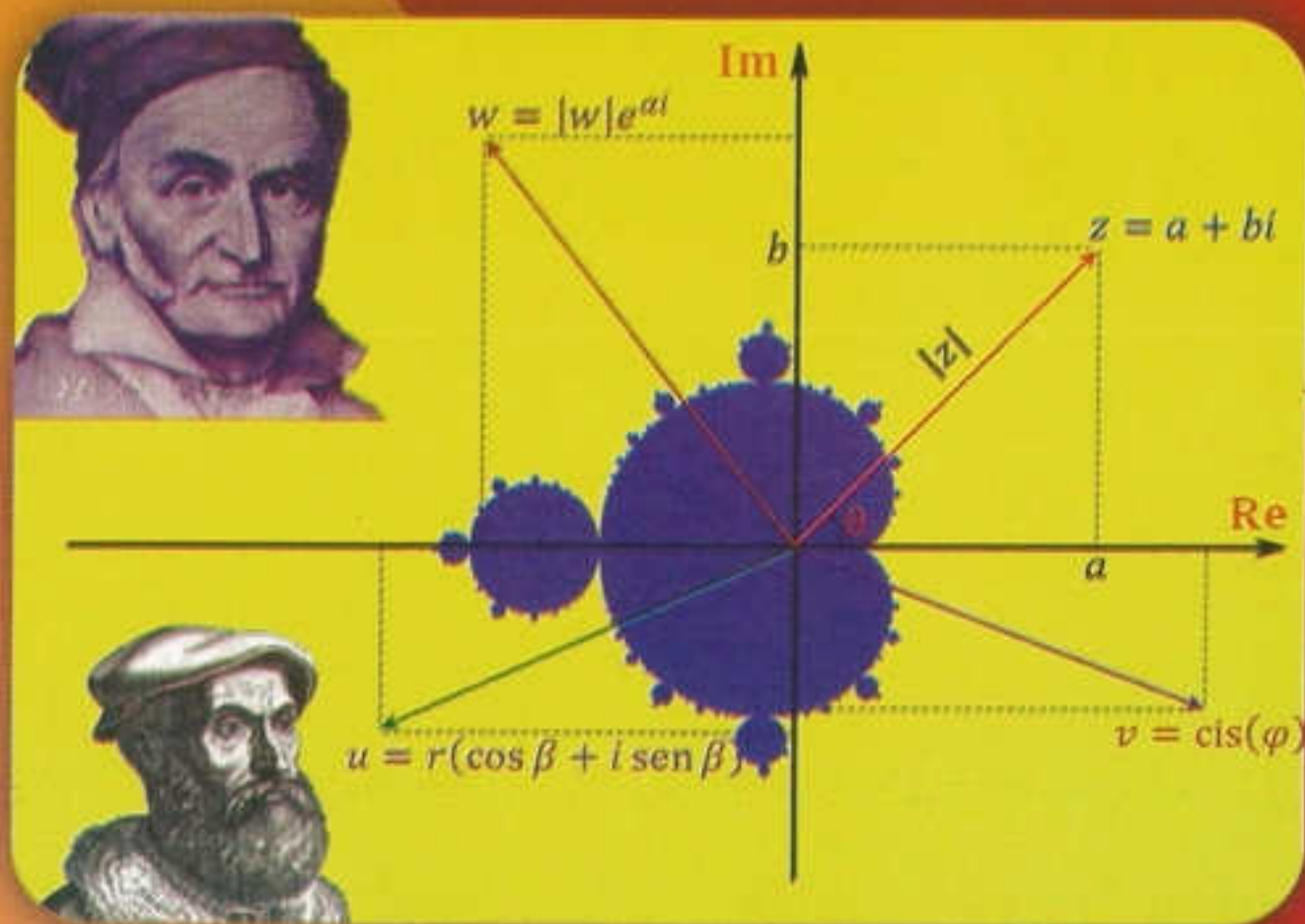


6

CALA
PENSHKO

ÁLGEBRA

NÚMEROS COMPLEJOS


 $\bar{x}-14\sqrt{\text{H}\mu\epsilon\vec{r}\tau\alpha\varsigma}$

Las Matemáticas son fáciles

twitter.com/calapenshko

Christiam Huertas

Nivel UNI



Números complejos

Históricamente los números complejos fueron introducidos para tratar ecuaciones polinomiales, tales como $x^2 + 1 = 0$, que no tiene solución real.

El camino hasta su descubrimiento no fue fácil, y su terminología se debe en parte a esto; se les ha denominado números "imposibles" e "imaginarios", y la palabra "complejo" da la impresión de que no son algo sencillo de entender.

Afortunadamente, esa no es la situación actual: podemos introducirlos de manera relativamente elemental.

Número complejo

Un número complejo z se define como el par ordenado de números reales $(x; y)$, es decir:

$$z = (x; y) \text{ es un número complejo} \leftrightarrow x, y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.

Son números complejos:

$$z = (2; 5) \quad u = \left(0; \frac{1}{3}\right)$$

$$w = (-1; \sqrt{2}) \quad v = (-4; 0)$$

OBS.

Al conjunto de todos los números complejos se le denota como: $\mathbb{C}$, es decir:

$$\mathbb{C} = \{z = (x; y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

Forma binómica de un número complejo

Todo número complejo $z = (x; y)$ es posible expresarlo como $z = x + yi$, donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Es decir,

$$z = (x; y) \equiv x + yi$$

Ejemplo 2.

$$z = (2; 5) = 2 + 5i$$

$$w = (-1; \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2}i$$

$$u = \left(0; \frac{1}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}i$$

$$v = (-4; 0) = -4 + 0i = -4$$

Definiciones

Para todo número complejo $z = x + yi$, se define:

x : parte real de z . Se denota,

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

y : parte imaginaria de z . Se denota,

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

Ejemplo 3.

- Dado el complejo $z = 2 - 7i$, entonces
 $\operatorname{Re}(z) = 2$
 $\operatorname{Im}(z) = -7$
- Dado el complejo $w = \sqrt{3} + i$, entonces
 $\operatorname{Re}(w) = \sqrt{3}$
 $\operatorname{Im}(w) = 1$

Igualdad de números complejos

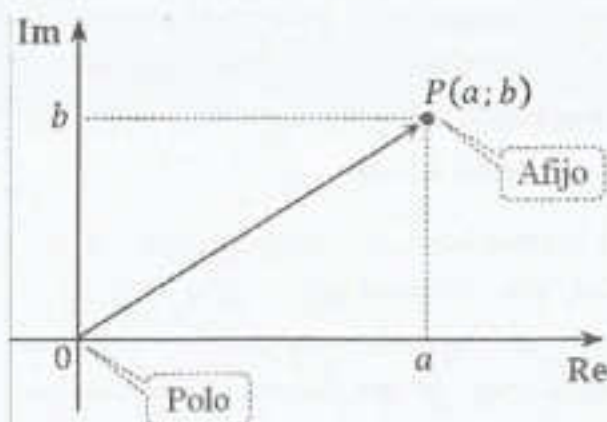
Dos números complejos son iguales, si y solo si sus partes reales y sus partes imaginarias son iguales respectivamente. Es decir, si

$$z = a + bi \text{ y } w = m + ni$$

entonces:

$$z = w \leftrightarrow a = m \wedge b = n$$

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ con $a > 0$ y $b > 0$.



Donde $\overrightarrow{OP}$ es el radio vector del complejo z .

Ejemplo 4.

Dados los números complejos

$$z = x - 1 + 9i \text{ y } w = 6 + y^2i$$

Halle el menor valor de $x + y$ si $z = w$.

Resolución.

Por dato:

$$z = w$$

$$x - 1 + 9i = 6 + y^2i$$

Por definición de igualdad de complejos:

$$x - 1 = 6 \text{ y } 9 = y^2$$

De donde:

$$x = 7 \text{ y } (y = 3 \text{ o } y = -3)$$

Por lo tanto, el menor valor de $x + y = 4$.

Ejemplo 5.

Represente geoméricamente a los números complejos: $z = 3 + 2i$ y $w = -4 - 3i$.

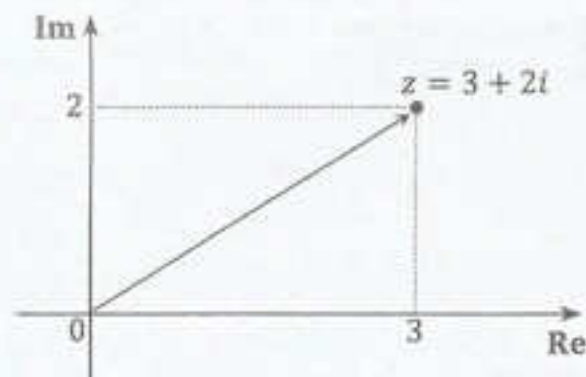
Resolución.

Para $z = 3 + 2i$:

Ubicamos:

3 en el eje real y

2 en el eje imaginario



Para $w = -4 - 3i$:

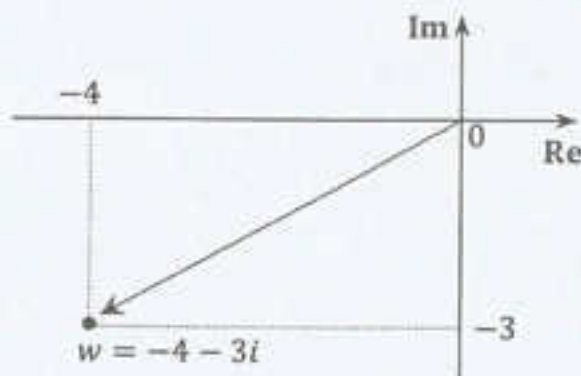
Ubicamos:

-4 en el eje real y

-3 en el eje imaginario

Representación geométrica de un número complejo (diagrama de Argand)

La representación geométrica se realiza en un plano, al cual lo llamaremos **Plano Complejo** o **Plano de Gauss**. Donde al eje X lo denominaremos eje real y al eje Y como el eje imaginario.



Unidad imaginaria

La **unidad imaginaria** es el número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra i . Es decir,

$$\sqrt{-1} = i$$

Potencias de la unidad imaginaria

Estudiaremos las potencias enteras del número i , teniendo en cuenta las siguientes definiciones:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

Luego,

$$\begin{array}{lll} i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i \\ i^4 = 1 & i^8 = 1 & i^{12} = 1 \dots \end{array}$$

OBS.

Se observa que las potencias enteras de i se repiten cada cuatro veces, y se obtiene solo uno de los cuatro valores:

$$i; -1; -i; 1$$

Propiedades

$$1. i^4 = 1$$

$$i^8 = 1$$

$$i^{12} = 1$$

$$\vdots$$

En general:

$$i^{4k} = 1; \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$2. i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = 0$$

$$i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = 0$$

$$i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{12} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

En general:

$$i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{4k} = 0; \forall k \in \mathbb{Z}$$

3. La suma de cuatro potencias consecutivas es cero. Es decir,

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 6.

- $i^{32} = 1$, pues 32 es múltiplo de 4.
- $i^{2016} = 1$, pues 2016 es múltiplo de 4.
- $i^{127} = i^{124} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

Ejemplo 7.

Calcule el valor de S .

$$S = i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017}$$

Resolución.

Nos piden calcular

$$S = \underbrace{i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{2006}}_{\textcircled{0}} + i^{2007}$$

$$S = 0 + i^{2007}$$

$$S = \frac{i^{2006}}{i} \quad (\text{pues } 2002 \text{ es múltiplo de } 4)$$

$$S = 1 \cdot i$$

Por lo tanto, $S = i$.

Ejemplo 8.

Dado el complejo

$$z = i^{21} + i^{22} + i^{23} + \dots + i^{201}$$

calcule $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$.

Resolución.

Nos piden calcular

$$z = i^{21} + i^{22} + i^{23} + i^{24} + i^{25} + \dots + i^{201}$$

Recuerde:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 4 \quad (\text{es múltiplo de } 4)$$

$$\vdots$$

$$10! = 4 \quad (\text{es múltiplo de } 4)$$

Es decir, $n! = 4$ (múltiplo de 4) a partir de $n \geq 4$.

Luego,

$$z = i^1 + i^2 + i^3 + \underbrace{i^4 + i^5 + \dots + i^8}_{\substack{1+1+\dots+1 \\ 7 \text{ sumandos}}}$$

$$z = i - 1 - 1 + 7$$

$$z = 5 + i$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 5 + 1 = 6$$

Ejemplo 9.

$$\blacksquare i^{34} + i^{35} + i^{36} + i^{37} = 0$$

$$\blacksquare i^{-19} + i^{-20} + i^{-21} + i^{-22} = 0$$

$$\blacksquare \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = 0$$

Tipos de números complejos

1 Complejo real

Es aquel complejo que carece de parte imaginaria; es decir, su parte imaginaria es cero.

$$z = a + 0i \equiv a; \forall a \in \mathbb{R}$$

2 Complejo imaginario puro

Es aquel complejo que carece de parte real; es decir, su parte real es cero.

$$z = 0 + bi; \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3 Complejo nulo

Es aquel complejo donde su parte real e imaginaria son ceros.

$$z = 0 + 0i \equiv 0$$

Ejemplo 10.

$$z = 3$$

$$w = \sqrt{2}$$

} son complejos reales

$$\left. \begin{aligned} u &= 5i \\ v &= \frac{2}{7}i \end{aligned} \right\} \text{son complejos imaginarios puros}$$

Ejemplo 11.

