limitada entre el vértice y la superficie de la esfera, es $\frac{1}{8}$ del volumen del cono. Calcular el radio R de la esfera.

Solución:

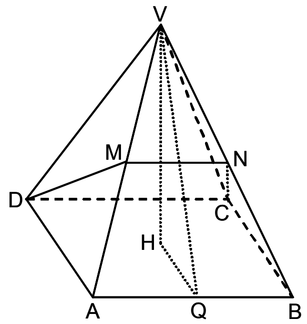


Cortando por un plano que pasa por el eje del cono se tiene la sección de la figura. El cono dado es el *ABC*, cuyo volumen es $\frac{\pi}{3}18^3$. El volumen del cono *ADE* es $\frac{\pi}{3}r^3$, siendo $HE = r$. En el triángulo rectángulo isósceles *OHE*, se tiene $R^2 = 2r^2$. La altura del casquete esférico es $FH = R - r$. El volumen del casquete esférico es $\frac{\pi}{2}(R-r)\left[r^2 + \frac{(R-r)^2}{3}\right]$. Luego el volumen de la parte de cono limitada entre el vértice y la superficie de la esfera, es $\frac{\pi}{3}r^3 - \frac{\pi}{2}(R-r)\left[r^2 + \frac{(R-r)^2}{3}\right] = \frac{\pi}{24}18^3$. Sustituyendo $r^2 = \frac{R^2}{2}$, se obtiene:

$R^3 = 729\left(3\sqrt{2}+4\right)$, luego $R = 9\left(3\sqrt{2}+4\right)^{\frac{1}{3}} = 18,18$.

K 34- Una pirámide regular *VABCD* tiene por base un cuadrado *ABCD* de lado a, siendo su altura $VH = 2a$. Sea *M* el punto medio de la arista *VA*, y *N* el de intersección de la arista *VB* con el plano *CDM*.
1º) Calcular en función de a, las longitudes de las aristas laterales y de la apotema de la pirámide.
2º) Demostrar que el cuadrilátero *CDMN* es un trapecio isósceles. Calcular los lados y la altura de este trapecio y deducir que su área es $S = \frac{15a^2}{16}$. 3º) Determinar un punto *P* sobre la perpendicular por *H* al plano *ABCD*, de forma que el área lateral de la pirámide *PABCD* sea igual a $k \cdot S$, siendo k un número dado. ¿El resultado de la discusión se podría haber previsto?

Solución:



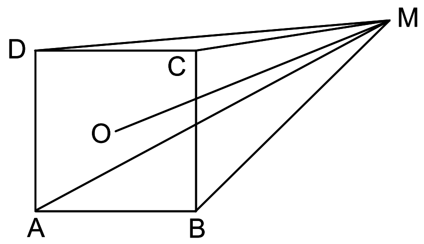
1º) Las aristas miden: $VA = VB = VC = VD = \sqrt{VH^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

La apotema mide: $VQ = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

2º) El punto *N* es también punto medio de *VB*, luego $NC = MD$. Y como *MN* es paralela a *DC*, el cuadrilátero *CDMN* es un trapecio isósceles. Se tiene que $MN = \frac{a}{2}$ y que *NC* es la mediana del triángulo *VBC*, luego $NC = \frac{a\sqrt{26}}{4} = MD$. La altura del trapecio es: $\sqrt{\frac{26a^2}{16} - \frac{a^2}{16}} = \frac{5a}{4}$. La superficie del trapecio es: $S = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{5a}{4} = \frac{15a^2}{16}$. 3º) Haciendo $KH = x$, el área lateral de la pirámide *PABCD* es: $2a \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{15a^2k}{16}$, de donde $x = \frac{a\sqrt{225k^2 - 256}}{32}$. Por tanto $k \geq \frac{16}{15}$. Esta condición se podría haber previsto al considerar que el menor valor del área lateral es a^2, por lo que $a^2 \leq \frac{15a^2k}{16}$, luego $k \geq \frac{16}{15}$.

K 35- Se da un cuadrado *ABCD* de lado $2a$. Se considera un punto *M* del plano del cuadrado, distante d de su centro, es decir $MO = d$. Uniendo *M* con los cuatro vértices, calcular la suma de los volúmenes engendrados por los triángulos *MAB*, *MBC*, *MCD* y *MDA* al girar alrededor de *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, respectivamente. Aplicar al caso $a = 2$, $d = 3$.

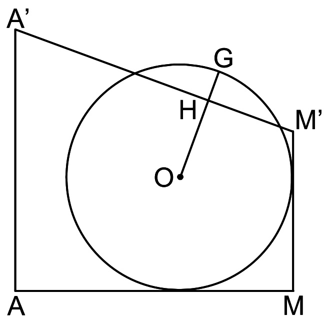
Solución:



El triángulo *MBC* genera un volumen $\frac{2\pi}{3}(d-a)^2 a$. El triángulo *MDA* genera un volumen $\frac{2\pi}{3}(d+a)^2 a$. Los triángulos *MCD* y *MAB* generan en conjunto un volumen $\frac{2\pi}{3}a^2 2a$. La suma de los cuatro volúmenes es: $\frac{4\pi}{3}a(2a^2+d^2)$. Para $a = 2$ y $d = 3$, esta suma es $\frac{136\pi}{3}$.

K 36- Se da un tronco de prisma recto triangular regular, midiendo 7 el lado del triángulo *ABC* de la base. La otra base $A'B'C'D'$, es tal que $AA' = 7$ y $BB' = CC' = 2,5$. Se introduce en el tronco una esfera, tangente a las tres caras y a la base *ABC*. Calcular el volumen de la esfera que queda fuera del tronco.

Solución:



El radio R de la esfera es el del círculo inscrito en el triángulo equilátero *ABC*, por lo que $R = \frac{7\sqrt{3}}{6}$. En la figura se ha representado la sección por el plano que pasando por AA', es perpendicular a la cara $BB'CC'$, a la que corta según MM', paralela media a las dos aristas BB' y CC', siendo $MM' = 2,5$ y $AM = \frac{7\sqrt{3}}{2}$. La distancia *OH* viene dada por la expresión $d = \dfrac{49\sqrt{3} - \frac{9 \cdot 7\sqrt{3}}{3} - \frac{7\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{81 + 3 \cdot 49}} = \dfrac{28\sqrt{3} - 24,5}{2\sqrt{57}} = 1,589268$, luego $GH = h = R - d =$ $= 0,431458$. Por tanto, el volumen de la esfera que queda fuera del tronco, es: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = 1,09766$.

K 37- Calcular los tres lados de un triángulo, sabiendo que los volúmenes engendrados por este al girar alrededor de cada uno de sus lados, son equivalentes a los de tres esferas que tienen por radios $9^{\frac{1}{3}}$, $12^{\frac{1}{3}}$ y $7,2^{\frac{1}{3}}$.

Solución: Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones: $\frac{\pi}{3}h_a^2 \cdot a = \frac{4\pi}{3} \cdot 9$; $\frac{\pi}{3}h_b^2 \cdot b = \frac{4\pi}{3} \cdot 12$; $\frac{\pi}{3}h_c^2 \cdot c = \frac{4\pi}{3} \cdot 7,2$. Como $h_a^2 = \frac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$, se tiene que $p(p-a)(p-b)(p-c) == \frac{a^2 \cdot h_a^2}{4} = 9a = 12b = 7,2c = \lambda$. Luego $a = \frac{\lambda}{9}$, $b = \frac{\lambda}{12}$, $c = \frac{\lambda}{7,2}$, y por tanto $2p = a+b+c = = \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7,2}\right)\lambda = \frac{\lambda}{3}$, de donde $p-a = \frac{\lambda}{6}-\frac{\lambda}{9} = \frac{\lambda}{18}$, $p-b = \frac{\lambda}{12}$, $p-c = \frac{\lambda}{36}$. Por lo que $\frac{\lambda}{6}\cdot\frac{\lambda}{18}\cdot\frac{\lambda}{12}\cdot\frac{\lambda}{36} = \lambda$, luego $\lambda = 36$. Los lados son $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$.

K 38- Un tronco de cono recto tiene de radio R de su base mayor 36 cm. Determinar el volumen comprendido entre este tronco y el cilindro de igual altura h, mismo eje, y radio r igual al de la base menor del tronco de cono, sabiendo que la generatriz del tronco de cono es la suma de los radios de sus bases y que el volumen del cilindro es $38,6\,\text{dm}^3$.

Solución: El volumen pedido es $V = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr) - 38,6$, en dm^3. Como $R = 3,6\,\text{dm}$, $h = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} = 12\sqrt{\frac{r}{10}}$ dm, y $r = \frac{5h^2}{72}$ dm, se tiene que:
$\pi r^2 h = \frac{\pi 25h^5}{5184} = 38,6\,\text{dm}^3$, luego $h = 4,8\,\text{dm}$, $r = 1,6\,\text{dm}$.
Por tanto, $V = 34,048\pi - 38,6 = 68,36495\,\text{dm}^3$.

K 39- Calcular el radio de una esfera para que la diferencia de secciones hechas en la esfera y en un cono equilátero inscrita en ella, por un plano paralelo a la base del cono, tenga por valor máximo la cantidad de $0,248\,\text{m}^2$. Calcular la distancia de este plano al vértice del cono.

Solución: Siendo x la distancia del plano al vértice del cono, el área de la sección del cono es $\frac{\pi}{3}x^2$, y la de la sección de la esfera $\pi x(2R-x)$. La diferencia es $\pi\left(2Rx - x^2 - \frac{x^2}{3}\right) = \pi x\left(2R - \frac{4x}{3}\right)$. Este valor es máximo para $x = \frac{3R}{4}$, luego $\pi\frac{3R^2}{4} = 0,248$, $R = 0,3244\,\text{m}$, $x = 0,2433\,\text{m}$.

K 40- Una esfera de centro O se dilata concéntricamente. Con vértice en un punto M que dista d de O, se trazan conos circunscritos limitados por el círculo de contacto. Hallar el volumen del cono máximo que puede trazarse.

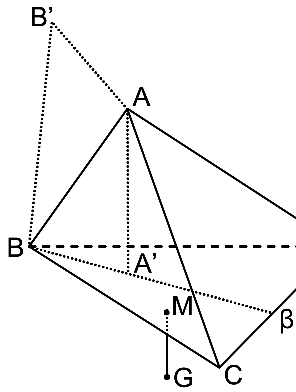
Solución: Siendo h la altura del cono, R el radio de la esfera y r el radio del círculo de contacto, se tiene $\frac{h}{\sqrt{d^2-R^2}} = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{d^2-R^2}}{d}$, $h = \frac{d^2-R^2}{d}$, $r = \frac{R\sqrt{d^2-R^2}}{d}$. El volumen del cono es $V = \frac{\pi R^2(d^2-R^2)^2}{3d^3}$, que es máximo cuando lo sea $R(d^2-R^2)$, es decir cuando $R = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Luego $V = \frac{\pi d^2\left(d^2-\frac{d^2}{3}\right)^2}{9d^3} = \frac{4\pi d^3}{81}$.

K 41- Se da un tetraedro $ABCD$ cuyas aristas opuestas son ortogonales. Los planos perpendiculares a AC en A, a CB en C, a BD en B, y a DA en D, forman un tetraedro $A_1B_1C_1D_1$. Los planos perpendiculares a CA en A, a CD en C, a BA en B, y a DB en D, forman un tetraedro $A_2B_2C_2D_2$. Los planos perpendiculares a AB en A, a BC en B, a CD en C, y a DA en D, forman un tetraedro $A_3B_3C_3D_3$. Demostrar que los volúmenes de los tetraedros $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ y $A_3B_3C_3D_3$ son equivalentes.

Solución: Sean a y a', b y b', c y c' los pares de aristas opuestas ortogonales entre sí. Se verifica que $a^2+a'^2 = b^2+b'^2 = c^2+c'^2$, de donde se obtiene que:
$c^2+c'^2+b^2+b'^2 = a^2+a'^2+c^2+c'^2 = a^2+a'^2+b^2+b'^2 = 2\lambda^2$. Luego la suma de los cuadrados de las longitudes de las aristas de los tres cuadriláteros alabeados que se obtienen del tetraedro dado, son iguales. El volumen V_1 del tetraedro asociado a un cuadrilátero alabeado cuya suma de los cuadrados de las aristas es $2\lambda^2$, es $V_1 = \frac{\lambda^6}{228V}$, siendo V el volumen del tetraedro cuyas cuatro aristas son los lados del cuadrilátero alabeado. Por tanto, $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{\lambda^6}{228V}$.

K 42- Dado un tetraedro *ABCD* y un punto *G*, si se traza por *G* una recta Δ orientada que corta a las caras *BCD*, *CDA*, *DAB* y *ABC* en *M*, *N*, *P* y *Q*, demostrar que se tiene en valor y signo $\frac{V_A}{GM}+\frac{V_B}{GN}+\frac{V_C}{GP}+\frac{V_D}{GQ}=0$, siendo V_A, V_B, V_C y V_D los volúmenes de los tetraedros *GBCD*, *GCDA*, *GDAB* y *GABC*, contados positivamente cuando *G* y el vértice opuesto a una cara se encuentran al mismo lado de la cara, y negativamente en caso contrario.

Solución:



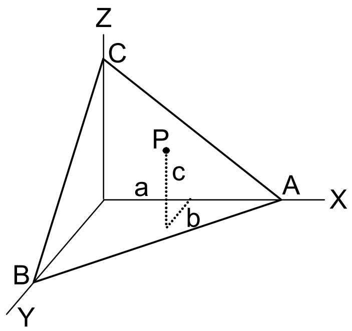
Se proyecta *ABCD* en $A'B'C'D'$ sobre las caras opuestas paralelamente a Δ. Sea *V* el volumen del tetraedro *ABCD*. Se tiene en magnitud y signo $\frac{V}{AA'}=\frac{V_A}{GM}$. Sumando las igualdades análogas: $\frac{V_A}{GM}+\frac{V_B}{GN}+\frac{V_C}{GP}+\frac{V_D}{GQ}=V\left(\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}+\frac{1}{DD'}\right)$. Sean β, γ, δ las intersecciones de los planos paralelos a Δ pasando por *AB*, *AC* y *AD*, con las aristas opuestas *CD*, *DB* y *BC*. Considerando los triángulos semejantes $AA'\beta$, $BB'\beta$ y los de la misma base $A'CD$, *BCD*, se obtiene en magnitud y signo $\frac{AA'}{BB'}=\frac{-\beta A'}{\beta B}=\frac{-S_{A'CD}}{S_{BCD}}$, así como las otras dos relaciones análogas, de las que se deduce $-1=\frac{AA'}{BB'}+\frac{AA'}{CC'}+\frac{AA'}{DD'}=\frac{-S_{A'CD}-S_{A'DB}-S_{A'BC}}{S_{BCD}}=-1$, es decir $\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}+\frac{1}{DD'}=0$, con lo que queda demostrada la proposición del enunciado.

K 43- Sean *OX*, *OY*, *OZ* las aristas de un triedro trirrectángulo. Se lleva sobre dichas aristas las longitudes $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$, respectivamente. 1º) Determinar el centro Ω y el radio *R* de la esfera circunscrita al tetraedro *OABC*. Demostrar que la recta $O\Omega$ pasa por el punto de intersección de las medianas del triángulo *ABC*. 2º) Hallar el lugar geométrico de Ω cuando *A* y *B* están fijos, y *C* describe el eje *OZ*. 3º) Determinar el lugar de Ω para el caso en que *C* sea fijo, y *A* y *B* varíen de forma que la recta *AB* permanezca paralela a una recta fija del plano *XOY*. 4º) Si $x=y=z=a$, hallar la distancia de Ω al plano del triángulo *ABC*, así como el volumen *V* del tetraedro *OABC* en función de *a*.

Solución: 1º) En el paralelepípedo rectángulo de aristas $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, $\frac{z}{2}$, Ω es el vértice opuesto a *O*, distando $\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$ de los cuatro vértices del tetraedro, es decir $R=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$. Como el baricentro del triángulo *ABC*, es el vértice opuesto a *O* en el paralelepípedo rectángulo de aristas $\frac{x}{3}$, $\frac{y}{3}$, $\frac{z}{3}$, el baricentro es homotético de Ω con centro de homotecia *O*, luego la recta $O\Omega$ pasa por dicho baricentro.2º) El paralelepípedo tiene fijas dos dimensiones, $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, luego Ω describe una recta paralela a *OZ*, a una distancia $\frac{x}{2}$ de *YOZ*, y a una distancia $\frac{y}{2}$ de *XOZ*. 3º) En el plano paralelo a *XOY* trazado a una distancia $\frac{z}{2}$ de este, que corta a *OZ* en C', se traza una recta paralela a la recta fija del plano *XOY*. El lugar de Ω es la recta que une el punto medio de esta paralela con C'. 4º) La distancia de Ω al plano *ABC*, es $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, siendo $V=\frac{a^3}{6}$.

K 44- Se da un triedro trirrectángulo *OXYZ* y un punto *P* en su interior, que dista una longitud *a* de *OYZ*, *b* de *OXZ* y *c* de *OXY*. Por *P* se traza un plano cualquiera que corta a las aristas del triedro en *A*, *B* y *C*. 1º) Demostrar que la suma $\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}$ es constante. 2º) Determinar el plano *ABC* para que el volumen del tetraedro *OABC* sea mínimo.

Solución:



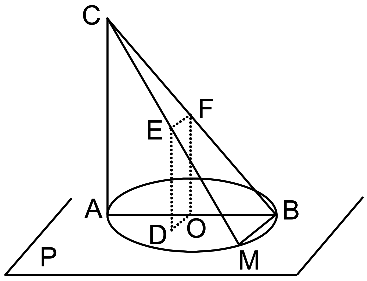
1º) El volumen del tetraedro *OABC* es equivalente a la suma de los volúmenes de los tetraedros *POAB*, *POAC* y *POCB*, luego $\frac{OA \cdot OB \cdot OC}{6}=\frac{a \cdot OB \cdot OC}{6}+\frac{b \cdot OA \cdot OC}{6}+\frac{c \cdot OA \cdot OB}{6}$, de donde $1=\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}$. 2º) Siendo constante el total de los tres sumandos, su máximo o mínimo se alcanza cuando son iguales los tres sumandos, es decir $\frac{a}{OA}=\frac{b}{OB}=\frac{c}{OC}=\lambda$. Luego $OA=\frac{a}{\lambda}$, $OB=\frac{b}{\lambda}$, $OC=\frac{c}{\lambda}$. Sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, se tiene $\lambda=\frac{1}{3}$. Por tanto, el plano *ABC* viene definido por $OA=3a$, $OB=3b$, $OC=3c$, siendo el volumen mínimo $\frac{9abc}{2}$.
Nota: El volumen máximo corresponde a un plano que pasando por *P* fuera paralelo a cualquiera de las aristas del triedro, con lo que el volumen sería infinito.

K 45- Se da una esfera *S* de centro *C* y diámetro $AB=2R$. Sea S' la esfera de diámetro *AC*. Se define el punto *M* del segmento *AB* por $AM=x$. Sea *P* el plano que pasa por *M* y es perpendicular a *AB*. Este plano corta a *S* según un círculo de área Σ, y a S' según un círculo de área Σ'. 1º) Establecer las fórmulas $\Sigma=\pi x(2R-x)$ y $\Sigma'=\pi x(R-x)$. 2º) Estudiar la variación del cociente $\frac{\Sigma}{\Sigma'}$ cuando *x* varía. 3º) En el volumen comprendido entre las dos esferas *S* y S', el plano *P* corta un área *T* que es un círculo o una corona limitada por dos circunferencias, según la posición de *M*. Hallar las dos expresiones correspondientes al área *T* en función de *x*, y estudiar su variación. 4º) Determinar *M* de manera que el área *T* sea equivalente a la de un círculo de radio $0,6R$.

Solución: 1º) $\Sigma=\pi r^2=\pi x(2R-x)$; $\Sigma'=\pi r'^2=\pi x(R-x)$. 2º) $\frac{\Sigma}{\Sigma'}=\frac{2R-x}{R-x}$. La curva $y=\frac{2R-x}{R-x}$, es una hipérbola de centro $(R,1)$, cuyas asíntotas son paralelas a los ejes. Como *P* es un punto de *AB*, *x* no puede ser negativo. En el intervalo $0 \leq x \leq R$, el cociente crece desde 2 hasta $+\infty$. Para $x>R$, el plano no corta a S', por lo que el cociente no tiene significado geométrico. Para $x>2R$, el plano no corta a ninguna de las esferas. 3º) Para $0<x<R$, el área *T* viene dada por πRx, que corresponde a una corona circular, que crece linealmente en el intervalo, alcanzando un máximo de πR^2 para $x=R$. Para $R<x<2R$, el área *T* viene dada por $\pi x(2R-x)$, que corresponde exclusivamente al círculo que *P* corta en *S*, que va disminuyendo según un arco de parábola, desde πR^2 hasta ser nula en $x=2R$. Para $x>2R$, el plano no corta a ninguna de las esferas. 4º) En el intervalo $0 \leq x \leq R$, se tiene $\pi Rx=\pi(0,6R)^2$, es decir $x=0,36R$. En el intervalo $R \leq x \leq 2R$, se tiene $\pi x(2R-x)=\pi(0,6R)^2$, de donde $x^2-2Rx+0,36R^2=0$, obteniéndose la raíz válida $x=1,8R$.

K 46- Se traza en el plano P un círculo de diámetro AB; se levanta la perpendicular en A al plano, sobre la que se lleva el punto C, que se une con un punto cualquiera M de la circunferencia. 1º) Demostrar que CM es perpendicular a BM. Indicar cómo se hallan los ángulos a) de CM con el plano P, b) de un rectilíneo del diedro formado por los planos BMA y BMC. Determinar el centro de la esfera que pasa por los cuatro puntos C, A, B y M. 2º) Se corta el tetraedro $CABM$ por el plano perpendicular a AM, trazado por el punto medio O de AB. Demostrar que la sección es un rectángulo, que divide al tetraedro en dos troncos de prisma triangular. ¿Qué se puede decir de sus volúmenes? 3º) Se supone $AC = AB = a$, $AM = x$, $BM = y$. Siendo V el volumen del tetraedro $CABM$, formar la ecuación de segundo grado que tiene por raíces x e y, sabiendo que $V = \frac{ma^3}{6}$, donde m es un número dado. Discutir la ecuación. Calcular m de forma que $x - y = \frac{a}{2}$. ¿Cuáles son los valores de x e y en este caso?

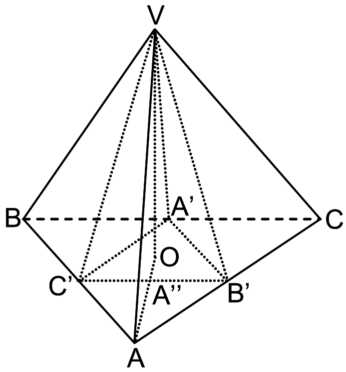
Solución:



1º) AM y BM son perpendiculares. La proyección de CM sobre P, es AM. Luego CM es perpendicular a BM. El ángulo de CM con P se mide por el ángulo $\widehat{CMA}$. Un rectilíneo del diedro formado por P y el plano BMC, es el ángulo $\widehat{CHO}$, siendo H el punto medio de BM, pues el plano CHO es perpendicular a BM. La esfera $CABM$ tiene su centro en la intersección de la perpendicular a P trazada por O, con el plano perpendicular a AC trazado por el punto medio de AC. 2º) El plano perpendicular a AM por O, corta a AM en D (punto medio de AM) y es perpendicular a P; corta a CM en E y a CB en F, siendo EF paralela a OD, luego $ODEF$ es un rectángulo. El cuerpo $DOEFAC$ es un tronco de prisma recto triangular de base ADO. El cuerpo $DOEFBM$ es un tronco de prisma recto triangular de base EDM. El volumen V_1 del primer tronco es $\frac{1}{6}AD \cdot DO(AC + DE + OF) = \frac{1}{6}DM(DO \cdot AC + 2S_{ODEF}) = \frac{1}{6}DM(BM \cdot DE + 2S_{ODEF})$. Como $2S_{ODEF} = DE(EF + DO)$, la expresión anterior es igual a $\frac{1}{6}DM \cdot DE(BM + EF + DO)$, que es el volumen del segundo tronco, luego los dos troncos son equivalentes. 3º) El volumen del tetraedro $CABM$ es $V = \frac{1}{6}AM \cdot BM \cdot AC = \frac{1}{6}axy = \frac{ma^3}{6}$ siendo $m > 0$. Luego $xy = ma^2$, y como $x^2 + y^2 = a^2$, se tiene $(x + y)^2 = a^2 + 2ma^2$, o sea $x + y = a\sqrt{1 + 2m}$. Por tanto, la ecuación pedida es $X^2 - a\sqrt{1 + 2m}\,X + ma^2 = 0$, de donde $X = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + 2m} \pm \sqrt{1 - 2m}\right)$. Ha de cumplirse que $1 - 2m \geq 0$, es decir $0 < m \leq \frac{1}{2}$. Para $x - y = \frac{a}{2}$, se tiene $m = \frac{3}{8}$, obteniéndose para x e y los valores $\frac{a\left(\sqrt{7} \pm 1\right)}{4}$.

K 47- Sea $VABC$ una pirámide triangular tal que $BC = CA = AB$ y $VA = VB = VC$. Los puntos medios de BC, CA y AB, son A', B' y C'. Se forma una segunda pirámide triangular $VA'B'C'$. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. 1º) Siendo $x = \frac{OV^2}{OA'^2}$, calcular en función de x la relación entre las superficies laterales de $VABC$ y $VA'B'C'$. Sea y el cuadrado de esta relación. 2º) Calcular x de manera que y sea un valor dado m^2. Discutir e interpretar los casos límites. 3º) Determinar el cociente $\frac{OV}{OA'} = \sqrt{x}$, de forma que y sea un número entero.

Solución:



1º) La relación entre las superficies laterales, es:

$$\frac{\frac{3}{2}\cdot BC\cdot\sqrt{OA'^2+VO^2}}{\frac{3}{2}\cdot B'C'\cdot\sqrt{OA''^2+VO^2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{OA'^2+VO^2}{\frac{OA'^2}{4}+VO^2}} = 4\cdot\sqrt{\frac{OA'^2+VO^2}{OA'^2+4\cdot VO^2}} = 4\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1+4x}}.$$

O bien: $y=\frac{16(1+x)}{1+4x}$. 2º) $x=\frac{16-m^2}{4m^2-16}$, luego x describe un arco de hipérbola desde $x=0$ para $m^2=16$, hasta $x=\infty$ para $m^2=4$. En el caso $m^2=16$, el punto V coincide con O, es decir que las pirámides degeneran en el plano ABC. En el caso $m^2=4$, el punto V está en el infinito, y las pirámides son prismas rectos triangulares. 3º) En la tabla se exponen los valores pedidos, habiéndose incluido los valores límites ∞ y 0.

y	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x	∞	$\frac{11}{4}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{44}$	0
$\sqrt{x}$	∞	1,6583	1,1180	0,8660	0,7071	0,5916	0,5000	0,4226	0,3536	0,2887	0,2236	0,1508	0

K 48- Se da un triedro trirrectángulo y un punto P en su interior, cuyas distancias a las caras miden 3, 4 y 5 cm. Un plano que pasa por P corta al triedro según un triángulo cuyo baricentro es P. Calcular el volumen del tetraedro formado.

Solución: La longitud de las aristas del tetraedro correspondientes al triedro dado, serán el triple de las distancias de P a las caras. Luego el volumen es $\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 12\cdot 15 = 270\,\text{cm}^3$.

K 49- Demostrar que el volumen de un tetraedro viene dado por las siguientes expresiones: 1º) Un tercio del producto de una arista por el área de la proyección del tetraedro sobre un plano perpendicular a dicha arista. 2º) Un sexto del producto de dos aristas opuestas por la mínima distancia entre ellas, multiplicado por el seno del ángulo que forman dichas aristas.

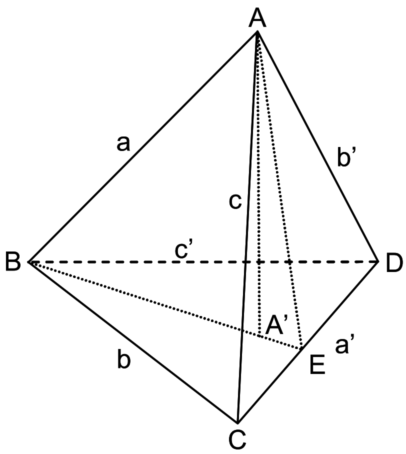
Solución: 1º) La fórmula del volumen de la pirámide es $V=\frac{1}{3}Sh$, siendo S el área de una cara y h la altura del vértice opuesto a dicha cara sobre esta. La proyección del cuerpo sobre un plano perpendicular a una arista coincide con la proyección de la base sobre dicho plano. En efecto, sea la arista AB y la base BCD, y el plano perpendicular sea por ejemplo el que pasa por B. La proyección de A sobre dicho plano, es B, luego la proyección del cuerpo coincide con la de la base. Siendo θ el ángulo que forma la arista AB con la base, la altura correspondiente es $AB\cdot\sin\theta$. Luego el volumen es $V=\frac{1}{3}S\cdot AB\cdot\sin\theta = \frac{1}{3}AB\cdot(S\cdot\sin\theta) = \frac{1}{3}AB\cdot S'$, siendo S' la proyección de la base sobre el plano perpendicular a AB. 2º) La fórmula del volumen del prismatoide es $V=\frac{h}{6}(B+B'+4B'')$. Tomando como bases dos aristas opuestas, es decir $B=B'=0$, la fórmula se reduce a $V=\frac{h}{6}4B''$, siendo h la mínima distancia entre las dos aristas opuestas. Como $B''=\frac{a}{2}\cdot\frac{a'}{2}\cdot\sin\theta$, la fórmula es $V=\frac{aa'h\sin\theta}{6}$.

K 50- Se da un cono de altura 100 cm y radio de la base 50 cm. La altura decrece 10 cm por segundo, y el radio crece 5 cm por segundo. Calcular la variación del volumen.

Solución: $V_t = \frac{\pi}{3}(50+5t)^2(100-10t) = \frac{250\pi}{3}(-t^3-10t^2+100t+1000)$, $V_0 = \frac{250000\pi}{2}$, $\Delta_V = \frac{250\pi}{3}(-t^3-10t^2+100t)$. Esta curva, que define la variación del volumen, es una parábola cúbica, que crece en el intervalo $0 \leq t \leq \frac{10}{3}$ s, alcanzando en $t = \frac{10}{3}$ s, el mayor aumento de $48481,37\,\text{cm}^3$, siendo el volumen del cono en ese momento, de $310280,76\,\text{cm}^3$. En el intervalo $\frac{10}{3} < t \leq 6,18$ s, la curva de la variación del volumen disminuye hasta anularse para $t = 6,18$ s, en cuyo momento el volumen del cono es igual a su volumen inicial. En el intervalo $6,18\text{ s} < t \leq 10$ s, la curva de la variación del volumen se hace negativa, alcanzando en $t = 10$, una variación negativa cuyo valor absoluto es igual al volumen inicial del cono, es decir que el volumen del cono es nulo.

K 51- Demostrar que en un tetraedro de aristas opuestas ortogonales, la suma de los cuadrados de los productos de las aristas opuestas es igual a cuatro veces la suma de los cuadrados de las áreas de las cuatro caras.

