Chapitre 1
L'intérêt

Au terme de ce chapitre, vous serez en mesure de :

1. Comprendre la notion générale d'intérêt.
2. Distinguer la capitalisation à intérêt simple et à intérêt composé.
3. Calculer la valeur acquise par un capital placé.
4. Comprendre les conventions de calcul de durée en finance.
5. Lier un taux d'intérêt à sa durée d'application.

Le concept d'intérêt occupe une place centrale dans les mathématiques financières ; on l'assimile parfois au prix du temps ou encore au loyer de l'argent. Tous les outils financiers qui seront présentés dans la suite de l'ouvrage s'appuient sur cette notion. Le but de ce chapitre est de présenter les bases de calcul de l'intérêt sur un placement en distinguant les deux modes usuels de détermination de l'intérêt : l'intérêt simple et l'intérêt composé.

1. Mise en situation

Vous envisagez d'effectuer, dans un proche avenir, un voyage d'études à l'étranger pour lequel vous devez disposer lors de votre départ d'un montant de 11 000 €. Actuellement, vous possédez une somme de 10 000 € placés sur votre compte d'épargne. Ce compte vous rapporte 3,5 % par an. Les questions suivantes se posent à vous :

- Avez-vous suffisamment d'argent aujourd'hui pour envisager ce voyage dans 1 an ?
- Si ce montant est insuffisant, aurez-vous assez d'argent dans 2 ans ?
- Si vous n'avez pas atteint le montant requis de 11 000 € dans 2 ans, combien de temps vous faudra-t-il encore patienter pour l'obtenir ?
- Si vous devez impérativement partir dans 2 ans et que le rendement de votre compte d'épargne ne vous permet pas d'atteindre l'objectif fixé, quel taux d'intérêt devrait alors afficher votre compte pour y parvenir ?

Cet exemple met en lumière les trois concepts fondamentaux des mathématiques financières que nous allons expliciter dans ce chapitre : un capital, une durée, un taux d'intérêt. Ce seront les trois variables de base de la plupart des problèmes que nous traiterons dans la suite.

2. Concept d'intérêt

Vous disposez au départ, à l'instant $t = 0$, d'une somme d'argent d'un montant $C(0)$ [les unités étant par exemple les euros]. Vous déposez ce capital à la banque sur un compte d'épargne. Plutôt que de consommer directement l'équivalent de ce montant, vous acceptez donc de vous en dessaisir momentanément et de le prêter à votre banque. La théorie financière nous dit que vous serez disposé à agir ainsi moyennant l'octroi d'une rémunération de la part de la banque, appelée intérêt. On comprend déjà aisément que ce revenu sera d'autant plus important que le montant initialement investi, $C(0)$, est élevé et que la durée pendant laquelle vous laissez votre argent à la banque est longue.

Nous pouvons exprimer cela par la relation très générale :

$$C(t)=C(0)+I(C(0),t) \tag{1.1}$$

où :

t = durée du placement

$C(0)$ = montant initialement placé

$C(t)$ = montant obtenu après une durée t

$I(C(0), t)$ = montant d'intérêt obtenu

La relation (1.1) indique donc que le revenu d'intérêt dépend du capital placé et de la durée de placement. Ce revenu d'intérêt est payé en fin de période de placement. Il semble relativement naturel, en outre, de supposer que l'intérêt obtenu est directement proportionnel au capital placé : on obtiendra deux fois plus d'intérêt en déposant le double à la banque !

On peut alors écrire :

$$C(t)=C(0)+C(0)I(t) \tag{1.2}$$

Comme nous le verrons dans la suite, il existe différentes façons de calculer en fonction de la durée de placement t le facteur des intérêts $I(t)$.

Au niveau de la terminologie, on utilise indistinctement, pour $C(0)$, les appellations de valeur initiale, valeur présente ou valeur actuelle et, pour $C(t)$, celles de valeur finale, valeur future ou valeur acquise.

On dit aussi parfois que $C(t)$ est la valeur capitalisée de $C(0)$ pour une durée de temps t.

La relation (1.2) fait intervenir deux grandeurs fondamentales dont il convient de fixer les unités :

- le capital C (unités monétaires, par exemple en euros) ;
- le temps t.