Si el complejo $z = (x + i)^2$ es imaginario puro, halle el menor valor real de x .

Resolución.

Se tiene el complejo

$$z = (x + i)^2$$

$$z = x^2 + 2xi + i^2$$

$$z = (x^2 - 1) + 2xi$$

Como z es imaginario puro, entonces

$$\operatorname{Re}(z) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ o } x = -1$$

Por lo tanto, el menor valor de x es -1 .

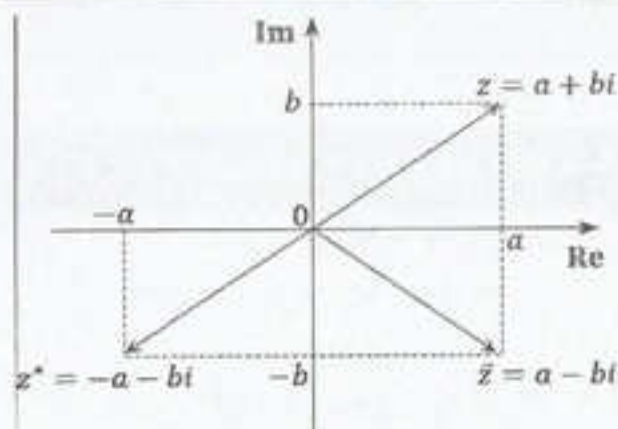
Ejemplo 12.

$$\text{Si } z = 3 - 2i, \text{ entonces } \begin{cases} \bar{z} = 3 + 2i \\ z^* = -3 + 2i \end{cases}$$

$$\text{Si } w = -5 + \sqrt{3}i, \text{ entonces}$$

$$\begin{cases} \bar{w} = -5 - \sqrt{3}i \\ w^* = 5 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

Representación geométrica de: z , $\bar{z}$ y z^*



Relaciones entre números complejos

Dado el complejo $z = a + bi$, se definen:

1 Conjugado de z :

$$\bar{z} = a - bi$$

2 Opuesto de z :

$$z^* = -a - bi$$

Propiedades

- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}; w \neq 0$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n; n \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\bar{z}}$

Operaciones con números complejos

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, definimos:

1 Adición

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

2 Sustracción

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

3 Multiplicación

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Es decir,

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

4 División

Para dividir dos números complejos en forma práctica, multiplicamos al dividendo y al divisor por el conjugado del divisor:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} \\ &= \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Es decir,

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

De donde:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \wedge \operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Ejemplo 13.

Dados los números complejos

$$z = 2 + 5i \text{ y } w = 4 + 2i$$

halle $z + w$, $z - w$, zw y z/w .

Resolución.

$$\blacksquare z + w = 2 + 5i + 4 + 2i = 6 + 7i$$

$$\begin{aligned} \blacksquare z - w &= 2 + 5i - (4 + 2i) \\ &= -2 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare zw &= (2 + 5i)(4 + 2i) \\ &= 8 + 4i + 20i + \underbrace{10i^2}_{-10} \\ &= -2 + 24i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{z}{w} &= \frac{2 + 5i}{4 + 2i} \cdot \frac{4 - 2i}{4 - 2i} \\ &= \frac{8 - 4i + 20i - \underbrace{10i^2}_{-10}}{4^2 - (2i)^2} \\ &= \frac{18 + 16i}{16 + 4} \\ &= \frac{18 + 16i}{20} \\ &= \frac{9}{10} + \frac{4}{5}i \end{aligned}$$

PNHO

Consecuencia

Dado el número complejo:

$$z = \frac{a + bi}{c + di}$$

Se cumplen:

1. z es un complejo real si:

$$bc = ad$$

2. z es un complejo imaginario puro si:

$$ac + bd = 0$$

Ejemplo 14.

Halle el valor de n si se sabe que el siguiente complejo es real.

$$z = \frac{3 - 2ni}{4 - 3i}$$

Resolución:

Por dato, el complejo

$$z = \frac{3 - 2ni}{4 - 3i} \text{ es real}$$

Aplicando la consecuencia 1, se debe cumplir:

$$bc = ad$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} (-2n)(4) &= (3)(-3) \\ -8n &= -9 \\ n &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Módulo de un número complejo

Dado el complejo $z = a + bi$, su **módulo** o **valor absoluto** se denota y define como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vemos que el módulo de z , es un número real no negativo; es decir, $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 15.

- Si $z = 3 - 4i$:

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

- Si $w = 1 + i$:

$$|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

- Si $v = -2 + 3i$:

$$|v| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Propiedades

$$1. |z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$2. |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$3. |z| = |\bar{z}| = |z^*|$$

$$4. |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$5. |zw| = |z||w|$$

$$6. \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}; w \neq 0$$

$$7. |z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}$$

$$8. \sqrt[n]{|z|} = |z|^{1/n}$$

$$9. \operatorname{Re}(z) \leq |z| \text{ y } \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

10. $|z + w| \leq |z| + |w|$ Desigualdad triangular

11. $|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z = kw$

12. $||z| - |w|| \leq |z - w| \quad k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 16.

Sea z un número complejo tal que

$$|z| + z = 3 - \sqrt{3}i$$

Halle el valor de $\sqrt{|z|}$.

Resolución

Por dato:

$$|z| + z = 3 - \sqrt{3}i$$

Como $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = a + bi$:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 3 - \sqrt{3}i$$

Por igualdad de complejos se cumple que:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a = 3 \quad \text{y} \quad b = -\sqrt{3}$$

$$\sqrt{a^2 + (-\sqrt{3})^2} + a = 3 \quad \text{y} \quad b = -\sqrt{3}$$

$$\sqrt{a^2 + 3} = 3 - a$$

Elevamos al cuadrado:

$$\sqrt{a^2 + 3}^2 = (3 - a)^2$$

$$a^2 + 3 = 9 - 6a + a^2$$

$$a = 1$$

Luego,

$$z = a + bi = 1 - \sqrt{3}i$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{|z|} = \sqrt{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 17.

Dado el complejo:

$$z = \frac{(2 + 3i)^4 \cdot \sqrt[5]{1 - i}}{(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}i)^2 \cdot \sqrt[5]{1 + i}}$$

Halle su módulo.

Resolución:

Nos piden hallar $|z|$. Es decir,

$$|z| = \left| \frac{(2 + 3i)^4 \cdot \sqrt[5]{1 - i}}{(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}i)^2 \cdot \sqrt[5]{1 + i}} \right|$$

Aplicamos la propiedad 6:

$$|z| = \frac{|(2 + 3i)^4 \cdot \sqrt[5]{1 - i}|}{|(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}i)^2 \cdot \sqrt[5]{1 + i}|}$$

Aplicamos la propiedad 5:

$$|z| = \frac{|(2 + 3i)^4| \cdot |\sqrt[5]{1 - i}|}{|(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}i)^2| \cdot |\sqrt[5]{1 + i}|}$$

Aplicamos la propiedad 7 y 8:

$$|z| = \frac{|2 + 3i|^4 \cdot \sqrt[5]{|1 - i|}}{|\sqrt{5} + 2\sqrt{2}i|^2 \cdot \sqrt[5]{|1 + i|}}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2}^4 \cdot \sqrt[5]{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}}{\sqrt{\sqrt{5^2 + (2\sqrt{2})^2}}^2 \cdot \sqrt[5]{\sqrt{1^2 + 1^2}}}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{13}^4 \cdot \sqrt[5]{\sqrt{2}}}{\sqrt{13}^2 \cdot \sqrt[5]{\sqrt{2}}}$$

Simplificamos:

$$|z| = \sqrt{13}^2$$

$$|z| = 13$$



Resultados notables

A continuación mostramos algunos resultados que se deben tener presentes, ya que se utilizan a menudo:

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1-i)^2 = -2i$$

$$(1+i)^3 = -2+2i$$

$$(1-i)^3 = -2-2i$$

$$(1+i)^4 = -4$$

$$(1-i)^4 = -4$$

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = -i$$

También:

$$\frac{1}{i} = -i = i^{-1}$$

Ejemplo 18.

Reduzca la expresión $\sqrt{i(1-i)}\sqrt{2i}$

Resolución.

Tenga en cuenta:

$$2i = (1+i)^2$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sqrt{i(1-i)}\sqrt{2i} &= \sqrt{i(1-i)}\sqrt{(1+i)^2} \\ &= \sqrt{i(1-i)(1+i)} \\ &\quad \text{diferencia de cuadrados} \\ &= \sqrt{i(1^2 - i^2)} \\ &= \sqrt{2i} \\ &= \sqrt{(1+i)^2} \\ &= 1+i.\end{aligned}$$

Ejemplo 19.

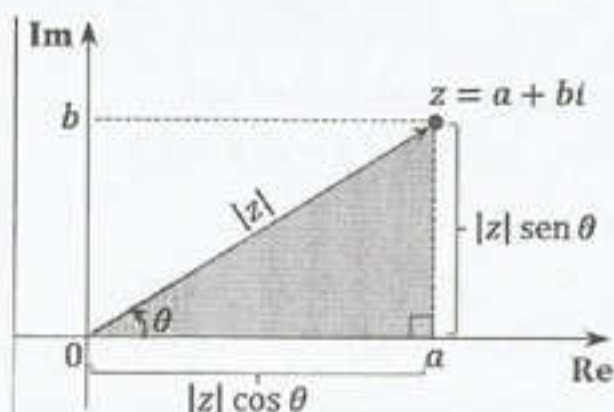
$$\text{Simplifique } J = \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 + \frac{1-i}{1+i}}}$$

Resolución. Se tiene la expresión:

$$\begin{aligned}J &= \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 + \frac{1-i}{1+i}}} = \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1+(-i)}} \\ &= \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1-i}} \\ &= \frac{1+i}{1-i} = i\end{aligned}$$

Forma polar o trigonométrica de un número complejo

Consideremos el plano de Gauss y ubiquemos al complejo $z = a + bi$ con $a > 0$ y $b > 0$.



Del gráfico se obtiene:

$$a = |z| \cos \theta$$

$$b = |z| \sin \theta$$

PNH

Lo reemplazamos en

$$z = a + bi$$

$$z = |z| \cos \theta + |z| \operatorname{sen} \theta \cdot i$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Por lo tanto,

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Es la forma polar o trigonométrica del complejo z , donde al ángulo θ se le denomina **argumento** de z y se denota por

$$\theta = \arg(z)$$

Notamos que de la definición se deduce que el complejo z tiene infinitos argumentos.

Argumento principal

El argumento θ medido en sentido antiorario y menor que una vuelta se denomina **argumento principal** de z . Se denota:

$$\theta = \operatorname{Arg}(z) \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Cualquier argumento de z será:

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Es decir,

$$\arg(z) = \underbrace{\operatorname{Arg}(z)}_{\text{argumento principal}} + 2k\pi$$

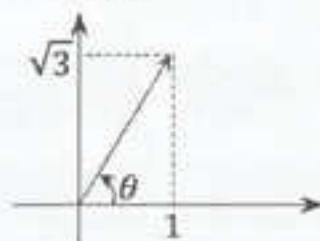
Ejemplo 20.

Represente en la forma polar los siguientes números complejos.

$$z = 1 + \sqrt{3}i \text{ y } w = -1 + i$$

Resolución.

Para $z = 1 + \sqrt{3}i$:



$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$|z| = 2$$

Luego,

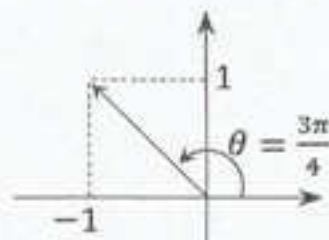
$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$$

es la forma polar de z .

En general, z puede ser expresado como:

$$z = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right]$$

Para $w = -1 + i$:



$$\operatorname{Arg}(w) = \frac{3\pi}{4}$$

$$|w| = \sqrt{2}$$

Luego,

$$w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right)$$

es la forma polar de w .

OBS.

Podemos también usar la siguiente notación:

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = \operatorname{cis}(\theta)$$

Luego,

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r \operatorname{cis}(\theta)$$

Ejemplo 21.

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right)$$

Teoremas

Dados los complejos:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

$$w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

Entonces,

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$$

Consecuencias

Dados los complejos:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

$$w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

Entonces,

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

Ejemplo 22.

Dados los complejos

$$z = 6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$$

$$w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$$

Halle zw y z/w .

Resolución.

Aplicamos el teorema anterior:

$$\begin{aligned} zw &= 6 \cdot 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= 12 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 12(0 + i) \\ &= 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{6}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

Teorema**Teorema de De Moivre**

Si $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

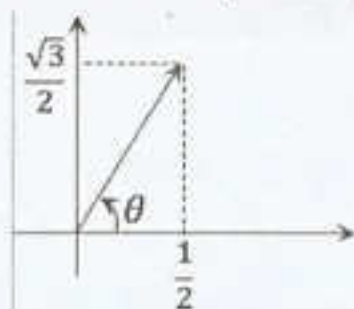
Ejemplo 23.

Dado el complejo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 halle z^{45} .

Resolución.