Solución:



Sea el tetraedro $ABCD$, cuyas aristas opuestas ortogonales, son aa', bb', cc'. Sea el plano ABE perpendicular a CD. La altura AA' del tetraedro coincide con la altura del triángulo ABE, siendo A' el ortocentro del triángulo BCD. Se tiene: $a^2 = AE^2 + BE'^2 - 2 \cdot BE \cdot A'E$,

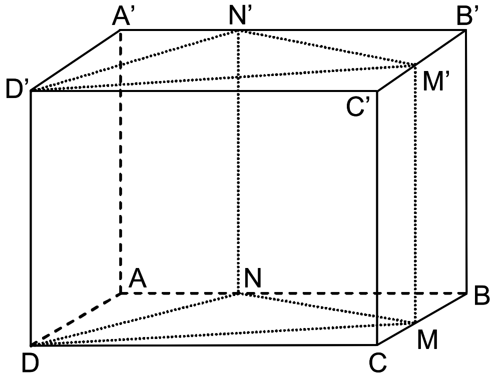
$a^2a'^2 = a'^2(AE^2 + BE'^2 - 2 \cdot BE \cdot A'E) = 4(S^2_{ACD} + S^2_{BCD} - 2 \cdot S_{BCD} \cdot S_{CDA'})$.:

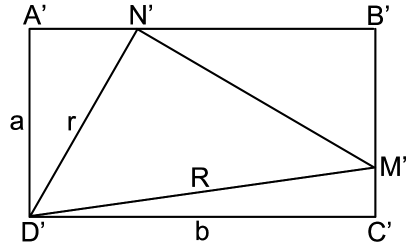
Se obtienen expresiones análogas para $b^2b'^2$ y $c^2c'^2$. Sumando las tres igualdades, se tiene:

$a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 = 4(S^2_{ABC} + S^2_{ACD} + S^2_{ADB} + S^2_{BCD})$.

K 52- En un paralelepípedo rectangular de base $ABCD$, $AD = a$, siendo h la altura y $A'B'C'D'$ la base superior. El paralelepípedo queda dividido en tres partes equivalentes por dos planos que pasan por DD' y cortan a las caras laterales según MM' y NN', de tal modo que el diedro de arista NN', cuyas caras pasan por MM' y DD', es recto. Calcular en función de a y h el volumen engendrado por el rectángulo $MM'NN'$ al girar alrededor de DD'.

Solución:





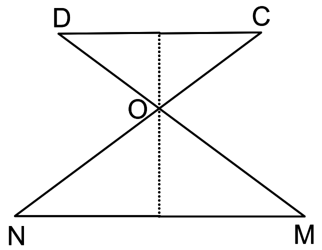
El volumen pedido corresponde al existente entre los cilindros coaxiales de radios $OM = R$ y $ON = r$, y de altura h. Siendo $DC = b$, el área del triángulo DCM es $\frac{b \cdot \sqrt{R^2 - b^2}}{2} = \frac{ab}{3}$, de donde $R^2 = b^2 + \frac{4a^2}{9}$. El área del triángulo DAN es $\frac{a \cdot \sqrt{r^2 - a^2}}{2} = \frac{ab}{3}$, de donde $r^2 = a^2 + \frac{4b^2}{9}$. Luego $R^2 - r^2 = \frac{5}{9}(b^2 - a^2)$. En el triángulo DMN, se tiene $R^2 - r^2 = \left(b - \sqrt{r^2 - a^2}\right)^2 + \left(a - \sqrt{R^2 - b^2}\right)^2$. Sustituyendo en esta igualdad, los valores anteriores, se obtiene:

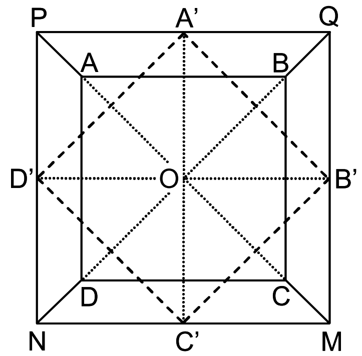
$\frac{5}{9}(b^2 - a^2) = \left(b - \frac{2b}{3}\right)^2 + \left(a - \frac{2a}{3}\right)^2$, de donde $b = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Por tanto, $R^2 = \frac{35a^2}{18}$, $r^2 = \frac{5a^2}{3}$.

El volumen pedido es: $\pi h\left(\frac{35a^2}{18} - \frac{5a^2}{3}\right) = \frac{5\pi a^2 h}{18}$.

K 53- Dos cuadrados iguales, de lado 4, están situados en dos planos paralelos cuya distancia es 5. Su posición respectiva es tal que sus centros están en la misma perpendicular a los planos, y las diagonales de uno son paralelas a los lados del otro. Por cada lado de uno de los cuadrados se traza un plano que pasa por el vértice opuesto del otro cuadrado. Hallar el volumen del cuerpo formado entre los dos planos en los que están situados los dos cuadrados, y los cuatro planos trazados.

Solución:





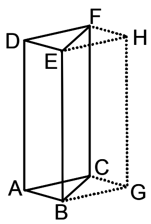
Sea el cuadrado $ABCD$ situado en el plano superior, y $A'B'C'D'$ el cuadrado situado en el plano inferior. El plano que pasa por el lado AB y el vértice C', corta al plano inferior según la recta MN. Los otros tres planos cortan al plano inferior según NP, PQ y QM. Estos cuatro planos trazados se cortan en O, vértice de las dos pirámides opuestas $OMNPQ$ y $OABCD$, formando un tronco de pirámide de segunda especie, cuyo volumen viene dado por la fórmula $V = \frac{h}{3}\left(B + B' - \sqrt{BB'}\right)$.

El área B de la base inferior es: $\left(\sqrt{2}\,a\right)^2 = 32$, y el área B' de la base superior es: $a^2 = 16$.

Luego, $V = \frac{5}{3}\left(32 + 16 - \sqrt{32 \cdot 16}\right) = \frac{80\left(3 - \sqrt{2}\right)}{3}$.

K 54- Demostrar que el volumen de un prisma triangular es igual a la mitad del producto de una cara lateral por su distancia a la arista opuesta.

Solución:



Sea el prisma $ABCDEF$. Completado el paralelepípedo $ABCDEFGH$, el volumen de este es igual al producto de una de sus caras por la distancia entre esta y la opuesta. Luego el volumen del prisma, es la mitad del volumen del paralelepípedo, siendo la distancia entre caras opuestas paralelas, la existente entre una cara y la arista opuesta.

K 55- Probar que el volumen de un prisma regular es igual a la mitad del producto de su superficie lateral por la apotema de la base.

Solución: Llamando p, a y B al perímetro, al lado y al área de la base, h a la altura del prisma, y S_L a su superficie lateral, se tiene $V = B \cdot h = p \cdot a \cdot h = \frac{1}{2}a(2 \cdot p \cdot h) = \frac{1}{2}a \cdot S_L$.

K 56- Demostrar que el volumen de una pirámide regular es igual al tercio de su superficie lateral por la distancia de las caras al centro de la base.

Solución: Descomponiendo la pirámide en pirámides de vértice el centro de su base, y de bases sus caras, se tiene $V = \frac{1}{3}S_1 \cdot d_1 + \frac{1}{3}S_2 \cdot d_2 + \ldots$, en donde S_i es el área de una cara lateral y d_i la distancia del centro de la base a la cara. Por ser pirámide regular $d_1 = d_2 = \ldots = d$, luego $V = \frac{1}{3}$ $d(S_1 + S_2 + \ldots) = \frac{1}{3}d \cdot S_L$, siendo S_L la superficie lateral de la pirámide.

K 57- Si una pirámide tiene por base un trapecio, su volumen es igual al tercio del producto de la suma de las bases del trapecio por la proyección del sólido sobre un plano perpendicular a estas bases.

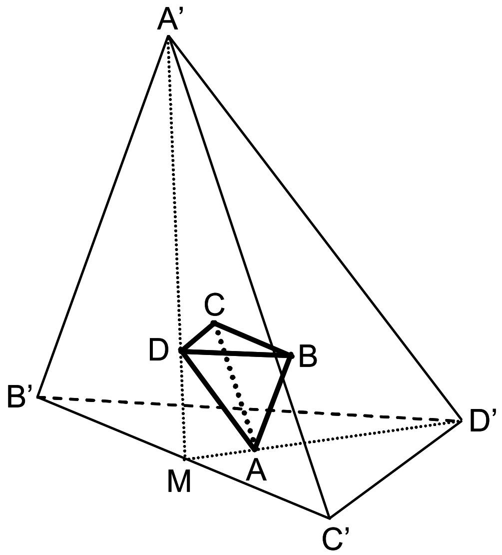
Solución: La proyección del sólido sobre un plano perpendicular a las bases del trapecio, es un triángulo de altura la del sólido, y de base la altura del trapecio, luego su área es $S = \frac{H \cdot h}{2}$, siendo H la altura de la pirámide, y h la del trapecio. El área de la base de la pirámide es $B = \frac{s \cdot h}{2}$, siendo s la suma de las bases del trapecio. Luego $V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{s \cdot h}{2} \cdot H = \frac{s \cdot S}{3}$.

K 58- Si la altura de una pirámide triangular es igual al diámetro del círculo circunscrito a la base, demostrar que su volumen es igual a la sexta parte del producto de los tres lados de la base.

Solución: $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{\frac{abc}{4R} \cdot H}{3} = \frac{\frac{abc}{4R} \cdot 2R}{3} = \frac{abc}{6}$, siendo a, b, c los lados de la base, R el radio del círculo circunscrito, y H la altura de la pirámide.

K 59- Por cada vértice de un tetraedro se traza un plano paralelo a la cara opuesta, obteniéndose un segundo tetraedro. Hallar el volumen de este en función del volumen de aquel.

Solución:

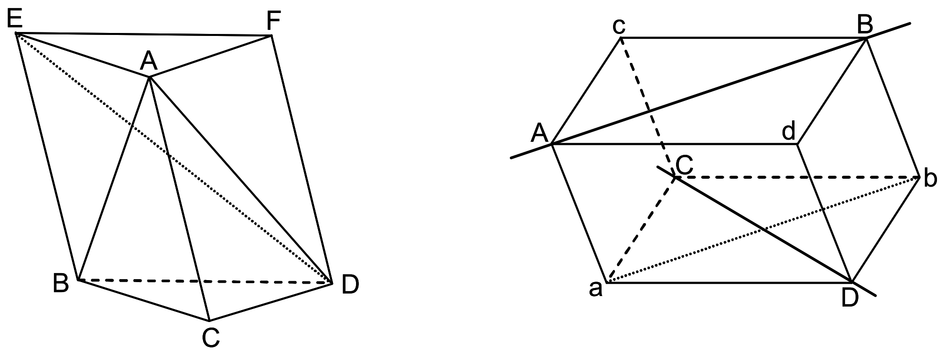


Sea una esfera que pasa por los cuatro vértices del tetraedro dado $ABCD$. Será tangente a las cuatro caras del segundo tetraedro $A'B'C'D'$, siéndolo en sus centros de gravedad. Luego $A'D$ y

AD' son medianas que se cortan en M, punto medio de $B'C'$. Como AD y $A'D'$ son paralelas, se tiene $\frac{MD}{MA'} = \frac{MA}{MD'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{1}{3}$. Luego la razón de semejanza entre ambos tetraedros es $\frac{1}{3}$, por lo que $V_{ABCD} = \frac{V_{A'B'C'D'}}{27}$, es decir que el volumen del segundo tetraedro es 27 veces el del dado.

K 60- Demostrar que el volumen de un paralelepípedo circunscrito a un tetraedro es el triple del volumen del tetraedro. Como aplicación, demostrar el teorema de Steiner.

Solución:



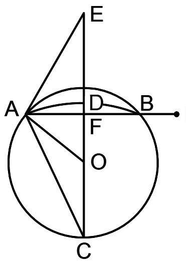
Sea el tetraedro $ABCD$. Se trazan por B y D, las paralelas BE y DF a AC y de su misma longitud, obteniéndose el prisma $ABCDEF$. Separando de este prisma, el tetraedro dado (figura de la izquierda), queda una pirámide cuadrangular de vértice A y base $BDEF$. Un plano que pase por A y por DE, descompone a la citada pirámide en dos pirámides triangulares equivalentes $AEBD$ y $ADEF$, cuyas bases tienen la misma superficie, correspondiente a la mitad del paralelogramo $BDEF$, y cuya altura es la misma, por tanto las dos pirámides son equivalentes. Como el tetraedro $DAEF$ es equivalente al dado, por tener la misma altura y ser iguales sus bases, resulta que este es la tercera parte del paralelepípedo. El teorema de Steiner define que si se toman dos segmentos de longitudes dadas, situados sobre dos rectas fijas que se cruzan, sus cuatro extremos determinan un tetraedro de volumen constante, cualquiera que sea la posición de dichos segmentos sobre sus rectas respectivas (figura de la derecha). Sea un paralelepípedo cuya cara superior es $AcBd$, y las aristas laterales Aa, cC, Bb y dD. Prolongadas en ambos sentidos, las diagonales AB y CD de dos caras opuestas, representan las dos rectas dadas sobre las que se toman los segmentos de longitud constante AB y CD. Tomando la cara $aCbD$ como base, y trazando la diagonal ab, se ve que cualquiera que sea la colocación de AB y CD sobre las rectas dadas, todos los paralelepípedos formados tienen por base un paralelogramo igual al $aCbD$, pues las diagonales son iguales y el ángulo es constante e igual al de las rectas dadas. Esta base $aCbD$ junto con la opuesta $AcBd$, forman el sistema de planos paralelos determinados por dos rectas dadas, por lo que la separación de dichas bases (la altura del paralelepípedo) es igual a la menor distancia entre las dos recta dadas. Luego el volumen del paralelepípedo es constante, y por tanto el del tetraedro.

K 61- Una cuña esférica está inscrita en un prisma triangular regular. Hallar el volumen de la cuña en función del volumen del prisma.

Solución: El volumen de la cuña es $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi R^3}{9}$. La altura del prisma es $2R$, y la altura del triángulo de la base es R, por lo que el área de la base es $\frac{R^2\sqrt{3}}{3}$, y el volumen del prisma es $V_P = \frac{2R^3\sqrt{3}}{3}$. Por tanto $V_C = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}V_P$.

K 62- Se corta una esfera de centro O y radio R por un plano P perpendicular a uno de los radios en su punto medio. Se considera el segmento esférico que no contiene al centro O. Interiormente a este segmento, se trazan dos esferas variables, tangentes a la esfera dada, al plano dado y tangentes entre sí en M. 1º) Hallar el área S de la superficie engendrada por M. 2º) Hallar el volumen limitado por dicha superficie S y el plano P.

Solución:



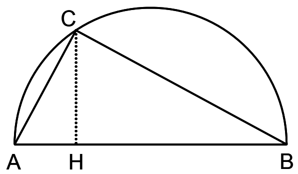
Cortando por un plano que pase por O, perpendicular a P, se tiene la situación recogida en la figura. Aplicando una inversión de centro A, se tiene que el lugar geométrico de M es la bisectriz del ángulo formado por AB y la recta inversa de la circunferencia O. Luego el lugar geométrico de M, es una circunferencia que pasa por A y B, y tal que el ángulo que forma con AB es la mitad del que forma la circunferencia O con AB. Como $\widehat{OAB} = 30º$, $\widehat{BAE} = 60º$, $\widehat{BAD} = 30º$, el centro del círculo es C, siendo su radio $CA = CB = CD = CM = R\sqrt{3}$.

1º) Por tanto el área pedida es la del casquete esférico $ADBF$, que es igual a $S = 2\pi \cdot CD \cdot FD = 2\pi \cdot CD(CD.-CF) = 3\pi\left(2-\sqrt{3}\right)R^2$.

2º) El volumen pedido corresponde al volumen del segmento esférico $ADBF$, que es igual a $V = \pi \cdot DF^2\left(CD - \frac{DF}{3}\right) = \frac{\pi}{8}\left(16\sqrt{3} - 27\right)R^3$.

K 63- Se da una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$ y se elige un punto C de ella, tal que $AC = x$. Calcular en función de x la suma de las áreas engendradas por CB y el arco CB al girar alrededor de AB.

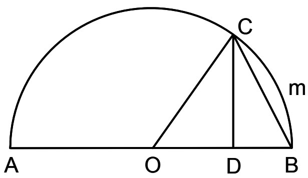
Solución:



Siendo $AC = x$, $CB = \sqrt{4R^2 - x^2}$, $CH = \frac{x\sqrt{4R^2-x^2}}{2R}$, $AH = \frac{x^2}{2R}$, $HB = \frac{4R^2-x^2}{2R}$, el área descrita por CB es: $S = 2\pi \cdot \frac{CH}{2} \cdot CB = \frac{\pi x(4R^2-x^2)}{2R}$, y el área descrita por el arco CB es: $S' = 2\pi R \cdot HB = \pi(4R^2 - x^2)$. La suma pedida es: $\pi(4R^2-x^2)\left(\frac{x}{2R}+1\right)$.

K 64- Sobre una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se toma un punto C cuya proyección sobre AB es D, y se hace $BD = x$. Siendo V el volumen engendrado por la semicircunferencia, V_1 el engendrado por el segmento circular $BCmB$, y V_2 el engendrado por el sector circular $OCmBO$, girando todos ellos alrededor de AB, determinar C de forma que $\frac{V_1 + kV_2}{V} = q$, siendo k un número dado positivo. Discutir la solución en función de q.

Solución:



Los volúmenes engendrados son, respectivamente, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_1 = \frac{\pi}{3}Rx^2$, $V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 x$.

Luego: $\dfrac{\frac{\pi}{3}Rx^2 + k\frac{2\pi}{3}R^2 x}{\frac{4\pi}{3}R^3} = q$, de donde $x^2 + 2kRx - 4qR^2 = 0$, siendo sus raíces $x = R\left(-k \pm \sqrt{k^2+4q}\right)$. Como $k > 0$ por definición, y $q > 0$ como cociente de volúmenes que ninguno de ellos puede ser negativo, siempre hay una única solución de x, pues $\sqrt{k^2+4q} \geq k$. Esta solución es $x = R\left(-k + \sqrt{k^2+4q}\right)$. Para $q = 0$, $x = 0$, estando D situado en B. Para $q = \frac{2k+1}{4}$, $x = R$, estando D situado en O. Para $q = k+1$, $x = 2R$, estando D situado en A. Para $q > k+1$, el valor de x no tiene significado geométrico, pues no puede ser mayor que $2R$.

K 65- Conociendo la arista a de cada uno de los cinco poliedros regulares convexos, calcular sus principales elementos.

Solución:

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
S	$\sqrt{3}\,a^2$	$6a^2$	$2\sqrt{3}\,a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$	$5\sqrt{3}\,a^2$
V	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{7\sqrt{5}+15}{4}a^3$	$\frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}a^3$
R	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,\frac{a}{2}$
r	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\,\frac{a}{2}$	$\frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}a$
ρ	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}a$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}a$
h	$\frac{\sqrt{6}}{3}a$	$2r$	$2r$	$2r$	$2r$
θ	$70º31'43''6$ (a)	$90º$	$109º28'16''4$ (b)	$116º33'54''2$ (c)	$138º11'22''9$ (d)

Leyenda: S, Superficie; V, Volumen; R, Radio de la esfera circunscrita; r, Radio de la esfera inscrita; ρ, Radio de la esfera tangente a las aristas; h, Altura; θ, Ángulo de dos caras con una arista común.

(a) $2\arctan\frac{\sqrt{2}}{2} = 70º31'43''6$; (b) $2\arctan\sqrt{2} = 109º28'16''4$;

(c) $2\arctan\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 116º33'54''2$; (d) $2\arctan\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 138º11'22''9$

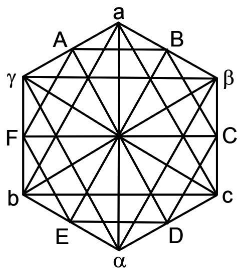
K 66- Hallar el volumen del cubo inscrito en un dodecaedro regular de arista a.

Solución: Radio de la esfera inscrita en el dodecaedro: $\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\,\frac{a}{2}$. Radio de la esfera circunscrita al cubo de lado l: $\frac{\sqrt{3}}{2}l$. De donde $l = \dfrac{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\,\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{30}}\,a$.

Volumen del cubo: $l^3 = \left(\frac{25+11\sqrt{5}}{30}\right)^{\frac{3}{2}} a^3 = 2,1257a^3$.

K 67- Un octaedro tiene por caras: un triángulo equilátero abc, tres triángulos isósceles iguales αbc, βca y γab, un triángulo equilátero $\alpha\beta\gamma$ igual al primero, y tres triángulos isósceles $a\beta\gamma$, $b\gamma\alpha$ y $c\alpha\beta$, iguales a los tres triángulos isósceles anteriores. Siendo p la longitud del lado del triángulo equilátero, y q la de los dos lados iguales de los triángulos isósceles, hallar el volumen del octaedro.

Solución:



Se aplica la fórmula del volumen de un prismatoide $V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B'')$, en donde $B = S_{abc} = \frac{\sqrt{3}}{4}p^2$, $B' = S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{4}p^2$, y B'' es la superficie del exágono $ABCDEF$, de lado $\frac{p}{2}$, es decir $B'' = 6 \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}p \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}p^2$. La altura H del octaedro es la de un triángulo isósceles sobre el lado desigual, cuyos lados iguales miden q y el tercer lado mide $\frac{\sqrt{3}}{3}p$, luego $H = \sqrt{q^2 - \frac{p^2}{3}}$. Por tanto $V = \frac{\sqrt{q^2 - \frac{p^2}{3}}}{6}\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}p^2 + 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}p^2\right) = \frac{1}{3}p^2\sqrt{3q^2 - p^2}$.

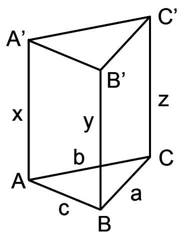
K 68- Con las caras de un icosaedro regular de arista a, convenientemente escogidas y prolongadas, se puede formar un octaedro regular. Hallar el volumen de este.

Solución: Ambos poliedros tienen la misma esfera inscrita, cuyo radio es $r_{20} = \frac{\sqrt{3}\left(3 + \sqrt{5}\right)}{12}a = r_8 = \frac{\sqrt{6}}{6}l$, siendo l el lado del octaedro. Por tanto $l = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}a$.

El volumen del octaedro es $V = \frac{\sqrt{2}}{3}l^3 = \frac{9 + 4\sqrt{5}}{6}a^3 = 2,991a^3$.

K 69- Se da una superficie prismática cuya sección recta es un triángulo ABC. Se llevan sobre las aristas, a un mismo lado de la sección ABC, longitudes $AA' = x$, $BB' = y$, $CC' = z$. Calcular x, y, z de forma que las tres caras laterales del tronco de prisma $ABCA'B'C'$, sean equivalentes. Demostrar que si el problema tiene solución, admite una infinidad de soluciones.

Solución:

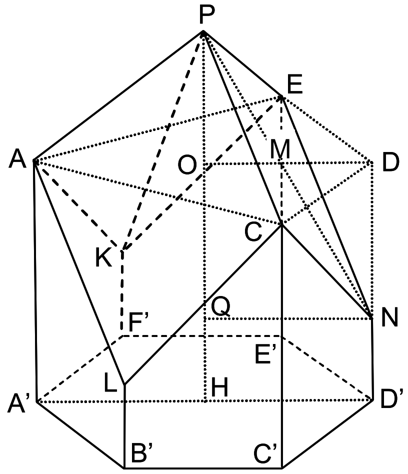


Las superficies de las caras son $S_{ABA'B'} = \frac{x+y}{2}c = S_{BCB'C'} = \frac{y+z}{2}a = S_{ACA'C'} = \frac{x+z}{2}b$. Luego $(x+y)c = (y+z)a = (x+z)b$. Las infinitas soluciones de este sistema de dos ecuaciones homogéneas con tres incógnitas, son:

$x = (ab - bc + ca)\lambda$, $y = (ab + bc - ca)\lambda$, $z = (-ab + bc + ca)\lambda$, que tienen sentido geométrico si $ab + ca > bc$, $ab + bc > ca$, $bc + ca > ab$.

K 70- Por un punto del eje de un prisma exagonal regular de altura b, y de lado de la base a, siendo dicho punto exterior al prisma, y por cada uno de los lados de un triángulo equilátero inscrito en la base superior, se trazan planos de manera que se forma un cuerpo de diez caras, cuyo volumen se pide, así como la variación del volumen cuando el punto se mueve a lo largo de dicho eje.

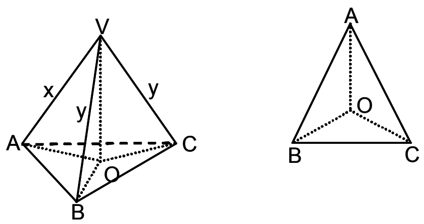
Solución:



La base inferior del prisma es el exágono $A'B'C'D'E'F'$ y la base superior el exágono $ABCDEF$ (en la figura se han omitido los vértices B y F). Sea ACE el triángulo equilátero. Siendo P el punto sobre el eje del prisma, se tiene que el plano PAC corta en L a la arista BB', el plano PCE corta en N a la arista DD', y el plano PEA corta en K a la arista FF'. El volumen pedido V, comprende el volumen V_1 del prisma inicial, más el volumen V_2 de la pirámide de vértice P y base ACE, menos el volumen de tres pirámides iguales a la $CEDN$. El volumen del prisma inicial es $V_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. Siendo O el centro del triángulo ACE, y haciendo $PO = x$, el volumen de la pirámide $PACE$ es $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2x = \dfrac{\sqrt{3}\,a^2x}{4}$. Siendo M el punto medio de CE, $OM = \dfrac{a}{2}$, la altura de la pirámide $CDEN$ es $DN = OQ = x$. La superficie de la base CDE es $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Por tanto, el volumen V_3 de la pirámide $CDEN$ es $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2x$. Luego $V = V_1 + V_2 - 3V_3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. Por tanto, V es constante e independiente de x.

K 71- El triedro trirrectángulo V de una pirámide $VABC$, se proyecta sobre el plano de la base según las rectas OA, OB y OC, que forman los ángulos $\widehat{AOB} = 105^\circ$, $\widehat{AOC} = 105^\circ$ y $\widehat{BOC} = 150^\circ$. Sabiendo que $AO = 10$, hallar el volumen de la pirámide.

Solución:



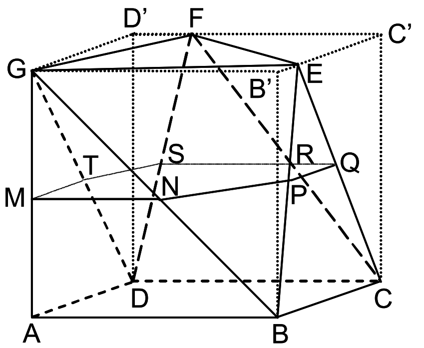
Las aristas VB y VC son iguales al ser iguales los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{AOC}$. Haciendo $VA = x$, $VB = VC = y$, $OB = OC = z$, se tiene $x^2 + y^2 = AB^2$, $2y^2 = BC^2$, la altura $VO = \sqrt{x^2 - 100} = \sqrt{y^2 - z^2}$ (es decir, $x^2 + z^2 = y^2 + 100$),

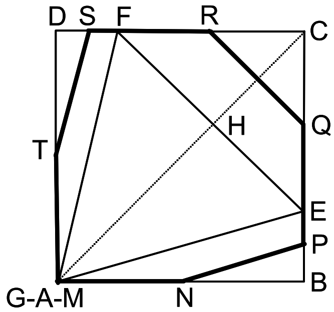
$AB^2 = 10^2 + z^2 - 20z\cos 105^\circ = 100 + z^2 + 20z\cos 75^\circ$, $BC^2 = 2z^2 - 2z^2\cos 150^\circ =$
$= 2z^2(1 + \cos 30^\circ)$. Luego $x^2 + y^2 = 100 + z^2 + 20z\cos 75^\circ$ y $2y^2 = 2z^2(1 + \cos 30^\circ)$. Por tanto, como $100 - z^2 = x^2 - y^2 = 100 + z^2 + 20z\cos 75^\circ - 2z^2(1 + \cos 30)$, se obtiene $z = \dfrac{10\cos 75^\circ}{\cos 30^\circ} =$
$= 10\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}}$. Operando: $x = \sqrt{\dfrac{50\left(3 + 2\sqrt{3}\right)}{3}} = 10{,}37955$, $y = \dfrac{5\sqrt{6}}{3} = 4{,}08248$,

$V = \dfrac{xy^2}{6} = \dfrac{125\sqrt{18 + 12\sqrt{3}}}{27} = 28{,}8321.$

K 72- Hallar el volumen del prismatoide de altura a, que tiene por bases el cuadrado $ABCD$ de lado a, y el triángulo equilátero GEF, cuyo vértice G se proyecta ortogonalmente en A, y los vértices E y F sobre los lados BC y CD respectivamente. Las caras del prismatoide son los triángulos AGB, GBE, BEC, ECF, FCD, FGD y GDA.

Solución:

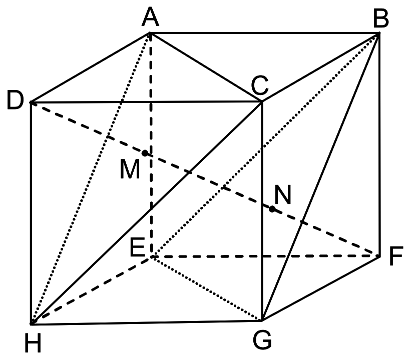


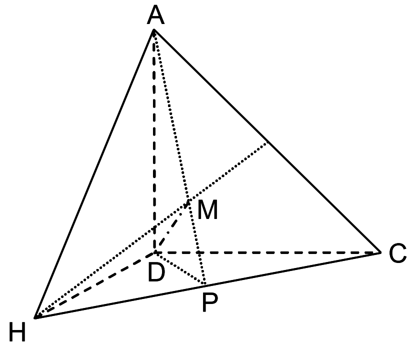


En la figura de la izquierda se representa el prismatoide inscrito en un cubo de lado a, para lo cual se han añadido los vértices B', C' y D', así como las aristas $B'G$, $B'B$, $B'C'$, $C'C$, $C'D'$, $D'D$ y $D'G$. De la figura de la derecha se obtiene, siendo l el lado del triángulo equilátero GEF, $AC = a\sqrt{2}$, $CH = \frac{l}{2}$, $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}l$, $a\sqrt{2} = \frac{l}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}l$, de donde $l = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)a$. La superficie de la base superior es la del triángulo AEF, es decir $\left(2\sqrt{3} - 3\right)a^2$. La superficie de la base inferior es la del cuadrado $ABCD$, o sea a^2. La base media es el eptágono $MNPQRSTM$, siendo $MN = MT = \frac{a}{2}$, $NB = TD = \frac{a}{2}$, $PQ = RS = \frac{a}{2}$, $CQ = CR = \frac{l}{2\sqrt{2}}$, $PB = DS = a - \frac{a}{2} - \frac{l}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}a$. Luego la superficie del eptágono es la del cuadrado de lado a, disminuida en la de los triángulos NBP, TDS y QCR, es decir $a^2 - 2 \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{4}a - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. Por tanto el volumen del prismatoide es $V = \frac{a}{6}\left[a^2 + \left(2\sqrt{3} - 3\right)a^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right] = \frac{2\sqrt{3} - 1}{3}a^3$.

K 73- Un cubo de arista a se corta por dos planos perpendiculares a una de sus diagonales, pasando cada uno de ellos por uno de los puntos que dividen a dicha diagonal en tres partes iguales. Hallar el volumen del prismatoide que se ha formado en la parte central del cubo, entre los dos planos.

Solución:



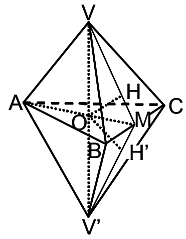


Sea el cubo $ABCDEFGH$ (figura de la izquierda) y la diagonal DF, que los puntos M y N dividen en tres partes iguales, luego $DM = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. El plano perpendicular a DM, que pasa por M, determina la pirámide $DACH$ (figura de la derecha). En efecto, suponiendo $DA = DC = DH = x$, se tiene que el lado del triángulo equilátero ACH mide $x\sqrt{2}$, y en el triángulo rectángulo DAP, en el que su altura DM mide $\frac{\sqrt{3}}{3}a$, se tiene que:
$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = AM \cdot MP = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}x \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}x = \frac{x^2}{3}$, luego $x = a$. Por tanto, el volumen

pedido es el del cubo disminuido en el doble del volumen de la pirámide *DACH*, es decir $V = a^3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{2}{3} a^3$.

K 74- Tres diámetros de una esfera de radio *R*, forman entre sí cada dos de ellos, un ángulo de 60º. Calcular el volumen del paralelepípedo que forman al cortarse los planos tangentes a la esfera trazados en los extremos de dichos diámetros.