2.1. L'unité de temps

Au niveau du temps, on peut choisir diverses unités. Par défaut, l'unité de base en finance est l'année. Toutefois, on peut aussi considérer d'autres unités de temps : le semestre, le trimestre, le mois, le jour.

Par exemple, il est courant dans les crédits à la consommation d'évoquer un crédit sur 24 mois. Au contraire, dans un prêt immobilier, on parlera d'un emprunt à 15 ans.

Exemple 1.1

1. Si on choisit l'année comme unité :
   $C(1)$ = capital obtenu après 1 an
   $C(2)$ = capital obtenu après 2 ans
   $C(1/12)$ = capital obtenu après 1 mois
2. Si on choisit le mois comme unité :
   $C(12)$ = capital obtenu après 1 an
   $C(24)$ = capital obtenu après 2 ans
   $C(1)$ = capital obtenu après 1 mois

2.2. Le taux d'intérêt

Une fois l'unité de temps choisie, on peut définir le taux d'intérêt r comme la valeur du facteur d'intérêt pour une période unitaire ; r représente ainsi le nombre d'unités monétaires rapportées en une unité de temps :

$$C(1)=C(0)+C(0)I(1)=C(0)+C(0)r=C(0)(1+r) \qquad (1.3)$$

Un taux d'intérêt se rapporte donc toujours à une unité de temps. On parle parfois de taux d'intérêt annuel, mensuel, trimestriel… Par défaut, le taux est annuel.

Le taux d'intérêt sera exprimé en décimales (par exemple à 0,03) ou en pourcentages (3 % : un capital de 100 rapporte 3 en une période unitaire).

Exemple 1.2

1. On dépose un montant de 100 € sur un compte d'épargne dont le taux d'intérêt annuel s'élève à 4 %. Après 1 an, l'avoir du compte s'élève à :

$$C(1) = 100\text{ €} + 0{,}04 \times 100\text{ €} = 104\text{ €}.$$

2. On emprunte pour 1 mois une somme de 1 000 € ; le taux d'intérêt mensuel est de 0,75 %. Le montant à rembourser dans 1 mois s'élève à :

$$C(1) = 1\,000\text{ €} + 0{,}0075 \times 1\,000\text{ €} = 1007{,}5\text{ €}.$$

Le temps t, le capital C et le taux d'intérêt r sont les trois grandeurs fondamentales des mathématiques financières. On est donc à présent en mesure de relier capital initial, capital final et taux d'intérêt pour une période unitaire de placement. Mais qu'en est-il lorsque la durée de placement est supérieure (ou inférieure) à cette période unitaire ?

Exemple 1.3

1. On dépose un montant de 100 € sur un compte d'épargne dont le taux d'intérêt annuel s'élève à 4 %. À combien s'élève le compte après 3 ans ? Après 6 mois ?
2. On emprunte pour 1 mois une somme de 1 000 € ; le taux d'intérêt mensuel est de 0,75 %. Combien dois-je rembourser si je ne peux le faire que dans 9 mois ?

Pour répondre à ces questions, il convient de donner une forme analytique à la fonction du temps $I(t)$ définie dans l'équation (1.2). Deux raisonnements financiers différents conduisent à deux définitions de cette dépendance temporelle :

- l'intérêt simple (dépendance linéaire ou proportionnelle) ;
- l'intérêt composé (dépendance exponentielle).

3. L'intérêt simple

3.1. Principe de l'intérêt simple

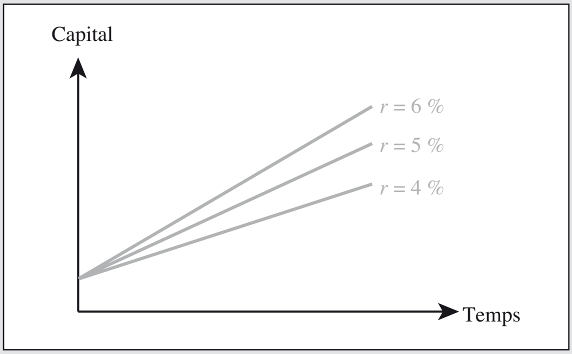
L'intérêt simple est basé sur un principe de proportionnalité de l'intérêt gagné au temps de placement. Autrement dit, l'intérêt est une fonction linéaire de la durée.