Se tiene el complejo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Lo representamos en el plano de Gauss:



$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$|z| = 1$$

Luego,

$$z = 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Aplicamos el teorema de De Moivre:

$$z^{45} = \cos \frac{45\pi}{3} + i \sin \frac{45\pi}{3}$$

$$= \cos 15\pi + i \sin 15\pi$$

$$= \cos \pi + i \sin \pi$$

$$= -1 + i \cdot 0$$

$$= -1$$

Por lo tanto, $z^{45} = -1$

Resolución:

Nos piden:

$$J = z^7 + z^{-7}$$

Por dato:

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Elevamos a la 7:

$$z^7 = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^7$$

Aplicamos el teorema de De Moivre:

$$z^7 = \cos 7\alpha + i \sin 7\alpha \quad \dots (*)$$

De igual manera:

$$z^{-7} = \cos(-7\alpha) + i \sin(-7\alpha)$$

$$z^{-7} = \cos 7\alpha - i \sin 7\alpha \quad \dots (**)$$

Sumamos (*) con (**):

$$z^7 + z^{-7} = 2 \cos 7\alpha$$

Por lo tanto, $J = 2 \cos 7\alpha$.

Exponencial compleja (Fórmula de Euler)

Se define la exponencial compleja $e^{i\theta}$ como:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

donde:

e es la base del logaritmo neperiano.

θ es el argumento medido en radianes.

i es la unidad imaginaria.

Ejemplo 24.

Dado el complejo $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$
 halle el valor de $J = z^7 + \frac{1}{z^7}$

Ejemplo 25.

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 0 + i \cdot 1 = i \end{aligned}$$

$$\blacksquare e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\blacksquare e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$e^{\pi i} = -1$$

De aquí se obtiene la famosa **identidad de Euler**:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Notable por relacionar cinco números muy utilizados en la historia de las matemáticas.

$$\blacksquare e^{2k\pi i} = \frac{\cos 2k\pi}{1} + i \frac{\sin 2k\pi}{0}; k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{2k\pi i} = 1; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Forma exponencial de un número complejo

Para todo número complejo $z = a + bi$, su forma polar esta dada por:

$$z = |z| \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)}{e^{\theta i}}$$

Luego,

$$z = |z| e^{\theta i}$$

es la forma exponencial del complejo z .

Ejemplo 26.

Expresa el complejo $z = 1 + i$ en su forma exponencial.

Resolución.

Para $z = 1 + i$ se tiene:

$$|z| = \sqrt{2} \text{ y } \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$$

Luego,

$$z = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$$

esta escrito en su forma exponencial.

Propiedades

$$1. e^{-\theta i} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$2. (e^{\theta i})^n = e^{n\theta i}; n \in \mathbb{Z}$$

$$3. \cos \theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}$$

Si reemplazamos θ por el complejo z , se tiene:

$$\cos z = \frac{e^{z i} + e^{-z i}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{z i} - e^{-z i}}{2i}$$

4. Para los complejos

$z = |z|e^{\alpha i}$ y $w = |w|e^{\beta i}$ se cumplen:

$$zw = |z||w|e^{(\alpha+\beta)i}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{(\alpha-\beta)i}$$

Ejemplo 27.

Expresa en forma exponencial

$$z = (1 + i) \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Resolución.

Expresamos cada factor en su forma exponencial:

Para $1 + i$:

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \end{aligned}$$

Para $\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} &= \\ &= 1 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= 1 \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} z &= (1 + i) \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i - \frac{\pi}{3}i} \\ &= \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{12}i} \end{aligned}$$

está escrito en su forma exponencial.

Definición

Dado el número complejo $z = x + yi$. El número e^z se define como:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Pues,

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+yi} \\ &= e^x \cdot e^{yi} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

Ejemplo 28.

$$\begin{aligned} \blacksquare e^{-3+2i} &= e^{-3} (\cos 2 + i \sin 2) \\ \blacksquare e^{\pi+\sqrt{2}i} &= e^{\pi} (\cos \sqrt{2} + i \sin \sqrt{2}) \\ \blacksquare e^{e^{3i}} &= e^{\cos 3 + i \sin 3} \\ &= e^{\cos 3} (\cos(\sin 3) + i \sin(\sin 3)) \end{aligned}$$

Propiedades

1. $e^z \neq 0$; $\forall z \in \mathbb{C}$
2. $|e^z| = e^x$ (módulo de e^z)
3. $\arg(e^z) = y$ (argumento de e^z)

Radicación de números complejos

Una raíz enésima del número complejo

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= |z| e^{i\theta} \end{aligned}$$

es el número complejo w tal que $w^n = z$.

Es decir,

$$\sqrt[n]{z} = w \iff w^n = z$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

Teorema

Dado el número complejo

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

entonces,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

w_k

donde $k = 0; 1; 2; \dots; (n-1)$.

Es decir, se obtienen n raíces:

$$w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$$

Ejemplo 29.

Dado el complejo $z = -1 + \sqrt{3}i$, halle $\sqrt{z}$

Resolución.

Para $z = -1 + \sqrt{3}i$ se tiene:

$$|z| = 2 \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}$$

Luego,

$$w_k = \sqrt{z}$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2} \right)$$

para $k = 0; 1$.

$$\begin{aligned} k = 0: w_0 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 1: w_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{aligned}$$

Regla práctica para hallar la raíz cuadrada de un número complejo

Dado el complejo $z = a + bi$, entonces

$$\sqrt{z} = \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + (*) \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}i \right)$$

donde $(*)$ es el signo de b .

Ejemplo 30.

Halle las raíces cuadradas del complejo

$$z = -7 + 24i$$

Resolución.

Se tiene el complejo:

$$z = -7 + 24i$$

donde:

$$\operatorname{Re}(z) = -7 = a$$

$$\operatorname{Im}(z) = 24 = b$$

$$|z| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = 25$$

Utilizando la regla práctica, se sabe que:

$$\sqrt{z} = \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + (*) \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}i \right)$$

$$\sqrt{z} = \pm \left(\sqrt{\frac{25 - 7}{2}} + (+) \sqrt{\frac{25 - (-7)}{2}}i \right)$$

$$\sqrt{z} = \pm (\sqrt{9} + \sqrt{16}i)$$

$$\sqrt{z} = \pm (3 + 4i)$$

Es decir,

$$\sqrt{z} = \begin{cases} z_1 = 3 + 4i \\ z_2 = -3 - 4i \end{cases}$$

PNHKO

Ejemplo 31.

Dado el complejo $z = 4\sqrt{3} - 4i$, halle $\sqrt[n]{z}$.

Resolución.

Para $z = 4\sqrt{3} - 4i$ se tiene:

$$|z| = 8 \text{ y } \text{Arg}(z) = \frac{11\pi}{6}$$

Luego,

$$w_k = \sqrt[n]{z}$$

$$= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{11\pi + 12k\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi + 12k\pi}{18} \right)$$

para $k = 0; 1; 2$.

Si $k = 0$:

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18} \right)$$

Si $k = 1$:

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

Si $k = 2$:

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{35\pi}{18} + i \sin \frac{35\pi}{18} \right)$$

Raíz enésima de la unidad

Sea el complejo

$$z = 1$$

se puede expresar como:

$$z = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

entonces,

$$w_k = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

donde $k = 0; 1; 2; \dots; (n-1)$.

Ejemplo 32.

Halle las raíces cúbicas de la unidad.

Resolución.

Nos piden hallar $\sqrt[3]{1}$.

De la propiedad anterior, se sabe que

$$w_k = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$$

donde: $k = 0; 1; 2$.

$$k = 0: w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Luego,

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

OBS.

Llamemos a

$$w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w$$

entonces,

$$w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w_2$$

Luego, las raíces cúbicas de la unidad son:

$$1; w; w^2$$

Se cumple que

$$1 + w + w^2 = 0 \text{ y } w^3 = 1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt[3]{-(w+1)(-w)-7}}{(w^2+w+1)+1} \\ &= \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{w^2+w-7}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{-8}}{1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 33.

Si w es la raíz cúbica no real de la unidad, calcule el valor de la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt[3]{(w^8 + w^7)(w^{10} + w^9)(w^{12} + w^{11})} - 7}{w^{14} + w^{13} + 2}$$

Resolución.

Como w es la raíz cúbica no real de la unidad, se cumplen:

$$1 + w + w^2 = 0 \text{ y } w^3 = 1$$

Entonces:

$$w^7 = (w^3)^2 w = (1)^2 w = w$$

$$w^8 = (w^3)^2 w^2 = (1)^2 w^2 = w^2$$

$$w^9 = (w^3)^3 = (1)^3 = 1$$

$$w^{10} = (w^3)^3 w = (1)^3 w = w$$

$$w^{11} = (w^3)^3 w^2 = (1)^3 w^2 = w^2$$

$$w^{12} = (w^3)^4 = (1)^4 = 1$$

$$w^{13} = (w^3)^4 w = (1)^4 w = w$$

$$w^{14} = (w^3)^4 w^2 = (1)^4 w^2 = w^2$$

Reemplazando:

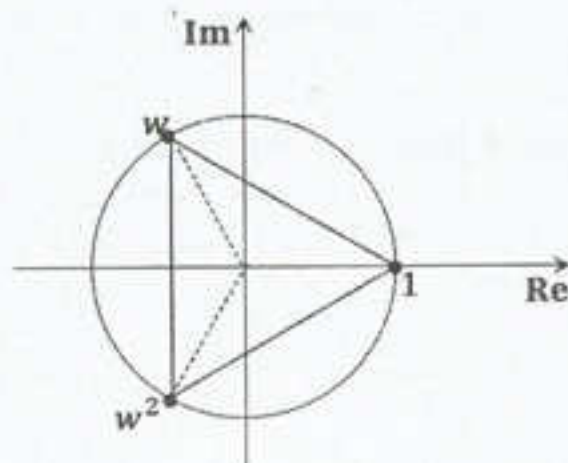
$$\frac{\sqrt[3]{\frac{-1}{(w^2+w)} \frac{-w}{(w+1)} \frac{-w}{(1+w^2)}} - 7}{w^2 + w + 2}$$

Interpretación geométrica de las raíces cúbicas de la unidad

Las tres raíces cúbicas de la unidad:

$$1, w \text{ y } w^2$$

tienen el mismo módulo, y por tanto sus afijos están sobre la circunferencia unitaria.



En general:

$$\text{Si } z \in \mathbb{C}, \text{ entonces } \sqrt[n]{z} = \begin{cases} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{cases}$$

Es decir, el índice nos indica la cantidad de raíces que se obtiene.

Además,

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = 0$$

Es decir, la suma de todas las raíces siempre es cero.

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n| = |\sqrt[n]{z}|$$

Es decir, todas las raíces tienen el mismo módulo.

Problemas resueltos

Problema 1.

Calcule el valor de la expresión J .

$$J = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{30}$$

A) 0

B) 1

C) -1

D) i

E) $-i$

Resolución

Nos piden hallar

$$J = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{30}$$

Por propiedad de multiplicación de bases iguales (los exponentes se suman)

$$J = i^{1+2+3+\dots+30}$$

$$= i^{\frac{30(31)}{2}}$$

$$= i^{465}$$

$$= i^{464+1}$$

$$= i^{464} \cdot i^1$$

$$= i^4 \cdot 1$$

$$= 1 \cdot i$$

$$= i$$

Por lo tanto, el valor de J es i .

Problema 2.

Dado el polinomio

$$P(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2013}$$

calcule el valor de $P(i)$ donde $i = \sqrt{-1}$.

A) i

B) $-i$

C) 0

D) 1

E) -1

Ejemplo 34.

Si $z_1, z_2, \dots, z_{12}$ son las raíces de $\sqrt[12]{i}$, calcule $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_{12}|$.

Resolución. Se sabe que:

$$|z_1| = |z_2| = \dots = |z_{12}|$$

$$= |\sqrt[n]{z}|$$

$$= |\sqrt[12]{i}|$$

$$= \sqrt[12]{|i|}$$

$$= 1$$

$$\therefore |z_1| + |z_2| + \dots + |z_{12}| = 12$$

Resolución

Evaluamos el polinomio

$$P(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2013}$$

para $x = i$:

$$P(i) = \underbrace{i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012}}_0 + i^{2013}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(i) &= i^{2013} \\ &= i^{2012+1} \\ &= i^{2012} \cdot i \\ &= i^4 \cdot i \\ &= 1 \cdot i = i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(i) = i$

Problema 3.

Sean x e y dos números reales de modo que $(1+i)x + (5i-2)y = -4 + 17i$

Calcule el valor de y^x .

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 9 E) 16

Resolución

Por dato

$$(1+i)x + (5i-2)y = -4 + 17i$$

Operando se obtiene:

$$x + xi + 5yi - 2y = -4 + 17i$$

Agrupamos la parte real y la parte imaginaria respectivamente:

$$(x - 2y) + (x + 5y)i = -4 + 17i$$

Por igualdad de complejos se cumple que

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + 5y = 17 \end{cases}$$

$$\text{Restamos:} \quad 7y = 21$$

$$y = 3$$

$$\text{De donde} \quad x = 2$$

$$\text{Por lo tanto, } y^x = 3^2 = 9$$

Problema 4.

Calcule el valor de b si se sabe que el siguiente complejo es imaginario puro.

$$z = \frac{5 + (b+2)i}{(b-1) - 3i}$$

- A) 2/3 B) 11/2 C) 11/3
D) 10/3 E) 7/3

Resolución

Como el complejo z es imaginario puro, entonces su parte real debe ser cero.

