<u>MACROECONOMIA</u>

Fernando de Holanda Barbosa

"IT DOES REQUIRE MATURITY TO REALIZE THAT MODELS ARE TO BE USED BUT NOT TO BE BELIEVED." [Theil (1971), p.VI].

"THE PROOF OF THE PUDDING IS IN THE EATING."

"ANY POLICY-MAKER OR ADVISER WHO THINKS HE IS NOT USING A MODEL IS KIDDING BOTH HIMSELF AND US."[Tobin, James].

" …IN THE DYNAMIC FIELD OF SCIENCE THE MOST IMPORTANT GOAL IS TO BE SEMINAL AND PATHBREAKING, TO LOOK FORWARD BOLDLY EVEN IF IMPERFECTLY."[Samuelson (1971), p X-XI].

" IT IS MUCH EASIER TO DEMONSTRATE TECHNICAL VIRTUOSITY THAN TO MAKE A CONTRIBUTION TO KNOWLEDGE. UNFORTUNATELY IT IS ALSO MUCH LESS USEFUL." [Summers (1991) p. 18].

" GENTLEMEN, IT IS A DISAGREEABLE CUSTOM TO WHICH ONE IS TO EASILY LED BY THE HARSHNESS OF THE DISCUSSIONS, TO ASSUME EVIL INTENTIONS. IT IS NECESSARY TO BE GRACIOUS AS TO INTENTIONS; ONE SHOULD BELIEVE THEM GOOD, AND APPARENTLY THEY ARE; BUT WE DO NOT HAVE TO BE GRACIOUS AT ALL TO INCONSISTENT LOGIC OR TO ABSURD REASONING. BAD LOGICIANS HAVE COMMITED MORE INVOLUNTARY CRIMES THAN BAD MEN HAVE DONE INTENTIONALLY." [Pierre S. du Pont, citado por Friedman(1994), p. 265].

Capítulo 2

<u>Gerações Superpostas</u>

Capítulo 3

<u>Crescimento Econômico</u>

PARTE II: MODELOS COM PREÇOS RÍGIDOS

Capítulo 4

Modelos Keynesiano e Novo-Keynesiano

Capítulo 5

Flutuação Econômica e Estabilização

Capítulo 6

Macroeconomia da Economia Aberta

PARTE III: MODELOS DE POLÍTICAS MONETÁRIA E FISCAL

Capítulo 7

Restrição Orçamentária do Governo

Capítulo 8

Teoria e Política Monetária

PARTE IV: APÊNDICE MATEMÁTICO

Apêndice A

Equações Diferenciais

5. Exercícios

Apêndice B

Teoria do Controle Ótimo

1. Controle Ótimo: Problema Básico

2. Hamiltoniano e Condição de Transversalidade

3. Controle Ótimo com Taxa de Desconto e Horizonte Infinito

4. Controle Ótimo Linear

5. Dinâmica Comparativa

   5.1 Mudança Permanente Não Antecipada
   5.2 Mudança Permanente Antecipada
   5.3 Mudança Transitória Não Antecipada
   5.4 Mudança Transitória Antecipada

6. Exercícios

BIBLIOGRAFIA

I) Geral

II) Clássicos

III) Livros Textos, Manuais e Coletâneas

Introdução

I.1 Macroeconomia

Macroeconomia é a aplicação da teoria econômica ao estudo do crescimento, do ciclo e da determinação do nível de preços da economia. Ela procura levar em conta os fatos estilizados observados no mundo real e construir arcabouços teóricos que sejam capazes de explicá-los. Nestes arcabouços existem, em geral, dois tipos de mecanismos: impulso e propagação. Os mecanismos de impulso são as causas das mudanças nas variáveis do modelo. Os mecanismos de propagação, como o próprio nome indica, transmitem os impulsos, ao longo do tempo, e são responsáveis pela dinâmica do modelo.

Um fato estilizado das economias de mercado, desde a revolução industrial do século dezenove na Inglaterra, é o crescimento econômico. Até então, a pobreza era um bem comum da humanidade. O crescimento econômico é a capacidade de a economia crescer de forma sustentada e permanente. Porque um país tem um nível de renda per - capita mais elevado que outro? Que forças fazem com que um país cresça mais rapidamente que outro? Novamente a pergunta que está presente em qualquer discussão econômica: Qual o papel do estado e do mercado no crescimento?

Outro fato estilizado de qualquer economia de mercado é o ciclo econômico, com suas características: i) a fase de contração da economia é curta e a fase de expansão é longa e ii) a duração de cada ciclo econômico é variável. Qual o papel do mercado e do estado no ciclo?

Um tema fascinante da macroeconomia é a determinação do nível de preços, isto é, o valor da moeda. Porque um ativo financeiro como o papel moeda, sem qualquer valor intrínseco, dominado por qualquer outro ativo financeiro que renda juros, tem valor? O valor da moeda afeta o ciclo econômico? O valor da moeda afeta o crescimento econômico? Um fato estilizado, observado em economias que não estão em processo de hiperinflação, é a não neutralidade da moeda no curto prazo, isto é, no ciclo econômico. A redução da taxa de juros nominal pelo banco central produz no curto prazo uma expansão do produto real. Um aumento da taxa de juros provoca uma contração no produto real da economia. Um fato estilizado de programas de estabilização exitosos que acabaram com hiperinflações é de que estes processos foram extintos sem a ocorrência de recessão. Quanto ao longo prazo, não existem fatos estilizados que mostrem uma relação sistemática entre o valor da moeda e o crescimento econômico. Todavia, as hiperinflações afetam negativamente o crescimento econômico. Mas as raízes desta patologia podem ter como determinantes fatores que afetam tanto a inflação como o crescimento.

O governo além de emitir moeda pelo banco central, uma instituição sob o controle do Tesouro, emite títulos públicos, com diferentes características, que pagam juros. A emissão destes títulos afeta as variáveis reais e (ou) nominais da economia? A macroeconomia procura responder esta questão.

A macroeconomia não pode deixar de lado o fato de que as economias não são fechadas. Cada país (ou um grupo de países) tem sua própria moeda e existe mobilidade de bens e serviços e de capitais. A mobilidade da mão de obra é, em geral, restrita por políticas de imigração. O regime de determinação da taxa de câmbio afeta o funcionamento da economia? Um fato estilizado do regime de câmbio flexível, desde que ele foi adotado pelas principais economias do mundo na primeira metade da década dos 70, é a correlação positiva entre as taxas de câmbio nominal e real. Como explicar esta não neutralidade da moeda? O crescimento e o ciclo são afetados pelo grau de abertura da economia?

Agenda Keynes

A macroeconomia surge com a Teoria Geral. Esta obra clássica de Keynes (1936) determinou a agenda de pesquisa por quase meio século. A agenda Keynes levou Hicks (1937), Modigliani (1944), Phillips (1958), Mundell (1963), Fleming (1962) e Friedman (1968) a desenharem a arquitetura do modelo macroeconômico do final da década dos 60 e dos livros textos de graduação na segunda metade da década dos 70. O modelo básico de curto prazo desta agenda, para uma economia fechada, consiste na combinação das curvas *IS/LL* de Hicks (1937), denominada de *IS/LM* por Hansen (1949), rigidez de preços e (ou) salários de Modigliani (1944) e uma curva de Phillips (1958) vertical no longo prazo, na versão de Friedman (1968).

Na economia aberta em que cada país, ou um grupo de países, tem sua moeda, o mecanismo de determinação do preço da moeda deste país vis a vis as moedas dos outros países e a mobilidade de capitais entre os países são cruciais no funcionamento da economia. Dois regimes cambiais, como casos polares, existem: os regimes de câmbio fixo e de câmbio flexível. No regime de câmbio fixo o preço da moeda é determinado pelo governo. No regime de câmbio flexível o preço é determinando pelo mercado. Na prática, não existe regime de câmbio fixo que seja eterno nem tampouco regime de câmbio flexível sem intervenção do governo. Mundell (1963) e Fleming (1962) estenderam o arcabouço do modelo de curto prazo de uma economia fechada, da agenda Keynes, para uma economia aberta, introduzindo a relação entre as taxas de juros interna e externa em virtude da mobilidade do capital e do processo de arbitragem que este movimento produz. Adicionalmente, analisaram o comportamento da economia de acordo com o regime cambial em vigor.

A agenda Keynes na área de crescimento econômico teve início com os trabalhos pioneiros de Harrod (1939) e Domar (1946). Este modelo de crescimento produzia um fio de navalha por onde a economia deveria caminhar. Fora do fio de navalha a economia não tinha salvação, pois não havia mecanismo que conduzisse a mesma ao pleno emprego do trabalho e do capital. Solow (1956) mostrou que este fio de navalha na verdade não existia. O sistema de preços daria conta da alocação dos recursos através de mudanças na relação capital/produto. O modelo de Solow tornou-se, então, o modelo básico de crescimento econômico desta agenda.

No início da década dos 70 a agenda Keynes chega ao seu final, com duas contribuições de Lucas [(1972), (1976)]. A primeira, denominada de expectativas racionais, vai permitir que se construam modelos consistentes nos quais as expectativas dos agentes para os eventos futuros desempenham papel crucial. Até então os agentes tinham uma previsão e o modelo produzia outra, completamente diferente da expectativa do agente. Depois de pouco tempo, as expectativas racionas foram completamente absorvidas pelos modelos da agenda Keynes, numa opção pelo rigor, coerência e evidência empírica.

Agenda Lucas

A segunda contribuição de Lucas é conhecida na literatura econômica pelo nome crítica de Lucas. A crítica de Lucas é devastadora para os modelos desenvolvidos pela agenda Keynes. Por quê? Porque ela afirma que as pessoas mudam seu comportamento quando as regras mudam. A explicação desta proposição é tão simples que depois que você entende você se pergunta: por que não pensei nisto antes? Admita que você jogue futebol duas vezes por semana com seus amigos, e que sempre exista um time do lado de fora esperando por sua vez para jogar. Num dia da semana a organização é a seguinte: o time que ganha fica para o próximo jogo, e o time que perde sai. No outro dia da semana a pelada tem outra organização. Na primeira partida vale o critério do vencedor. Da segunda partida em diante, cada time, ganhando ou perdendo, joga apenas duas partidas. O comportamento do jogador, que joga nos dois dias da semana, é o mesmo? A resposta é óbvia: cada um de nós dança de acordo com a música.

A agenda Lucas fez uso de dois tipos de modelos que tinham sido previamente desenvolvidos, mas que não faziam parte do treinamento dos macro-economistas até meados da década dos 70. O modelo do agente representativo de Ramsey (1928), Cass (1965), e Koopmans (1965) e o modelo de gerações superpostas de Samuelson (1958).

No início da década dos 80, Kydland e Prescott (1982) construiu um modelo, baseado no arcabouço do agente representativo, para explicar o ciclo econômico, que recebeu o nome de ciclo real, em virtude de o ciclo ser causado por choques tecnológicos, ao invés dos choques nominais dos modelos de ciclo econômico da agenda de Keynes. Este modelo influenciou toda uma geração de economistas por duas razões. Em primeiro lugar porque não fazia uso de nenhuma hipótese casuística, como a hipótese de rigidez de preços da agenda de Keynes. Em segundo lugar porque um modelo de equilíbrio geral, na tradição de Arrow/Debreu, era capaz de produzir o fenômeno do ciclo econômico. Todavia, boa parte da profissão não ficou convencida de que os choques tecnológicos teriam a magnitude necessária para provocar os ciclos econômicos. Nem tampouco que choques nominais da política monetária seriam irrelevantes no ciclo econômico.

No modelo de crescimento econômico da agenda de Keynes, o modelo de Solow, a taxa de progresso tecnológico, que determina a taxa de crescimento da renda per - capita, no longo prazo, é uma variável exógena. Na área do crescimento econômico, a agenda Lucas provocou o renascimento deste campo de pesquisa com dois trabalhos que deram origem aos modelos de crescimento endógeno, um do próprio Lucas (1988) e outro do Romer (1986), que têm como objetivo tornar endógena a taxa de crescimento, de longo prazo, da renda per - capita.

Fundamentos dos Modelos

Os modelos macroeconômicos da agenda Keynes são fundamentados em regras de comportamento, enquanto os modelos da agenda Lucas são modelos de otimização. Esta afirmação precisa ser qualificada para que não haja uma interpretação errônea. A agenda Keynes produziu um grande número de trabalhos importantes, que construíram modelos fundamentando as decisões de consumo [Friedman (1957), Modigliani e Brumberg (1954)], de investimento [Jorgenson (1963), Tobin (1969)] de demanda de moeda [Friedman (1956), Baumol (1952), Tobin (1958)]. Todavia, os modelos macroeconômicos de curto prazo, como nos modelos de Klein e Goldberger (1955), eram construídos especificando-se equação por equação, sem que houvesse um marco teórico comum que determinasse a especificação de cada uma das equações.

Os modelos baseados em regras de comportamento não mostram como estas regras seriam obtidas num processo de escolha, onde as opções fossem devidamente explicitadas. Os modelos são construídos para simular políticas econômicas, que são as regras do jogo dos atores econômicos, consumidores, trabalhadores e empresários.

Modelos nos quais o comportamento dos agentes seja invariante as políticas econômicas devem ser vistos com cautela.

Os modelos derivados da solução de problemas de otimização supõem que os jogadores tomem suas decisões conhecendo as regras do jogo, e são conhecidos na literatura como modelos com microfundamentos. O prefixo micro vem da microeconomia. Nestes modelos, os agentes maximizam sua função objetivo, condicionados pelas restrições que estão sujeitos e pelo ambiente econômico em que vivem.

Até que ponto os modelos baseados em regras de comportamento devem ser descartados e usar-se apenas os modelos com microfundamentos? Se o único critério de seleção de modelos fosse à estrutura teórica e sua fundamentação nos princípios básicos da teoria econômica, os modelos baseados em regras deveriam ser descartados. Todavia, mais importante do que a solidez teórica é a capacidade dos modelos explicarem os fatos observados no mundo real. A evidência empírica ainda não permite uma resposta definitiva sobre esta questão. Portanto, enquanto isto não ocorrer os dois tipos de modelos devem fazer parte da aprendizagem em macroeconomia.

Síntese Novo-Keynesiana (Novo-Neoclássica)

Na segunda metade da década dos 90 a agenda Lucas enveredou pelo desafio de dar uma nova roupagem aos modelos de ciclo econômico da agenda de Keynes, adotando a hipótese de rigidez de preços, mas procurando fundamentos na microeconomia para as curvas IS e de Phillips. Esta nova síntese tem sido denominada por uns de novo-keynesiana [Clarida, Galí e Gertler (1999)] e por outros de novo-neoclássica [Goodfriend (2004)].

Na primeira metade dos 90, Taylor (1993) propôs uma regra de política monetária para a taxa de juros nominal, do mercado interbancário, controlado pelos bancos centrais, que gradualmente passou a ser adotada pela maioria dos modelos de curto prazo. O sucesso desta regra deve-se ao fato de que nos países que adotam o regime de câmbio flexível os bancos centrais implementam a política monetária fixando a taxa de juros do mercado interbancário e não a quantidade de reservas bancárias, como implicitamente supunha a curva LM.

Os modelos de curto prazo, para uma economia fechada, sejam da agenda de Keynes ou da síntese novo-keynesiana (ou novo-neoclássica) consistem, portanto, de três equações, uma curva IS, uma curva de Phillips e uma regra de Taylor. A curva LM deixou de ser parte explícita dos modelos porque a moeda tornou-se endógena.

Integração das duas Agendas

Os livros textos de macroeconomia para a graduação contêm basicamente os modelos macroeconômicos da agenda Keynes, enquanto os livros textos dedicados a pós-graduação apresentam os modelos da agenda Lucas. Este livro não segue esta clivagem, apresentando ambos os tipos de modelos com a mesma linguagem matemática. Esta abordagem permite não somente uma melhor compreensão dos modelos de ciclo e de crescimento econômico, das duas agendas, mas também permite a comparação das previsões de cada um destes modelos.

I.2 Ferramenta Matemática

Os modelos econômicos usam três tipos de linguagem: i) verbal; ii) gráfica e iii) matemática. A linguagem verbal tem o benefício de ser mais accessível, porém muitas vezes tem o custo de deixar de lado o rigor lógico. A linguagem gráfica tem o benefício da facilidade de compreensão visual, mas às vezes pode-se incorrer no custo de deixar que a mão desenhe gráficos que não obedeçam as propriedades do modelo. A linguagem matemática tem o benefício do rigor lógico, mas o custo de aprendizagem das técnicas matemáticas nem sempre é desprezível.

A ferramenta matemática dos modelos apresentados neste livro é aquela que permite analisar os sistemas dinâmicos. Estes sistemas podem ser construídos com variáveis discretas ou com variáveis contínuas. Neste livro usaremos os sistemas dinâmicos com variáveis contínuas, que permitem sua representação gráfica nos diagramas de fases. O sistema dinâmico de variáveis contínuas pode ser representado por um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$\dot{x} = F\ (x, \alpha)$$

onde $\dot{x} = dx/dt$, x representa um vetor de variáveis endógenas e α um vetor de variáveis exógenas e (ou) parâmetros do modelo.

O modelo da economia, representado por este sistema dinâmico, deve ser analisado para estabelecer suas propriedades quanto i) ao equilíbrio; ii) a estabilidade e iii) a dinâmica comparativa. Na análise de equilíbrio verifica-se a existência do mesmo e se ele é único ou não. Isto é, no sistema de equações diferenciais existe um vetor $\bar{x}$ tal que $\dot{x} = 0$? Caso exista, ele é obtido resolvendo-se o sistema de equações:

$$F\ (\bar{x}, \alpha) = 0$$

Admitindo-se a existência de solução, o valor de equilíbrio pode ser escrito como função das variáveis exógenas e (ou) dos parâmetros do modelo. Isto é:

$$\bar{x} = \bar{x}\ (\alpha)$$

O vetor α representa a força motriz do modelo, isto é, os fundamentos do mesmo. O sistema dinâmico pode, então, ser linearizado em torno do ponto de equilíbrio $\bar{x}$, de acordo com:

$$\dot{x} = F_{\bar{x}}\ (x - \bar{x})$$

onde $F_{\bar{x}}$ representa as derivadas parciais de F com relação as variáveis *x,* avaliadas no ponto de equilíbrio estacionário. A análise de estabilidade (local) tem com objetivo saber o que acontece com o sistema dinâmico quando a variável x é diferente do seu valor de equilíbrio estacionário $\bar{x}$. Quando o sistema é estável a economia converge para o equilíbrio. Quando o sistema é instável a economia não converge para o equilíbrio estacionário.

A análise de estabilidade permite também que se verifique a possibilidade de existência de bolhas na economia. A bolha ocorre quando as variáveis endógenas mudam sem que haja mudança nas variáveis exógenas e (ou) nos parâmetros do modelo.

A dinâmica comparativa tem como objetivo analisar a resposta das variáveis endógenas às mudanças das variáveis exógenas e (ou) dos parâmetros do modelo. A dinâmica comparativa permite saber não somente o que acontece com o novo equilíbrio, mas também conhecer a trajetória de ajuste da economia. Os experimentos de dinâmica comparativa em conjunto com a análise de estabilidade do modelo permitem que se obtenham as proposições do modelo que podem ser refutadas empiricamente.

A diferença básica entre os modelos baseados em regras de comportamento e os modelos com microfundamentos é de que nos modelos com microundamentos o sistema de equações diferenciais é obtido da solução de um problema de otimização, a partir de um hamiltoniano. Nos modelos construídos a partir de regras tal hamiltoniano não existe. Adicionalmente, nos modelos com microfundamentos, a solução do problema de otimização tem de satisfazer uma condição de transversalidade, que permite selecionar entre várias trajetórias possíveis, que satisfazem as condições de primeira ordem, aquela que maximiza a função objetivo do problema.

I.3 Organização do Livro

Este livro está organizado em quatro partes. A Parte I trata dos modelos com preços flexíveis. A Parte II apresenta os modelos de preços rígidos A Parte III discute os modelos de políticas monetárias e fiscais. A Parte IV é um apêndice matemático com uma apresentação sucinta das técnicas matemáticas necessárias para a compreensão do livro. Cada capítulo tem uma lista de exercícios. Muitos destes exercícios são baseados na literatura citada na Bibliografia, embora a fonte não esteja documentada.

A Parte I, de modelos de preços flexíveis, contém três capítulos. O Capítulo 1 apresenta o modelo do agente representativo. O Capítulo 2 trata do modelo de gerações superpostas. O Capítulo 3 é dedicado ao crescimento econômico.

O Capítulo 1 apresenta o modelo do agente representativo que se tornou, desde a década dos 80, o carro chefe da macroeconomia com microfundamentos. O modelo do agente representativo é aplicado a uma economia com governo e a uma economia monetária. Nesta última analisa-se a questão da neutralidade da moeda com duas regras de política monetária, numa o banco central controla o estoque de moeda e noutra ele controla a taxa de juros nominal. Este capítulo apresenta também um modelo aonde o agente defronta-se com a escolha consumo versus lazer e supõe uma função de produção sujeita a choques tecnológicos. Estas duas hipóteses quando combinadas dão origem ao modelo de ciclos reais. O calcanhar de Aquiles do modelo do agente representativo é a economia aberta pequena. Este capítulo mostra que numa economia aberta pequena o modelo do agente representativo necessita de hipóteses casuísticas, de plausibilidade discutível, para que haja equilíbrio estacionário no mesmo.

O Capítulo 2 trata dos modelos de gerações superpostas, apresentando dois modelos, um com vida infinita e outro com vida finita. O modelo de gerações superpostas com vida infinita, aonde a cada momento do tempo nasce uma geração sem nenhum ativo financeiro e, portanto, desconectada das gerações existentes, é aplicado a uma economia com governo e também a uma economia aberta pequena. Este capítulo mostra que o modelo de gerações superpostas, diferente do modelo do agente representativo, pode ser aplicado numa economia aberta pequena sem que haja necessidade de se fazer qualquer hipótese casuística. No modelo de gerações superpostas com vida finita usa-se a hipótese simplificadora de que a probabilidade de morte do indivíduo independe de sua idade.

O Capítulo 3 apresenta modelos da teoria do crescimento econômico, que têm como objetivo explicar as causas que determinam o nível e a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra. No modelo de crescimento exógeno de Solow o consumo não é deduzido a partir da alocação intertemporal dos recursos. Este capítulo apresenta o modelo de Solow e também duas versões do modelo de crescimento exógeno com microfundamentos, uma com o agente representativo e outra com gerações superpostas. Os modelos de crescimento endógeno são apresentados tanto na versão sem microfundamentos como na versão com microfundamentos. Este capítulo apresenta também o arcabouço teórico da contabilidade do crescimento econômico.

A Parte II, de modelos com preços rígidos, contém três capítulos. O Capítulo 4 trata dos modelos keynesiano e novo-keynesiano. O Capítulo 5 é dedicado a análise da flutuação econômica e da estabilização. O Capítulo 6 apresenta os modelos da macroeconomia da economia aberta.

O Capítulo 4 trata da especificação de três equações dos modelos macroeconômicos de curto prazo: i) a relação entre taxa de juros real e produto real, a curva IS; ii) a relação entre a taxa de juros nominal e a quantidade de moeda, a curva LM; iii) a relação entre a taxa de desemprego (ou o hiato do produto) e a taxa de inflação, a curva de Phillips. A especificação de cada uma destas equações será feita por dois enfoques. No enfoque keynesiano tradicional as equações são motivadas por regras de comportamento, não fundamentadas em modelos de otimização. No enfoque novo-keynesiano, com microfundamentos, as especificações baseiam-se na teoria microeconômica. Os dois enfoques produzem não somente especificações distintas, mas também previsões diferentes que podem ser testadas empiricamente.

O Capítulo 5 apresenta o equilíbrio e a dinâmica de quatro modelos com preços rígidos. O primeiro tem uma curva IS, uma curva de Phillips, a regra de política monetária é a regra de Taylor, e existe inércia da taxa de inflação. O segundo modelo tem as mesmas equações do primeiro, mas não existe inércia na taxa de inflação. O terceiro é o modelo novo-keynesiano sem inércia da taxa de inflação, e com a curva IS derivada a partir da equação de Euler. No quarto modelo, o banco central controla a taxa de crescimento do estoque de moeda, de acordo com a regra de Friedman, e existe inércia tanto do nível de preços como da taxa de inflação. Embora esta regra não seja adotada por nenhum banco central do mundo, o modelo tem algumas propriedades que o torna atrativo do ponto de vista didático.

0 Capítulo 6 trata da macroeconomia da economia aberta. Este capítulo apresenta os modelos de arbitragem dos preços dos bens e serviços que são objeto do comércio internacional e das taxas de juros, doméstica e externa, dos ativos que participam do movimento de capitais entre países. Em seguida deduz-se a condição de Marshall-Lerner que estabelece as restrições para que haja correlação positiva entre a taxa de câmbio real e a conta corrente do balanço de pagamentos. As especificações da curva IS na economia aberta, que relaciona o produto real, a taxa de juros real e a taxa de câmbio real são apresentadas para o modelo tradicional e para o modelo com microfundamentos. Este capítulo analisa a determinação da taxa de câmbio real de equilíbrio de longo prazo, a taxa natural de câmbio real, mostrando que a determinação da taxa de juros natural é completamente diferente da sua determinação na economia fechada. Este capítulo trata ainda da especificação da curva de Phillips na economia aberta, que inclui a variação da taxa de câmbio real como um dos seus argumentos, e conclui com a análise dos modelos de regime de câmbio fixo e de câmbio flexível.

A Parte III, de modelos de políticas monetárias e fiscais, contém dois capítulos. O Capítulo 7 é dedicado a análise da restrição orçamentária do governo. O Capítulo 8 apresenta os modelos de teoria e política monetária.

O Capítulo 7 apresenta a restrição orçamentária do governo e vários tópicos que podem ser analisados a partir deste arcabouço contábil. A restrição orçamentária do governo resulta da consolidação das contas do Tesouro e do Banco Central. Ela permite que se estabeleçam as condições para que a dívida pública seja sustentável. A taxa de inflação pode ser interpretada como a alíquota do imposto inflacionário. Este capítulo apresenta, então, diferentes alternativas para o cálculo do custo social deste imposto. A patologia da hiperinflação é escrutinada com uma resenha dos diferentes modelos que procuram explicar este fenômeno. As condições para que exista equivalência ricardiana são devidamente analisadas neste capítulo, que ainda trata da teoria fiscal do nível de preços e das condições de sustentabilidade do regime monetário.

O Capítulo 8 apresenta vários tópicos da teoria e política monetária. Em primeiro lugar, cuida da determinação do preço da moeda como um preço de um ativo financeiro, com seus dois componentes: fundamentos e bolhas. Em seguida, mostra a possibilidade de equilíbrio múltiplo numa economia monetária, na qual um dos equilíbrios a moeda não tem valor. Este capítulo prossegue tratando da questão da indeterminação do preço da moeda quando o banco central adota uma regra de política monetária rígida fixando a taxa de juros nominal, independente das condições vigentes da economia. A quantidade ótima de moeda numa economia com preços flexíveis é um tema clássico da literatura que não pode ser excluído de qualquer livro de macroeconomia, a despeito de sua irrelevância na prática da política monetária. Este capítulo analisa a armadilha da liquidez na sua versão moderna com o limite zero da taxa de juros nominal. Trata também da inconsistência dinâmica, quando existem incentivos para que as decisões tomadas no presente para o futuro não sejam levadas a cabo. A inconsistência dinâmica faz parte do comportamento humano e tem implicações para a política monetária. A suavização da taxa de juros pelos banqueiros centrais que preferem não mudar bruscamente a taxa de juros, mas sim alterá-la gradualmente, produzindo certo grau de inércia no comportamento da taxa de juros do mercado interbancário é um fato estilizado. As conseqüências deste comportamento são devidamente analisadas. Este capítulo mostra como o programa de metas de inflação, um sistema adotado por vários bancos centrais do mundo depois de sua invenção pelo Banco Central da Nova-Zelândia, pode ser incorporado no arcabouço dos modelos macroeconômicos de curto prazo e analisa os procedimentos operacionais da política monetária no mercado de reservas bancárias. Neste mercado o banco central tem um papel dominante. Este capítulo mostra também como se pode introduzir a estrutura a termo da taxa de juros nos modelos macroeconômicos de curto prazo. Este arcabouço permite que se analise o efeito do anúncio do banco central com relação à taxa de juros de curto prazo sobre o nível de atividade e a taxa de inflação da economia.

A Parte IV, um apêndice matemático, contém dois capítulos. O Apêndice A é dedicado as técnicas de soluções de equações diferenciais. O Apêndice B trata da teoria do controle ótimo.

O Apêndice A apresenta alguns resultados básicos de equações diferenciais lineares, de primeira e de segunda ordem, e de sistemas lineares de equações diferenciais de primeira ordem, que são largamente utilizados no texto.

O Apêndice B apresenta de maneira sucinta a teoria do controle ótimo, tratando do problema básico de controle ótimo, do hamiltoniano e da condição de transversalidade. Este apêndice discute ainda o controle ótimo com taxa de desconto e horizonte infinito, o controle ótimo linear e analisa a dinâmica comparativa da solução do problema do controle ótimo.

PARTE I: MODELOS COM PREÇOS FLEXÍVEIS

Capítulo 1

Agente Representativo

O modelo do agente representativo tornou-se, desde a década dos 80, o carro chefe da macroeconomia com microfundamentos. Este capítulo trata deste modelo. A primeira seção apresenta o modelo básico. A segunda seção introduz o governo na economia. A terceira seção trata do modelo de uma economia monetária. A quarta seção introduz a escolha consumo versus lazer e supõe que a função de produção esteja sujeita a choques tecnológicos. Estas duas hipóteses quando combinadas dão origem ao modelo de ciclos reais. A quinta seção trata do calcanhar de Aquiles do modelo do agente representativo: a economia aberta. Esta seção mostra que numa economia aberta pequena o modelo do agente representativo necessita de hipóteses casuísticas, de plausibilidade discutível, para que haja equilíbrio estacionário no mesmo.

1. Modelo Básico

O agente representativo maximiza o valor presente do fluxo de utilidade do consumo, *u(c)*, ao longo de sua vida infinita, descontado pela sua taxa de preferência intertemporal ρ. A população cresce a uma taxa contínua igual a *n*. No momento inicial a população é normalizada e tomada como unidade ($L_0 = 1$). O problema do agente representativo consiste, portanto, em maximizar

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c)\, L_0\, e^{n t}\, d\, t = \int_0^\infty e^{-(\rho - n) t}\, u(c)\, d\, t \,,\ \rho > n$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)\, k$$

$$k(0) = k_o \,,\ dado$$

A taxa de preferência intertemporal deve ser maior que a taxa de crescimento populacional, caso contrário a integral não convergiria. A primeira restrição é a equação de acumulação de capital, na qual o produto da economia é destinado ao consumo ou ao investimento. A função de produção supõe retornos constantes de escala nos fatores de produção capital e trabalho. A função de produção está escrita na forma intensiva, isto é, o produto per capita depende da relação capital/trabalho *k*: $Y = F(K, L) = L\, f(k)$. A taxa de depreciação do capital é constante e igual a δ. A segunda restrição do modelo afirma que a relação capital/mão de obra inicial do modelo é dada.

O hamiltoniano de valor corrente *H* deste problema é dado por:

$$H = u(c) + \lambda \left[f(k) - c - (\delta + n)\, k \right]$$

onde λ é a variável de co-estado. As condições de primeira ordem são as seguintes:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u'(c) - \lambda = 0$$

$$\dot{\lambda} = (\rho - n)\lambda - \frac{\partial H}{\partial k} = (\rho - n)\,\lambda - \lambda\left[f'(k) - (\delta + n)\right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f\left(k\right) - c - (\delta + n)k = \dot{k}$$

A solução ótima deve satisfazer a condição de transversalidade:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda\ k\, e^{-\rho\, t} = 0$$

Esta condição afirma que a trajetória ótima deve ser tal que o valor presente do capital, em termos de utilidade, deve ser igual a zero quando o tempo cresce de forma ilimitada. Caso contrário, o agente poderia aumentar seu bem estar diminuindo a acumulação de capital e consumindo seus recursos.

O agente representativo neste modelo tem que decidir, a cada momento do tempo, se consome ou se poupa e investe na acumulação de capital. A segunda equação das condições de primeira ordem é justamente a condição de arbitragem desta decisão. Caso o agente decida poupar e investir um real a mais seu retorno será igual à produtividade marginal líquida do capital: $f'(k) - \delta$. Por outro lado, se o agente decidir consumir este real seu retorno será igual à taxa de retorno no consumo, a taxa de preferência intertemporal ρ, adicionado do ganho de capital, que neste caso é uma perda, pois o preço do consumo, a utilidade marginal do consumo, diminui quando o consumo aumenta. Em equilíbrio, a condição de arbitragem é dada por:

$$f'(k) - \delta = \rho - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

A primeira equação das condições de primeira ordem estabelece que a utilidade marginal do consumo seja igual à variável de co-estado. Derivando-se esta equação com relação ao tempo obtém-se:

$$u''\left(c\right)\dot{c} = \dot{\lambda} \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{u''\left(c\right)}{u'\left(c\right)}\,\dot{c}$$

Sistema Dinâmico

Quando se substitui a expressão de $\dot{\lambda}$ da equação de arbitragem na equação anterior resulta na equação diferencial do consumo. A segunda equação diferencial do modelo corresponde à terceira condição de primeira ordem, que reproduz à restrição do problema. O sistema dinâmico do modelo é formado, então, pelas duas equações diferenciais:

$$\dot{c} = \frac{u'(c)}{u''(c)}\left[\rho + \delta - f'\left(k\right)\right]$$

$$\dot{k} = f\left(k\right) - c - (\delta + n)\ k$$

A matriz jacobiana deste sistema, no ponto de equilíbrio estacionário, é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial k} \\ \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{u'(\bar{c})}{u''(\bar{c})} f''(\bar{k}) \\ -1 & f'(\bar{k}) - \delta - n \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é negativo porque tanto a utilidade marginal do consumo como a produtividade marginal do capital são decrescentes. Isto é:

$$\left|J\right| = -\frac{u'(\bar{c})}{u''(\bar{c})} f''(\bar{k}) < 0$$

Logo, o ponto de equilíbrio estacionário é um ponto de sela.

A Figura 1.1 contém os diagramas de fases das duas equações diferenciais do sistema dinâmico. Nos pontos nos quais o consumo não muda ($\dot{c} = 0$), a produtividade marginal líquida do capital é igual à taxa de preferência intertemporal do agente representativo:

$$f'(k) - \delta = \rho$$

A relação capital/mão de obra permanece constante ($\dot{k} = 0$) quando o consumo é dado por:

$$c = f(k) - (\delta + n)\ k$$

O ponto de máximo do consumo ocorre quando a taxa de juros, a produtividade marginal líquida do capital, é igual à taxa de crescimento da população:

$$f'(k_G) - \delta = n$$

A quantidade de capital (k_G) corresponde ao nível de consumo da regra de ouro. As setas nos diagramas da Figura 1.1 indicam o movimento das variáveis quando elas estão fora do equilíbrio.

A Figura 1.2 mostra o diagrama de fases do modelo. Para uma dada relação capital/mão de obra inicial a única trajetória que satisfaz a condição de transversalidade é a trajetória de sela *SS*. No equilíbrio estacionário, a taxa de juros é igual à taxa de preferência intertemporal, que, por hipótese, é maior do que a taxa de crescimento populacional. Portanto, no modelo do agente representativo não há ineficiência dinâmica, isto é, a relação capital/mão de obra sempre será inferior ao valor que corresponde à regra de ouro.

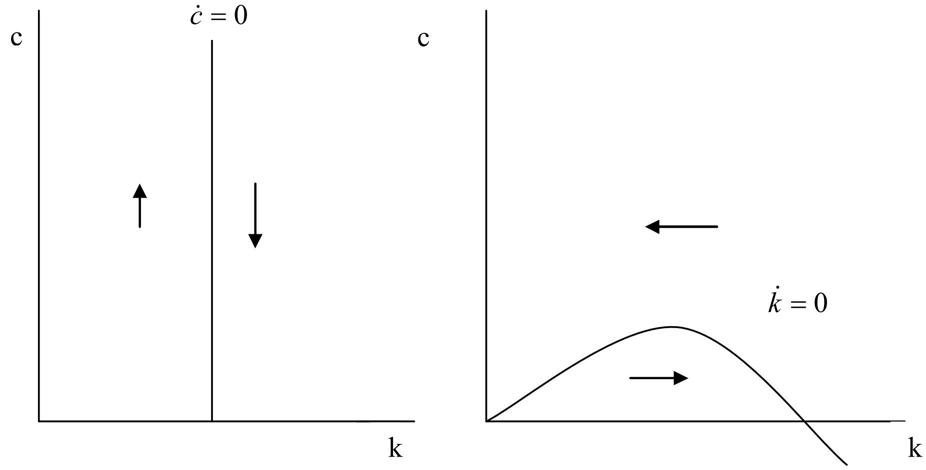


Figura1.1

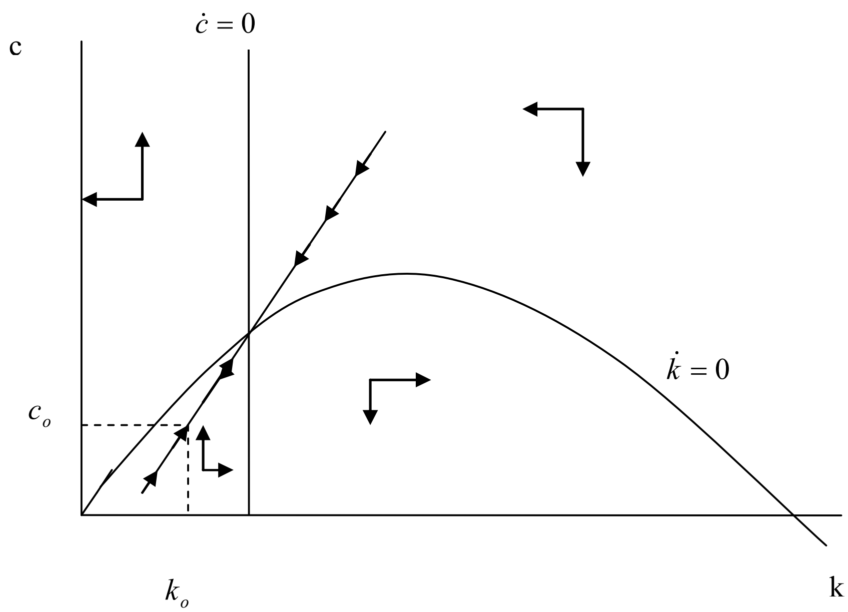


Figura1.2

Experimento

A Figura 1.3 mostra uma mudança permanente, não antecipada, na taxa de preferência intertemporal desta economia. A taxa de preferência intertemporal diminui de ρ_0 para ρ_1. A taxa de juros de longo prazo desta economia diminui e a quantidade de capital aumenta como descrita na Figura 1.4. O consumo tem, no início, uma queda instantânea, e a economia descreve uma trajetória na nova sela do modelo. No equilíbrio de longo prazo, o consumo terá um nível maior do que aquele que existia antes da mudança da taxa de preferência intertemporal, o mesmo acontecendo com o estoque de capital.

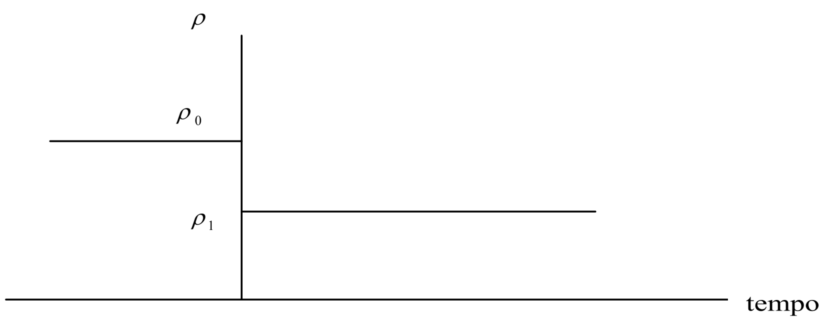


Figura 1.3

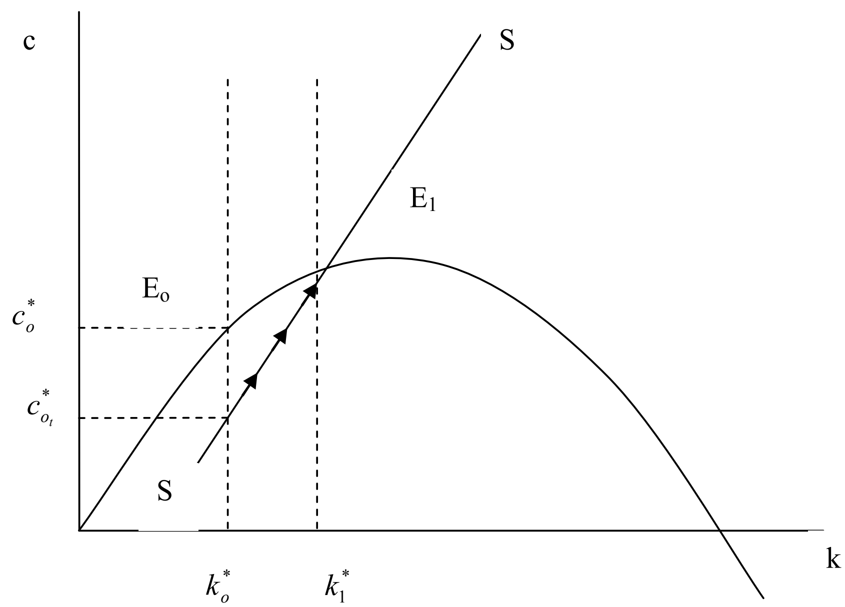


Figura 1.4

<u>2. Economia com Governo</u>

No modelo do agente representativo com governo existe equivalência ricardiana, isto é, a dívida pública não afeta sua decisão de consumir e poupar. Para demonstrar esta proposição tome-se como ponto de partida as restrições orçamentárias, em termos de fluxos, do agente e do governo:

$$\frac{\dot{A}}{L} = ra + y - c - \tau$$

$$\frac{\dot{B}}{L} = rb + g - \tau$$

onde $\dot{A}$ é a variação do patrimônio do agente, L é a população, r a taxa de juros, a o patrimônio per capita, y a renda per capita, c o consumo per capita, τ o imposto per capita. A variação da dívida pública é representada por $\dot{B}$, b é a dívida pública per capita e g é o gasto do governo per capita. Como

$$\frac{\dot{A}}{L} = \dot{a} + na \quad ; \quad \frac{\dot{B}}{L} = \dot{b} + nb$$

as duas restrições orçamentárias transformam-se em:

$$\dot{a} = (r - n)a + y - c - \tau$$

$$\dot{b} = (r - n)b + g - \tau$$

As soluções destas duas equações diferenciais, supondo-se que não haja jogo de Ponzi, resultam nas restrições intertemporais dos setores privado e público:

$$a(t) = \int_t^{\infty} e^{-(r-n)(v-t)} \, (c + \tau - y) \, dv$$

$$b(t) = \int_t^{\infty} e^{-(r-n)(v-t)} \, (\tau - g) \, dv$$

Subtraindo-se uma restrição da outra se obtém:

$$a(t) - b(t) + \int_t^{\infty} e^{-(r-n)(v-t)} (y - g) \, dv = \int_t^{\infty} e^{-(r-n)(v-t)} c \, dv$$

Conclui-se, então, que a trajetória dos impostos é irrelevante para a decisão de consumo do agente. A dívida pública não é considerada riqueza para os agentes desta economia, pois da riqueza total a subtrai-se o estoque da dívida pública b.

No modelo do agente representativo com governo adota-se a hipótese de que o orçamento do governo esteja sempre equilibrado: $g = \tau$, onde g é o gasto do governo e τ é um imposto do tipo soma total (*lump sum,* em inglês), que não distorce as decisões do agente. Esta hipótese não é restritiva porque neste ambiente existe equivalência ricardiana. Admita-se, também, que o bem estar do agente não seja afetado pelo gasto do governo. O problema do agente representativo consiste, portanto, em maximizar

$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho - n)t} \, u(c) \, d\, t$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{k} = f(k) - c - g - (\delta + n)k$$

$$k(0) = k_o, \; dado$$

A solução deste modelo é a mesma do modelo da seção anterior, exceto que a equação de acumulação do capital contém os gastos do governo. O sistema dinâmico é formado, então, pelas duas equações diferenciais:

$$\dot{c} = \frac{u'(c)}{u''(c)} \left[\rho + \delta - f'(k)\right]$$

$$\dot{k} = f(k) - c - g - (\delta + n)\ k$$

A matriz jacobiana deste sistema é igual a do modelo da seção anterior. O ponto de equilíbrio é um ponto de sela. A única alteração é na equação de $\dot{k}$, pois a equação de $\dot{c}$ permanece a mesma. A Figura 1.5 contém o diagrama de fases do modelo. Dado a quantidade inicial de capital, a sela *SS* é a trajetória de equilíbrio que satisfaz a condição de transversalidade.