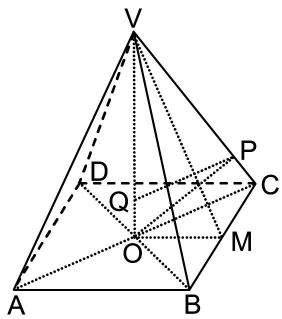
Solución:



Sea *O* el centro de la esfera; el paralelepípedo está formado por las pirámides *VABC* y *V'ABC*. Los diámetros dados son las perpendiculares desde *O* a las caras de las pirámides. Las perpendiculares desde *O* a las caras *VBC* y *V'BC*, forman el ángulo $\widehat{HOH'} = 180º - 60º = 120º$. Las rectas *VH*, *V'H'* y *AO* se cortan en *M* sobre *BC*. En el triángulo *OHM*, $\widehat{HOM} = 60º$, $\widehat{OHM} = 90º$, $OH = R$, $OM = 2R$, $HR = R\sqrt{3}$. En el triángulo *VOM*, $VO = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, $VM = \frac{4R}{\sqrt{3}}$. En el triángulo equilátero *ABC*, $AM = 3 \cdot OM = 6R$, $BC = 4\sqrt{3}R$, siendo su superficie $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3}R \cdot 6R = 12\sqrt{3}R^2$. El volumen de la pirámide *VABC* es $\frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3}R^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = 8R^3$. El volumen del paralelepípedo *VABCV'* es $16R^3$.

K 75- Un cono de vértice *V*, altura *VO*, y base un círculo de radio *R*, es tal que se le puede inscribir una pirámide de base cuadrada y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros. Se pide 1º) Calcular *VO*, la superficie lateral y el volumen del cono, en función de *R*. 2º) Calcular el radio de la esfera circunscrita al cono. 3º) Se proyecta *O* en *P* sobre una generatriz, y por *P* se traza un plano paralelo a la base, que delimita un segundo cono de vértice *V*. Calcular la razón de las superficies laterales de los dos conos y el volumen del tronco de cono formado.

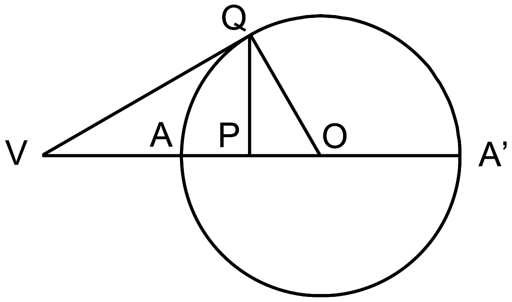
Solución:



1º) Sea *VABCD* la pirámide inscrita en el cono. Se tiene $OC = R$, $BC = VB = VC = \sqrt{2}R$. En el triángulo equilátero *VBC*, $VM = \frac{\sqrt{6}}{2}R$. En el triángulo *VOM*, $OV = \sqrt{\frac{6R^2}{4} - \frac{2R^2}{4}} = R$. La superficie lateral del cono es $\pi\left(\sqrt{2}R\right)^2 \cdot \frac{2\pi R}{2\pi\sqrt{2}R} = \pi\sqrt{2}R^2$. El volumen del cono es $\frac{\pi}{3}R^3$. 2º) En el triángulo *VAC*, $OC = OV = R$, luego el radio de la esfera circunscrita es *R*. 3º) Sea *Q* el punto en que el plano que pasa por *P* paralelo a la base, corta al eje. En el triángulo *VPQ*, $QP = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$. Luego la razón de las superficies laterales es $2^2 = 4$. El volumen del tronco de cono formado, es. $\frac{\pi}{3}\left[R^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3\right] = \frac{7\pi}{24}R^3$.

K 76- Se da una esfera de radio R y centro O. Sobre un diámetro AA' se toma un punto P situado entre O y A. Por P se traza un plano perpendicular a AA', y se circunscribe un cono de base el círculo menor así determinado. Determinar P para que el volumen comprendido entre el área lateral del cono y la esfera, sea m veces el volumen de la esfera de diámetro el del círculo menor citado. Discusión de la solución.

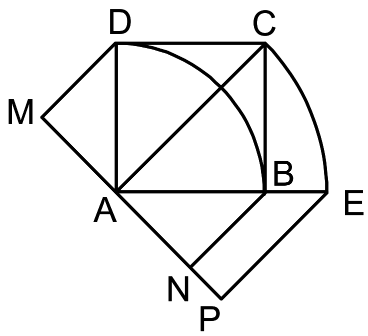
Solución:



El volumen definido es la diferencia entre el volumen del cono circunscrito y el volumen del segmento esférico de altura AP. Sea $OQ = R$, $PQ = r$, $VP = H$, $AP = h$, $OP = R-h$, $r^2 = VP \cdot PO = H(R-h) = R^2-(R-h)^2$, $H = \dfrac{h(2R-h)}{R-h}$, $VQ = \sqrt{H^2+r^2} = \dfrac{R\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$. El volumen del cono circunscrito es $\dfrac{\pi}{3}r^2H = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{h^2(2R-h)^2}{R-h}$. El volumen del segmento esférico es $\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$. El volumen de la esfera de radio QP es $\dfrac{4\pi}{3}r^3 = \dfrac{4\pi}{3}(2Rh-h^2)^{\frac{3}{2}}$. Luego el volumen comprendido entre el área lateral del cono y la esfera, es: $\dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{h^2(2R-h)^2}{R-h} - \pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right) = m\dfrac{4\pi}{3}(2Rh-h^2)^{\frac{3}{2}}$. Operando se obtiene una ecuación de 5º grado en h, siendo $m^2 = \dfrac{R^4h}{16(R-h)^2(2R-h)^3}$. Como $0 \leq h \leq R$, m puede tomar cualquier valor entre 0 y ∞. Haciendo $x = \dfrac{2R-h}{R}$, la ecuación queda: $x^3(x-1)^2 - \dfrac{2-x}{16m^2} = 0$, que siempre tiene una solución en el intervalo $1 < x < 2$.

K 77- Se da un cuadrado $ABCD$ de lado a. Tomando A como centro se describen dos arcos de círculo DB, CE (E está en la prolongación de AB). La figura $BECD$ gira alrededor de la perpendicular trazada en A a la diagonal AC. Calcular el área y el volumen engendrados.

Solución:



1º) El área pedida es $S = S_{ACEP} + S_{NBEP} + S_{MDBN} + S_{MDCA}$. Se sabe que $AB = AD = DC = CB = a$, $AC = AE = a\sqrt{2}$, $BE = AE - AB = a\left(\sqrt{2}-1\right)$, $MD = NB = MA = AN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $PE = AP = \dfrac{AE}{\sqrt{2}} = a$, $NP = AP - AN = \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $BN = DM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Se utilizan las fórmulas del área lateral del tronco de cono, $\pi(R+r)g$, y de la zona esférica, $2\pi Rh$. El área engendrada es:

$$S = 2\pi a\sqrt{2}\,a + \pi\left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)a\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\pi a 2\frac{\sqrt{2}}{2}a + \pi\left(a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)a = 6\sqrt{2}\,\pi a^2.$$

2º) El volumen pedido es $V = V_{ACEP} + V_{MDCA} - V_{MDBN} - V_{NBEP}$. Se utilizan las fórmulas del volumen del tronco de cono, $\frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)$, y del segmento esférico, $\frac{2\pi}{3}R^2h$. El volumen engendrado es:

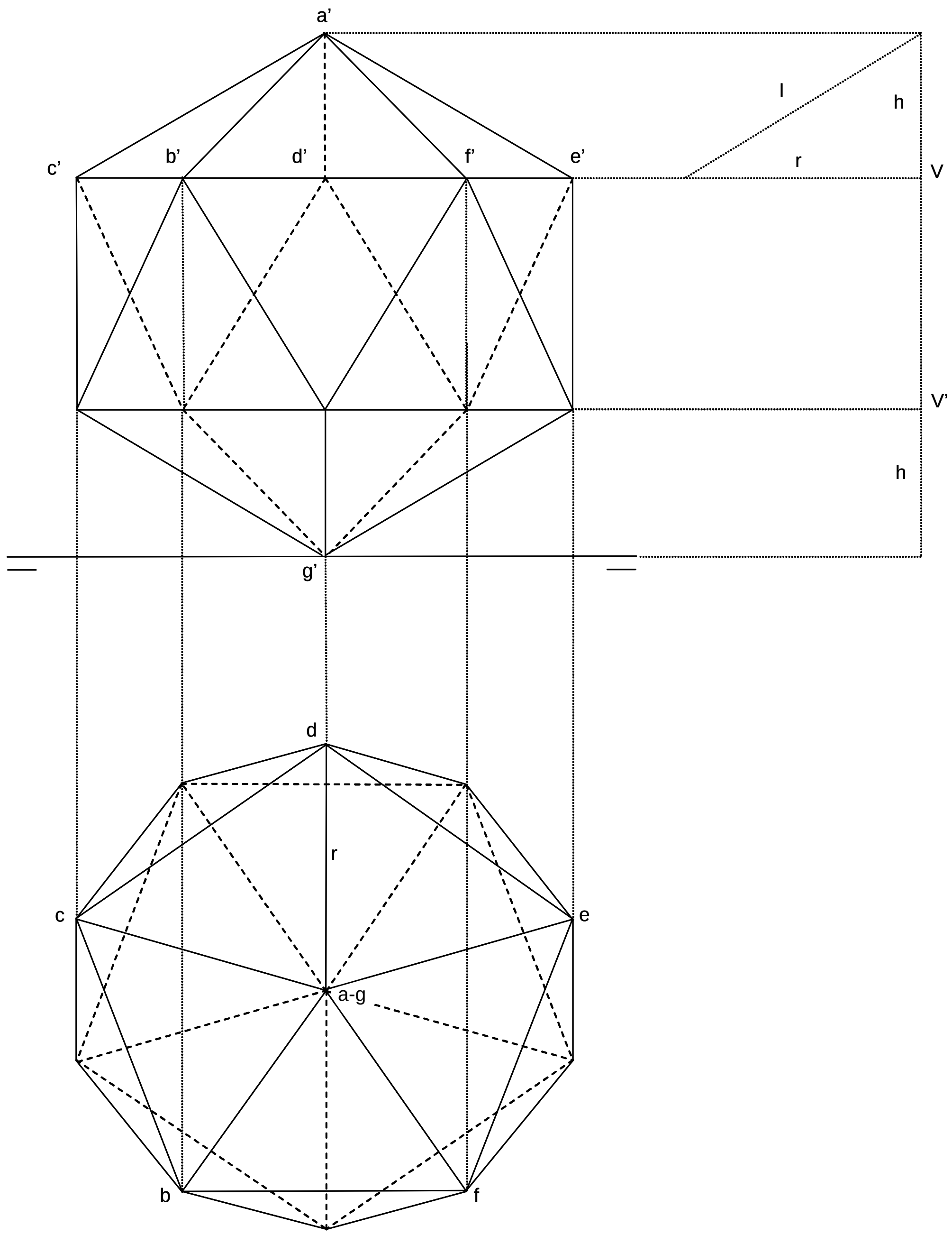
$$V = \frac{2\pi}{3}\left(a\sqrt{2}\right)^2 a + \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}aa\sqrt{2}\right] - \frac{2\pi}{3}a^2 2\frac{\sqrt{2}}{2}a -$$

$$-\frac{\pi}{3}a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + a\frac{\sqrt{2}}{2}a\right] = \pi a^3.$$

Sección L - GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

L 1- Representar en el sistema diédrico, un icosaedro apoyado en el plano horizontal *H*, con una diagonal perpendicular a dicho plano y con una de las aristas que parten del vértice superior, perpendicular a la línea de tierra (el segundo vértice de esta arista es el más cercano a la línea de tierra).

Solución:

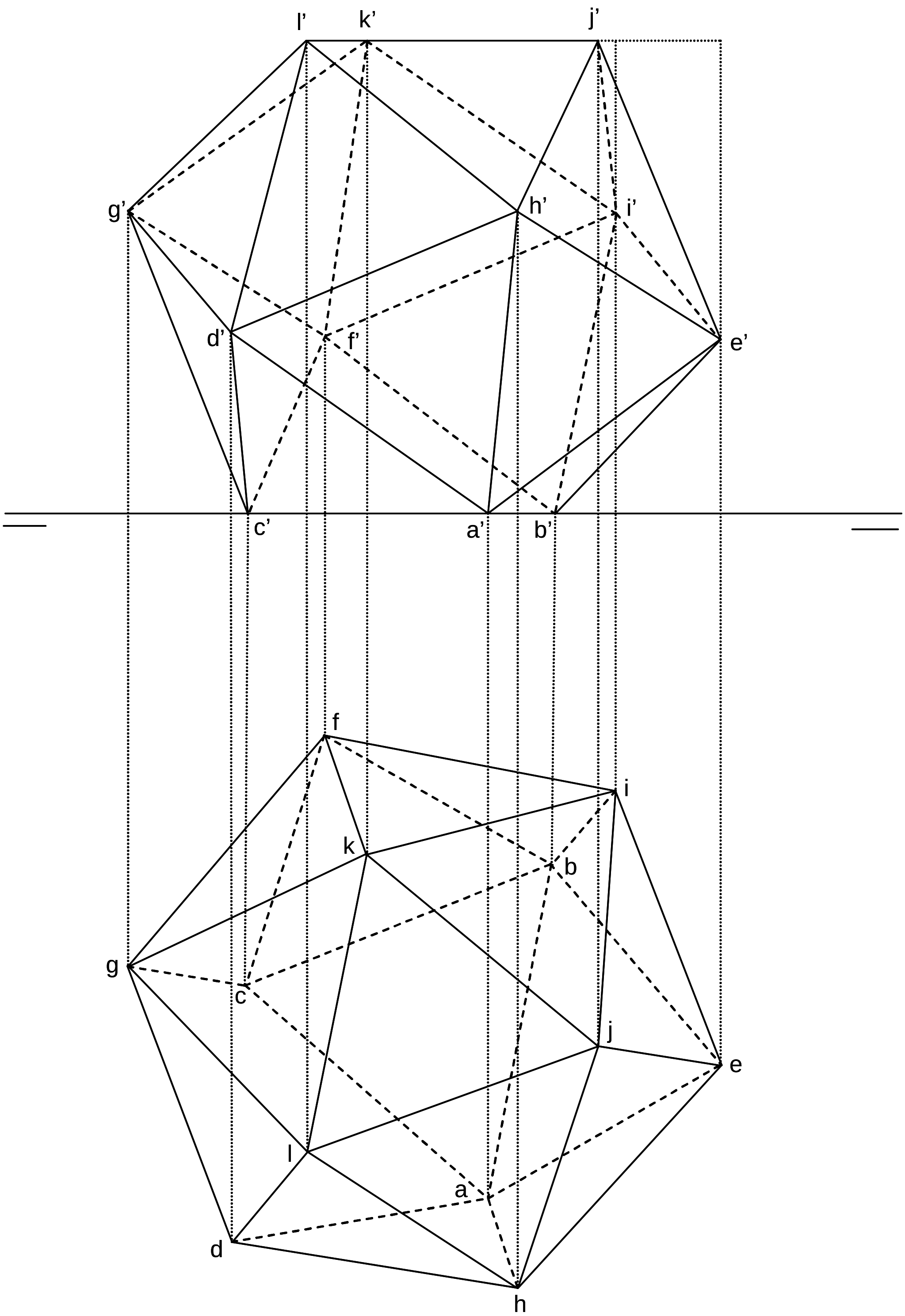


La diagonal vertical *AG* se proyecta en el plano *H* en $a-g$, siendo su longitud el diámetro de la esfera circunscrita. El pentágono *BCDEF* se proyecta en verdadera magnitud en *bcdef*, siendo *ad* perpendicular a la línea de tierra y el vértice *D* el más cercano a esta línea. En el croquis de la derecha, perteneciente a la sección principal, se han determinado las alturas (V y V') del pentágono *BCDEF* y su simétrico respecto al centro del icosaedro, siendo *l* la arista y *r* el radio del círculo circunscrito a dichos pentágonos.

Nota: En los problemas de geometría descriptiva, se ha utilizado como unidad el cm, aplicándose en cada caso, la escala más conveniente al tamaño de la página y a la claridad de las construcciones realizadas.

L 2- Representar en el sistema diédrico, un icosaedro con una cara apoyada en el plano horizontal *H*, y con el lado de dicha cara más cercano a la línea de tierra, formando con esta un ángulo de 18º.

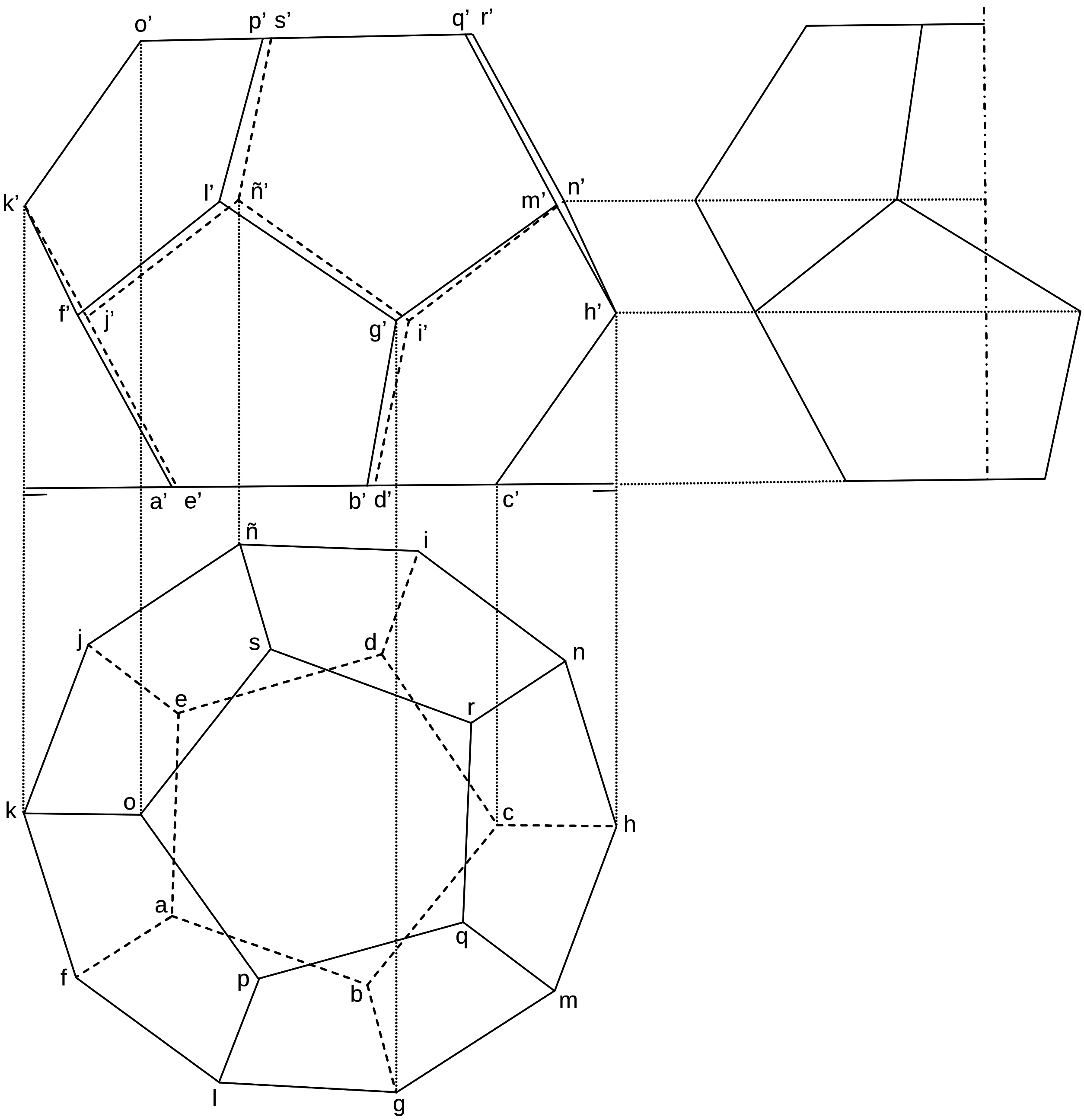
Solución:



La cara apoyada *ABC*, como su opuesta *JKL* se proyectan en verdadera magnitud en el plano *H*. La proyección *bc* de la arista *BC*, forma un ángulo de 18º con la línea de tierra.

L 3- Representar en el sistema diédrico un dodecaedro apoyado en una cara situada en el plano horizontal *H*, y uno de cuyos lados forma un ángulo de 15º con la línea de tierra.

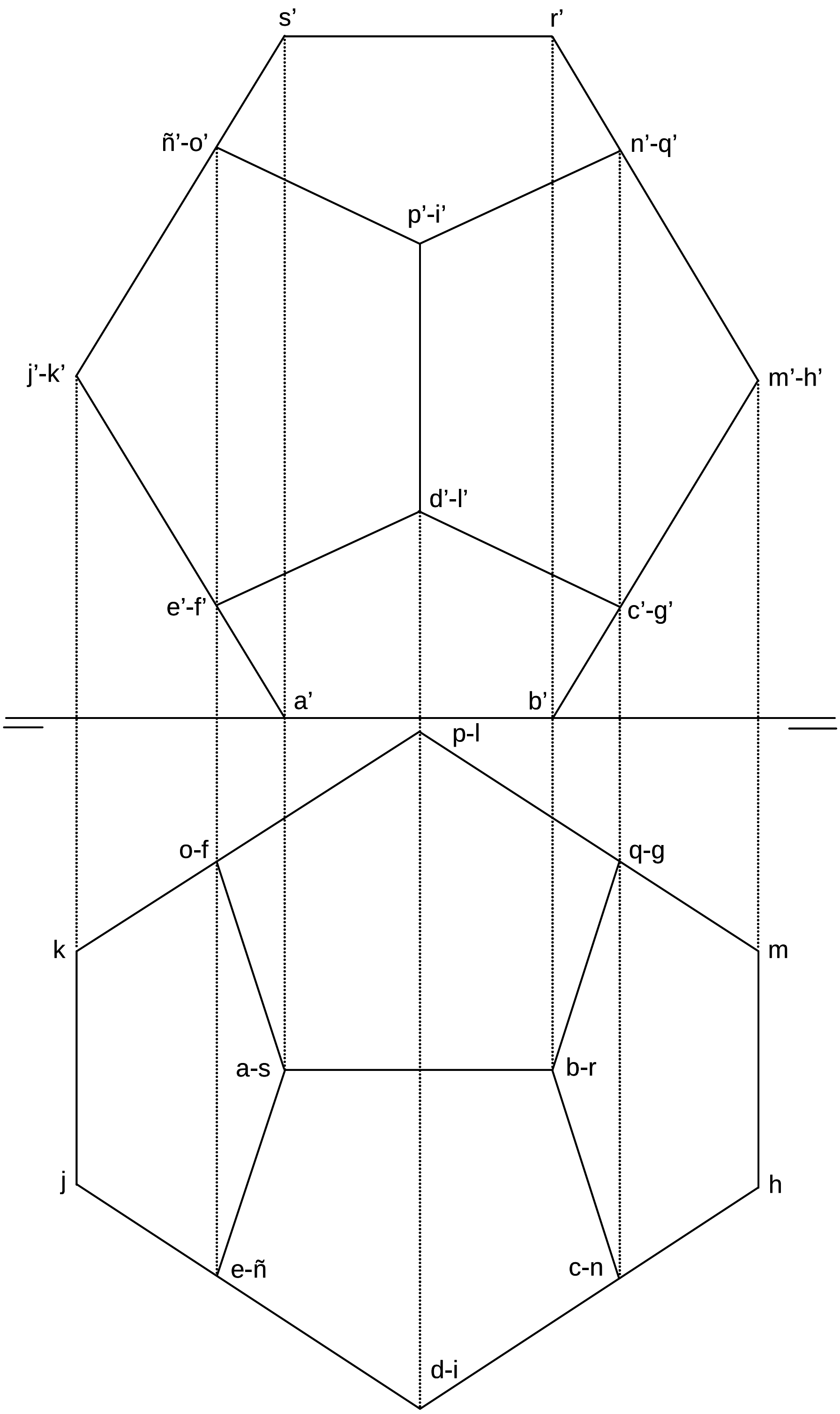
Solución:



La proyección *de* de la arista *DE* perteneciente a la cara *ABCDE*, apoyada en el plano *H*, forma un ángulo de 15º con la línea de tierra. El pentágono *OPQRS* está girado 36º respecto al *ABCDE*. En el croquis de la derecha se ha dibujado la sección principal que determina las alturas de los planos donde se sitúan los vértices *FGHIJ* y *KLMNÑ*.

L 4- Representar en el sistema diédrico, un dodecaedro apoyado sobre una arista situada sobre el plano horizontal *H* y paralela a la línea de tierra, y con el plano diagonal correspondiente, paralelo al plano *V*.

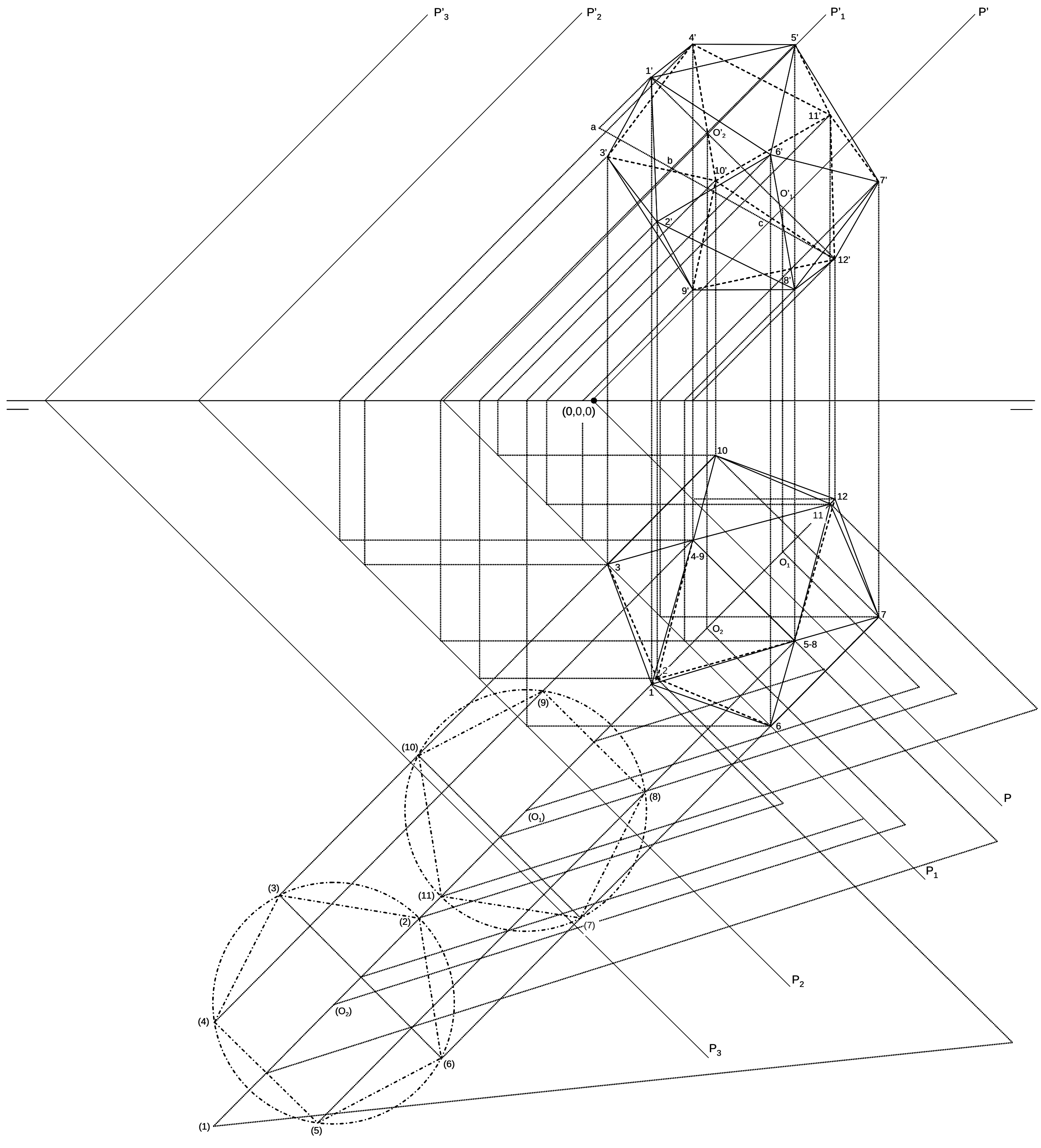
Solución:



Las aristas *AB* y *KL* se proyectan en verdadera magnitud, siendo sus proyecciones sobre *H*, paralelas a la línea de tierra. La figura formada por *engf* es un cuadrado de lado la diagonal del pentágono regular que tiene por lado la arista del dodecaedro. La proyección sobre el plano *V* es igual a la del plano *H* girada 90º.

L 5- Representar en el sistema diédrico, un icosaedro con una diagonal perpendicular al plano $(0, 5, 5)$, cuyas trazas forman ángulos de 45º con la línea de tierra, y apoyada sobre él, siendo la abscisa y la ordenada del vértice de apoyo 7 cm y 3 cm, respectivamente. La longitud de la arista es 4 cm. Una de las aristas que parten del vértice inferior, es perpendicular a la traza horizontal del plano paralelo al dado, donde se encuentra el segundo vértice de dicha arista.

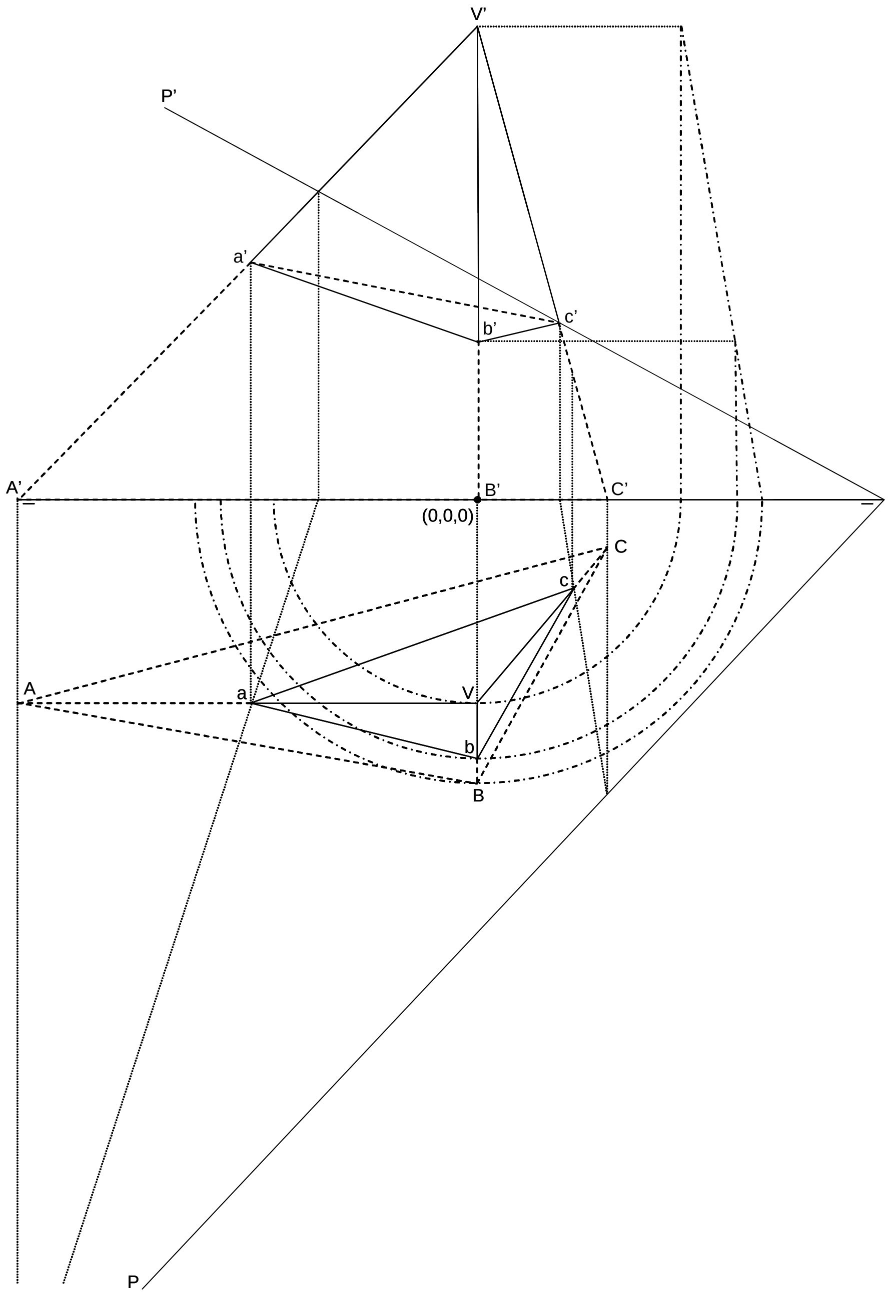
Solución:



PP' es el plano dado sobre el que está el vértice $(12-12')$. En el plano P_1P_1', paralelo al dado, están los vértices 7, 8, 9, 10 y 11, siendo la arista 12 – 11 perpendicular a la traza P_1. En el plano P_2P_2', paralelo al dado, están los vértices 2, 3, 4, 5 y 6. En el plano P_3P_3', paralelo al dado, está el vértice 1.