Recuerde:

$$\text{Si } z = \frac{a+bi}{c+di} \rightarrow \text{Re}(z) = \frac{ac-bd}{c^2+d^2}$$

Por dato:

$$z = \frac{5 + (b+2)i}{(b-1) - 3i}$$

entonces

$$\text{Re}(z) = \frac{5(b-1) - (b+2)(-3)}{(b-1)^2 + 9} = 0$$

$$5b - 5 - 3b - 6 = 0$$

$$2b - 11 = 0$$

$$b = \frac{11}{2}$$

Por lo tanto el valor de b es 11/2.

Problema 5.

Calcule el valor de la siguiente expresión.

$$E = \sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}$$

- A) $\sqrt{41}$ B) i C) $\sqrt{3}$
 D) 4 E) $-i$

Resolución

Nos piden calcular

$$E = \sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}$$

Elevamos al cuadrado:

$$E^2 = (\sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i})^2$$

$$E^2 = \sqrt{3+4i}^2 + 2\sqrt{3+4i}\sqrt{3-4i} + \sqrt{3-4i}^2$$

$$E^2 = 3 + 4i + 2\sqrt{(3+4i)(3-4i)} + 3 - 4i$$

$$E^2 = 6 + 2\sqrt{3^2 - (4i)^2}$$

$$E^2 = 6 + 2\sqrt{9 + 16}$$

$$E^2 = 6 + 2\sqrt{25}$$

$$E^2 = 16$$

Por lo tanto, $E = 4$.**Problema 6.**Halle el equivalente del complejo z .

$$z = i + i^3 + i^5 + \dots + i^{101}$$

- A) 0 B) -1 C) i
 D) $-i$ E) 1

Resolución

Recuerde:

$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = \dots = -i$$

$$i^1 = i^5 = i^9 = i^{13} = \dots = i$$

Nos piden hallar

$$z = \frac{i + i^3}{i - i} + \frac{i^5 + i^7}{i - i} + \frac{i^9 + i^{11}}{i - i} + \dots + i^{101}$$

Vemos que la suma de dos términos consecutivos siempre es cero.

Como:

$$101 = 2(51) - 1$$

Entonces en z hay en total 51 sumandos.

Luego:

$$z = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + i^{101}$$

$$z = i^{101}$$

$$z = i^{100} \cdot i$$

$$z = 1 \cdot i$$

$$z = i$$

Por lo tanto, $z = i$.**Problema 7.**

Dados los complejos

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 12 + 2i$$

$$z_3 = -5 - i, \quad z_4 = 2 - \frac{i}{2}$$

Halle el valor de

$$\left| \frac{z_1 - \bar{z}_3}{z_2} + z_4 \right|$$

- A) $\frac{\sqrt{26}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{26}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{23}}{2}$
 D) 2 E) 5

ResoluciónReemplazamos los valores de z_1, z_2, z_3 y z_4 :

$$\left| \frac{z_1 - \bar{z}_3}{z_2} + z_4 \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1+2i - (-5-i)}{12+2i} + 2 - \frac{i}{2} \right| \\
 &= \left| \frac{1+2i - (-5+i)}{12+2i} + 2 - \frac{i}{2} \right| \\
 &= \left| \frac{6+i}{2(6+i)} + 2 - \frac{i}{2} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2} + 2 - \frac{i}{2} \right| \\
 &= \left| \frac{5-i}{2} \right| \\
 &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{26}{4}} \\
 &= \frac{\sqrt{26}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{(z-w)(\overline{z-w})}{(1-\bar{z}w)(1-\bar{z}w)}} \\
 &= \sqrt{\frac{(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}{(1-\bar{z}w)(1-\bar{z}w)}} \\
 &= \sqrt{\frac{z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w}}{1 - z\bar{w} - \bar{z}w + \bar{z}wz\bar{w}}} \\
 &= \sqrt{\frac{|z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2}{1 - z\bar{w} - \bar{z}w + |z|^2|w|^2}}
 \end{aligned}$$

Reemplazamos el dato $|z| = |w| = 1$:

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1 - z\bar{w} - w\bar{z} + 1}{1 - z\bar{w} - \bar{z}w + 1}} \\
 &= \sqrt{1}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$

Problema 8.

Dados los números complejos z y w tales que $|z| = |w| = 1$. Halle el módulo de

$$\frac{z-w}{1-\bar{z}w}$$

- A) 3 B) 1 C) 1/2
D) 11 E) 2

Resolución

Nos piden calcular:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| &= \sqrt{\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|^2} \\
 &= \sqrt{\frac{|z-w|^2}{|1-\bar{z}w|^2}}
 \end{aligned}$$

Problema 9.

Halle el argumento principal del complejo
 $(ab+1+(a-b)i)(bc+1+(b-c)i)$
 $(ac+1+(c-a)i)$

Considere $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$.

- A) $\pi/2$ B) $-\pi/2$ C) 0
D) $\pi/4$ E) π

Resolución

Se tiene el complejo:

$$\begin{aligned}
 &(ab+1+(a-b)i)(bc+1+(b-c)i) \\
 &(ac+1+(c-a)i)
 \end{aligned}$$

Lo operamos para llevarlo a la forma $x+yi$:

$$(\underline{ab} + 1 + ai - bi)(bc + 1 + bi - ci)$$

$$(ac + 1 + ci - ai)$$

Agrupamos convenientemente:

$$(b(a-i) + i(a-i))(c(b-i) + i(b-i))$$

$$(a(c-i) + i(c-i))$$

Factorizamos en cada paréntesis:

$$z = (a-i)(b+i)(b-i)(c+i)$$

$$(c-i)(a+i)$$

Agrupamos convenientemente:

$$z = \underbrace{(a-i)(a+i)}_{(c+i)(c-i)} \underbrace{(b+i)(b-i)}_{(c+i)(c-i)}$$

Aplicamos la diferencia de cuadrados:

$$z = (a^2 - i^2)(b^2 - i^2)(c^2 - i^2)$$

$$z = \underbrace{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}_{\in \mathbb{R}}$$

Es decir, el complejo z tiene la forma:

$$z = x + 0i$$

Por lo tanto,

$$\text{Arg}(z) = 0$$

Problema 10.

Dado el complejo $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{5}i}$, halle el argumento de $z^2 + 2$.

- A) $\pi/10$ B) $\pi/20$ C) $\pi/5$
 D) $\pi/4$ E) $3\pi/2$

Resolución

Se tiene el complejo:

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{5}i}$$

Lo elevamos al cuadrado:

$$z^2 = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{5}i})^2$$

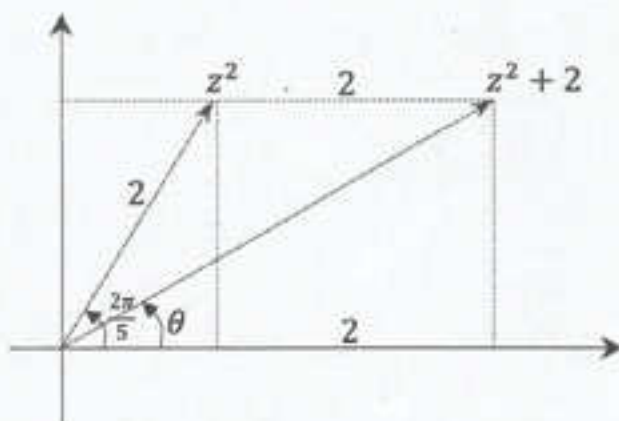
$$z^2 = \sqrt{2}^2 e^{\frac{2\pi}{5}i}$$

Aplicando la fórmula de Euler:

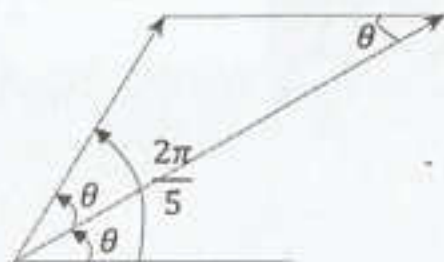
$$z^2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$$

Sumamos 2:

$$z^2 + 2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right) + 2$$



Analizamos el triángulo isósceles:



Del gráfico se cumple que:

$$2\theta = \frac{2\pi}{5}$$

$$\theta = \frac{\pi}{5}$$

$$\therefore \text{Arg}(z^2 + 2) = \frac{\pi}{5}$$

Universidad Nacional de Ingeniería (UNI)

Problema 11.

El número complejo z_0 satisface la

ecuación $\frac{5+3i}{-4+i} = \frac{2i}{z_0} - 2i$

determine el valor de $f(z_0)$ donde

$$f(x) = x^2 - 3x + 3.$$

- A) $1+i$ B) $1-i$ C) $-2+i$
D) $2+\sqrt{2}i$ E) i

UNI 2000-II

Resolución

En la ecuación:

$$\frac{5+3i}{-4+i} = \frac{2i}{z_0} - 2i$$

Sumamos 1:

$$\begin{aligned}\frac{5+3i}{-4+i} + 1 &= \frac{2i}{z_0} - 2i + 1 \\ \frac{5+3i-4+i}{-4+i} &= \frac{2i}{z_0} - 2i + 1\end{aligned}$$

$$\frac{1+4i}{-4+i} = \frac{2i}{z_0} - 2i + 1$$

$$\frac{i-4}{(1+4i)i} = \frac{2i}{z_0} - 2i + 1$$

$$\frac{1}{i} = \frac{2i}{z_0} - 2i + 1$$

$$-i = \frac{2i}{z_0} - 2i + 1$$

$$\frac{-2i}{z_0} = 1 - i$$

$$\frac{(1-i)^2}{z_0} = 1 - i$$

Cancelamos $(1-i)$ en ambos lados:

$$\frac{1-i}{z_0} = 1$$

De donde

$$z_0 = 1 - i$$

Lo reemplazamos en $f(x) = x^2 - 3x + 3$:

$$\begin{aligned}f(z_0) &= f(1-i) \\ &= (1-i)^2 - 3(1-i) + 3 \\ &= -2i - 3 + 3i + 3 \\ &= i\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(z_0) = i$.

Problema 12.

El valor de la expresión

$$\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{77} \text{ es}$$

- A) 1 B) -1 C) -i
D) i E) 1+i

UNI 2001-I

Resolución

Se quiere hallar el valor de

$$\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{77}$$

Pero se sabe que:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ y } \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Reemplazamos:

$$(0 + i \cdot 1)^{77} = i^{77}$$



$$= i^{76+1}$$

$$= i^{4+1}$$

$$= i^1$$

$$= i$$

Por lo tanto,

$$\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{77} = i$$

Problema 13.

Si z_1 y z_2 son las raíces cuadradas del número complejo $z \neq 0$, entonces el valor de $(z_1 + z_2)^3$ es

A) $z_1 z_2$

B) $z_1 z_2 z$

C) 0

D) 1

E) z^3

UNI 2002 - I

Resolución

Recuerde:

Para todo número complejo

$z = a + bi$, $b > 0$; se cumple que:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} z_1 = \sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \cdot i \\ z_2 = -\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} - \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \cdot i \end{cases}$$

Es decir, una raíz es el opuesto de la otra.

Por dato, z_1 y z_2 son las raíces del complejo z , entonces, por la propiedad anterior:

$$z_1 + z_2 = 0$$

Por lo tanto,

$$(z_1 + z_2)^3 = 0$$

Problema 14.

Al resolver, en el conjunto de los números complejos, el sistema

$$\begin{cases} (1+i)z - w = -1-i \\ 2iz + (1-i)w = i \end{cases}$$

el valor de $\frac{z}{w}$ es

A) $-\frac{1}{2} - \frac{i}{6}$

B) $\frac{1}{2} - \frac{i}{6}$

C) $\frac{1}{2} + \frac{i}{6}$

D) $-\frac{1}{6} + \frac{i}{2}$

E) $\frac{1}{6} - \frac{i}{2}$

UNI 2002 - II

Resolución

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} (1+i)z - w = -(1+i) & \dots (1) \\ 2iz + (1-i)w = i & \dots (2) \end{cases}$$

Multiplicamos (1) por $(1+i)$:

$$(1+i)^2 z - (1+i)w = -(1+i)^2$$

$$2iz - (1+i)w = -2i \quad \dots (3)$$

(2) - (3):

$$(1-i)w + (1+i)w = 3i$$

$$w - iw + w + iw = 3i$$

$$2w = 3i$$

$$w = \frac{3i}{2}$$

Reemplazamos en (2):

$$2iz + (1-i)\frac{3i}{2} = i$$

$$2iz + \frac{3i}{2} + \frac{3}{2} = i$$

$$2iz = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

Multiplicamos por $-i$:

$$2z = \frac{3i}{2} - \frac{1}{2}$$

$$z = -\frac{1}{4} + \frac{3i}{4}$$

Nos piden calcular:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{-\frac{1}{4} + \frac{3i}{4}}{\frac{3i}{2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} + \frac{3i}{4}}{\frac{3i}{2}} \\ &= \frac{-1 + 3i}{6i} \\ &= \frac{-1 + 3i}{6i} \cdot \frac{i^2}{i^2} \\ &= \frac{-1 + 3i}{6i} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{i}{6} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{2} + \frac{i}{6}$$

Resolución

Se tiene el complejo

$$w = \frac{iz + 1}{iz - 1} + \frac{iz - 1}{iz + 1}$$

Por Legendre

$$= \frac{(iz + 1)^2 + (iz - 1)^2}{(iz - 1)(iz + 1)}$$

Diferencia de cuadrados

$$= \frac{2((iz)^2 + 1)}{(iz)^2 - 1}$$

$$= \frac{2(-z^2 + 1)}{-z^2 - 1}$$

$$= \frac{2(1 - z^2)}{-(1 + z^2)}$$

$$= \frac{-2(1 - z^2)}{1 + z^2}$$

Reemplazamos $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$:

$$\begin{aligned} &= \frac{-2(1 - (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2)}{1 + (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2} \\ &= \frac{-2(1 - (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + i2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta))}{1 + \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + i2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

Recuerde:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

En el problema:

$$= \frac{-2(2 \operatorname{sen}^2 \theta - i2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)}{2 \cos^2 \theta + i2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}$$

Cancelamos 2:

$$= \frac{-2(\operatorname{sen}^2 \theta - i \operatorname{sen} \theta \cos \theta)}{\cos^2 \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{-2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - i \cos \theta)}{\cos \theta (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}$$

$$= \frac{-2 \tan \theta (\operatorname{sen} \theta - i \cos \theta)}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}$$

Tomamos módulo:

Problema 15.