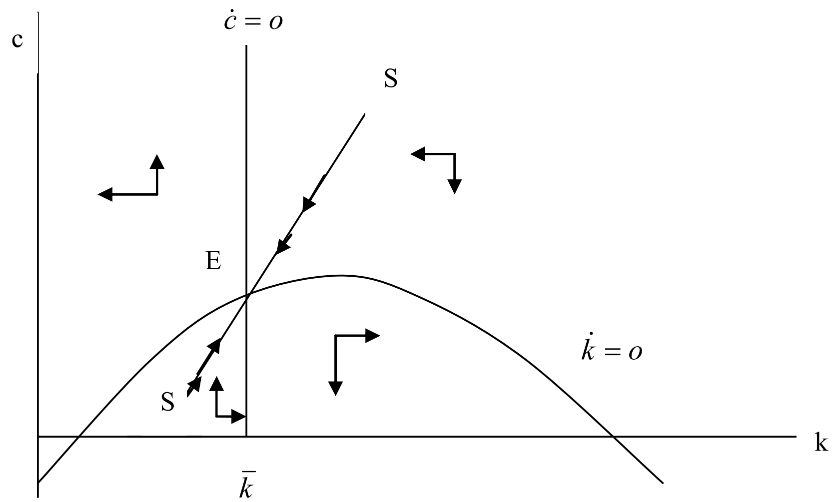


Figura 1.5

Experimentos

Uma pergunta interessante neste modelo é saber o que acontece com a taxa de juros quando o governo aumenta seus gastos. A Figura 1.6 trata do caso de um aumento permanente, não antecipado, dos gastos do governo, de g_0 para g_1. O consumo tem uma redução instantânea e o estoque de capital permanece inalterado. A taxa de juros, portanto, fica exatamente igual a que prevalecia antes do governo aumentar seus gastos.

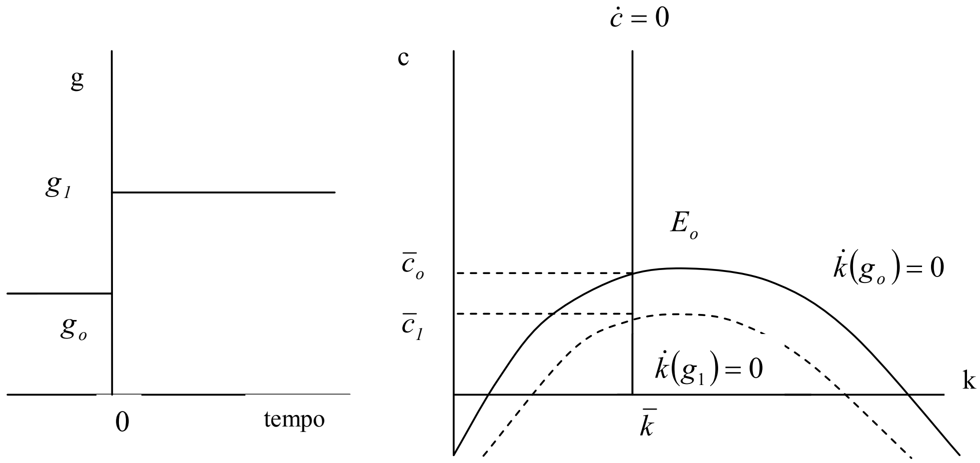


Figura 1.6

A Figura 1.7 analisa o caso de um aumento permanente, antecipado, dos gastos do governo. No momento do anúncio o consumo diminui, a poupança aumenta e o estoque de capital aumenta. A taxa de juros, portanto, diminui. Todavia, no instante da mudança dos gastos a economia deve estar na nova sela, caso contrário a condição de transversalidade não seria satisfeita e a economia não convergiria para seu novo equilíbrio estacionário. Neste novo equilíbrio a quantidade de capital é exatamente igual a que existia no momento do anúncio da política de aumento de gastos. A conclusão que se chega é que, neste caso, a redução da taxa de juros é apenas transitória.

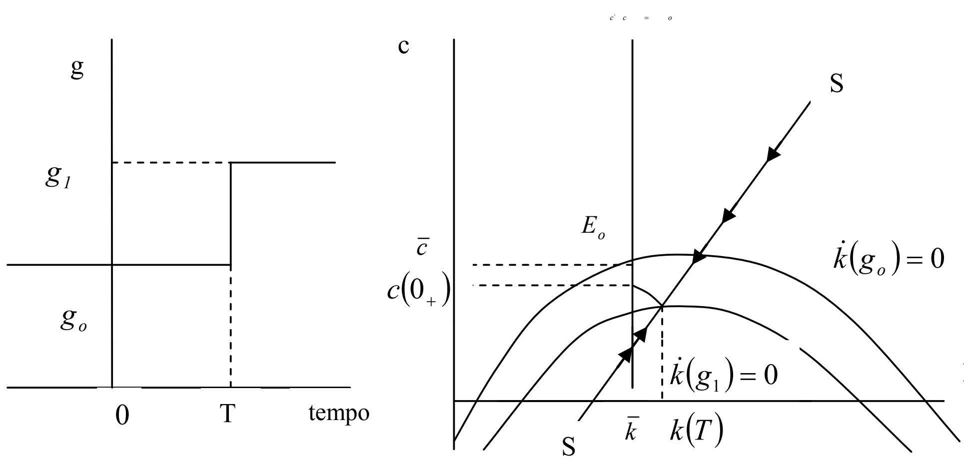


Figura 1.7

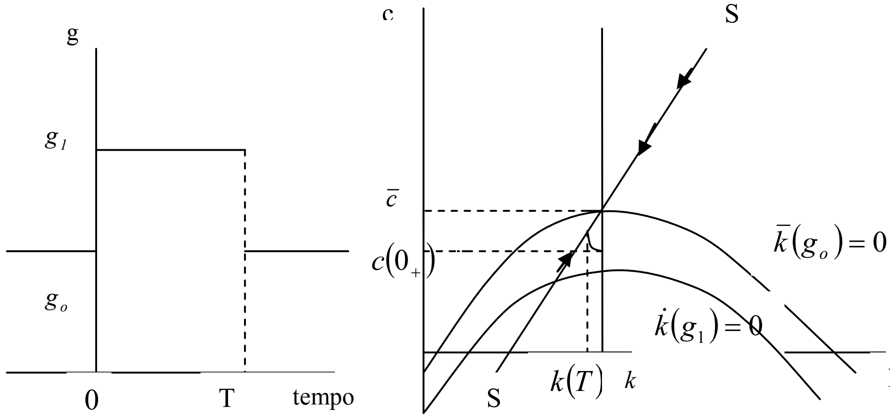


Figura 1.8

A Figura 1.8 trata do caso em que o aumento dos gastos do governo é transitório e não antecipado. No momento do anúncio o consumo diminui, mas de um valor inferior ao aumento dos gastos. A poupança privada diminui e a acumulação de capital também diminui. A redução do estoque de capital faz com que a taxa de juros aumente. Quando os gastos do governo voltam ao seu nível inicial, no instante de tempo *T*, a economia deve estar na antiga sela do modelo. Caso contrário, a condição de transversalidade não seria satisfeita. A economia converge, então, para seu antigo ponto de equilíbrio estacionário. Neste ponto, a taxa de juros permanece com o mesmo valor que tinha antes da mudança de política. A conclusão que se chega é de que o aumento dos gastos do governo afeta a taxa de juros, mas o aumento da taxa de juros é apenas transitório.

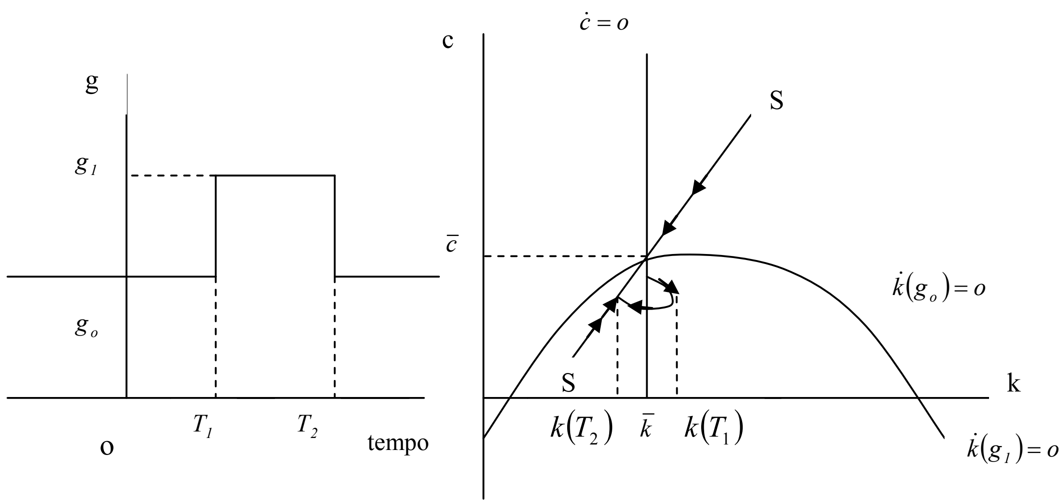


Figura 1.9

A Figura 1.9 apresenta o caso de um aumento transitório, antecipado, dos gastos do governo. No momento do anúncio o consumo diminui, a poupança aumenta e o estoque de capital também aumenta. A taxa de juros, portanto, diminui. No momento em que ocorre o aumento dos gastos do governo a poupança diminui e o estoque de capital começa a declinar. Este processo continua até o momento final da política de aumento dos gastos do governo. Neste momento, a economia deve estar na antiga trajetória de sela do modelo. Caso contrário, a economia não convergiria para o equilíbrio estacionário. Neste caso, a taxa de juros diminui inicialmente, depois ela aumenta e volta ao seu nível inicial. A conclusão que se chega é de que as mudanças na taxa de juros são apenas transitórias.

3. Economia Monetária

Esta seção tem como objetivo analisar como a moeda afeta o produto real, o estoque de capital e o consumo da economia. Na primeira subseção o banco central segue uma regra de política monetária de controle do estoque de moeda. Na segunda subseção, o modelo da economia monetária tem uma regra de política monetária na qual o banco central controla a taxa de juros nominal.

3.1 Regra de Política Monetária: Controle do Estoque de Moeda

A moeda pode ser introduzida nos modelos a partir de diferentes enfoques. Um deles consiste em supor que a moeda, diferente de outros ativos financeiros, produz serviços em virtude de a mesma ser usada como meio de pagamentos. Admita-se, então, que a utilidade do agente representativo depende do consumo (*c*) e dos serviços da moeda (*m*) de acordo com uma função separável expressa por:

$$U(c,m) = u(c) + v(m)$$

As funções *u(c)* e *v(m)* seguem as propriedades tradicionais, isto é, as utilidades marginais são positivas, decrescentes, as utilidades marginais são positivas quando as variáveis tendem para zero, e se aproximam de zero quando as variáveis tendem para infinito.

A restrição orçamentária, em termos de fluxos, do agente estabelece que os rendimentos, provenientes de sua renda *(y)* e das transferências (τ) do governo, financiam o consumo (*c*), o investimento (*i*), e o acréscimo no estoque de moeda ($\dot{M}/P$). Isto é:

$$y + \tau = c + i + \frac{\dot{M}}{P}$$

Levando-se em conta que o investimento bruto (*i*) é igual ao acréscimo de capital ($\dot{k}$) mais a depreciação do mesmo ($\delta\, k$), $i = \dot{k} + \delta\, k$ e que $(\dot{M}/P) = \dot{m} + m\,\pi$, a restrição orçamentária pode ser escrita como:

$$y + \tau = c + \dot{k} + \delta\, k + \dot{m} + m\,\pi$$

A riqueza (a) do agente é igual a soma dos estoques de capital e moeda: $a = k + m$. Logo: $\dot{a} = \dot{k} + \dot{m}$. A restrição orçamentária do agente, em termos de fluxos, mostra como varia sua riqueza:

$$\dot{a} = y + \tau - c - \delta\, k - \pi\, m$$

Nesta economia, a produção é feita combinando-se capital e trabalho, numa função de produção com retornos constantes de escala. A função de produção na forma intensiva é expressa por *f(k)*. A restrição orçamentária é, então, dada por:

$$\dot{a} = f\left(k\right) + \tau - c - \delta\, k - \pi\, m$$

O problema do agente consiste, portanto, em maximizar

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\left[u\left(c\right) + v\left(m\right)\right] d\, t$$

sujeito às restrições

$$\dot{a} = f\left(k\right) + \tau - c - \delta\, k - \pi\, m$$

$$a = k + m$$

$$a\left(0\right) = a_o \text{ , } dado$$

A restrição $a = k + m$ será usada para substituir o estoque de capital, $k = a - m$, na equação de transição da variável de estado *a*. O hamiltoniano de valor corrente é, então, dado por:

$$H = u\left(c\right) + v\left(m\right) + \lambda\left[f\left(a - m\right) + \tau - c - \delta\left(a - m\right) - \pi\, m\right]$$

As condições de primeira ordem são as seguintes:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u'\left(c\right) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial m} = v'\left(m\right) + \lambda\left[f'\left(k\right)\left(-1\right) + \delta - \pi\right] = 0$$

$$\dot{\lambda} = \rho\, \lambda - \frac{\partial H}{\partial a} = \rho\, \lambda - \lambda\left[f'\left(k\right) - \delta\right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f\left(a - m\right) + \tau - c - \delta\left(a - m\right) - \pi\, m = \dot{a}$$

A solução ótima do problema tem de satisfazer à condição de transversalidade:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda\, a\, e^{-\rho t} = 0$$

A primeira equação das condições de primeira ordem estabelece que a utilidade marginal do consumo seja igual à variável de co-estado, $u'(c) = \lambda$. Da combinação das duas primeiras condições obtém-se a propriedade tradicional de que a taxa marginal de substituição entre consumo e moeda seja igual à taxa de juros nominal:

$$\frac{v'(m)}{u'(c)} = f'(k) - \delta + \pi$$

Governo

O governo nesta economia emite moeda e transfere (τ) os recursos da senhoriagem para a sociedade. A restrição orçamentária do governo é, então, dada por:

$$\tau = \frac{\dot{M}}{P}$$

A política monetária consiste em expandir o estoque nominal de moeda a uma taxa constante e igual a μ. A taxa de expansão da quantidade real de moeda é igual à diferença entre a taxa de expansão do estoque nominal de moeda e a taxa de inflação:

$$\dot{m} = m\,(\mu - \pi)$$

Equilíbrio no Mercado de Bens e Serviços

O mercado de bens e serviços está em equilíbrio quando a produção for igual ao dispêndio:

$$y = f(k) = c + \dot{k} + \delta\, k$$

O dispêndio tem dois componentes: o consumo e o investimento bruto.

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico do modelo desta economia é formado por três equações diferenciais, do consumo, do estoque de capital e da quantidade real de moeda. Isto é:

$$\dot{c} = \frac{u'(c)}{u''(c)}\left[\rho + \delta - f'(k)\right]$$

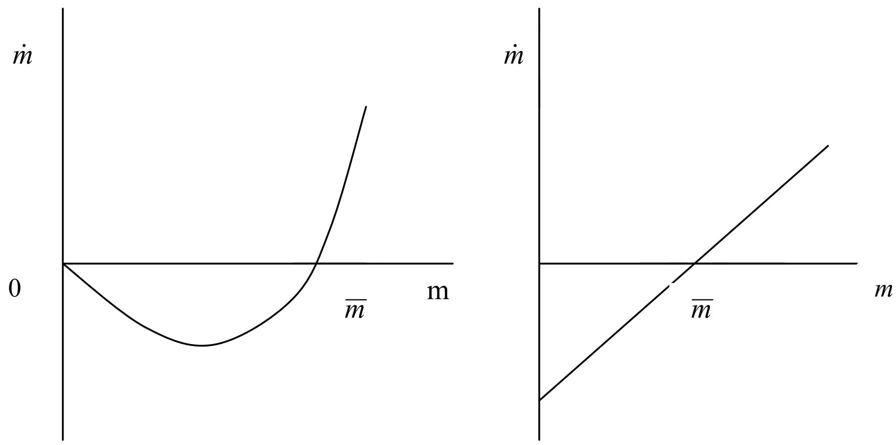
$$\dot{k} = f(k) - c - \delta\, k$$

$$\dot{m} = (\mu + \rho)\, m - \frac{m\, v'(m)}{u'(c)}$$

Este sistema dinâmico tem a propriedade de ser separável, isto é, as duas primeiras equações diferenciais podem ser resolvidas independentemente da última. No estado estacionário, $\dot{c}=0, \dot{k}=0$, o capital e o consumo não dependem da taxa de inflação:

$$f'(\bar{k})-\delta=\rho \quad ; \quad \bar{c}=f(\bar{k})-\delta\,\bar{k}$$

No estado estacionário, a moeda neste modelo além de ser neutra é também superneutra. A moeda é neutra quando mudança do estoque nominal da moeda não afeta o produto real da economia. A moeda é superneutra quando uma mudança na taxa de expansão do estoque de moeda não afeta o produto real da economia.



a) Equilíbrio Múltiplo

b) Equilíbrio Único

Figura 1.10

A solução da equação diferencial do estoque real de moeda pode ter um único equilíbrio estacionário ou dois equilíbrios, como desenhado na Figura 1.10. A unicidade ou não do equilíbrio estacionário depende do limite:

$$\lim_{m \to o} m\ v'(m)$$

Quando o limite for positivo existe apenas um único equilíbrio, como mostra a Figura 1.10 b. Quando este limite for igual a zero $m=0$ é um equilíbrio estacionário do modelo, ou seja, nesta economia existe a possibilidade de que a moeda não tenha valor. Alguns autores denominam esta situação de bolha. Todavia, ela não é uma bolha propriamente dita, pois o valor dos serviços da moeda se aproxima de zero quando o estoque real de moeda tende para zero. Esta proposição torna-se fácil de compreender com a solução da equação diferencial do estoque real de moeda:

$$m(t)=\int_t^{\infty} e^{-(\mu+\rho)(x-t)} \frac{mv'(m)}{u'(c)}\,dx + C\,e^{(\mu+\rho)t}$$

O segundo componente desta expressão é a solução de bolha, o primeiro é a solução de fundamentos. Logo, se *C=0* e o $\lim_{m \to o} m\ v'(m)=0$, *m(t)=0* não é solução de bolha, e sim de fundamentos. Neste modelo o nível de preços inicial é uma variável endógena, e pode mudar de valor instantaneamente, de tal sorte que a quantidade real de moeda seja a quantidade de equilíbrio quando o estoque nominal de moeda seja um dado do problema.

3.2 Regra de Política Monetária: Controle da Taxa de Juros Nominal

A função utilidade do agente representativo depende do consumo (c) e do estoque real de moeda (m), de acordo com:

$$u(c,m),\, u_c > 0,\, u_m \geq 0$$

As utilidades marginais do consumo e da moeda são positivas. A função utilidade é côncava, e sua matriz hessiana é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} u_{cc} & u_{cm} \\ u_{mc} & u_{mm} \end{bmatrix}$$

Admite-se que o consumo e a moeda são complementares, isto é, a utilidade marginal do consumo aumenta quando o estoque real de moeda aumenta. Como a função é côncava as utilidades marginais do consumo e da moeda são decrescentes:

$$u_{cm} = u_{mc} \;,\; u_{cm} \geq 0 \;,\; u_{cc} < 0 \;,\; u_{mm} \leq 0$$

A concavidade da função utilidade implica que o determinante da matriz hessiana seja positivo:

$$|H| = u_{cc}\; u_{mm} - u_{cm}^2 \geq 0$$

O problema do agente representativo consiste, portanto, em maximizar

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c,m)dt$$

sujeito às restrições:

$$\dot{a} = f(k) + \tau - c - \delta k - \pi m$$

$$a = k + m$$

$$a(0) = a_0 \quad dado$$

O hamiltoniano de valor corrente é, então, dado por:

$$H = u(c,m) + \lambda[f(a-m) + \tau - c - \delta(a-m) - \pi m]$$

onde usou-se a restrição $a = k + m$ para eliminar-se a variável k. As condições de primeira ordem são as seguintes:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u_c - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial m} = u_m + \lambda \left[\, f_k(-1) + \delta - \pi \right] = 0$$

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial a} = \rho\lambda - \lambda \left[f_k(k) - \delta \right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(a-m) + \tau - c - \delta\,(a-m) - \pi\, m = \dot{a}$$

A solução ótima do problema tem que satisfazer à condição de transversalidade:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda \; a \; e^{-\rho\, t} = 0$$

Regra de Política Monetária

O banco central fixa a taxa de juros nominal (*R*) adicionando à taxa de juros real a taxa de inflação:

$$R = f_k - \delta + \pi$$

Restrição Orçamentária do Governo

O governo emite moeda e transfere para a sociedade os recursos desta emissão:

$$\tau = \frac{\dot{M}}{P} = \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{P} = \mu\, m$$

Álgebra

A combinação das duas primeiras condições de primeira ordem estabelece que a taxa de substituição entre moeda e consumo seja igual à taxa de juros nominal:

$$\frac{u_m}{u_c} = R$$

Esta equação define implicitamente a equação de demanda de moeda: $m = L(c, R)$. A diferencial desta equação é obtida diferenciando-se a equação anterior. Isto é:

$$u_{mm}\; dm + u_{mc}\;\; dc = u_c dR + R\;\, u_{cm} dm + R\, u_{cc}\; dc$$

que pode ser escrita, depois de reagrupar seus termos, como:

$$\left(u_{mm} - R\, u_{cm}\right) dm = u_c \;\, dR + \left(R\, u_{cc} - u_{mc}\right) dc$$

Logo, a diferencial da equação de demanda de moeda, em termos percentuais, é dada por:

$$\frac{dm}{m} = \frac{u_c\, R}{\left(u_{mm} - R\, u_{cm}\right)m}\ \frac{dR}{R} + \left(\frac{R\, u_{cc} - u_{mc}}{u_{mm} - R\, u_{cm}}\right)\frac{c}{m}\,\frac{dc}{c}$$

Os coeficientes de dR/R e de dc/c são as elasticidades da quantidade real de moeda com relação à taxa de juros, $\varepsilon_{m,R}$, e ao consumo, $\varepsilon_{m,c}$:

$$\varepsilon_{m,R} = \frac{u_m}{\left(u_{mm} - R\, u_{cm}\right)m}$$

$$\varepsilon_{m,c} = \left(\frac{R\, u_{cc} - u_{mc}}{u_{mm} - R\, u_{cm}}\right)\frac{c}{m}$$

Na expressão da elasticidade da quantidade real de moeda com relação à taxa de juros levou-se em conta que $u_c\ R = u_m$. O valor absoluto desta elasticidade é igual a ξ. Isto é:

$$\left|\varepsilon_{m,R}\right| = \frac{u_m}{\left(u_{mm} - R\, u_{cm}\right)m} = \xi$$

A primeira equação da condição de primeira ordem estabelece que a utilidade marginal do consumo seja igual à variável de co-estado λ:

$$u_c = \lambda$$

Derivando-se esta expressão com relação ao tempo, obtém-se:

$$u_{cc}\ \dot{c} + u_{cm}\ \dot{m} = \dot{\lambda}$$

Logo, a derivada da quantidade real de moeda com relação ao tempo é igual a:

$$\dot{m} = \frac{\dot{\lambda} - u_{cc}\ \dot{c}}{u_{cm}}$$

Derivando-se com relação ao tempo a equação que define implicitamente a equação de demanda de moeda, $u_m = R\ u_c$, tem-se:

$$u_{mc}\ \dot{c} + u_{mm}\ \dot{m} = \dot{R}\ u_c + R\, u_{cc}\ \dot{c} + R\, u_{cm}\ \dot{m}$$

Reagrupando-se os termos desta expressão resulta:

$$\left(u_{mc} - R\ u_{cc}\right)\dot{c} + \left(u_{mm} - R\ u_{cm}\right)\dot{m} = u_c\ \dot{R}$$

Substituindo-se o valor da derivada da quantidade real de moeda com relação ao tempo, obtida anteriormente, nesta expressão, tem-se:

$$\left(u_{mc} - R\,u_{cc}\right)\dot{c} + \left(u_{mm} - R\,u_{cm}\right)\left(\frac{\dot{\lambda} - u_{cc}\,\dot{c}}{u_{cm}}\right) = u_c\,\dot{R}$$

Esta equação, depois de reagrupar os termos que multiplicam $\dot{c}$, pode ser reescrita como:

$$\left(u_{mc} - \frac{u_{mm}\,u_{cc}}{u_{cm}}\right)\dot{c} + \left(\frac{u_{mm} - R\,u_{cm}}{u_{cm}}\right)\dot{\lambda} = u_c\,\dot{R}$$

Multiplicando-se ambos os lados da mesma por u_{cm} tem-se:

$$\left(u_{mc}\,u_{mc} - u_{mm}\,u_{cc}\right)\dot{c} = \left(R\,u_{cm} - u_{mm}\right)\dot{\lambda} + u_c\,u_{cm}\,\dot{R}$$

Conclui-se, então, que a taxa de crescimento do consumo depende da taxa de crescimento da variável de co-estado e da taxa de crescimento da taxa de juros nominal, de acordo com:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\left(R\,u_{cm} - u_{mm}\right)u_c}{c\left(u_{cm}^2 - u_{mm}\,u_{cc}\right)}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{c}\left(\frac{u_{cm}\,u_m}{u_{cm}^2 - u_{mm}\,u_{cc}}\right)\frac{\dot{R}}{R}$$

Colocando-se em evidência o termo que multiplica $\dot{\lambda}/\lambda$ resulta em:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\left(R\,u_{cm} - u_{mm}\right)u_c}{c\left(u_{cm}^2 - u_{mm}\,u_{cc}\right)}\left[\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{u_{cm}\,u_m}{\left(R\,u_{cm} - u_{mm}\right)u_c}\frac{\dot{R}}{R}\right]$$

Levando-se em conta que

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - f_k + \delta\,,\ \text{e}\quad \frac{u_m}{R\,u_{cm} - u_{mm}} = m\,\xi$$

a taxa de crescimento do consumo é igual a:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\left(R\,u_{cm} - u_{mm}\right)u_c}{c\left(u_{cm}^2 - u_{mm}\,u_{cc}\right)}\left[\rho - f_k + \delta + \xi\frac{u_{cm}\,m}{u_c}\frac{\dot{R}}{R}\right]$$

A elasticidade da utilidade marginal do consumo com relação à moeda é definida por:

$$\phi = \frac{u_{cm}\,m}{u_c} = \frac{\partial u_c}{\partial m}\frac{m}{c}$$

Logo, a taxa de crescimento do consumo pode ser escrita como:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\left(R\,u_{cm} - u_{mm}\right)u_c}{c\left(u_{mm}u_{cc} - u_{cm}^2\right)}\left[f_k - \delta - \rho - \xi\,\phi\,\frac{\dot{R}}{R}\right]$$

Para simplificar a notação, o parâmetro $\sigma(c,m)$ é definido por:

$$\sigma(c,m) = \frac{(R\,u_{cm} - u_{mm})u_c}{c(u_{mm}\,u_{cc} - u_{cm}^2)}$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico do modelo consiste, portanto, das duas equações diferenciais, uma do consumo e a outra do estoque de capital:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(c,m)\left[f_k - \delta - \rho - \xi\,\phi\,\frac{\dot{R}}{R}\right]$$

$$\dot{k} = f(k) - \delta\,k - c$$

No estado estacionário deste sistema dinâmico, a taxa de juros real é igual a:

$$f_k - \delta = \rho + \xi\,\phi\frac{\dot{R}}{R}$$

Seja o parâmetro γ definido por:

$$\xi\,\phi\frac{\dot{R}}{R} = -\gamma$$

A taxa de crescimento da taxa de juros nominal é, portanto, igual a:

$$\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{\gamma}{\xi\,\phi}$$

Logo, a taxa de juros real da economia é dada por:

$$f_k - \delta = \rho - \gamma$$

A política monetária pode escolher o parâmetro γ e afetar o estoque de capital equilíbrio da economia. A solução ótima deste modelo tem de satisfazer a condição de transversalidade: $\lim_{t\to\infty} \lambda\,a\,e^{-\rho\,t} = 0$. Esta condição estabelece que a riqueza (a), avaliada em termos de utilidade ($\lambda\,a$) pode crescer a uma taxa menor do que a taxa de preferência intertemporal (ρ). A taxa de crescimento da variável de co-estado (λ) cresce a uma taxa igual a γ. Isto é:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - (f_k - \delta) = \rho - (\rho - \gamma) = \gamma$$

Logo, o parâmetro γ deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$\gamma < \rho$$

A conclusão que se chega é que a política monetária não é superneutra. O banco central pode escolher uma trajetória para a taxa de juros nominal e afetar o estoque de capital e o produto no estado estacionário da economia.

4. Ciclos Reais

O modelo de ciclos reais admite que mudanças do produto real e do emprego no ciclo econômico não são causadas por rigidez no sistema de preços, nem tampouco por choques nominais da política monetária. Os ciclos são causados por choques tecnológicos. Daí o nome real para este modelo. As suas principais características são: i) as decisões dos agentes econômicos, consumidores, trabalhadores e empresários, baseiam-se em otimização intertemporal, com expectativas racionais; ii) o equilíbrio geral da economia é especificado, e iii) as propriedades qualitativas e quantitativas do modelo são analisadas e estudadas.

A função de produção

$$Y = A\,F(K, L)$$

é homogênea do primeiro grau nos fatores de produção, capital (*K*) e trabalho (*L*). A letra *A* representa os choques de tecnologia.

A função utilidade do agente representativo é separável, em consumo (*C*) e lazer (ℓ):

$$u(C) + v(\ell)$$

com as propriedades tradicionais destas funções.

O agente aloca seu tempo disponível ($\bar{t}$) entre trabalho (*L*) e lazer (ℓ):

$$L + \ell = \bar{t}$$

A renda (*Y*) do agente é gasta em consumo (*C*) e investimento, $I = \dot{K} + \delta K$, para aumento do estoque de capital $(\dot{K})$ e para repor o capital gasto (δK) no processo produtivo, onde δ é a taxa de depreciação. Isto é:

$$Y = C + I = C + \dot{K} + \delta\, K$$

O agente representativo resolve o seguinte problema:

$$\max \int_o^\infty e^{-\rho t}\left[u(C) + v(\ell)\right] d\,t$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{K} = A\,F(K, L) - C - \delta\, K$$

$$L + \ell = \bar{t}$$

$$K(0) = K_o, \quad dado$$

A restrição do tempo pode ser usada para substituir o lazer ($\ell = \bar{t} - L$) na função utilidade. O hamiltoniano de valor corrente é, então, dado por:

$$H = u(C) + v(\bar{t} - L) + \lambda\left[AF(K, L) - C - \delta K\right]$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = u_c - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = -v_\ell + \lambda \, A F_L = 0$$

$$\dot{\lambda} = \rho \lambda - \frac{\partial H}{\partial K} = \rho \lambda - \lambda \left(A F_K - \delta\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = A F(K, L) - C - \delta K = \dot{K}$$

A primeira condição estabelece que a variável de co-estado seja igual à utilidade marginal do consumo. O agente a cada momento do tempo tem que alocar seu tempo entre lazer e trabalho. A segunda equação das condições de primeira ordem trata desta escolha: a produtividade marginal do trabalho tem que ser igual à taxa marginal de substituição entre lazer e consumo. A terceira equação das condições de primeira ordem trata da escolha entre consumo e poupança: a taxa de preferência intertemporal deve ser igual à produtividade marginal líquida do capital adicionada ao ganho com a redução do consumo. A última equação das condições de primeira ordem reproduz a restrição orçamentária do agente.

A condição de transversalidade estabelece que o valor presente do capital, em termos de utilidade, seja igual a zero no futuro distante:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda K e^{-\rho t} = 0$$

A solução deste problema é, então, dada pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} u_c = \lambda \\ A F_L = \dfrac{v_\ell}{\lambda} \\ \dot{\lambda} = \lambda\left[\rho - A F_K + \delta\right] \\ \dot{K} = A F(K, L) - C - \delta K \\ L + \ell = \bar{t} \\ \lim_{t \to \infty} \lambda K e^{-\rho t} = 0 \end{cases}$$

A primeira equação, da igualdade entre a utilidade marginal do consumo e a variável de co-estado, pode ser usada para substituí-la no sistema de equações. Esta substituição produz o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A F_L = \dfrac{v_\ell}{u_c} \\ \dot{C} = \dfrac{u_c}{u_{cc}} \left[\rho - A F_K + \delta\right] \\ \dot{K} = A F(K, L) - C - \delta K \\ L + \ell = \bar{t} \\ \lim_{t \to \infty} u_c K e^{-\rho t} = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema será feita para o caso particular em que as funções de produção, de utilidade do consumo e utilidade do lazer têm as seguintes formas funcionais: $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$;*U(C) = log C* ; e $v(\ell) = \beta \ell$. As derivadas parciais destas funções são: $F_L = (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} = (1-\alpha)(K/L)^\alpha$, $F_K = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha (K/L)^{\alpha-1}$, $u_c = 1/C$, e $v_\ell = \beta$. A produtividade marginal da mão de obra é igual à taxa marginal de substituição entre lazer e consumo:

$$A F_L = \frac{v_\ell}{u_c} \Rightarrow \cdot A (1-\alpha) k^\alpha = \frac{\beta}{1/C}$$

onde k é a relação *K/L*. Segue-se, então, que o consumo depende da relação k de acordo com:

$$C = \frac{A(1-\alpha)}{\beta} k^\alpha$$

A taxa de crescimento do consumo, a derivada do logaritmo do consumo com relação ao tempo, é proporcional a taxa de crescimento da relação capital/mão de obra k:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \alpha \frac{\dot{k}}{k}$$

A equação de Euler deste problema é dada por:

$$\dot{C} = \frac{1/C}{-1/C^2} \left[\rho - A F_K + \delta\right]$$

Logo, a combinação das duas últimas equações resulta na seguinte equação diferencial para k:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{1}{\alpha} \left[A \alpha k^{\alpha-1} - \rho - \delta\right]$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico deste modelo é formado pelas equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{k} = A k^{\alpha} - \dfrac{(\rho+\delta)}{\alpha} k \\ \dot{K} = A K\, k^{\alpha-1} - \dfrac{A(1-\alpha)}{\beta} k^{\alpha} - \delta K \end{cases}$$

A solução de equilíbrio estacionário, $\dot{k} = \dot{K} = 0$, deste sistema é dada por:

$$\bar{k} = \left(\frac{\alpha A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad ; \quad \bar{K} = \frac{\alpha(1-\alpha)A}{\beta\left[\rho+(1-\alpha)\delta\right]}\left(\frac{\alpha A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

O equilíbrio estacionário do número de horas trabalhadas, $\bar{L} = \bar{K}/\bar{k}$, independe do parâmetro *A* que representa progresso tecnológico:

$$\bar{L} = \frac{(1-\alpha)\,(\rho+\delta)}{\beta(\rho+(1-\alpha)\,\delta}$$

A matriz jacobiana do sistema dinâmico é igual a:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial k} & \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial K} \\ \dfrac{\partial \dot{K}}{\partial k} & \dfrac{\partial \dot{K}}{\partial K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha A k^{\alpha-1} - \dfrac{\rho+\delta}{\alpha} & 0 \\ (\alpha-1) A K\, k^{\alpha-2} - \dfrac{A\alpha(1-\alpha)}{\beta} & A k^{\alpha-1} - \delta \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz, no ponto de equilíbrio estacionário, é dado por:

$$|J| = \left(\alpha\ A\ k^{\alpha-1} - \frac{\rho+\delta}{\alpha}\right)\left(A\ k^{\alpha-1} - \delta\right) = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha^2}(\rho+\delta)\left(\rho+(1-\alpha)\delta\right) < 0$$

Conclui-se, portanto, que o ponto de equilíbrio estacionário deste modelo é um ponto de sela.

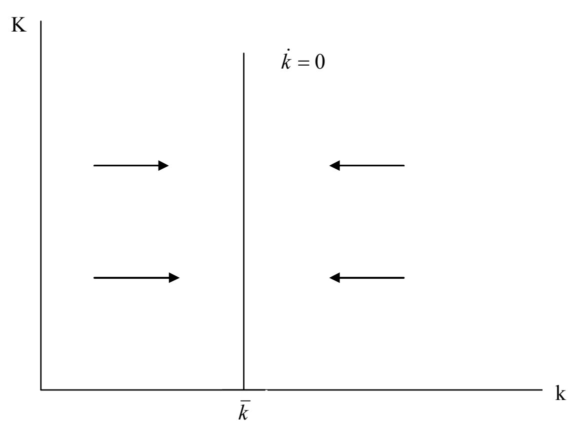


Figura 1.11

A Figura 1.11 contém o diagrama de fases da equação diferencial de *k*. Quando $\dot{k} = 0$, $k = \bar{k}$. Para valores de *k* maiores do que $\bar{k}$, *k* diminui, ocorrendo o contrário para valores inferiores, como indicado nas setas da Figura 1.11.

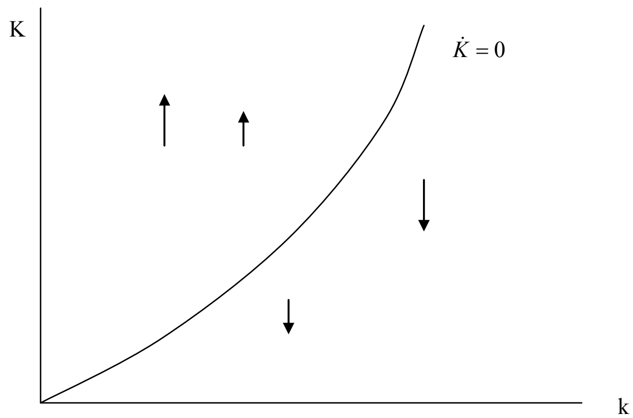


Figura 1.12

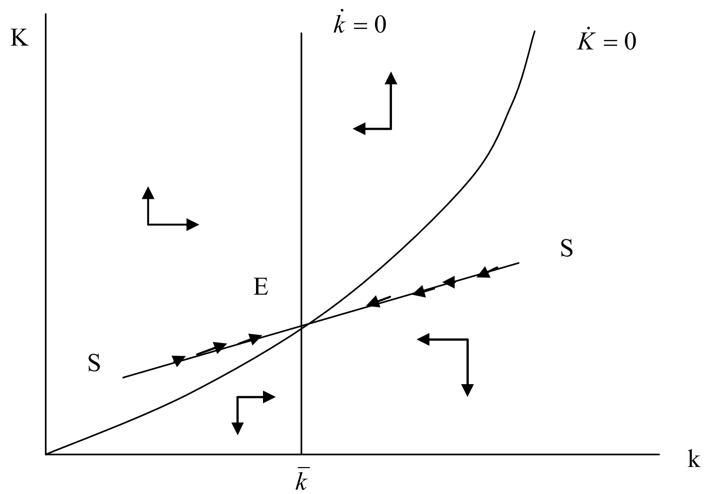


Figura1.13

A Figura 1.12 mostra o diagrama de fases da equação diferencial de *K*. Quando $\dot{K} = 0$, tem-se que:

$$K = \frac{A\left(1-\alpha\right)k^{\alpha}}{\beta\left[A\,k^{\alpha-1} - \delta\right]}$$

As setas da Figura 1.12 mostram que para pontos acima desta curva *K* aumenta, ocorrendo o contrário para pontos abaixo da curva.

A Figura 1.13 contém o diagrama de fases do modelo. A trajetória da sela *SS* mostra que, para um dado valor inicial do estoque de capital, a economia converge para o estado estacionário.

Experimentos

No modelo de ciclos reais o ciclo econômico é gerado pelo progresso tecnológico. Um choque tecnológico positivo aumenta o parâmetro A. Um choque tecnológico negativo diminui o parâmetro A. O choque positivo deve-se a avanços na tecnologia que aumenta as produtividades dos fatores de produção. Os choques negativos devem ser entendidos como restrições, em grande parte devido a razões políticas, que impedem o uso eficiente dos recursos, pois não faz o mínimo sentido imaginar-se que a sociedade desaprendeu o que sabia fazer. Para analisar as conseqüências de mudanças no parâmetro tecnológico A podem-se fazer exercícios de dinâmica comparativa, com mudanças permanentes ou transitórias, antecipadas ou não. A Figura 1.14 trata de um aumento permanente, não antecipado, no parâmetro A.

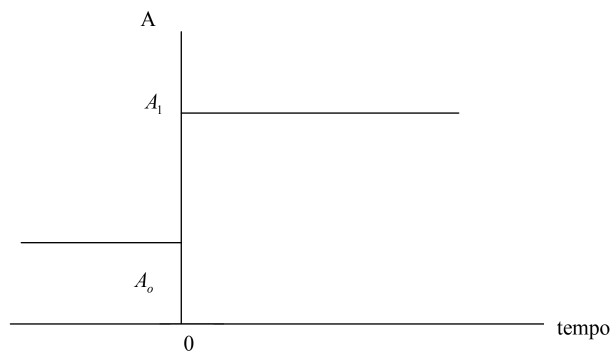


Figura 1.14

A Figura 1.15 descreve o exercício de dinâmica comparativa. O equilíbrio inicial do sistema era no ponto E_0. O gráfico desta figura não mostra as curvas que passavam por este ponto para não sobrecarregá-la. Quando ocorre a mudança tecnológica as curvas de $\dot{k}=0$ e de $\dot{K}=0$ deslocam-se e passam agora pelo ponto E_f. O capital inicial era aquele que havia no ponto de equilíbrio inicial. A trajetória de sela *SS* leva a economia ao novo equilíbrio estacionário, pois somente esta trajetória satisfaz a condição de transversalidade. Neste novo equilíbrio, tanto o estoque de capital como a relação capital/mão de obra aumenta. Todavia, no novo equilíbrio estacionário o número de horas trabalhadas continua exatamente igual ao número de horas trabalhadas no antigo equilíbrio. Isto é, na Figura 1.15 deve-se ter: $\bar{K}(1)/\bar{k}(1)=\bar{K}(0)/\bar{k}(0)=\bar{L}$. Durante o processo de ajuste, o número de horas trabalhadas não permanece constante. Inicialmente o número de horas trabalhadas aumenta, pois a relação k diminui. Ao longo do tempo, o número de horas trabalhadas diminui, até voltar ao seu equilíbrio estacionário.

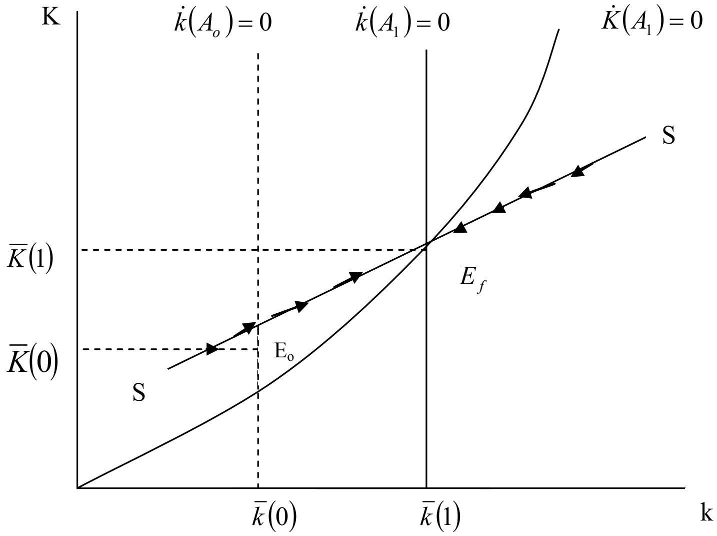


Figura 1.15

A Figura 1.16 trata de uma mudança transitória no parâmetro A que representa o progresso tecnológico. Decorridos um período T o parâmetro A volta ao seu antigo valor. A Figura 1.17 mostra a dinâmica do sistema diante deste choque. A curva $\dot{K}(A_0)=0$ não está desenhada na Figura 1.17, para não sobrecarregá-la. A economia no instante T tem que estar na sela SS, caso contrário ela não convergirá para o equilíbrio estacionário. Inicialmente a relação k aumenta, isto é, o número de horas trabalhadas diminui, a poupança aumenta e o estoque de capital também aumenta. A partir do instante T o estoque de capital e a relação capital/mão de obra começam a diminuir. No longo prazo, a economia volta ao seu antigo equilíbrio estacionário.