L 6- Representar en el sistema diédrico la intersección de una pirámide con el plano de coordenadas $(8, 8.5, 4.5)$, estando situado el origen a la izquierda del vértice del plano. El vértice de la pirámide es el punto $(0, 4, 9)$ y su base es el triángulo cuyos vértices son $A(-9, 4, 0)$, $B(0, 5.5, 0)$ y $C(2.5, 1, 0)$.

Solución:

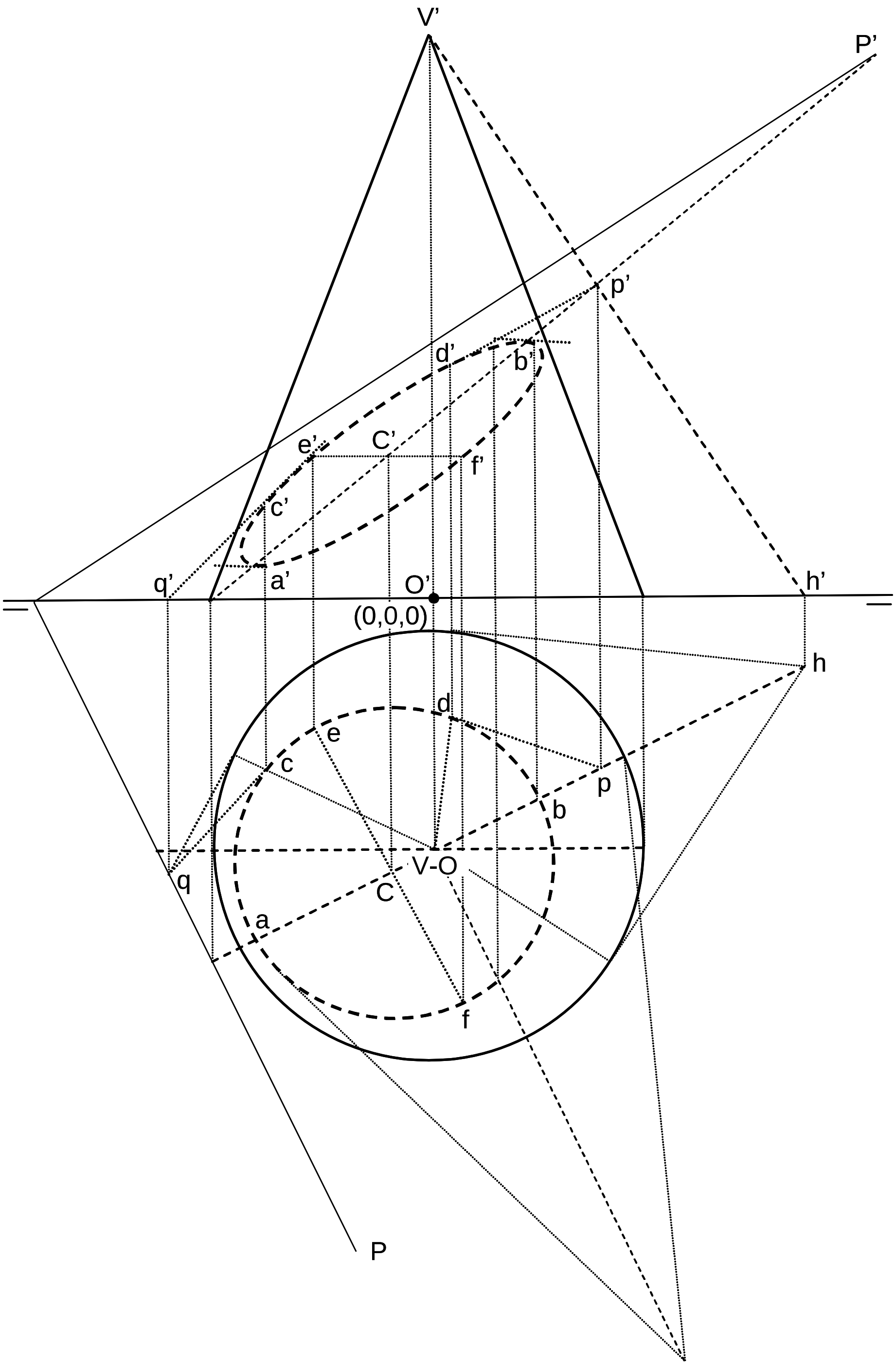


Se ha supuesto que el plano dado es opaco, por lo que se ha dibujado de trazos la parte de la pirámide situada debajo del plano. La proyección de la sección es el triángulo *abc*, y la vertical, el $a'b'c'$. Recordar que la base y la sección son homológicas, con eje de homología la traza del plano y centro de homología el vértice de la pirámide. Sus proyecciones horizontales también lo son, con eje de homología la traza *P*, y centro de homología *V*.

Nota: En este y sucesivos problemas, se dan los decimales correspondientes a las coordenadas, separados por un punto de la correspondiente unidad. La coma se utiliza para separar las coordenadas. Así $(3.5, 6, 0.2)$, indica que la abscisa es 3.5, la ordenada 6, y la cota 0.2.

L 7- Representar en el sistema diédrico la intersección de un cono por un plano. La base del cono es un círculo situado en el plano *H*, cuyo centro es el punto $(0, 3.3, 0)$ y su radio $3\,\text{cm}$, siendo el vértice el punto $(0, 3.3, 7.5)$. Las coordenadas del plano son $(-5.5, 11, 3.5)$, estando el origen de coordenadas a la derecha del vértice del plano.

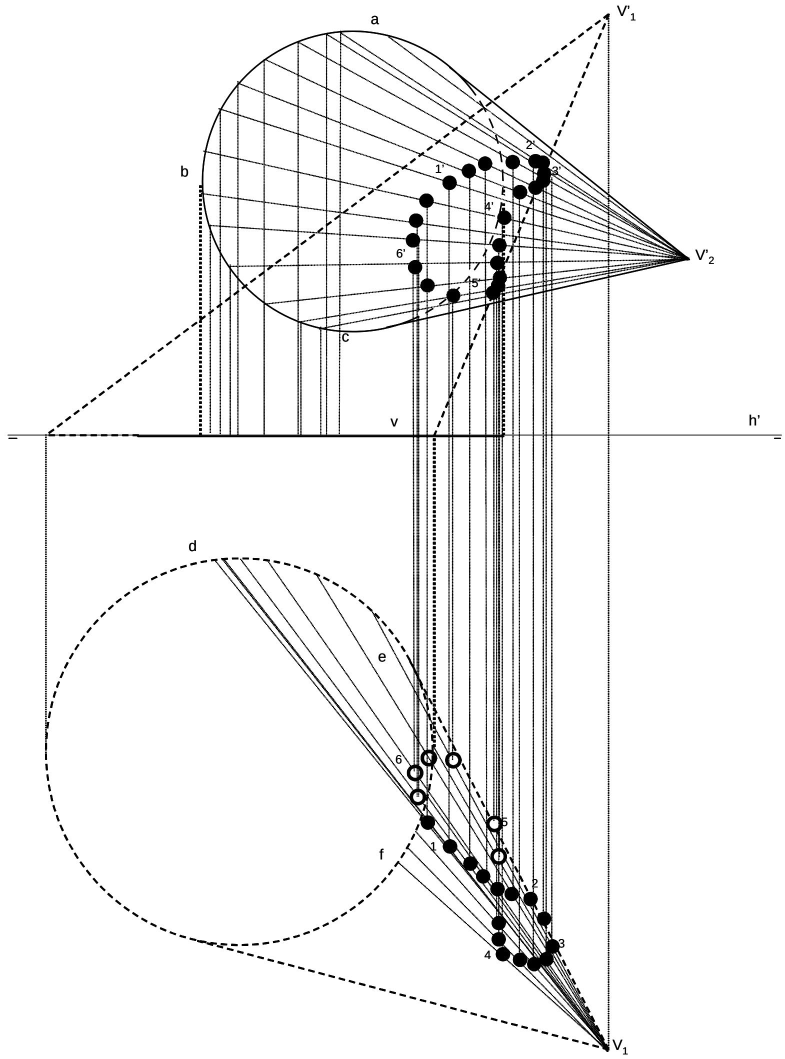
Solución:



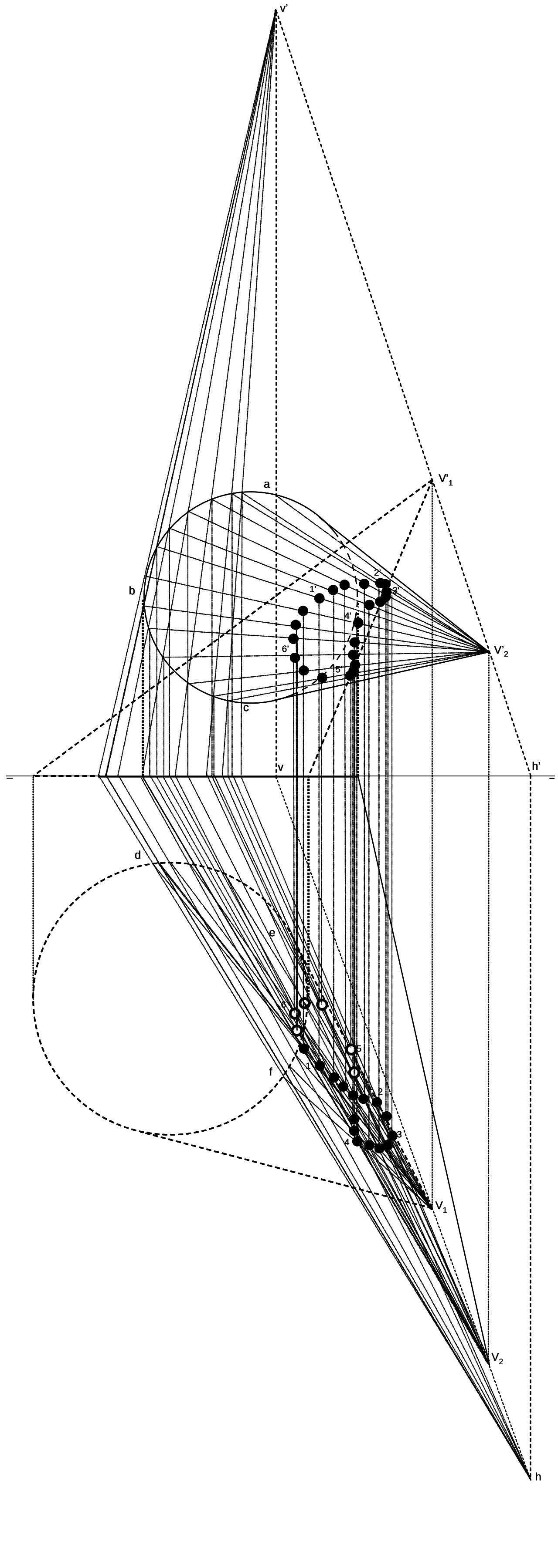
La intersección es la elipse cuyas proyecciones se han dibujado de trazos. En la proyección vertical se han dibujado las tangentes más arriba y más abajo en los puntos b' y a', respectivamente. En la proyección horizontal se han dibujado los ejes *ab* y *ef*, y en la vertical los diámetros conjugados $a'b'$ y $e'f'$. Se han dibujado las tangentes $qc - q'c'$ y $pd - p'd'$.

L 8- Representar en el sistema diédrico la intersección de dos conos. Uno, tiene como base una circunferencia situada en el plano *H*, de centro el punto $(0, 6, 0)$ y radio $3.5\,\text{cm}$, siendo su vértice el punto $(7, 11, 8)$. El segundo, tiene por base una circunferencia situada en el plano *V*, de centro $(2, 0, 5)$ y radio $3\,\text{cm}$, siendo su vértice el punto $(8, 5.5, 3)$.

Solución:

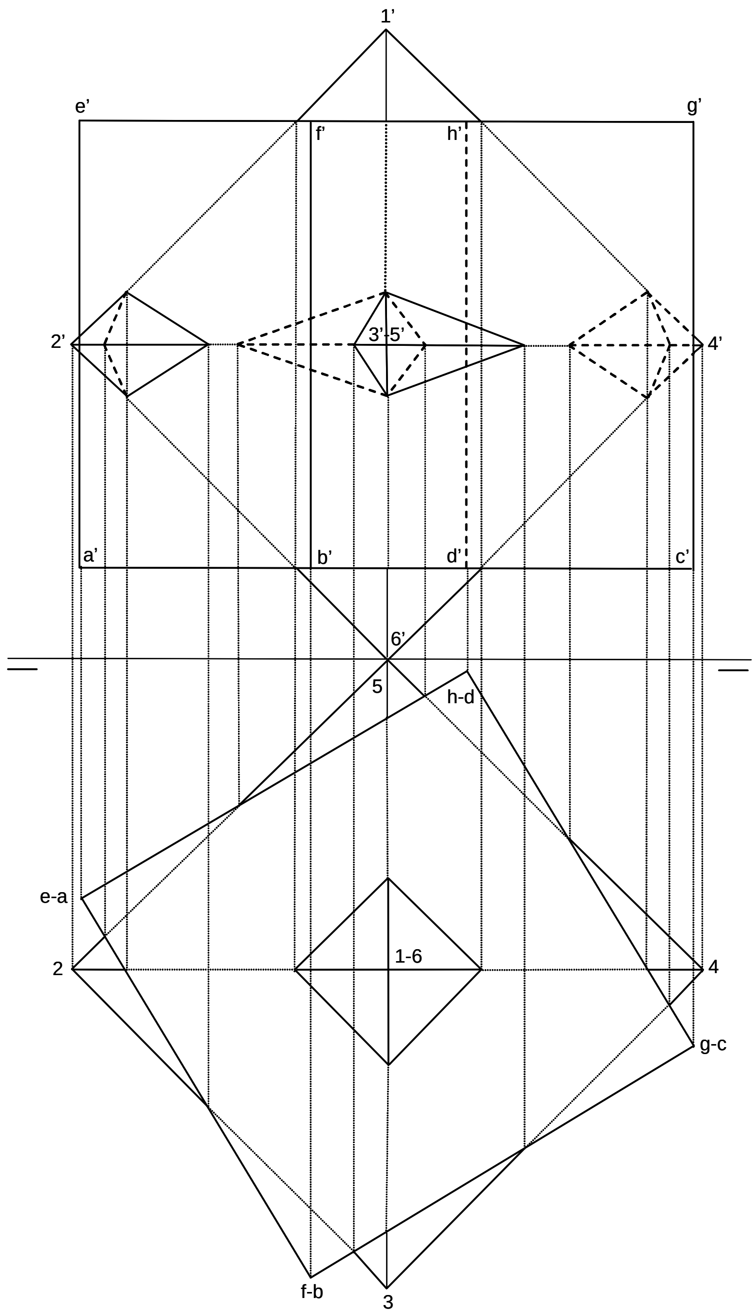


Se han utilizado como planos auxiliares los que pasan por los vértices de los dos conos. La intersección es del tipo mordedura. Se han obtenido 22 puntos para definir la curva intersección. Suponiendo transparente el cono de vértice V_1, la proyección vertical de la intersección es toda vista (tiene forma de riñón), mientras que en la horizontal, con forma de ocho, hay parte de la curva oculta (puntos con fondo blanco). En la figura de esta página, se ha representado con detalle la intersección, mientras que en la de la página siguiente se ha representado la totalidad del dibujo.


V'
a
V'1
b
1'
2'
3'
4'
6'
5'
V'2
c
v
h'
d
e
f
1
2
3
4
5
V1
V2
h

L 9- Representar en el sistema diédrico el cuerpo formado por un cubo y un octaedro concéntricos, ambos de arista 4 cm, El octaedro tiene una diagonal perpendicular al plano horizontal *H* y apoyada sobre él, formando el plano de su sección principal un ángulo de 45º con el plano vertical *V*. El cubo tiene sus bases paralelas al plano horizontal *H*, y una de sus caras verticales forma un ángulo de 15º con el plano vertical *V*.

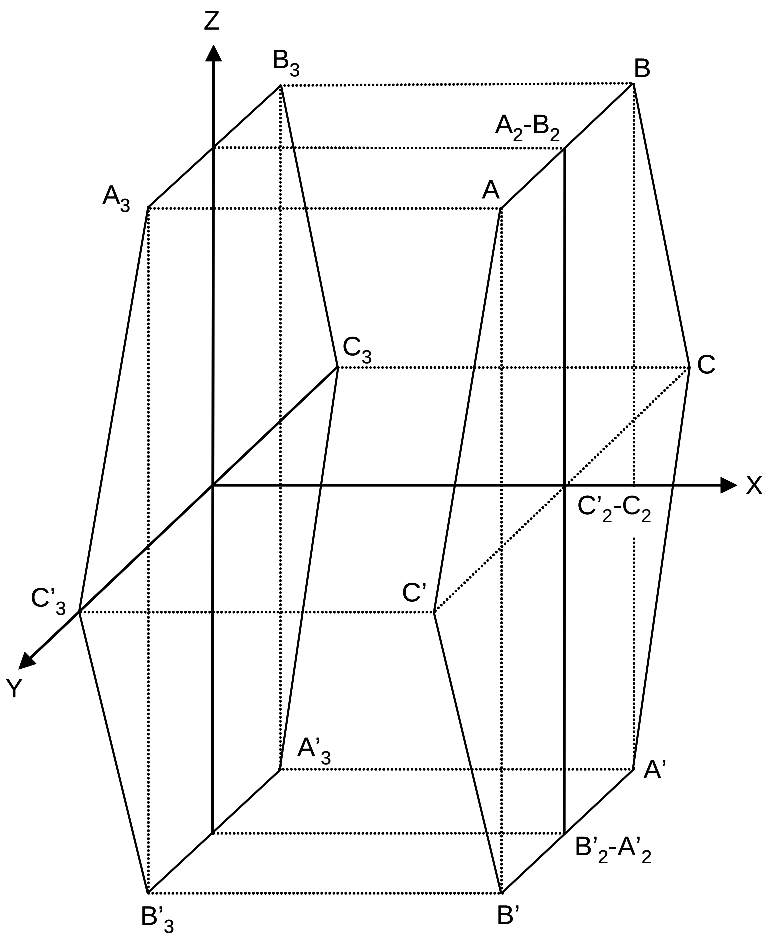
Solución:



Los vértices del octaedro son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, este último sobre el plano *H*. El vértice 5 está apoyado en el plano *V*. Los vértices del cubo son *abcdefgh*, los cuatro primeros en la cara inferior. La sección principal del octaedro pasa por los vértices 1 y 6, y por los puntos medios de las aristas opuestas 2 – 3 y 4 – 5, formando un ángulo de 45º con *V*. Los planos *adeh* y *bcfg* forman un ángulo de 15º con *V*.

L 10- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \dfrac{1}{2}$, el exágono $A(4,2,4)$, $B(4,-2,4)$, $C(4,-4,0)$, $A'(4,-2,-4)$, $B'(4,2,-4)$, $C'(4,4,0)$, así como sus proyecciones sobre los planos *XZ* e *YZ*.

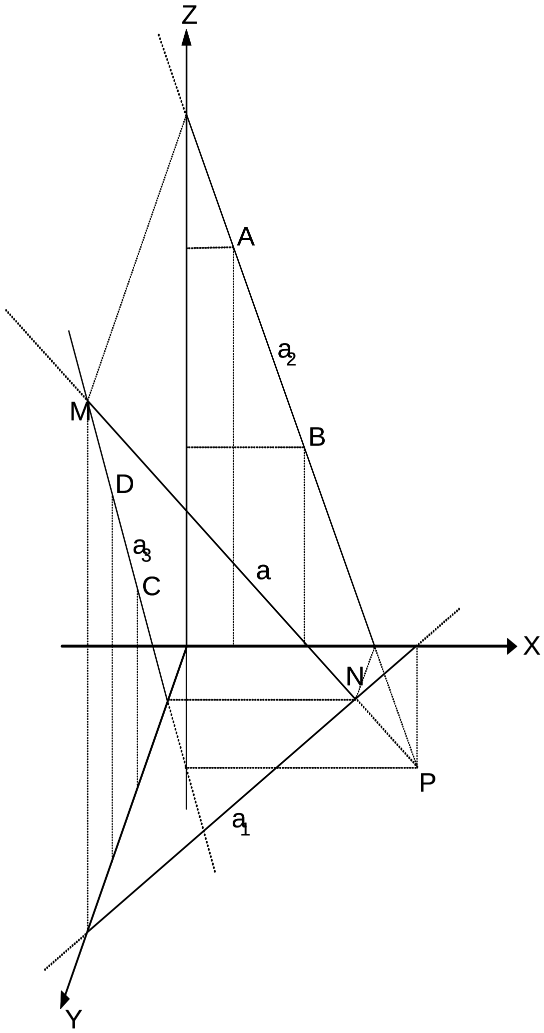
Solución:



La proyección sobre el plano *XZ* es la recta $A_2 - A_2'$. La proyección sobre *YZ* es el exágono $A_3B_3C_3A_3'B_3'C_3'$.

L 11- Una recta AB está definida por sus proyecciones a_2 (XZ) y a_3 (YZ). La proyección a_2 pasa por $A(1, 0, 5)$ y por $B(2.5, 0, 2.5)$. La proyección a_3 pasa por $C(0, 4, 2.5)$ y por $D(0, 6, 6.5)$. Representar en perspectiva caballera de $\theta = 120º$ y $\mu = \frac{1}{2}$, la recta, sus proyecciones y sus trazas con los planos coordenados.

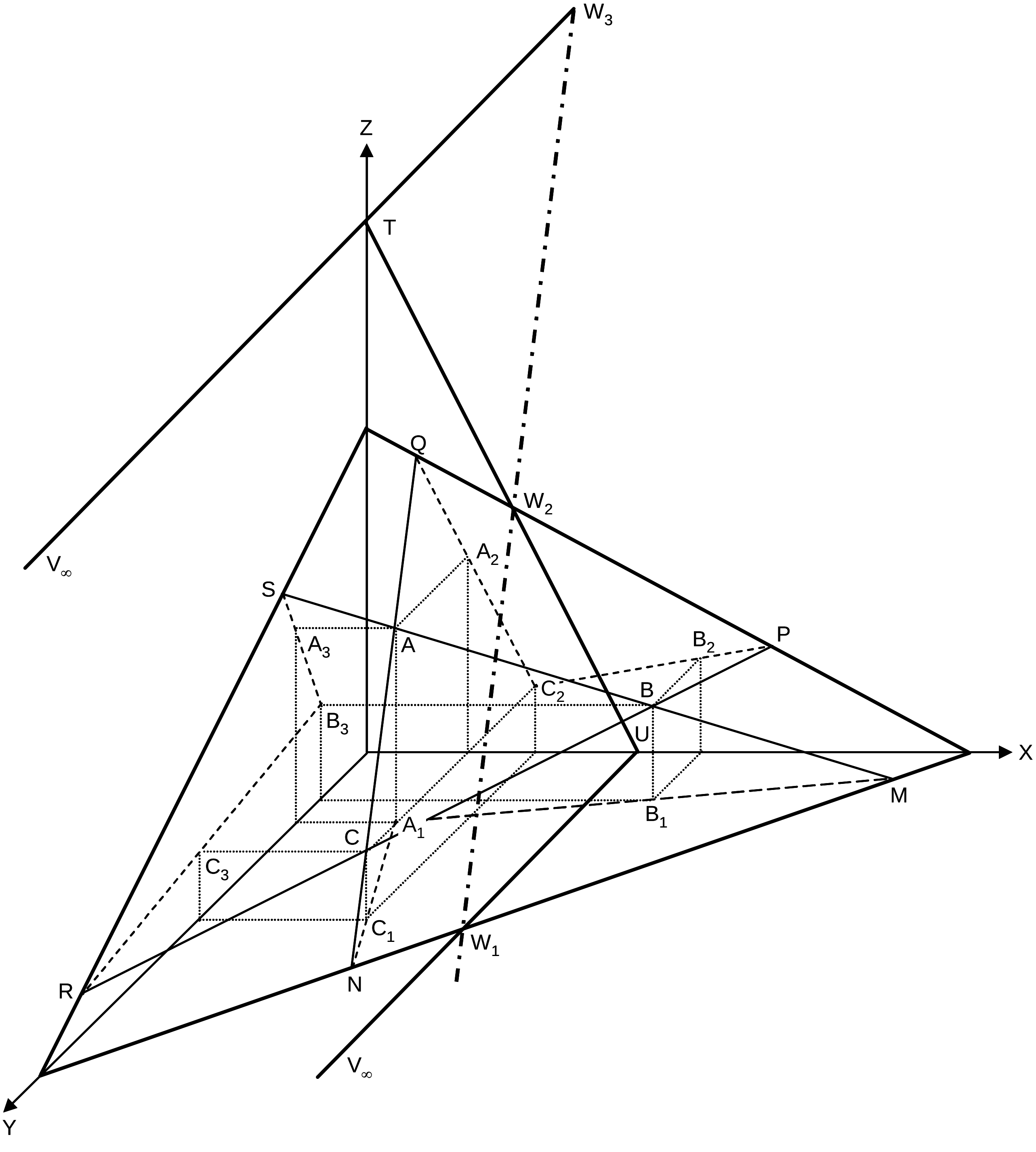
Solución:



Las proyecciones de la recta son a_1 sobre el plano *XY*, a_2 sobre el plano *XZ*, y a_3 sobre el plano *YZ*. Sus trazas son *M* con el plano *YZ*, *N* con el plano *XY* y *P* con el plano *XZ*.

L 12- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \dfrac{1}{2}$, las trazas del plano $A(1.5, 3, 3)$, $B(5, 2, 1.5)$, $C(2.5, 7, 1)$, así como su intersección con el plano $\dfrac{x}{4} + \dfrac{z}{8} = 1$.

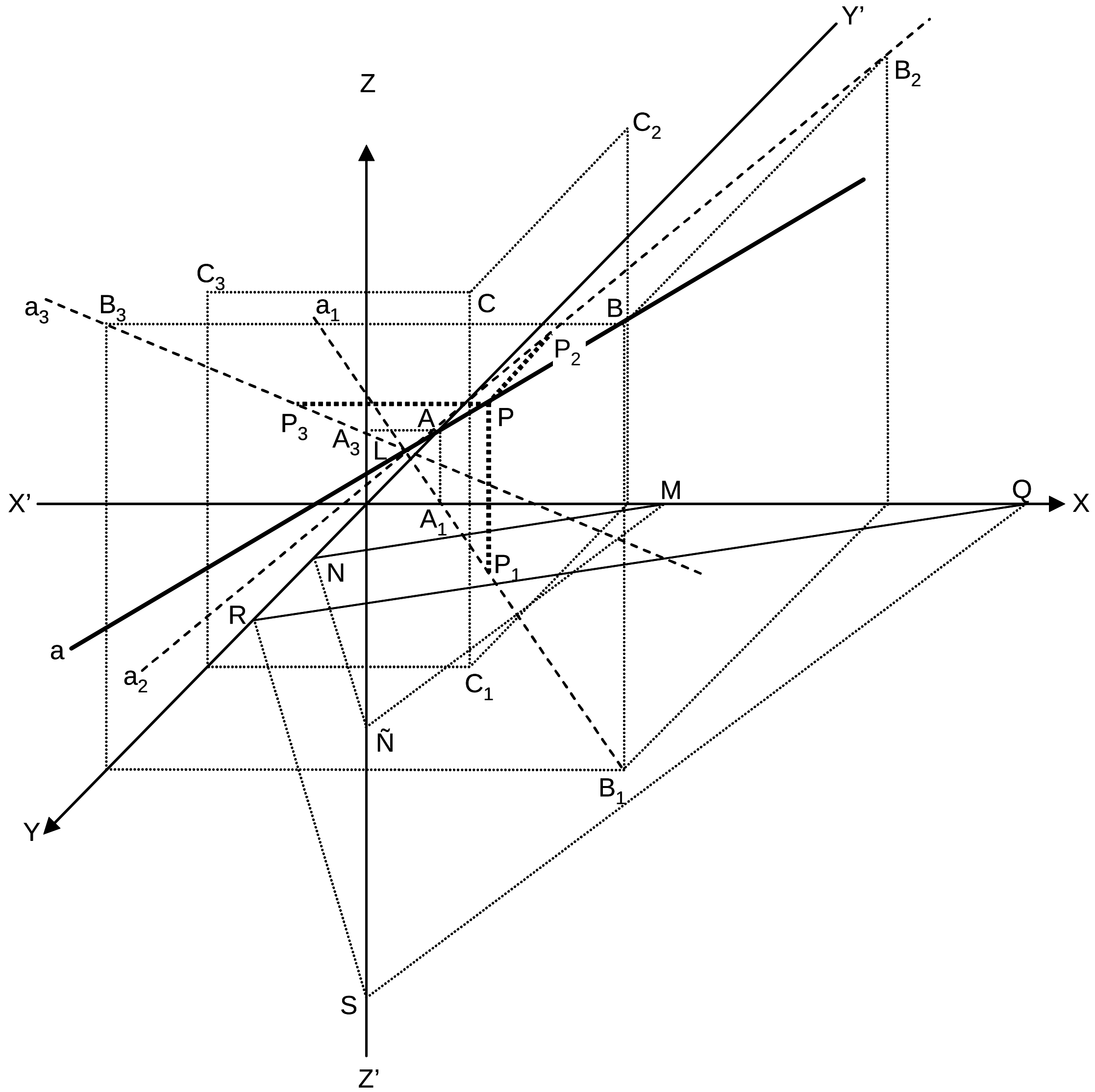
Solución:



Las trazas de la recta *AB* son *M* con el plano *XY*, y *S* con el plano *YZ*. Las de la recta *BC* son *P* con el plano *XZ*, y *R* con el *YZ*. Y las de *AC* son *N* con el plano *XY*, y *Q* con el *XZ*. Por tanto las trazas del plano *ABC* son *MN* con el plano *XY*, *PQ* con el *XZ*, y *RS* con el *YZ*. Las trazas del plano $\dfrac{x}{4} + \dfrac{z}{8} = 1$, son *UT* con *XZ*, UV_∞ con *XY*, y TV_∞ con *YZ*. La intersección de ambos planos es la recta $W_1W_2W_3$.

L 13- Se da el punto $C(3.5, 6, 5)$ y la recta AB: $A(1, 0, 1)$, $B(7, 10, 6)$. Representar en perspectiva caballera de $\theta = \arctan\frac{-1}{2}$, y $\mu = \frac{1}{2}$, la intersección de la recta AB con el plano trazado por C paralelo al $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$.