Les formules (1.2) et (1.3) permettent alors d'écrire :

$$C(t)=C(0)+I(C(0),t)=C(0)+C(0).r.t=C(0)(1+r.t) \tag{1.4}$$

La figure 1.1 illustre l'évolution du capital généré lorsqu'il est calculé de manière simple.

Figure 1.1 - Évolution d'un capital à intérêt simple.



Exemple 1.4

On dépose un montant de 100 € sur un compte d'épargne dont le taux d'intérêt annuel s'élève à 4 %. À combien s'élève, à intérêt simple, le compte après 3 ans ? Après 6 mois ?

a. Après 3 ans : $C(3)$ = 100 € + 0,04 × 3 × 100 € = 112 €.

b. Après 6 mois : $C(0{,}5)$ = 100 € + 0,04 × 0,5 × 100 € = 102 €.

Pour des périodes inférieures à l'unité, on parle parfois de prorata d'intérêt (calcul de l'intérêt suivant une simple règle de trois). Ainsi, dans l'exemple 1.4(b), le montant de 2 € d'intérêt qui s'ajoute au capital est un prorata d'intérêt sur 6 mois.

3.2. Le paradoxe de l'interruption de placement

Même si l'argument de proportionnalité au temps sous-jacent à l'intérêt simple peut sembler à première vue naturel, il conduit rapidement à des situations peu logiques. Illustrons cela pour le paradoxe de l'interruption de placement.

Reprenons pour ce faire le cas de l'exemple 1.4 sur 3 ans. En laissant, selon cette méthode, pendant 3 ans notre argent à la banque, on obtient à partir d'une somme de 100 € placée à un taux de 4 % un montant final de 112 €.

Mais on pourrait aussi décider, après 1 an, de retirer notre argent. On obtient alors après 1 an un montant de 104 €. Ensuite, à peine touché, ce montant pourrait être réinvesti pour 2 ans. On obtient alors au bout des 3 ans un capital de :

$$C(3)=104\,€+0{,}04\times2\times104\,€=112{,}32\,€$$

On pourrait également, chaque année, retirer notre argent et puis le réinvestir directement ; on aurait alors successivement :

$$C(2) = 104\,€ + 0{,}04 \times 1 \times 104\,€ = 108{,}16\,€$$

$$C(3) = 108{,}16\,€ + 0{,}04 \times 1 \times 108{,}16\,€ = 112{,}49\,€$$

On obtient ainsi trois résultats différents, alors qu'il s'agit à l'évidence de la même opération financière ! En réalité, l'intérêt simple souffre d'un problème intrinsèque à sa construction et qu'illustre le paradoxe de l'interruption de placement : en intérêt simple, les intérêts sont constamment calculés sur la somme initialement versée sur le compte ; les intérêts progressivement acquis, eux, ne génèrent pas d'intérêt. La technique de l'intérêt composé va corriger ce défaut.

4. L'intérêt composé

4.1. Le principe de l'intérêt composé

L'intérêt composé est basé sur l'idée que les intérêts progressivement gagnés doivent également être porteurs d'intérêts.

Considérons à cet effet un capital initial placé à un taux d'intérêt r ; après une période, il vient :

$$C(1) = C(0)(1+r)$$

On suppose que ce montant est de nouveau investi pour une période :

$$C(2) = C(1)(1+r) = C(0)(1+r)^2$$

D'une manière générale, après n périodes (n = 1, 2, 3…), on aura :

$$C(n) = C(0)(1+r)^n$$

La formule des intérêts composés consiste à utiliser cette dernière relation pour tout temps t (entier ou non) et de substituer donc à la formule linéaire (1.4) la formule exponentielle :

$$C(t) = C(0)(1+r)^t \qquad (1.5)$$

Exemple 1.5

On dépose un montant de 100 € sur un compte d'épargne dont le taux d'intérêt annuel s'élève à 4 %.
À combien s'élève, à intérêt composé, le compte après 3 ans ? Après 6 mois ?