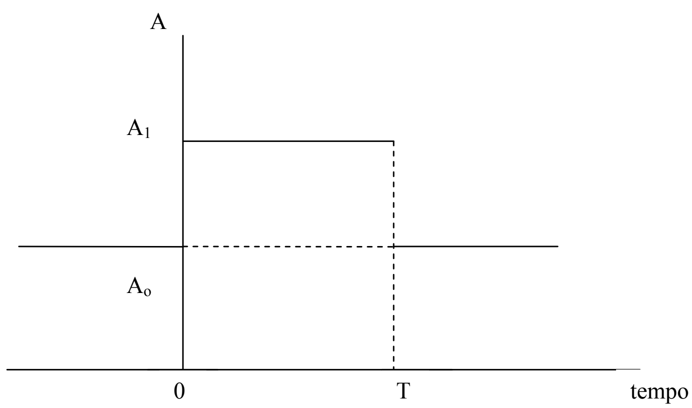


Figura 1.16

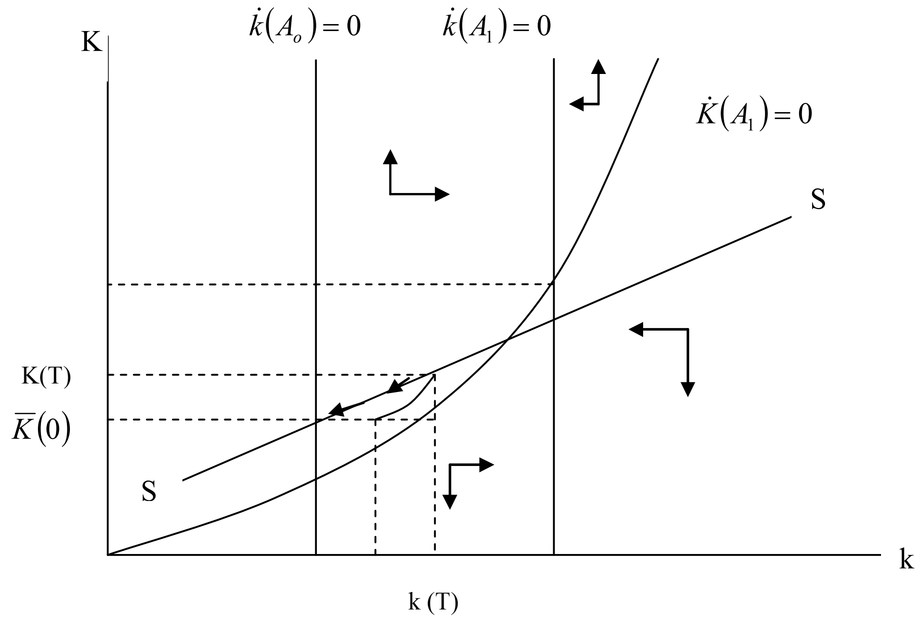


Figura 1.17

Ciclos Reais Numa Economia com Governo

Quando o governo é introduzido no modelo de ciclos reais a única mudança no sistema dinâmico é a variável que representa os gastos do governo (g). Ela entra na equação diferencial do estoque de capital K, pois neste caso o dispêndio inclui, além do consumo e do investimento, os gastos do governo. O sistema dinâmico é, então, dado pelas duas equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{k} = A k^{\alpha} - \dfrac{(\rho+\delta)}{\alpha} k \\ \dot{K} = A K\, k^{\alpha-1} - \dfrac{A(1-\alpha)}{\beta} k^{\alpha} - g - \delta K \end{cases}$$

Neste modelo, mudanças nos gastos do governo alteram o equilíbrio da economia. As mudanças podem ser permanentes ou não, não antecipadas ou anunciadas. Portanto, os ciclos da economia podem ser causados não somente pela tecnologia, mas também pela política fiscal.

5. Economia Aberta

Numa economia aberta existe tanto mobilidade de bens e serviços como de capital. Os modelos da economia aberta devem especificar os tipos de bens e serviços que caracterizam a economia. Na literatura existem dois tipos de estruturas, uma de inspiração keynesiana e outra da economia dependente. A Tabela 1.1 descreve estes dois tipos de estrutura. Existem dois bens, o bem X e o bem Y. No modelo keynesiano um bem é doméstico e o outro importado. O bem doméstico também é exportado. No modelo da economia dependente um bem é comercializável e o outro não é objeto do comércio internacional. A primeira questão que tem de ser tratada nos modelos da economia aberta é como agregar estes bens. A próxima seção é dedicada a este tema.

Tabela 1.1

Modelos	Bem X	Bem Y
Keynesiano	Doméstico	Importado
Economia Dependente	Comercializável	Não Comercializável

5.1 Agregação de Bens

Admita-se que existam dois bens, *X* e *Y*, os consumos destes dois bens são representados, respectivamente, por C_x e C_Y. O consumo agregado C será calculado pela função de agregação $F\left(C_x, C_y\right) = C$. O nível de preços P deve ser determinado de tal sorte que a restrição orçamentária $P\,C = P_x\,C_x + P_y\,C_y$ seja satisfeita. Para determinar o nível de preços, o seguinte problema deve ser resolvido. Minimizar

$$E = P_x\,C_x + P_y\,C_y$$

sujeito à seguinte restrição:

$$F\left(C_x, C_y\right) = C$$

O lagrangiano deste problema é dado por:

$$L = P_x C_x + P_y C_y + \lambda\left[C - F\left(C_x, C_y\right)\right]$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. As condições de primeira ordem para o mínimo são:

$$\frac{\partial L}{\partial C_x} = P_x - \lambda\frac{\partial F}{\partial C_x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_y} = P_y - \lambda\frac{\partial F}{\partial C_y} = 0$$

Quando se divide uma equação pela outra, para eliminar-se o multiplicador de Lagrange, conclui-se que o preço relativo é igual à taxa marginal de substituição dos dois bens. Esta equação juntamente com a equação de agregação forma um sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{P_x}{P_y} = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial C_x}}{\dfrac{\partial F}{\partial C_y}} \\ C = F\left(C_x, C_y\right) \end{cases}$$

Na solução deste sistema os consumos dos dois bens dependem, então, do preço relativo e do consumo agregado:

$$\begin{cases} C_x = C_x\left(P_x / P_y, C\right) \\ C_y = C_y\left(P_x / P_y, C\right) \end{cases}$$

Substituindo-se estas duas equações na função objetivo tem-se que o dispêndio mínimo é dado por:

$$E = P_x C_x\left(P_x / P_y, C\right) + P_y C_y\left(P_x / P_y, C\right)$$

O dispêndio total é igual ao produto do consumo agregado pelo nível de preços: $E = PC$. Quando $C = 1 \Rightarrow P = E$. Logo, o nível de preços é obtido fazendo-se $C=1$ na equação de dispêndio mínimo:

$$P = P_x C_x\left(P_x / P_y, 1\right) + P_y C_y\left(P_x / P_y, 1\right)$$

Exemplo: Função Cobb-Douglas

Admita-se que a função de agregação seja uma função Cobb-Douglas:

$$C = C_x^{\alpha} C_y^{\beta}$$

O preço relativo deve ser igual a taxa marginal de substituição:

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial C_x}}{\dfrac{\partial F}{\partial C_y}} = \frac{\alpha\, C_x^{\alpha-1} C_y^{\beta}}{\beta\, C_x^{\alpha} C_y^{\beta-1}} = \frac{\alpha\, C_y}{\beta\, C_x}$$

Esta equação juntamente com a equação de agregação resulta nas equações de consumo de cada bem:

$$C_x = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{P_x}{P_y}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} C^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$C_y = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{P_x}{P_y}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} C^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Substituindo-se estas duas equações na equação de dispêndio, e fazendo-se *C=1* obtém-se o nível de preços associado à função Cobb-Douglas:

$$P = E(C=1) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} P_x \left(\frac{P_x}{P_y}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} P_y \left(\frac{P_x}{P_y}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

O nível de preços é, também, do tipo Cobb-Douglas, e dado por um índice geométrico:

$$P = \gamma\, P_x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} P_y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \quad ; \quad \gamma = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Utilidade do Agente Representativo

No modelo do agente representativo o bem estar do mesmo é medido por uma função utilidade que depende do consumo agregado:

$$u = u(C)$$

O consumo agregado, por sua vez, é obtido por uma função que agrega os dois bens,

$$C = F(C_X, C_Y)$$

A esta função de agregação está associado um nível de preços tal que a seguinte relação seja válida:

$$P\,C = P_X\, C_X + P_Y\, C_Y$$

5.2 Modelo com Taxa de Preferência Intertemporal Constante

Numa economia aberta pequena o agente representativo maximiza o valor presente do fluxo de utilidades,

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\, u(c)\, dt$$

sujeito à restrição orçamentária:

$$\dot{a} = ra + y - c$$

A receita dos investimentos financeiros ($r\,a$) mais a renda de outras fontes (y) menos os gastos de consumo (c) é igual a variação do patrimônio ($\dot{a}$) do agente. O valor inicial do seu patrimônio, que pode ser positivo ou negativo, é dado. Isto é:

$$a(0) = a_0 \;\; dado$$

A taxa de juros numa economia aberta pequena é determinada pelo mercado financeiro internacional e este país não tem condição de alterá-la. O país tanto pode ser um credor líquido como um devedor líquido.

O hamiltoniano de valor corrente é dado por:

$$H = u(c) + \lambda\,(ra + y - c)$$

As condições de primeira ordem deste problema são:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{\partial u}{\partial c} - \lambda = 0$$

$$\dot{\lambda} = \rho\,\lambda - \frac{\partial H}{\partial\, a} = \rho\,\lambda - \lambda\, r$$

$$\frac{\partial H}{\partial\,\lambda} = ra + y - c = \dot{a}$$

e a seguinte condição de transversalidade deve ser satisfeita:

$$\lim_{t \to \infty}\ \lambda\ a\ e^{-r\,t} = 0$$

Álgebra

Derivando-se $u'(c) = \lambda$ com relação ao tempo obtém-se $u''(c)\,\dot{c} = \dot{\lambda}$. Dividindo-se esta expressão pela precedente resulta:

$$\frac{u''(c)}{u'(c)}\,\dot{c} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - r$$

Admitindo-se, para simplificar, que a função utilidade tenha elasticidade de substituição constante a equação diferencial do consumo é, então, dada por:

$$\dot{c} = \sigma\ c\ (r - \rho)$$

Sistema Dinâmico

As duas equações diferenciais deste modelo formam o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{c} = \sigma\ c\ \,(r - \rho) \\ \dot{a} = ra + y - c \end{cases}$$

A matriz jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial a} \\ \dfrac{\partial \dot{a}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{a}}{\partial a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & r \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é igual a zero:

$$|J| = 0$$

Este fato significa dizer que uma das raízes é igual a zero, produzindo o fato conhecido na literatura pelo nome de raiz unitária. Este sistema dinâmico somente tem um equilíbrio estacionário se, por acaso, a taxa de preferência intertemporal do agente representativo for igual à taxa de juros internacional. Caso elas sejam diferentes existem duas possibilidades. Quando a taxa de juros internacional for menor do que a taxa de preferência intertemporal é vantajoso para os agentes tomar emprestado no mercado financeiro internacional para financiar o consumo. Todavia, este comportamento não será sustentável no longo prazo, pois a dívida cresce indefinidamente. Na segunda possibilidade, quando a taxa de juros internacional for maior do que a taxa de preferência intertemporal o país prefere postergar o consumo, poupar e aplicar seus recursos no mercado financeiro internacional, tornando-se um país credor. Todavia, não há nenhum mecanismo que impeça este país de se tornar dono do mundo, eventualmente deixando de ser um país pequeno. A conclusão que se chega é de que o modelo do agente representativo é incapaz de ser aplicado numa economia aberta pequena, a menos que se esteja disposto a introduzir alguma hipótese sem microfundamentos, como, por exemplo, uma taxa de preferência intertemporal variável função do consumo ou um prêmio na taxa de juros que dependa do estoque da dívida externa.

A Figura 1.18 contém o diagrama de fases da equação diferencial da riqueza financeira. As setas indicam o que acontece com o movimento desta variável quando ela está fora de equilíbrio. Quando, por acaso, a taxa de juros internacional for igual à taxa de preferência intertemporal o consumo é constante. A Figura 1.18 mostra dois casos. Num o país é credor internacional e no outro é devedor.

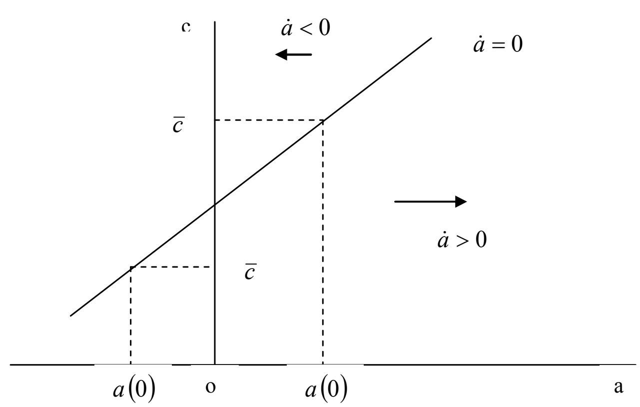


Figura 1.18

Experimento

A Figura 1.19 trata de um exercício de dinâmica comparativa, supondo-se um aumento não antecipado e transitório da renda do agente representativo. O consumo sofre uma mudança instantânea, no momento da mudança da renda, e permanecerá neste novo nível indefinidamente. Parte do aumento transitório da renda será poupada, e o agente terá um aumento permanente do seu patrimônio. Toda a dinâmica de ajuste está descrita na Figura 1.20.

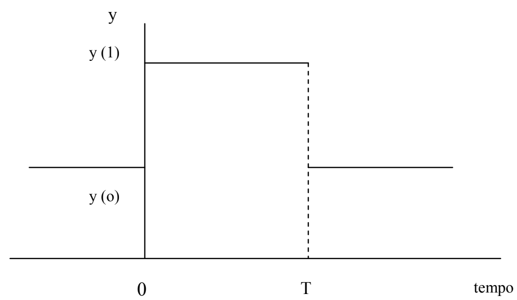


Figura 1.19

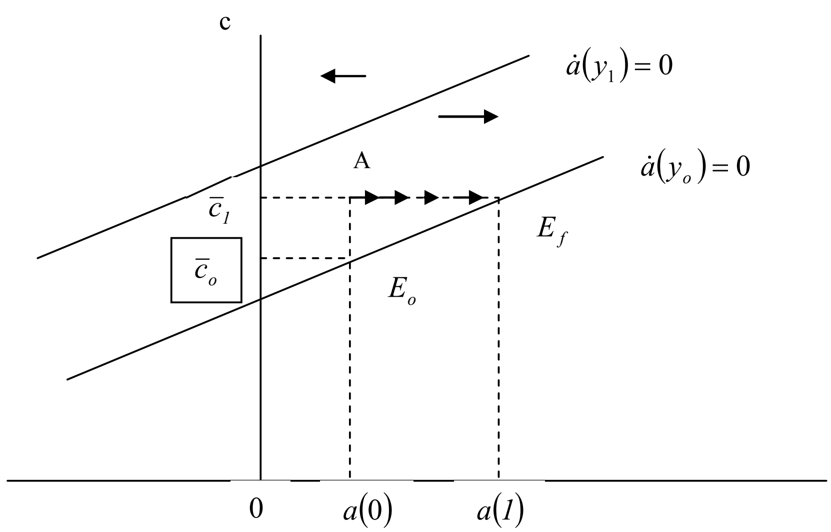


Figura 1.20

5.3 Modelo Com Taxa de Preferência Intertemporal Variável

O modelo do agente representativo numa economia aberta pequena somente tem equilíbrio estacionário quando se admite a hipótese implausível de igualdade das taxas de preferência intertemporal e de juros externa. Uma solução possível para este problema seria admitir-se que a taxa de desconto, ao invés de constante, dependa de alguma variável. Uma candidata natural para esta variável seria o consumo. O agente representativo maximizaria, então, o valor presente do fluxo de utilidade descontado por uma taxa $\rho(c)$ que depende do consumo:

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^t \rho(c)ds} u(c)dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{a} = ra + y - c$$
$$a(0) = a_0 \ dado$$

A solução do problema de controle ótimo do agente representativo torna-se mais fácil introduzindo-se uma nova variável de estado, definida por:

$$S = \int_0^t [\rho(c) - r]\, ds$$

A derivada de S com relação ao tempo é igual a:

$$\dot{S} = \rho(c) - r$$

O valor presente do fluxo de utilidade pode ser reescrito como:

$$\int_0^\infty e^{-rt} e^{-\left[\int_o^t [\rho(c)-r]\right] ds} u(c)\, dt = \int_0^\infty e^{-rt} e^{-S} u(c)\, dt$$

O problema do agente representativo consiste, portanto, em maximizar

$$\int_0^\infty e^{-rt} e^{-S} u(c)\, dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{a} = ra + y - c$$
$$\dot{S} = \rho(c) - r$$
$$a(0) = a_0 \ dado$$
$$\delta(0) = 0 \ dado$$

O hamiltoniano de valor corrente tem a seguinte expressão:

$$H = e^{-S} u(c) + \lambda(ra + y - c) + \mu\,(\rho(c) - r)$$

onde λ e μ são variáveis de co-estado. As condições de primeira ordem para a solução deste problema são:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-S} u_c - \lambda + \mu\, \rho_c = 0$$

$$\dot{\lambda} = r\lambda - \frac{\partial H}{\partial a} = r\lambda - \lambda r = 0$$

$$\dot{\mu} = r\mu - \frac{\partial H}{\partial S} = r\mu + e^{-S} u(c)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{a} = ra + y - c$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = \dot{S} = \rho(c) - r$$

A hipótese de que $u(c) > 0$ implica que a variável de co-estado μ seja negativa. A segunda derivada da função $\rho(c)$ com relação ao consumo $\rho_{c\,c}$ deve ser positiva para que o hamiltoniano seja máximo com relação ao consumo. A solução deste sistema de equações pode ser simplificada introduzindo-se duas variáveis que permitem eliminar a variável S do sistema de equações. Elas são definidas por:

$$\Gamma = \lambda\, e^{S}$$

$$\mathrm{M} = \mu\, e^{S}$$

Álgebra

Derivando-se $\Gamma = \lambda\, e^{S}$ e $\mathrm{M} = \mu\, e^{S}$ com relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{\Gamma} = \dot{\lambda}\, e^{S} + \lambda\, e^{S} \dot{S} = \Gamma\left[\rho(c) - r\right]$$

$$\dot{\mathrm{M}} = \dot{\mu}\, e^{S} + \mu\, e^{S} \dot{S} = u(c) + \mathrm{M}\, \rho(c)$$

A primeira equação das condições de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\Gamma = u_c + \mathrm{M}\ \rho_c$$

Derivando-se esta expressão com relação ao tempo, resulta:

$$\dot{\Gamma} = u_{cc}\ \dot{c} + \dot{\mathrm{M}}\ \rho_c + \mathrm{M} \rho_{cc}\ \dot{c}$$

Substituindo-se os valores de $\dot{\Gamma}$, $\dot{\mathrm{M}}$ e M nesta expressão, obtém-se, depois de algumas simplificações, a seguinte equação diferencial para o consumo:

$$\dot{c} = \alpha(c, \Gamma)\,\left[\rho(c, \Gamma) - r\right]$$

onde:

$$\alpha(c, \Gamma) = \frac{\Gamma}{u_{c\,c} + \dfrac{\Gamma - u_c}{\rho_c}\ \rho_{c\,c}}$$

$$\rho(c,\Gamma) = \rho(c)\left(\frac{u_c - \rho_c \; u(c) \; / \; \rho(c)}{\Gamma}\right)$$

O coeficiente $\alpha(c,\Gamma)$ é negativo e a derivada parcial de $\rho(c,\Gamma)$ com relação ao consumo também é negativa. Quando a taxa de desconto ρ for constante tem-se o resultado tradicional: $\alpha(c,\Gamma) = u_c \,/\, u_{c\,c}$ e $\rho(c,\Gamma) = \rho$.

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico do modelo do agente representativo, com taxa de preferência intertemporal variável, é formado pelas três equações diferenciais:

$$\dot{\Gamma} = \Gamma\left[\rho(c) - r\right]$$

$$\dot{c} = \alpha(c,\Gamma)\left[\rho(c,\Gamma) - r\right]$$

$$\dot{a} = ra + y - c$$

A primeira equação mostra que qualquer discrepância entre a taxa de preferência intertemporal e a taxa de juros produz mudança na utilidade marginal da riqueza (Γ). A segunda equação afirma que variações do consumo dependem da diferença entre a taxa $\rho(c,\Gamma)$ e a taxa de juros, e não da comparação da taxa de preferência intertemporal com a taxa de juros. No equilíbrio estacionário a taxa $\rho(c,\Gamma)$ é igual à taxa de preferência intertemporal. A terceira equação é a restrição orçamentária do agente em termos de fluxos. As duas primeiras equações não dependem da variável de estado *a* e formam, portanto, um sistema de duas equações diferenciais. O ponto de equilíbrio estacionário deste modelo é dado por:

$$\rho(\bar{c}) = r$$

$$\overline{\Gamma} = u_c(\bar{c}) - \frac{u(\bar{c})\rho_c(\bar{c})}{r}$$

O determinante da matriz jacobiana deste sistema, no ponto de equilíbrio estacionário, é igual a:

$$|J| = \frac{r\,\Gamma\,\rho_c}{u_{cc} - \dfrac{u\,\rho_{cc}}{r}}$$

Admitindo-se que $\rho_{cc} > 0$, $u > 0$, $u_{cc} < 0$, segue-se que $|J| < 0$ se $\rho_c > 0$. Logo, o ponto de equilíbrio estacionário é um ponto de sela.

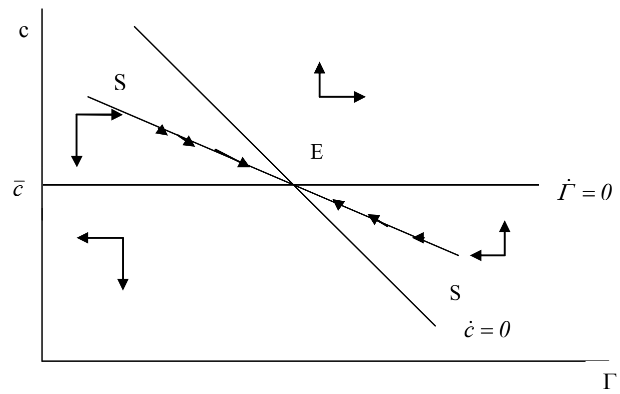


Figura 1.21

A Figura 1.21 mostra o diagrama de fases do modelo. Nesta figura, o eixo vertical mede o consumo e o eixo horizontal a variável Γ. A curva $\dot{\Gamma} = 0$ é horizontal porque $\rho(c) = r$. Quando $\dot{c} = 0$, $\rho(c, \Gamma) = r$. É fácil verificar-se que nesta curva $\partial\, c / \partial\, \Gamma < 0$. A sela SS é negativamente inclinada.

A Figura 1.22 contém a curva da taxa de preferência intertemporal, com as hipóteses de que $\rho_c > 0$ e $\rho_{cc} > 0$. Dado a taxa de juros internacional, esta curva determina o consumo correspondente ao equilíbrio estacionário. Para que o modelo tenha um ponto de sela, a taxa de preferência intertemporal deve aumentar quando o consumo aumenta. Isto significa dizer que o rico deve ser mais impaciente do que o pobre. Esta hipótese contraria o senso comum, pois se imagina que as pessoas pobres devem ser mais impacientes do que as pessoas mais ricas. A conclusão que se chega é de que o modelo do agente representativo, numa economia aberta pequena, não pode ser resgatado com a hipótese de uma taxa de preferência intertemporal variável com o consumo.

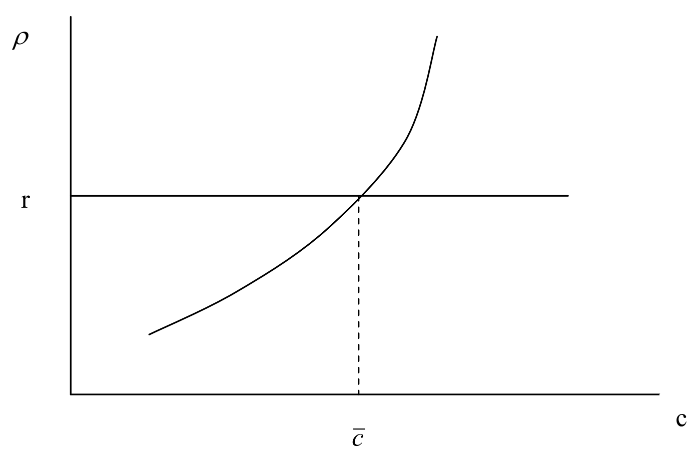


Figura 1.22

5.4 Modelo com Prêmio de Risco na Taxa de Juros

Na seção anterior, mostrou-se que a taxa de preferência intertemporal variável, dependendo do consumo, não é uma solução satisfatória para o modelo do agente representativo numa economia pequena aberta. Uma solução alternativa é admitir-se que exista um prêmio na taxa de juros externa e que este prêmio dependa de alguma variável do modelo. Seja $r*$ a taxa de juros real internacional, *b* o estoque da dívida externa na moeda internacional (dólares, por exemplo), P* o nível de preços internacional, *P* o nível de preços doméstico e *S* a taxa de câmbio. A taxa de juros doméstica *r* seria igual à taxa de juros externa, mais um prêmio de risco que dependeria, por exemplo, da relação dívida externa/produto interno bruto, de acordo com:

$$r = r* + p_r\left(\frac{SP*b}{Py}\right), b > 0, p_r' > 0, p_r'' > 0$$

A Figura 1.23 mostra a curva do prêmio de risco, levando-se em conta que a taxa de câmbio real é definida por: $Q = SP*/P$. Quando a dívida é igual a zero ou negativa (a economia acumula ativos internacionais), não há prêmio de risco.

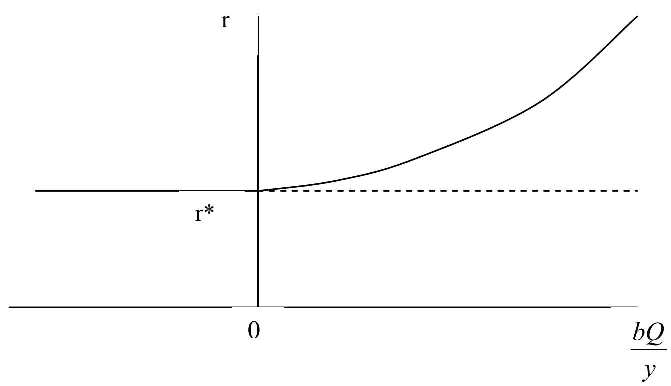


Figura 1.23

A restrição orçamentária do agente representativo, em moeda doméstica, mostra que a variação da dívida externa é igual à diferença entre os gastos e os rendimentos do mesmo. Isto é:

$$\dot{B} = R\ B + P c_d + SP * c_m - Y$$

onde *R* é a taxa de juros nominal, *B* o estoque da dívida em moeda doméstica, c_d o consumo do bem doméstico, *P* o preço do bem doméstico, c_m o consumo do bem importado, *S* a taxa de câmbio, *P** o preço do bem importado, e *Y* a renda nominal.

A dívida externa em moeda internacional é igual a:

$$b = \frac{B}{SP*}$$

Derivando-se esta expressão com relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\dot{B}}{SP*} = \dot{b} + b\left(\frac{\dot{S}}{S} + \frac{\dot{P}*}{P*}\right) = \dot{b} + b(\dot{s} + \pi*)$$

onde $\dot{s} = d(\log\ S)/dt$ e $\pi^* = d(\log P^*)/dt$.

Dividindo-se ambos os lados da restrição orçamentária por SP^* obtém-se, depois de algumas simplificações, a seguinte restrição orçamentária:

$$\dot{b} = r\,b + \frac{c_d + c_m\,Q - y}{Q}$$

onde

$$r = R - \pi^* - \dot{s}$$

O agente representativo maximiza o valor presente do fluxo de utilidade,

$$\int_0^\infty e^{-\rho\,t} u(c)\,dt$$

O consumo c é um índice agregado dos consumos dos bens doméstico e importado,

$$c = F(c_d, c_m)$$

A este índice de consumo corresponde um índice de preços P_c que satisfaz a restrição:

$$P_c\ c = P\ c_d + SP^*c_m$$

Seja $p_c = P_c/P$. Segue-se que o dispêndio, em preços domésticos, é dado por:

$$p_c\ c = c_d + Q\,c_m$$

A restrição orçamentária do agente representativo pode ser escrita como:

$$\dot{b} = r\,b + \frac{p_c\ c - y}{Q}$$

O problema do agente representativo consiste, portanto, em maximizar

$$\int_0^\infty e^{-\rho\,t} u(c)\,dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{b} = r\,b + \frac{p_c c - y}{Q}$$

$$r = r^* + p_r\left(\frac{bQ}{y}\right)$$

$$b(0) = b_o \quad dado$$

O hamiltoniano de valor corrente deste problema é dado por:

$$H = u(c) - \lambda \left[r\, b + \frac{p_c c - y}{Q} \right]$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = u_c - \lambda \frac{p_c}{Q} = 0$$

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial b} = \rho\lambda - \lambda\left(r + b\frac{\partial r}{\partial b} \right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\dot{b} = -\left[\frac{p_c c - y}{Q} + r\, b \right]$$

A segunda equação das condições de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - r - b\frac{\partial r}{\partial b}$$

Admitindo-se, por simplicidade, que a taxa de câmbio real não varia com o tempo, a primeira equação das condições de primeira ordem quando derivada com relação ao tempo, resulta em:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{u_{cc}}{u_c}\dot{c} = \rho - r - b\frac{\partial r}{\partial b}$$

A equação diferencial do consumo é dada, portanto, por:

$$\dot{c} = \frac{u_c}{u_{cc}}\left[\rho - r - b\frac{\partial r}{\partial b} \right]$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico deste modelo é formado pelas duas equações diferenciais

$$\dot{c} = \frac{u_c}{u_{cc}}\left[\rho - r - b\frac{\partial r}{\partial b} \right]$$

$$\dot{b} = \frac{p_c c - y}{Q} + r\, b$$

O equilíbrio estacionário $\left(\bar{c}, \bar{b}\right)$ deste sistema é determinado pela solução do seguinte sistema de equações:

$$\rho = r^* + p_r\left(\frac{\bar{b}Q}{y}\right) + \bar{b}\,\frac{\partial r}{\partial b}\left(\bar{b}\right)$$

$$\frac{y - p_c\,\bar{c}}{Q} = \left(\rho^* + p_r\left(\frac{\bar{b}Q}{y}\right)\right)\bar{b}$$

Neste modelo, a taxa de preferência intertemporal é maior do que a taxa de juros externa e o país é um devedor internacional. O preço que tem de ser pago para que o modelo do agente representativo, numa economia aberta pequena, tenha uma solução estacionária, sem a igualdade das taxas de preferência intertemporal e de juros externa, consiste na introdução de uma hipótese *ad hoc* sobre o prêmio de risco da taxa de juros. Cabe ressaltar que a hipótese de prêmio de risco na taxa de juros não resolve o problema do modelo do agente representativo da economia aberta pequena quando o país é credor líquido internacional. Um prêmio de risco, positivo ou negativo, não faz o mínimo sentido nestas circunstâncias.

6. Exercícios

1) O agente representativo maximiza

$$\int_o^\infty \beta(t)\,u(c)\,dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= ra + y - c \\ a(0) &= a_o \quad dado \end{aligned}$$

onde $\beta(t)$ é o fator de desconto do agente. Admita que para $s > 0$, o agente decide maximizar

$$\int_s^\infty \beta(t-s)\,u(c)\,dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= ra + y - c \\ a(s) &= a_s \quad dado \end{aligned}$$

Qual é a condição que o fator de desconto $\beta(\tau)$ tem que satisfazer para que a solução dos dois problemas seja a mesma?

2) O agente representativo maximiza

$$\int_o^\infty e^{-\rho\tau}\left[u(c) + v(m)\right]dt$$

sujeito à restrição:

$$y + \tau = c + \frac{\dot{M}}{P}$$

$$M(0)\ dado$$

onde os símbolos têm o seguinte significado: c = consumo; $m = M/P$ = encaixe real de moeda; y = renda; τ = transferências do governo; M = estoque nominal de moeda; $\dot{M} = dM / dt$; P = nível de preço.
a) Derive as condições de primeira ordem deste problema.
b) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo com a variável de co-estado (λ) no eixo vertical e a quantidade real de moeda no eixo horizontal.
c) Repita o item anterior, com o consumo no eixo vertical, ao invés da variável de co-estado, e a quantidade real de moeda no eixo horizontal.

3) Adicione ao modelo da questão anterior, as seguintes hipóteses

Governo: $\tau = \frac{\dot{M}}{P}$

Equilíbrio no Mercado de Bens e Serviços: $c=y$

a) Suponha que a política monetária mantenha a taxa de crescimento do estoque de moeda constante, $\mu = \dot{M} / M$. Pode haver hiperinflação? Pode haver hiperdeflação?
b) Suponha que a política monetária e fiscal seja tal que:

$$\frac{\dot{M}}{P} = constante$$

Pode haver hiperinflação neste modelo? Pode haver hiperdeflação nesta modelo?

4) Admita que a restrição prévia de liquidez (CIA = *cash in advance constraint*, em inglês) seja dada por:

$$M(t) \geq F(\theta) = \int_t^{t+\theta} C(s) ds$$

a) Mostre que uma expansão de Taylor de função F(θ) pode ser expressa por:

$$F(\theta) = F(0) + F'(0)\theta + \frac{F''(0)}{2}\theta^2 + \ldots = C(t)\theta + \frac{\dot{C}(t)}{2}\theta^2 + \ldots$$

b) Mostre que a restrição prévia de liquidez pode ser expressa, de forma aproximada, por:

$$M(t) \geq \theta\, C(t)$$

5) O agente representativo maximiza

$$\int_o^\infty e^{-\rho t} u(c) dt$$

sujeito às restrições:

$$\dot{a} = f(k) + \tau - c - \delta k - \pi m$$

$$m \geq c$$

$$k(0) \; e \; M(0) \; dados$$

a) Derive as condições de primeira ordem deste problema.
b) A moeda é super neutra neste modelo?

6) O agente representativo maximiza

$$\int_o^\infty e^{-\rho t} u(c) dt$$

sujeito às restrições:

$$f(k) + \tau = c + \dot{k} + \delta k + \frac{\dot{M}}{P}$$

$$m \geq c + \dot{k} + \delta k$$

$$k(0) \; e \; M(0) \; dados$$

A segunda restrição deste modelo, a restrição prévia de liquidez, supõe que há necessidade de moeda para comprar tanto os bens de consumo como os bens de capital.
a) Derive as condições de primeira ordem deste problema.
b) A moeda é neutra?
c) A moeda é super neutra?

7) O agente representativo maximiza

$$\int_o^\infty e^{-\rho t} [u(c) + v(m)] dt$$

sujeito às restrições:

$$(1 - \tau)(rb + y) = c + \frac{\dot{B}}{P} + \frac{\dot{M}}{P}$$

$$m(0) \; e \; b(0) \; dados$$

No equilíbrio do mercado de bens e serviços o produto é igual ao dispêndio:

$$y = c + g$$

A restrição orçamentária do governo é dada por:

$$g + r b - \tau(rb + y) = \frac{\dot{M}}{P} + \frac{\dot{B}}{P}$$

O banco central aumenta o estoque nominal de moeda a uma taxa constante e a equação diferencial do estoque real de moeda é dada por:

$$\dot{m} = m(\mu - \pi), \mu = \overline{\mu} = constante$$

a) Mostre, num diagrama de fases, com *b(=B/P)* no eixo vertical e *m(=M/P)* no eixo horizontal, o equilíbrio e a dinâmica do modelo.

b) Analise, no diagrama de fases do item anterior, o seguinte experimento: no instante zero, o banco central reduz a taxa de expansão monetária de μ_o para μ_1. Depois de um intervalo de tempo, digamos T, quando a dívida pública atingir seu teto superior (b^s), o banco central tem que mudar a política monetária para acomodar o déficit público. O que acontece com a taxa de inflação no instante zero?

8) Num modelo de agente representativo com títulos públicos, a seguinte condição de transversalidade deve ser satisfeita:

$$\lim_{T \to \infty} \lambda\, b\, e^{-\rho T} = 0$$

onde λ é a variável de co-estado e *b* é o estoque real da dívida pública.

a) Suponha que $\dot{b} = f + \rho b$, onde f é o déficit primário. Mostre que:

$$b(T) = b(T)e^{\rho T} + \left[\int_t^T f\, e^{-\rho s} ds\right] e^{\rho T}$$

b) Admita que *f* seja constante. Mostre que:

$$\lim_{T \to \infty} \lambda\, b\, e^{-\rho T} \neq 0$$

c) Suponha que

$$g - \tau + rb = \dot{b} = f = cons\tan te$$

onde, agora, *f* é o déficit real. Mostre que *b (T) - b (t)=f T* e que, portanto,

$$\lim_{T \to \infty} \lambda\; b\; e^{-\rho T} = 0$$

d) Qual a conclusão que você chega com os itens b e c?

9) Considere o modelo de ciclos reais com governo. O sistema dinâmico deste modelo é dado por:

$$\dot{k} = A k^{\alpha} - \frac{(\rho + \delta)}{\alpha} k$$

$$\dot{K} = A K k^{\alpha - 1} - \frac{A(1-\alpha)}{\beta} k^{\alpha} - g - \delta K$$

a) Analise uma mudança permanente, não antecipada, nos gastos do governo.
b) Analise uma mudança permanente, antecipada, nos gastos do governo.
c) Analise uma mudança transitória, não antecipada, nos gastos do governo.
d) Analise uma mudança transitória, antecipada, nos gastos do governo.

10) O agente representativo maximiza o funcional

$$\int_o^\infty e^{-\int_o^t \rho(s)\, ds} u(c) dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{a} = ra + y - c$$
$$a(0) = a_o \quad dado$$

Defina:

$$\delta(t) = \int_0^t \rho(s) ds$$

a) Mostre que $\dot{\delta} = \rho(t)$.
b) Quais são as condições de primeira ordem para a solução deste problema de controle ótimo?
c) Qual o sistema dinâmico deste modelo, nas variáveis consumo e riqueza *(a)*?
d) Este sistema é autônomo?
e) Existe equilíbrio estacionário?

11) O sistema dinâmico do modelo do agente representativo com taxa de preferência intertemporal é dado por:

$$\dot{\Gamma} = \Gamma\left[\rho(c) - r\right]$$
$$\dot{c} = \alpha(c, \Gamma)\left[\rho(c, \Gamma) - r\right]$$

$$\dot{a} = ra + y - c$$

onde

$$\alpha(c, \Gamma) = \frac{\Gamma}{u_{c\,c} + \dfrac{\Gamma - u_c}{\rho_c}\, \rho_{c\,c}}$$

$$\rho(c, \Gamma) = \rho(c)\left(\frac{u_c - \rho_c\, u(c) / \rho(c)}{\Gamma}\right)$$

a) Mostre que:

$$\alpha(c, \Gamma) < 0\,, \ \frac{\partial \rho(c, \Gamma)}{\partial c} < 0$$

b) Calcule o determinante da matriz jacobiana do sistema formado pelas duas primeiras equações diferenciais.
c) Que acontece nesta economia quando há um aumento da taxa de juros externa?

12) O sistema dinâmico do modelo do agente representativo com prêmio de risco na taxa de juros é dado por:

$$\dot{c} = \frac{u_c}{u_{cc}}\left[\rho - r - b\frac{\partial r}{\partial b}\right]$$

$$\dot{b} = \frac{p_c c - y}{Q} + r\,b$$

$$r = r* + p_r\left(\frac{Q\,b}{y}\right), b > 0, p_r' > 0, p_r'' > 0$$

a) Analise a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com o consumo (c) no eixo vertical e o estoque da dívida (b) no eixo horizontal.
b) Analise o que acontece nesta economia quando ocorre uma mudança permanente antecipada na taxa de câmbio real Q.
c) Analise o que acontece nesta economia quando ocorre uma mudança transitória antecipada na taxa de câmbio real Q.

13) O funcional U é definido por

$$U = \int_t^\infty u(c)\, e^{-\int_t^v \rho(c)\,ds}\, dv$$

a) Mostre que:

$$\dot{U} = \rho(c)U - u(c)$$

b) Qual a interpretação econômica desta equação diferencial?

14. O agente representativo maximiza

$$\int_o^\infty e^{-\left[\int_o^t \rho(c)\,ds - n\,t\right]}\, u(c)dt$$

sujeito às seguintes restrições,

$$\dot{k} = f(k) - (n + \delta)k - c$$

$$k(o) = k_o \quad dado$$

a) Defina $S = \int_o^t \rho(c)\,ds - nt$. Mostre que $\dot{S} = \rho(c) - n$

b) Com nova variável de estado S, resolva o problema do agente representativo.

c) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo em um diagrama de fases com o consumo *(c)* no eixo vertical e o capital *(k)* no eixo horizontal.
d) O que acontece neste modelo quando a taxa de crescimento da população *(n)* diminui?
e) O que acontece neste modelo quando a taxa de depreciação δ aumenta?

15) O agente representativo maximiza o funcional

$$U = \int_o^\infty e^{-\rho t} u(c, z)) d\, t$$

onde a função utilidade *u (c, z)* depende do consumo *(c)* e de um índice do consumo passado *z*, de acordo com:

$$z\,(t) = \int_{-\infty}^{t} \beta\, e^{-\beta(t-\tau)} c(\tau) dt$$

a) Mostre que

$$\dot{z} = \beta(c - z)$$

b) Estabeleça as condições de primeira ordem do seguinte problema

$$max \int_o^\infty e^{-\rho t} u(c, z) dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{a} = r\, a + y - c$$

$$\dot{z} = \beta(c - z)$$

$$a(0) = a_o \quad dado$$
$$z(0) = z_o \quad dado$$

b) Numa economia aberta pequena, qual é a condição para que haja equilíbrio estacionário para o consumo?

16. O agente representativo maximiza

$$\int_o^\infty e^{-\rho t} u(c) dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{a} = ra + y - c$$

$$a(o) = a_o \quad dado$$

A taxa r é a taxa de juros externa.

a) Admita que $r=\rho$. Mostre que

$$\dot{a} = y - y^p$$

onde $y^p = \int_o^\infty e^{-rt} y\, dt$. Qual a interpretação deste resultado?

b) Admita que $r \neq \rho$ e $u(c) = \dfrac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\dfrac{1}{\sigma}}$. Mostre que

$$\dot{a} = y - y^p + \sigma(r-\rho)W$$

onde $W = \int_o^\infty e^{-rt} dt + a_o$. Qual a interpretação deste resultado?

Capítulo 2

Gerações Superpostas

Este capítulo trata dos modelos de gerações superpostas. A primeira seção apresenta um modelo de gerações superpostas com vida infinita, no qual a cada momento do tempo nasce uma geração sem nenhum ativo financeiro e, portanto, desconectada das gerações existentes. A segunda seção introduz o governo nesta economia. A terceira e a quarta seções mostram que o modelo de gerações superpostas, diferente do modelo do agente representativo, pode ser aplicado numa economia aberta pequena sem que haja necessidade de se fazer qualquer hipótese casuística. A quinta seção apresenta um modelo de gerações superpostas com vida finita. Neste modelo usa-se a hipótese simplificadora de que a probabilidade de morte do indivíduo independe de sua idade.

1. Gerações Superpostas com Vida Infinita

O modelo de gerações superpostas com agentes de vida infinita supõe que a cada momento do tempo nasce uma nova geração, que não é conectada com as gerações previamente existentes. A taxa de crescimento das novas gerações é igual à taxa de crescimento da população. Cada geração nasce sem nenhum ativo financeiro, mas com capital humano igual as demais gerações. No instante *t* cada agente maximiza o fluxo de utilidades ao longo de sua vida, descontado pela taxa de preferência intertemporal ρ que é a mesma para todos os agentes. O agente maximiza, então, a integral

$$\int_t^\infty e^{-\rho(v-t)}\, u\left[c(s,v)\right] d\,v$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{a}(s,v) = r\ a(s,v) + \omega(v) - c(s,v)$$

$$a(s,t)\ dado$$

A notação é a seguinte: $c(s,v)$ é o consumo no instante v da geração indexada por s; $a(s,v)$ o total de ativos financeiros na data v da geração s; $\omega(v)$ o salário do agente; e r a taxa de juros da aplicação financeira.