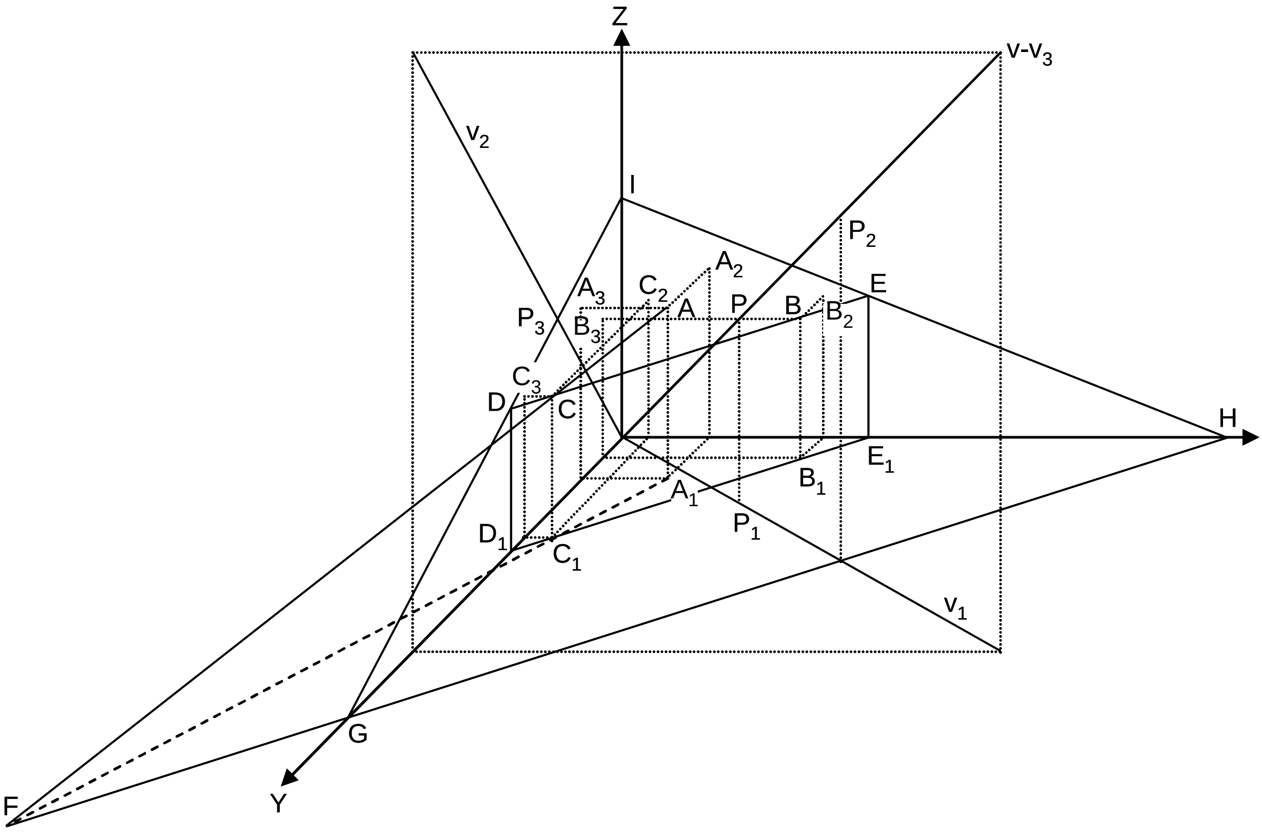
Solución:



El ángulo XOY es $\arctan\frac{-1}{2} = 153°435$. El plano $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$ es el *MNÑ*. Su plano paralelo por C es el *QRS*. La intersección de este plano con la recta *AB* es el punto *P*.

L 14- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \frac{1}{2}$, las trazas del plano ABC, siendo $A(1,5,2,3)$, $B(3,5,1,2,5)$, $C(0,5,5,2,5)$, y su intersección con la recta $x = y = z$.

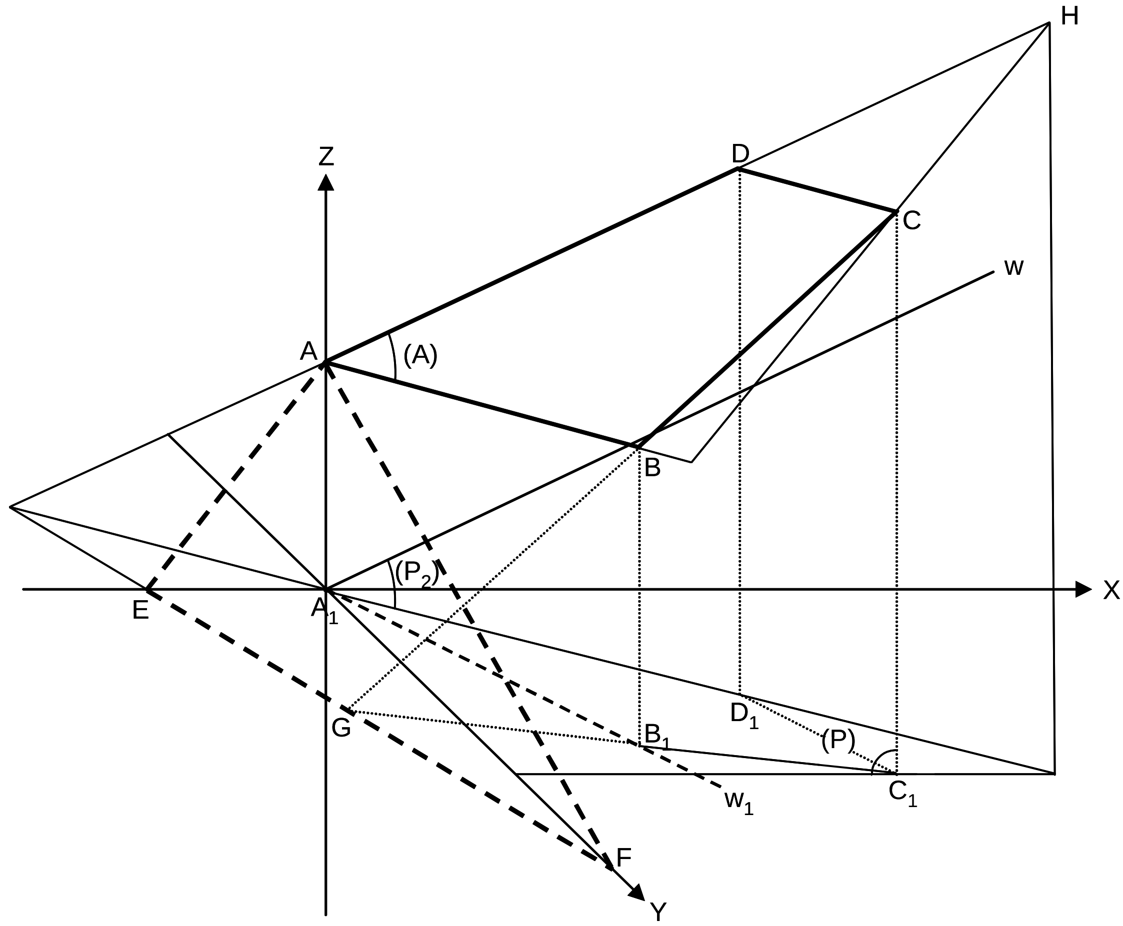
Solución:



La recta dada es la bisectriz del triedro $OXYZ$, siendo sus proyecciones v_1, v_2 y v_3. Las trazas del plano ABC forman el triángulo GHI. La intersección es el punto P.

L 15- Se considera el cuadrilátero *ABCD*, siendo $A(0,0,3)$, $B(2,6,4)$, $C(5,7,z)$, $D(4,4,7)$. Representar en perspectiva caballera de $\theta = 45º$ y $\mu = \frac{1}{2}$, la posición del punto *C*, las trazas del plano del cuadrilátero, y la intersección de este plano con la recta $x = y = z$.

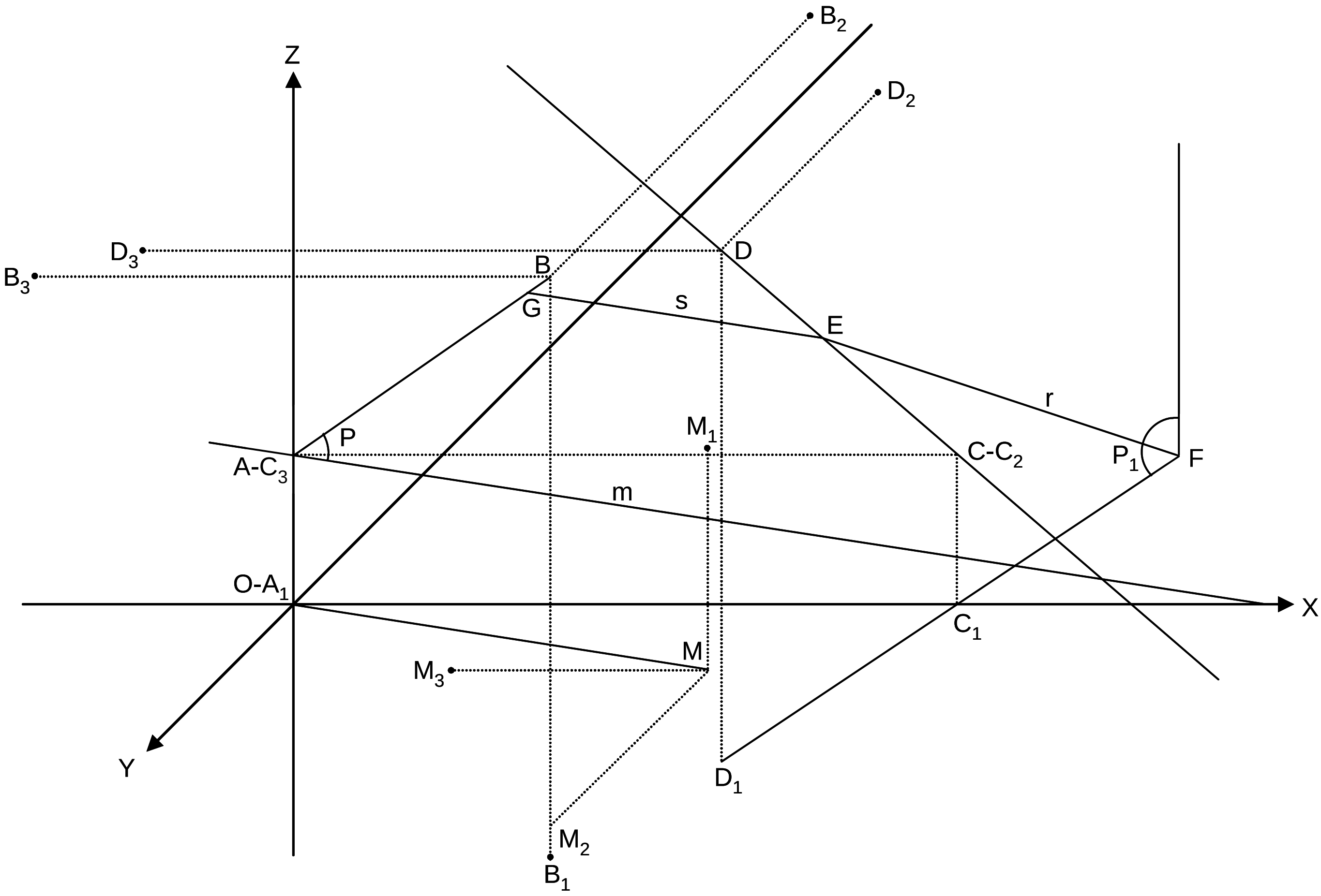
Solución:



El ángulo *XOY* mide 45º. El plano (*A*) definido por los puntos *A*, *B* y *D*, corta en *C* a la vertical trazada por C_1. Las trazas del plano *ABCD* forman el triángulo *AEF* (línea de trazos). El plano auxiliar (*P*) pasa por C_1 y por la recta paralela a *OZ*. El plano auxiliar (P_2) pasa por la bisectriz *w* y por su proyección w_1. La recta *GH* es la intersección de (*A*) y (*P*), que da *C* sobre la vertical en C_1. Las rectas *AD* y *w* son paralelas, luego la intersección de (*A*) y (P_2) es un punto impropio.

L 16- Dadas las rectas *AB* y *CD*, siendo $A(0,0,2)$, $B(7,10,8)$, $C(9,0,2)$, $D(8,6,7)$, representar en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$, una recta que se apoye en las dos dadas y sea paralela a *OM*, siendo $M(3.5,-6,-3)$.

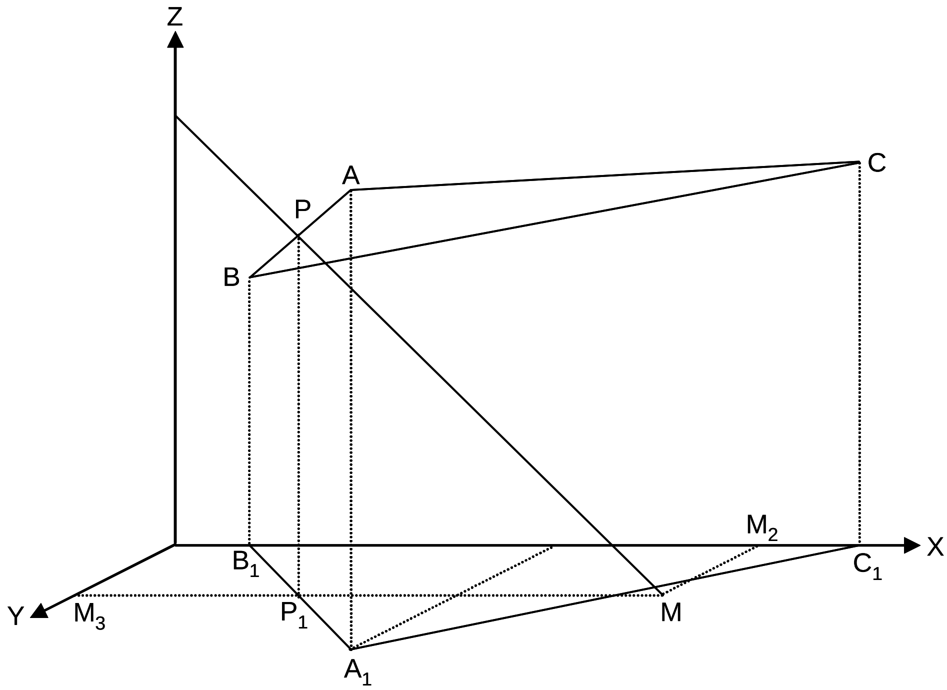
Solución:



1. El plano auxiliar *P* pasa por *AB* y por la paralela a *OM* trazada por *A*. El plano auxiliar P_1 es vertical y pasa por *CD*. La intersección de ambos planos es *EF*. La recta pedida es *EG*.

L 17- Representar en perspectiva caballera de $\theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $\mu = \frac{2}{3}$, una recta paralela al plano *XZ*, que pase por $M(8, 2.5, 0)$, que forme con el plano *XY* un ángulo de 45º, y que corte al plano *YZ* por debajo del *XY*, así como la intersección de esa recta con el plano *ABC*, siendo $A(5, 4.5, 6)$, $B(1, 0, 3.5)$ y $C(9, 0, 5)$.

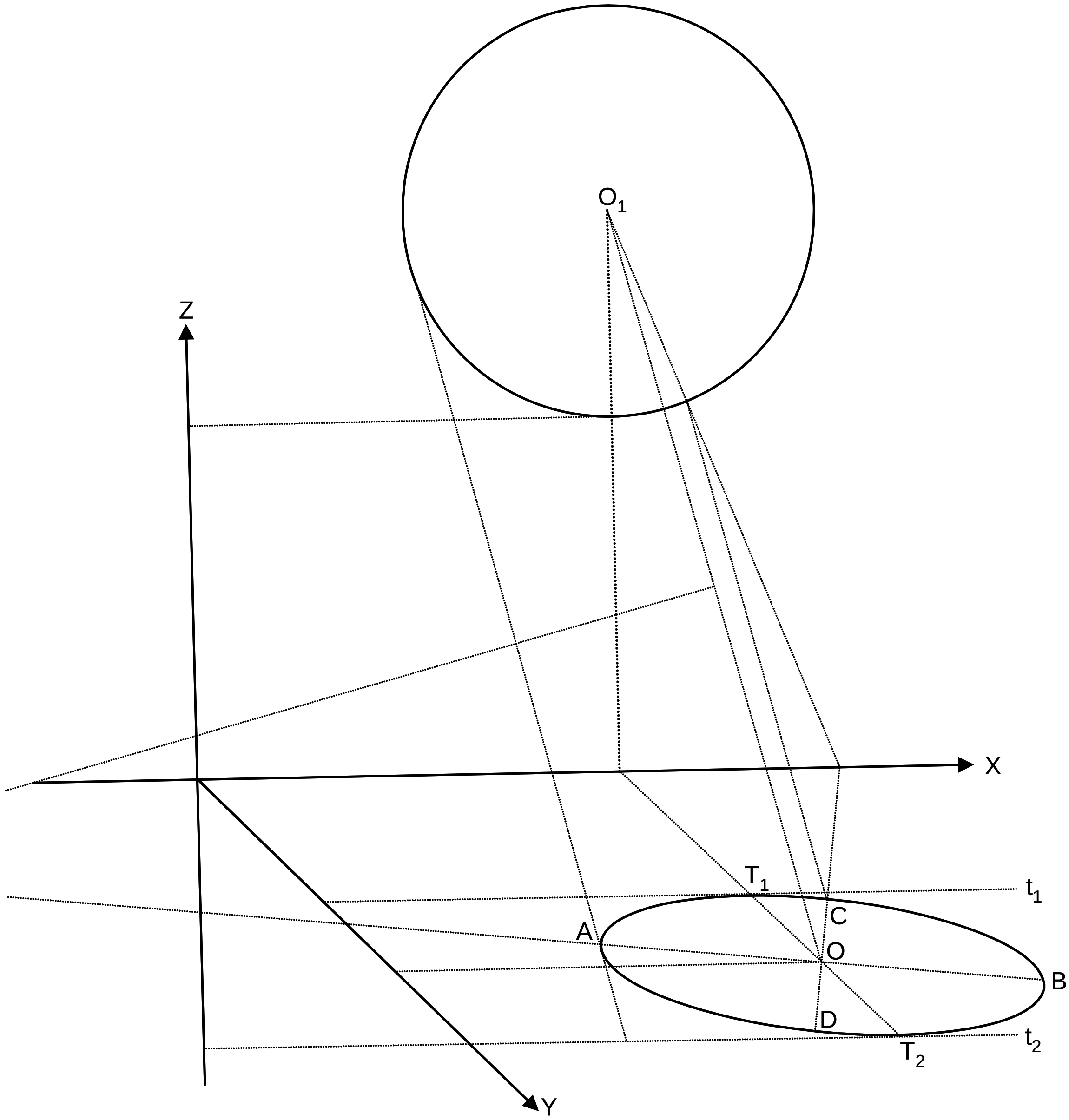
Solución:



El ángulo *XOY* es $\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = 153º435$, y el coeficiente $\mu = \frac{2}{3}$. *MP* es la recta paralela, y *P* es el punto de intersección con *ABC*.

L 18- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 45^\circ$ y $\mu = \frac{1}{2}$, una circunferencia situada en el plano *XY*, de centro $(6, 8, 0)$ y radio $3\,\text{cm}$, sus ejes y las tangentes paralelas al eje *OX*.

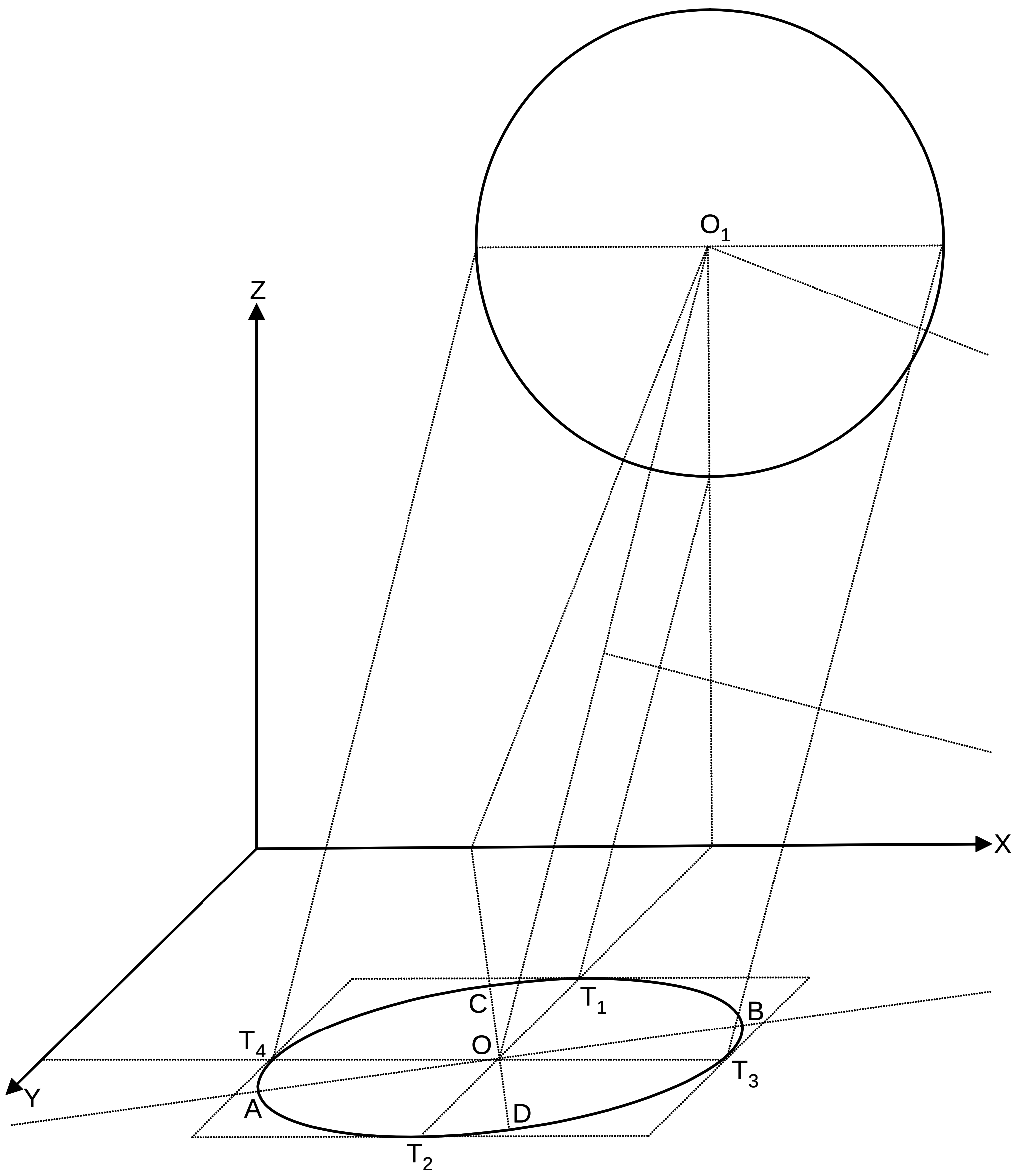
Solución:



El ángulo $XOY = 45^\circ$. O_1 es el centro rebatido. T_1 y T_2 son los puntos de tangencia, y t_1 y t_2 las tangentes. Los ejes de la elipse son *AB* y *CD*.

L 19- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \dfrac{1}{2}$, una circunferencia situada en el plano *XY*, de centro $(6, 8, 0)$ y radio $3\,\text{cm}$, sus ejes y las tangentes paralelas a los ejes *OX* y *OY*.

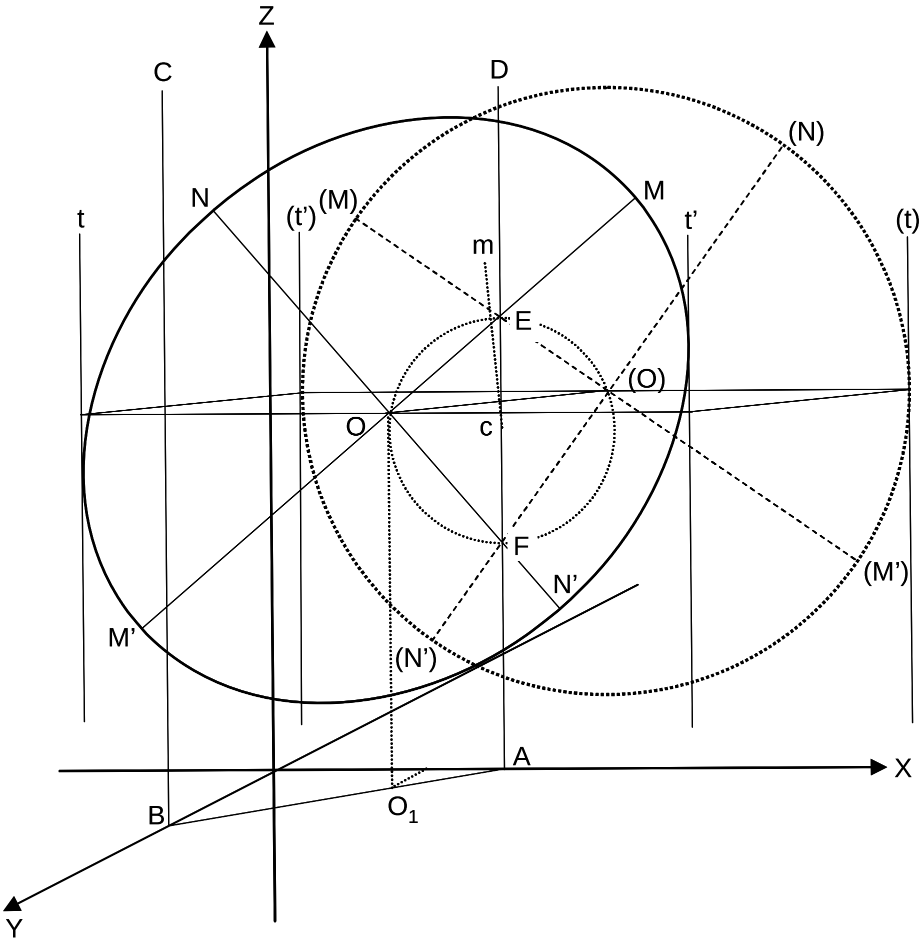
Solución:



Se han marcado los puntos de tangencia T_1, T_2, T_3 y T_4, y se han trazado las correspondientes tangentes. Los ejes de la elipse son *AB* y *CD*.

L 20- Representar en perspectiva caballera de $\theta = \arctan\left(\frac{-1}{2}\right)$ y $\mu = \frac{1}{2}$, una circunferencia situada en un plano que pasando por la recta $z = 0$, $x + y - 3 = 0$, es paralelo al eje Z. El centro de la circunferencia tiene de cota $z = 5\,\text{cm}$, y se proyecta sobre un punto de la traza del plano con el plano XY, y cuya abscisa es $x = 2\,\text{cm}$. El radio mide $4\,\text{cm}$. Representar los ejes de la elipse perspectiva y las tangentes más a la derecha y más a la izquierda.

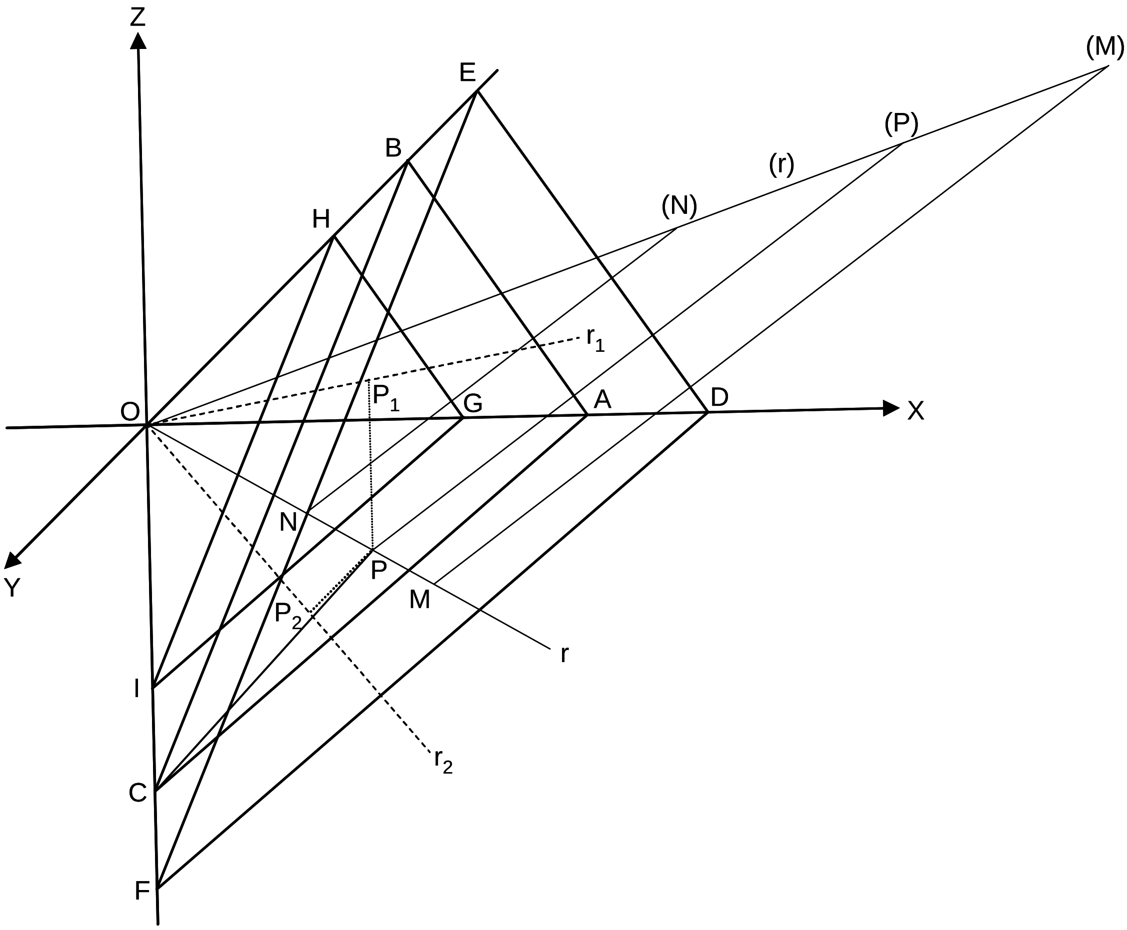
Solución:



El ángulo $XOY = 153°435$. Los ejes de la elipse son MM' y NN'. Las tangentes más a la izquierda y más a la derecha, son t y t', respectivamente.

L 21- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \dfrac{1}{2}$, las trazas de los planos paralelos al $\dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{10} - \dfrac{z}{5} = 1$, y que disten de él 3 cm.