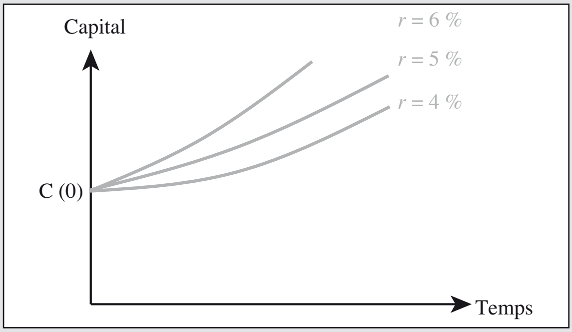
a. Après 3 ans : $C(3) = 100\,€ \times (1{,}04)^3 = 112{,}49\,€$.

b. Après 6 mois : $C(0{,}5) = 100\,€ \times (1{,}04)^{0{,}5} = 101{,}98\,€$.

Remarquons que le paradoxe de l'interruption de placement observé à intérêt simple disparaît automatiquement ici, puisque la définition de l'intérêt composé se base précisément sur le réinvestissement continuel des intérêts générés. On retrouve d'ailleurs bien, dans l'exemple 1.5 après 3 ans, le montant de 112,49 € obtenu dans le troisième scénario de l'intérêt simple !

La figure 1.2 illustre l'évolution du capital généré lorsqu'il est calculé de manière composée.

Figure 1.2 - Évolution d'un capital à intérêt composé.



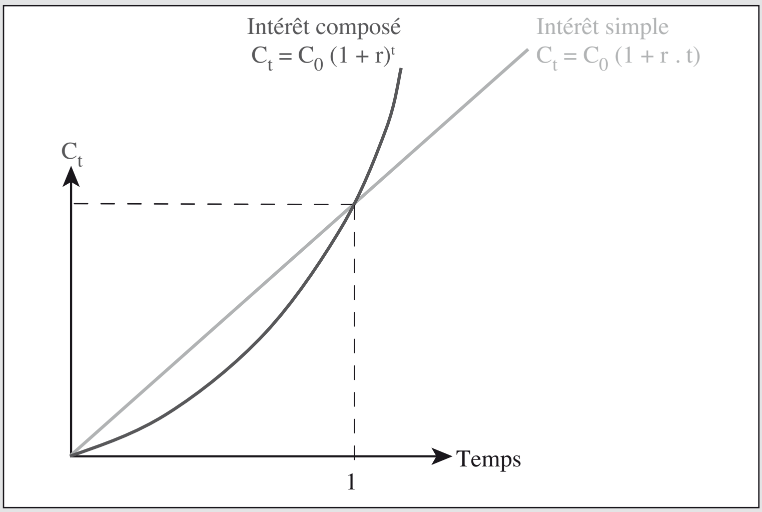
4.2. Comparaison entre intérêt simple et intérêt composé

En comparant les valeurs obtenues dans les exemples 1.4 et 1.5, on observe que, pour des durées supérieures à l'unité de temps, l'intérêt composé rapporte plus. Au contraire, pour des durées inférieures à l'unité de temps, c'est l'intérêt simple qui est supérieur. On a d'une manière générale les relations suivantes :

$$\begin{aligned} C(0)(1+rt) &> C(0)(1+r)^t \quad si\ \ t<1 \\ C(0)(1+rt) &= C(0)(1+r)^t \quad si\ \ t=1 \\ C(0)(1+rt) &< C(0)(1+r)^t \quad si\ \ t>1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ce comportement contrasté peut facilement se voir graphiquement si on compare, sur un même graphe, les deux lois d'évolution.

Figure 1.3 - Comparaison entre intérêt simple et intérêt composé.



4.3. Intérêt simple ou intérêt composé en pratique ?

Comme nous l'avons déjà indiqué précédemment, on adopte le plus généralement, en finance, l'année comme unité de temps. On adopte alors en pratique la convention la plus avantageuse pour l'épargnant :

- Pour des durées de placement inférieures à 1 an, on utilise l'intérêt simple (opérations financières à court terme) ; l'intérêt sur des périodes en mois ou en jours se calcule donc sous forme d'un prorata de la durée.
- Pour des durées de placement supérieures à 1 an, on utilise l'intérêt composé (opérations financières à long terme). Dans ce contexte, la plupart des techniques financières développées en mathématiques financières se font en recourant à l'intérêt composé, qui sera, sauf mention contraire, la norme dans la suite de cet ouvrage.