O hamiltoniano deste problema é dado por:

$$H = u\left[c(s,v)\right] + \lambda\left[r\ a(s,v) + \omega(v) - c(s,v)\right]$$

As condições de primeira ordem estabelecem que: i) a utilidade marginal do consumo deve ser igual à variável de co-estado λ; ii) o agente decide a cada momento entre consumir e investir, arbitrando o retorno entre estas opções e iii) a restrição orçamentária deve ser atendida. Isto é:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u'\left(c\ (s,v)\right) - \lambda = 0$$

$$\dot{\lambda} = \rho\,\lambda - \frac{\partial H}{\partial a} = \rho\,\lambda - r\,\lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \omega - c + r\,a = \dot{a}$$

A solução ótima deste problema tem de satisfazer a condição de transversalidade:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda\, a\, e^{-\rho t} = 0$$

Função Consumo

Derivando-se ambos os lados de $u'(c) = \lambda$ com relação ao tempo obtém-se: $u''(c)\dot{c} = \dot{\lambda}$. Dividindo-se os dois lados desta expressão por λ resulta em:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{u'(c)}{c\,u''(c)}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{u'(c)}{c\,u''(c)}(\rho - r)$$

A função utilidade do agente tem uma elasticidade de substituição σ constante:

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

Calculando-se a utilidade marginal do consumo e a derivada da utilidade marginal desta função utilidade e substituindo-se na taxa de crescimento do consumo conclui-se que a equação de Euler é dada por:

$$\frac{\dot{c}(s,v)}{c(s,v)} = \sigma\,(r - \rho)$$

A restrição orçamentária do agente, em termos de fluxos, estabelece que a variação do seu patrimônio seja igual à diferença entre suas receitas, dos juros da aplicação financeira e do salário, e as despesas com a compra de bens e serviços de consumo:

$$\dot{a}(s,v) = r\,a(s,v) + \omega(v) - c(s,v)$$

A solução desta equação diferencial fornece a restrição intertemporal do agente, supondo-se que não haja jogo de Ponzi. O valor presente do consumo tem que ser igual ao valor presente dos salários, adicionado ao valor dos ativos financeiros em seu poder. Isto é:

$$a(s,t) + \int_t^\infty e^{-r(v-t)}\omega(v)\,dv = \int_t^\infty e^{-r(v-t)}c(s,v)dv$$

O valor presente dos salários será denominado capital humano *h* do agente:

$$h(t) = \int_t^\infty e^{-r(v-t)}\omega(v)\,dv$$

Usando-se esta notação, a restrição intertemporal da geração *s* pode ser escrita como:

$$a(s,t) + h(t) = \int_t^\infty e^{-r(v-t)}c(s,v)dv$$

A equação de Euler do agente estabelece que o consumo da geração *s* cresça a uma taxa igual a $\sigma(r - \rho)$:

$$c(s,v) = c(s,t)e^{\sigma(r-\rho)(v-t)}$$

Substituindo-se esta expressão na integral do valor presente do consumo resulta:

$$\int_t^\infty e^{-r(v-t)}c(s,v)dv = \int_t^\infty e^{-r(v-t)}c(s,t)e^{\sigma(r-\rho)(v-t)}\,dv = c(s,t)\int_t^\infty e^{-[r-\sigma(r-\rho)](v-t)}dv$$

Portanto, o valor presente do consumo é igual a:

$$\int_t^\infty e^{-r(v-t)}c(s,v)dv = \frac{c(s,t)}{r-\sigma(r-\rho)}$$

O consumo do agente da geração *s* é, então, proporcional a sua riqueza, com o coeficiente de proporcionalidade sendo dado por $\theta = r-\sigma(r-\rho)$. Isto é:

$$c(s,t) = \theta[a(s,t)+h(t)]$$

Quando a elasticidade de substituição for igual a um, o coeficiente de proporcionalidade é igual à taxa de preferência intertemporal: $\theta = \rho$.

Agregação

No instante *t*, no modelo de gerações superpostas, existem diferentes gerações de agentes. A Figura 2.1 mostra que no instante *s*, no passado, uma geração nasceu. Qual o tamanho desta geração? Para simplificar este cálculo, sem perda de generalidade, admite-se que a população no instante *t* seja igual a um. Com esta simplificação, o valor agregado de cada variável é um valor per capita.

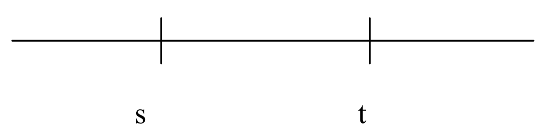


Figura 2.1

Como a população no instante *t* é igual a um, $P(t)=1$, a população em *s* era igual a: $P(s)=e^{-n(t-s)}$. O número de indivíduos da geração *s* era, portanto, igual a *nP(s)*. O valor agregado de uma variável qualquer *x(s,t)* é definida por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} n\,P(s)\,x(s,t)\,ds = \int_{-\infty}^{t} n\,e^{-n(t-s)}\,x(s,t)\,ds$$

A Figura 2.2 mostra os pesos que são atribuídos a cada geração no processo de agregação. As gerações mais velhas têm um peso menor, enquanto as gerações mais novas contribuem com um valor maior, em virtude do tamanho de cada geração.

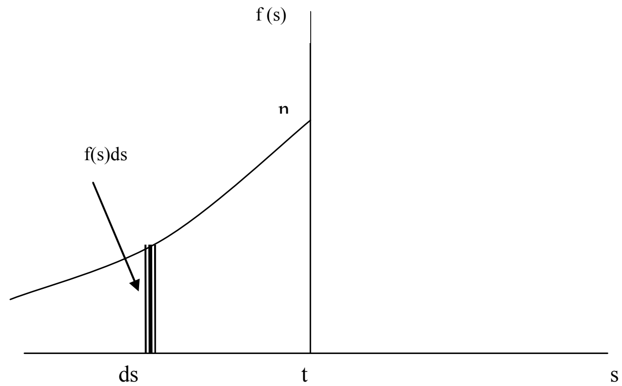


Figura 2.2: $f(s) = n e^{n(s-t}$

O consumo per capita é obtido, então, pela seguinte agregação:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{t} n\, e^{n(s-t)} c(s,t)\, ds$$

Como o consumo é proporcional à riqueza segue-se que:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{t} n\, e^{n(s-t)} \theta \left[a(s,t) + h(t)\right] ds$$

Usando-se a mesma fórmula de agregação do consumo para o capital humano e para os ativos financeiros conclui-se que o consumo per capita é proporcional à riqueza per capita:

$$c(t) = \theta \left[a(t) + h(t)\right]$$

Variação do Consumo Agregado

Para obter a taxa de variação do consumo agregado aplica-se a regra de Leibnitz na fórmula de agregação do consumo. O resultado é o seguinte:

$$\frac{dc(t)}{dt} = n\, e^{n(t-t)} c(t,t) + n \int_{-\infty}^{t} \left[(-n) e^{n(s-t)} c(s,t) + e^{n(s-t)} \dot{c}(s,t)\right] ds$$

Substituindo-se a equação de $\dot{c}(s,t)$, obtida anteriormente, na última integral desta expressão, tem-se:

$$\frac{dc(t)}{dt} = n\, c(t,t) - n\, c(t) + \int_{-\infty}^{t} n\, e^{n(s-t)}\, \sigma(r-\rho) c(s,t)\, ds$$

que é equivalente a:

$$\frac{dc(t)}{dt} = n\left[c(t,t) - c(t)\right] + \sigma(r - \rho)c(t)$$

Como $c(t,t) = \theta[a(t,t) + h(t)]$ e $c(t) = \theta[a(t) + h(t)]$ segue-se que:

$$c(t,t) - c(t) = \theta[a(t,t) + h(t) - a(t) - h(t)]$$

A hipótese de que cada geração ao nascer não tem ativos financeiros, $a(t,t) = 0$, quando substituída na expressão anterior resulta em:

$$c(t,t) - c(t) = -\theta\, a(t)$$

Logo:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \dot{c} = \sigma(r - \rho)c(t) - n\,\theta\, a(t)$$

A taxa de variação do consumo tem dois componentes. O primeiro é comum a todos os agentes. O segundo componente leva em conta o fato de que novos agentes, quando chegam nesta economia, não têm nenhum ativo financeiro.

Variação da Riqueza Financeira

O ativo total da economia no momento t é dado pela integral:

$$a(t) = n\int_{-\infty}^{t} e^{n(s-t)} a(s,t)\,ds$$

Derivando-se esta integral com relação ao tempo, com auxílio da regra de Leibnitz, obtém-se:

$$\frac{da(t)}{dt} = n\, e^{n(t-t)} a(t,t) + n\int_{-\infty}^{t} \left[(-n)e^{n(s-t)} a(s,t) + e^{n(s-t)} \dot{a}(s,t)\right] ds$$

Levando-se em conta a restrição orçamentária, em termos de fluxos, e a hipótese de que cada geração nasce sem ativos financeiros, $a(t,t)=0$, a taxa de variação do estoque de ativos financeiros da sociedade é dada por:

$$\frac{da(t)}{dt} = \dot{a} = (r - n)a(t) + \omega(t) - c(t)$$

Produção

Nesta economia o único ativo que existe é o capital e k é a quantidade per capita do mesmo. Logo, $a=k$ e $\dot{a} = \dot{k}$. A taxa de juros r é igual à produtividade marginal do capital:

$$r = f'(k) - \delta$$

O salário é igual à produtividade marginal da mão de obra:

$$\omega = f(k) - f'(k)\, k$$

onde *f(k)* é a forma intensiva da função de produção com retornos constantes de escala. Fazendo-se as devidas substituições na equação de $\dot{a}$ obtém-se:

$$\dot{k} = (f'(k) - \delta - n)\, k + f(k) - f'(k)\, k - c$$

que pode ser simplificada e escrita como:

$$\dot{k} = f(k) - (\delta + n)\, k - c$$

A equação da taxa de variação do consumo per capita, depois que se substitui a taxa de juros pela produtividade marginal do capital, transforma-se em:

$$\dot{c} = \sigma\left(f'(k) - \delta - \rho\right)c - n\,(\ (1-\sigma)(f'(k) - \delta) + \sigma\rho)\ k$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico deste modelo é formado pelas duas equações diferenciais:

$$\dot{c} = \sigma\left(f'(k) - \delta - \rho\right)c - n\,(\ (1-\sigma)(f'(k) - \delta) + \sigma\rho)\ k$$

$$\dot{k} = f(k) - (\delta + n)\, k - c$$

A matriz jacobiana deste sistema, para o caso particular no qual a elasticidade de substituição é igual a um ($\sigma = 1$), é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial k} \\ \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f'(k) - \delta - \rho) & -n\rho \\ -1 & f'(k) - \delta - n \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz, no ponto de equilíbrio estacionário, é negativo:

$$|J| = -n\,\rho < 0$$

Logo, o ponto de equilíbrio estacionário é um ponto de sela.

Quando a elasticidade de substituição é igual a um, a taxa de juros, no equilíbrio estacionário, é igual à taxa de preferência intertemporal:

$$f'(k) - \delta = \rho$$

No modelo de gerações superpostas com vida infinita à taxa de preferência intertemporal não tem que ser maior do que a taxa de crescimento populacional, como no modelo do agente representativo. Portanto, existe a possibilidade de ineficiência dinâmica. Para que este fato ocorra, a taxa de preferência intertemporal deve ser menor do que a taxa de crescimento populacional, como desenhado no gráfico da Figura 2.3.

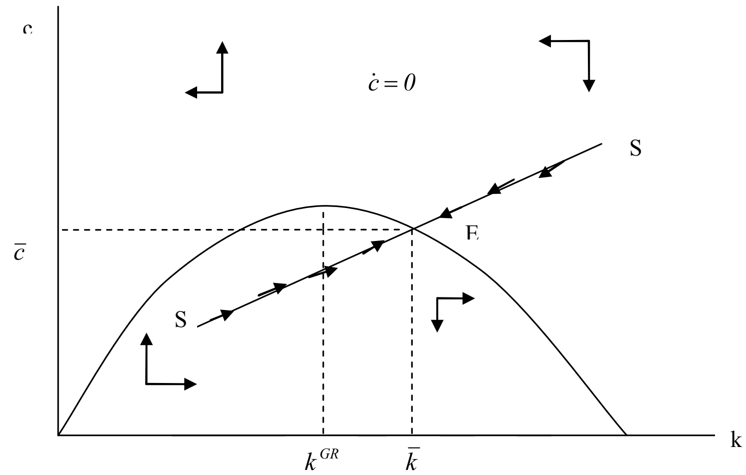


Figura 2.3

2. Economia com Governo

A restrição orçamentária do governo, em termos de fluxos, estabelece que o aumento da dívida pública (*B*) é igual à diferença entre as despesas, com juros (*rB*) e gastos do governo, e a receita de impostos (*T*). Isto é:

$$\dot{B} = r\ B + G - T$$

Denominando-se por $b = B/L$, $g = G/L$, $\tau = T/L$ os valores per capita, da dívida publica, dos gastos do governo e dos impostos, respectivamente, a restrição orçamentária do governo transforma-se em:

$$\dot{b} = (r - n)b + g - \tau$$

A solução desta equação diferencial, supondo-se que não exista jogo de Ponzi, é dada por:

$$b(t) = \int_t^{\infty} e^{-(r-n)(x-t)} (\tau - g) dx$$

A dívida pública no instante *t* é igual ao valor presente dos superávits primários no futuro, descontado pela taxa de juros deduzida da taxa de crescimento populacional.

A riqueza do setor privado da economia com gerações superpostas, supondo-se que o único ativo financeiro sejam títulos públicos, tem dois componentes: títulos públicos e capital humano. Isto é:

$$a(t) = b(t) + h(t)$$

O valor do capital humano é igual ao valor atual dos salários líquidos dos impostos pagos:

$$h(t) = \int_t^{\infty} e^{-r(x-t)} (\omega - \tau) \, dx$$

Esta equação pode ser reescrita do seguinte modo:

$$h(t) = \int_t^{\infty} e^{-r(x-t)} (\omega - g) \, dx - \int_t^{\infty} e^{-r(x-t)} (\tau - g) \, dx$$

A combinação desta equação com a expressão da restrição orçamentária do governo permite escrever a riqueza total com dois componentes, um que representa o capital humano e outro que representa os títulos públicos:

$$a(t) = \int_t^{\infty} e^{-r(x-t)} (\omega - g) \, dx + \int_t^{\infty} e^{-r(x-t)} (e^{n(x-t)} - 1) \, (\tau - g) \, dx$$

Logo, no modelo de gerações superpostas não existe equivalência ricardiana. Ela somente existiria se a taxa de crescimento da população fosse igual a zero. Mas, neste caso, o modelo do agente representativo é um caso particular do modelo de gerações superpostas com vida infinita.

Admitindo-se que o superávit primário, $\tau - g$, seja constante, o componente dos títulos públicos na riqueza seria dado por:

$$\frac{n}{r} \, b(t)$$

Este componente, neste caso particular, depende da relação entre a taxa de crescimento da população e a taxa de juros.

3. Economia Aberta

Na economia aberta os indivíduos das diferentes gerações podem aplicar seus recursos num ativo externo que rende uma taxa de juros, em moeda doméstica, igual a r O país é pequeno e a taxa de juros externa é dada. A restrição orçamentária, em termos de fluxos é dada por:

$$\dot{a}(s,v) = r \, a(s,v) + \omega(v) - c(s,v)$$

Cada geração maximiza o valor presente do fluxo de utilidades sujeito a esta restrição e a condição inicial do modelo. O problema de controle ótimo já foi resolvido na primeira seção deste capítulo. A equação de Euler para cada geração é dada por:

$$\frac{\dot{c}(s,v)}{c(s,v)} = \sigma \, (r - \rho)$$

Numa economia que tivesse um único agente o consumo seria constante apenas no caso raro da taxa de preferência intertemporal ser justamente igual à taxa de juros da economia. Este fato aconteceria somente por acaso. Na economia com agentes heterogêneos, no nosso exemplo, de gerações superpostas, o consumo per capita pode ser estacionário, embora cada agente não tenha o consumo constante, como veremos logo adiante.

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico deste modelo é formado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{c} = \sigma\left(r - \rho\right)c - n\theta a$$

$$\dot{a} = \left(r - n\right)a + \omega - c$$

A matriz jacobiana deste sistema é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{c}}{\partial a} \\ \frac{\partial \dot{a}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(r-\rho) & -n\theta \\ -1 & r-n \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é igual a:

$$\left|J\right| = r\left[\sigma(r-\rho) - n\right]$$

Para que este determinante seja negativo a seguinte desigualdade deve ser satisfeita:

$$r < \rho + \frac{n}{\sigma}$$

Nesta hipótese, o sistema dinâmico tem um ponto de sela. Dois casos são possíveis, como mostram as Figuras 2.4 e 2.5. Na Figura 2.4 a taxa de juros é maior do que a taxa de preferência intertemporal. Na Figura 2.5 ocorre o contrário.

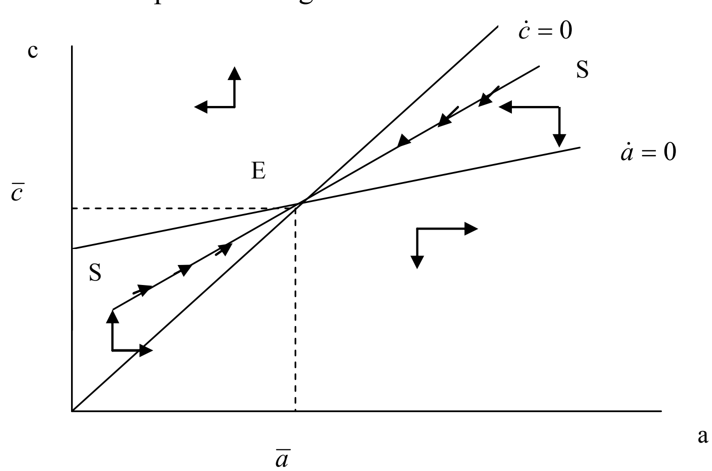


Figura 2.4: $r - \rho > 0$

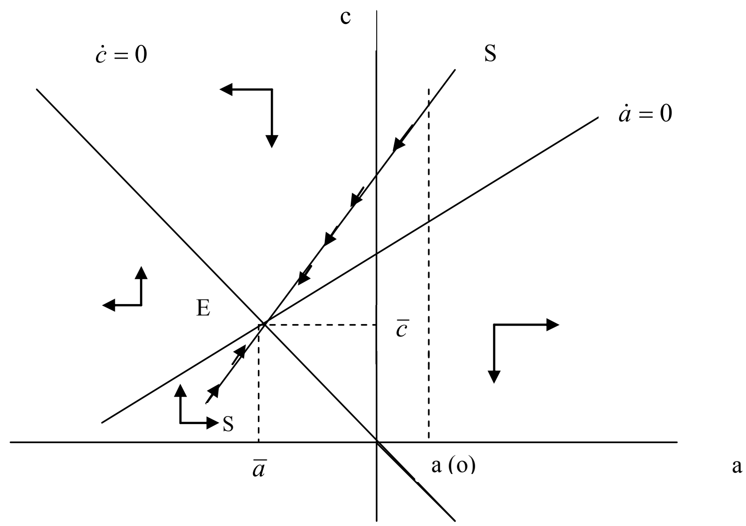


Figura 2.5: $r < \rho$

Quando a taxa de juros internacional for maior do que a taxa de preferência intertemporal dos indivíduos desta economia, como representado na Figura 2.4, o país será um país credor, e no estado estacionário acumulará uma riqueza $\bar{a}$. Quando a taxa de juros internacional for menor do que a taxa de preferência intertemporal o país será devedor, como mostra a Figura 2.5. No estado estacionário a dívida externa será igual a $\bar{a}$.

Experimento

A Figura 2.6 supõe um experimento no qual a taxa de juros real externa aumenta de modo permanente, não antecipado, de r_0 para r_1. A Figura 2.7 mostra o que acontece nesta economia supondo-se que a taxa de juros real seja maior do que a taxa de preferência intertemporal. O país é credor líquido. No momento do aumento da taxa de juros real as curvas que correspondem a $\dot{c} = 0$ e $\dot{a} = 0$ deslocam-se. A primeira para baixo e para a direita, e a segunda para cima e para a esquerda. No novo ponto de equilíbrio estacionário, o consumo e o estoque de riqueza serão maiores do que aqueles que correspondiam ao equilíbrio estacionário previamente existente.

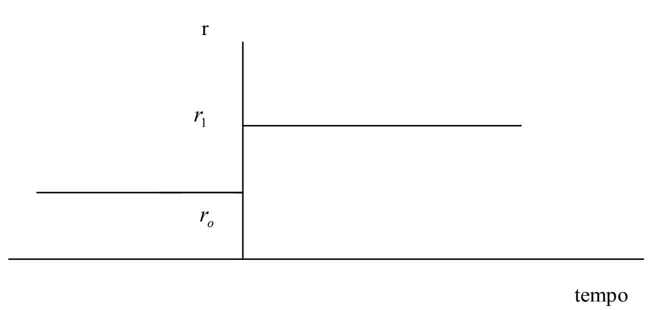
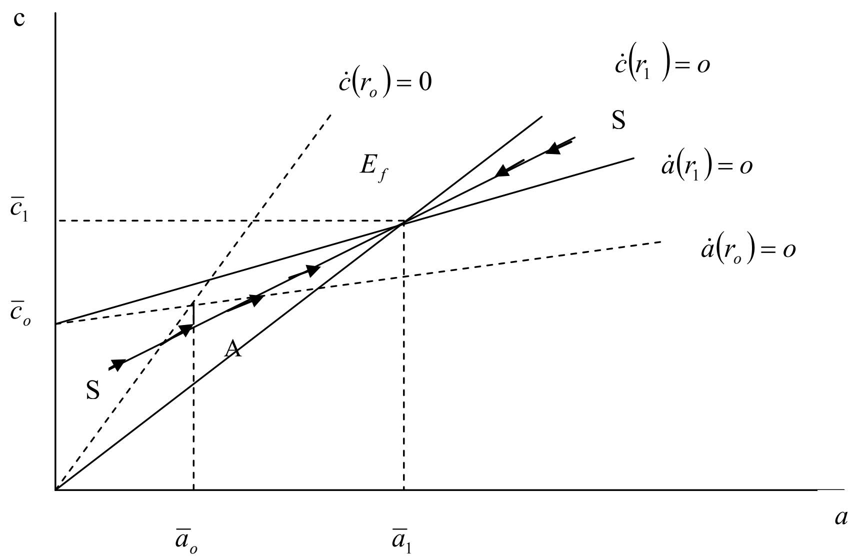


Figura 2.6



Fi

Figura 2.7

No momento da mudança da taxa de juros externa o consumo muda instantaneamente seu valor. Na Figura 2.7 o consumo inicialmente diminui. Admite-se, nesta figura, que o efeito substituição seja maior do que o efeito renda. Quando os dois efeitos se cancelam, a elasticidade de substituição é igual a um, o consumo inicial não muda. Por outro lado, se a elasticidade de substituição for menor do que um, o consumo inicial aumenta. A economia ao mudar instantaneamente o consumo entra, então, na trajetória de sela e converge para o novo equilíbrio estacionário.

4. Curva IS na Economia Aberta

O sistema de equações diferenciais, do modelo de gerações superpostas com vida infinita, para o consumo agregado e a riqueza financeira é dado por:

$$\begin{cases} \dot{C} = \sigma(r-\rho)C - \eta\,\theta\,F \\ \dot{F} = (r-n)F + y - C \end{cases}$$

onde o consumo é representado pela letra *C* maiúscula e a riqueza financeira pela letra *F*, e *y* é o produto da economia.

Uma economia aberta pequena, com perfeita mobilidade de capital, pode ter um equilíbrio estacionário mesmo quando a taxa de preferência intertemporal seja diferente da taxa de juros internacional, como mostram os diagramas de fases das Figuras 2.4 e 2.5. Na Figura 2.4 o país é credor líquido, enquanto na Figura 2.5 o país é devedor líquido internacional.

A razão entre a riqueza financeira e o consumo será representada pela letra *a*: $a=F/C$, e o valor de equilíbrio estacionário desta razão por $\bar{a}$. A primeira equação do sistema de equações diferenciais pode ser reescrita como:

$$\dot{c} = \frac{\dot{C}}{C} = \sigma(r - \rho) - \eta\ \theta\, a$$

Somando-se e subtraindo-se $\eta\theta\,\overline{a}$ da expressão do lado direito desta equação obtém-se:

$$\dot{c} = \sigma(r - \overline{\rho}) - \eta\ \theta\,(a - \overline{a})$$

onde a taxa de juros natural $\overline{\rho}$ é igual a taxa de preferência intertemporal adicionada a um componente que depende da riqueza no estado estacionário e de parâmetros do modelo. Isto é:

$$\overline{\rho} = \rho + \frac{\eta\theta}{\sigma}\ \overline{a}$$

Neste modelo, no longo prazo, a taxa de juros natural será igual à taxa de juros internacional. O ajustamento entre a taxa de preferência intertemporal e a taxa de juros internacional, no longo prazo, ocorre pela mudança da razão entre a riqueza financeira e o consumo, que pode ser positiva ou negativa, dependendo do grau de impaciência da economia comparada com a taxa de juros internacional.

A curva IS da economia aberta pequena pode ser obtida combinando-se a taxa de crescimento do consumo, num modelo de gerações superpostas com vida infinita, com o enfoque da economia aberta que supõe que todo produto importado é usado como insumo na produção doméstica. O dispêndio é a soma do consumo, dos gastos do governo e das exportações. A aproximação logarítmica desta soma é dada por;

$$y = \omega_1\ c + \omega_2\ g + \omega_3\ ex$$

onde os pesos ω_i são os valores no equilíbrio estacionário. Derivando-se $y = \omega_1\ c + \omega_2\ g + \omega_3\ ex$ com relação ao tempo e usando-se a equação de Euler do consumo do modelo de gerações superpostas com vida infinita obtém-se a curva IS:

$$\dot{x} = \omega_1\ \sigma\,(r - \overline{\rho}) - \omega_1\ \eta\ \theta\,(a - \overline{a}) + \omega_2\ \dot{g} + \omega_3\ \dot{y}^* + \omega_3\ \xi\ \dot{q}$$

onde levou-se em conta que o hiato x é igual à diferença entre o produto real e o produto potencial. Admitiu-se também, por simplicidade, que a taxa de crescimento do produto potencial seja igual a zero. A curva IS depende do hiato da taxa de juros real, do hiato da razão entre a riqueza financeira e o consumo, das taxas de crescimento dos gastos do governo, do produto mundial e da taxa de câmbio real. Um fato importante que deve ser enfatizado nesta especificação da curva IS é de que a riqueza é uma variável que afeta as decisões de dispêndio na economia.

No modelo do agente representativo as taxas de preferência intertemporal e de juros internacional somente seriam iguais por acaso. Quando as duas taxas são diferentes surgem oportunidades para arbitragem e o modelo do agente representativo produz conclusões paradoxais: a economia aberta pequena torna-se dona do mundo ou este país pequeno se endivida a tal ponto que tem que usar toda sua renda para pagar a dívida externa. Tais conclusões paradoxais não existem no modelo de gerações superpostas com vida infinita, pois a taxa de juros natural é igual à taxa de juros internacional no longo prazo. A relação riqueza (dívida)/consumo ajusta-se para cobrir a diferença entre a taxa de preferência intertemporal e a taxa de juros internacional.

5. Gerações Superpostas com Vida Finita

O modelo de gerações superpostas com vida infinita supõe que os indivíduos são imortais. Esta hipótese facilita as contas, mas agride os fatos. Infelizmente, a vida é finita e sua duração imprevisível. Seja *X* uma variável aleatória que representa a duração da vida com função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \phi\, e^{-\phi(x-t)}, & x \geq t \\ 0, & x < t \end{cases}$$

onde ϕ é um parâmetro positivo cuja interpretação será dada logo adiante. A função de distribuição da variável aleatória *X*, que é definida pela probabilidade da duração da vida do indivíduo ser menor ou igual a v, é calculada pela integral:

$$F(v) = P(X \leq v) = \int_t^v \phi\, e^{-\phi(x-t)} dx = 1 - e^{-\phi(v-t)}$$

Logo, a probabilidade de que o indivíduo viva mais que um intervalo de tempo v é igual a: $P(X \geq v) = e^{-\phi(v-t)}$. A probabilidade do evento *A*, o indivíduo morrer no intervalo *(v, v+dv)*, condicionado pelo evento *B*, de que ele não morreu até a data v, é denominada taxa de risco (*hazard rate*, em inglês). Isto é:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{f(v)}{1 - F(v)}$$

A probabilidade da interseção dos eventos, $P(A \cap B)$, é igual a $f(v)$ e a probabilidade do evento B, $P(B)$, é igual a $1 - F(v)$. Para a função de densidade da variável aleatória *X* esta probabilidade é dada por:

$$P(A/B) = \frac{f(v)}{1 - F(v)} = \frac{\phi\, e^{\phi(v-t)}}{e^{-\phi(v-t)}} = \phi$$

onde o parâmetro ϕ é, então, a probabilidade instantânea de morte no intervalo *(v,v+dv)*, que independe da idade do indivíduo. Esta hipótese é bastante irrealista, mas facilita as contas no processo de agregação. A probabilidade ϕ pode ser interpretada como a taxa de mortalidade da população desta economia.

Título Atuarial

No modelo com indivíduos com vidas finitas existe um problema com relação à acumulação de riqueza do mesmo. No momento da sua morte a riqueza não pode ser nem positiva nem tampouco negativa, ou seja, o indivíduo não pode morrer deixando recursos, pois ele não tem herdeiros, ou morrer com empréstimos a pagar, porque ele não tem ninguém que se responsabilize por seus atos. A saída para este problema é admitir-se que existe uma empresa de seguros que pode emitir títulos atuariais, vendendo os mesmos para os indivíduos, ou comprando este tipo de título dos indivíduos.

Os títulos atuariais são títulos que permitem os indivíduos terem um retorno maior do que a taxa de juros na sua riqueza, mas com a cláusula de transferir a riqueza para a empresa de seguros no momento da morte. Quando o indivíduo emite um título atuarial ele toma recursos emprestados e se compromete a pagar uma taxa de juros maior pelo fato de que no momento da sua morte a dívida deixa de existir.

Qual o prêmio que a seguradora está disposta a cobrar dos indivíduos nestas circunstâncias? Admite-se que o mercado de seguros seja competitivo e não existam restrições a entrada de empresas neste setor. O lucro da empresa de seguros é igual a zero. Logo, o prêmio do seguro é igual à taxa de mortalidade da economia, pois a receita da empresa seguradora será igual à taxa de mortalidade vezes o valor dos ativos que ela recebe dos indivíduos que morrem, ϕa, e terá como despesa igual valor que será transferido para os indivíduos que estão vivos.

Consumidor

Os indivíduos de cada geração desta economia maximizam o valor esperado do fluxo de utilidades descontado pela taxa de preferência intertemporal. O valor esperado é obtido multiplicando-se o valor descontado da utilidade pela probabilidade do indivíduo estar vivo. Isto é:

$$\int_t^\infty e^{-\phi(v-t)}e^{-\rho(v-t)}u[c(s,v)]dv = \int_t^\infty e^{-(\phi+\rho)(v-t)}u[c(s,v)]dv$$

A interpretação desta última integral é bastante simples: para o indivíduo a taxa de desconto é igual à taxa de preferência intertemporal adicionada a taxa de mortalidade. O fato de que o indivíduo sabe que vai morrer leva-o a descontar o futuro com uma taxa mais elevada, que leva em conta a probabilidade de sua morte. O indivíduo de cada geração maximiza:

$$\int_t^\infty e^{-(\phi+\rho)(v-t)}u[c(s,v)]dv$$

sujeito à restrição:

$$\dot{a}(s,v) = (\phi + r)a(s,v) + \omega(v) - c(s,v)$$

$$a(s,t) \ dado$$

A taxa de retorno dos ativos nesta economia, para o indivíduo, é igual à taxa de juros mais o prêmio do título atuarial, a probabilidade de morte do indivíduo.

O hamiltoniano de valor corrente deste problema é dado por:

$$H = u[c(s,v)] + \lambda[(\phi + r)a(s,v) + \omega(v) - c(s,v)]$$

As condições de primeira ordem são as seguintes:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = u'\left(c\left(s,v\right)\right) - \lambda = 0$$

$$\dot{\lambda} = \left(\phi + \rho\right)\lambda - \frac{\partial h}{\partial A} = \left(\rho + \phi\right)\lambda - \left(\phi + r\right)\lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \left(\phi + r\right)a\left(s,v\right) + \omega\left(v\right) - c\left(s,v\right) = \dot{a}\left(s,v\right)$$

A primeira condição estabelece que a utilidade marginal do consumo seja igual à variável de co-estado. A segunda é a condição de arbitragem entre consumo presente e consumo futuro. A terceira condição reproduz a restrição do problema.

$$\begin{cases} u'\left(c\left(s,v\right)\right) = \lambda \\ \dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - r \\ u\left(c\right) = \dfrac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\dfrac{1}{\sigma}} \end{cases}$$

As duas primeiras condições de primeira ordem, reproduzidas acima, mais a hipótese de que a função utilidade tem a elasticidade de substituição constante implicam que a taxa de crescimento do consumo seja constante:

$$\frac{\dot{c}\left(s,v\right)}{c\left(s,v\right)} = \sigma\left(r - \rho\right)$$

A solução da equação diferencial da restrição orçamentária produz a restrição orçamentária intertemporal, supondo-se que não haja jogo de Ponzi. O valor presente do consumo tem que ser igual ao valor presente dos rendimentos adicionado ao estoque inicial de riqueza:

$$a\left(s,t\right) + \int_t^\infty e^{-(\phi+r)(v-t)} w\left(v\right) dv = \int_t^\infty e^{-(\phi+r)(v-t)} c\left(s,v\right) dv$$

onde a taxa de desconto é igual a soma da taxa de juros com o prêmio do seguro. O valor presente dos rendimentos do trabalho será denominando capital humano do indivíduo:

$$h\left(t\right) = \int_t^\infty e^{-(\phi+r)(v-t)} w\left(v\right) dv$$

A restrição orçamentária intertemporal pode, então, ser escrita como:

$$a\left(s,t\right) + h\left(t\right) = \int_t^\infty e^{-(\phi+r)(v-t)} c\left(s,v\right) dv$$

O consumo individual cresce a uma taxa igual a $\sigma(r-\rho)$. Logo:

$$c(s,v) = c(s,t)e^{\sigma(r-\rho)(v-t)}$$

Substituindo-se esta expressão na restrição orçamentária intertemporal obtém-se:

$$a(s,t) + h(t) = \int_t^\infty e^{-[\ (\phi+r)-\sigma(r-\rho)\ ](v-t)} c(s,t) dv$$

Segue-se, então, que o consumo é proporcional ao total da riqueza do indivíduo:

$$c(s,t) = \theta\left[a(s,t) + h(t)\right]$$

onde o coeficiente de proporcionalidade, suposto positivo, é dado por:

$$\theta = \phi + r - \sigma(r-\rho) = \phi + (1-\sigma)r + \sigma\rho > 0$$

Quando a elasticidade de substituição for igual a um, o coeficiente de proporcionalidade é igual à soma da taxa de preferência intertemporal com o prêmio de rico.

Agregação

Admita-se que nesta economia a população seja constante. A taxa de natalidade é, portanto, igual à taxa de mortalidade. O número de indivíduos da geração *s* existentes no momento *t* é igual a:

$$P(s,t) = \phi\ e^{-\phi(t-s)}$$

A agregação de qualquer variável, digamos *z,* neste modelo leva em conta o número de indivíduos de cada geração. Logo, para a variável $z(s,t)$ da geração *s* no momento *t* o seu valor agregado é obtido somando-se por todas as gerações atualmente existentes:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi\, e^{-\rho(t-s)} z(s,t) ds$$

Consumo Agregado

O consumo agregado é obtido, então, por

$$c(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi\, e^{\phi(s-t)} c(s,t) ds$$

Como o consumo individual é proporcional a riqueza, segue-se, então, que o consumo agregado é também proporcional à riqueza total da sociedade:

$$c(t) = \theta\left[a(t) + h(t)\right]$$

A taxa de variação do consumo agregado é obtida aplicando-se a regra de Leibnitz na fórmula de agregação do consumo. Isto é:

$$\frac{d\,c(t)}{d\,t} = \phi\ e^{\phi(t-t)} c(t,t) + \int_{-\infty}^{t} \phi(-\phi) e^{\phi(s-t)} c(s,t) ds + \int_{-\infty}^{t} \phi \quad e^{\phi(s-t)} \dot{c}(s,t) ds$$

Simplificando-se esta expressão e levando-se em conta a taxa de crescimento do consumo individual obtém-se:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \phi[c(t,t) - c(t)] + \int_{-\infty}^{t} \phi\ e^{\phi(s-t)} \sigma(r-\rho)\, c(s,t) ds$$

A integral que aparece nesta equação é proporcional ao consumo agregado. Logo:

$$\frac{d\,c(t)}{dt} = \phi(c(t,t) - c(t)) + \sigma(r-\rho) c$$

A diferença entre o consumo dos indivíduos da geração *t* e o consumo agregado, ambos no período *t*, é obtido fazendo-se uso da hipótese de que a riqueza financeira dos indivíduos ao nascerem é igual a zero, $a(t,t) = 0$. Portanto:

$$c(t,t) - c(t) = \theta[a(t,t) + h(t)] \ - \theta[a(t) + h(t)] = -\theta\ a(t)$$

A taxa de variação do consumo depende do nível do consumo e da riqueza agregada, de acordo com:

$$\dot{c} = \sigma(r-\rho)\, c - \phi\, \theta\, a$$

Riqueza Agregada

A riqueza agregada é definida por:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi\ e^{\phi(s-t)} a(s,t)\, ds$$

A taxa de variação da riqueza agregada é obtida aplicando-se a regra de Leibnitz na expressão acima:

$$\frac{da(t)}{dt} = \phi\ e^{\phi(t-t)} a(t,t) + \int_{-\infty}^{t} \phi(-\phi)\, e^{\phi(s-t)} a(s,t) ds + \int_{-\infty}^{t} \phi\ e^{\phi(s-t)} \dot{a}(s,t) ds$$

Simplificando-se esta equação e levando-se em conta a variação da riqueza do indivíduo resulta em:

$$\frac{da(t)}{dt} = \phi\ a(t,t) - \phi\, a(t) + \int_{-\infty}^{t} \phi \quad e^{\phi(s-t)} [(\phi + r) a(s,v) + \omega(v) - c(s,v)] dv$$

Como, por hipótese, $a(t,t) = 0$, segue-se que:

$$\frac{da(t)}{dt} = -\phi\, a + (\phi + r)a + \omega - c$$

Logo, a taxa de variação da riqueza agregada é dada por:

$$\dot{a} = ra + \omega - c$$

A taxa de juros relevante na variação da riqueza agregada é a taxa de juros da economia, e não a taxa de juros que cada indivíduo leva em conta nas suas decisões. A taxa de juros para cada indivíduo é a taxa de juros da economia mais o prêmio de risco pelo fato da vida ser finita. O prêmio de risco, do ponto de vista agregado, acarreta apenas transferência de renda entre os indivíduos.

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico do modelo de gerações superpostas com vida finita é formado pelas duas equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{c} = \sigma(r - \rho)\, c - \phi\,\theta\, a \\ \dot{a} = ra + \omega - c \end{cases}$$

A matriz jacobiana deste sistema é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial Q} \\ \dfrac{\partial \dot{a}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(r-\rho) & -\phi\theta \\ -1 & r \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é negativo no ponto de equilíbrio estacionário:

$$|J| = \sigma(r - \rho)\; r - \phi\;\theta = \phi\theta(\frac{\bar{a}\; r}{\bar{c}} - 1) = -\frac{\omega}{\bar{c}}$$

O ponto de equilíbrio do sistema dinâmico é um ponto de sela. Dado a riqueza inicial, a economia converge para o ponto de equilíbrio estacionário na trajetória de sela.

Economia com Produção

No modelo de uma economia com produção de gerações superpostas com vida finita a riqueza financeira corresponde ao estoque de capital. Logo, a=k, e a taxa de juros é igual à produtividade marginal líquida do capital:

$$r - f'(k) - \delta$$

A soma da remuneração do capital e do trabalho, que são pagos pelas suas produtividades marginais, é justamente igual ao produto, admitindo-se que a função de produção tenha retornos constantes de escala. Isto é:

$$r\,a+\omega=\left(f'(k)-\delta\right)k+f(k)-kf'(k)=f(k)-\delta\,k$$

O sistema dinâmico deste modelo é formado pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases}\dot{c}=\sigma\left[f'(k)-\delta-\rho\right]c-\phi\,\theta\,k\\ \dot{k}=f(k)-\delta\,k-c\end{cases}$$

A análise deste sistema é semelhante a que foi feita para o caso do modelo de gerações superpostas com vida infinita.

Economia Aberta

No modelo de uma economia aberta pequena com gerações superpostas com vida finita admite-se que a riqueza financeira corresponda a títulos transacionados internacionalmente a uma taxa de juros que o país pequeno não pode afetar. O sistema dinâmico deste modelo é formado pelas duas equações diferenciais:

$$\begin{cases}\dot{c}=\sigma\left(r-\rho\right)c-\phi\,\theta\,a\\ \dot{a}=r^{*}\;a+\omega-c\end{cases}$$

onde a taxa de juros internacional é igual a r^{*}. No equilíbrio estacionário, a taxa de juros internacional e a taxa de preferência intertemporal estão relacionadas pela equação:

$$r^{*}=\rho+\frac{\phi\theta}{\sigma}\frac{\overline{a}}{\overline{c}}$$

Quando o país for credor a taxa de juros internacional é maior do que a taxa de preferência intertemporal, $r^{*}>\rho$, pois $\overline{a}>0$. No caso do país devedor, a taxa de juros internacional é menor do que a taxa de preferência intertemporal, $r^{*}<\rho$, pois $\overline{a}<0$. Diferente do modelo do agente representativo, no modelo de gerações superpostas com vida finita a existência do estado estacionário para o consumo não depende da igualdade entre a taxa de juros internacional e a taxa de preferência intertemporal. A variável de ajuste no modelo é a conta corrente do balanço de pagamentos, gerando déficits ou superávits até que a razão entre o estoque de ativos e o consumo atinja uma certa proporção.

Economia com Governo

Numa economia com governo o déficit público é financiado emitindo-se títulos públicos. A taxa de variação da dívida pública é dada por:

$$\dot{b}=r\;b+g-\tau$$

Esta equação é a restrição orçamentária do governo em termos de fluxos. A solução desta equação diferencial, supondo-se que não haja jogo de Ponzi, é a restrição orçamentária intertemporal do governo:

$$b(t) = \int_t^{\infty} e^{-r\,(x-t)}(\tau - g)dx$$

Esta restrição estabelece que o valor presente dos superávits primários futuros tem que ser igual ao valor da dívida pública em poder do mercado.

A riqueza total do setor privado é a soma da riqueza financeira, na forma de títulos públicos, mais o valor do capital humano:

$$b(t) + h(t) = b(t) + \int_t^{\infty} e^{-(\phi+r)(v-t)}(w-\tau)\,dv$$

O valor do capital humano, igual ao valor presente do salário líquido de impostos, pode ser escrito do seguinte modo:

$$h(t) = \int_t^{\infty} e^{-(\phi+r)(v-t)}(w-\tau)\,dv = \int_t^{\infty} e^{-(\phi+r)(v-t)}(\omega - g)d\nu - \int_t^{\infty} e^{-(\phi+r)(v-t)}(\tau - g)d\nu$$

Substituindo-se esta expressão na equação anterior obtém-se:

$$b(t) + h(t) = b(t) + \int_t^{\infty} e^{-(\phi+r)(v-t)}(\omega - g)d\nu - \int_t^{\infty} e^{-(\phi+r)(v-t)}(\tau - g)d\nu$$

A riqueza total desta sociedade inclui uma parte do valor dos títulos públicos. Este fato ocorre porque a taxa de juros que os indivíduos descontam os superávits primários é diferente da taxa que o setor público desconta os mesmos. Isto é:

$$b(t) - \int_t^{\infty} e^{-(\phi+r)(v-t)}(\tau - g)d\nu = \int_t^{\infty} e^{-r(v-t)}(\tau - g)d\nu - \int_t^{\infty} e^{-(\phi+r)(v-t)}(\tau - g)d\nu$$

Quando o parâmetro ϕ for igual a zero, ou seja, a vida for infinita, a dívida pública não será parte da riqueza da sociedade. Portanto, no modelo de gerações superpostas com vida finita à equivalência ricardiana não é válida.

6. Exercícios

1) Numa economia, os indivíduos vivem dois períodos. No primeiro período, na juventude, eles trabalham. No segundo, na velhice, os indivíduos aposentam-se, vivendo da poupança feita na juventude e dos rendimentos da mesma. O consumo, no primeiro período é representado por $c_{1,t}$ e no segundo por $c_{2,t+1}$. A restrição orçamentária do indivíduo é, então, dada por:

$$c_{1,t} = \omega_t - s_t$$
$$c_{2,t+1} = (1 + r_{t+1})\,s_t$$

onde ω_t é o salário, s_t a poupança e r_{t+1} a taxa de juros.

As preferências do indivíduo são representadas pela função utilidade:

$$u(c_1,t)+\frac{1}{1+\rho}u(c_{2,t+1}) \ , \ u'>0, u''<0$$

onde ρ é a taxa de preferência intertemporal.
a) Deduza a condição de primeira ordem do problema de otimização do indivíduo.
b) Mostre que a poupança pode ser escrita como função do salário e da taxa de juros:

$$s_t = s(\omega_t, r_{t+1})$$

c) Mostre que: $\frac{\partial s_t}{\partial \omega_t} > 0$

d) Mostre que: $\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} \gtrless 0$

e) Admita que a função utilidade seja dada por:

$$u(c)=\begin{cases} \dfrac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \ , \sigma \neq 1 \\ \\ \log c \ , \sigma = 1 \end{cases}$$

Deduza a função poupança nestes dois casos e mostre que se $\sigma > 1$,

$$\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} > 0$$

2) Na economia de gerações superpostas da questão anterior, a função de produção tem retornos constantes de escala,

$$Y = F(K,L)$$

onde Y é a produção, K o estoque de capital e L a população que trabalha, cuja taxa de crescimento é igual a n: $L_t = (1+n)L_{t-1}$. As empresas maximizam o lucro, e o salário e a taxa de juros são dados por:

$$\omega_t = f(k_t) - k \ f'(k)$$
$$r_t = f'(k_t) - \delta$$

onde $k = K/L$, $f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$ e δ é a taxa de depreciação.