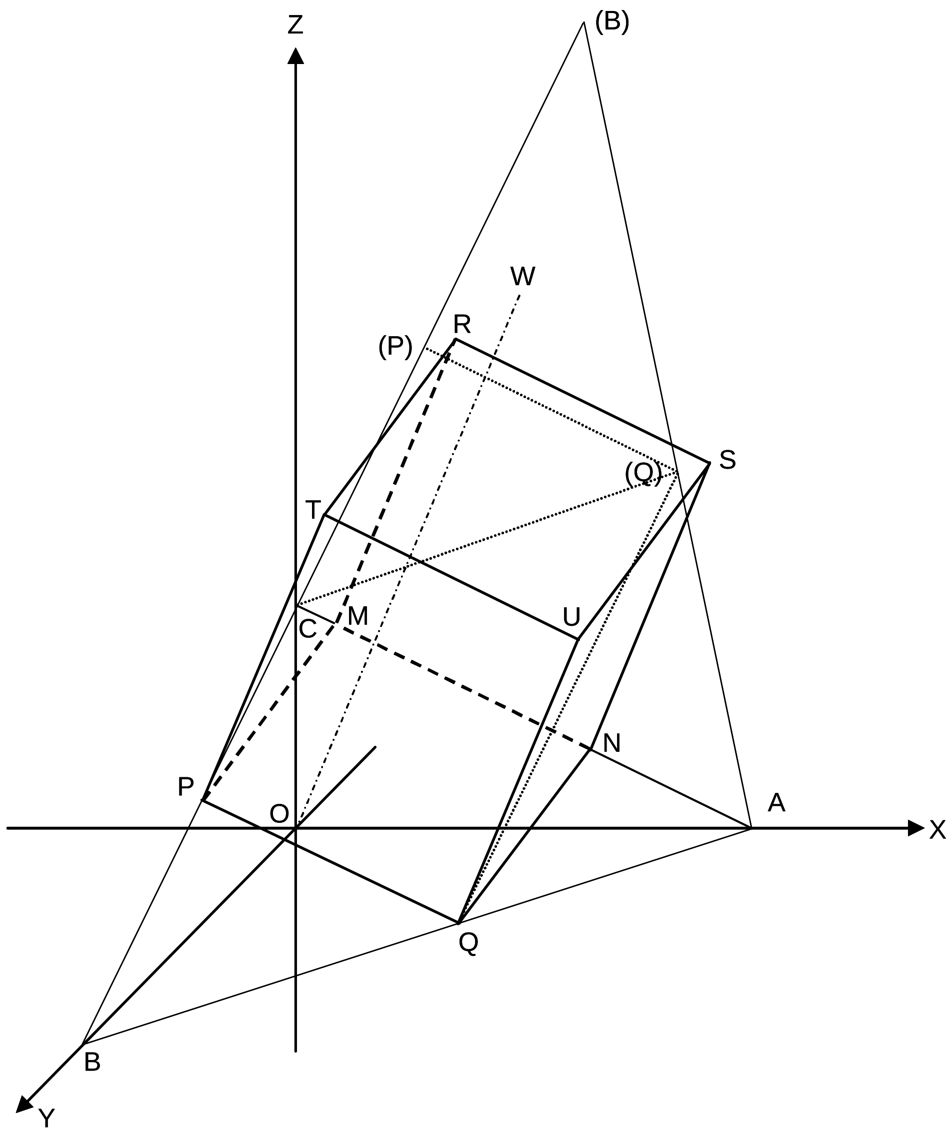
Solución:



ABC es el triángulo de trazas del plano dado. El punto de corte con *r*, perpendicular a dicho plano por *O*, es el punto *P*. El abatimiento de *P* es (*P*), siendo (*M*) y (*N*) los puntos a distancia de 3 cm a derecha e izquierda de (*P*). Deshaciendo los abatimientos, se obtienen *M* y *N*. Los planos pedidos son *DEF* y *GHI*.

L 22- Se da el plano $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1$, En el triángulo de trazas se inscribe un cuadrado con un lado situado en el plano *XZ*. Es la base de un prisma de altura 5 cm, situado por encima del plano. Representar el prisma en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

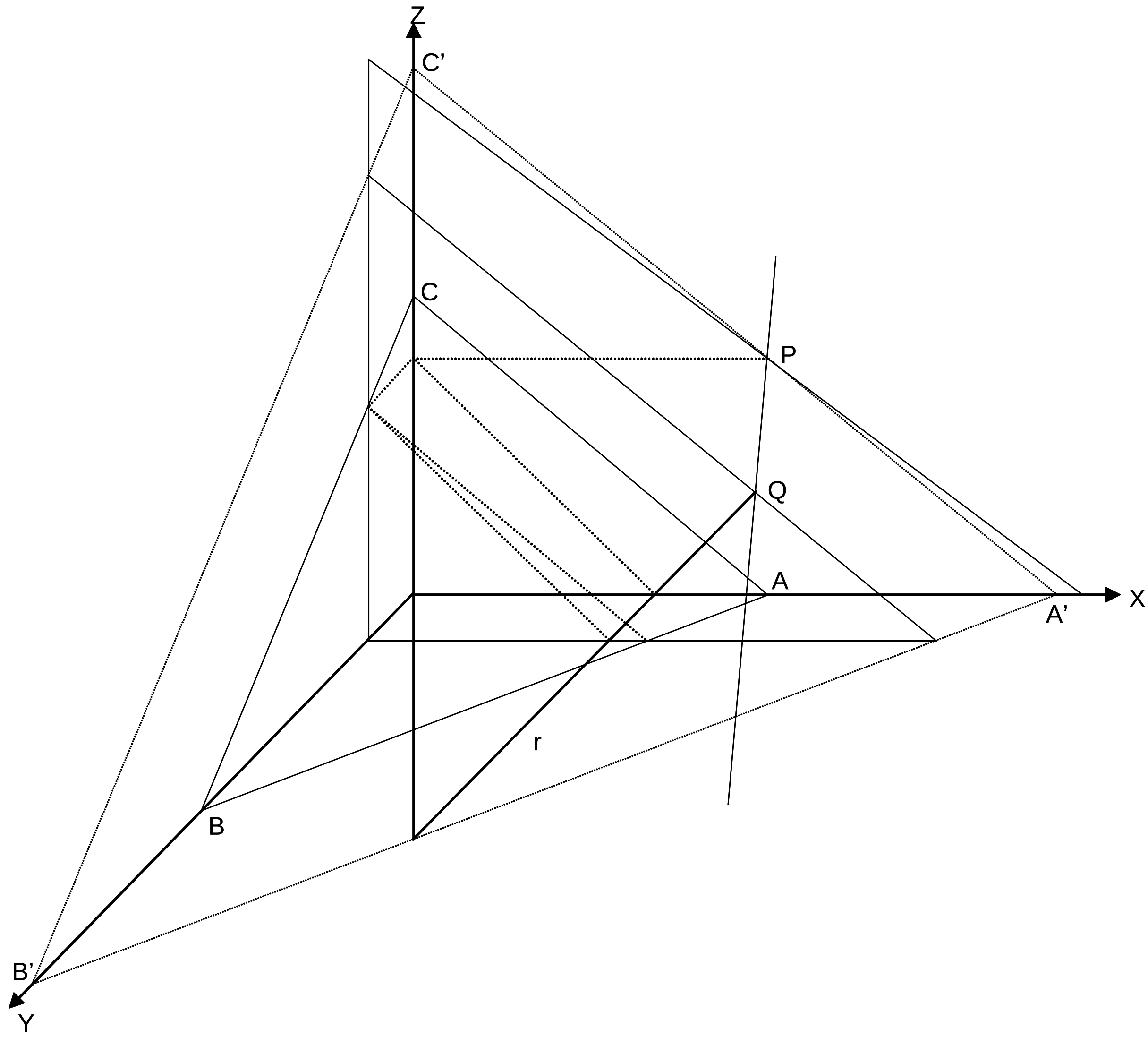
Solución:



El triángulo de trazas es el *ABC*. El cuadrado inscrito en él es el *MNPQ*. La base superior del prisma es *RSTU*.

L 23- Se da el plano $\frac{x}{6} + \frac{y}{10} + \frac{z}{5} = 1$, el punto $P(6, 0, 4)$ y la recta $y = 2$, $\frac{x}{4} - \frac{z}{4} = 1$. Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \frac{1}{2}$, la recta que pasa por P, paralela al plano y que se apoya en la recta dada.

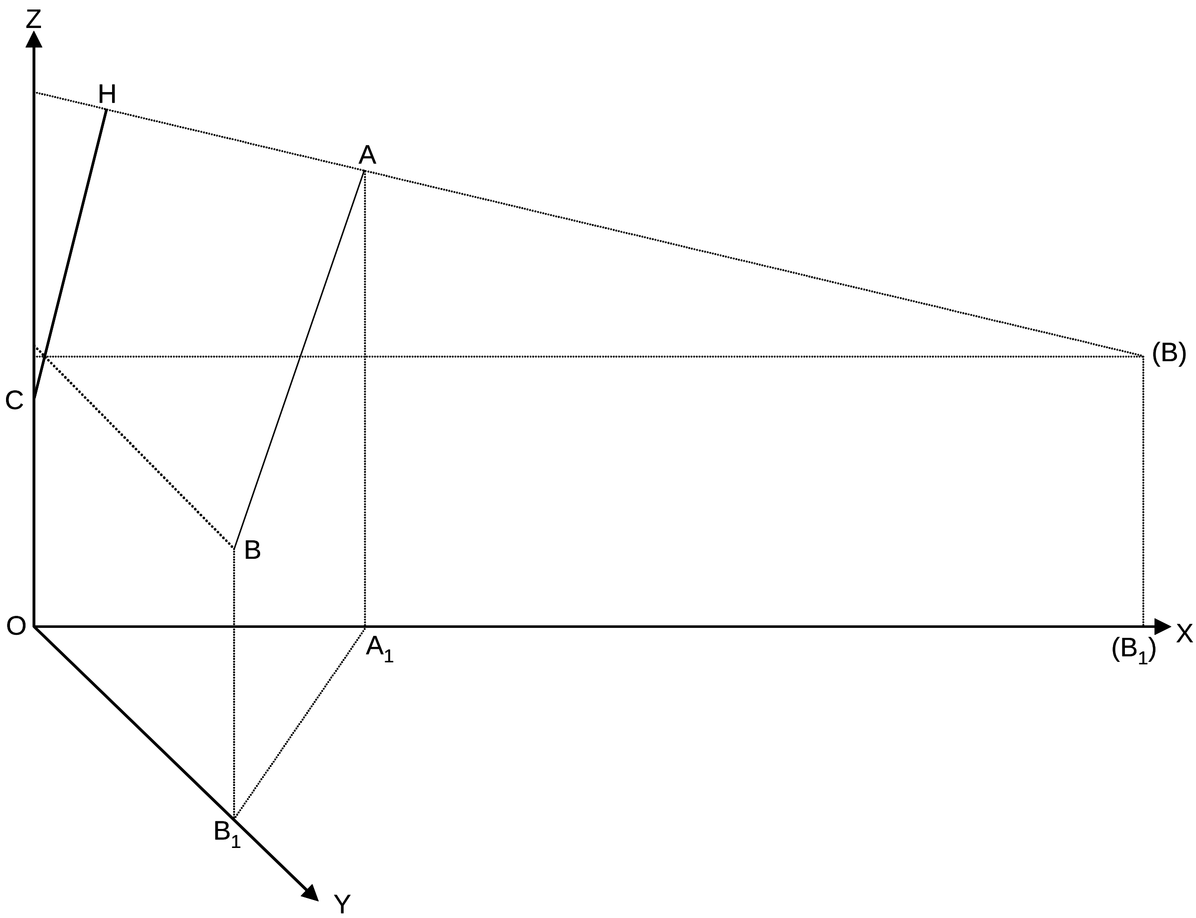
Solución:



El triángulo de trazas del plano dado es el ABC. El plano paralelo por P, es el $A'B'C'$, cuya intersección con la recta dada r es el punto Q. La recta pedida es PQ.

L 24- Determinar en perspectiva caballera de $\theta = 45^{\circ}$ y $\mu = \dfrac{1}{2}$, la distancia del punto $C(0,0,4)$ a la recta AB, siendo $A(6,0,8)$ y $B(0,10,5)$.

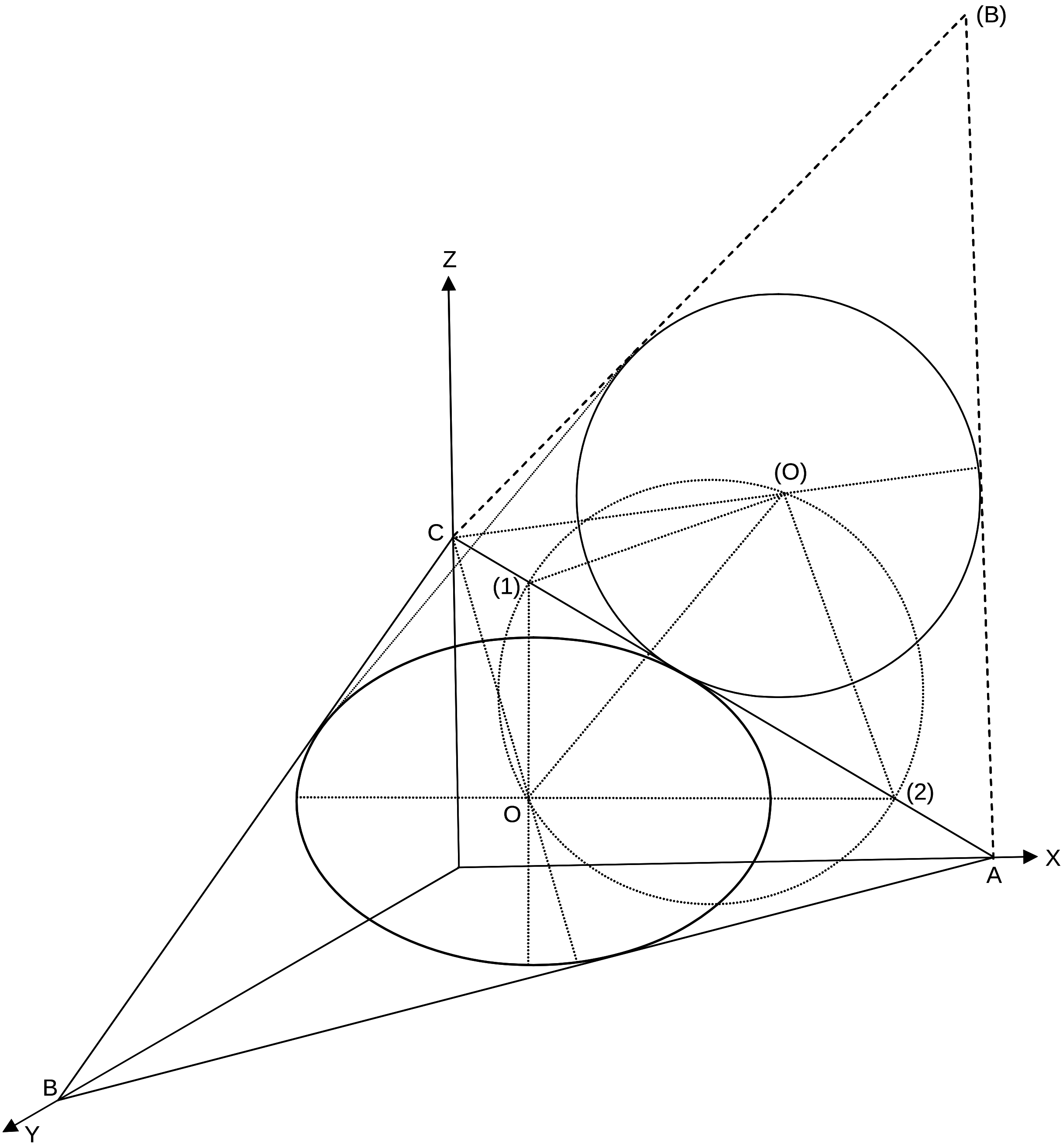
Solución:



El ángulo $XOY = 45^{\circ}$. La distancia pedida es CH.

L 25- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 150^{\circ}$ y $\mu = \dfrac{2}{3}$, la circunferencia inscrita en el triángulo de trazas del plano $\dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{z}{5} = 1$.

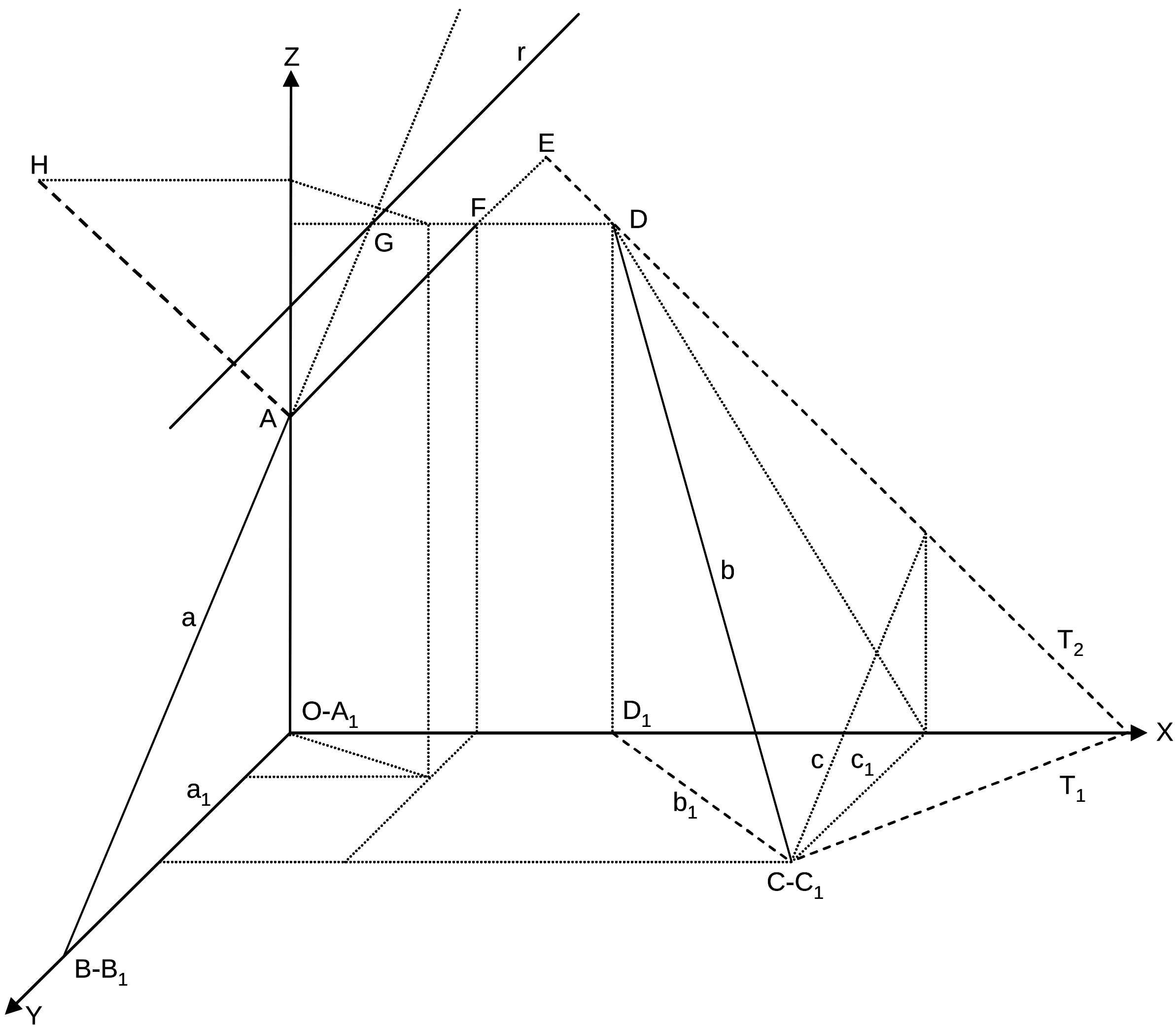
Solución:



El ángulo $XOY = 150^{\circ}$ y $\mu = \dfrac{2}{3}$. El triángulo de trazas ABC, se abate en el plano XZ en $A(B)C$. El círculo auxiliar corta a la charnela AC en (1) y (2).

L 26- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \dfrac{1}{2}$, la perpendicular común a las rectas AB y CD, siendo $A(0,0,5)$, $B(0,10,0)$, $C(10,6,0)$ y $D(5,0,8)$.

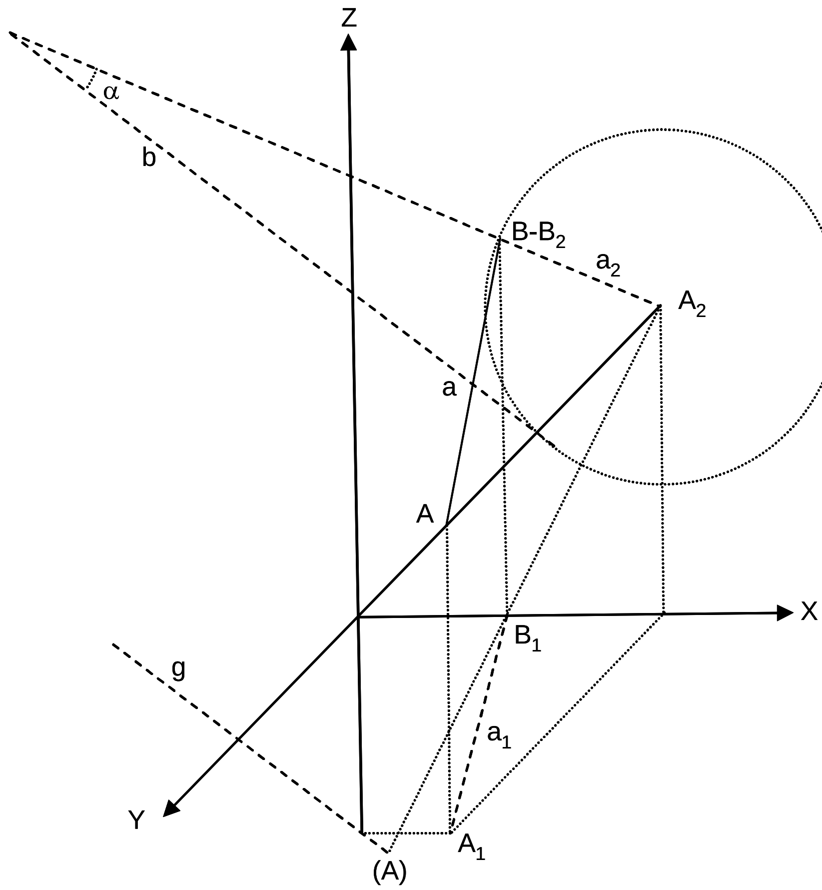
Solución:



CC_1 es la recta paralela a AB por C. El plano P pasa por CD y CC_1, siendo sus trazas T_1 y T_2. La perpendicular por A a P, es AF, cuya intersección con P es F. La mínima distancia es AF, y su verdadera magnitud es AH. La recta pedida es r, paralela a AF.

L 27- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135°$ y $\mu = \frac{1}{2}$, las trazas de los planos que pasan por la recta *AB*, siendo $A(4,8,4)$ y $B(2,0,5)$, y que forman con *XZ* un ángulo α, tal que $\tan\alpha = \frac{1}{4}$.

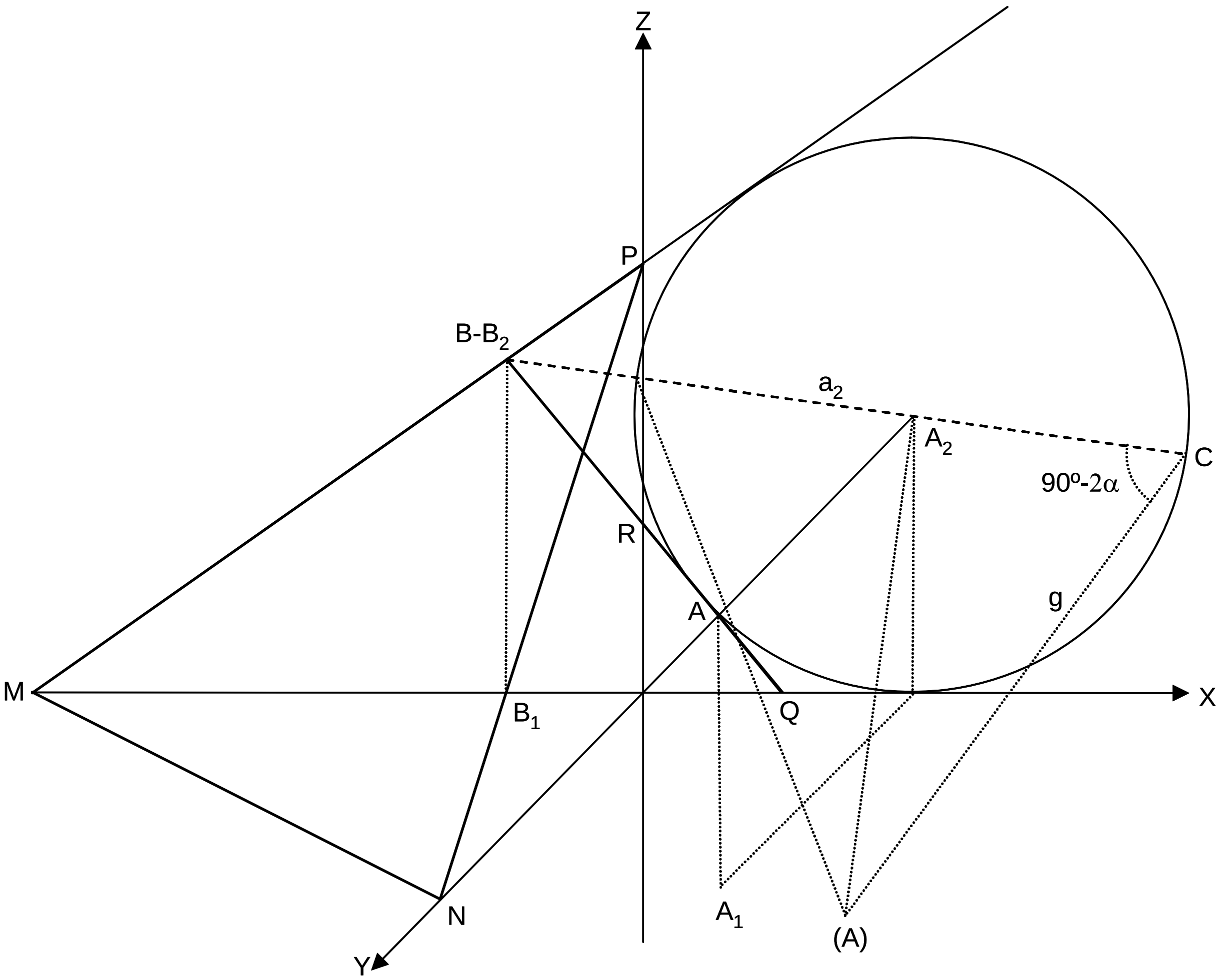
Solución:

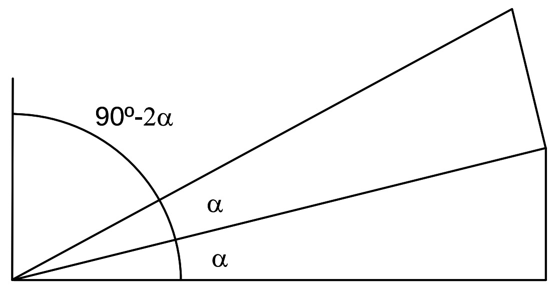


(A) es el abatimiento de A sobre *XZ*, charnela a_2. Las trazas del plano pedido deberían pasar por las de la recta *AB*, que son A_2 y B_2, y ser tangentes a la circunferencia, lo que es imposible. El problema no tiene solución.

L 28- Dados los puntos $A(4,8,4)$y $B(-2,0,5)$, representar en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$, las trazas de los planos que pasan por *AB* y forman con *XZ* un ángulo $90º - 2\alpha$, siendo $\tan\alpha = \frac{1}{4}$.

Solución:

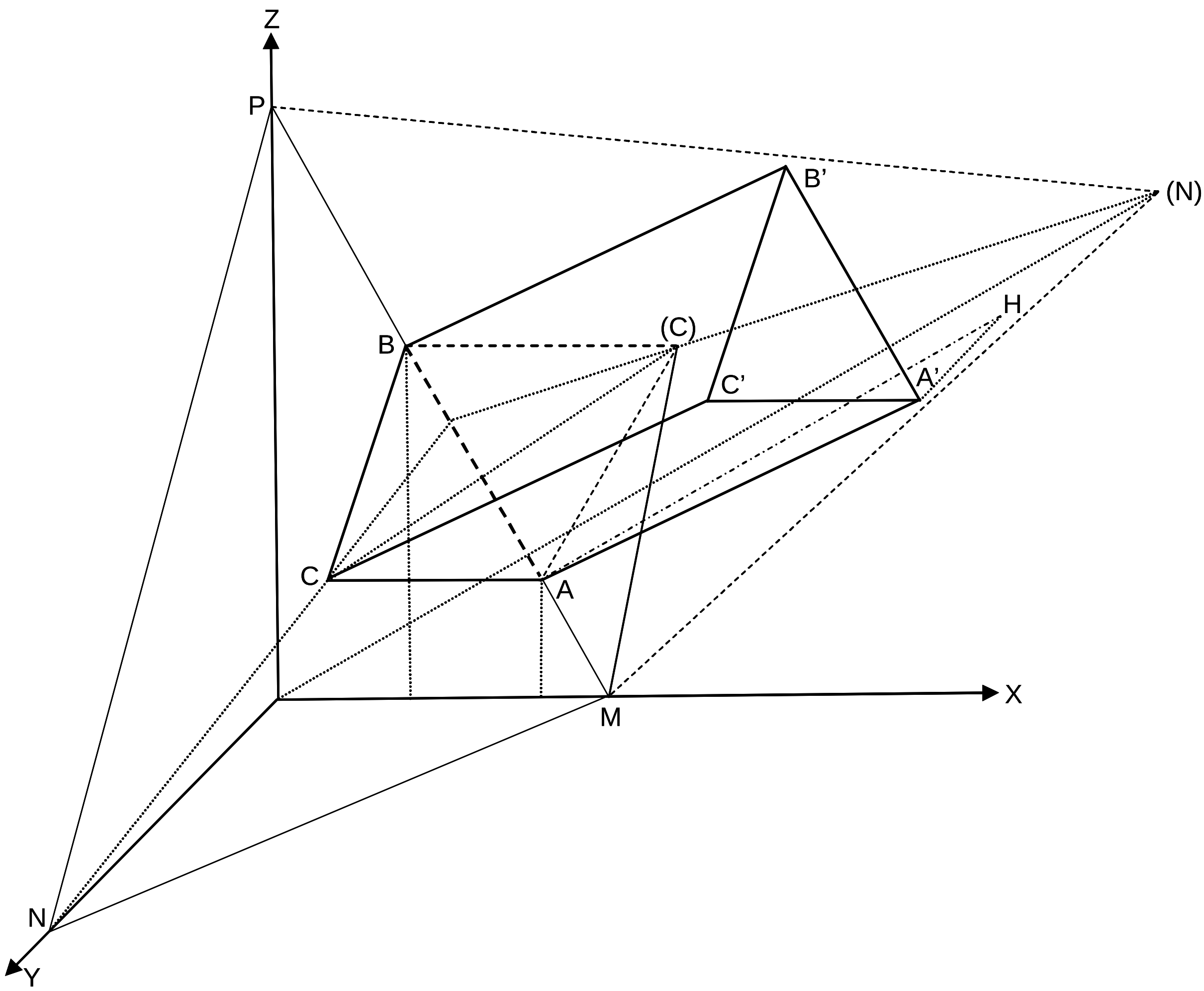




(A) es el abatimiento de *A* sobre *XZ*, siendo a_2 la charnela. En el diagrama inferior se obtiene el ángulo $90º - 2\alpha$. Las trazas del plano pedido deben pasar por A_2 y B_2, y ser tangentes a la circunferencia. Hay dos soluciones, los planos *MNP* y *QAR*.