5. Conventions de calcul des durées

Qu'il s'agisse de l'intérêt simple ou de l'intérêt composé, il convient de calculer la durée du placement t. En prenant l'année comme unité temporelle habituelle, il s'agit donc de traduire en années une période de temps comprise entre deux dates (la période la plus courte prise en compte dans des calculs d'intérêt étant en pratique le jour). Si ce calcul ne pose évidemment pas de problème lorsqu'on est en présence de durées entières (par exemple, la durée entre le 1er janvier 2011 et le 1er janvier 2013), diverses conventions existent quand il convient de calculer une durée inférieure à l'année devant être exprimée en années.

Le problème classique à ce niveau consiste à calculer la durée comprise entre deux dates, exprimée en fraction d'année. Par exemple, quelle est la durée en fraction d'année comprise entre le 5 février 2014 et le 20 décembre 2014 ?

Cette durée se calcule généralement sous forme d'une fraction donnée par :

Durée = (Nombre de jours de la durée)/(Nombre total de jours dans une année)

Remarquons que seul un des deux jours extrêmes de la durée est ainsi porteur d'intérêt. Tant le numérateur que le dénominateur de cette fraction peuvent faire l'objet de diverses conventions de calcul (pouvant d'ailleurs être différentes au numérateur et au dénominateur). On distingue principalement les trois modalités suivantes :

- Exact : il s'agit du nombre de jours exacts du calendrier.
- 360 : chaque mois comprend 30 jours.
- 365 : chaque mois comprend 30 ou 31 jours selon les mois, et le mois de février comprend 28 jours.

On parlera par exemple de la convention « exact/365 » : dans ce cas, le numérateur (nombre de jours de la durée) est calculé exactement ; le dénominateur est égal d'office à 365 (que l'année soit bissextile ou non).

Exemple 1.6

Un capital de 10 000 € est placé à intérêt simple à un taux annuel de 6 % entre le 15 février 2012 et le 30 juin 2012. Quel est le capital obtenu au 30 juin 2012 (sachant que 2012 est une année bissextile) ?

- convention « exact/exact » : $t = (14 + 31 + 30 + 31 + 30)/366 = 136/366$:

  Capital obtenu : 10 000 € × (1 + 0,06 × 136/366) = 10 222,95 €
- convention « exact/365 » : $t = (14 + 31 + 30 + 31 + 30)/365 = 136/365$:

  Capital obtenu : 10 000 € × (1 + 0,06 × 136/365) = 10 223,56 €
- convention « 360/360 » : $t = (15 + 30 + 30 + 30 + 30)/360 = 135/360$:

  Capital obtenu : 10 000 € × (1 + 0,06 × 135/360) = 10 225 €

D'une manière générale, il existe des variantes aux méthodes vues ci-dessus et il convient d'être attentif à l'usage du marché considéré.

6. Taux équivalents et taux proportionnels

Nous avons défini le concept d'intérêt en liaison avec l'unité de temps retenue (que nous supposerons dans cette section être l'année sans perte de généralité). Dans ce cas, le taux d'intérêt (annuel) r est défini par la relation :

$$C(1)=C(0)(1+r) \tag{1.7}$$

On peut aussi s'intéresser à un taux d'intérêt sur une période différente de l'année ; par exemple, un taux mensuel. Il est naturel de définir un tel taux mensuel par la relation :

$$C(1/12)=C(0)(1+r_{12}) \tag{1.8}$$

Ce taux r_{12} est appelé un taux fractionné (ici, mensuel) ; la question se pose alors de la cohérence entre un taux annuel et un taux fractionné. Cette équivalence dépendra du mode de capitalisation envisagé.

