

FICHE CALCULS DE LIMITES

Le but de cette feuille est de faire des révisions de lycée sur les limites: savoir identifier rapidement des limites, s'il y a des formes indéterminées, et le principe pour les lever.

SAVOIR-FAIRE EXIGÉ

RAPPEL RAPIDE DE COURS

- Avoir l'intuition de chaque terme de la limite:
 - ▷ si $x \rightarrow 5$, regarder dans sa tête $x = 5 + 0.01$, ou $x = 5 - 0.01$.
 - ▷ si $x \rightarrow +\infty$, s'imaginer $x = 1000$; $x = 10^6$... En $-\infty$, $x = -1000$...: un terme du type " $\frac{1}{(\infty)}$ " ou " $\frac{(l)}{(\infty)}$ " où $l \in \mathbb{R}$ donne toujours une limite nulle.
 - ▷ si $x \rightarrow 0$ s'imaginer $x = 0.001$, puis $x = \pm 10^{-6}$ etc... Attention, en cas d'inverse, on a besoin d'avoir le signe de la fraction : $\frac{1}{10^{-6}} = 10^6$: très grand, et $\frac{1}{-10^{-6}} = -10^6$ réel à l'opposé sur l'axe des réels...
- Connaitre les limites de toutes les fonctions usuelles sans souci.
- Attention aux opérations sur les calculs: REPERER LES FORMES INDETERMINEES, mais ne jamais écrire ces opérations interdites sur le propre:

$$"(+\infty) + (-\infty)" \quad "(0) \times (\infty)" \quad "\frac{(\infty)}{(\infty)}" \quad "\frac{(0)}{(0)}"$$

- Une limite peut être finie (un réel), infinie ($+\infty$ ou $-\infty$), ou ne pas exister (par exemple $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$. A vous de déterminer cela.
- Savoir composer des limites.
- Savoir utiliser un théorème d'encadrement pour lever une forme indéterminée. (par exemple lorsqu'il y a un $\cos(u(x))$ où $u(x) \rightarrow +\infty$).

MÉTHODOLOGIE DE TERMINALE

- ① Ecrire le terme au brouillon. Identifier chaque terme, et sa limite:

Exemple : $\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x+1}$... Regardez la limite des termes x^2 , puis $\frac{1}{x}$. En déduire la limite de la somme et donc du numérateur. trouver la limite du dénominateur. En déduire la limite du quotient (ou repérer une forme indéterminée qu'il faudra lever...).

En prépa, s'il n'y a pas de forme indéterminée, vous pouvez écrire tout de suite le résultat.

(exemple d'avant si $x \xrightarrow{x>0} 0$)

- ② Vous avez repéré une forme indéterminée: il faut la lever ! Pour cela: regarder le type de forme indéterminée, et quels sont les termes qui font une F.I.
- ③
- Si c'est une différence de deux termes tendant vers ∞ , factoriser par le terme le plus gros (pour cela, il faut connaître ses croissances comparées).
 - De même si c'est un quotient de deux termes tendant vers ∞ : factoriser le numérateur par le plus gros, et le dénominateur par le plus gros (ce qui est le terme de plus haut degré pour les polynômes en (∞)).
- ④ Si c'est un FI avec une somme ou différence avec des racines, multiplier par la quantité conjuguée.
- ⑤ Si c'est une FI du type " $\frac{(0)}{(0)}$ ", regarder le terme qui annule le numérateur, et le dénominateur et factoriser par $(x-??)$. Sinon, penser aux limites du cours provenant de la limite d'un taux d'accroissement.
- ⑥ Si c'est une FI avec un cosinus et sinus: l'intérieur tend vers 0, se rappeler des FI du cours, et les exploiter. Si l'intérieur tend vers $\pm\infty$, pensez à un théorème d'encadrement.

EXERCICES

Dans tous les exercices suivants, calculer les limites des fonctions suivantes, au point a , réel ou non. Faire l'effort à chaque fois de relever quelle méthode ci-dessus a été utilisée pour lever la forme indéterminée.