A poupança é igual ao investimento:

$$K_{t+1} - K_t + \delta \ K_t = L_t s_t$$

a) Mostre que

$$k_{tn} = \frac{(1-\delta)k_t + s_t(\omega_t, r_{tn})}{1+n}$$

onde:

$$\omega_t = f(k_t) - k\, f'(k)$$

$$r_{t+1} = f'(k_{t+1}) - \delta$$

b) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.
c) Neste modelo, a economia pode ter super acumulação de capital e ser dinamicamente ineficiente; isto é, o equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto?

3) Responda as três perguntas da questão anterior no caso particular das funções utilidade e produção serem especificadas, respectivamente por:

$$u(c) = \frac{C^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

$$f(k) = A\,k^{\alpha}$$

4) Considere o modelo de gerações superpostas com vida infinita,

$$\dot{c} = \sigma(r-\rho)c - n\,\theta\, a$$
$$\dot{a} = (r-n)a + \omega - c$$

Admita que a taxa de juros internacional seja menor do que a taxa de preferência intertemporal. Mostre o que acontece nesta economia quando a taxa de juros internacional diminui nas seguintes situações:
a) a mudança é permanente e não antecipada;
b) a mudança é permanente e antecipada;
c) a mudança é transitória e não antecipada;
d) a mudança é transitória e antecipada.

5) Considere o seguinte modelo de uma economia, de gerações superpostas com vida finita, com produção:

$$\begin{cases} \dot{c} = \sigma[f'(k) - \delta - \rho]c - \phi\,\theta\, k \\ \dot{k} = f(k) - \delta\, k - c \end{cases}$$

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com o consumo no eixo vertical e o capital no eixo horizontal.
b) Neste modelo existe ineficiência dinâmica?
c) Analise os efeitos no consumo e no capital de uma mudança não antecipada na taxa de mortalidade.

Capítulo 3

Crescimento Econômico

A teoria do crescimento econômico tem como objetivo explicar as causas que determinam o nível e a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra. Esta teoria deve ser capaz de explicar os seguintes fatos estilizados: i) a produtividade da mão-de-obra tem crescido de modo sistemático; ii) a relação capital/mão-de-obra tem crescido ao longo do tempo; iii) a taxa de retorno do capital tem sido razoavelmente constante; iv) a relação capital/produto não tem se alterado ao longo do tempo; v) as participações da mão-de-obra e do capital no produto não tem mostrado nenhuma tendência para aumentar ou diminuir; vi) a taxa de crescimento da produtividade de mão-de-obra tem variado de acordo com o país. Os modelos apresentados neste capítulo procuram reproduzir estes fatos. A primeira seção é dedicada ao modelo de crescimento exógeno. Neste modelo, o consumo não é deduzido a partir da alocação intertemporal dos recursos do agente. A segunda seção trata, então, do modelo de crescimento exógeno com microfundamentos. A terceira seção apresenta os modelos de crescimento endógeno. A quarta seção trata do modelo de crescimento endógeno com microfundamentos. A quinta seção é dedicada à contabilidade do crescimento econômico.

1. Crescimento Exógeno

O produto real da economia (*Y*) é igual a produtividade média da mão de obra (*Y/L*) vezes a quantidade de mão de obra (*L*). Isto é:

$$Y = \frac{Y}{L} L$$

A taxa de crescimento do produto real é, portanto, igual à soma da taxa de crescimento da produtividade da mão de obra com a taxa de crescimento da força de trabalho:

$$\hat{Y}_n = \left(\frac{\hat{Y}}{L}\right) + \hat{L}$$

onde o símbolo $\hat{X}$ representa a taxa de crescimento da variável X: $\hat{X} = \dot{X} / X$. Admitindo-se que as taxas de crescimento da produtividade da mão de obra e da população sejam constantes,

$$\left(\frac{\hat{Y}}{L}\right) = g \quad ; \quad \hat{L} = n$$

A taxa de crescimento do produto real, denominada taxa de crescimento natural ($\hat{Y}_n$), é dada por:

$$\hat{Y}_n = g + n$$

Uma forma alternativa de se calcular a taxa de crescimento do produto real é obtida a partir da taxa de crescimento do estoque de capital:

$$\hat{Y}_\omega = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{Y} \frac{Y}{K}$$

onde multiplicou-se e dividiu-se a expressão, depois do segundo sinal de igualdade, pelo produto real. A taxa de crescimento do produto real depende, portanto, da proporção do aumento do estoque de capital com relação ao produto e da relação produto/capital. A variação do estoque de capital é igual ao investimento bruto menos a depreciação do capital:

$$\dot{K} = I - \delta K$$

Substituindo-se esta expressão na equação da taxa de crescimento do produto real obtém-se:

$$\hat{Y}_\omega = \frac{I - \delta K}{Y} \frac{Y}{K} = \frac{I / Y}{K / Y} - \delta$$

Admita-se que a taxa de investimento e a relação capital /produto sejam constantes,

$$\frac{I}{Y} = s \quad ; \quad \frac{K}{Y} = v$$

A taxa de crescimento do produto real, denominada taxa garantida, é dada, então, por:

$$\hat{Y}_\omega = \frac{s}{v} - \delta$$

A taxa natural e a taxa garantida de crescimento do produto real somente seriam iguais por acaso. Este fato foi denominado na literatura econômica de fio de navalha. Em geral, as duas taxas são diferentes:

$$\hat{Y}_n = g + n \neq \frac{s}{v} - \delta = \hat{Y}_\omega$$

A taxa de crescimento natural do produto real depende da tecnologia enquanto a taxa garantida é aquela que corresponde à plena utilização do capital, pois é uma conseqüência da condição de que a poupança seja igual ao investimento para que o mercado de bens e serviços esteja em equilíbrio. Se a taxa natural for maior do que a taxa garantida ($Y_n > Y_\omega$) a taxa de desemprego cresce indefinidamente, ou aumenta continuamente a taxa de utilização da capacidade instalada. Por outro lado, se a taxa natural for menor do que a taxa garantida ($Y_n < Y_\omega$) há excesso de demanda de mão de obra, ou diminui de modo sistemático a taxa de utilização da capacidade instalada. O modelo de Solow supõe que os preços dos fatores de produção, capital e mão de obra, se ajustam de sorte a resolver este problema.

1.1 Modelo de Solow

O modelo de Solow é especificado por três equações: i) uma função de produção, com retornos constantes de escala e com progresso tecnológico poupador de mão de obra; ii) uma condição de equilíbrio de poupança e investimento no mercado de bens e serviços; e iii) uma hipótese comportamental de que o consumo seja proporcional a renda. Isto é:

$$Y = F\,(K,\, A\, L\,)$$

$$Y = C + I = C + \dot{K} + \delta\, K$$

$$S = Y - C = Y - (1-s)Y = s\, Y$$

onde A é o parâmetro que representa o progresso tecnológico, C o consumo, S a poupança, 1-s a propensão média (=marginal) a consumir e s a propensão média a poupar. O modelo de Solow admite ainda que a taxa de crescimento do progresso tecnológico (g) e a taxa de crescimento da população (n) sejam constantes:

$$\frac{\dot{A}}{A} = g \quad , \quad \frac{\dot{L}}{L} = n$$

Álgebra

Quando se multiplicam os fatores de produção por um parâmetro qualquer na função de produção com retornos constantes de escala, a quantidade de produto aumenta da mesma magnitude:

$$F(\lambda\, K, \lambda\, AL) = \lambda\, F\,(K, AL)$$

O parâmetro λ pode ser escolhido arbitrariamente e será conveniente defini-lo por:

$$\lambda = \frac{1}{AL}$$

Substituindo-se esta expressão na função de produção obtém-se:

$$y = \frac{Y}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, \frac{AL}{AL}\right) = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = f(k)$$

onde *f(k)* é a forma intensiva da função de produção. O produto real e a quantidade de capital, em unidades de eficiência de mão de obra, são definidos por:

$$y = \frac{Y}{AL} \qquad k = \frac{K}{AL}$$

A função de produção *f(k)* deve obedecer às propriedades:

$$y = f(k) \qquad \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{k \to \infty} f'(k) = 0 \\ \lim\limits_{k \to 0} f'(k) = \infty \end{cases}$$

A primeira propriedade afirma que sem capital nada se produz, a segunda diz que a produtividade marginal do capital tende para zero a medida que a quantidade de capital cresce de modo ilimitado, a terceira propriedade impõe a condição de que a produtividade marginal do capital tende para infinito quando a quantidade de capital aproxima-se de zero. As duas últimas propriedades são conhecidas como condições de Inada .

Dividindo-se ambos os lados da equação de equilíbrio do produto com o dispêndio pela quantidade de mão de obra em unidades de eficiência tem-se:

$$\frac{Y - C}{AL} = \frac{\dot{K}}{AL} + \frac{\delta K}{AL}$$

Usando-se a hipótese de que o consumo é proporcional a renda, a expressão anterior transforma-se em:

$$s\, y = \frac{\dot{K}}{AL} + \delta\, k$$

Derivando-se *k* com relação ao tempo resulta:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - (g + n)\, k$$

Combinando-se as duas últimas equações obtém-se:

$$s\, y = \dot{k} + (g + n + \delta)\, k$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico do modelo de crescimento exógeno de Solow é dado, então, pela equação diferencial não linear de primeira ordem:

$$\dot{k} = s\, f(k) - (g + n + \delta)\, k$$

No estado estacionário, $\dot{k} = 0$, a quantidade de capital de equilíbrio ($\bar{k}$) é obtida pela solução da seguinte equação:

$$s\,f(\bar{k}) = (g + n + \delta)\bar{k}$$

O sistema tem dois pontos de equilíbrio, $\bar{k} = 0$ e $\bar{k} = k^*$, como indicado na Figura 6.1. Supondo-se que a solução seja diferente de zero, a equação anterior pode ser escrita como:

$$\frac{s}{k^* / f(k^*)} - \delta = g + n$$

A razão $k^* / f(k^*)$ é a relação capital/produto de equilíbrio. Logo, no estado estacionário a taxa de crescimento do produto natural é igual a taxa de crescimento do produto garantida: $\hat{Y}_n = \hat{Y}_\omega = \hat{Y}$. Portanto, no modelo de crescimento exógeno não existe fio de navalha. Caso as duas taxas sejam diferentes, o preço relativo dos fatores de produção, capital e trabalho, se ajusta e a relação capital/produto muda de tal forma que no estado estacionário as duas taxas sejam iguais:

$$\hat{Y}_w = \frac{s}{v} - \delta = g + \delta = \hat{Y}_n$$

As Figuras 3.1 e 3.2 mostram a dinâmica do modelo. Quando a quantidade de capital, por unidade de eficiência de mão de obra, está fora de equilíbrio, qualquer que seja a posição inicial, a quantidade de capital converge para k^*.

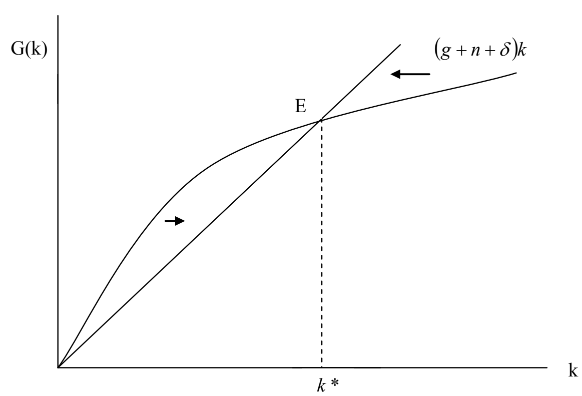


Figura 3.1

Previsões e Experimentos

A estabilidade do equilíbrio do modelo de crescimento exógeno leva a seguinte previsão:

Previsão 1. No longo prazo a economia converge para k*, que independe das condições iniciais do modelo.

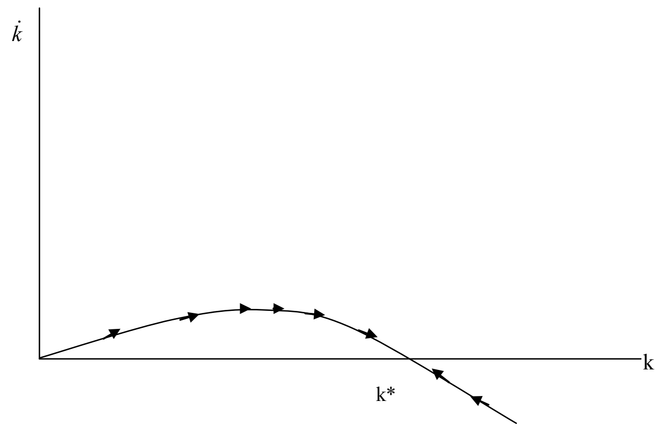


Figura 3.2

A Figura 3.3 mostra a dinâmica comparativa do modelo quando a taxa de poupança aumenta ($s_1 > s_0$). O novo ponto de equilíbrio corresponde a uma relação capital mão de obra, por unidade de eficiência, mais elevada. Portanto, a renda per capita desta economia será, também, mais elevada.

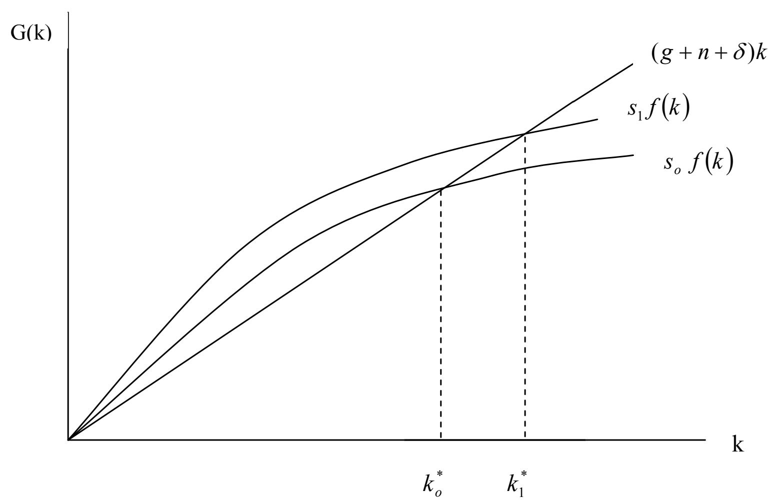


Figura 3.3

Previsão 2. Quanto maior (menor) a taxa de poupança maior (menor) a renda per capita no longo prazo.

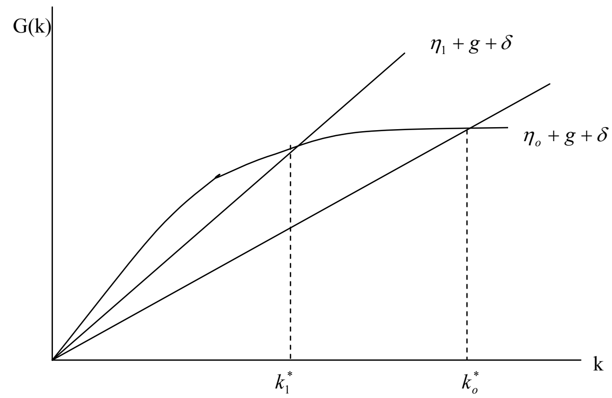


Figura 3.4

A Figura 3.4 mostra a dinâmica comparativa quando a taxa de crescimento da população aumenta ($n_1 > n_0$). No novo ponto de equilíbrio de longo prazo a quantidade de capital, por unidade de eficiência da mão de obra, diminui. Isto corresponde uma renda per capita menor. Esta propriedade produz a seguinte previsão:

Previsão 3. Quanto maior a taxa de crescimento da população, menor a renda per capita no longo prazo.

A produtividade média da mão de obra, no equilíbrio estacionário, é igual ao produto real, medido em unidades de eficiência da mão de obra, vezes o parâmetro que mede o progresso tecnológico:

$$\left(\frac{Y}{L}\right)^* = y^* A = y^* A_o \, e^{g\,t}$$

A taxa de crescimento da produtividade média da mão de obra é, portanto, igual a taxa de crescimento do progresso tecnológico:

$$\left(\frac{\hat{Y}}{L}\right)^* = g$$

Previsão 4. No longo prazo a taxa de crescimento da renda per capita depende apenas da taxa de crescimento do progresso tecnológico.

A relação capital/produto é igual à razão entre o capital e o produto, ambos medidos em termos de unidades de eficiência da mão de obra. No equilíbrio de longo prazo estas duas variáveis são constantes. Logo, em equilíbrio, a relação capital/produto é constante:

$$\frac{K^*}{Y^*} = \frac{(K/AL)^*}{(Y/AL)^*} = \frac{k^*}{y^*}$$

Previsão 5. No longo prazo a relação capital/produto é constante.

No equilíbrio de longo prazo a taxa de juros é constante:

$$r^* = f'(k^*)$$

A Figura 3.5 mostra graficamente esta relação na tangente à curva da função de produção. O salário por trabalhador, medido em termos de eficiência, $\omega^* = (W / AL)^*$, é obtido pela seguinte expressão:

$$\omega^* = f(k^*) - f'(k^*)\, k^*$$

Segue-se, então, que o salário, por trabalhador, cresce a mesma taxa do progresso tecnológico:

$$\left(\frac{W}{L}\right)^* = \omega^*\, A_o\, e^{g\,t}$$

Previsão 6. No longo prazo a produtividade marginal do capital é constante e o salário, por trabalhador, cresce à mesma taxa do progresso tecnológico.

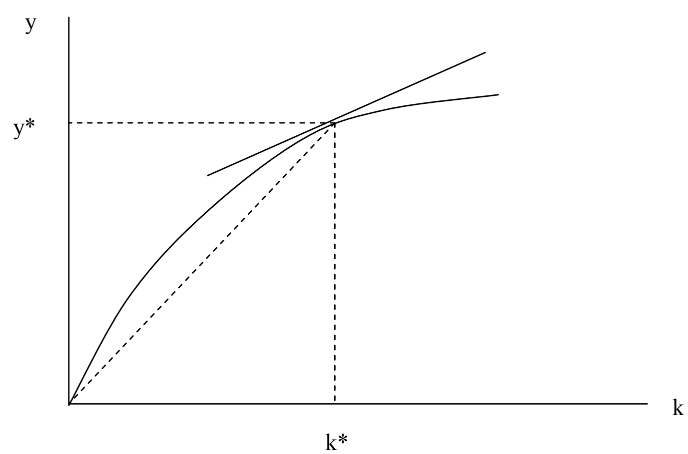


Figura 3.5

Produtividade da Mão de Obra

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra é igual a soma das taxas de crescimento do progresso tecnológico e do produto por unidade de eficiência da mão de obra, $\hat{Y} - \hat{L} = \hat{A} + \hat{y}$. Como $\hat{y} = \alpha_k \hat{k}$, onde α_k é a participação do capital no produto, segue-se que:

$$\hat{Y} - \hat{L} = \hat{A} + \alpha_k \left(\frac{sf(k)}{k} - (g + n + \delta)\right)$$

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra tem dois componentes. O primeiro é a taxa de crescimento de longo prazo igual à taxa de crescimento do progresso tecnológico. O segundo componente, de curto prazo, depende da participação do capital no produto multiplicado pela taxa de crescimento do capital per capita, medido em termos de eficiência de mão de obra. Esta taxa de crescimento do capital per capita é igual à diferença entre as taxas garantida e natural. No longo prazo este componente é igual a zero.

1.2 Ineficiência, Convergência e Divergência

Esta seção apresenta algumas propriedades do modelo de Solow, tratando especificamente das questões de ineficiência dinâmica, de convergência e da incapacidade do modelo de prever fatos observados no mundo real.

Regra de Ouro e Ineficiência Dinâmica

No estado estacionário do modelo de Solow o consumo é dado por:

$$c^* = f(k^*) - (g + n + \delta)k^*$$

A regra de ouro, baseada na regra de conduta que preceitua que não se deve fazer com o próximo aquilo que não se deseja para si, é obtida maximizando-se o consumo com relação ao estoque de capital. Isto é:

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - (g + n + \delta) = 0$$

A taxa de juros que maximiza o consumo é igual a taxa de crescimento do produto real da economia:

$$f'(k_g^*) - \delta = g + n$$

onde k_g^* é o estoque de capital, por unidade de eficiência, que produz a regra de ouro.

O consumo, na regra de ouro, além de máximo, seria tal que a poupança o manteria constante ao longo do tempo. Nenhuma geração estaria violando o preceito de conduta mencionado, pois todas as gerações estariam deixando para as próximas aquilo que tiveram.

A Figura 3.6 mostra graficamente a regra de ouro. O consumo é máximo quando a tangente a função de produção for paralela a reta que passa pela origem e cujo coeficiente angular é igual a $g + n + \delta$. Se o estoque de capital da economia for maior do que o estoque de capital que corresponde a regra de ouro, $k > k_g^*$, a taxa de juros real será menor do que a taxa de crescimento do produto real, $f'(k) - \delta < g + n$, e a economia será ineficiente. A ineficiência dinâmica caracteriza-se, portanto, por uma superacumulação de capital. Quando a economia é dinamicamente ineficiente, é possível aumentar o bem estar para todos sem piorar o de ninguém, pois a economia não é eficiente no sentido de Pareto. Numa economia ineficiente, a sociedade está poupando demais, isto é, a redução de poupança aumentaria o consumo e o bem estar da sociedade.

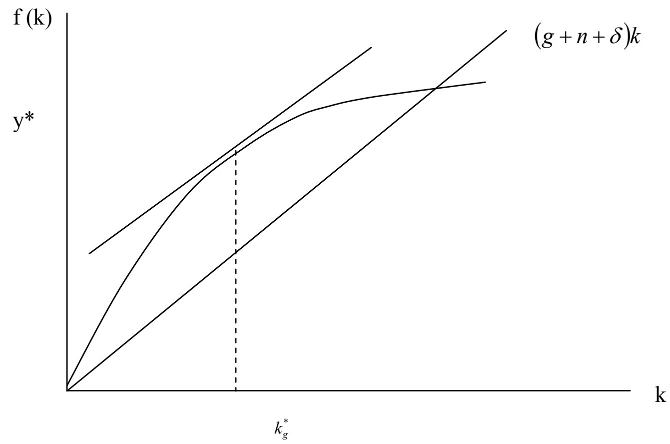


Figura3.6: Regra de Ouro

A condição para ineficiência dinâmica pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{f'(k)\ k}{y} < \frac{(g+n+\delta)k}{y}$$

onde se multiplicou e se dividiu ambos os lados da desigualdade por k e y, respectivamente. O lado esquerdo desta desigualdade é a participação do capital no produto e o lado direito é a taxa de investimento da economia no estado estacionário:

$$\alpha_k = \frac{f'(k)\ k}{y} \quad , \quad s = \frac{(g+n+\delta)k}{y}$$

A economia será dinamicamente ineficiente quando a participação do capital no produto for menor do que a taxa de investimento: $\alpha_k < s$.

Convergência

Dois tipos de convergência podem ser analisados no modelo de crescimento exógeno, a convergência absoluta e a convergência relativa. Na convergência absoluta supõe-se que os parâmetros de duas economias, ou de duas regiões, sejam exatamente iguais. Na convergência relativa admite-se que tal hipótese não se verifica, isto é, que os parâmetros das duas economias sejam diferentes. Para analisar ambos os casos se divide os dois lados da equação diferencial do modelo de Solow por k:

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\ \frac{f(k)}{k} - (g+n+\delta)$$

O lado esquerdo desta expressão é a taxa de crescimento de k e o lado direito é a diferença de dois componentes. O primeiro, proporcional à relação produto/capital, decresce com o aumento do estoque de capital, por unidade de eficiência, e o segundo é constante, como desenhado na Figura 3.7. Imaginem-se dois países, ou duas regiões, com estoques de capitais iniciais diferentes, como assinalado na respectiva figura. O país, ou região, com estoque de capital menor terá um crescimento do produto mais elevado. No longo prazo ambos terão a mesma renda per capita e a mesma taxa de crescimento do produto.

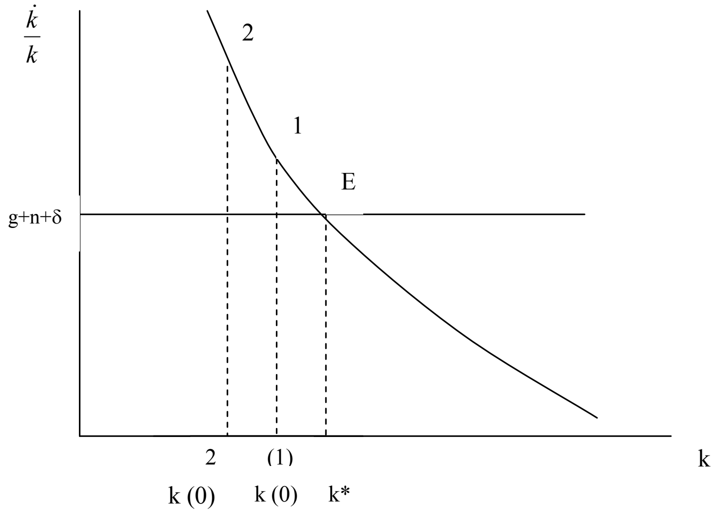


Figura 3.7 Convergência Absoluta

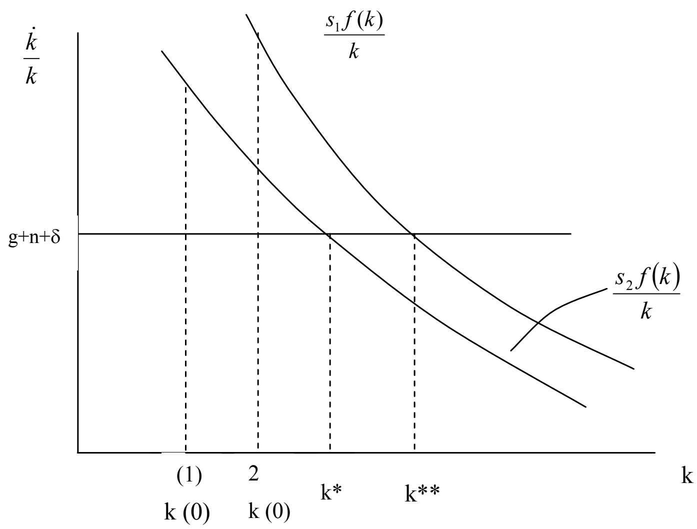


Figura 3.8. Convergência Relativa

A Figura 3.8 mostra o exemplo de dois países, ou duas regiões, no qual um dos países tem uma taxa de poupança mais elevada ($s_1 > s_2$). Este exemplo trata da convergência relativa. O país mais pobre, com menor estoque de capital inicial, não terá necessariamente uma taxa de crescimento mais elevada do que o país rico. No longo prazo eles terão a mesma taxa de crescimento do produto. Todavia, o país mais rico continuará sendo mais rico, pois terá uma renda per capita mais elevada.

Taxa de Convergência

A taxa de convergência do modelo de Solow pode ser calculada de forma aproximada com auxílio da expansão de Taylor da equação diferencial do modelo, repetida aqui por conveniência:

$$\dot{k} = s\, f(k) - (n + g + \delta)\, k$$

A expansão de Taylor despreza todos os termos de ordem superior ao primeiro:

$$\dot{k} = \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}\Big|_{k=k*} (k - k*)$$

A derivada de $\dot{k}$ com relação a k é igual a:

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = s\ f'(k) - (n + g + \delta)$$

Logo:

$$\dot{k} = [s\ f'(k*) - (n + g + \delta)]\,(k - k*)$$

Como em equilíbrio, $s\, f(k*) = (n + g + \delta)\, k*$**,** segue-se que:

$$s = \frac{(n + g + \delta)\, k*}{f\,(k*)}$$

A taxa de convergência da relação capital/mão de obra é, portanto, igual a:

$$\dot{k} = \left[\frac{(n + g + \delta)\ f'(k*)\, k^*}{f(k*)} - (n + g + \delta)\right](k - k*)$$

Colocando-se $n + g + \delta$ em evidência obtém-se:

$$\dot{k} = \left[\frac{f'(k*)\, k^*}{f(k*)} - 1\right](n + g + \delta)\,(k - k*)$$

A participação do capital no produto é igual a:

$$\alpha_k = \frac{f'(k*)\, k^*}{f(k*)}$$

Logo:

$$\dot{k} = -(1 - \alpha_k)(n + g + \delta)(k - k*)$$

Denominando-se por λ o coeficiente do desvio de k com relação ao seu valor de equilíbrio,

$$\lambda = (1-\alpha_k)(n+g+\delta)$$

obtém-se a expressão:

$$\dot{k} = -\lambda\,(k - k^*)$$

Derivando-se a função de produção $y = f(k)$ com relação ao tempo

$$\frac{dy}{dt} = f'(k^*)\,\frac{dk}{dt}$$

e levando-se em conta a derivada de k com relação ao tempo, resulta:

$$\dot{y} = -f'(k^*)\,\lambda\,(k - k^*))$$

Fazendo-se uma expansão de Taylor da função de produção $y = f(k)$, desprezando-se os termos de ordem superior a primeira, obtém-se:

$$f(k) = f(k^*) + f'(k^*)\,(k - k^*)$$

Combinando-se estas duas últimas expressões obtém-se a equação da taxa de convergência do produto real:

$$\dot{y} = -\lambda\,(y - y^*)$$

As taxas de convergência do estoque de capital, por unidade de eficiência da mão de obra, e do produto real são calculadas usando-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{k} = -\lambda\,(k - k^*) \\ \dot{y} = -\lambda\,(y - y^*) \end{cases}$$

Estas equações são aproximadas linearmente por:

$$\begin{aligned} k(t) - k^* &\cong e^{-\lambda t}\,(k(0) - k^*) \\ y(t) - y^* &\cong e^{-\lambda t}\,(y(0) - y^*) \end{aligned}$$

A convergência do modelo de crescimento exógeno é bastante rápida. Com efeito, considere um exemplo no qual os parâmetros da economia sejam dados por:

$$\begin{cases} \alpha_k = 1/3 \\ n = 1\% \\ g = 2\% \\ \delta = 3\% \end{cases}$$

O parâmetro λ da taxa de convergência é igual a 4%:

$$\lambda = (1-\alpha_k)(n+g+\delta) = \frac{2}{3}(1+2+3) = 4\%$$

Logo, com esta taxa de convergência a economia vai levar 17,5 anos para percorrer metade do caminho: $e^{\lambda t} = e^{0,04\,t} = e^{0.04\,x\,17,5} \cong 2$, pois $e^{-\lambda\ t} = 1/2$.

Renda Per Capita: Diferença entre Países

No equilíbrio estacionário do modelo de crescimento exógeno tem-se:

$$s\,y^* = (n+g+\delta)\,k^*$$

Diferenciando-se ambos os lados desta expressão resulta:

$$\frac{dy^*}{y^*} + \frac{ds}{s} = \frac{dk^*}{k^*} + \frac{d(n+g+\delta)}{n+g+\delta}$$

Da diferencial da função de produção $y^* = f(k^*)$, $d\,y^* = f'(k^*)\,d\,k^*$, obtém-se:

$$\frac{dy^*}{y^*} = \frac{f'(k^*)\cdot k^*}{f(k^*)}\,\frac{dk^*}{k^*} = \alpha_k\,\frac{dk^*}{k^*}$$

onde α_k é a participação do capital no produto $\alpha_k = f'(k^*)\,k^* / f(k^*)$. Substituindo-se o valor de dk^*/k^* na diferencial da condição de equilíbrio obtém-se:

$$\frac{dy^*}{y^*} + \frac{ds}{s} = \frac{1}{\alpha_k}\,\frac{dy^*}{y^*} + \frac{d(n+g+\delta)}{n+g+\delta}$$

Rearranjando-se os termos desta expressão resulta:

$$\frac{dy^*}{y^*} = \frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}\left(\frac{ds}{s} - \frac{d\,(n+g+\delta)}{n+g+\delta}\right)$$

A aproximação linear desta equação é dada por:

$$\log\,y^* = \frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}\big(\log s - \log(n+g+\delta)\big)$$

Logo:

$$y^* = s^{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}}\,(n+g+\delta)^{-\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}}$$

Admita que a taxa de poupança do país *A* seja quatro vezes a taxa de poupança do país *B*: s_A (país A) = 4 s_B (país B). Suponha que a participação do capital em ambos os países seja igual a um terço. Logo, $\alpha_K/(1-\alpha_K)=1/2$. A relação entre as rendas per capita dos dois países seria, então, igual a:

$$\frac{y_A^*}{y_B^*}=\left(\frac{s_A}{s_B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

supondo-se que os demais parâmetros sejam os mesmos em ambos os países. Um país que poupe quatro vezes mais do que outro, teria uma renda per capita apenas duas vezes maior (no estado estacionário).

Considere outro exemplo, no qual o crescimento populacional do país *A* é de 1% e do país *B* é de 3%: n_A (país A)=1%, n_B (país B) = 3%; $g+\delta=5\%$ ao ano, e em ambos os países a participação do capital é a mesma do exemplo anterior. A diferença de renda per capita entre os dois países será dada, então, pela fórmula:

$$\frac{y_A^*}{y_B^*}=\left(\frac{n_A+g+\delta}{n_B+g+\delta}\right)^{-1/2}=\left(\frac{6}{8}\right)^{-1/2}=\left(\frac{8}{6}\right)^{1/2}=1{,}15$$

A conclusão que se chega com este exercício é de que a renda per capita do país (A) com menor taxa de crescimento populacional é 1,15 maior do que a renda per capita do país com maior taxa de crescimento da população

Taxa de Retorno do Capital e Renda per Capita

A taxa de juros é igual a produtividade marginal do capital,

$$r=f'(k)$$

A diferencial desta equação é dada por:

$$dr=f''(k)\quad dk$$

A diferencial da função de produção $y=f(k)$, $dy=f'(k)\,dk$, quando substituída na expressão anterior resulta em:

$$\frac{dr}{r}=\frac{f''(k)\,f}{[f'(k)]^2}\frac{dy}{y}=\frac{f\ f''}{(f')^2}\ \frac{dy}{y}$$

Mais adiante será deduzida a seguinte igualdade a partir da definição da elasticidade de substituição σ entre os fatores de produção:

$$\frac{f\cdot f''}{(f')^2}=-\frac{1-\alpha_k}{\sigma\,\alpha_k}$$

Substituindo-se este resultado na expressão anterior conclui-se que:

$$\frac{dr}{r} = -\left(\frac{1-\alpha_k}{\sigma\,\alpha_k}\right)\frac{dy}{y}$$

Uma aproximação para esta equação é dada por:

$$\log\, r = -\left(\frac{1-\alpha_k}{\sigma\,\alpha_k}\right)\log\, y$$

As taxas de retorno dos capitais e as rendas per capita de dois países, *A* e *B*, estão, portanto, relacionados, pela seguinte equação:

$$\frac{r_A}{r_B} = \left(\frac{y_A}{y_B}\right)^{-\frac{1-\alpha_k}{\sigma\,\alpha_k}}$$

Admita-se que a função de produção seja Cobb-Douglas. A elasticidade de substituição é, então, igual a um: $\sigma = 1$. Se a participação do capital for igual a um terço, o valor absoluto do expoente da razão entre as rendas per capita é igual a dois. Portanto, um país com uma renda per capita igual a metade de outro teria que ter uma taxa de retorno quatro vezes maior. Este fato certamente não é observado no mundo real. Se a participação do capital fosse igual a dois terços, ao invés de um terço, o resultado seria mais palatável.

Elasticidade de Substituição

A elasticidade de substituição mede a resposta da mudança relativa na proporção de fatores quando a taxa marginal de substituição sofre uma variação percentual, ao longo de uma isoquanta, como indicado na Figura 3.9. A elasticidade de substituição é, então, definida por:

$$\sigma = \frac{\dfrac{\Delta k}{k}}{\dfrac{\Delta \tau}{\tau}}$$

Quando as variáveis são continuas, a elasticidade de substituição é definida pela razão entre a taxa marginal de substituição e a relação capital/mão de obra dividida pela derivada da taxa marginal de substituição com relação à razão capital/ao de obra:

$$\sigma = \frac{\tau / k}{d\tau / dk}$$

A taxa marginal de substituição é igual à razão entre as produtividades marginais da mão de obra e do capital. A função de produção pode ser escrita como o produto da quantidade de mão de obra pela função que depende da relação capital/mão de obra. Isto é:

$$\tau = \frac{F_L}{F_K} \qquad , \quad Y = L\; f(k)$$

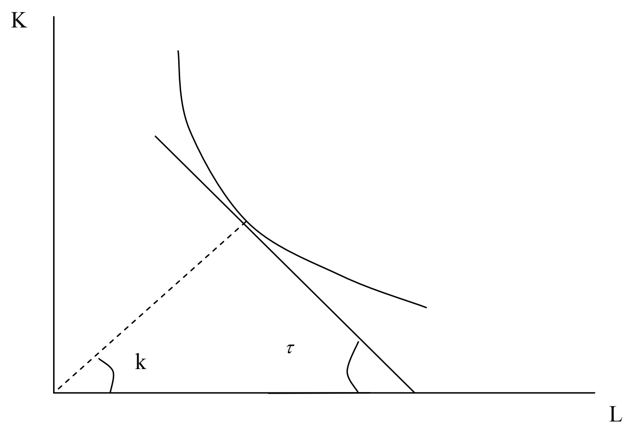


Figura 3.9

As produtividades marginais da mão de obra e do capital são, respectivamente, iguais a:

$$F_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) + L\ f'(k)\left(-\frac{K}{L^2}\right) = f(k) - k\ f'(k)$$

$$F_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = L\ f'(k)\ \frac{1}{L} = f'(k)$$

Logo, a taxa marginal de substituição é igual a:

$$\tau = \frac{f(k) - k\ f'(k)}{f'(k)} = \frac{f(k)}{f'(k)} - k$$

Derivando-se a taxa marginal de substituição com relação a *k* obtém-se:

$$\frac{d\tau}{dk} = \frac{f'(k)f'(k) - f(k)f''(k)}{\left(f'(k)\right)^2} - 1$$

Esta expressão depois de simplificada pode ser escrita como:

$$\frac{d\tau}{dk} = -\frac{f\ f''}{\left(f'\right)^2}$$

A relação entre a taxa marginal de substituição e *k* depende da participação do capital no produto de acordo com:

$$\frac{\tau}{k} = \frac{f(k)}{f'(k)k} - 1 = \frac{1}{\alpha_k} - 1 = \frac{1 - \alpha_k}{\alpha_k}$$

A elasticidade de substituição é, então, facilmente obtida dividindo-se esta expressão pela anterior:

$$\sigma = \frac{(1-\alpha_k)/\alpha_k}{\frac{-f\,f''}{(f')^2}} = -\left(\frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}\right)\frac{(f')^2}{f\,f''}$$

A expressão usada no texto é uma forma alternativa de se escrever a equação anterior. Isto é:

$$\frac{f\,f''}{(f')^2} = -\left(\frac{1-\alpha_k}{\sigma\,\alpha_k}\right)$$

Participação do Capital no Produto

A participação do capital no produto (α_k) é um parâmetro importante em três conseqüências importantes do modelo de crescimento exógeno: i) diferença de renda per capita devido às taxas de poupança e de crescimento populacional; ii) velocidade da convergência do produto para o estado estacionário e iii) diferença da taxa de retorno do capital entre países pobres e ricos. Nas três fórmulas, a participação do capital é um parâmetro que afeta os resultados, como pode ser facilmente constatado repetindo-se as três expressões deduzidas anteriormente:

$$\begin{cases} \dfrac{dy^*}{y^*} = \dfrac{\alpha_k}{1-\alpha_k}\left[\dfrac{ds}{s} - \dfrac{d(n+g+\delta)}{n+g+\delta}\right] \\[2ex] \dot{y} = (1-\alpha_k)(n+g+\delta)(y-y^*) \\[2ex] \dfrac{dr}{r} = -\left(\dfrac{1-\alpha_k}{\sigma\,\alpha_k}\right)\dfrac{dy}{y} \end{cases}$$

Com base nestas expressões concluiu-se que o modelo de crescimento exógeno não é capaz de explicar: i) as grandes diferenças de renda per capita observadas no mundo; ii) as taxas de convergência condicional que ocorrem na prática e iii) as diferenças de taxas de retorno do capital entre países pobres e ricos. Uma solução para estas questões é admitir-se que a participação do capital no produto é bem maior do que a usada nos modelos de crescimento exógeno. Todavia, esta hipótese demanda uma redefinição do conceito de capital. Este tema será apresentado mais adiante na seção que trata do modelo de crescimento endógeno.

1.3 Modelo com Capital Humano

O modelo de Solow pode ser generalizado introduzindo-se o capital humano como um dos fatores de produção. A função de produção depende, então, do capital físico, do capital humano (*H*) e da mão de obra não qualificada. A acumulação do capital físico mais a depreciação é igual a poupança, que é proporcional ao produto. A acumulação do capital humano mais sua depreciação é igual à poupança direcionada para esta finalidade. Esta poupança também absorve uma proporção do produto. O progresso tecnológico cresce a uma taxa constante, o mesmo ocorrendo com a população. O modelo é formado pelas seguintes equações:

$$Y = F\left(K, H, AL\right)$$

$$\dot{K} = s_K\, Y - \delta_K\, K$$

$$\dot{H} = s_h\, Y - \delta_h\, H$$

$$\dot{A} = g\; A$$

$$\dot{L} = n\; L$$

A função de produção, com retornos constantes de escala, e com os fatores de produção denominados em unidades de eficiência de mão de obra é dada por:

$$y = \frac{Y}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, \frac{H}{AL}, 1\right) = f\left(k, h\right)$$

onde $k=K/AL$, $h=H/AL$, e $f(k,h)$ é a forma intensiva da função de produção.

Sistema Dinâmico

Derivando-se k e h com relação ao tempo e substituindo-se as equações do modelo, com o mesmo procedimento usado no modelo de Solow, obtém-se o sistema dinâmico do modelo de capital humano formado pelas duas equações diferenciais:

$$\dot{k} = s_k\; f\left(k, h\right) - \left(n + g + \delta_k\right) k$$

$$\dot{h} = s_h\; f\left(k, h\right) - \left(n + g + \delta_h\right) h$$

O sistema de equações diferenciais tem um ponto de equilíbrio estável, pois o determinante de sua matriz jacobiana é positivo e o traço da mesma é negativo. A Figura 3.10 mostra os diagramas de fases de cada uma das equações diferenciais do modelo. A Figura 3.11 contém o diagrama de fases do modelo. Qualquer que seja o ponto inicial da economia ela converge para o ponto de equilíbrio *E*. No longo prazo a taxa de crescimento da economia cresce a uma taxa igual à soma das taxas de crescimento do progresso tecnológico e da população.

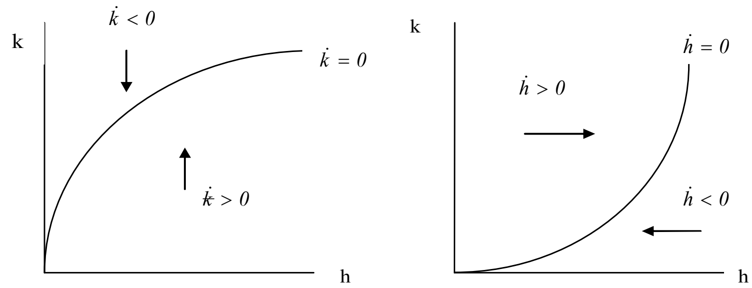


Figura 3.10

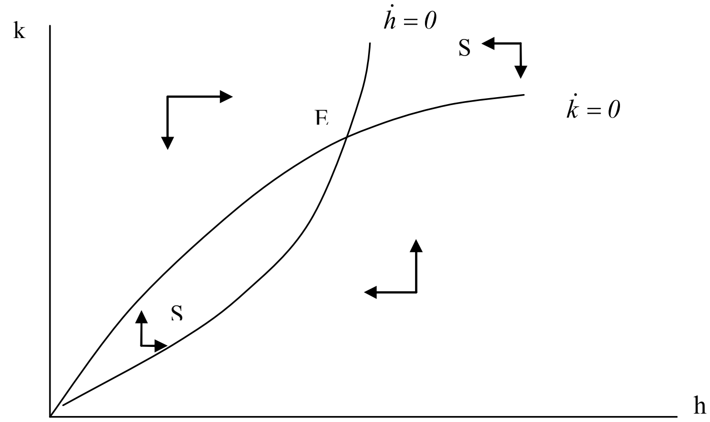


Figura 3.11

Produtividade da Mão de Obra

A taxa de crescimento do produto medido em termos de eficiência da mão de obra é obtida derivando-se a função de produção *f(k,h)* com relação ao tempo. Isto é:

$$\hat{y} = \alpha_k \ \hat{k} + \alpha_h \ \hat{h}$$

onde α_k e α_h são, respectivamente, as participações do capital físico e do capital humano no produto. Logo, a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra é igual a:

$$\left(\frac{\hat{Y}}{L}\right) = \hat{A} + \hat{y} = \hat{A} + \alpha_k \ \hat{k} + \alpha_h \ \hat{h}$$

Substituindo-se os valores de $\hat{k}$ e $\hat{h}$, obtidos das duas equações diferenciais do modelo, resulta na seguinte expressão para a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra:

$$\left(\frac{\hat{Y}}{L}\right) = \hat{A} + \alpha_k \left[\frac{s_k f(k,h)}{k} - (n + g + \delta_k)\right] + \alpha_h \left[\frac{s_h f(k,h)}{h} - (n + g + \delta_h)\right]$$

No longo prazo, a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra é igual à taxa de crescimento do progresso tecnológico. No curto prazo, a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra depende de três componentes: i) taxa de crescimento do progresso tecnológico; ii) do produto da participação do capital físico no produto pela taxa de crescimento do capital per capita, medido em termos de eficiência da mão de obra; iii) do produto da participação do capital humano no produto pela taxa de crescimento do capital humano, medido em termos de eficiência da mão de obra.