6.1. Taux équivalents à intérêt simple

Considérons les deux situations suivantes :

- cas 1 : capital placé pendant 1 an, à intérêt simple, à un taux annuel r ;
- cas 2 : capital placé pendant 1 an, à intérêt simple, à un taux mensuel r_{12} ;

Dans ce second cas, et suivant la logique des intérêts simples, le capital obtenu après 1 an (c'est-à-dire 12 mois) est donné par la formule (1.4) (où le temps t est cette fois compté en mois) :

$$C(0)(1+12\,r_{12})$$

Pour être équivalent au cas 1, il faut donc avoir :

$$(1+12\,r_{12})=(1+r)$$

c'est-à-dire :

$$12\,r_{12}=r$$

D'une manière générale, le taux d'intérêt fractionné en m périodes (chacune de $1/m$ d'année), équivalant au taux annuel r à intérêt simple, est donné par la relation linéaire :

$$m\, r_m = r$$
$$r_m = \frac{r}{m} \tag{1.9}$$

On peut donc aussi parler, à intérêt simple, de taux proportionnels. Pour $m = 2$, on parle de taux semestriel ; pour $m = 4$, de taux trimestriel ; pour $m = 12$, de taux mensuel.

Exemple 1.7

On investit 1 500 € pendant 1 an à un taux d'intérêt annuel de 10 %. Quel est le taux trimestriel équivalent à intérêt simple ?

$$4\, r_4 = r = 0{,}10$$
$$r_4 = \frac{0{,}10}{4} = 0{,}025 \text{ } \textit{soit} \text{ } 2{,}5\%$$

6.2. Taux équivalents à intérêt composé

Appliquons la même logique lorsque les intérêts sont composés. Dans ce cas, la formule (1.5) donne en cas de capitalisation pendant 12 mois au taux r_{12} :

$$C(0)(1+r_{12})^{12}$$

L'équivalence entre taux annuel et taux mensuel s'écrit alors :

$$(1+r_{12})^{12} = 1+r$$

D'une manière générale, le taux d'intérêt fractionné en m périodes (chacune de $1/m$ d'année), équivalant au taux annuel r à intérêt composé, est donné par la relation :

$$(1+r_m)^m = 1+r$$
$$r_m = (1+r)^{1/m} - 1 \tag{1.10}$$

Exemple 1.8

On investit un capital pendant 1 an à un taux de 8 %. Quel est le taux trimestriel équivalent à intérêt composé ?

$$r_4 = (1{,}08)^{1/4} - 1 = 0{,}0194 \text{ } \textit{soit} \text{ } 1{,}94\%$$

6.3. Taux proportionnels à intérêt composé

Contrairement au cas de l'intérêt simple, le taux équivalent à intérêt composé n'est pas simplement un taux proportionnel à la durée. On peut néanmoins également calculer un taux proportionnel qui devient dans ce cas purement nominal. Il ne s'agit plus d'un taux obéissant à une relation d'équilibre mais simplement d'une définition.

Le taux d'intérêt fractionné en m périodes (chacune de $1/m$ d'année), proportionnel au taux annuel r à intérêt composé, est donné par la relation :

$$i_m = \frac{r}{m} \tag{1.11}$$

Le taux proportionnel est relié au taux équivalent par la relation d'équilibre :

$$\begin{aligned}(1+r_m)^m &= 1+m.i_m \\ i_m &= ((1+r_m)^m - 1)/m\end{aligned} \tag{1.12}$$

Pour $m > 1$, le taux équivalent est toujours inférieur au taux proportionnel.

Exemple 1.9

On investit un capital pendant 1 an à un taux de 8 %. Le taux trimestriel proportionnel s'élève alors simplement à 8 %/4 = 2 %.