Halle el módulo del complejo

$$w = \frac{iz + 1}{iz - 1} + \frac{iz - 1}{iz + 1}$$

donde $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ y $\theta \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$

A) $\tan \theta$

B) $\cot \theta$

C) $2 \tan \theta$

D) $2 \cot \theta$

E) $4 \tan \theta$

UNI 2002 - II

$$\begin{aligned}
 |W| &= \left| \frac{-2 \tan \theta (\sen \theta - i \cos \theta)}{\cos \theta + i \sen \theta} \right| \\
 &= \frac{|-2 \tan \theta| |\sen \theta - i \cos \theta|}{|\cos \theta + i \sen \theta|} \\
 &= \frac{2|\tan \theta| \cdot 1}{1} = 2 \tan \theta
 \end{aligned}$$

Como $\theta \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$, entonces, $\tan \theta > 0$

Recuerde:

$$\begin{aligned}
 |\sen \theta - i \cos \theta| &= \sqrt{\sen^2 \theta + (-\cos \theta)^2} \\
 &= \sqrt{\sen^2 \theta + \cos^2 \theta} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Similarmente:

$$|\cos \theta + i \sen \theta| = 1$$

Por lo tanto, $|W| = 2 \tan \theta$

Problema 16.

Si $|\bar{z}i| = 4$, $\text{Arg}[z(1+i)] = \frac{\pi}{2}$

entonces el número complejo z en su forma polar es

- A) $4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sen \frac{\pi}{4} \right)$
- B) $2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sen \frac{\pi}{4} \right)$
- C) $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sen \frac{\pi}{4} \right)$
- D) $-\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sen \frac{\pi}{4} \right)$
- E) $-2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sen \frac{\pi}{4} \right)$

Resolución

Nos piden el complejo z en su forma polar.

Por dato:

$$|\bar{z}i| = 4$$

$$|\bar{z}||i| = 4$$

$$|z| \cdot 1 = 4$$

$$|z| = 4$$

También

$$\text{Arg}[z(1+i)] = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(z) + \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(z) + \underbrace{\text{Arg}(1+i)}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

De donde

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} = \theta$$

Se sabe que un complejo z en su forma polar está dado por:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sen \theta)$$

Por lo tanto,

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sen \frac{\pi}{4} \right)$$

Problema 17.

Indique gráficamente todos los puntos del plano que verifican las relaciones

$$|e^z| \leq 1 \text{ y } |z| \leq 1$$

donde $z = x + iy$

UNI 2003-I

PNH
LUSKO

Resolución

Por dato:

$$|e^z| \leq 1 \text{ y } |z| \leq 1$$

Reemplazamos $z = x + iy$:

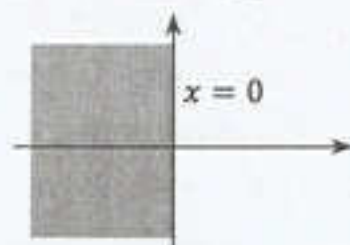
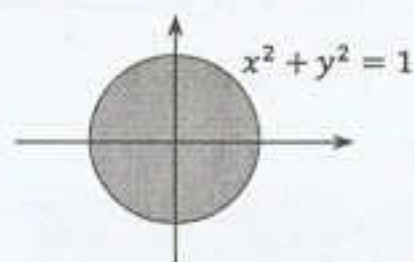
$$|e^{x+iy}| \leq 1 \text{ y } |x + iy| \leq 1$$

$$|e^x e^{iy}| \leq 1 \text{ y } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

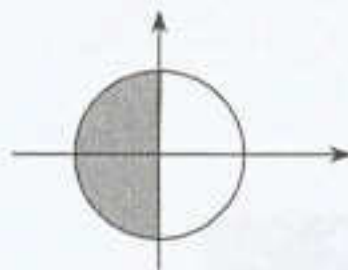
$$e^x \leq 1 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1$$

$$e^x \leq e^0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1$$

$$x \leq 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1$$

Gráfica de la relación $x \leq 0$:Gráfica de la relación $x^2 + y^2 \leq 1$:

Intersectando ambas regiones se obtiene:



A)

B)

C)

D)

E)

Problema 18.

Halle la suma A de números complejos.

$$A = (1 + i) + (2 + i^2) + (3 + i^3) + (4 + i^4) + \dots + (4n + i^{4n})$$

A) $n(2n + 1)$ B) $2n(4n + 1)$

C) 0

D) $n(4n + 1)$ E) $2n(4n - 1)$

UNI 2004 - I

Resolución

Nos piden calcular

$$A = (1 + i) + (2 + i^2) + (3 + i^3) + (4 + i^4) + \dots + (4n + i^{4n})$$

Agrupamos convenientemente:

$$A = (1 + 2 + 3 + \dots + 4n) + (i + i^2 + i^3 + \dots + i^{4n})$$

Donde:

$$\blacksquare 1 + 2 + 3 + \dots + 4n = \frac{4n(4n + 1)}{2}$$

$$\blacksquare i + i^2 + i^3 + \dots + i^{4n} = 0$$

Recuerde:

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{4k} = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \frac{4n(4n + 1)}{2} + 0 \\ &= 2n(4n + 1) \end{aligned}$$

Problema 19.

El número complejo

$$z = \frac{(1 + i \tan \theta)^7}{\cos 7\theta + i \sin 7\theta}$$

es igual a

A) $\cos^7 \theta$

B) $\cos \left(\frac{\theta}{7} \right)$

C) $\cos 7\theta$

D) $\tan^7 \theta$

E) $\sec^7 \theta$

UNI 2004 - II

Resolución

Se tiene el complejo

$$z = \frac{(1 + i \tan \theta)^7}{\cos 7\theta + i \sin 7\theta}$$

Lo expresamos en función de senos y cosenos:

$$z = \frac{\left(1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^7}{\cos 7\theta + i \sin 7\theta}$$

$$z = \frac{\left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta} \right)^7}{\cos 7\theta + i \sin 7\theta}$$

$$z = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^7}{\cos^7 \theta (\cos 7\theta + i \sin 7\theta)}$$

Aplicamos la fórmula de De Moivre:

$$z = \frac{\cos 7\theta + i \sin 7\theta}{\cos^7 \theta (\cos 7\theta + i \sin 7\theta)}$$

Simplificando se obtiene:

$$z = \frac{1}{\cos^7 \theta} = \sec^7 \theta$$

Por lo tanto, $z = \sec^7 \theta$.

Problema 20.

Dada la región

$$A =$$

$$\{z \in \mathbb{C} / |z - 2 - i| \leq 3 \vee |z + 2 - i| \leq 3\}$$

Halle z_1 y z_2 en A tal que $|z_1 - z_2|$ sea el valor máximo. De como respuesta $z_1 \cdot z_2$,

- A) -29 B) -28 C) -26
D) -20 E) -18

UNI 2005 - I

Resolución

Por dato se tiene las relaciones:

$$|z - 2 - i| \leq 3 \vee |z + 2 - i| \leq 3$$

$$|z - (2 + i)| \leq 3 \vee |z - (-2 + i)| \leq 3$$

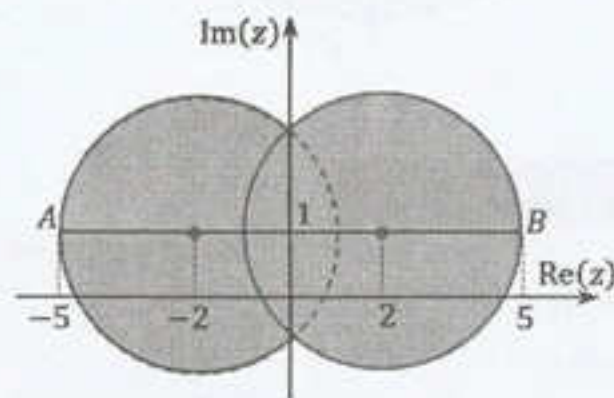
• $|z - (2 + i)| \leq 3$:

Representa un disco cuya frontera es la circunferencia de centro $z_0 = 2 + i$ y radio $R = 3$.

• $|z - (-2 + i)| \leq 3$:

Representa un disco cuya frontera es la circunferencia de centro $z_0 = -2 + i$ y radio $r = 3$.

Al unir las dos regiones se obtiene:



Nos piden calcular el máximo valor de $|z_1 - z_2|$. Pero $|z_1 - z_2|$ es por definición la distancia entre los complejos z_1 y z_2 .

Del gráfico, la mayor distancia entre z_1 y z_2 se da cuando z_1 y z_2 son los extremos del segmento de recta $\overline{AB}$ que pasa por los centros. Es decir;

$$z_1 = -5 + i \text{ y } z_2 = 5 + i$$

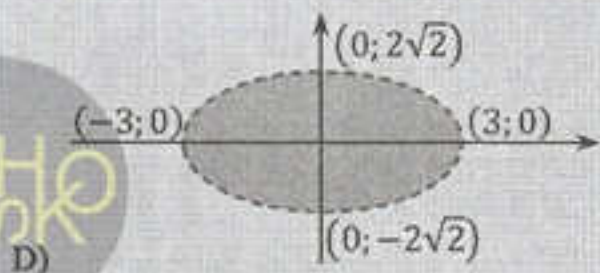
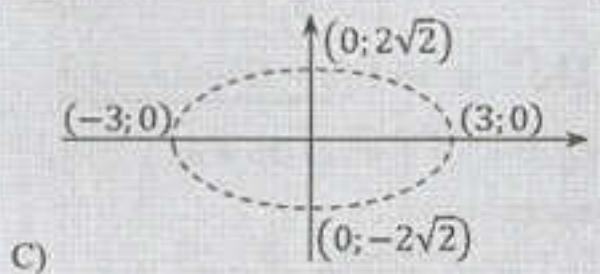
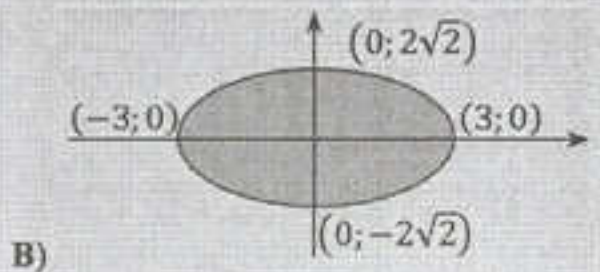
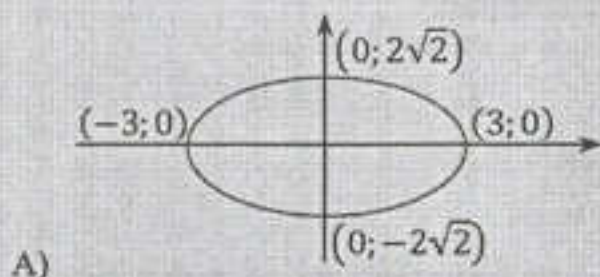
Por lo tanto,

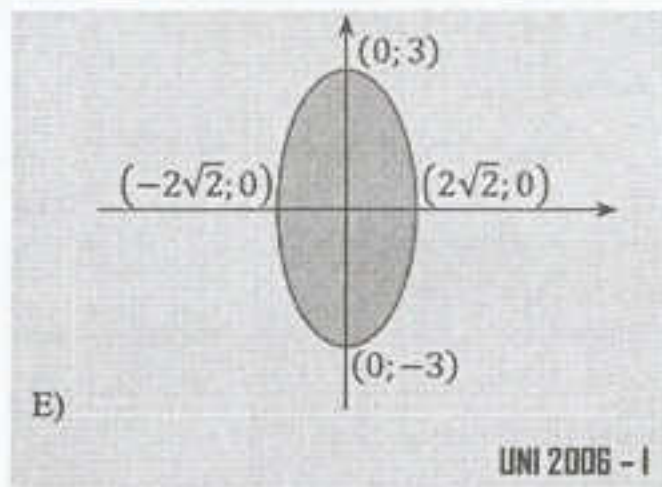
$$z_1 z_2 = (-5 + i)(5 + i) = -26$$

Problema 21.