L 29- Se da el plano $\frac{x}{5} + \frac{y}{10} + \frac{z}{9} = 1$, Se consideran los puntos A y B de su traza con XZ y tales que sus respectivas abscisas son 4 cm y 2 cm. AB es un lado de un triángulo equilátero situado en el plano dado e interior al triángulo de trazas del plano. Este triángulo es la base de un prisma recto de altura 8 cm y situado por encima del plano. Representar el prisma en perspectiva caballera de $\theta = 135^{o}$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

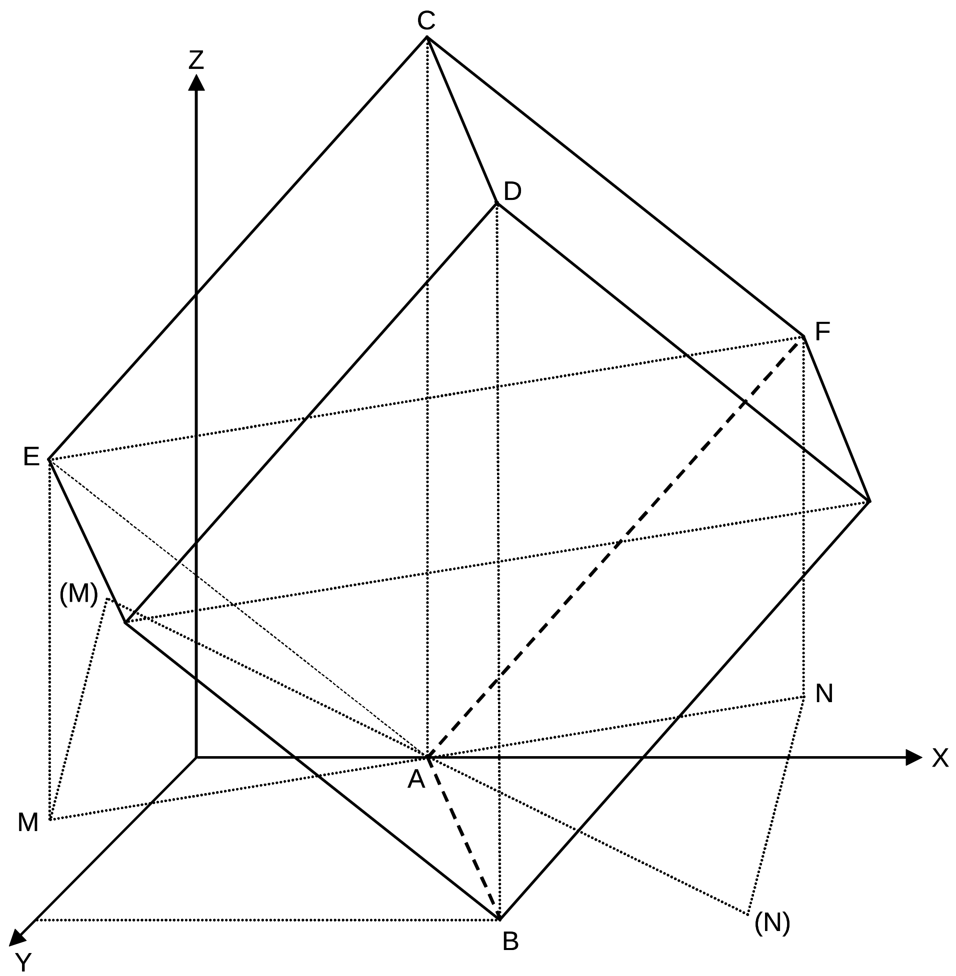
Solución:



(C) es el abatimiento de C, charnela AB, siendo equilátero el triángulo $AB(C)$. El triángulo $A'B'C'$ es igual al ABC, estando su plano situado a una distancia 8 cm del plano de aquel.

L 30- La recta *AB*, siendo $A(3,0,0)$ y $B(6,6,0)$, es una arista de un cubo, tal que el plano determinado por *AB* y la arista opuesta es perpendicular al plano *XY*. Representar el cubo, en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

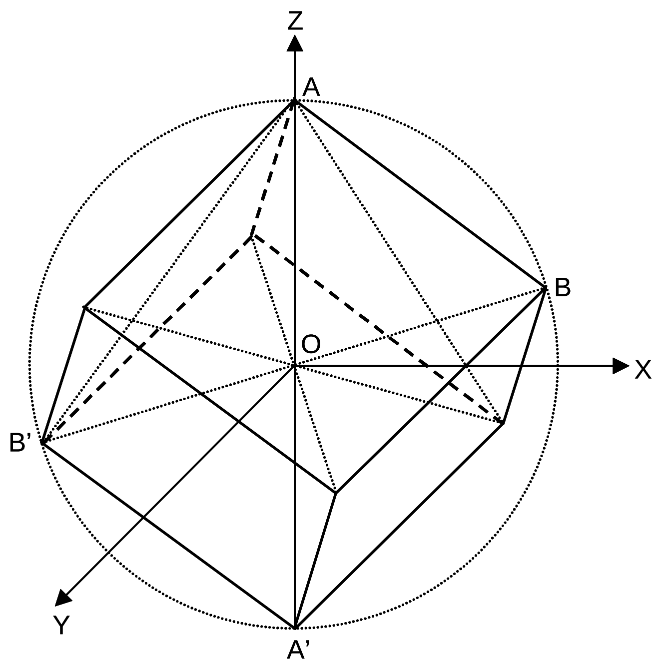
Solución:



La diagonal *AC* de la cara *AECF*, está en verdadera magnitud. (*M*)(*N*) es la perpendicular a *AB* abatida. *EF* es la paralela a *MN* por el punto medio de *AC*.

L 31- El origen de coordenadas es el centro de un cubo. Una de sus diagonales es el eje OZ. Una de las aristas que parten del vértice más alto, está situada en la parte positiva del plano XZ. La arista del cubo mide 4 cm. Representar el cubo en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

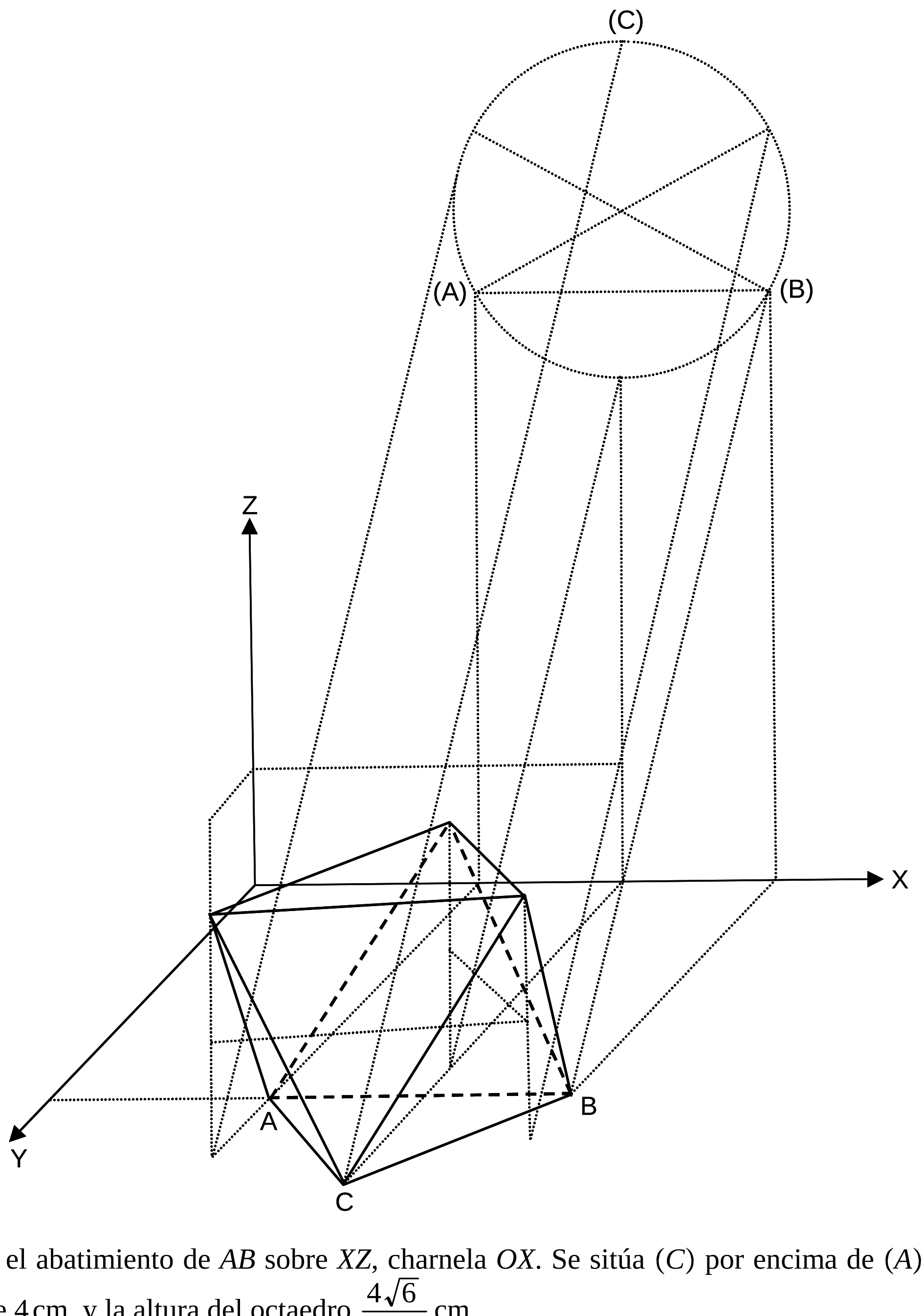
Solución:



AB está en verdadera magnitud, como la diagonal AA' que mide $4\sqrt{3}$ cm.

L 32- El segmento *AB*, siendo $A(3,8,0)$ y $B(7,8,0)$, es una arista de un octaedro. Una de las caras que tiene a *AB* como arista, está en el plano *XY*, y el tercer vértice de esta cara dista de *OX* más que *A* y *B*. Representar el octaedro, en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

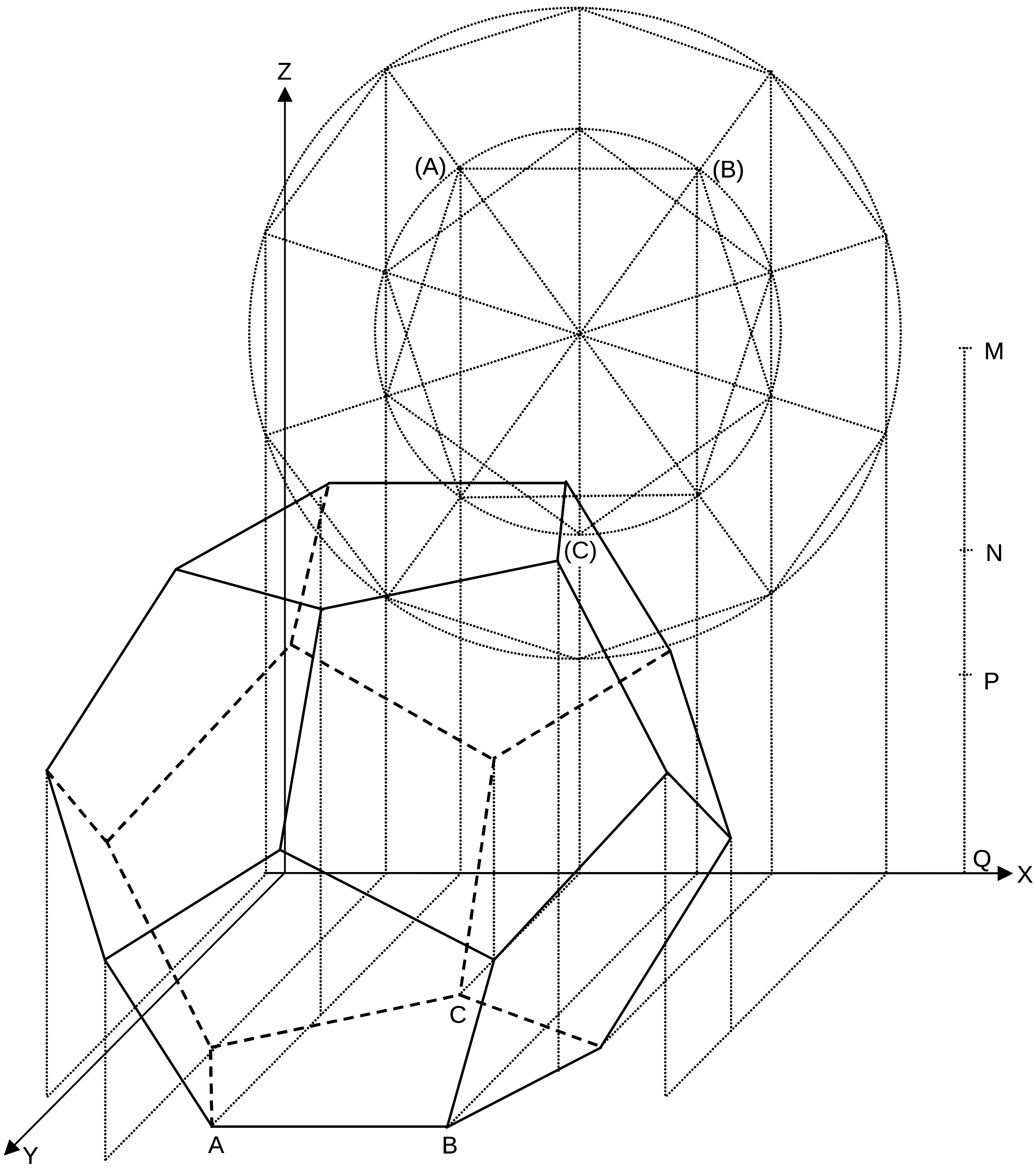
Solución:



$(A)(B)$ es el abatimiento de *AB* sobre *XZ*, charnela *OX*. Se sitúa (C) por encima de (A) y (B). La arista mide 4 cm, y la altura del octaedro $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm.

L 33- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \frac{1}{2}$, un dodecaedro que tiene una cara apoyada en el plano *XY*, un lado de esa cara es paralela al eje *OX* y está situada a 6 cm de distancia de él. Uno de los vértices de esa arista tiene de abscisa 1, 5 cm. El vértice opuesto a la citada arista, situado en el plano *XY*, está más cerca del eje *OX*. La arista mide 2 cm.

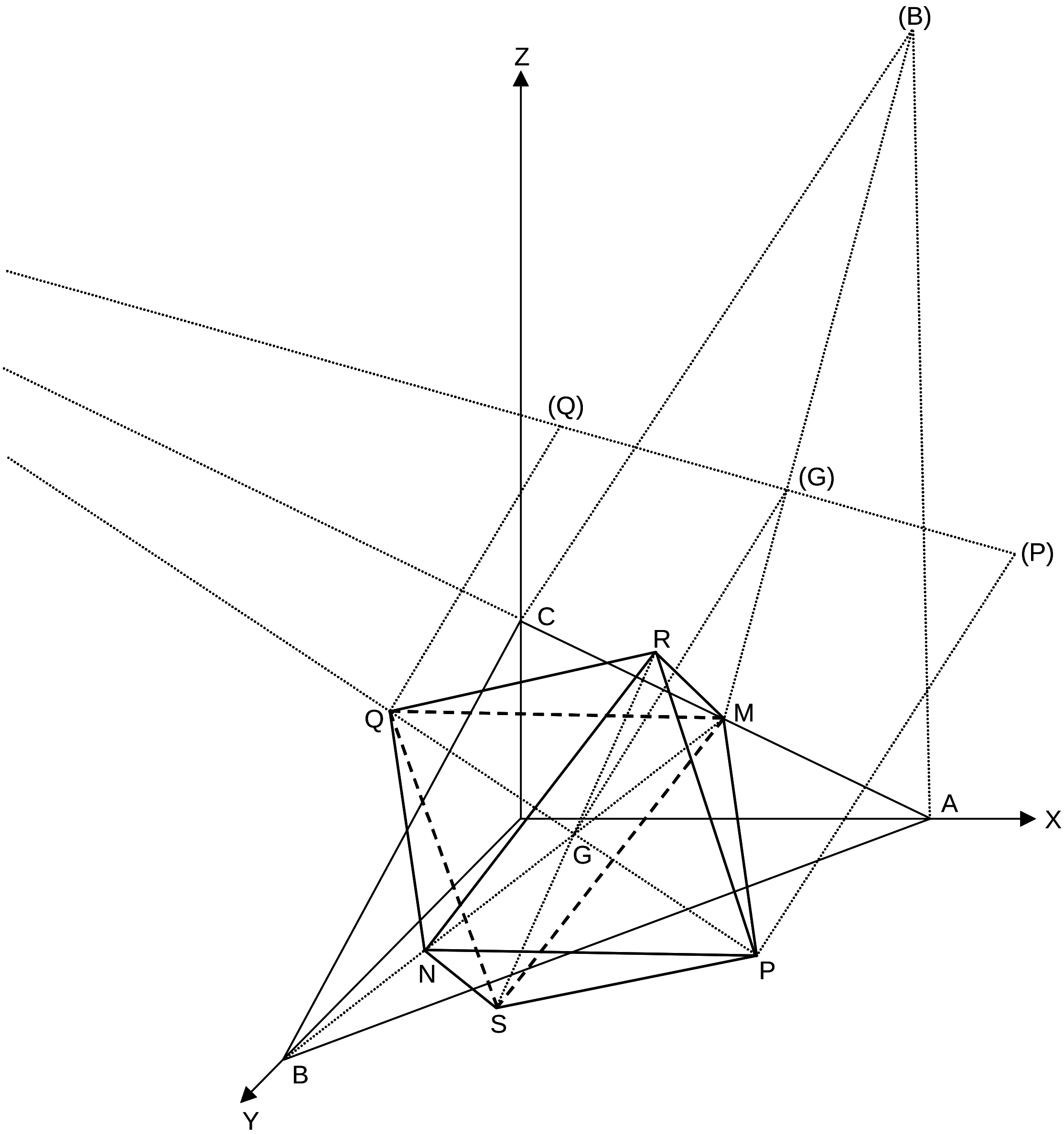
Solución:



Abatiendo *XY* sobre *XZ*, se dibujan las proyecciones de los pentágonos de las caras superior e inferior, y el decágono sobre el que están las proyecciones de los vértices intermedios. Las cotas de sus planos se determinan en el croquis de la derecha.

L 34- Se considera el plano $\frac{x}{6} + \frac{y}{10} + \frac{z}{3} = 1$. El baricentro de su triángulo de trazas, es el centro de un octaedro regular. Un vértice del octaedro es el punto medio del lado del triángulo de trazas situado en el plano *XZ*. Una diagonal del octaedro es perpendicular al citado plano. Representar el octaedro en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

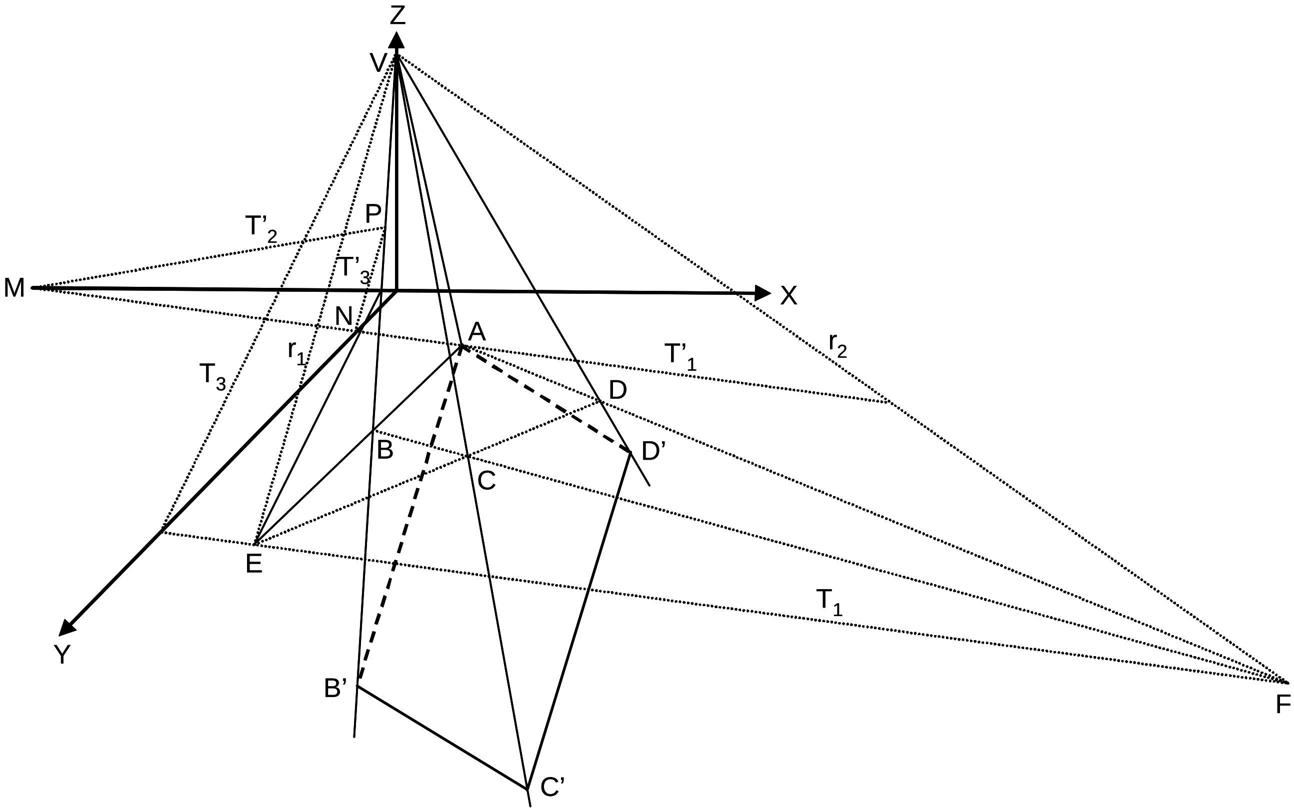
Solución:



ABC es el triángulo de trazas, cuyo baricentro es *G*.

L 35- Las aristas de una pirámide cuadrangular de vértice $V(0,0,6)$ pasan cada una de ellas, por los puntos $A(3,4,0)$, $B(3,10,0)$, $C(6,12,0)$ y $D(8,8,0)$. Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$, la intersección de la pirámide con un plano que pase por A y produzca como sección un paralelogramo $AB'C'D'$.

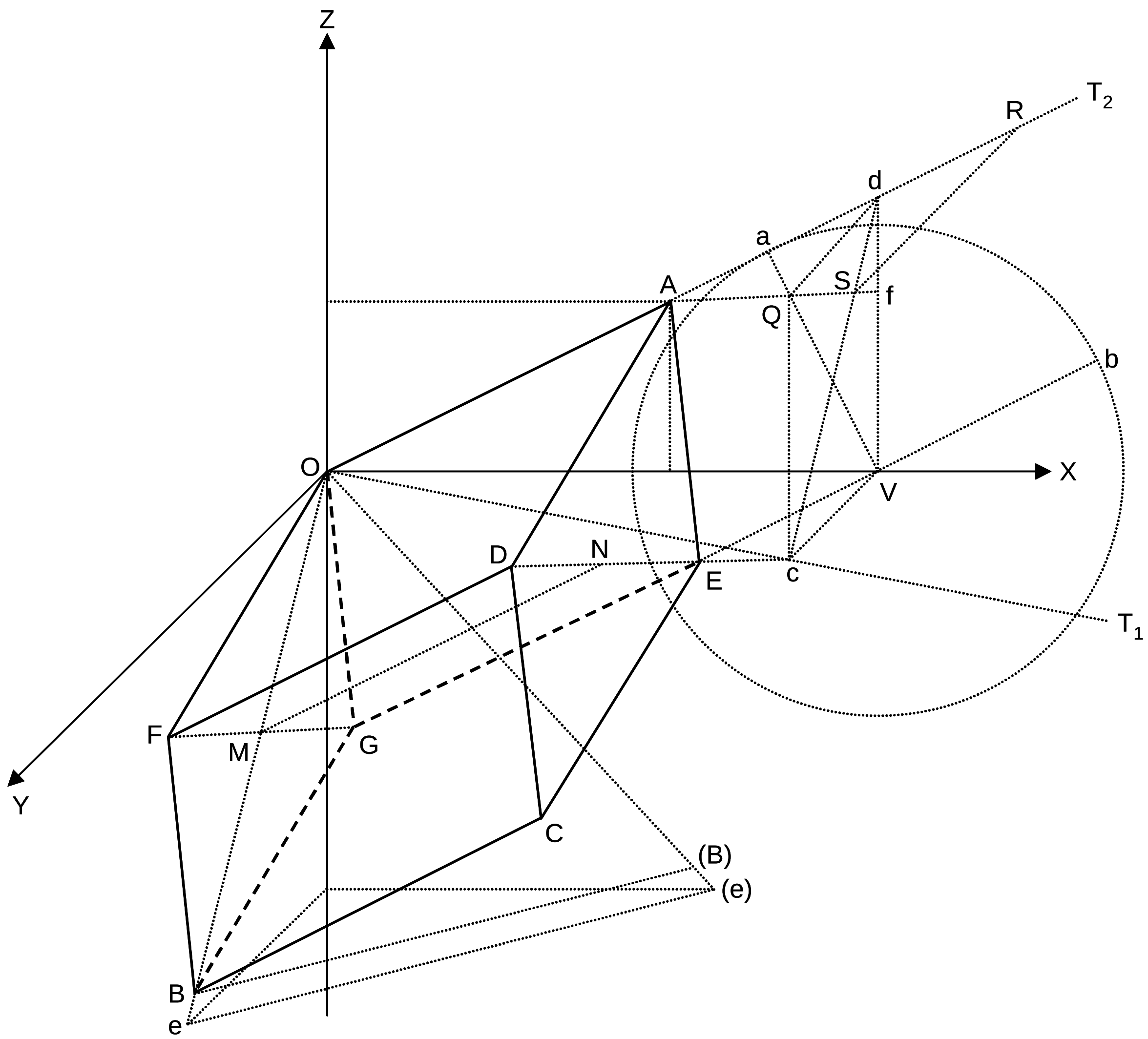
Solución:



1. Las caras AVB y CVD se cortan en la recta r_1, y las caras BVC y AVD en la r_2. Todo plano paralelo a estas dos rectas, corta a la pirámide según un paralelogramo. El plano paralelo que pasa por A, corta a las aristas en B', C'y D. Las aristas $B'C'$ y $C'D'$ son vistas.

L 36- El segmento *OA* de la recta $(y = 0, x = 2z)$, siendo 5 cm la abscisa de *A*, es la arista de un cubo tal que el plano diagonal determinado por esta arista y la opuesta, forma un ángulo de 45º con el plano *XZ*. Representar el cubo en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

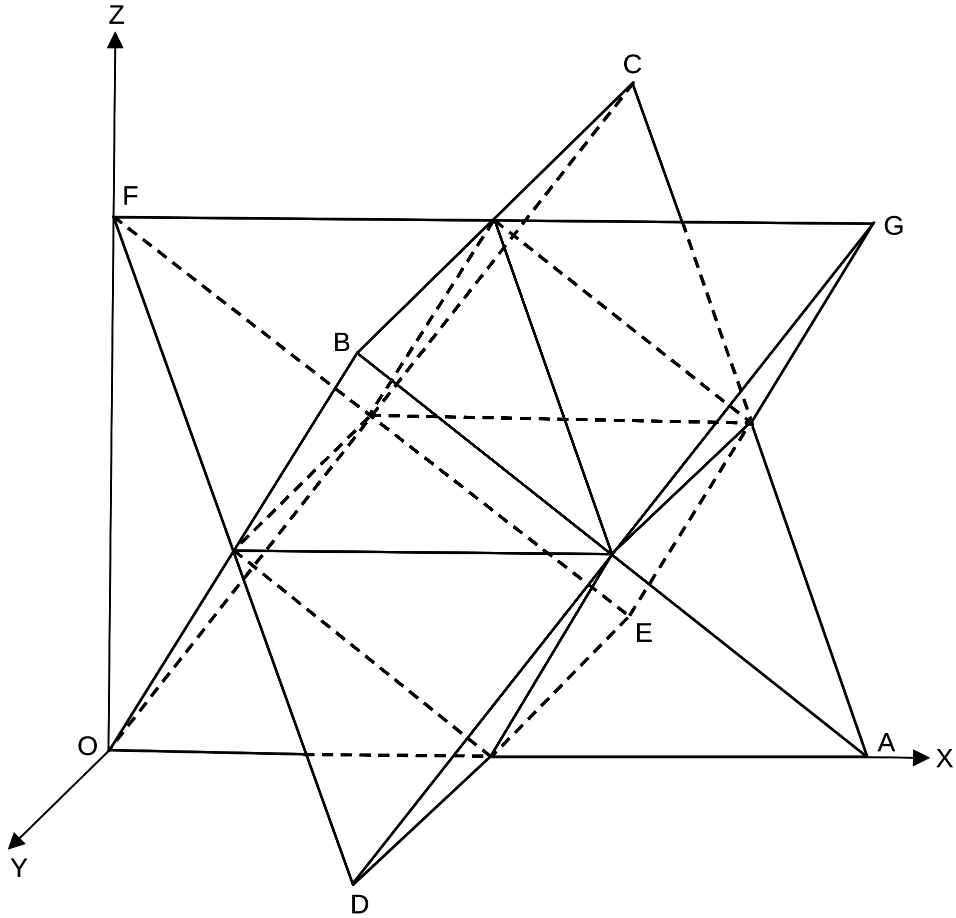
Solución:



En el plano *XZ* se traza la circunferencia tangente a *OA*, con centro *V*. En verdadera magnitud $Va = Vb$ (el ángulo del cono en el vértice es 45º) y $Vc = \frac{V_b}{2}$, siendo *Vc* perpendicular a *OX*. La diagonal *OB* es paralela a *cd*, siendo su verdadera magnitud *O*(*B*). *MN* es la paralela media de *OA* y *BC*. Se lleva sobre *MN*, a uno y otro lado, $\frac{AS}{2}$, obteniéndose *DE* y *FG* (*AS* es la perspectiva de la verdadera magnitud *AR* de la arista). El cubo es *OADFGECB*.

L 37- Se considera un tetraedro regular de arista 10 cm. Tiene dos aristas opuestas horizontales, la inferior de ellas está situada sobre el eje *OX*. Se gira el tetraedro 90º alrededor de la recta que une los puntos medios de las dos aristas citadas. Dibujar el cuerpo formado por los dos tetraedros, en perspectiva caballera de $\theta = 135º$ y $\mu = \frac{1}{2}$, y calcular el volumen de dicho cuerpo.

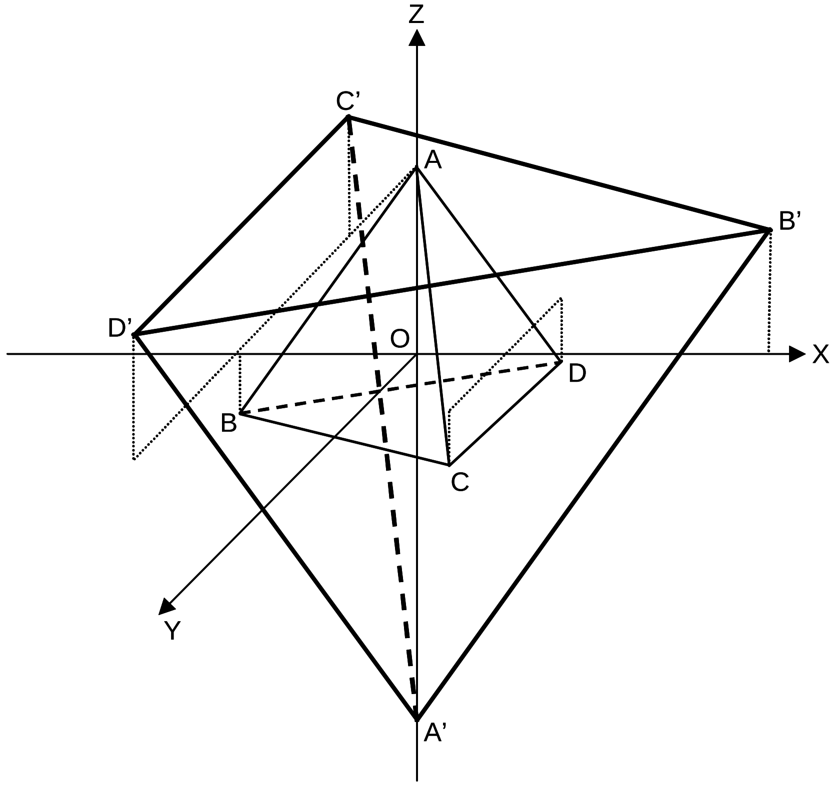
Solución:



OA es la arista situada sobre *OX*, y *BC* la opuesta, paralela a *OY*. El volumen del tetraedro dado es $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{250\sqrt{2}}{3}$ cm^3. Como los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular son vértices de un octaedro regular, el volumen de este es $V' = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^3 = \frac{125\sqrt{2}}{3}$ cm^3. El volumen pedido es $2V - V' = 125\sqrt{2}$ cm^3.

L 38- El origen de coordenadas es el centro de gravedad de un tetraedro regular de arista 4 cm. Un vértice está situado en el eje *OZ* por encima del plano *XY*. Un vértice de la cara opuesta al vértice citado, está situado en la parte negativa del plano *XZ*. Por cada vértice del tetraedro se traza un plano paralelo a la cara opuesta. Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \frac{1}{2}$, el tetraedro dado y el formado por los citados planos paralelos, y hallar el volumen de este.