EXERCICE 1 ■ □ □

$$(1) f(x) = 3x^2 - x, \quad a = +\infty \text{ et } a = -\infty$$

$$(2) g(x) = \frac{x^2 - 2}{2x + 1}, \quad a = -\infty \text{ et } a = 0$$

$$(3) h(x) = x + \cos x, \quad a = +\infty \text{ et } a = -\infty$$

$$(4) i(x) = -10x + 3 - \frac{5}{x-1}, \quad a = +\infty, \text{ et } a = 1.$$

$$(5) j(x) = \frac{x + \sin(x)}{x}, \quad a = +\infty \text{ et } a = -\infty$$

$$(6) k(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x, \quad a = -\infty$$

EXERCICE 2 ■ □ □

$$(1) f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \quad a = 0.$$

$$(2) g(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad a = +\infty \text{ et } a = 9.$$

$$(3) h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad a = +\infty.$$

$$(4) i(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}, \quad a = -\infty.$$

$$(5) j(x) = \frac{\sin(x/3)}{\cos(x)}, \quad a = \frac{\pi}{2}.$$

$$(6) k(x) = \sqrt{5x^2 + 9x - 2}, \quad a = -\infty.$$

EXERCICE 3 ■ □ □

$$(1) f(x) = \frac{x+1}{x-3} \text{ en } 2, 3 \text{ et } +\infty.$$

$$(2) g(x) = x(x-100) \text{ en } 100.$$

$$(3) h(x) = \frac{1}{x} + x \text{ en } 0 \text{ et } +\infty.$$

$$(4) u(x) = 1 + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0 \text{ et } -\infty.$$

$$(5) v(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} \text{ en } 0.$$

$$(6) w(x) = \frac{4-x^2}{(x+2)(x+3)} \text{ en } -2, \text{ et } +\infty.$$

$$(7) a(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ en } 1 \text{ et } +\infty.$$

$$(8) b(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \text{ en } 3, \text{ et } +\infty.$$

$$(9) c(x) = \frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ en } 0 \text{ et } -\infty.$$

EXERCICE 4 ■ ■ □ Avec ln et exp

Déterminer les limites suivantes.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^x) - x$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 e^{2x}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^{-x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{3 + e^x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x - 3}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x^2)}}{x^3}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln x}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x$$

CORRECTION

Correction de l'EXERCICE 1

- ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{-2}{1} = -2$.
- ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, d'après le théorème des gendarmes.
- ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = -\infty$. En $a = 1$ la limite n'existe pas, $\lim_{x \rightarrow 1^-} i(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} i(x) = -\infty$.
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} j(x) = 1$, d'après le théorème des gendarmes.
- ⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty$.

Correction de l'EXERCICE 2

- ① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 9} g(x) = \sqrt{9^2 - 1} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
- ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \cos(0) = 1$.
- ④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = 1$.
- ⑤ $\cos(\pi/2) = 0$ tandis que $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2} \neq 0$, donc limite bilatérale n'existe pas.

Limites unilatérales : $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} j(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} j(x) = -\infty$.

- ⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty$.

Correction de l'EXERCICE 3

- ① $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$.
En $x \rightarrow 3$ il y a un pôle : $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
- ② $\lim_{x \rightarrow 100} g(x) = 100 \cdot 0 = 0$.
- ③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.
- ④ $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$.
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = +\infty$.
- ⑥ $w(x) = \frac{4 - x^2}{(x+2)(x+3)}$: factorisation $4 - x^2 = (2-x)(x+2)$, on simplifie pour $x \neq -2$: $w(x) = \frac{2-x}{x+3}$.
Donc $\lim_{x \rightarrow -2} w(x) = \frac{2 - (-2)}{-2 + 3} = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = -1$.
- ⑦ Multiplier par le conjugué donne $a(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ pour $x \neq 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} a(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$.
- ⑧ Multiplier par le conjugué donne $b(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$ pour $x \neq 3$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3} b(x) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 0$.
- ⑨ $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'EXERCICE 4

- ① $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty.$
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty .$
- ③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = -\infty.$
- ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) = +\infty.$
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) = +\infty.$
- ⑥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x) = 0.$
- ⑦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 e^{2x} = +\infty.$
- ⑧ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = +\infty.$
- ⑨ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = +\infty.$
- ⑩ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{3 + e^x} = +\infty.$
- ⑪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x - 3} = 0.$
- ⑫ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3} = +\infty.$
- ⑬ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln x} = +\infty.$
- ⑭ Multiplier par le conjugué donne $\frac{-2x + 3}{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x} = \frac{-2 + 3/x}{\sqrt{1 - 2/x + 3/x^2} + 1}.$ Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x) = -1.$