Exemple 1.10

La banque vous accorde un prêt sur 1 an ; elle affiche un taux d'intérêt annuel de 6 %. Vous souhaitez payer par mois. Votre banque applique alors un calcul proportionnel et vous demande un taux mensuel de 6 %/12 = 0,5 %. À intérêt composé, elle devrait plutôt vous réclamer le taux mensuel équivalent. Celui-ci est donné par :

$$r_{12} = (1{,}06)^{1/12} - 1 = 0{,}00487 \textit{ soit } 0{,}487\,\%$$

Notons que le taux équivalent de 0,487 % est bien inférieur au taux proportionnel de 0,50 %.
En réalité, le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,5 % est donné par :

$$(1{,}005)^{12} - 1 = 0{,}0617 \textit{ soit } 6{,}17\,\%$$

7. Taux d'intérêt et taux d'inflation

Lorsque vous placez un capital $C(0)$ à un certain taux d'intérêt pendant 1 an, vous acceptez non pas de consommer directement mais de différer votre consommation. Néanmoins, après 1 an, lorsque vous touchez le capital $C(1)$ [qui a augmenté au taux r], votre pouvoir d'achat n'a pas crû de ce taux. En effet, la présence d'inflation durant cette année a pour effet qu'un même capital nominal n'a pas la même valeur en début et en fin d'année. Le concept de taux d'intérêt réel permet de prendre en compte ce phénomène d'érosion monétaire. En notant j le taux d'inflation sur 1 an, on peut calculer facilement la croissance du pouvoir d'achat. En effet, après 1 an, un placement initial unitaire génère un capital de $(1 + r)$, qui en valeurs réelles a crû d'un facteur :

$$\frac{1+r}{1+j} = 1+k$$

Le taux k est parfois appelé taux d'intérêt réel par opposition au taux d'intérêt, dit nominal, r. Ce taux est donné par :

$$k = \frac{r - j}{1 + j} \tag{1.13}$$

Il est généralement proche de l'écart entre le taux nominal et le taux d'inflation :

$$k \cong r - j$$

En effet, on a :

$$1 + r = (1 + k)(1 + j) = 1 + k + j + k.j \cong 1 + k + j$$

(le terme complémentaire $k.j$ est le produit de deux taux ; il est donc généralement faible).

Exemple 1.11

Si le taux d'inflation est de 2 % et si le taux d'intérêt offert par le livret d'épargne est de 5 %, le taux d'intérêt réel est :

$$k = \frac{0{,}05 - 0{,}02}{1 + 0{,}02} = 0{,}0294 \textit{ soit } 2{,}94\%$$

(à comparer à $r - j$ = 3 %).

8. Quelques problèmes classiques

Les relations de base (1.4) à intérêt simple et (1.5) à intérêt composé permettent de relier quatre grandeurs fondamentales :

- $C(0)$: capital initial
- $C(t)$: capital final
- t : temps (durée de placement)
- r : taux d'intérêt

On peut alors formuler divers problèmes où, connaissant trois de ces quatre variables, on recherche la quatrième.

8.1. Calculs à intérêt simple

Problème 1.1 – Recherche du capital final à intérêt simple

On connaît le capital initial, le temps et le taux d'intérêt ; dans ce cas, le capital final à intérêt simple découle directement de la relation (1.4) :

$$C(t) = C(0)(1 + r.t) \tag{1.14}$$

Exemple 1.12

Un capital de 1 000 € déposé sur un compte d'épargne pendant 2 ans à intérêt simple à un taux de 10 % devient :

$$C(2) = 1000\,€ \times (1 + 0{,}1 \times 2) = 1200\,€$$

Problème 1.2 – Recherche du taux d'intérêt à intérêt simple

On connaît le capital initial, le temps et le capital final ; dans ce cas, à partir de la relation (1.4), le taux d'intérêt simple est donné par :

$$C(t) = C(0) + C(0) \cdot r \cdot t$$
$$C(t) - C(0) = C(0) \cdot r \cdot t$$
$$r = \frac{C(t) - C(0)}{t.C(0)} \tag{1.15}$$

Exemple 1.13

Un capital initial de 800 € placé pendant 2 ans à intérêt simple génère un capital final de 1 000 € ; le taux d'intérêt correspondant est :

$$r = \frac{1000 - 800}{800 \times 2} = 12{,}5\%$$

Problème 1.3 – Recherche du temps à intérêt simple

On connaît le capital initial, le capital final à atteindre et le taux d'intérêt ; dans ce cas, à partir de la relation (1.4), la durée de placement nécessaire est donnée par :

$$C(t) = C(0) + C(0) \cdot r \cdot t$$
$$C(t) - C(0) = C(0) \cdot r \cdot t$$
$$t = \frac{C(t) - C(0)}{r.C(0)} \tag{1.16}$$