2. Crescimento Exógeno: Microfundamentos

O modelo de crescimento exógeno sem microfundamentos tem duas equações. Uma equação de acumulação de capital que resulta da condição de equilíbrio no mercado de bens e serviços,

$$\dot{k} = f(k) - c - (g + n + \delta)\, k$$

A segunda equação estabelece que o consumo seja proporcional ao produto de acordo com:

$$c = (1 - s)\, f(k)$$

No modelo com microfundamentos esta equação de consumo será substituída pela equação de Euler de alocação intertemporal dos recursos do consumidor.

Equação de Euler

Considere um consumidor que tem de decidir se gasta um real no consumo no período t ou no período $t+1$. Caso ele decida consumir no período t seu bem estar tem um aumento igual a utilidade marginal do consumo no período t. Caso ele decida consumir no período $t+1$, ele aplica um real num ativo financeiro que lhe renderá uma taxa de juros igual a r, e gasta no período seguinte o principal mais os juros da aplicação. Seu bem estar terá um aumento igual a utilidade marginal do consumo no período $t+1$. Mas, para comparar o bem estar do período t com o bem estar do período $t+1$ ele desconta o bem estar do período $t+1$ pela taxa de preferência intertemporal ρ. Em equilíbrio, o consumidor será indiferente entre consumir no período t ou no período $t+1$. Logo:

$$u'(C_t) = \frac{1+r}{1+\rho}\, u'(C_{t+1})$$

A expansão de Taylor da utilidade marginal do consumo no período $t+1$ em função do consumo no período t é dada por:

$$u'(C_{t+1}) = u'(C_t) + u''(C_t)(C_{t+1} - C_t)$$

onde desprezou-se os termos de segunda ordem. Substituindo-se esta expressão na equação de Euler obtém-se:

$$\frac{1+\rho}{1+r} = \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = 1 + \frac{u''(C_t)}{u'(C_t)}(C_{t+1} - C_t)$$

Tomando-se o logaritmo de ambos os lados desta equação resulta:

$$\log(1+\rho) - \log(1+r) = \log\left[1 + \frac{u''(C_t)}{u'(C_t)}(C_{t+1} - C_t)\right]$$

Usando-se a aproximação $\log(1+x) \cong x$ tem-se:

$$\rho - r = \frac{u''(C_t)}{u'(C_t)}(C_{t+1} - C_t)$$

que pode ser escrita como:

$$C_{t+1} - C_t = \frac{u'(C_t)}{u''(C_t)}(\rho - r)$$

Esta expressão com variáveis contínuas transforma-se em:

$$\dot{C} = -\frac{u'(C)}{u''(C)}(r - \rho)$$

Dividindo-se ambos os lados pelo consumo resulta:

$$\frac{\dot{C}}{C} = -\frac{u'(C)}{u''(C)C}(r - \rho)$$

Admita que a função utilidade tenha a elasticidade de substituição constante:

$$u(C) = \frac{C^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

É fácil verificar que $u'(C) = C^{-\frac{1}{\sigma}}$ e $u''(C) = -\frac{1}{\sigma}C^{-\frac{1}{\sigma}-1}$. Logo, a taxa de crescimento do consumo é dada por:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \sigma(r - \rho)$$

A taxa de crescimento do consumo é positiva (negativa) quando a taxa de juros for maior (menor) do que a taxa de preferência intertemporal. O consumidor prefere, portanto, consumir menos (mais) no presente e mais (menos) no futuro se a taxa de juros for maior (menor) do que a taxa de preferência intertemporal.

2.1 Agente Representativo

O consumo c medido em termos de unidade de eficiência da mão de obra é definido por:

$$c = \frac{C}{AL}$$

A taxa de crescimento do consumo, por unidade de eficiência de mão de obra, é igual à diferença entre as taxas de consumo per capita e de progresso tecnológico:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \left(\frac{\hat{C}}{L}\right) - \frac{\dot{A}}{A} = \left(\frac{\hat{C}}{L}\right) - g$$

A taxa de crescimento do consumo per capita corresponde à equação de Euler do agente representativo. Portanto, a equação diferencial do consumo, por unidade de eficiência da mão de obra, é dada por:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(r - \rho) - g$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma\left(r - \rho - \frac{g}{\sigma}\right)$$

A condição de primeira ordem de maximização do lucro da empresa é de que a taxa de juros seja igual à produtividade marginal do capital,

$$r = f'(k) - \delta$$

Logo, a taxa de crescimento do consumo será dada por:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma\left[f'(k) - \delta - \rho - \frac{g}{\sigma}\right]$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico do modelo de crescimento exógeno, com microfundamentos, é formado, então, pelas duas equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k) - c - (g + n + \delta)\, k \\ \dfrac{\dot{c}}{c} = \sigma \left[f'(k) - \delta - \rho - \dfrac{g}{\sigma} \right] \end{cases}$$

A primeira equação é a equação de acumulação de capital que é a mesma do modelo sem microfundamentos. A segunda equação é a equação do consumo, na qual a taxa de crescimento do consumo depende da diferença entre a taxa de juros e a taxa de juros de equilíbrio de longo prazo, a taxa natural da economia, definida a seguir.

No equilíbrio estacionário, $\dot{k} = \dot{c} = 0$. Logo, o consumo e o capital de equilíbrio, ambos medidos em unidades de eficiência da mão de obra, são dados por:

$$c^* = f(k^*) - (g + n + \delta)\, k^*$$

$$f'(k^*) - \delta = \rho + \frac{1}{\sigma}\, g$$

Neste modelo o capital inicial *K(0)* da economia é dado. Esta informação não é suficiente para determinar a solução do sistema dinâmico de equações diferenciais. Uma condição adicional é necessária. Esta condição, denominada condição de transversalidade, estabelece que o limite do valor presente do estoque de capital (*K/L)* de cada agente, avaliado pela utilidade marginal do consumo (λ), quando o tempo tende para infinito, deve ser igual a zero. Isto é:

$$\lim_{t \to \infty} \; e^{-(\rho - n)\, t} \; \lambda(t) \, \frac{K(t)}{L(t)} = 0$$

Se esta condição não fosse satisfeita o agente poderia aumentar seu bem estar deixando de investir e alocando seus recursos no consumo. A utilidade marginal do consumo, para a função com elasticidade de substituição constante, é igual a: $\log \lambda = -(1/\sigma)\, \log(C/L)$. O consumo no estado estacionário cresce a uma taxa *g*. Logo, a utilidade marginal cresce a uma taxa igual a $-g/\sigma$. O estoque de capital, por trabalhador, cresce a uma taxa igual a *g*. Logo, a condição de transversalidade é satisfeita quando a seguinte desigualdade é obedecida:

$$\rho - n > g - \frac{g}{\sigma}$$

que é equivalente a :

$$\rho + \frac{g}{\sigma} > g + n$$

Neste modelo, portanto, não existe ineficiência dinâmica, pois a taxa de juros será sempre maior que a taxa de crescimento do produto real da economia (*g*+*n*).

A matriz jacobiana deste sistema dinâmico é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial k} \\ \\ \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial c} & \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma f''(k^*)c^* \\ -1 & f'(k^*) - (g + n + \delta) \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é negativo,

$$|J| = \sigma f''(k^*)\, c^* < 0$$

porque a produtividade marginal do capital é decrescente, em virtude da hipótese de retornos decrescentes para cada fator de produção. Logo, este sistema tem um ponto de sela.

A Figura 3.12 mostra o diagrama de fases da equação do consumo. O consumo permanece constante quando o capital corresponde a taxa de juros natural da economia, que é igual à soma da taxa de preferência intertemporal acrescida da razão entre a taxa de crescimento do progresso tecnológico dividida pela elasticidade de substituição entre o capital e o trabalho.

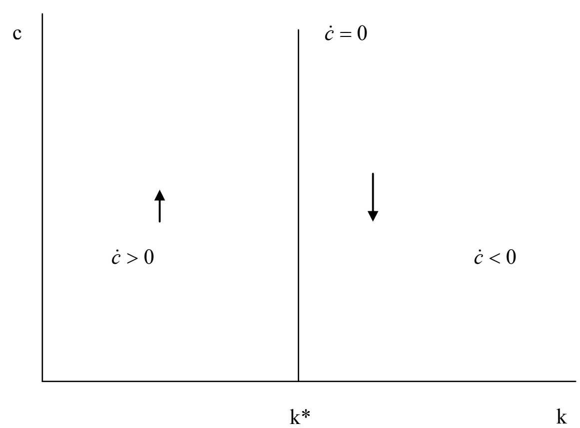


Figura 3.12

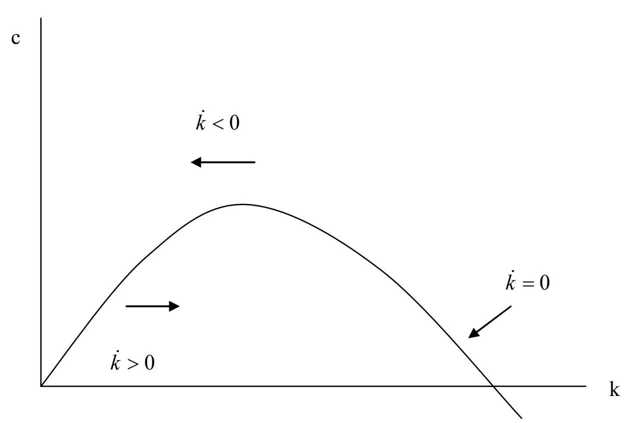


Figura 3.13

A Figura 3.13 contém o diagrama de fases da equação do capital. Ela corta o eixo horizontal em dois pontos, na origem e num valor de *k* positivo. Abaixo da curva a quantidade de capital aumenta e acima da mesma a quantidade de capital diminui.

A Figura 3.14 mostra o diagrama de fases do sistema dinâmico formado pelas duas equações do modelo. Qualquer que seja o ponto inicial da relação capital mão de obra, a economia converge para o ponto de equilíbrio na trajetória de sela representada na Figura 3.14.

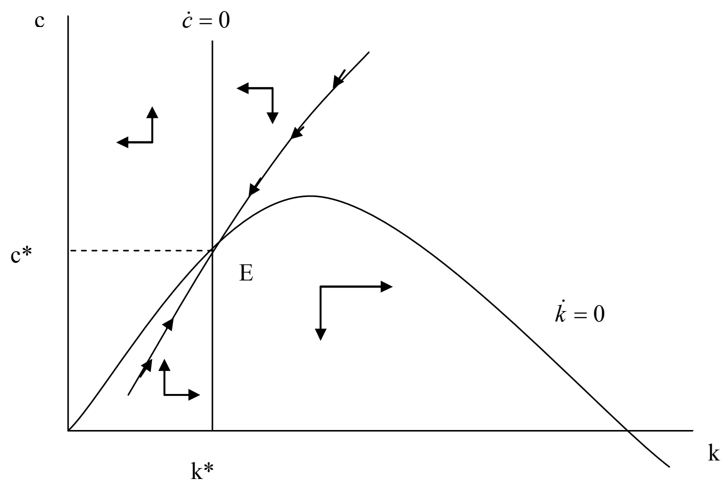


Figura 3.14

Produtividade da Mão de Obra

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra no modelo de crescimento exógeno com agente representativo também tem dois componentes, como no modelo sem microfundamentos. A diferença entre os dois modelos reside no componente de curto prazo, pois o consumo não é proporcional a renda. O consumo e o capital estão relacionados pela trajetória de sela de acordo com a função $c = c(k)$. A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra é, então, dada por:

$$\hat{Y} - \hat{L} = \hat{A} + \alpha_k \left(\frac{f(k) - c(k)}{k} - (g + n + \delta) \right)$$

Os dois componentes da taxa de crescimento da produtividade da mão de obra são: i) taxa de crescimento do progresso tecnológico; ii) o produto da participação do capital no produto pela taxa de crescimento do estoque de capital per capita, medido em termos de unidades de eficiência de mão de obra.

Experimento

A Figura 3.15 mostra uma mudança permanente, não antecipada, na taxa de preferência intertemporal desta economia. A taxa de preferência intertemporal diminui de ρ_0 para ρ_1. A taxa de juros de longo prazo desta economia diminui e a quantidade de capital aumenta como descrita na Figura 3.16. O consumo tem, no início, uma queda instantânea, e a economia descreve uma trajetória na nova sela do modelo. No equilíbrio de longo prazo o consumo e o capital serão maiores do que seus valores anteriores, porém a taxa de crescimento da economia continua, no longo prazo, sendo a mesma de antes.

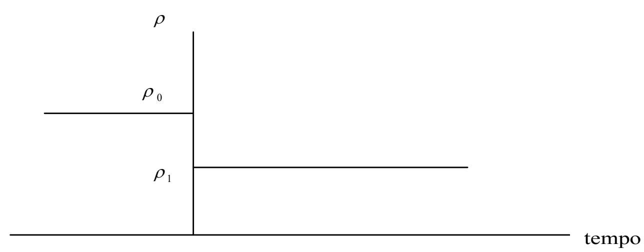


Figura 3.15

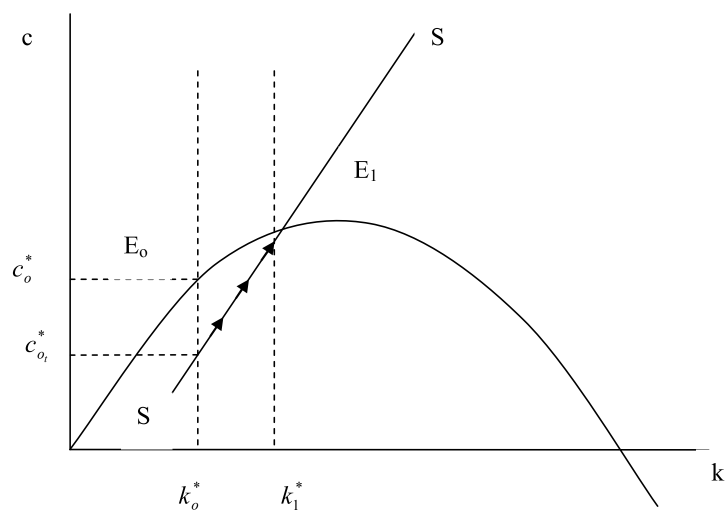


Figura 3.16

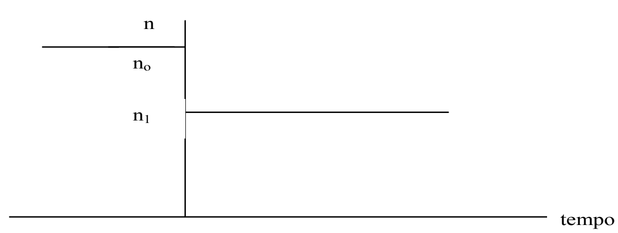


Figura 3.17

A Figura 3.17 mostra um experimento no qual a taxa de crescimento populacional diminui permanentemente de n_0 para n_1.

A equação de $\dot{c} = 0,\ f'(k^*) = \delta + \rho + \frac{1}{\sigma} g$, independe da taxa de crescimento da população, e, portanto, não sofre alteração, como indicado na Figura 3.18.

A equação de $\dot{k} = 0,\ c = f(k) - (g + n + \delta)k$, depende da taxa de crescimento da população. Portanto, quando a taxa de crescimento da população diminui (aumenta), para uma dada quantidade de capital, o consumo aumenta (diminui). A equação de $\dot{k} = 0$ desloca-se para cima, como indicado na Figura 3.18. A redução da taxa de crescimento da população acarreta um aumento instantâneo do consumo. A quantidade de capital não se altera, nem tampouco o produto real da economia. A parte da poupança que era destinada a manter o estoque de capital por trabalhador constante agora vai para o consumo.

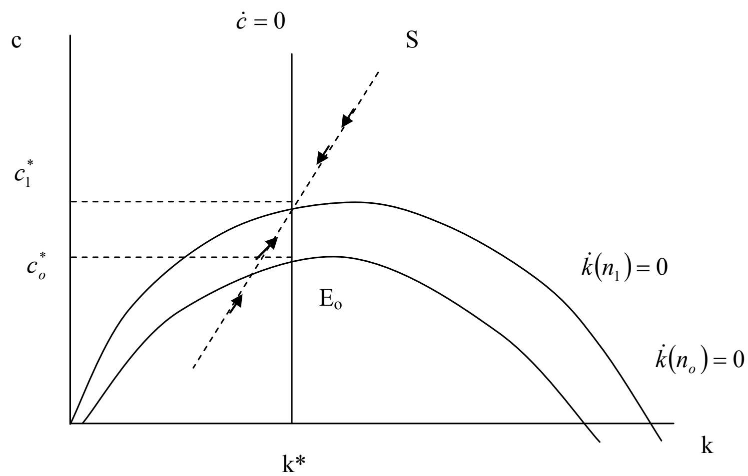


Figura 3.18

2.2 Gerações Superpostas

O modelo de gerações superpostas com vida infinita supõe que o indivíduo nascido na data *s* tem vida infinita. A cada momento nasce uma nova geração. A taxa de crescimento da população é igual a *n*. Cada geração nasce sem nenhum ativo financeiro. Na data *t* a equação de Euler para o agente que nasceu na data *s* é igual à equação de Euler do agente representativo. Isto é:

$$\frac{\dot{C}(s,t)}{C(s,t)} = \sigma(r - \rho)$$

Na data *t* a população desta economia é igual a um: $P(t) = 1$. Esta normalização simplifica a álgebra. A população na data *s* era igual a: $P(s) = e^{-n(t-s)}$. Quando se deseja agregar uma variável *x(s,t)* deve-se somar por todas as gerações que existem na data *t* e que nasceram em algum momento do passado. No momento *s* o número de indivíduos que nasceram em *s* é igual a *nP(s)*. Logo, o valor agregado *X* da variável *x(s,t)* é dado por:

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t} n\ P\ (s)\ x(s,t)\ ds$$

Substituindo-se o valor de *P(s)* nesta expressão obtém-se:

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t} n\ e^{n(s-t)}\ x(s,t)\ ds$$

Este valor corresponde ao valor per capita da variável x porque a população foi normalizada pelo valor um.

O consumo per capita desta economia povoada com indivíduos com vida infinita é, portanto, igual a:

$$C(t)=\int_{-\infty}^{t} n\ e^{n(s-t)}C(s,t)\ ds$$

A derivada do consumo com relação ao tempo é obtida aplicando-se a regra de Leibnitz:

$$\frac{dC}{dt}=n\ e^{n(t-t)}C(t,t)+\int_{-\infty}^{t} n\left[(-n)e^{n(s-t)}C(s,t)+e^{n(s-t)}\dot{C}(s,t)\right]ds$$

que pode ser escrita, levando-se em conta a expressão de $\dot{C}(s,t)$, como:

$$\dot{C}=n(\ C(t,t)-C(t))+\sigma(r-\rho)\ C$$

Nesta fórmula aparece o consumo na data t da geração que nasceu em t. Para calcular este consumo é preciso usar a restrição orçamentária do indivíduo.

A restrição orçamentária, em termos de fluxos, do indivíduo que nasceu na data s no momento t, estabelece que a variação do patrimônio $\dot{a}(s,t)$ é igual à diferença entre os rendimentos, dos juros dos ativos financeiros e do salário, e a despesa na aquisição de bens e serviços de consumo:

$$\dot{a}(s,t)=r\,a(s,t)+\omega(t)-C(s,v)$$

Adotou-se a hipótese que o salário ω não dependa da geração. Resolvendo-se esta equação diferencial obtém-se a restrição intertemporal do indivíduo, supondo-se que não exista jogo de Ponzi. Isto é:

$$a(s,t)+\int_{t}^{\infty} e^{-r(v-t)}\omega(v)dv=\int_{t}^{\infty} e^{-r(v-t)}C(s,v)dv$$

Esta restrição estabelece que o valor presente dos gastos do indivíduo é igual à soma do valor dos ativos financeiros com o valor presente dos salários, que será representado pela letra *h*. Substituindo-se a equação de Euler para a taxa de variação do consumo nesta restrição, conclui-se que o consumo é proporcional ao total da riqueza do indivíduo:

$$C(s,t)=\theta\left[a(s,t)+h(t)\right]$$

O parâmetro θ é dado por:

$$\theta = r + \sigma(\rho - r)$$

O consumo per capita também será proporcional ao total da riqueza:

$$C(t) = \theta[a(t) + h(t)]$$

O consumo da geração que nasceu em *t*, na data *t*, depende apenas do valor presente dos salários porque, por hipótese, *a (t,t) = 0*. Logo:

$$C(t,t) = \theta[a(t,t) + h(t)] = \theta\, h(t)$$

Segue-se, então, que:

$$C(t,t) - C(t) = -\theta\, a(t)$$

A taxa de variação do consumo é, então, dada por:

$$\dot{C} = \sigma(r - \rho)C - n\theta\, a(t)$$

Nesta economia os ativos financeiros têm como contrapartida o estoque de capital existente. Portanto, $a(t) = k\ A$, e a taxa de variação do consumo depende da relação capital/consumo:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \sigma(r - \rho) - n\,\theta\frac{k}{c}$$

No modelo de crescimento exógeno o consumo *c* é medido em unidades de eficiência de mão de obra. A sua taxa de variação é igual à diferença entre a taxa de variação do consumo per capita e da taxa de crescimento do progresso tecnológico:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \hat{C} - \hat{A} = \sigma(r - \rho) - n\theta\frac{k}{c} - g$$

Reagrupando-se o primeiro com o terceiro termo, depois do segundo sinal de igualdade, obtém-se:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma\left(r - \rho - \frac{g}{\sigma}\right) - n\theta\frac{k}{c}$$

A taxa de juros é igual à produtividade marginal líquida do capital, $r = f'(k) - \delta$. Logo, a taxa de variação do consumo, por unidade de eficiência da mão de obra, tem a seguinte expressão:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma\left(f'(k) - \delta - \rho - \frac{g}{\sigma}\right) - n\,\theta\frac{k}{c}$$

Sistema Dinâmico

O modelo de crescimento exógeno com gerações superpostas com vida infinita é formado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k) - c - (g + n + \delta)k \\ \dfrac{\dot{c}}{c} = \sigma\left(f'(k) - \delta - \rho - \dfrac{g}{\sigma}\right) - n\,\theta\,\dfrac{k}{c} \end{cases}$$

A primeira equação é a equação de acumulação do capital que é a mesma dos demais modelos de crescimento exógeno. A segunda é a equação da decisão de consumo. O determinante da matriz jacobiana deste sistema é negativo, e o sistema tem um ponto de sela. A condição de transversalidade do modelo de otimização do indivíduo de cada geração é de que o valor presente do capital, avaliado pela utilidade marginal do consumo, seja igual a zero quando o tempo se aproxima do infinito. Isto é:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\,\lambda(t)\,K(t) = 0$$

O capital per capita no estado estacionário cresce a uma taxa igual a g, a utilidade marginal do consumo, também no estado estacionário, cresce a uma taxa negativa igual a g/σ. A condição de transversalidade é, então, dada pela seguinte desigualdade:

$$\rho > g - \frac{g}{\sigma}$$

que é equivalente a:

$$\rho + \frac{g}{\sigma} > g$$

No equilíbrio estacionário a taxa de juros é igual a:

$$f'(\bar{k}) - \delta = \rho + \frac{g}{\rho} + n\theta\frac{\bar{k}}{\bar{c}}$$

A condição de transversalidade não garante que esta taxa de juros seja maior do que a taxa de crescimento do produto real (g+n), que corresponde à regra de ouro. Logo, neste modelo é possível ter:

$$\rho + \frac{g}{\sigma} + n\theta\frac{\bar{k}}{\bar{c}} \leq g + n$$

Caso esta desigualdade se verifique o modelo de crescimento exógeno com gerações superpostas produz ineficiência dinâmica. Este fenômeno de superacumulação de capital torna a economia ineficiente, pois uma redução do estoque de capital aumenta o bem estar da população.

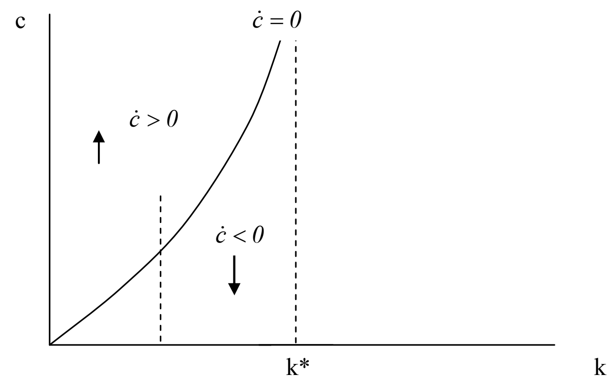


Figura 3.19

A Figura 3.19 contém o diagrama de fases que corresponde à equação de $\dot{c} = 0$:

$$c = \frac{\eta \theta k}{\sigma \left[f'(k) - \delta - \rho - \dfrac{g}{\sigma} \right]}$$

No diagrama da Figura 3.19 esta função tem como assíntota o capital k^* que corresponde à taxa de juros:

$$f'(k^*) - \delta = \rho + \frac{g}{\sigma}$$

e o diagrama foi traçado supondo-se que não haja ineficiência dinâmica. A Figura 3.20 mostra o diagrama de fases do modelo completo. Qualquer que seja o capital inicial da economia, a trajetória de sela conduz a economia ao estado estacionário.

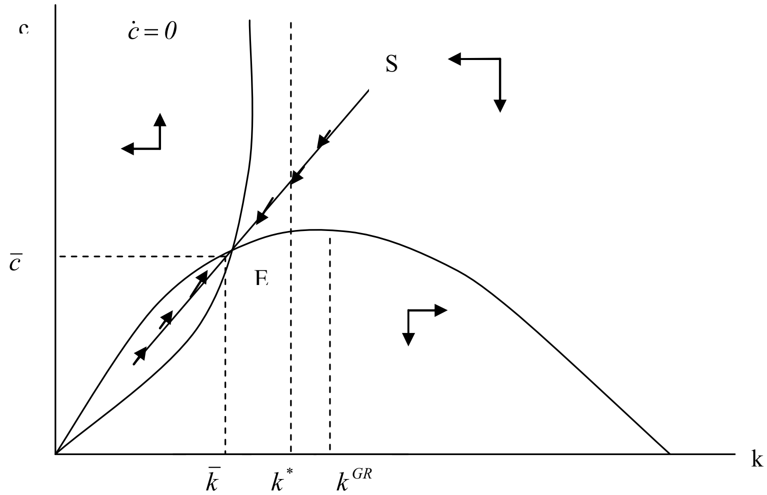


Figura 3.20: $\rho + \dfrac{g}{\sigma} + n\theta \dfrac{\bar{k}}{\bar{c}} > n + g$

A Figura 3.21 contém o diagrama de fases do modelo quando existe ineficiência dinâmica na economia. A taxa de juros é menor do que a taxa de crescimento do produto real. Novamente, a trajetória de sela leva a economia ao estado estacionário, qualquer que seja o ponto inicial do capital.

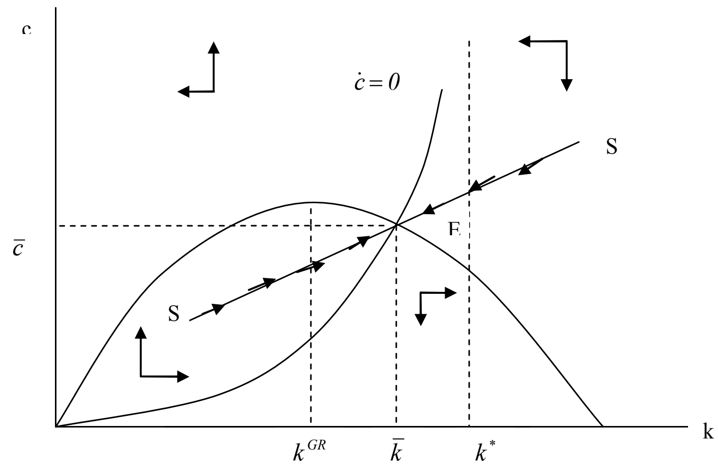


Figura3.21: $\rho + \frac{g}{\sigma} + n\theta \frac{\bar{k}}{\bar{c}} \quad < \quad n + g$

Produtividade da Mão de Obra

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra no modelo de crescimento exógeno com gerações superpostas também tem dois componentes, como nos modelos sem microfundamentos e com agente representativo. A diferença entre os modelos reside no componente de curto prazo, pois o consumo não é proporcional a renda. O consumo e o capital estão relacionados pela trajetória de sela de acordo com a função $c = c(k)$. A notação é a mesma do modelo com agente representativo, mas as funções são diferentes, a menos que a taxa de crescimento da população seja igual a zero. A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra é, então, dada por:

$$\hat{Y} - \hat{L} = \hat{A} + \alpha_k \; (\frac{f(k) - c(k)}{k} - (g + n + \delta)\,)$$

Os dois componentes da taxa de crescimento da produtividade da mão de obra são: i) taxa de crescimento do progresso tecnológico; ii) o produto da participação do capital no produto pela taxa de crescimento do estoque de capital per capita, medido em termos de unidades de eficiência de mão de obra.

3. Crescimento Endógeno

No modelo de crescimento exógeno a função de produção tem retornos constantes de escala, mas os retornos de cada fator são decrescentes. Com a acumulação de capital a produtividade marginal do capital diminui e a economia converge para o estado estacionário. No modelo exógeno de crescimento econômico a produtividade marginal da mão de obra não decresce, ao longo do tempo, em virtude do progresso tecnológico. Nos modelos de crescimento endógeno introduz-se alguma hipótese para que os retornos dos fatores não sejam decrescentes. A próxima seção apresenta um modelo onde o capital não tem retornos decrescentes. A segunda seção é dedicada a um modelo onde a mão de obra não tem retornos decrescentes em virtude do processo de acumulação de capital humano.

3.1 Modelo AK

No modelo AK de crescimento endógeno a função de produção na equação diferencial do modelo de Solow, repetida aqui por conveniência,

$$\dot{k} = s\, f(k) - (n + \delta)\, k$$

é substituída pela função *AK,* na qual o único fator de produção é o capital. O símbolo deste fator é o mesmo, mas sua interpretação é diferente. Ele deve incluir além do capital físico o capital humano. A nova função de produção é especificada por:

$$Y = A\, K$$

A equação diferencial do modelo de crescimento endógeno é, então, dada por:

$$\dot{k} = sAk - (n + \delta)\, k$$

As taxas de crescimento da produtividade média da mão de obra e da relação capital/mão de obra dependem da taxa de poupança *s*, do coeficiente técnico *A,* da taxa de crescimento da população *n*, e da taxa de depreciação δ, de acordo com:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = s\, A - (n + \delta)$$

A taxa de crescimento do produto real desta economia é, então, dada por:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = s\; A - \delta$$

A taxa de crescimento do produto real depende da taxa de poupança (*s*), da produtividade marginal do capital (*A*) e da taxa de depreciação do capital (δ). As duas primeiras afetam positivamente a taxa de crescimento do produto, enquanto o aumento (diminuição) da taxa de depreciação diminui (aumenta) a taxa de crescimento do produto real.

No modelo de crescimento endógeno não há diferença entre curto e longo prazo, isto é, não existe convergência da economia para uma determinada renda per capita, como no modelo de crescimento exógeno. As diferenças de renda per capita e de taxa de crescimento do produto persistem ao longo do tempo.

Produtividade da Mão de Obra

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra no modelo de crescimento endógeno é expressa por:

$$\hat{Y} - \hat{L} = s\; A - \delta - n$$

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra depende da taxa de poupança (s), do coeficiente tecnológico (A), da taxa de depreciação (δ), e da taxa de crescimento da população (n). Admite-se que $sA > \delta + n$. Nestas circunstâncias, um aumento da taxa de poupança aumenta permanentemente a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra.

3.2 Capital Humano

No modelo de crescimento endógeno com capital humano a equação diferencial de acumulação do capital físico é exatamente a mesma do modelo de Solow:

$$\dot{k} = s\, f(k) - \left(n + \delta\right) k$$

onde o parâmetro A que multiplica a quantidade de mão de obra tem, agora, uma especificação completamente diferente. Este parâmetro é igual ao produto da fração de tempo u que as pessoas dedicam ao trabalho vezes à quantidade de capital humano h que cada trabalhador adquiriu no processo de investir parte do seu tempo, $1\text{-}u$, em capital humano. Isto é:

$$A(t) = u\; h(t)$$

A outra hipótese deste modelo, que o diferencia do modelo de Solow, é de que a taxa de crescimento do capital humano é proporcional ao tempo dedicado a este investimento:

$$\frac{\dot{h}}{h} = \lambda\,(1-u)$$

A taxa de crescimento do progresso tecnológico é igual à taxa de crescimento do capital humano. Isto é:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{h}}{h} = \lambda\,(1-u)$$

No longo prazo, a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra desta economia será igual à taxa de crescimento do capital humano.

$$\hat{Y} - \hat{L} = \lambda(1-u) + \alpha_k\ \left(\frac{sf(k)}{k} - (n+\delta)\right)$$

No curto prazo, a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra tem dois componentes; i) taxa de crescimento do capital humano e ii) produto da participação do capital físico no produto pela taxa de crescimento do capital físico per capita, medido em termos de unidade de eficiência de mão de obra.

4. Crescimento Endógeno: Microfundamentos

No modelo com microfundamentos, com agente representativo, a equação do consumo é a equação de Euler:

$$\dot{c} = \sigma\, c\left(f'(k) - \delta - \rho\right)$$

A produtividade marginal do capital é igual ao coeficiente técnico *A*:

$$f'(k) = A$$

O sistema dinâmico do modelo de crescimento endógeno é formado pelas duas equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{k} = A\,k - c - (n + \delta)\,k \\ \\ \dot{c} = \sigma\, c\,(A - \delta - \rho) \end{cases}$$

Admite-se que $A - \delta - \rho > 0$, senão a taxa de crescimento do consumo não seria positiva. Neste sistema a taxa de crescimento do consumo per capita,

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(A - \delta - \rho)$$

deve ser igual as taxas de crescimento da relação capital/mão de obra e do produto per capita:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{c}}{c} = \sigma\,(A - \delta - \rho)$$

Logo, da primeira equação diferencial segue-se que:

$$\frac{\dot{k}}{k} = A - \frac{c}{k} - (n + \delta)\,k = \sigma\,(A - \delta - \rho)$$

Conclui-se, então, que:

$$\frac{c}{k} = A - (n + \delta) - \sigma(A - \delta) + \rho\,\sigma$$

Reagrupando-se os termos desta expressão obtém-se:

$$\frac{c}{k} = (A - \delta)(1 - \sigma) + \sigma\,\rho - n$$

Para que a relação consumo/capital não seja negativa a seguinte desigualdade deve ser satisfeita:

$$(A - \delta)(1 - \sigma) + \sigma\,\rho - n > 0$$

Como $A-\rho-\delta>0$, esta desigualdade e a anterior produzem a seguinte hipótese:

$$A>\rho+\delta>(\sigma-1)(A-\delta-\rho)+n+\delta$$

A taxa de crescimento do produto real é igual à anterior acrescida da taxa de crescimento da população:

$$\hat{Y}=\frac{\dot{Y}}{Y}=\sigma\,(A-\delta-\rho)+n$$

No modelo de crescimento endógeno, com agente representativo, a taxa de crescimento do produto real aumenta (diminui) quando: i) produtividade marginal do capital aumenta (diminui); ii) a taxa de depreciação do capital diminui (aumenta); iii) a taxa de preferência intertemporal diminui (aumenta): e a elasticidade de substituição do consumo aumenta (diminui). As respectivas derivadas parciais são as seguintes:

$$\frac{\partial\hat{Y}}{\partial A}=\sigma>0\quad;\frac{\partial\hat{Y}}{\partial\delta}=-\sigma<0$$

$$\frac{\partial\hat{Y}}{\partial\rho}=-\sigma\;\rho<0\quad;\;\frac{\partial\hat{Y}}{\partial\sigma}=A-\delta-\rho>0$$

Produtividade da Mão de Obra

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra, no modelo de crescimento endógeno, é, então, dada por:

$$\hat{Y}-\hat{L}=\sigma(A-\delta-\rho)$$

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra depende de quatro parâmetros, dois (A,δ) representando tecnologia e dois (σ,ρ) preferências dos consumidores. No caso destes dois parâmetros, a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra aumenta (diminui): i) quando a elasticidade de substituição aumenta (diminui); ii) quando a taxa de preferência intertemporal do consumidor diminui (aumenta).

5. Contabilidade do Crescimento

A contabilidade do crescimento econômico é um arcabouço teórico para identificar as fontes do crescimento. Esta metodologia atribui a cada fator de produção sua contribuição e deixa para um resíduo aquilo que não pode ser identificado como pertencente a um fator de produção. Este resíduo é denominado a produtividade total dos fatores de produção. A contabilidade parte de uma função de produção com retornos constantes de escala, na qual o produto (Y) depende do estoque de capital (*K*), da quantidade de mão de obra (L), e do parâmetro A que mede a produtividade total dos fatores de produção. Isto é:

$$Y = A\,F\left(K, L\right)$$

Derivando-se esta função de produção com relação ao tempo obtém-se:

$$\frac{dY}{dt} = A\,F_k\,\frac{dK}{dt} + A\,F_L\,\frac{dL}{dt} + F\left(K, L\right)\frac{dA}{dt}$$

onde um índice numa variável indica a derivada parcial da função F com relação a variável representada no índice. Dividindo-se ambos os lados desta expressão pelo produto e reorganizando cada termo de tal modo que apareçam as participações de cada fator no produto, supondo-se que tanto o capital como a mão de obra são pagos pelas suas produtividades marginais, a taxa de crescimento do produto é dada por:

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{A\,F_k K}{Y}\frac{dK}{dt}\frac{1}{K} + \frac{A\,F_L \cdot L}{Y}\frac{dL}{dt}\frac{1}{L} + \frac{F\left(K, L\right)}{Y}\frac{dA}{dt}$$

que pode ser escrita como

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \alpha_K\,\frac{dK}{dt}\,\frac{1}{K} + \alpha_L\,\frac{dL}{dt}\frac{1}{L} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}$$

onde:

$$\alpha_K = \frac{AF_K K}{Y};\, \alpha_L = \frac{AF_L L}{Y};\, \alpha_K + \alpha_L = 1$$

Usando-se o símbolo $\widehat{X}$ para indicar a taxa de crescimento da variável X, a taxa de crescimento do produto é igual a uma média ponderada das taxas de crescimento do estoque de capital e da quantidade de mão de obra:

$$\hat{Y} = \alpha_K\,\hat{K} + \alpha_L\,\hat{L} + \hat{A}$$

A diferença entre a taxa de crescimento do produto real e a média ponderada das taxas de crescimento dos dois fatores, capital e mão de obra, representada pelo símbolo $\hat{A}$, é a taxa de crescimento da produtividade total dos fatores de produção. Esta taxa também é conhecida como o resíduo de Solow.

Produtividade da Mão de Obra

A taxa de crescimento da produtividade da mão de obra depende, portanto, da taxa de crescimento da relação capital/mão de obra e da taxa de crescimento do progresso tecnológico, de acordo com:

$$\hat{Y} - \hat{L} = \alpha_K\left(\hat{K} - \hat{L}\right) + \hat{A}$$

Levou-se em conta na obtenção desta expressão que a soma das participações dos fatores no produto é igual a um.

Produto Potencial: Taxa de Crescimento

O arcabouço da contabilidade do crescimento pode ser usado para calcular a taxa de crescimento do produto potencial da economia a partir dos seguintes parâmetros: participações dos fatores no produto, taxa de investimento, relação capital/produto, taxa de depreciação, taxa de crescimento da mão de obra, e taxa de crescimento da produtividade total dos fatores. A taxa de crescimento do estoque de capital depende do investimento e da depreciação do capital:

$$\hat{K} = \frac{dK}{dt}\frac{1}{K} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{I - \delta K}{K}$$

Esta expressão pode ser reescrita em função da taxa de investimento e da relação capital/produto:

$$\hat{K} = \frac{I}{K} - \delta = \frac{I/Y}{K/Y} - \delta$$

Substituindo-se a taxa de crescimento do estoque de capital na fórmula da taxa de crescimento do produto potencial obtém-se:

$$\hat{Y} = \alpha_K \left(\frac{I/Y}{K/Y} - \delta \right) + \alpha_L \hat{L} + \hat{A}$$

Tabela 3.1

α_K	0,40
α_L	0,60
δ	3,0%
I/Y	20,0%
	1,0%
K/Y	2,5
$\hat{L}$	1,5%
$\hat{A}$	1,0%
$\hat{Y}$	3,9%

A Tabela 3.1 contém um exemplo de aplicação da fórmula de crescimento do produto potencial. A participação do capital no produto é de 40%, a mão de obra tem uma participação de 60%, a taxa de depreciação é de 3,0%, a taxa de investimento é igual a 20,0% e a relação capital/produto é 2,5. A taxa de crescimento do produto real é, portanto, igual a 3,9% quando a taxa de crescimento do progresso tecnológico é de 1% e a quantidade de mão de obra cresce 1,5%.

O trabalho clássico de Solow (1956), de contabilidade de crescimento, concluiu que grande parte do crescimento econômico americano devia-se ao progresso tecnológico. Desde então a pesquisa econômica tem procurado desvendar este segredo, identificando outros fatores que tenham contribuído para o crescimento econômico. Um dos candidatos é a educação. A função de produção depende, então, do progresso tecnológico, da quantidade de capital, e da quantidade de mão de obra multiplicada pelo grau de escolaridade da mesma (*HL*) onde *H* mede o capital humano da força de trabalho. Em símbolos:

$$Y = A\,F\left(K, H\,L\right)$$

A taxa de crescimento do produto real é uma média ponderada das taxas de crescimento do capital e da mão de obra, acrescida de dois componentes, um que mede a contribuição do aumento do capital humano e outro que mede o aumento total da produtividade dos fatores:

$$\hat{Y} = \alpha_K\ \hat{K} + \alpha_L\,\widehat{H} + \alpha_L\ \hat{L} + \hat{A}$$

Produtividade da Mão de Obra

O aumento da produtividade da mão de obra depende do aumento da relação capital/mão de obra, do aumento do capital humano e da taxa de crescimento da produtividade total dos fatores de produção:

$$\hat{Y} - \hat{L} = \alpha_K\left(\hat{K} - \hat{L}\right) + \alpha_L\ \widehat{H} + \hat{A}$$

6. Exercícios

1**.** Resolva o modelo de Solow quando as funções de produção são dadas pelas seguintes especificações:

i) Cobb-Douglas: $Y = K^{\alpha}\left(AL\right)^{1-\alpha}$

ii) CES: $Y = \left[\delta\, k^{-\theta} + \left(1-\delta\right) AL^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$

a) Quais as taxas de crescimento da produtividade da mão de obra, no curto e no longo prazo, para o caso da função Cobb-Douglas?
b) Quais as taxas de crescimento da produtividade da mão de obra, no curto e no longo prazo, para o caso da função CES?
c) O valor da elasticidade de substituição faz diferença para os resultados do modelo?