Determine la representación geométrica de todos los puntos del plano complejo que satisfacen la condición:

$$|z - 1| \leq 6 - |z + 1|$$





Dividimos entre 72:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} \leq 1$$

Le damos forma:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{8}^2} \leq 1$$

Vemos que la frontera de la región es la elipse

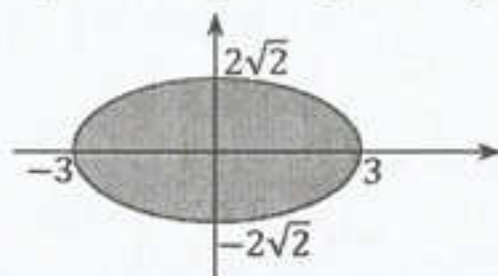
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{8}^2} = 1$$

de ejes: $a = 3$ y $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

luego, la relación:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{8}^2} \leq 1$$

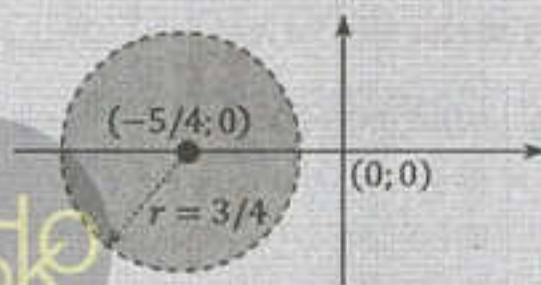
está representada por la siguiente región:



Problema 22.

Si $z = x + iy$, grafique todos los puntos en el plano cartesiano que representa el conjunto

$$\left\{ z / \left| \frac{z-1}{z+1} \right| > 3 \right\}$$



A)

Resolución

Por dato, se tiene la relación

$$|z - 1| \leq 6 - |z + 1|$$

donde $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Es decir,

$$|x + yi - 1| \leq 6 - |x + yi + 1|$$

$$|(x - 1) + yi| \leq 6 - |(x + 1) + yi|$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq 6 - \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}^2 \leq (6 - \sqrt{(x + 1)^2 + y^2})^2$$

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 36 - 12\sqrt{\quad} + (x + 1)^2 + y^2$$

$$12\sqrt{\quad} \leq 36 + (x + 1)^2 - (x - 1)^2$$

$$12\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \leq 36 + 4x$$

Sacamos cuarta:

$$3\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \leq 9 + x$$

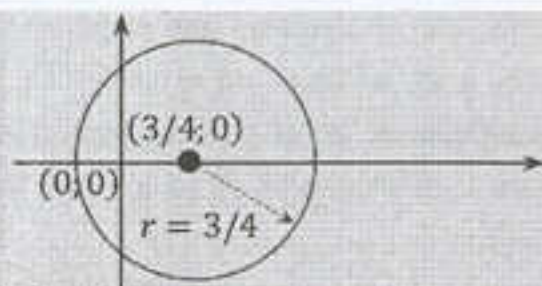
Elevamos al cuadrado:

$$(3\sqrt{(x + 1)^2 + y^2})^2 \leq (9 + x)^2$$

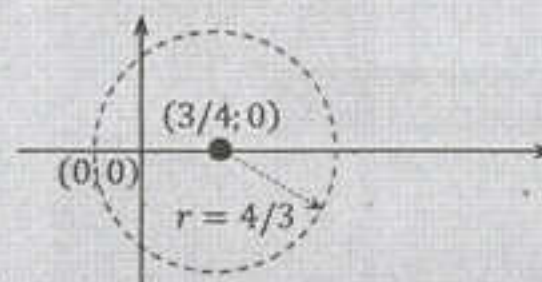
$$9((x + 1)^2 + y^2) \leq 81 + 18x + x^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2$$

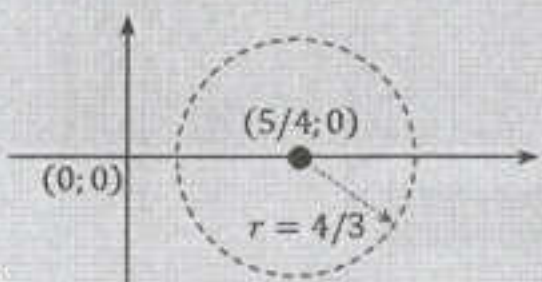
$$8x^2 + 9y^2 \leq 72$$



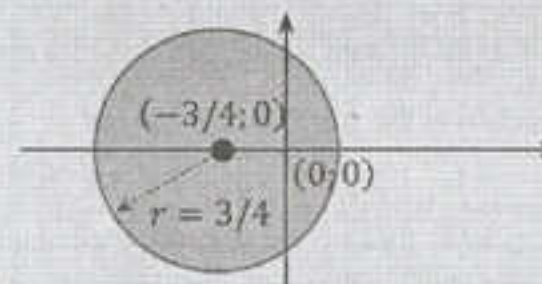
B)



C)



D)



E)

UNI 2006 - II

Resolución

Por dato, se tiene la relación

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| > 3$$

donde $z = x + yi$.

Es decir,

$$\left| \frac{x+yi-1}{x+yi+1} \right| > 3$$

$$\frac{|(x-1) + yi|}{|(x+1) + yi|} > 3$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} > 3$$

Elevamos al cuadrado:

$$\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} > 9$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1 + y^2}{x^2 + 2x + 1 + y^2} > 9$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 > 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2$$

$$0 > 8x^2 + 20x + 8 + 8y^2$$

Dividimos entre 8:

$$0 > x^2 + \frac{5}{2}x + 1 + y^2$$

Completamos el cuadrado, para eso

sumamos $\frac{25}{16}$ en ambos lados:

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} + 1 + y^2 < 0 + \frac{25}{16}$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{9}{16}$$

Vemos que la frontera de la región es la circunferencia de ecuación:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

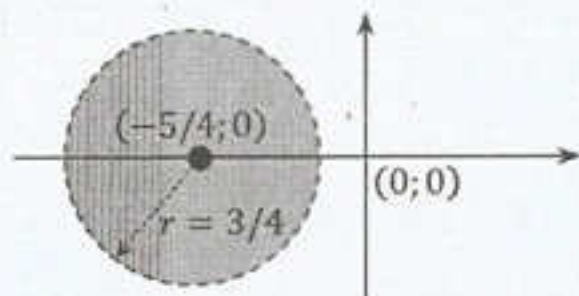
cuyo centro y radio respectivamente es:

$$c = \left(-\frac{5}{4}; 0\right), \quad r = \frac{3}{4}$$

luego, la relación

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{9}{16}$$

está representada por la siguiente región, donde no se considera a la frontera por ser una desigualdad estricta:



Vemos que el complejo que equidista de z_1 , z_2 y z_3 se ubica en el centro de la circunferencia; en el gráfico anterior, el centro c se encuentra en la bisectriz del triángulo formado por los afijos de z_1 , z_2 y z_3 . Luego, el argumento del complejo es $\pi/4$.

Problema 23.

Halle el argumento de un número complejo que equidista de los complejos:

$$-2, \quad -2i \quad \text{y} \quad 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

- A) $\pi/8$ B) $\pi/6$ C) $\pi/4$
 D) $\pi/3$ E) $2\pi/3$

UNI 2006 - II

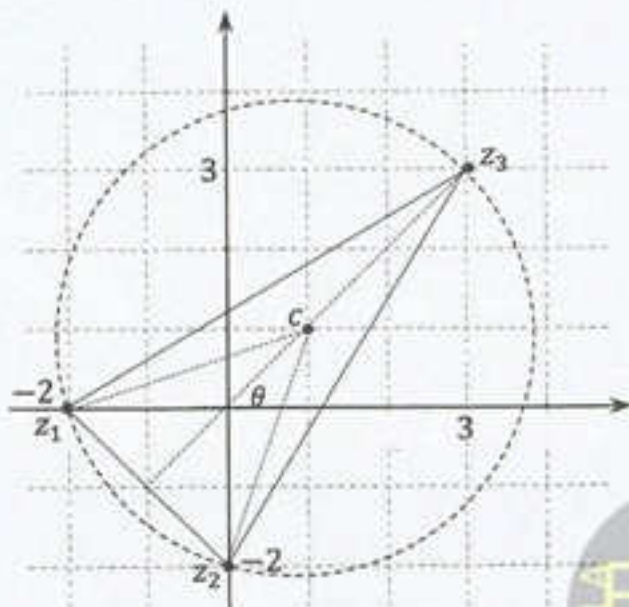
Resolución

Se tiene los complejos:

$$z_1 = -2$$

$$z_2 = -2i$$

$$z_3 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3 + 3i$$



Problema 24.

Si $n = 8k$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, calcule el valor de R .

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^n$$

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

UNI 2007 - I

Resolución

Nos piden calcular

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^n$$

donde $n = 8k$ y $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{8k} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{8k}$$

Acomodamos convenientemente:

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \right)^{8k} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \right)^{8k}$$

$$R = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \right)^2 \right]^{4k} + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \right)^2 \right]^{4k}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1+i)^2 \right]^{4k} + \left[\frac{1}{2}(-1+i)^2 \right]^{4k}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2i) \right]^{4k} + \left[\frac{1}{2}(-2i) \right]^{4k}$$

$$\begin{aligned}
 &= (i)^{4k} + (-i)^{4k} \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R = 2$

Problema 25.

El número $(1+i)^{\frac{n+m}{3}}$ para n y $m \in \mathbb{N}$ puede representarse como

- A) $2^{\frac{n+m}{3}} \left(\cos \frac{(n+m)\pi}{6} + i \sin \frac{(n+m)\pi}{6} \right)$
 B) $2^{\frac{n+m}{3}} \left(\cos \frac{(n+m)\pi}{3} + i \sin \frac{(n+m)\pi}{3} \right)$
 C) $2^{\frac{n+m}{6}} \left(\cos \frac{(n+m)\pi}{12} + i \sin \frac{(n+m)\pi}{12} \right)$
 D) $2^{\frac{n+m}{6}} \left(\sin \frac{(n+m)\pi}{12} + i \cos \frac{(n+m)\pi}{12} \right)$
 E) $2^{\frac{n+m}{2}} \left(\cos \frac{(n+m)\pi}{3} + i \sin \frac{(n+m)\pi}{3} \right)$

UNI 2008 - II

Resolución

Se pide hallar el complejo

$$z = (1+i)^{\frac{n+m}{3}}$$

en su forma polar.

Se sabe que:

$$\begin{aligned}
 1+i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}
 \end{aligned}$$

Lo reemplazamos en z :

$$z = \left(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} \right)^{\frac{n+m}{3}}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{2})^{\frac{n+m}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{4}i} \right)^{\frac{n+m}{3}} \\
 &= \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{n+m}{3}} e^{\frac{\pi}{4} \frac{n+m}{3} i} \\
 &= 2^{\frac{n+m}{6}} \cdot e^{\left(\frac{n+m}{12} \right) \pi i} \\
 &= 2^{\frac{n+m}{6}} \left(\cos \frac{(n+m)\pi}{12} + i \sin \frac{(n+m)\pi}{12} \right)
 \end{aligned}$$

Problema 26.

Sea el número complejo

$$w =$$

$$\frac{[\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ]^4 [\sqrt{2}(\cos 8^\circ + i \sin 8^\circ)]}{[\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ]^{11} [\sin 80^\circ + i \cos 80^\circ]}$$

la forma polar de w es

- A) $8\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}$ B) $16\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}}$
 C) $16\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}$
 D) $32\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}}$ E) $32\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}$

UNI 2008 - II

Resolución

Se tiene el complejo

$$w =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ]^4 [\sqrt{2}(\cos 8^\circ + i \sin 8^\circ)]^{11}}{[\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ]^{11} [\sin 80^\circ + i \cos 80^\circ]} \\
 &\quad \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ
 \end{aligned}$$

Recuerde:

Fórmula de De Moivre:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Luego, en W :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ) \sqrt{2}^{11} (\cos 88^\circ + i \sin 88^\circ)}{(\cos 66^\circ + i \sin 66^\circ)(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)}
 \end{aligned}$$

Recuerde:

$$(\operatorname{cis} \alpha)(\operatorname{cis} \beta) = \operatorname{cis}(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\operatorname{cis} \alpha}{\operatorname{cis} \beta} = \operatorname{cis}(\alpha - \beta)$$

Lo aplicamos en W :

$$W = \frac{\sqrt{2}^{11} (\cos 136^\circ + i \operatorname{sen} 136^\circ)}{\cos 76^\circ + i \operatorname{sen} 76^\circ}$$

$$W = \sqrt{2}^{10} \sqrt{2} (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$$

$$W = 2^5 \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$$

$$W = 32\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$$

Problema 27.

La raíz cúbica del número complejo $z = -2$ de mayor argumento principal, es también raíz 18-ésima de otro complejo $u = a + bi$ con a y b números reales. Determine el valor de $a + b$.

A) $2^5(\sqrt{3} + 1)$

B) 2^6

C) $2^7(\sqrt{3} + 1)$

D) 2^8

E) 2^9

UNI 2009 - II

Resolución

Recuerde:

$$\sqrt[3]{z}$$

$$= \begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{3} \right) \\ z_2 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) \\ z_3 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\theta + 4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

donde θ es el argumento principal de z .