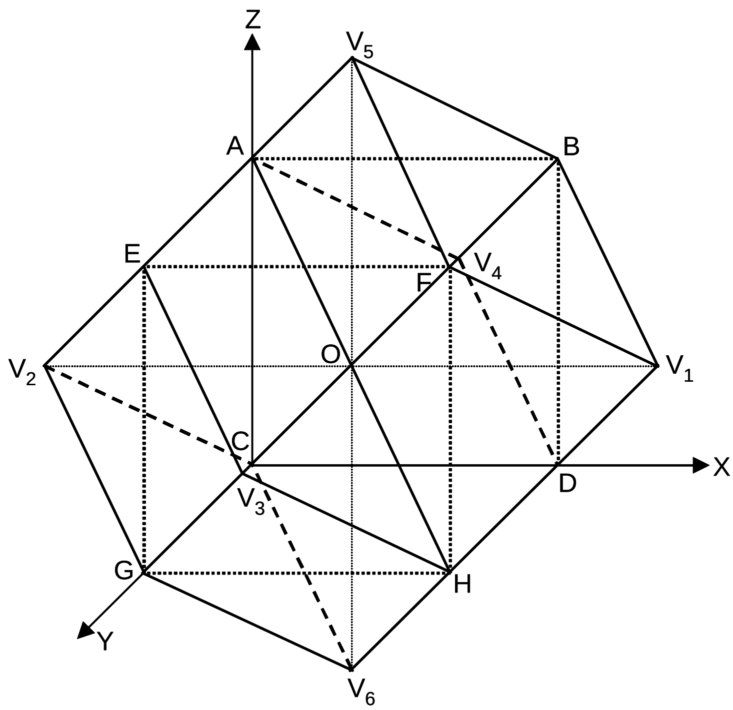
Solución:



El tetraedro dado es *ABCD*. El formado por los planos paralelos es $A'B'C'D'$. La arista de este tetraedro es el triple de la arista del dado, luego el volumen pedido es $\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 12^3 = 144\sqrt{2}$ cm^3.

L 39- Se considera un cubo de arista 4 cm. Tiene un vértice en el origen de coordenadas. Las aristas que parten de este vértice, son los ejes positivos del dibujo. Por cada arista del cubo se traza un plano perpendicular al determinado por la arista y el centro. Representar en perspectiva caballera de $\theta = 135^{\circ}$ y $\mu = \frac{1}{2}$, el cuerpo formado y hallar su volumen.

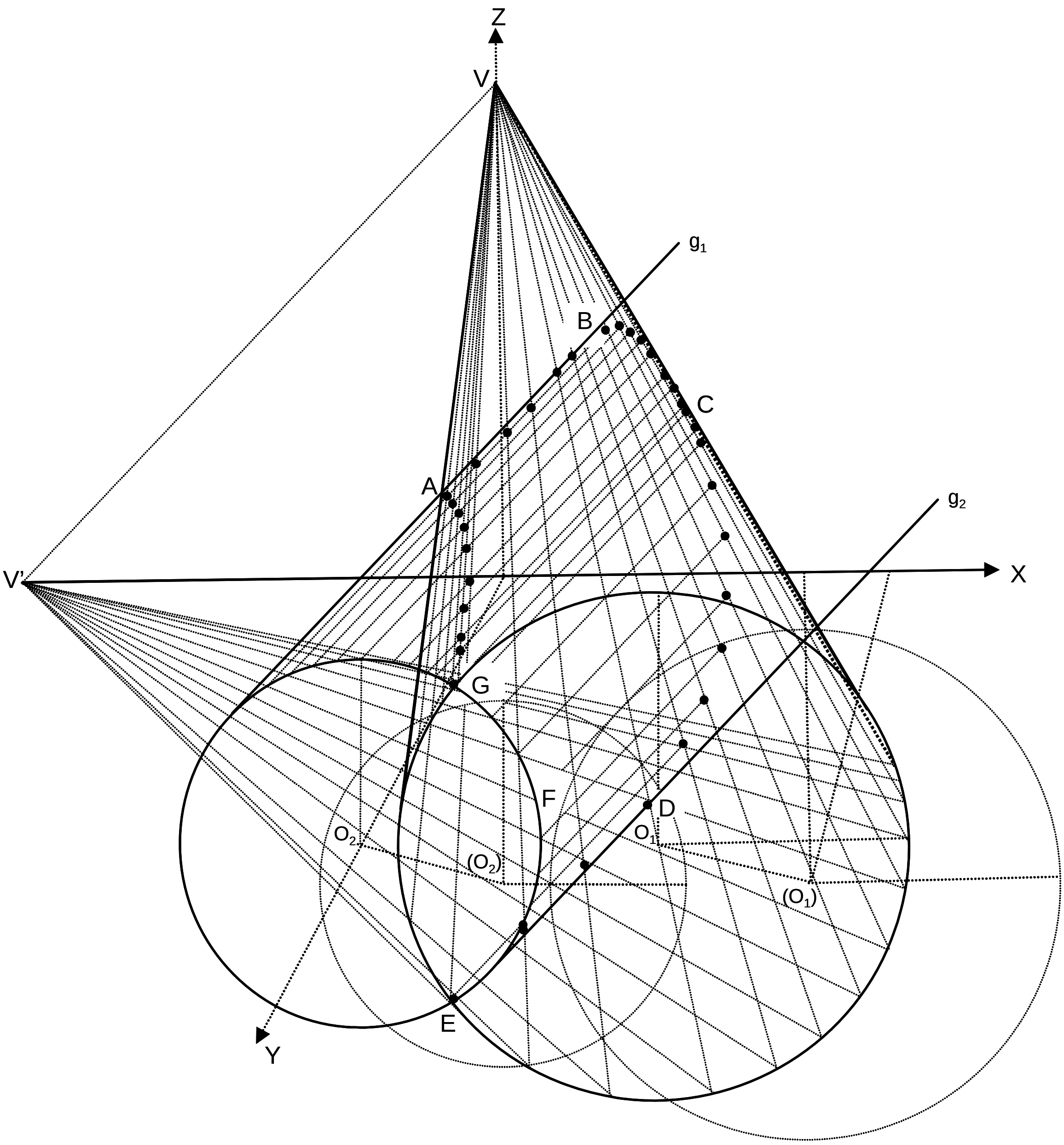
Solución:



El cubo dado es *ABCDEFGH*. El cuerpo se forma hallando el simétrico del centro *O* del cubo respecto a sus seis caras, obteniéndose los vértices V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 y V_6. Su volumen es el doble del volumen del cubo dado, o sea $2 \cdot 4^3 = 128\,\text{cm}^3$.

L 40- Representar en perspectiva caballera de $\theta = 120^{\circ}$ y $\tan\mu = 1$, la intersección del cono cuya base es la circunferencia $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$, $z = 0$ y su vértice el punto $(0,0,8)$, con el cilindro de generatrices paralelas a la recta $z = x$, $y = 0$, siendo su traza con el plano $z = 0$, la circunferencia $z = 0$, $x^2 + (y-5)^2 = 9$.

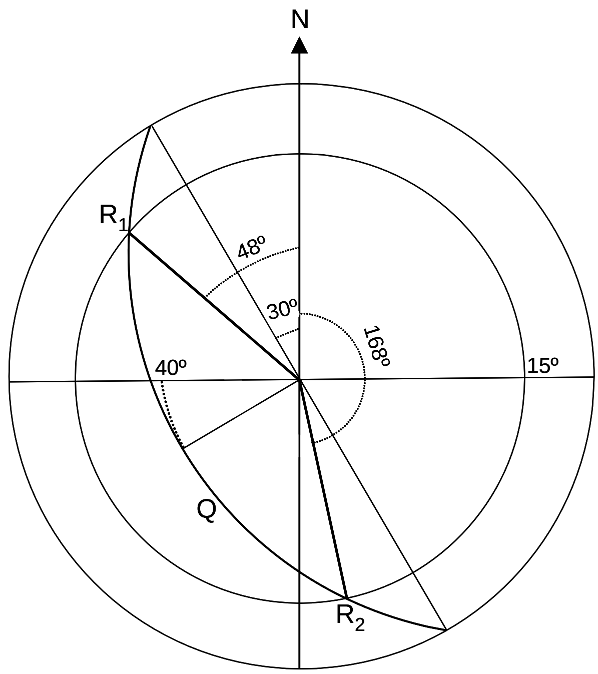
Solución:



Se utilizan como planos auxiliares los que pasan por la paralela a la generatriz del cilindro trazada por el vértice del cono. Se trata de una mordedura limitada por las generatrices *AB* y *DE*, y por el arco *GFE*. Se ha supuesto que el cilindro es transparente.

L 41- Mediante proyección estereográfica, determinar la dirección de un pozo plano R de inclinación $i = 15º$, situado en una capa Q de dirección $N - 30º - W$, inclinación $i = 40º$ y buzamiento SW.

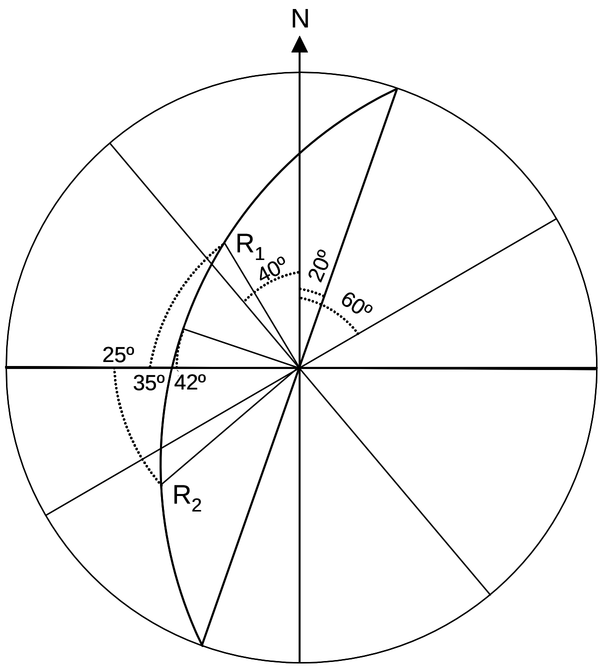
Solución:



La solución R_1 corresponde a la dirección $N - 48º - W$, y la R_2 a la dirección $N - 168º - E$. Nota: En este problema y en los dos siguientes se ha utilizado una red o falsilla de Wulff con separaciones angulares de 2º.

L 42- Mediante proyección estereográfica, representar la capa Q en la que se han medido las siguientes direcciones, inclinaciones y buzamientos aparentes: $d_1 = N - 60º - E$; $i_1 = 35º$; $b_1 = NW$; $d_2 = N - 40º - W$; $i_2 = 25º$; $b_2 = SW$.

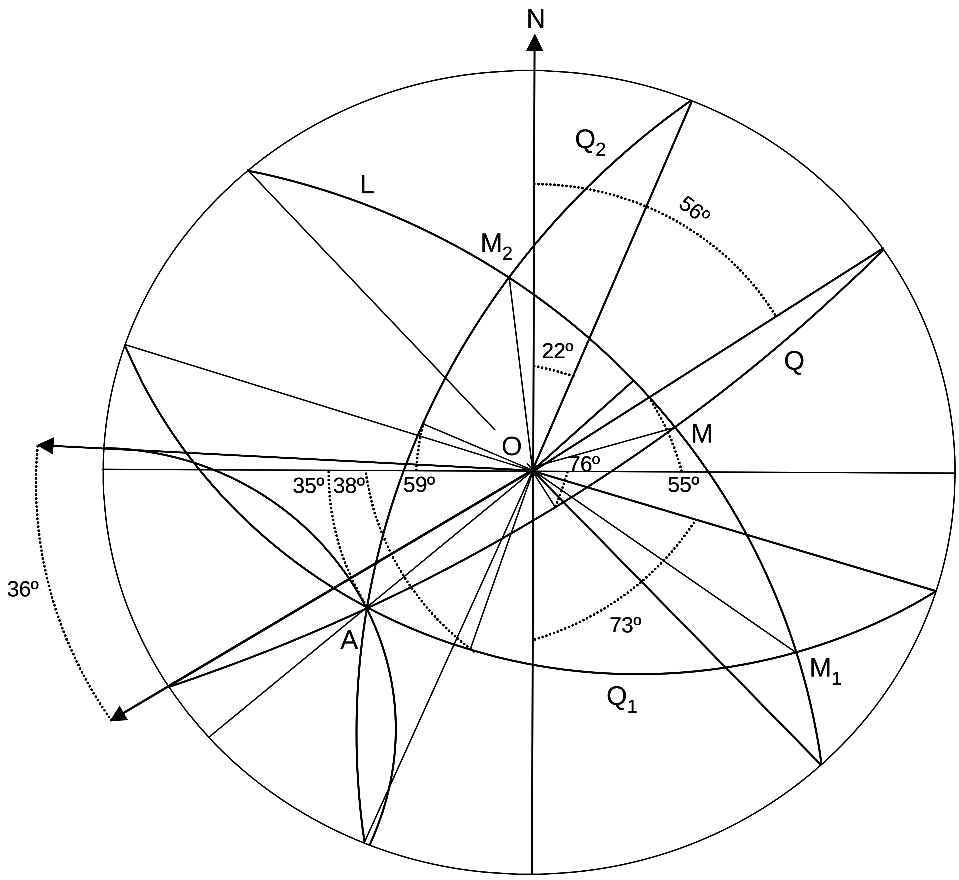
Solución:



El plano de la capa Q está definido por las dos rectas R_1 y R_2, siendo su dirección $N - 20º - E$, su inclinación 42º, buzamiento NW.

L 43- Mediante proyección estereográfica, determinar el ángulo de inmersión y cabeceo de un pliegue cuyos flancos están dados por: $d_1 = S - 73º - E$; $i_1 = 38º$; $b_1 = SW$; $d_2 = N - 22º - E$; $i_2 = 59º$; $b_2 = NW$.

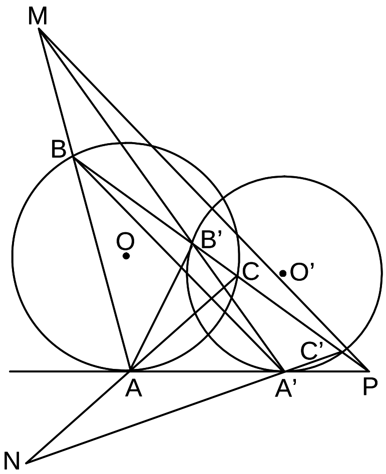
Solución:



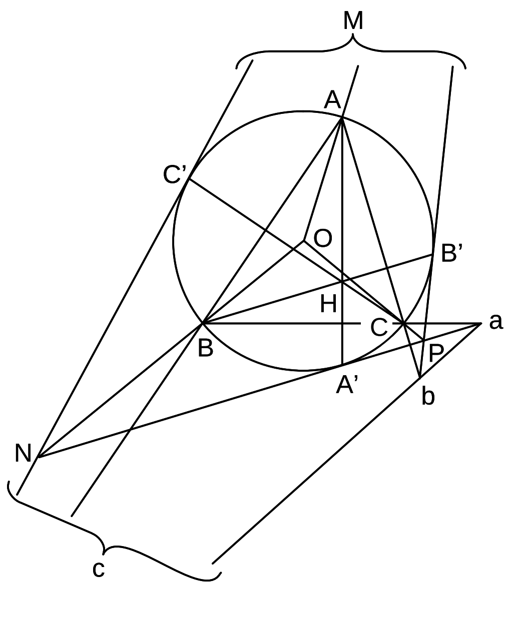
Flancos $= Q_1$ y Q_2. Charnela $= OA$; Inmersión $= 35º$. Plano perpendicular a $OA = L$. Plano bisector de Q_1 y $Q_2 = Q$ $(d = 56º; i = 76º; b = SE)$. Cabeceo $= 36º$.

Anexo

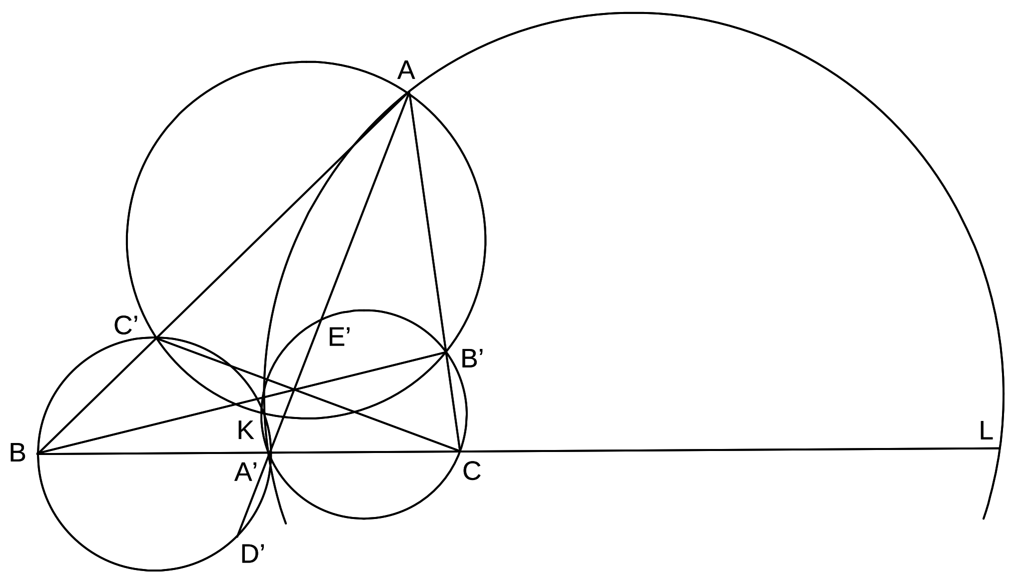
1- Se dan dos círculos O y O' y una de sus tangentes comunes, cuyos puntos de tangencia son, respectivamente, A y A'. Por un punto fijo P, situado en AA', se traza una secante variable que corta a O en B y C, y a O' en B' y C', Hallar el lugar geométrico de los puntos M, intersección de AB y $A'B'$, y de los puntos N, intersección de AC y $A'C'$.



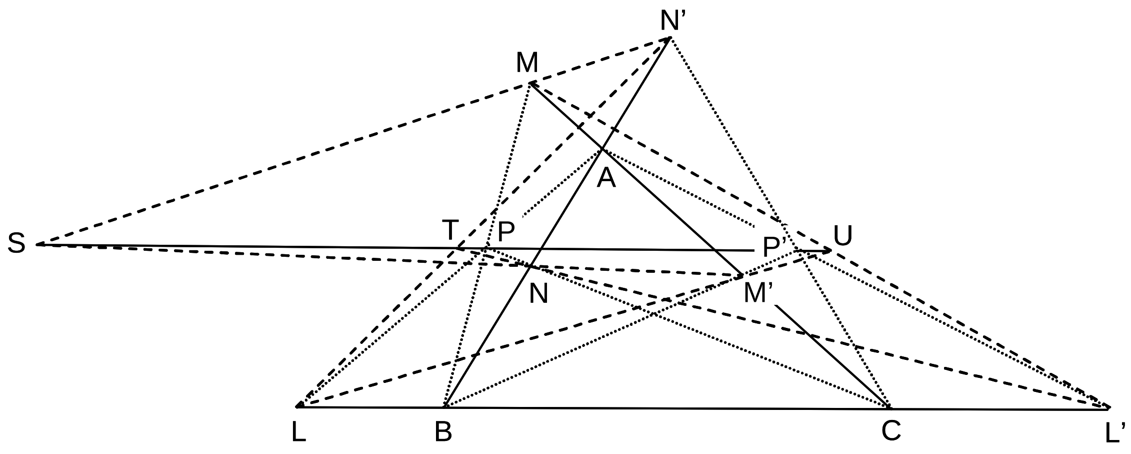
2- En el triángulo ABC, H es el ortocentro, A', B', C' los puntos de encuentro de las alturas con el círculo circunscrito, y a, b, c las intersecciones de BC, CA y AB con las tangentes al círculo circunscrito trazadas en A', B' y C' respectivamente. Demostrar que a, b y c están alineados.



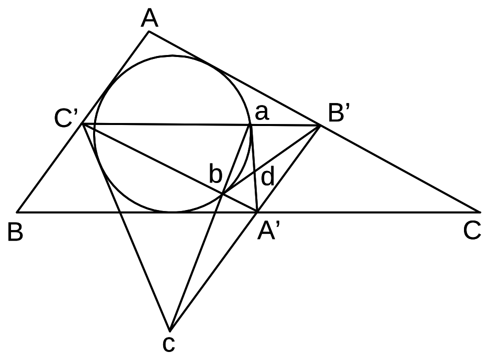
3- Se da un triángulo ABC y los puntos A', B' y C' sobre los lados BC, AC y AB. Se sabe que los círculos $AB'C'$, $BC'A'$ y $CA'B'$ concurren en un punto K. Demostrar que en el caso en que las rectas AA', BB' y CC' sean concurrentes, los círculos KAA', KBB' y KCC' cortan a las rectas BC', CA' y AB' en puntos alineados.



4- Se dan dos puntos P y P' en el plano de un triángulo ABC. Si AP y AP' cortan a BC en L y L', BP y BP' a CA en M y M', CP y CP' a AB en N y N', demostrar que los puntos de corte S (de MN' y NM'), T (de NL' y $N'L$) y U (de LM' y $L'M$), están alineados.



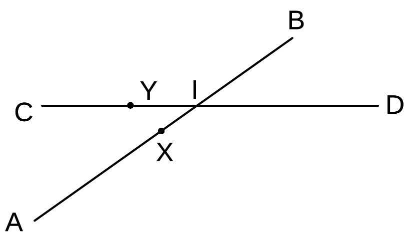
5- Por los puntos medios A', B' y C' de los lados de un triángulo ABC, se trazan las tangentes al círculo inscrito, que cortan a $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$, en c, a y b. Demostrar que a, b y c, están alineados.



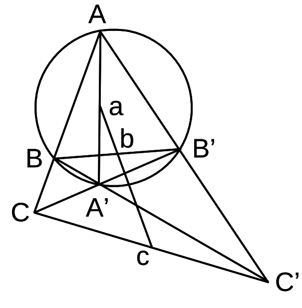
6- Desde un punto P situado en el plano de un triángulo ABC, se trazan las perpendiculares Pa, Pb y Pc, sobre los lados BC, CA y AB. Desde los vértices se trazan las perpendiculares AA', BB' y CC' sobre bc, ca y ab. Demostrar que AA', BB' y CC' son concurrentes.

7- Demostrar que todo triángulo en el que el circuncentro y el incentro coinciden, es equilátero. Demostrar que también lo es si coinciden circuncentro y baricentro.

8- Se dan dos segmentos AB y CD, que se cortan en I. Trazar un círculo que pasa por I y que corta a AB en X, y a CD en Y, de forma que $\frac{AX}{CY} = m$, y $\frac{BX}{DY} = n$, siendo m y n números dados.

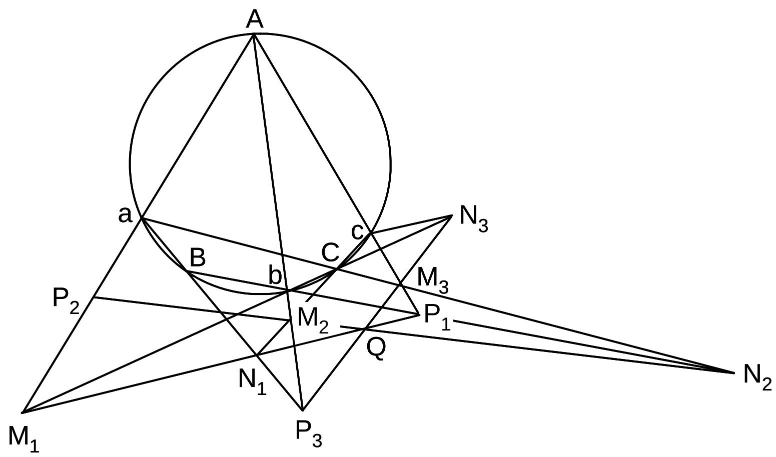


9- Se da un cuadrilátero completo $AA'BB'CC'$, en el que los vértices A, A', B y B' son concíclicos. Los puntos medios de las diagonales AA', BB' y CC', son a, b y c. Demostrar que las circunferencias abC y abC' son tangentes a CC' en C y C' respectivamente.

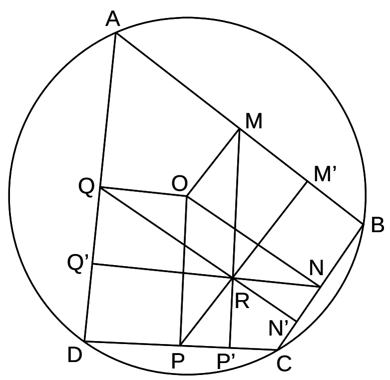


10- Con cinco rectas tomadas de cuatro en cuatro, se forman cinco cuadriláteros completos. En cada uno de ellos se traza la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales. Demostrar que estas cinco rectas pasan por un punto.

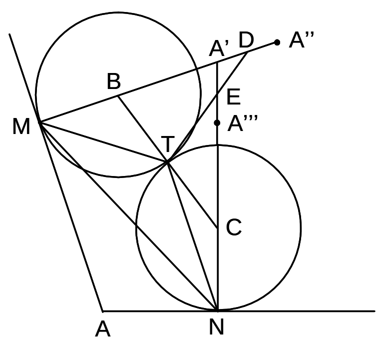
11- Sobre una circunferencia se toman seis puntos *A*, *a*, *B*, *b*, *C* y *c*. Demostrar que las rectas de Pascal de los exágonos *AaBbCc*, *AbBcCa* y *AcBaCb*, concurren.



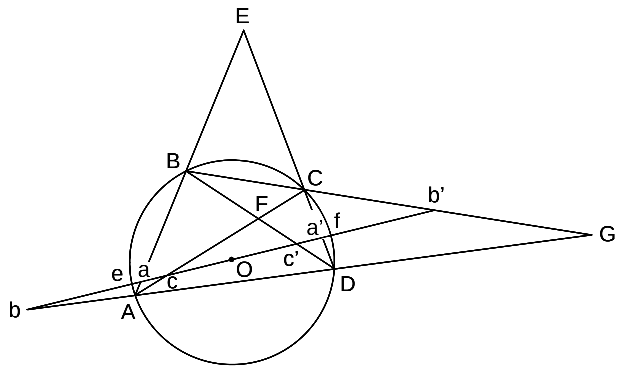
12- Demostrar que en todo cuadrilátero inscriptible, las perpendiculares bajadas desde el punto medio de cada lado sobre el lado opuesto, concurren.



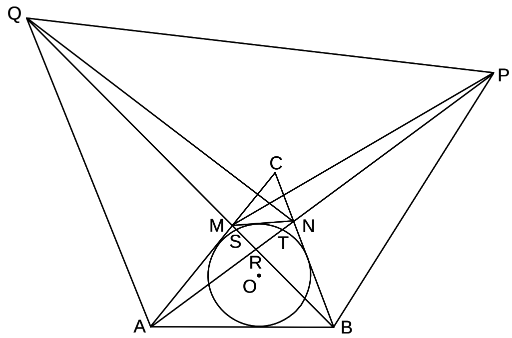
13- Dadas dos rectas *AM* y *AN*, trazar dos círculos de igual radio, tangentes a las rectas en *M* y *N*, y tangentes entre sí.



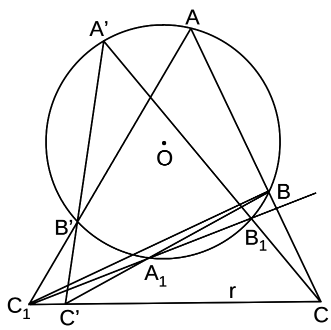
14- Se da una circunferencia O y cuatro puntos A, B, C y D sobre ella. Sea E el punto de intersección de AB y CD, F el de AC y BD, y G el de AD y BC. Demostrar que las polares de O respecto a los ángulos en E, F y G, son paralelas.



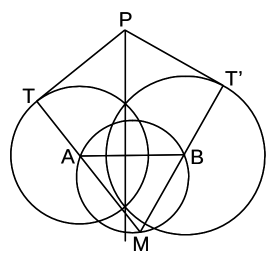
15- Se da el círculo O inscrito en el triángulo ABC. Una tangente variable MN corta a AC en M, y a BC en N. Sobre las rectas AN y BM se toman los puntos P y Q, de forma que $\frac{QN}{QA} = \frac{PB}{PM} = k$. Demostrar que PQ pasa por un punto fijo.



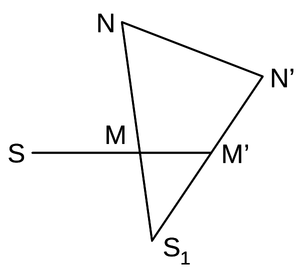
16- Se da una circunferencia O y una recta r. Dos rectas cualesquiera cortan a O en A, B y en A', B', y a r en C y C'. Si AB' corta a r en C_1, y las rectas BC' y CA' al círculo en A_1 y B_1, determinar la posición de A_1, B_1 y C_1.



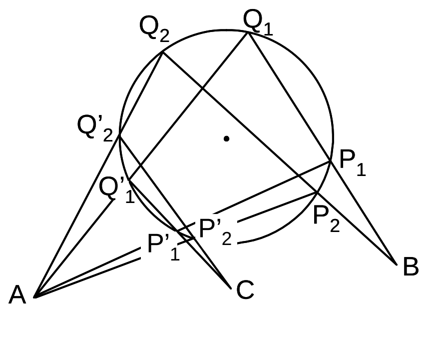
17- Dadas dos circunferencias *A* y *B*, hallar un punto *P* tal que las tangentes trazadas desde él a ambas, *PT* y *PT'*, sean iguales y se corten bajo un ángulo α dado.



18– Se consideran dos centros de inversión *S* y S_1, siendo sus potencias respectivas *k* y k_1. Sean *M* y *M'* dos puntos cualesquiera inversos en el sistema *S*, siendo *N* y *N'* los inversos de *M* y *M'* en el sistema S_1. 1º) Demostrar que la recta *NN'* pasa por un punto fijo. 2º) Demostrar que el centro del círculo que pasa por los cuatro puntos *M*, *M'* *N* y *N'*, se desplaza sobre una recta fija.



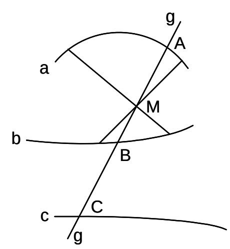
19- Se da un círculo y dos puntos fijos *A* y *B* fuera del círculo. Por *B* se traza una secante *BPQ* cualquiera. Las rectas *AP* y *AQ* cortan al círculo en *P'* y *Q'*. Demostrar que *P'Q'* pasa por un punto fijo.



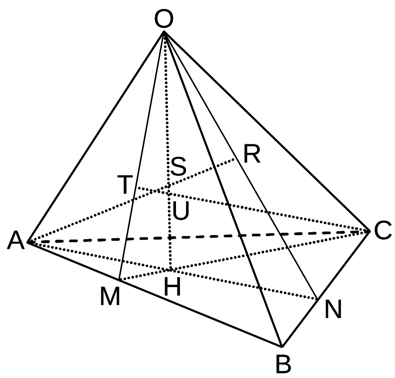
20- Se considera un exágono alabeado de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*. Demostrar que si cada par de lados opuestos *AB* y *DE*, *BC* y *EF*, *CD* y *FA*, están en un plano, las diagonales *AD*, *BE* y *CF* son concurrentes.

21- Demostrar que si tres cuádricas pasan por una misma cónica, los planos de las otras tres cónicas intersección pasan por una misma recta.

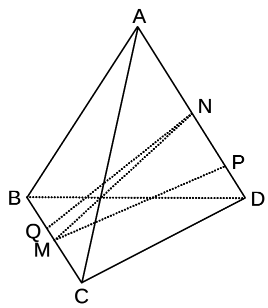
22- Determinar gráficamente el plano tangente en un punto *M* de la superficie reglada engendrada por una recta que se desplaza apoyándose en tres curvas dadas, *a*, *b* y *c*.



23- Demostrar que en un tetraedro cualquiera, las cuatro alturas no concurren en un punto.



24- Demostrar que los seis planos trazados por los puntos medios de las aristas de un tetraedro, perpendiculares a la arista opuesta, pasan por un punto.



25- Demostrar que los círculos circunscritos a dos caras de un tetraedro se cortan bajo el mismo ángulo que los círculos circunscritos a las otras dos.