2**.** Admita uma função de produção Cobb-Douglas (na forma intensiva): $y = k^{\alpha}$, onde α é a participação do capital no produto. A economia, no modelo de Solow, está no estado estacionário:

$$s\,f\left(k\right) = \left(g + n + \delta\right) k$$

Mostre que o logaritmo da produtividade da mão de obra é dado por:

$$log\frac{Y}{L}=log\,A_o+gt+\frac{\alpha}{1-\alpha}log\,s-\frac{\alpha}{1-\alpha}log\left(g+n+\delta\right)$$

3. Admita uma função de produção Cobb-Douglas (na forma intensiva): $y=k^{\alpha}h^{\beta}$, onde é a participação do capital no produto e β é a participação do capital humano no produto. A economia, no modelo com capital humano, está no estado estacionário:

$$s_k f(k,h)=(n+g+\delta_k)k$$

$$s_h f(k,h)=(n+g+\delta_h)h$$

Mostre que o logaritmo da produtividade da mão de obra é dado por:

$$log\frac{Y}{L}=log\,A_o+g\,t+\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k-\alpha_n}log\,s_k+\frac{\alpha_n}{1-\alpha_k-\alpha_n}\,log\,s_h-\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k-\alpha_n}$$
$$\log(n+g+\delta_k)-\frac{\alpha_n}{1-\alpha_k-\alpha_n}\log(n+g+\delta_n)$$

4. As equações diferenciais do modelo de crescimento exógeno com capital humano são dadas por:

$$\begin{cases}\dot{k}=s_k\,f\,(k,h)-(n+g+\delta_k)k\\ \dot{h}=s_h\,f\,(k,h)-(n+g+\delta_h)h\end{cases}$$

a) Deduza a matriz jacobiana deste sistema.
b) Mostre que o determinante da matriz jacobiana deste sistema, no ponto de equilíbrio estacionário, é positivo e o traço da mesma é negativo.

5. Considere o seguinte modelo:

Função de Produção: $Y=AK+\gamma\,K^{\alpha}L^{1-\alpha}$
Investimento = Poupança: $\dot{K}-\delta\,K=sY$
População: $\dot{L}=n\,L$

a) Qual a taxa de crescimento desta economia no curto prazo?
b) Qual a taxa de crescimento desta no longo prazo?

6. A função de produção tem retornos constantes de escala e progresso tecnológico poupador de mão de obra, de acordo com:

$$Y=F(K,EL)$$

O coeficiente de progresso tecnológico E é proporcional à relação capital/mão de obra:

$$E = \theta \, {}^{K}\!/_{L}$$

A poupança é uma proporção constante do produto, $S=sY$, e a população cresce a uma taxa constante, $\dot{L} = nL$.

a) As taxas de crescimento do produto, no curto e no longo prazo, são iguais?

b) Admita que $Y = K^{\alpha} \, (EL)^{1-\alpha}$. Qual a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra?

7. O modelo de crescimento exógeno com governo é especificado pelas seguintes equações:

Função de Produção: $Y = F(K, AL)$

Poupança: $S = s(Y - T)$

Poupança Investimento: $S = I = \dot{K} + \delta K$

Governo: $G = T$

Progresso Tecnológico: $\dot{A} = g\,A$

População: $\dot{L} = n\,L$

a) Deduza a equação diferencial de acumulação do capital, medido em unidades de eficiência da mão de obra deste modelo.

b) O governo afeta a taxa de crescimento do produto?

c) O governo afeta a renda per capita desta economia?

8. O modelo de Solow, com moeda, é especificado pelas seguintes equações:

Função de Produção: $y = f(k)$

Ativos: $a = m + k$

Poupança: $S = s(y + \tau - m\,\pi)$

Poupança Investimento: $S = \dot{k} + \delta \; k + \dot{m}$

Demanda de Moeda: $m = L(r)k \;, L' < 0$

Taxa de Juros Real: $\rho = f'(k) - \delta$

Política Monetária: $\dot{m} = m(\mu - \pi)\,, \mu = \dfrac{\dot{M}}{M} = cons\,tan\,te$

onde *y=Y/L, k=K/L, m=M/PL.* Admita , por simplicidade, que a população é constante.

a) Analise num diagrama de fases, com *k* no eixo horizontal e *m* no eixo vertical, o equilíbrio e a estabilidade deste modelo.

b) A política monetária é neutra, isto é, o nível do estoque de moeda afeta a renda per capita?

c) A política monetária é super neutra, isto é, a taxa de crescimento do estoque de moeda afeta o produto real?

PARTE II: MODELOS COM PREÇOS RÍGIDOS

Capítulo 4

Modelos Keynesiano e |Novo-Keynesiano

Este capítulo trata da especificação de três equações dos modelos macroeconômicos de curto prazo: i) a relação entre taxa de juros real e produto real, a curva IS; ii) a relação entre a taxa de juros nominal e a quantidade de moeda, a curva LM; iii) a relação entre a taxa de desemprego (ou o hiato do produto) e a taxa de inflação, a curva de Phillips. A especificação de cada uma destas equações será feita por dois enfoques. No enfoque keynesiano tradicional as equações são motivadas por regras de comportamento, não fundamentadas em modelos de otimização. No enfoque novo-keynesiano, com microfundamentos, as especificações baseiam-se na teoria microeconômica. Os dois enfoques produzem não somente especificações distintas, mas também previsões diferentes que podem ser testadas empiricamente.

1. Curva IS

O dispêndio, no mercado de bens e serviços, pode ser dividido em três componentes: i) consumo (*c*), investimento (*i*) e gasto do governo (*g*), tanto para consumo corrente como para investimento. O consumo depende da renda disponível, obtida subtraindo-se da renda (*y*) o total de impostos (τ). A propensão marginal a consumir, $c' = dc/dy$, está compreendida entre zero e um, $0 < c' < 1$. O investimento depende da taxa interna de retorno, a eficiência marginal do capital na linguagem de Keynes, e da taxa de juros real esperada pelo empresário. A taxa de juros real esperada é igual à diferença entre a taxa de juros nominal (*r*) e a taxa de inflação esperada (π^e). Para uma dada taxa interna de retorno, quanto maior (menor) a taxa de juros real esperada menor (maior) será o investimento, ou seja, a derivada do investimento em relação à taxa de juros real ($i' = di/d\rho$) é menor ou igual a zero. O gasto do governo é exógeno ao modelo. O dispêndio nesta economia é, portanto, igual a:

$$d = c(y - \tau) + i(r - \pi^e) + g$$

O mercado de bens e serviços está em equilíbrio quando o dispêndio for igual ao produto:

$$y = d$$

Combinando-se estas duas equações obtém-se:

$$y = c(y - \tau) + i(\rho^e) + g$$

A taxa de juros real esperada, ou prevista pelo empresário, é definida por:

$$\rho^e = r - \pi^e$$

A taxa de juros real esperada não é uma variável observável e há necessidade de fazer-se alguma hipótese de como relacioná-la com variáveis que são observáveis na economia. Como neste modelo não existe incerteza, pois as variáveis são determinísticas, admite-se que a previsão seja perfeita. Isto é, a taxa de juros real prevista é igual à taxa observada:

$$\rho^e = \rho$$

O equilíbrio no mercado de bens e serviços é descrito, então, pela equação:

$$y = c(y - \tau) + i(\rho) + g$$

Esta equação corresponde à curva IS. A Figura 4.1 representa esta curva num plano em que o eixo horizontal mede o produto real e o eixo vertical a taxa de juros real. A curva é negativamente inclinada porque se a taxa de juros real aumenta (diminui) o produto real tem que diminuir (aumentar) para manter o mercado de bens e serviços em equilíbrio. Quando o produto for igual ao produto de pleno emprego a taxa de juros real é a taxa de juros real ($\bar{\rho}$) de equilíbrio de longo prazo, a taxa de juros natural da economia. Esta taxa depende da política fiscal do governo e é afetada tanto pelo gasto quanto pelos impostos.

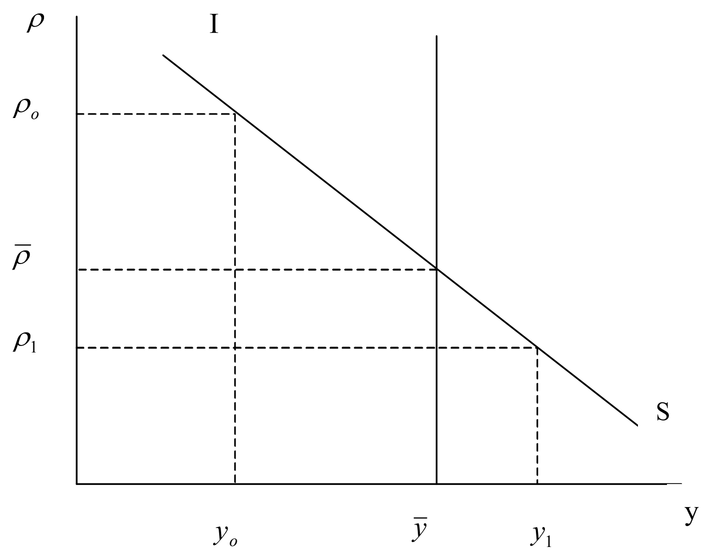


Figura 4.1

O nome IS desta curva é baseado no fato de que o equilíbrio no mercado de bens e serviços é equivalente à igualdade entre poupança e investimento. Isto é, subtraindo-se dos dois lados da equação de equilíbrio no mercado de bens e serviços o total de impostos arrecadado pelo governo resulta em:

$$s = y - c(y - \tau) - \tau = i(\rho) + g - \tau$$

ou ainda:

$$s(y - \tau) = i(\rho) + f$$

Quando a economia estiver em pleno emprego a poupança tem um valor constante, como mostrado na Figura 4.2. O investimento varia em sentido contrário à taxa de juros real. O investimento adicionado ao déficit público corresponde à curva IS da Figura 4.2. O ponto de interseção da curva de poupança vertical com a curva IS determina à taxa de juros real de longo prazo, a taxa de juros natural da economia.

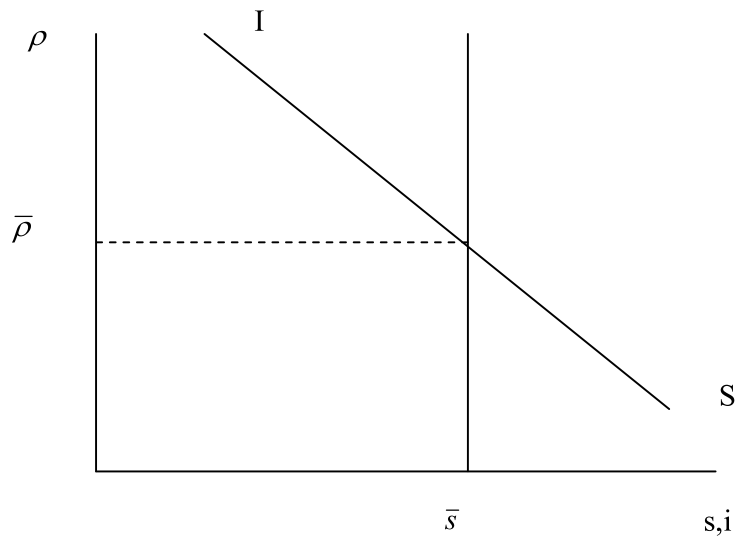


Figura 4.2

A política fiscal pode variar de acordo com o ciclo econômico. Quando a economia estiver em pleno emprego a equação da curva IS tem a seguinte expressão:

$$\bar{y} = c(\bar{y} - \bar{\tau}) + i\,(\bar{\rho}) + \bar{g}$$

As variáveis com barras representam os valores das mesmas quando a economia estiver em pleno emprego. A equação da curva IS pode ser escrita em termos dos desvios das variáveis com relação aqueles de pleno emprego. Subtraindo-se da equação da curva IS a expressão anterior obtém-se:

$$y - \bar{y} = c(y - \tau) - c(\bar{y} - \bar{\tau}) + i(\rho) - i(\bar{\rho}) + g - \bar{g}$$

Álgebra

As expansões de Taylor de primeira ordem, do tipo $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$, das funções consumo e investimento, em torno do ponto de pleno emprego, são dadas por:

$$c(y - \tau) = c(\bar{y} - \bar{\tau}) + c'[(y - \bar{y}) - (\tau - \bar{\tau})]$$

$$i(\rho) = i(\bar{\rho}) + i'(\rho - \bar{\rho})$$

As derivadas das funções consumo e investimento, c' e i', são avaliadas no ponto de pleno emprego. Substituindo-se estas expressões na curva IS obtém-se:

$$y - \bar{y} = c'[(y - \bar{y}) - (\tau - \bar{\tau})] + i'(\rho - \bar{\rho}) + g - \bar{g}$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$y-\bar{y}=-\frac{c'}{1-c'}(\tau-\bar{\tau})+\frac{i'}{1-c'}(\rho-\bar{\rho})+\frac{1}{1-c'}(g-\bar{g})$$

A diferença entre o produto real e o produto potencial depende das variações cíclicas dos impostos, da taxa de juros real, e dos gastos do governo. A política fiscal é representada por duas variáveis, impostos e gastos do governo, com coeficientes distintos, porque elas têm efeitos diferentes sobre o dispêndio. Um real adicional de gastos do governo aumenta inicialmente o dispêndio em um real, enquanto um real a menos de impostos não aumenta inicialmente o consumo privado de um real porque depende da proporção que o consumidor decida poupar. No caso limite em que esta redução de imposto seja poupada o dispêndio permanece inalterado. A curva IS pode ser escrita em função do déficit público, definido subtraindo-se do gasto o total de impostos:

$$f=g-\tau$$

O déficit público de pleno emprego tem definição análoga:

$$\bar{f}=\bar{g}-\bar{\tau}$$

A variação cíclica do déficit público é obtida subtraindo-se do déficit público corrente o déficit público de pleno emprego. Isto é:

$$f-\bar{f}=g-\bar{g}-(\tau-\bar{\tau})$$

A curva IS, através de uma simples manipulação algébrica, isto é, somando-se e subtraindo-se $c'(g-\bar{g})\,/\,(1-c')$ ela pode ser escrita como:

$$y-\bar{y}=\frac{c'}{1-c'}\left[(g-\tau)-(\bar{g}-\bar{\tau})\right]+\frac{i'}{1-c'}(\rho-\bar{\rho})+\frac{1-c'}{1-c'}(g-\bar{g})$$

ou ainda:

$$y-\bar{y}=\frac{c'}{1-c'}(f-\bar{f})+\frac{i'}{1-c'}(\rho-\bar{\rho})+g-\bar{g}$$

Uma forma funcional que permite uma interpretação mais intuitiva dos parâmetros da curva IS é obtida dividindo-se os dois lados da equação anterior pelo produto potencial da economia,

$$\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}}=\frac{i'}{1-c'}\left(\frac{1}{\bar{y}}\right)(\rho-\bar{\rho})+\frac{c'}{1-c'}\left(\frac{f}{\bar{y}}-\frac{\bar{f}}{\bar{y}}\right)+\frac{g}{\bar{y}}-\frac{\bar{g}}{\bar{y}}$$

As variáveis fiscais são medidas como proporção do produto potencial. O lado esquerdo desta expressão é o hiato do produto,

$$\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}} \cong \log\left(1+\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}}\right) = \log\frac{y}{\bar{y}} = \log\ y - \log\ \bar{y}$$

Em estudos empíricos, a interpretação dos coeficientes da equação torna-se mais simples quando se multiplica o hiato do produto por 100, isto é, $100\ \log(y/\bar{y})$. O hiato é medido, então, em percentagem. Deve-se proceder da mesma forma com as demais variáveis da equação.

Equação da Curva IS

Denominando-se por $-\alpha$ o coeficiente da taxa de juros real e por β o coeficiente do déficit público a curva IS passa a ter a seguinte especificação:

$$y-\bar{y} = -\alpha(\rho-\bar{\rho}) + \beta(f-\bar{f}) + g - \bar{g}$$

As variáveis desta curva IS usam os mesmos símbolos que foram usados na sua dedução, mas agora elas têm outra interpretação: i) $y-\bar{y}$ é o hiato do produto; ii) f é o déficit público como proporção do produto potencial e $\bar{f}$ é o déficit público de pleno emprego, também como proporção do produto potencial; iii) g é o gasto do governo e $\bar{g}$ o gasto do governo no pleno emprego, ambos como proporção do produto potencial. O parâmetro α mede o efeito de uma variação sustentada da taxa de juros real, com relação à taxa de juros natural, sobre o hiato do produto. Por exemplo, se α for igual a dois para cada um por cento de aumento da taxa de juros real, com relação à taxa de juros natural, a capacidade ociosa da economia aumenta de dois por cento. O coeficiente β mede o efeito da variação do déficit público sobre o hiato do produto. Quando existir equivalência ricardiana este coeficiente é igual a zero, pois a sociedade reage ao déficit público aumentando de igual magnitude a poupança para pagar impostos no futuro para financiar o déficit.

Esta especificação da curva IS permite a análise, de forma simples e transparente, das razões que podem levar a economia a estar com desemprego e capacidade ociosa. A economia pode estar nesta situação quando pelo menos um dos seguintes fatos ocorra: i) a taxa de juros real for diferente da taxa da taxa de juros natural; ii) o déficit público for diferente do déficit público de pleno emprego e iii) os gastos do governo forem diferentes dos gastos do governo de pleno emprego. Os dois últimos fatos são provocados pela política fiscal. A taxa de juros real pode ser diferente da taxa de juros natural por dois motivos. O primeiro é resultado da política monetária que pode ser contracionista, aumentando a taxa de juros, ou expansionista reduzindo a taxa de juros. O segundo motivo é uma mudança da taxa de juros natural. Esta taxa pode mudar em virtude da política fiscal do governo, ou do comportamento do setor privado, seja no consumo e (ou) no investimento.

2. Curva IS: Microfundamentos

A curva IS com microfundamentos é deduzida a partir do problema de alocação intertemporal do consumo de um agente representativo. Esta seção trata, em primeiro lugar, de caracterizar as preferências dos consumidores, e em seguida estabelece a condição de primeira ordem do equilíbrio do consumidor, conhecida na literatura pelo nome de equação de Euler.

2.1. Preferências do Consumidor

A Figura 4.3 mostra a curva de utilidade do consumidor, com o consumo no período *t* medido no eixo horizontal e o consumo no período *t+1* no eixo vertical. A taxa marginal de substituição entre os consumos nos dois períodos é a tangente num ponto da curva de utilidade, ou a derivada do consumo no período *t+1* com relação ao consumo no período *t,* com o sinal trocado, ao longo de uma curva de preferência (nível de utilidade constante). Esta taxa marginal (τ) é igual à razão entre as duas utilidades marginais:

$$\tau = -\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = \frac{\partial u / \partial c_t}{\partial u / \partial c_{t+1}}$$

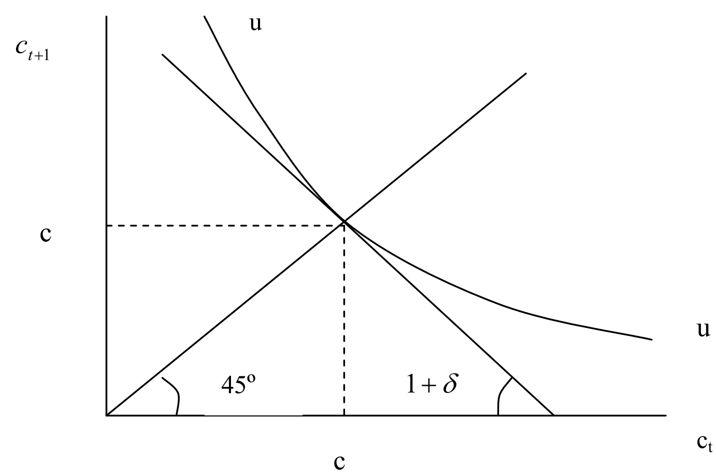


Figura 4.3

Admita que a função utilidade tenha o seguinte formato:

$$u(c_t, c_{t+1}) = \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{1+\delta} \frac{c_{t+1}^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

onde σ é um parâmetro diferente de um. As utilidades marginais dos consumos hoje (*t*) e amanhã (*t+1*) são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial c_t} = c_t^{-\frac{1}{\sigma}} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial c_{t+1}} = \frac{1}{1+\delta} c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$$

A taxa marginal de substituição é, então, igual a:

$$\tau = \frac{c_t^{-\frac{1}{\sigma}}}{(1+\delta)^{-1} c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}} = \frac{1}{(1+\delta)^{-1}} \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

Quando $c_t = c_{t+1} = c$, a taxa marginal de substituição é igual a um mais o parâmetro δ:

$$\tau = 1 + \delta$$

Este é um dos parâmetros que caracteriza as preferências do consumidor, a taxa de preferência intertemporal. Esta taxa pode ser interpretada como a taxa de juros que induziria o consumidor a ter um nível de consumo constante durante sua vida. Isto é, a taxa de preferência intertemporal é a taxa de retorno do consumo. No gráfico da Figura 4.3 ela corresponde à tangente da curva de utilidade no ponto em que a reta de quarenta e cinco graus partindo da origem corta a curva de utilidade.

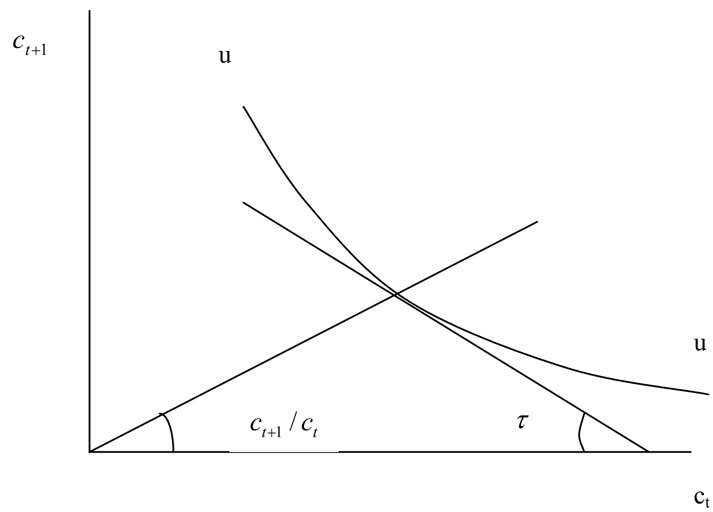


Figura 4.4

Um segundo parâmetro que caracteriza as preferências do consumidor é a curvatura da função utilidade. Esta curvatura pode ser medida através da elasticidade de substituição. A Figura 4.4 ilustra a interpretação geométrica deste conceito. A elasticidade de substituição mede a resposta da variação percentual da proporção entre o consumo amanhã (*t+1*) e o consumo hoje (*t*) a uma variação percentual da taxa marginal de substituição. Isto é, a elasticidade de substituição mede a relação entre a variação do ângulo da reta que liga um ponto da curva de utilidade à origem e a variação da tangente a curva de utilidade. Analiticamente, a elasticidade de substituição é definida por:

$$\varepsilon_s = \frac{\dfrac{\Delta(c_{t+1} / c_t)}{c_{t+1} / c_t}}{\Delta \tau / \tau}$$

A elasticidade de substituição, em termos da derivada logarítmica, é definida, então, por:

$$\varepsilon_s = \frac{d \, \log \left({c_{t+1}}/{c_t} \right)}{d \, \log \tau}$$

A taxa marginal de substituição, do exemplo anterior da função utilidade, é dada por:

$$\tau = (1 + \delta) \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\frac{\tau}{1+\delta} \right)^{\sigma}$$

Tomando-se o logaritmo dos dois lados desta expressão obtém-se:

$$\log (c_{t+1} / c_t) = \sigma \log \tau - \sigma \log (1+\delta)$$

A elasticidade de substituição é, então, igual ao parâmetro σ:

$$\varepsilon_s = \frac{d \log (c_{t+1} / c_t)}{d \log \tau} = \sigma$$

2.2. Equilíbrio do Consumidor: Equação de Euler

Imagine um consumidor que tenha que decidir se gasta um real no consumo hoje (*t*) ou amanhã (*t+1*). Caso ele decida consumir imediatamente seu bem estar tem um aumento igual à utilidade marginal do consumo hoje. Caso ele decida consumir amanhã, ele aplica um real num ativo financeiro que lhe renderá uma taxa de juros igual a ρ, e gasta no período seguinte o principal mais os juros da aplicação. Seu bem estar terá um aumento amanhã igual à utilidade marginal do consumo. Mas, para comparar com o bem estar hoje ele tem que descontar o bem estar de amanhã pela taxa de preferência intertemporal. Em equilíbrio ele será indiferente a estas opções:

$$u'(c_t) = (1+\rho_t) \frac{1}{1+\delta} u'(c_{t+1})$$

Esta equação de equilíbrio é conhecida na literatura econômica como equação de Euler. Este nome vem da condição de primeira ordem do problema de otimização dinâmica do cálculo de variações. Ela afirma que o consumidor aplicará seus recursos de tal sorte que o consumo de um real terá o mesmo valor em termos de bem estar qualquer que seja o período de sua vida. A idéia básica por trás desta equação é que o indivíduo suaviza o consumo ao longo de sua vida. Ele prefere ter um padrão de vida de classe média a vida toda do que viver como milionário por alguns dias e viver na miséria o resto dos seus dias.

Quando a função utilidade tem a forma funcional,

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

a utilidade marginal é igual a:

$$u'(c) = c^{-\frac{1}{\sigma}}$$

e a equação de Euler é expressa por:

$$c_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{1+\rho_t}{1+\delta}\, c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}$$

A razão entre os consumos é dada por:

$$\frac{c_t}{c_{t+1}} = \left(\frac{1+\rho_t}{1+\delta}\right)^{-\sigma}$$

Tomando-se o logaritmo dos dois lados tem-se:

$$\log c_t - \log c_{t+1} = -\sigma\ \left[\log(1+\rho_t) - \log(1+\delta)\right]$$

A equação do consumo tem, então, a seguinte expressão:

$$\log c_t = \log c_{t+1} - \sigma\left(\rho_t - \delta\right)$$

usando-se a aproximação $\log\,(1+x) \cong x$.

2.3 Curva IS Novo-Keynesiana

O mercado de bens e serviços está em equilíbrio quando o dispêndio, com consumo e gastos do governo, for igual ao produto real:

$$y_t = c_t + g_t$$

A aproximação logarítmica linear [confira derivação no final desta seção], em torno do ponto de equilíbrio estacionário, da equação de equilíbrio no mercado de bens e serviços é dada por:

$$\log y_t = \omega \log c_t + (1-\omega) \log g_t$$

onde ω é a relação consumo/renda no equilíbrio estacionário. O consumo é dado por:

$$\log c_t = \log c_{t+1} - \sigma\left(\rho_t - \delta\right)$$

Substituindo-se esta equação na expressão da condição de equilíbrio tem-se:

$$\log y_t = -\omega\sigma\ (\rho_t - \delta) + \omega \log c_{t+1} + (1-\omega) \log g_t$$

Usando-se a aproximação linear do consumo para o período seguinte:

$$\omega \log c_{t+1} = \log y_{t+1} - (1-\omega) \log g_{t+1}$$

pode-se, então, escrever a equação anterior como:

$$\log y_t = -\omega\sigma\ (\rho_t - \delta) + \log y_{t+1} + (1-\omega)\ (\log g_t - \log g_{t+1})$$

Para simplificar, admita-se que o produto potencial da economia seja constante:

$$\overline{y}_t = \overline{y}_{t+1} = \overline{y}$$

Subtraindo-se o logaritmo do produto potencial de ambos os lados da equação do produto real, resulta na seguinte curva IS:

$$\log y_t - \log \overline{y} = -\omega\sigma\ (\rho_t - \delta) + \log y_{t+1} - \log \overline{y} + (1-\omega)\ (\log g_t - \log g_{t+1})$$

A taxa de juros real de equilíbrio de longo prazo, a taxa de juros natural, é igual à taxa de preferência intertemporal ($\overline{\rho} = \delta$).

Equação da Curva IS Novo-Keynesiana

O hiato do produto x é definido por: $\log y_t - \log \overline{y} = x_t$. A curva IS novo-keynesiana tem, então, a seguinte expressão:

$$x_t = -\alpha(\rho_t - \overline{\rho}) + x_{t+1} + (1-\omega)\ (g_t - g_{t+1})$$

onde $\alpha = \omega\ \sigma$ e a letra *g* denota agora o logaritmo da variável. O efeito do hiato da taxa de juros real sobre o hiato do produto é proporcional ao tamanho do efeito substituição no consumo. Quando $g_t = g_{t+1}$, a curva IS simplifica:

$$x_t = x_{t+1} - \alpha(\rho_t - \overline{\rho})$$

Comparação das Curvas IS Tradicional e Novo-Keynesiana

A expressão anterior pode ser escrita para o período seguinte:

$$x_{t+1} = x_{t+2} - \alpha(\rho_{t+1} - \overline{\rho})$$

que substituída na equação anterior permite escrever o hiato do produto como função do hiato do produto dois períodos adiante e das diferenças (hiatos) das taxas de juros, com relação a taxa de juros natural, nos períodos *t* e *t+1*:

$$x_t = x_{t+2} - \alpha(\rho_t - \overline{\rho}) - \alpha(\rho_{t+1} - \overline{\rho})$$

O hiato do produto dois períodos adiante é, por sua vez, dado por:

$$x_{t+2} = x_{t+3} - \alpha\left(\rho_{t+2} - \overline{\rho}\right)$$

Através desta substituição recursiva para frente, a curva IS novo-keynesiana depende de toda a história futura das diferenças (hiatos) das taxas de juros de acordo com:

$$x_t = -\alpha \sum_{i=o}^{\infty} \left(\rho_{t+i} - \overline{\rho}\right)$$

A curva IS, sem microfundamentos, é usualmente especificada com base no passado:

$$x_t = -\sum_{i=o}^{n} \alpha_i \left(\rho_{t-i} - \overline{\rho}\right)$$

A diferença fundamental entre as duas curvas é de que na curva IS tradicional as diferenças (os hiatos) das taxas de juros do passado afetam o hiato do produto hoje, enquanto na curva IS novo-keynesiana são as diferenças (hiatos) das taxas de juros previstas para o futuro que afetam o hiato do produto no presente.

Aproximação Logarítmica

Admita que z seja função de x e de y de acordo com:

$$z = f\left(x, y\right)$$

e que as variáveis com barras representem a solução estacionária do modelo:

$$\overline{z} = f\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$$

Diferenciando-se a função f em torno do equilíbrio estacionário tem-se:

$$dz = f_x\left(\overline{x}, \overline{y}\right)dx + f_y\left(\overline{x}, \overline{y}\right) dy$$

Dividindo-se ambos os lados desta expressão pelo valor de $\overline{z}$, a diferencial de x por $\overline{x}$, e a diferencial de y por $\overline{y}$, obtém-se:

$$\frac{dz}{\overline{z}} = \frac{f_x\left(\overline{x}, \overline{y}\right)\overline{x}}{\overline{z}} \frac{dx}{\overline{x}} + \frac{f_y\left(\overline{x}, \overline{y}\right)\overline{y}}{\overline{z}} \frac{dy}{\overline{y}}$$

Conclui-se então que:

$$d \log z = \omega\, d \log x + (1 - \omega)\, d \log y$$

onde:

$$\omega = \frac{f_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}}{\bar{z}} ; 1 - \omega = \frac{f_y(\bar{x}, \bar{y})\,\bar{y}}{\bar{z}}$$

A aproximação logarítmica linear, em torno do ponto de equilíbrio estacionário, é dada por:

$$\log z \cong \omega \log x + (1 - \omega) \log y$$

2.4 Curva IS Novo-Keynesiana: Variáveis Contínuas

A curva IS novo-keynesiana com variáveis contínuas pode ser obtida da curva IS com variáveis discretas,

$$x_t - x_{t+1} = -\alpha\left(\rho_t - \bar{\rho}\right)$$

A mudança do hiato do produto (x) será aproximada pela derivada:

$$x_{t+1} - x_t \cong \dot{x} = \frac{dx}{dv}$$

A curva IS com variáveis contínuas é, então, dada por:

$$\dot{x} = \alpha(\rho - \bar{\rho})$$

Esta curva supõe que o consumidor é prospectivo, isto é, ele olha para frente (*forward looking*) ao tomar suas decisões. Em termos de diferenciais, a curva IS pode ser escrita como:

$$dx = \alpha\left(\rho - \bar{\rho}\right) dv$$

Integrando-se ambos os lados desta expressão de hoje (t) até um período futuro (T) tem-se:

$$\int_t^T dx = \int_t^T \alpha\ (\rho - \bar{\rho})dv$$

Logo,

$$x(T) - x(t) = \int_t^T \alpha\ (\rho - \bar{\rho})dv$$

O hiato do produto no período t é igual ao hiato do produto no período futuro T menos o componente que depende do hiato de juros neste período futuro considerado:

$$x(t) = x(T) - \int_t^T \alpha\ (\rho - \bar{\rho})dv$$

3 Taxa de Juros Natural

No modelo com microfundamentos, a taxa de juros real de equilíbrio de longo prazo, a taxa de juros natural, é igual à taxa de preferência intertemporal do consumidor quando o produto potencial da economia for constante. Quando o produto potencial variar ao longo do tempo a curva IS pode ser escrita como:

$$y_t - \bar{y}_t = y_{t+1} - \bar{y}_{t+1} - \bar{y}_t + \bar{y}_{t+1} - \sigma\,(\rho_t - \delta\,)$$

onde a letra y representa agora o logaritmo do produto real. Esta equação também pode ser escrita como:

$$y_t - \bar{y}_t = y_{t+1} - \bar{y}_{t+1} - \sigma\,[\,\rho_t - \delta - \frac{1}{\sigma}\,(\,\bar{y}_{t+1} - \bar{y}_t)]$$

A taxa de juros natural é, portanto, igual à soma de dois componentes. O primeiro é a taxa de preferência intertemporal do consumidor. O segundo componente é igual ao produto do inverso da elasticidade de substituição pela taxa de crescimento do produto potencial. Isto é:

$$\bar{\rho} = \delta + \frac{1}{\sigma}\,(\,\bar{y}_{t+1} - \bar{y}_t\,)$$

A taxa de juros natural, no modelo com microfundamentos, depende, portanto, de dois parâmetros que caracterizam as preferências dos consumidores ($\delta\,, \sigma$) e do crescimento do produto potencial da economia.

No modelo tradicional, taxa de juros real de equilíbrio de longo prazo, a taxa natural, depende dos parâmetros da política fiscal. A taxa natural é obtida pela interseção da curva IS com a reta vertical que passa pela abscissa do produto potencial da economia, como se pode verificar pela Figura 1.1. Qualquer movimento da curva IS afeta a taxa de juros natural da economia. Analiticamente, a taxa de juros natural depende, portanto, do déficit público e dos gastos do governo. Isto é:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\,\bar{f}\,, \bar{g}\,, a)$$

Tanto o aumento do déficit público como dos gastos públicos aumenta a taxa de juros natural. O setor privado, ou seja, o comportamento dos indivíduos quanto ao consumo e dos empresários nas decisões de investimento também afeta a taxa de juros natural. A letra a na expressão acima é para lembrar que mudanças no comportamento dos consumidores ou dos empresários com relação ao investimento afetam a taxa de juros natural da economia. Aumento (diminuição) autônomo no consumo (investimento) aumenta (diminui) a taxa de juros natural da economia.

4. Curva LM

O Banco Central é uma instituição cuja principal atividade consiste na venda e na compra da moeda que ele próprio emite, e na qual é monopolista. Quando ele vende sua moeda o banco central compra títulos, denominados em moeda local ou em moeda estrangeira. Em geral, os títulos em moeda local são títulos do governo. Os títulos denominados em moeda estrangeira são também títulos públicos, emitidos por diferentes países. Quando o banco central vende títulos públicos de sua própria carteira ele contrai o estoque da base monetária, o mesmo ocorrendo quando ele vende reservas internacionais. Um balancete típico de um banco central está descrito no quadro abaixo. No ativo estão às reservas internacionais e os títulos públicos domésticos. O passivo é formado pela base monetária, que é a soma do papel moeda em poder do público e das reservas bancárias que o sistema bancário mantém no banco central. A conta reservas bancárias é a conta pela qual trafega todo o sistema de pagamentos da economia, e na qual estão os depósitos compulsórios sobre os depósitos à vista que os bancos comerciais são obrigados a cumprirem junto ao banco central.

O banco central tem instrumentos para controlar o estoque nominal de moeda da economia, vendendo e comprando títulos. O mecanismo pelo qual ele faz isto é bastante simples, induzindo o mercado a comprar títulos através da redução dos preços dos mesmos, e a vendê-los para o banco central subindo os preços dos títulos. A contrapartida da venda de títulos pelo banco central é a redução do estoque de moeda da economia, e a contrapartida da compra de títulos pelo banco central é a expansão do estoque de moeda da economia.

Banco Central

ATIVO	**PASSIVO**
Reservas Internacionais (RI) **Títulos Públicos (B^{BC})**	**Base Monetária (M)** **a) Papel Moeda em Poder do Público (C)** **b) Reservas Bancárias (*R*)**
$RI + B^{BC} \equiv M \equiv C + R$	

A característica fundamental da moeda que a distingue dos demais ativos financeiros é o seu uso como meio de pagamentos. O preço da moeda é a quantidade de bens e serviços que se obtém com uma unidade da mesma, isto é, o inverso do nível de preços (*1/P*). O custo de oportunidade da moeda é a taxa de juros nominal (r) que se deixa de ganhar na aplicação de outro ativo financeiro porque a moeda não é remunerada. A demanda de moeda do público é uma demanda por uma quantidade de bens e serviços que se compra com a mesma. O banco central controla o estoque nominal da moeda e o público determina a quantidade real de moeda que deseja ter na sua carteira de ativos financeiros. Esta quantidade real de moeda demandada depende de duas variáveis, do volume de transações e do seu custo de oportunidade. O volume de transações pode ser medido pelo produto real da economia. Quanto maior o produto real maior a quantidade real de moeda demandada e vice-versa. Quando o custo de oportunidade da moeda, a taxa de juros, aumenta induz o público a economizar na quantidade de moeda que ele deseja reter. Quando a taxa de juros diminui a quantidade real demandada de moeda aumenta. A equação da demanda de moeda pode ser expressa como função do produto real e da taxa de juros nominal:

$$\frac{M^d}{P} = L(y, r)$$

O banco central controla o estoque nominal de moeda e a oferta de moeda é dada por:

$$M^s = M$$

O mercado monetário está em equilíbrio quando a quantidade demandada de moeda for igual à quantidade ofertada. Isto é:

$$M^d = M^s$$

O equilíbrio no mercado monetário é dado, portanto, pela seguinte equação**:**

$$\frac{M}{P} = L(y, r)$$

A curva LM da Figura 4.5 descreve o equilíbrio no mercado monetário. O eixo horizontal mede o produto real e o eixo vertical a taxa de juros nominal. A curva LM é positivamente inclinada porque se a taxa de juros nominal aumenta (diminui) o produto real tem que aumentar (diminuir) para restaurar o equilíbrio no mercado monetário. A expansão da oferta de moeda ou uma redução do nível de preços desloca a curva LM para baixo e para a direita. Uma redução do estoque nominal de moeda ou um aumento do nível de preços muda a curva LM para cima e para a esquerda.

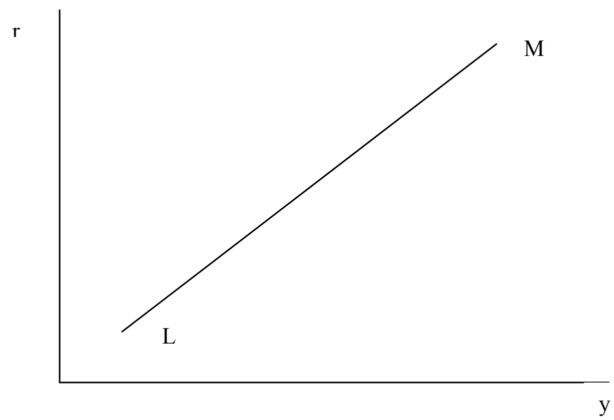


Figura 4.5

A equação da curva LM numa forma funcional linear é a seguinte:

$$m = \alpha\ y - \beta\ r$$

onde m é o logaritmo da quantidade real de moeda, $m = \log(M / P)$. Quando a economia estiver em pleno emprego esta equação transforma-se em:

$$\overline{m} = \alpha\ \overline{y} - \beta\ \overline{r}$$

As variáveis com uma barra em cima indicam os valores das mesmas no pleno emprego. Subtraindo-se uma equação da outra se obtém a Curva LM em termos de desvio das variáveis para seus valores de pleno emprego:

$$m - \overline{m} = \alpha\left(y - \overline{y}\right) - \beta\left(r - \overline{r}\right)$$

5. Curva LM: Microfundamentos

A teoria monetária usa três enfoques para deduzir a equação de demanda de moeda: i) moeda na função utilidade; ii) restrição prévia de liquidez, e iii) custo de transação. Estes três enfoques são apresentados a seguir. Os dois primeiro enfoques tratam da demanda de moeda do consumidor. O terceiro enfoque, do custo de transação, será aplicado na dedução da demanda de moeda dos bancos que necessitam de moeda para fazer face às transações no sistema de pagamentos de uma economia monetária moderna.

5.1. Moeda na Função Utilidade (*MIU*)

O enfoque da moeda na função utilidade supõe que as pessoas demandam moeda pelos serviços da mesma, de maneira análoga à demanda pelos serviços dos bens duráveis. A variável z na função utilidade representa os serviços da moeda,

$$\cup\left(c, z\right)$$

e c o fluxo dos bens e serviços de consumo. Os serviços da moeda são proporcionais ao estoque da quantidade real de moeda de acordo com:

$$z = k\frac{M}{P} \quad , k = 1$$

É conveniente escolher as unidades de tal sorte que a constante de proporcionalidade k seja igual a um. Assim os serviços da moeda podem ser representados pelo estoque real da moeda. Uma hipótese simplificadora adicional é que a função utilidade seja separável, onde $u(c)$ é a utilidade dos bens e serviços de consumo e $v(m)$ a utilidade dos serviços da moeda. Isto é:

$$\cup\left(c, m\right) = u\left(c\right) + v\left(m\right)$$

O agente representativo no início do período t tem que tomar a decisão de alocar seus recursos na compra de bens e serviços de consumo ou em reter estes recursos na forma de moeda e gastá-los no início do período seguinte na aquisição de bens de consumo. O acréscimo de bem estar se ele comprar bens de consumo é igual à quantidade de bens de consumo vezes a utilidade marginal do consumo:

$$\frac{1}{P_t}u'\left(c_t\right)$$

Quando o agente prefere reter moeda o acréscimo de bem estar é igual à soma de duas parcelas. A primeira é o acréscimo de bem estar proporcionado pelos serviços da moeda, e a segunda parcela é igual ao acréscimo de bem estar dos bens de consumo comprados ao final do período quando ele converter a moeda em bens de consumo:

$$\frac{1}{P_t} v'(m_t) + \frac{1}{1+\delta} \frac{1}{P_{t+1}} u'(c_{t+1})$$

Em equilíbrio estas alternativas devem produzir o mesmo acréscimo de bem estar. Isto é:

$$\frac{1}{P_t} u'(c_t) = \frac{1}{P_t} v'(m_t) + \frac{1}{1+\delta} \frac{1}{P_{t+1}} u'(c_{t+1})$$

Esta equação pode ser reescrita do seguinte modo:

$$u'(c_t) = v'(m_t) + \frac{1}{1+\delta} \frac{1}{P_{t+1}/P_t} u'(c_{t+1})$$

A equação de Fisher deste modelo é dada por:

$$(1+\delta)\frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + r_t$$

Admitindo-se que o consumo seja constante,

$$c_t = c_{t+1} = c$$

a equação de equilíbrio transforma-se em:

$$u'(c)\left[1 - \frac{1}{1+r_t}\right] = v'(m_t)$$

A taxa marginal de substituição entre consumo e moeda é igual ao custo de oportunidade de reter moeda:

$$\frac{v'(m_t)}{u'(c)} = \frac{r_t}{1+r_t}$$

Cabe observar que o custo de oportunidade de reter moeda, num modelo com variáveis discretas, é igual ao valor presente da taxa de juros, pois o rendimento do ativo financeiro somente é pago no final do período. Quando o modelo for escrito com variáveis contínuas a condição de equilíbrio é dada por:

$$\frac{v'(m)}{u'(c)} = r$$

Quando a taxa de juros nominal aumenta (diminui) a quantidade real de moeda diminui (aumenta) porque a utilidade marginal da moeda tem que aumentar para restaurar o equilíbrio entre a taxa marginal de substituição, de consumo e moeda, e a taxa de juros.

Esta equação define implicitamente a equação de demanda de moeda, que pode ser especificada por:

$$m = L\ (r, c)$$

5.2. Restrição Prévia de Liquidez (CIA)

O enfoque da restrição prévia de liquidez, conhecido pelo seu acrônimo em inglês CIA (*cash in advance constraint*) parte da premissa de que na economia monetária bens não são trocados por bens. Amoeda compra bens e bens compram moeda. O indivíduo para comprar bens e serviços de consumo precisa dispor da quantidade de moeda suficiente para pagar por estes bens e serviços. Analiticamente este fato se expressa pela seguinte restrição:

$$M_{t-1} \geq P_t\ c_t$$

onde M_{t-1} é o estoque de moeda previamente acumulado no período *t-1*, P_t o preço do bem e c_t a quantidade do bem de consumo que será comprada no período *t*. A moeda nesta economia é essencial porque sem ela o consumidor não compra os bens e serviços que deseja. Como a utilidade marginal dos bens e serviços é positiva, o consumidor não desperdiça os seus recursos. Ele terá uma quantidade de moeda exatamente igual ao valor das compras, pois o custo de oportunidade da moeda é a taxa de juros que deixa de ganhar na aplicação financeira. Isto é:

$$M_{t-1} = P_t\ c_t$$

A taxa de juros nominal funciona como um imposto na compra dos bens e serviços. Com efeito, para cada real gasto na compra dos bens e serviços há um sacrifício dos juros, pois este real deve estar na forma de moeda para efetuar o pagamento da compra do bem de consumo.