En este caso, $z = -2$; entonces,

$$|z| = 2 \text{ y } \theta = \pi$$

Reemplazamos:

$$\sqrt[3]{-2}$$

$$= \begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) \\ z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2\pi}{3} \right) \\ z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

Luego, la raíz cúbica de -2 de mayor argumento principal es

$$z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right)$$

Por dato, debe ser igual a $\sqrt[18]{a + bi}$; es decir

$$\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right) = \sqrt[18]{a + bi}$$

Elevamos a la 18:

$$\left(\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right) \right)^{18} = \left(\sqrt[18]{a + bi} \right)^{18}$$

$$2^6 (\cos 30\pi + i \operatorname{sen} 30\pi) = a + bi$$

$$2^6 (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = a + bi$$

$$2^6 (1 + i \cdot 0) = a + bi$$

$$2^6 + 0i = a + bi$$

De donde,

$$a = 2^6 \text{ y } b = 0$$

Por lo tanto, $a + b = 2^6$

Problema 28.

Dadas las siguientes proposiciones:

- I. Las raíces de $e^{in} - 1 = 0$ pertenecen a un polígono regular de n lados, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- II. Si $e^{i\theta} = a + bi$ y $\theta \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \rangle$, entonces $a \in \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ y $b \in \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \rangle$.
- III. Dados $\alpha, \beta \in \langle 0; 2\pi \rangle$ tales que $\beta > \alpha$; si $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$, entonces $e^{i(\alpha+\beta)} = 1$.

Indique cuales son correctas.

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

UNI 2010 - I

Como $\theta \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \rangle$, tomemos $\theta = \frac{\pi}{2}$

Reemplazando en

$$e^{i\theta} = a + bi$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = a + bi$$

$$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = a + bi$$

$$0 + i = a + bi$$

De donde,

$$a = 0 \text{ y } b = 1 \notin \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \rangle$$

III. Verdadero

Como $\alpha, \beta \in \langle 0; 2\pi \rangle$ y $\beta > \alpha$

Además, $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$, entonces

$$\alpha + \beta = 2\pi$$

de donde

$$e^{(\alpha+\beta)i} = e^{2\pi i} = 1$$

Por lo tanto, solo III es correcto.

Resolución

Al analizar cada proposición se obtiene:

I. Falso

Se tiene la ecuación

$$e^{in} - 1 = 0$$

$$e^{in} = 1$$

$$e^{in} = e^{2k\pi i}$$

Por simple comparación:

$$n = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Es decir,

$$n = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \dots$$

Vemos que las soluciones de la ecuación no forman un polígono convexo.

II. Falso

Veamos un contraejemplo:

Problema 29.

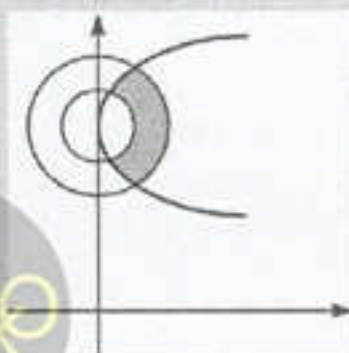
Sean los números complejos $z = x + iy$

y $u = \sqrt{x} + iy$, $x > 0$ y los conjuntos

$$A = \{z / 1 \leq |\bar{z} + 4i| \leq 2\}$$

$$B = \{u = \sqrt{x} - iy / |u + 4i| \geq 0\}$$

¿Cuál de las siguientes gráficas representa a $A \cap B$?



PNHO
A)

Resolución

Halleemos las regiones determinadas por cada conjunto:

$$A = \{z / 1 \leq |\bar{z} + 4i| \leq 2\}$$

De aquí:

$$1 \leq |\bar{z} + 4i| \leq 2$$

Reemplazamos $z = x + iy$:

$$1 \leq |\overline{x + iy} + 4i| \leq 2$$

$$1 \leq |x - yi + 4i| \leq 2$$

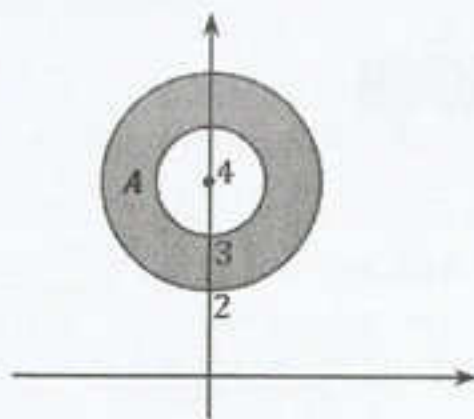
$$1 \leq |x + (-y + 4)i| \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{x^2 + (-y + 4)^2} \leq 2$$

Elevamos al cuadrado:

$$1^2 \leq x^2 + (y - 4)^2 \leq 2^2$$

Relación que genera una corona circular de centro $c = (0; 4)$, radios $r = 1$ y $R = 2$.



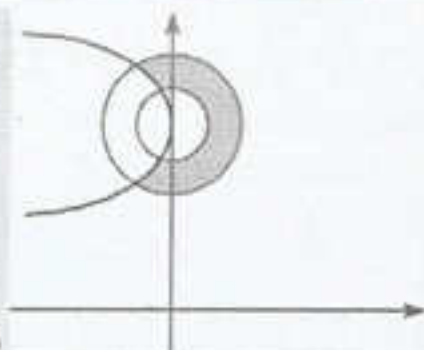
Ahora en el conjunto B:

$$B = \{u = \sqrt{x} - iy / |u + 4i| \geq 0\}$$

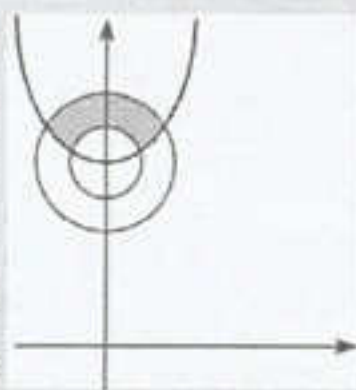
donde $x > 0$.

Como $|u + 4i| \geq 0$ es verdadero para todo u , entonces B es el semiplano de puntos $(x; y)$ tal que $x > 0$, como se muestra en la figura:

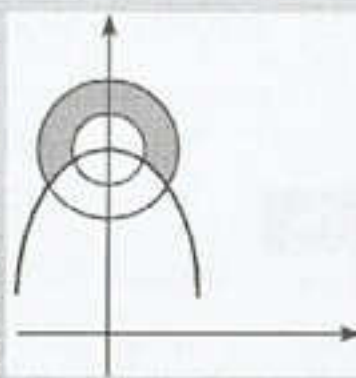
B)



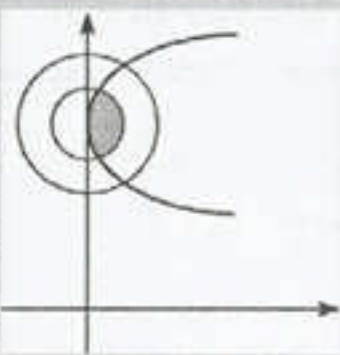
C)



D)



E)



No hay clave

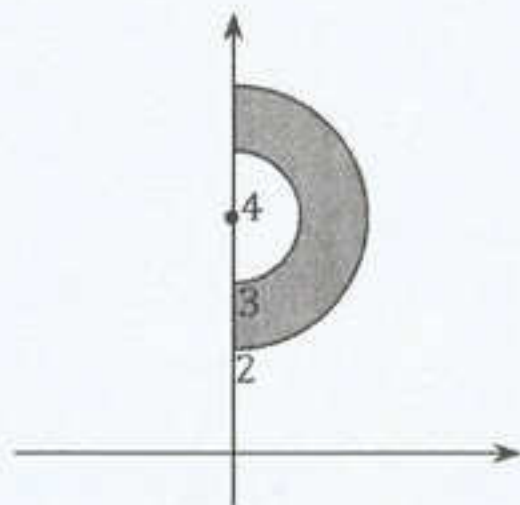
UNI 2010 - II

PNHKO



twitter.com/calapenshko

Al intersectar las las regiones A y B se obtiene:



No hay alternativa correcta

Problema 30.

Al resolver el sistema

$$\begin{cases} |z - 3i| = 2 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$$

donde $z = x + iy$ es un número complejo; la suma de las ordenadas de los puntos solución es:

- A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

UNI 2011-II

Resolución

Se tiene el sistema

$$\begin{cases} |z - 3i| = 2 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$$

En la 1era ecuación:

$$|z - 3i| = 2$$

Reemplazamos $z = x + yi$:

$$|x + yi - 3i| = 2$$

$$|x + (y - 3)i| = 2$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 2$$

Al cuadrado:

$$x^2 + (y - 3)^2 = 2^2 \dots (*)$$

De la 2da ecuación:

$$y - x^2 = 1$$

$$x^2 = y - 1 \dots (**)$$

Lo reemplazamos en (*):

$$y - 1 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$$y - 1 + y^2 - 6y + 9 = 4$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Factorizando por aspa simple:

$$(y - 1)(y - 4) = 0$$

De donde

$$y = 1 \vee y = 4$$

Reemplazamos en (**):

Si $y = 1$:

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Luego, una solución es: (0; 1)

Si $y = 4$:

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

Se obtienen dos soluciones más:

$$(\sqrt{3}; 4) \text{ y } (-\sqrt{3}; 4)$$

Por lo tanto, la suma de las ordenadas de las soluciones es:

$$1 + 4 + 4 = 9$$

Problema 31.

Sea

$$E = \frac{(1+i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)(\sqrt{2}i)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)}$$

Indique cuál de las siguientes proposiciones es verdadera.

I. $\operatorname{Re}(E) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

II. $\operatorname{Im}(E) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

III. $E = \sqrt{2}e^{-\frac{7}{12}\pi i}$

A) solo I

B) solo II

C) solo III

D) I y III

E) I, II y III

UNI 2011-II

Resolución

Se tiene la expresión

$$E = \frac{(1+i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)(\sqrt{2}i)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^2$$

Operamos:

$$E = \frac{(1+i)(-i-\sqrt{3})}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} \dots (\Delta)$$

$$E = \frac{-i - \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$E = \frac{(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i}{2}$$

$$E = \frac{(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i}{2}$$

$$E = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

Entonces

$$\operatorname{Re}(E) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Im}(E) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Expresemos (Δ) en su forma polar:

$$E = \frac{(1+i)(-i-\sqrt{3})}{2}$$

Tenga en cuenta que:

$$\blacksquare 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\blacksquare -\sqrt{3}-i = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

$$\blacksquare 2 = 2e^{2\pi i}$$

Reemplazamos en E :

$$E = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 2e^{\frac{7\pi}{6}i}}{2e^{2\pi i}}$$

$$E = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} - 2\pi\right)i}$$

$$E = \sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$$

Luego, en las proposiciones:

I. Verdadero

II. Falso

III. Verdadero

Problema 32.

Al determinar la forma compleja de la ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ obtenemos

A) $z\bar{z} - (1-i)z - \overline{(1-i)}\bar{z} + 1 = 0$

B) $z\bar{z} + (1+i)z - (1+i)\bar{z} + 1 = 0$

C) $3z\bar{z} + (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 1 = 0$

D) $2iz\bar{z} - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + 1 = 0$

E) $4z\bar{z} - 2(1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0$

UNI 2012 - II

Resolución

Recuerde que la ecuación de la circunferencia con centro en el origen está dado por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

se puede expresar como

$$|z| = r$$

donde $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Si el centro es el punto $c = (x_0; y_0)$, la ecuación es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

se puede expresar como

$$|z - z_0| = r$$

Donde:

$$z = x + yi \in \mathbb{C} \text{ y } z_0 = x_0 + y_0i \in \mathbb{C}.$$

Por dato se tiene la ecuación

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

se puede expresar como:

$$|z - z_0| = 1$$

Donde

$$z = x + yi \in \mathbb{C} \text{ y } z_0 = 1 + i \in \mathbb{C}$$

es decir,

$$|z - (1 + i)| = 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$|z - (1 + i)|^2 = 1^2$$

$$z - (1 + i)(\overline{z - (1 + i)}) = 1$$

$$(z - (1 + i))(\overline{z - (1 + i)}) = 1$$

$$(z - (1 + i))(\overline{z} - \overline{(1 + i)}) = 1$$

Multiplicamos:

$$z\bar{z} - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + (1+i)(1-i) = 1$$

$$z\bar{z} - (1-i)z - \overline{(1-i)}\bar{z} + 1^2 - i^2 = 1$$

$$z\bar{z} - (1-i)z - \overline{(1-i)}\bar{z} + 1 - (-1) = 1$$

$$z\bar{z} - (1-i)z - \overline{(1-i)}\bar{z} + 1 = 0$$

Por lo tanto, la forma compleja de la ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ es:

$$z\bar{z} - (1-i)z - \overline{(1-i)}\bar{z} + 1 = 0$$



Problemas propuestos

Problema 1.

Efectúe la siguiente expresión.

$$\sqrt{2\sqrt{i - \sqrt{i + \sqrt{i}}}}$$

- A) $1 + i$ B) $1 - i$ C) i
 D) $\sqrt{2}i$ E) $\frac{-1+i}{2}$

Problema 2.

Determine el valor de $\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w)$ si se sabe que:

$$w = z^4 + z^2 \quad \wedge \quad z = 1 - \frac{1-i}{1 + \frac{1+i}{1-i}}$$

- A) 2 B) -2 C) 0
 D) 6 E) -6

Problema 3.

Determine el valor de M .

$$M = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1+2i}{2-i} + \dots + \frac{1+20i}{20-i}$$

- A) $16i$ B) $18i$ C) $20i$
 D) $22i$ E) $24i$

Problema 4.

Calcule

$$\left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^4 + \left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^4$$

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 1 E) 2

Problema 5.