Exemple 1.14

Un capital initial de 800 € placé à intérêt simple à un taux de 10 % permet d'obtenir 1 000 €. La durée de ce placement est :

$$t = \frac{1000 - 800}{800 \times 0{,}1} = 2{,}5 \; ans$$

Problème 1.4 – Recherche du capital initial à intérêt simple

On connaît le capital final à atteindre, le taux d'intérêt et la durée ; dans ce cas, à partir de la relation (1.4), le montant initial à investir est donné par :

$$C(t) = C(0) \cdot (1 + r \cdot t)$$
$$C(0) = \frac{C(t)}{(1 + r.t)} \tag{1.17}$$

Exemple 1.15

On souhaite obtenir 1 000 € dans 2 ans à un taux d'intérêt simple de 10 %. Le capital à placer aujourd'hui est égal à :

$$C(0)=\frac{1000\,€}{(1+0{,}1\times 2)}=833{,}3\,€$$

8.2. Calculs à intérêt composé

Problème 1.5 – Recherche du capital final à intérêt composé

On connaît le capital initial, le temps et le taux d'intérêt ; dans ce cas, le capital final à intérêt composé découle directement de la relation (1.5) :

$$C(t)=C(0)(1+r)^t \tag{1.18}$$

Exemple 1.16

Un capital de 1 000 € déposé sur un compte d'épargne pendant 2 ans à intérêt composé à un taux de 10 % devient :

$$C(2)=1000\,€\times(1+0{,}1)^2=1210\,€$$

Problème 1.6 – Recherche du taux d'intérêt à intérêt composé

On connaît le capital initial, le temps et le capital final ; dans ce cas, le taux d'intérêt composé peut être facilement obtenu. En effet, la relation (1.18) peut s'écrire sous la forme :

$$(1+r)^t=\frac{C(t)}{C(0)}$$

En prenant la racine t-ième des deux membres, il vient :

$$r=\sqrt[t]{\frac{C(t)}{C(0)}}-1 \tag{1.19}$$

Exemple 1.17

Un capital initial de 800 €, placé pendant 2 ans à intérêt composé, génère un capital final de 1 000 € ; le taux d'intérêt correspondant est :

$$r=\sqrt{\frac{1000}{800}}-1=11{,}8\%$$

Problème 1.7 – Recherche du temps à intérêt composé

On connaît le capital initial, le capital final à atteindre et le taux d'intérêt ; dans ce cas, la durée de placement nécessaire peut être facilement obtenue. En effet, si on part de la relation (1.18) :

$$(1+r)^t = \frac{C(t)}{C(0)}$$

il suffit de prendre le logarithme des deux membres :

$$\ln(1+r)^t = \ln\frac{C(t)}{C(0)}$$

$$t \cdot \ln(1+r) = \ln\frac{C(t)}{C(0)}$$

$$t \cdot \ln(1+r) = \ln C(t) - \ln C(0)$$

$$t = \frac{\ln C(t) - \ln C(0)}{\ln(1+r)} \tag{1.20}$$

Exemple 1.18

Un capital initial de 800 € placé à intérêt composé à un taux de 10 % permet d'obtenir 1 000 €. La durée de ce placement est :

$$t = \frac{\ln(1000) - \ln(800)}{\ln(1{,}1)} = 2{,}34 \ \textit{ans}$$

Problème 1.8 – Recherche du capital initial à intérêt composé

On connaît le capital final à atteindre, le taux d'intérêt et la durée ; dans ce cas, le montant initial à investir est donné par :

$$C(0) = \frac{C(t)}{(1+r)^t} \tag{1.21}$$

Exemple 1.19

On souhaite obtenir 1 000 € dans 2 ans à un taux d'intérêt composé de 10 %. Le capital à placer aujourd'hui est égal à :

$$C(0) = \frac{1000\,€}{(1+0{,}1)^2} = 826{,}4\,€$$

Ce montant $C(0)$ est appelé valeur actuelle du montant de 1 000 € ; ce concept sera développé au chapitre 2 dans le contexte de l'actualisation.