Efectúe

$$(1+2i)^{33} + (11+2i)^{11} + (1+i)^4 + (1-i)^4$$

- A) 4 B) -8 C) 6
 D) -9 E) 8

Problema 6.

A partir de la igualdad de números complejos

$$3(x-3) + 5(y-x)i =$$

$$3(3+2i) + 5(1+i) + 1-i$$

determine el valor de xy .

- A) 80 B) 60 C) 70
 D) 50 E) 90

Problema 7.

Sean $m, n, a, b \in \mathbb{R}$ con $|m| \neq |n|$ tal que

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)a + \left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)bi = 0$$

calcule $(a+i)(a-i)$.

- A) i B) $-i$ C) 1
 D) -1 E) 0

Problema 8.

Sean z y w dos números complejos definidos por

$$z = (m-1) + 3i$$

$$w = \frac{1}{2} - \frac{i}{m}$$

Si zw es un complejo real, entonces ¿cuál es el valor de m ?

- A) -1 B) -3 C) -2
D) -1/2 E) 2

Problema 9.

Dada la igualdad de complejos

$$\frac{(1+i)^{m+36}}{-(1-i)^n} = (1-\sqrt{2}i)^n + (1+\sqrt{2}i)^n$$

halle el mayor número n de tres cifras que cumple con esta condición.

- A) 999 B) 994 C) 998
D) 997 E) 996

Problema 10.

Si se cumple que

$$\sum_{m=1}^k m i^{-m} = 32(1+i)^2 + 64$$

donde $k = 4m$; $m \in \mathbb{N}$, calcule k .

- A) 64 B) 128 C) 32
D) 8 E) 16

Problema 11.

En $\mathbb{C}$, halle los valores de x e y que satisfacen la siguiente ecuación.

$$\frac{x i}{1+y i} = \frac{3x+4i}{x+3y}$$

- A) $x = \pm 1$, $y = \pm 3/4$
B) $x = \pm 2$, $y = \pm 3/2$

- C) $x = \pm 3$, $y = \pm 4/3$
D) $x = \pm 1$, $y = \pm 2/3$
E) $x = \pm 2$, $y = \pm 5/4$

Problema 12.

Dado el polinomio

$$P(x) = x^4 + \sqrt{2}x^3 - 5x^2 + \sqrt{2}x + 1$$

calcule el valor de

$$\left| \frac{P_{(-1+i)}}{P_{(-1-3i)}} \right| + \left| \frac{1+P_{(1+5i)}}{1+P_{(1-5i)}} \right|$$

- A) 2 B) 4 C) 7
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Problema 13.

Para que valores de x e y los números complejos:

$$z_1 = y - 2 + xi$$

$$z_2 = x + 2 - i$$

- I. Son iguales.
II. Son conjugados.
III. Son opuestos.

Indique el valor de $x+y$ en cada caso respectivamente.

- A) 3; 2; 5 B) 2; 6; 0
C) 2; 3; -1
D) -2; 3; 0 E) 4; 3; -1

Problema 14.

Determine el valor positivo de n si se sabe que

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1+ni}{n+2i}\right) = \frac{1}{2}$$

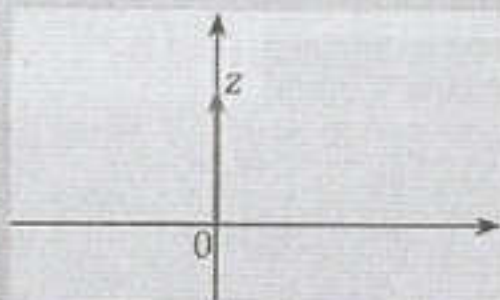
- A) $2\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}/2$ E) $1/2$

Problema 15.

Si la gráfica del número complejo

$$z = \frac{1+ai}{1-ai}, \quad a \in \mathbb{R}$$

es el que se muestra en la figura



halle el valor de a .

- A) 4 B) -2 C) 1
D) -1 E) 2

Problema 16.

Sean a y b dos números reales de modo que:

$$a+bi = [(2-3i)^{1+i}]^{1-i}, \quad i = \sqrt{-1}$$

calcule el módulo del complejo $(a-bi)$.

- A) $\sqrt{13}$ B) 11 C) 5
D) $\sqrt{5}$ E) 13

Problema 17.

Sea z un número complejo de modo que

$$|z| - z = 3 - \sqrt{3}i$$

Entonces, ¿cuál es el valor de $\sqrt{|z|}$?

- A) $1/2$ B) 1 C) 4
D) 2 E) 9

Problema 18.

Si $\operatorname{Re}(z+5\bar{z}) = 42$ donde $z \in \mathbb{C}$

Calcule el valor de $|z+1|^2 - |z-1|^2$.

- A) 1 B) 7 C) 28
D) 30 E) 49

Problema 19.

Halle todos los números complejos que verifican la ecuación $\bar{z} = z^3$.

- A) $\{0; 1; -1; i; -i\}$ B) $\{0; 1; -1\}$
C) $\{i; -i; 0\}$
D) $\{0; i; 1\}$ E) $\{i; -i\}$

Problema 20.

Halle el valor de la expresión J .

$$J = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{30}$$

- A) 1 B) $1-2\sqrt{3}i$ C) -1
D) $\sqrt{3}-i$ E) $1+i$

Problema 21.

Indique el argumento principal de cada complejo:

$$z_1 = 12 + 9i$$

$$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_3 = -\sqrt{3} + i$$

A) $\frac{37\pi}{180}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$

B) $\frac{53\pi}{180}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6}$

C) $\frac{37\pi}{180}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}$

D) $\frac{37\pi}{180}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}$

E) $\frac{53\pi}{180}; \frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}$

Problema 22.

Determine el valor reducido de

$\text{Arg}(-i) + \text{Arg}(2010i) - \text{Arg}(1 - i)$
en radianes.

A) $\pi/2$

B) $\pi/8$

C) $\pi/4$

D) $\pi/6$

E) $\pi/3$

Problema 23.

Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda, tal que z, w y $q \in \mathbb{C}$

I. $\text{Arg}(z^3) = 3\text{Arg}(z)$

II. $\text{Arg}\left(\frac{zw}{q}\right) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) -$

$\text{Arg}(q), q \neq 0.$

III. $\text{Arg}(z) + \text{Arg}(-z) = 0$

IV. $\text{Arg}(z) + \text{Arg}(\bar{z}) = 0$

A) VVFF

B) FVVV

C) VVFF

D) VFVF

E) VFFV

Problema 24.

Al representar a $z = \sqrt{3} + 3i$ en su forma polar se obtiene que

$z = \rho(\text{sen}\theta + i\cos\theta)$ tal que $\rho, \theta \in \mathbb{R}$
(θ en radianes); determine el conjugado de $w = \rho^2(\cos(2\theta) + i\text{sen}\theta)$

A) $2 - 3i$

B) $1 - i$

C) $3 - 3i$

D) $3 - 4i$

E) $6 - 6i$

Problema 25.

Reduzca la expresión siguiente.

$$M = \sqrt{3}\text{cis}\frac{\pi}{3} + 6\text{cis}\frac{\pi}{6} + \text{cis}\pi$$

A) $9/2$

B) $(9/2)i$

C) 9

D) $9i$

E) $3/2$

Problema 26.

Sean los complejos

$$z = \cos\frac{\pi}{10} + i\text{sen}\frac{\pi}{10}$$

$$w = \cos\frac{7\pi}{18} + i\text{sen}\frac{7\pi}{18}$$

determine la parte real de

$$z^{20} + w^{36}$$

A) $2i$

B) $1 + i$

C) 2

D) 0

E) $2 + 2i$

Problema 27.

Si se tiene que

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad \text{y} \quad w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Entonces calcule el valor de

$$(z^2 + w^2)(z^4 - z^2 w^2 + w^4)$$

- A) 2 B) $2i$ C) $3i$
 D) 0 E) 1

Problema 28.

Halle el área de la región delimitada por los conjuntos

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 3\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) \geq -\operatorname{Re}(z) + 3\}$$

- A) $9\left(\pi - \frac{1}{2}\right)$ B) $\frac{9}{2}(\pi - 1)$
 C) $\frac{9}{4}(\pi - 2)$
 D) $\frac{9}{2}(\pi - 2)$ E) $9(\pi - 2)$

Problema 29.

Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones con respecto a la ecuación

$$z^{15} = i; z \in \mathbb{C}$$

- I. Tres raíces están en el segundo cuadrante.
 II. Si $z_1, z_2, \dots, z_{15}$ son las raíces, entonces $z_1 + z_2 + \dots + z_{15} = 0$.
 III. Si $z_1, z_2, \dots, z_{15}$ son las raíces, entonces $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_{15}| = 10$

- A) FVF B) VVV C) FFF
 D) VVF E) FFV

Problema 30.

Si 1, z y z^2 son las raíces cúbicas de la unidad, calcule

$$E = \left(\left((z^z)^{z^2} \right)^{z^3} \right)^{z^{50}}$$

- A) $z + 1$ B) z^2 C) z^3
 D) 1 E) z

Claves

01 A	11 B	21 D
02 B	12 A	22 C
03 C	13 B	23 A
04 D	14 A	24 E
05 B	15 C	25 A
06 A	16 E	26 C
07 D	17 D	27 A
08 C	18 C	28 C
09 E	19 A	29 A
10 B	20 A	30 E

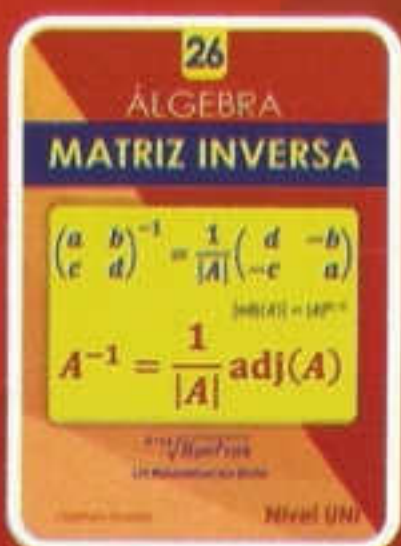
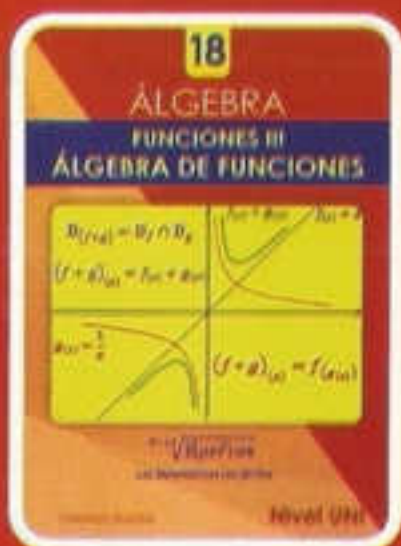
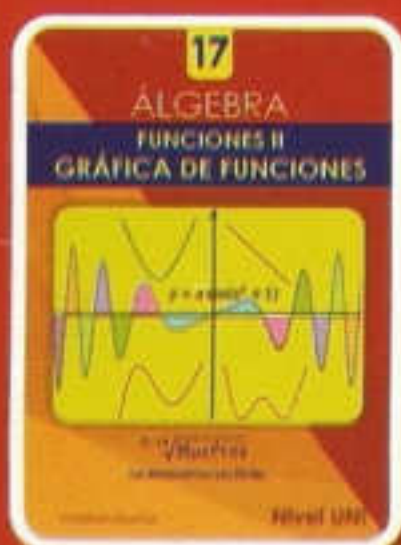
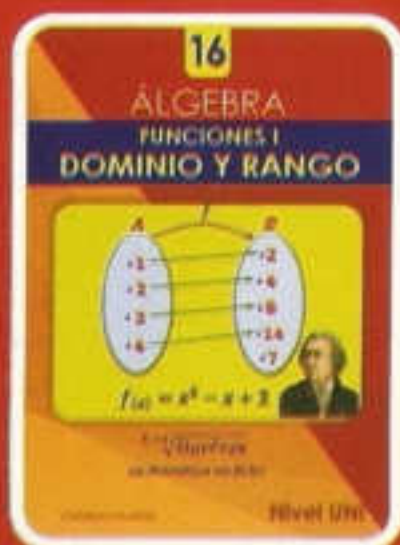
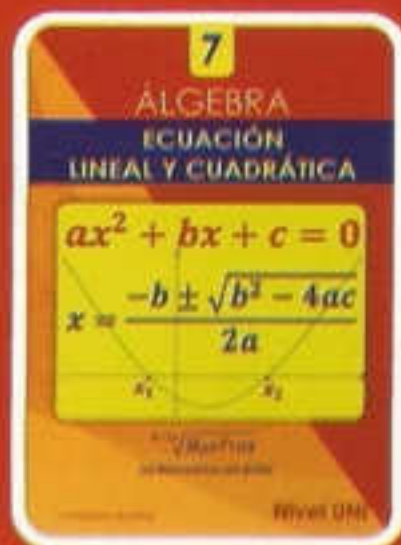


www.facebook.com/algebrapre

PNH
Wisk



OTRAS PUBLICACIONES



16.11.20

$\bar{x} - 14 \sqrt{\text{H}\mu\epsilon\tau\alpha\varsigma}$



twitter.com/calapenshko

Christiam Huertas



993 473 766



chr1614@hotmail.com



ALGEBRAPRE