Este enfoque pode ser estendido para uma economia onde existam bens e serviços que possam ser comprados a crédito e não com moeda. Neste tipo de economia, a taxa de juros afeta o preço relativo entre os dois tipos de bens, daqueles que necessitam de moeda e daqueles que podem ser comprados a crédito.

5.3. Custo de Transação

O sistema de pagamentos das economias modernas (Estados Unidos, Europa, Brasil, Suíça, etc) tem como seu principal mecanismo o chamado Sistema de Transferência de Reservas. O STR é um sistema de transferência de fundos com Liquidação Bruta em Tempo Real (LBTR), ou seja, liquida as obrigações em tempo real, operação por operação. Neste sistema são realizados os pagamentos dos contratos efetuados nos mercados monetário, cambial e de capitais, além dos pagamentos das operações efetuadas pelo Banco Central e pelo Tesouro Nacional. Há um monitoramento, em tempo real, das Reservas Bancárias de cada banco. Não se permite que a mesma tenha saldo negativo em nenhum momento do dia. Além disso, apenas o titular pode ordenar débitos em sua conta, de forma a ter controle total de seu saldo. Estes procedimentos reduzem de maneira drástica os riscos dos participantes no sistema de pagamentos. Por outro lado, há aumento da necessidade de liquidez para a administração, ao longo do dia, das Reservas Bancárias de cada banco neste ambiente.

Desta forma, se antes os bancos administravam seus saldos apenas para minimizar os custos de oportunidade gerados pelo excesso de reservas no cumprimento do compulsório, no sistema STR surge outro motivo: a necessidade de liquidar seus pagamentos em tempo real. Esta seção apresenta um modelo de demanda de reservas, em um ambiente LBTR. Admita que o custo de transação para o sistema bancário gerenciar este sistema seja dado por:

$$c(t,T) = \frac{\alpha}{\beta}\left(t^{\beta} - 1\right)T^{\delta}$$

onde α e β são parâmetros da função de custo, t é a taxa de giro das reservas ($t = \frac{T}{R}$), T é o total de pagamentos que será feito durante o período e R é o total de reservas bancárias. Nesta função admite-se que o total de pagamentos que o banco tem de fazer, durante o período, afeta o custo total de gerenciar estes pagamentos. Dois bancos com a mesma razão de giro podem ter custos diferentes dependendo do total de pagamentos. Admite-se que $\beta \geq 1$, $\alpha \geq 0$ e $c\ (1,\ T)=0$. Não existe restrição sobre o parâmetro δ. O banco tem dois custos, a perda de juros nas reservas e o de gerenciar a conta reservas. O banco procura minimizar o total dos custos e resolve o seguinte problema:

$$\min_t \left\{ rR + \frac{\alpha}{\beta}\left(t^{\beta} - 1\right)T^{\delta} \right\}$$

A razão de giro ótima é dada por:

$$t^{*} = \left(\frac{rT^{1-\delta}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}$$

Quando $0 < \delta < 1$ existem economias de escala porque a taxa de giro aumenta quando o volume de pagamentos também aumenta. A equação de demanda de reservas é dada por:

$$R = \alpha^{\frac{1}{1+\beta}} r^{-\frac{1}{1+\beta}} T^{\frac{\beta+\delta}{1+\beta}}$$

A soma das duas elasticidades é diferente de um, a menos que o parâmetro δ seja igual a zero:

$$\left|\varepsilon_{R,i}\right| + \left|\varepsilon_{R,T}\right| = \frac{1}{1+\beta} + \frac{\beta+\delta}{1+\beta} = \frac{1+\beta+\delta}{1+\beta}$$

6. Mercado de Reservas Bancárias

O Banco Central executa a política monetária através do mercado de reservas bancárias. Neste mercado os bancos comerciais trocam reservas bancárias entre si, porém o total de reservas ou a taxa de juros é controlado pelo banco central.

A Figura 4.6 mostra que se o banco central fixar a taxa de juros em r_o o mercado absorve uma quantidade de reservas igual a R_0, e vice-versa. Todavia, os efeitos destes procedimentos não são iguais. Quando, por qualquer razão, a demanda de reservas muda, a taxa de juros flutua bastante se o banco central controla a quantidade de reservas. Por outro lado, se o banco central controla a taxa de juros o nível de reservas é que absorve as variações da curva de demanda de reservas, como indicado na Figura 4.6. Os bancos centrais preferem uma menor volatilidade da taxa de juros. Na maioria dos casos eles intervêm no mercado de reservas bancárias fixando a taxa de juros.

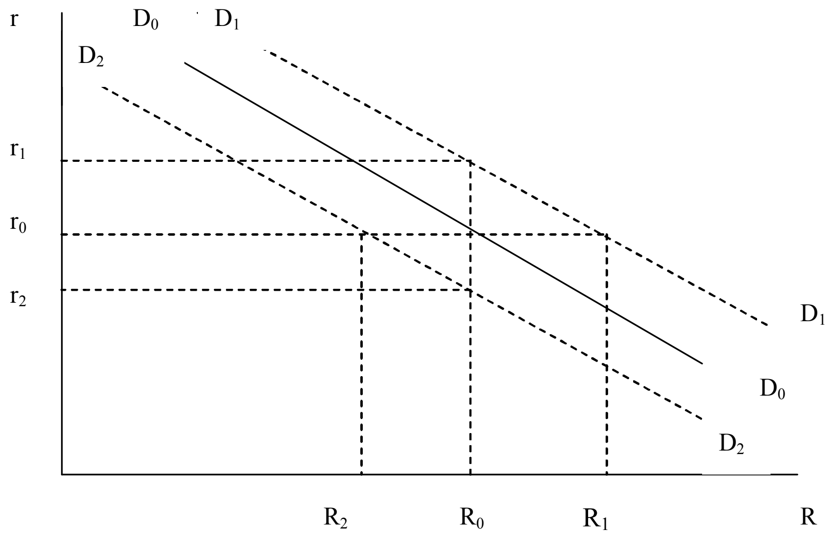


Figura 4.6

O banco central deve fixar a taxa de juros de modo discricionário, casuístico, ou por meio de uma regra de conhecimento geral? A discussão sobre este tema é bastante antiga na literatura econômica. O argumento a favor de uma política discricionária é que o banco central teria as mãos livres para fixar, a cada momento, a taxa de juros que julgasse mais adequada. Todavia, este tipo de comportamento produziria bastante imprevisibilidade para os empresários, trabalhadores e consumidores.

No caso de uma regra de política monetária, a sociedade teria informação precisa sobre as variáveis que influenciam as decisões do banco central. Ademais, o cumprimento da regra daria credibilidade e reputação ao banco central. Nestas circunstâncias, o simples anúncio da política seria suficiente para que o setor privado da economia tomasse decisões com base na política anunciada. O argumento de que ao adotar uma regra o banco central teria suas mãos atadas e não poderia agir em situações excepcionais não procede. A regra é para ser usada em situações normais. Caso ocorra um *tsunami* (uma onda gigantesca, causada por um maremoto) a regra seria abandonada temporariamente, até a situação se normalizar, quando ela voltaria a ser usada. A sociedade entenderia os motivos da suspensão temporária, e este fato não afetaria a reputação e a credibilidade do banco central.

Regra de Política Monetária

Que variáveis determinam à taxa de juros fixada pelo banco central? A regra de Taylor supõe que o banco central fixa a taxa de juro nominal do mercado de reservas bancárias em função: i) do hiato da inflação, a diferença entre a taxa de inflação e a meta da inflação que tem como objetivo alcançar, ii) do hiato do produto, iii) da taxa de juros natural e iv) da taxa de inflação, de acordo com:

$$r = \overline{\rho} + \pi + \phi\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \theta\left(y - \overline{y}\right), \quad \phi > 0\,, \theta > 0$$

Somando-se e subtraindo-se a meta de inflação $\overline{\pi}$ a esta expressão, ela pode ser reescrita como:

$$r = \overline{\rho} + \overline{\pi} + \left(1 + \phi\right)\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \theta\left(y - \overline{y}\right)$$

A principal propriedade desta regra é de que toda vez que haja um desvio de 1%, por exemplo, da taxa de inflação com relação à meta, o banco central deve aumentar a taxa de juros de um valor maior que 1% [$(1+\phi)$ %]. Quando a inflação for igual à meta e a economia estiver em pleno emprego, a taxa de juros nominal de longo prazo será igual à soma da taxa de juros natural com a meta de inflação.

7. Curva de Phillips

A curva de Phillips pode ser deduzida a partir de diferentes hipóteses sobre o mercado de bens e serviços e o mercado de mão-de-obra. Na fixação dos preços admite-se que a empresa tem poder de mercado e determina o preço adicionando uma margem (m*ark up*) sobre o custo marginal. O empresário repassa para o preço qualquer variação no custo marginal. Este custo depende do salário e da produtividade marginal da mão de obra. No mercado de trabalho o salário depende das condições de utilização da capacidade produtiva da economia. Com estes ingredientes deduz-se a curva de Phillips tradicional.

Poder de Mercado e Determinação de Preço

A empresa defronte-se com uma curva de demanda pelo seu produto negativamente inclinada e tem uma curva de custo marginal com custo marginal crescente com a quantidade produzida. As curvas de demanda e de custo marginal estão desenhadas na Figura 4.7.

A empresa tem como objetivo maximizar lucro. O faturamento (F) da mesma é igual ao produto do preço do bem (P) pela quantidade vendida do mesmo (y). Isto é:

$$F = P\,y$$

O custo de produção da empresa (C) depende da quantidade produzida de acordo com:

$$C = C(y)$$

O lucro é obtido subtraindo-se da receita o custo de produção:

$$L = Lucro = F - C$$

A condição de primeira ordem para maximizar o lucro implica que a receita marginal deve ser igual ao custo marginal:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{dC}{dy} = 0 \;\Rightarrow\; \quad Rmg = Cmg$$

A receita marginal pode ser escrita como:

$$\frac{dF}{dy} = \frac{d}{dy}\left(P\ y\right) = P + y\ \frac{dP}{dy} = P\left(1 + \frac{y}{P}\ \frac{dP}{dy}\right)$$

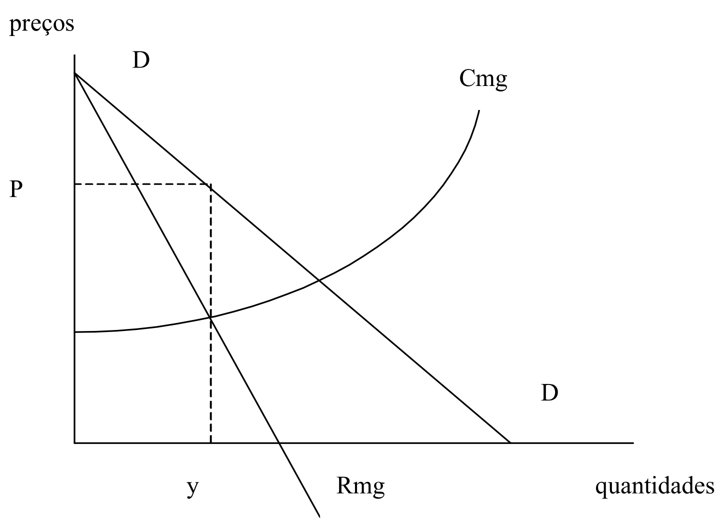


Figura 4.7

A elasticidade da quantidade demandada com relação ao preço do produto é definida por:

$$\varepsilon = \frac{dy}{dP}\ \frac{P}{y}\ ; \quad |\varepsilon| = -\frac{dy}{dP}\ \frac{P}{y}$$

Com um pouco de álgebra a receita marginal pode ser escrita como função do preço do produto e do valor absoluto da elasticidade:

$$Rmg = P\left[1 + \frac{1}{\dfrac{P}{y}\ \dfrac{dy}{dP}}\right] = P\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon|}\right) = P\left(\frac{|\varepsilon| - 1}{|\varepsilon|}\right)$$

A receita marginal pode ser escrita como função do parâmetro *k*, a margem da empresa. Em equilíbrio, a receita marginal é igual ao custo marginal. Isto é:

$$Rmg = \frac{P}{1+k} = Cmg$$

O parâmetro *k* depende da elasticidade preço de acordo com:

$$1+k = \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon|-1} \therefore k = \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon|-1} - 1 = \frac{1}{|\varepsilon|-1}$$

Tabela 4.1

$\lvert\varepsilon\rvert$	k
2	1 = 100%
3	½ = 50%
4	1/3 = 33%
5	¼ = 25%
.	
.	
.	
11	1/10 = 10%
.	
.	
.	
∞	0 = 0%

O preço do bem vendido por uma empresa que tem poder de mercado é, portanto, calculado adicionando-se ao custo marginal de produção uma margem que depende da elasticidade preço da quantidade demandada:

$$P = (1+k)\,Cmg$$

A empresa muda o preço do seu produto quando a margem muda ou quando o custo marginal de produção muda.

A Tabela 4.1 mostra como a margem varia com a elasticidade da quantidade demandada com relação ao preço. Quando o valor absoluto da elasticidade é igual a dois, a margem da empresa é igual a 100%. Quando o valor absoluto da elasticidade for três, a margem é de 50%. Portanto, a margem diminui quando a elasticidade aumenta, e no caso limite em que a elasticidade é infinita a margem é igual a zero, a empresa não tem poder de mercado e opera como uma empresa em concorrência perfeita.

Curva de Phillips: Inflação e Desemprego

O custo marginal de produção é igual ao custo adicional da mão de obra dividido pelo acréscimo de produção obtido. Isto é:

$$Cmg = \frac{W\ \Delta L}{\Delta y} = \frac{W}{\left(\Delta y / \Delta L\right)}$$

O custo marginal é, portanto, igual ao salário nominal dividido pela produtividade marginal do trabalho. O preço do bem produzido pela empresa é, então, igual a:

$$P = \left(1+k\right)\frac{W}{(\Delta y / \Delta L)} = \left(1+k\right)\frac{W}{Pmgl}$$

onde *Pmgl* é a produtividade marginal do trabalho. O preço é, então, afetado por três variáveis: i) a margem (k) da empresa; ii) a produtividade marginal do trabalho (*Pmgl)*; iii) o salário nominal (W) do trabalhador. Quando esta produtividade e a margem forem constantes a taxa de inflação é igual à taxa de variação dos salários nominais:

$$\pi = \frac{\overset{\circ}{P}}{P} = \frac{\overset{\circ}{W}}{W}$$

No mercado de mão-de-obra a taxa de variação dos salários nominais depende da taxa de inflação esperada e das condições do mercado de trabalho. Quando a taxa de desemprego (u) for maior (menor) do que a taxa de desemprego natural($\overline{u}$) os salários tendem a cair (subir). Isto é:

$$\frac{\overset{\circ}{W}}{W} = \pi^{e} - a\left(u - \overline{u}\right)$$

Esta curva de Phillips está representada na Figura 4.8. O eixo vertical mede a taxa de variação dos salários, enquanto o eixo horizontal mede a taxa de desemprego. No curto prazo existe uma relação de trocas entre desemprego e inflação. No longo prazo tal relação não existe, e a curva é vertical.

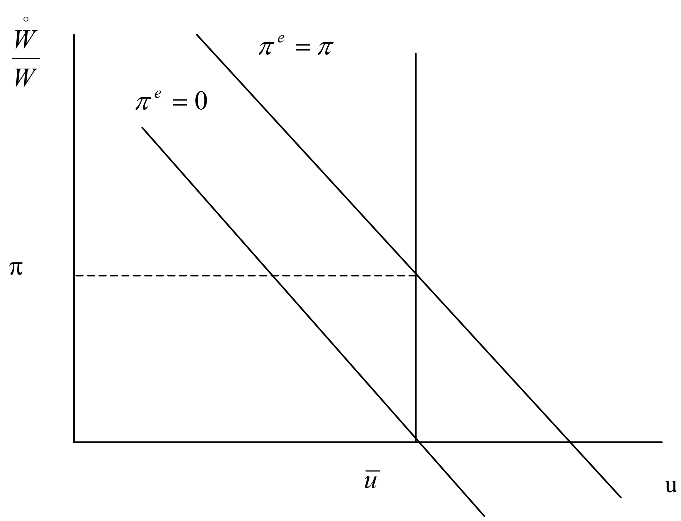


Figura 4.8

Na suposição de que a margem da empresa e a produtividade marginal do trabalho sejam constantes, a taxa de inflação e a taxa de crescimento dos salários são iguais. Logo, a curva de Phillips pode ser escrita como:

$$\pi = \pi^e - a(u - \overline{u})$$

A Figura 4.8 também representa esta curva de Phillips, desde que a taxa de inflação esteja medida no eixo vertical. No longo prazo, quando a taxa de inflação for igual à taxa de inflação antecipada, a taxa de desemprego será igual à taxa de desemprego natural.

Lei de Okun

A Lei de Okun relaciona o desvio da taxa de desemprego da taxa natural com a taxa de capacidade ociosa da economia. Ela estabelece que para cada um por cento de aumento da taxa de desemprego em relação à taxa de desemprego natural a capacidade ociosa da economia aumenta de b por cento, ou seja:

$$y - \overline{y} = -b\left(u - \overline{u}\right)$$

As estimativas do parâmetro b para a economia americana produzem valores entre dois e três. Isto significa dizer que para cada um por cento de desemprego, a capacidade ociosa desta economia aumentaria entre dois e três por cento. Este fato aparentemente não seria consistente com a lei dos rendimentos decrescentes. Todavia, quando a taxa de desemprego varia, a taxa de utilização das máquinas e equipamentos, o número de horas trabalhadas por trabalhador e a produtividade da mão de obra também variam. Com efeito, admita que o logaritmo do produto *(y)* seja uma média ponderada dos logaritmos dos serviços do capital *(k)* e da mão de obra *(a+h+n)*:

$$y = \alpha\, k + \left(1 - \alpha\right)\left(a + h + n\right)$$

onde α é a elasticidade do produto com relação ao capital, h é o logaritmo do número de horas trabalhadas, n o logaritmo do emprego, a o logaritmo do coeficiente que mede a eficiência da mão de obra. Esta função de produção supõe retornos de escala constante.

No pleno emprego, a função de produção transforma-se em:

$$\overline{y} = \alpha\, \overline{k} + \left(1 - \alpha\right)\left(\overline{a} + \overline{h} + n\right)$$

onde uma barra em cima da variável denota o valor da mesma quando a economia estiver em pleno emprego.

Subtraindo-se uma equação da outra, obtém-se:

$$y - \overline{y} = \alpha\left(k - \overline{k}\right) + \left(1 - \alpha\right)\left(a - \overline{a} + h - \overline{h} + n - \overline{n}\right)$$

O hiato do produto depende dos hiatos do capital, da produtividade da mão de obra, do número de horas trabalhadas e do emprego.

Admita que a oferta total de mão de obra seja dada por n^*. A taxa de desemprego é definida por $u=n^*-n$ e a taxa de desemprego natural, quando a economia estiver em pleno emprego, é igual a $\bar{u} = n^* - \bar{n}$. Portanto,

$$n - \bar{n} = -(u - \bar{u})$$

Admita, também, que os hiatos do capital, da produtividade da mão de obra e do número de horas trabalhadas estejam relacionados com o hiato do desemprego, de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} k - \bar{k} &= -\gamma(u - \bar{u}) \quad , \gamma > 0 \\ a - \bar{a} &= -\lambda(u - \bar{u}) \quad , \lambda > 0 \\ h - \bar{h} &= -\phi(u - \bar{u}) \quad , \phi > 0 \end{aligned}$$

Segue-se, então, que:

$$y - \bar{y} = -[\alpha\gamma + (1-\alpha)(\lambda + \phi + 1)](u - \bar{u})$$

O coeficiente b da lei de Okun depende, portanto, dos parâmetros α, γ, λ e ϕ. Isto é:

$$b = \alpha\gamma + (1-\alpha)(\lambda + \phi + 1)$$

Apesar da lei dos rendimentos decrescentes $(\alpha < 1)$ o parâmetro b pode ser maior do que um, dependendo dos valores dos demais coeficientes deste modelo.

Curva de Phillips: Inflação e Hiato do Produto

A curva de Phillips obtida substituindo-se o hiato entre a taxa de desemprego e a taxa de desemprego natural pela Lei de Okun resulta na seguinte expressão:

$$\frac{\overset{\circ}{W}}{W} = \pi^e + \frac{a}{b}(y - \bar{y})$$

Usando-se a hipótese de que a taxa de inflação é igual à taxa de variação dos salários obtém-se a curva de Phillips em que a taxa de inflação depende da taxa de inflação esperada e do hiato do produto ($y - \bar{y}$):

$$\pi = \pi^e + \varphi(y - \bar{y}) \quad , \quad \varphi = \frac{a}{b} > 0$$

No curto prazo existe uma relação de trocas entre inflação e hiato do produto, porém no longo prazo, quando a taxa de inflação for igual à taxa de inflação esperada, a curva de Phillips é vertical. A Figura 4.9 mostra o gráfico da curva de Phillips. No eixo vertical mede-se a taxa de inflação e no eixo horizontal o produto real. No curto prazo, para uma dada taxa de inflação esperada, a curva de Phillips é positivamente inclinada. No longo prazo ela é vertical.

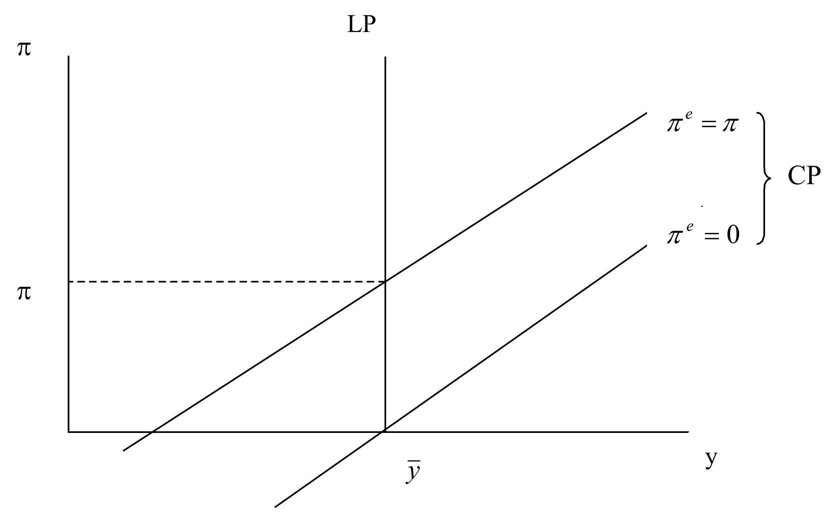


Figura 4.9

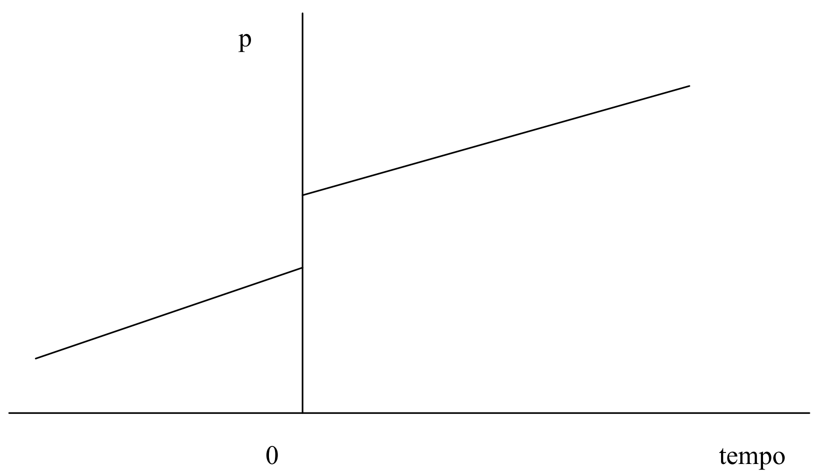


Figura 4.10: Preços Flexíveis

A curva de Phillips deduzida aqui pressupõe que o nível de preços é rígido no curto prazo. Isto significa dizer que o nível de preços é uma variável predeterminada no modelo, e não pode mudar instantaneamente de valor, como na Figura 4.10. Uma hipótese adicional é de que a taxa de inflação também seja rígida no curto prazo, isto é, que existe inércia da taxa de inflação, como na Figura 4.11, onde não ocorre mudança brusca na tangente da curva. Estas duas hipóteses pressupõem que tanto o nível de preços quanto a taxa de inflação, no momento inicial do modelo, são variáveis predeterminadas: $p(0) = \log P(0)$ e $\pi(0)$ são dados.

Admita-se, então, que a taxa de inflação esperada dependa da taxa de inflação passada de acordo com:

$$\pi_t^e = \pi(t-h)$$

onde h indica a memória relevante para o agente econômico. A curva de Phillips transforma-se, portanto, em:

$$\pi(t) = \pi(t-h) + \varphi(y_t - \bar{y}_t)$$

A taxa de inflação $\pi(t-h)$ não é conhecida. Seu valor pode ser substituído na expressão anterior fazendo-se uma expansão de Taylor em torno da inflação no ponto *t*. Isto é:

$$\pi(t-h) = \pi(t) + \dot{\pi}(t)[t-h-t]$$

ou então:

$$\pi(t-h) = \pi(t) - h\dot{\pi}(t)$$

Substituindo-se esta expressão na curva de Phillips obtém-se:

$$\pi(t) = \pi(t) - h\,\dot{\pi}(t) + \varphi(y_t - \bar{y}_t)$$

A taxa de inflação aparece dos dois lados e pode ser cancelada. A aceleração da inflação é função, portanto, do hiato do produto:

$$\overset{\circ}{\pi} = \frac{\varphi}{h}(y - \bar{y}) = \delta(y - \bar{y})$$

O coeficiente do hiato $\delta = \varphi / h$ depende da memória aqui representada pela letra *h*. Isto é, quanto maior a memória menor o coeficiente do hiato do produto. No limite, se a memória deixar de existir $\delta \to \infty$ e não há rigidez de preços. O sistema de preços é flexível e a economia estará sempre em pleno emprego.

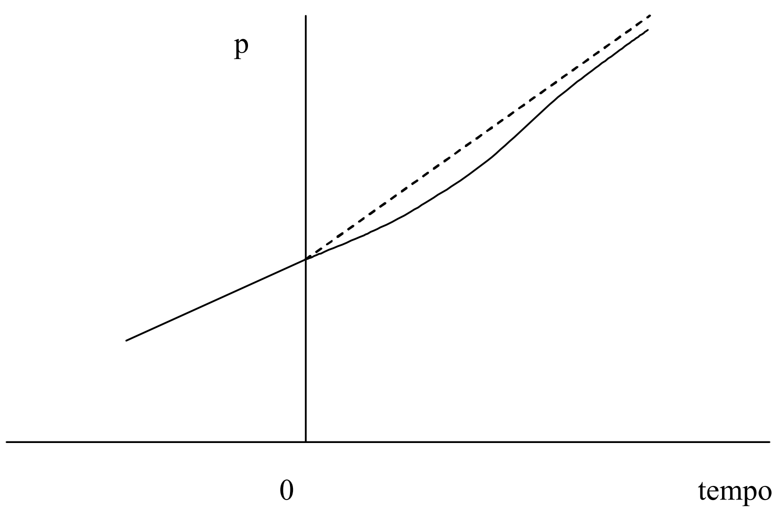


Figura 4.11: Rigidez de Preços e Inércia da Inflação

Outra hipótese quanto à rigidez no modelo é de que apenas o nível de preços seja rígido, como na Figura 4.12. A taxa de inflação não é rígida e pode mudar instantaneamente, como acontece quando *t=0* e a reta muda de inclinação no gráfico da

Figura 4.12. Isto significa dizer que o nível de preços, mas não a taxa de inflação, é uma variável predeterminada no modelo. Admita-se, portanto, que a taxa de inflação esperada seja igual à taxa de inflação futura,

$$\pi^e = \pi(t+h)$$

onde *h* indica o horizonte futuro relevante para o agente econômico. A curva de Phillips é, então, expressa por:

$$\pi(t) = \pi(t+h) + \varphi(y_t - \bar{y}_t)$$

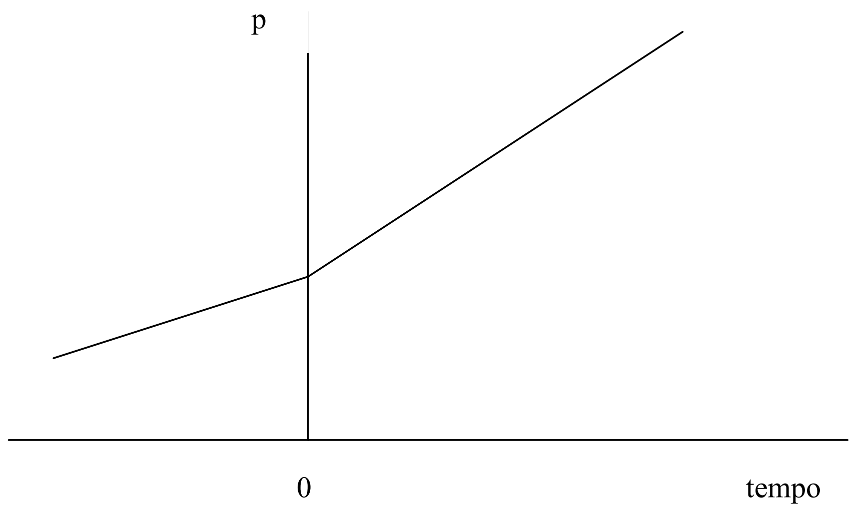


Figura 4.12: Rigidez de Preços e Inflação Flexível

A taxa de inflação futura não é conhecida. Este problema pode ser resolvido com uma expansão de Taylor em torno da taxa de inflação no ponto *t*, ou seja:

$$\pi(t+h) = \pi(t) + \dot{\pi}(t)[t+h-t]$$

Esta expressão quando simplificada transforma-se em:

$$\pi(t+h) = \pi(t) + \dot{\pi}(t)\; h$$

Levando-se esta equação na curva de Phillips obtém-se:

$$\pi(t) = \pi(t) + \dot{\pi}(t)\,h + \varphi(y - \bar{y})$$

Cancelando-se a taxa de inflação nos dois lados, a aceleração da inflação é negativamente relacionada com o hiato do produto:

$$\mathring{\pi} = -\frac{\varphi}{h}(y - \bar{y}) = -\delta(y - \bar{y})$$

Neste modelo os agentes são prospectivos, ou seja, olham para frente ao tomarem suas decisões. Na solução desta equação diferencial deve-se levar em conta que os limites da integral variam de hoje (t) até o futuro ($t+h$). Isto é:

$$\int_t^{t+h} d\pi = \int_t^{t+h} -\delta\left(y-\bar{y}\right) dv$$

A integral do lado esquerdo é a aceleração da taxa de inflação. Logo, tem-se que:

$$\pi\left(t+h\right)-\pi\left(t\right)=-\int_t^{t+h} \delta\left(y-\bar{y}\right) dv$$

A taxa de inflação hoje (t) depende da taxa de inflação futura ($t+h$) e da pressão de demanda entre hoje e o futuro:

$$\pi(t)=\pi(t+h)+\int_t^{t+h} \delta(y-\bar{y})\, dv$$

No modelo em que o agente olha para trás, ao tomar suas decisões, a solução da equação diferencial é dada por:

$$\int_{t-h}^{t} d\pi = \int_{t-h}^{t} \delta\left(y-\bar{y}\right) dv$$

Os limites da integral começam no passado ($t-h$) e se estendem até hoje (t). Logo, a taxa de inflação depende da taxa de inflação passada e da pressão de demanda entre o passado e hoje. Isto é:

$$\pi\left(t\right)=\pi\left(t-h\right)+\int_{t-h}^{t} \delta\left(y-\bar{y}\right) dv$$

A comparação das duas curvas de Phillips, uma prospectiva e outra retrospectiva, mostra que: i) os hiatos futuros do produto afetam a inflação presente no primeiro caso, e ii) os hiatos passados do produto afetam a taxa de inflação no presente, no segundo caso.

8. Curva de Phillips: Microfundamentos

Um modelo bastante usado para derivar a curva de Phillips supõe que o reajuste de preços por cada empresa não é sincronizado com o reajuste das demais empresas. Cada empresa reajusta seu preço de forma aleatória quando recebe um sinal. A probabilidade de receber o sinal neste período é igual a λ. Logo, a probabilidade do reajuste de preço ocorrer em j períodos é dada por:

$$P(X=j)=\lambda(1-\lambda)^{j-1},\ j=1,2,3,...$$

O tempo médio de reajuste dos preços das empresas é igual à esperança matemática da variável aleatória desta distribuição geométrica:

$$E\,X = \sum_{j=1}^{\infty} j\,P\,(\,X = j\,) = \sum_{j=1}^{\infty} j\,\lambda\,(\,1-\lambda\,)^{j-1} = \frac{1}{\lambda}$$

Quando $\lambda = 0,25$, por exemplo, e o período do modelo for um trimestre, o prazo médio de reajuste será de quatro trimestres (4=1/0.25).

O fato da empresa não reajustar seu preço a cada período acarreta uma perda para a mesma. Admita-se que o valor esperado desta perda quando a *iésima* empresa reajusta seu preço no período *t* seja dado por:

$$L = \frac{1}{2} E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j\,(\,p_{i,t} - p^*_{t+j}\,)^2$$

onde $p_{i,t}$ é o preço fixado pela empresa em *t*, p^*_{t+j} é o preço que ela praticaria no período *t+j* caso pudesse reajustar seu preço, $\beta = 1/(1+\rho)$ é o fator de desconto usado pela empresa.

O objetivo da empresa consiste em fixar o preço no período *t*, $p_{i,t}$,de tal forma que o valor esperado de L,

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} (\,1-\lambda\,)^j\,\beta^j\,E_t\,(\,p_{i,t} - p^*_{t+j}\,)^2$$

seja mínimo. Derivando-se parcialmente esta expressão com relação à $p_{i,t}$ e igualando-se o resultado a zero, obtém-se a condição de primeira ordem para um mínimo:

$$x_t = [\,1-\beta\,(\,1-\lambda\,)\,] \sum_{j=0}^{\infty} [\beta\,(\,1-\lambda\,)\,]^j\,E_t\;p^*_{t+j}$$

Denominou-se por *x* o preço das empresas que reajustam seus preços no período *t*, pois elas têm as mesmas características. Esta equação pode ser escrita como (ver exercício 13):

$$x_t = [\,1-\beta\,(1-\lambda)\,]\,p^*_t + \beta\,(1-\lambda)\,E_t\,x_{t+1}$$

O índice de preços da economia é definido pela média ponderada dos preços que foram reajustados no período *t* e daqueles que permaneceram iguais aos do período anterior. Isto é:

$$p_t = \lambda\;x_t + (\,1-\lambda\,)\,p_{t-1}$$

onde λ é a proporção das empresas que reajustaram seus preços no período *t*.

A curva de Phillips com estes microfundamentos, denominada de novo-keynesiana, é determinada, então, pelo modelo formado pelas duas equações:

$$x_t = [\,1 - \beta\,(1-\lambda)\,]\; p_t^* + \beta\,(1-\lambda)\; E_t\; x_{t+1}$$

$$p_t = \lambda\;\; x_t + (\,1-\lambda\,)\; p_{t-1}$$

Substituindo-se o valor de *x* da segunda equação na primeira obtém-se:

$$\frac{p_t - (\,1-\lambda)\; p_{t-1}}{\lambda} = [1-\beta(1-\lambda)]\; p_t^* + \beta(1-\lambda)\; E_t\; \frac{p_{t+1} - (1-\lambda)\; p_t}{\lambda}$$

Esta equação quando simplificada produz a curva de Phillips:

$$\pi_t = \beta\; E_t\; \pi_{t+1} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\,[\,1 - \beta\,(\,1-\lambda\,)\,]\,(\,p_t^* - p_t\,)$$

A taxa de inflação $\pi_t = p_t - p_{t-1}$ depende da previsão da taxa de inflação do período seguinte $E_t\; \pi_{t+1} = E_t\; p_{t+1} - p_t$ e da diferença entre o preço (p_t^*) que seria ótimo se não existisse rigidez e o nível de preço (p_t) atual da economia. O preço ótimo é igual a uma margem adicionada ao custo marginal:

$$p_t^* = k + cmg_t$$

Logo,

$$p_t^* - p_t = k + cmg_t - p_t = k + cmgr_t$$

onde $cmgr_t = cmg_t - p_t$ é o custo marginal real. A margem *k* é igual ao custo marginal real de longo prazo com o sinal trocado. Portanto,

$$p_t^* - p_t = cmgr - \overline{cmgr}$$

A expansão de Taylor do custo marginal real em torno do produto de pleno emprego é dada por:

$$cmgr_t = \overline{cmgr} + cmgr'\,(\,y_t - \bar{y}_t\,)$$

A curva de Phillips novo-keynesiana tem a seguinte expressão:

$$\pi_t = \beta\; E_t\; \pi_{t+1} + \delta\,(\,y_t - \bar{y}_t\,)$$

O parâmetro δ do hiato do produto é igual a: $\delta = cmgr'\,\lambda[\,1 - \beta\,(\,1-\lambda)\,]/(1-\lambda)$.

Nesta curva de Phillips o nível de preços é predeterminado, mas não existe inércia na taxa de inflação, pois ela não depende da inflação passada, mas sim da previsão da inflação no próximo período. Ademais, no longo prazo, quando a taxa de inflação e sua previsão forem iguais, existe uma relação de trocas entre inflação e produto,

$$y_t = \bar{y}_t + \frac{1-\beta}{\delta}\,\pi$$

Quando β for igual a um, ou o coeficiente δ tender para infinito, a taxa de inflação não afeta o produto real da economia no longo prazo. O fato de que β seja próximo de um não significa dizer que o ganho do produto, no longo prazo, com o aumento da taxa de inflação seja desprezível. Por exemplo, admita que β seja igual a 0,99 e δ igual a 0,2. Logo, $\beta/(1-\delta) = 0{,}05$. Isto é: $y = \bar{y} + 0{,}05\,\pi$. Uma inflação de 100% ($\pi = 1{,}0$) daria um ganho de 5% no produto real da economia.

A curva de Phillips novo-keynesiana foi deduzida a partir de um problema de otimização da empresa que minimiza o valor esperado das perdas em virtude de manter seu preço fixo por um determinado tempo. Em princípio ela estaria imune a crítica de Lucas porque seus parâmetros seriam independentes das regras de política econômica em vigor. Todavia, este não é o caso com o parâmetro λ que mede a probabilidade da empresa receber o sinal para reajustar seu preço. Esta formulação engenhosa de Calvo (1983) reproduz o fato estilizado da rigidez de preços, mas certamente é *ad hoc* porque não se baseia em microfundamentos.

A análise comparativa do modelo no qual a curva de Phillips depende da inflação passada com o modelo em que a curva de Phillips é função da inflação futura torna-se mais simples com o uso de variáveis contínuas ao invés de variáveis discretas como fizemos até aqui. A curva de Phillips nos dois casos pode ser escrita como:

$$\dot{\pi} = \delta\,(y - \bar{y})$$

Quando o parâmetro δ for positivo, o nível de preços e a taxa de inflação são variáveis predeterminadas. Neste caso, a aceleração da inflação e o hiato do produto estão correlacionados positivamente. Quando δ for negativo, o nível de preços é predeterminado, mas a taxa de inflação pode mudar instantaneamente. Nesta hipótese, deve-se observar uma correlação negativa entre a aceleração da inflação e o hiato do produto. Quando $\delta \to \infty$ os preços são flexíveis e o produto da economia é igual ao produto de pleno emprego.

9. Exercícios

1) Suponha que o investimento depende do nível de renda real, de acordo com:

$$i = i\left(r - \pi^e, y\right)$$

A curva IS é sempre negativamente inclinada?

2) Admita que o consumo *(c)* depende da renda disponível $\left(y^d\right)$, $c = c\left(y^d\right)$, e que a renda disponível é definida por $y^d = y - g$, onde y é a renda real e g os gastos do governo.
a) Por que você definiria a renda disponível desta maneira?
b) Redução de impostos, para um dado nível de *g*, afeta o dispêndio nesta economia?

3) Admita que o consumo dependa da renda disponível $\left(y^d = y - \tau\right)$ e da quantidade real de moeda $\left(m = M/P\right)$, $c = c\left(y - \tau, m\right)$.
a) A curva IS independe da política monetária?

b) A taxa de juros real de pleno emprego independe da política monetária?

4) Considere o seguinte modelo:

IS: $y = c(y - \tau) + i(r) + g$

LM: $\frac{M}{P} = L(y, r)$

RPM: $r = \bar{r}$

Quando o banco central fixa a taxa de juros da economia, de acordo com a regra de política monetária, o nível de preços desta economia é determinado?

5) Admita-se que a função utilidade seja dada por:

$$u(c_t) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha c} \quad , \alpha > 0$$

a) Qual a interpretação do parâmetro α?
b) Use a equação de Euler para deduzir a equação da curva IS associada a esta função utilidade.

6) A utilidade marginal do consumo no período *t+1* pode ser escrita em função da utilidade marginal do período *t*, da derivada da utilidade marginal do período *t* e da diferença entre o consumo amanhã e consumo hoje, de acordo com a seguinte expansão de Taylor,

$$u'(c_{t+1}) \cong u'(c_t) + u''(c_t)(c_{t+1} - c_t)$$

Nesta expansão desprezam-se os termos de segunda ordem. Mostre que a equação de Euler com variáveis contínuas é dada por:

$$\dot{c} = -\frac{c\, u'(c)}{u''(c)} (\rho - \delta)$$

7) A função utilidade do consumidor é dada por:

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

Deduza a equação de demanda de moeda quando a função utilidade da moeda for especificada por:

a) $v(m) = \frac{m^{1-\lambda} - 1}{1 - \lambda}$, $\lambda \neq 1$ e $v(m) = \log m$, $\lambda = 1$;

b) $v(m) = m(\alpha - \beta \log m)$, $\beta > 0$

8) Quando a incerteza é introduzida no modelo de custo de transação o banco resolve o seguinte problema:

$$\min_t \{ E [r R + c (t , T)\}$$

a) Mostre que a condição de primeira ordem deste problema implica na seguinte razão de giro:

$$t^* = \left(\frac{K}{\alpha E T^{\delta}} \right)^{\gamma}$$

onde $K=E\{r\ T\}$ e $\gamma = 1 / (1 + \beta)$.

b) Admita-se, por simplicidade, que T tem uma distribuição lognormal. Quando X é normal sabe-se que:

$$E \exp(\tau X) = \exp (\mu \tau + 1/2\, \sigma^2 \tau^2)$$

Mostre que esta expressão pode ser usada para calcular a esperança matemática de T^{δ}: $E\, T^{\delta} = E \exp (\delta \log T)$, e obter-se:

$$\log t = \gamma \log \frac{K}{\alpha} - \gamma\, \delta\, E \log T - \frac{1}{2} \gamma\, \delta^2\, Var \log T$$

onde o símbolo *Var* representa a variância.

c) Neste modelo a volatilidade dos pagamentos (T) afeta a razão de giro?

9) Considere o seguinte modelo:

Demanda agregada: $m+v= p+y$

Oferta agregada: $p = p^e + \delta \left(y - \bar{y} \right)$

onde m = estoque nominal de moeda; v = velocidade renda da moeda; y= renda real; p = índice de preços; p^e = previsão do índice de preços (todas variáveis em logs).

Admitindo-se expectativas racionais, qual seria o valor previsto do índice de preços?

10) A velocidade-renda da moeda é definida pela razão entre o produto nominal e o estoque nominal de moeda. Isto é:

$$V = \frac{Y}{M} = \frac{P\, y}{M}$$

a) Quando a elasticidade-renda da moeda é igual a um, a velocidade depende do produto real?

b) A taxa de juros afeta a velocidade?

c) Defina $k=1/V$. Qual a unidade de k?

11) O antigo Banco Central da Alemanha (Bundesbank) fazia sua programação monetária baseado na identidade:

$$M\,V \equiv P\,y$$

Admita que o produto potencial da economia alemã crescesse a uma taxa anual de 2,5%. O objetivo do Bundesbank era uma inflação de 2.5% ao ano.
a) Qual a informação que o Bundesbank necessitava para calcular a taxa de crescimento do M correspondente?
b) Como você faria para obtê-la?
c) Admita que a velocidade-renda é instável. Você adotaria esta metodologia?

12) Admita que a demanda de moeda tenha uma elasticidade com relação à taxa de juros igual a menos infinito (armadilha da liquidez).
a) Mostre, através da identidade, $M\,V \equiv P\,y$ porque a política monetária não afeta o produto da economia.
b) Alega-se que a armadilha da liquidez é uma hipótese razoável quando a taxa de juros nominal aproxima-se de zero. Outros afirmam que nestas circunstâncias a elasticidade deve ser igual a zero. Como esta questão poderia ser dirimida?

13) Certo, Errado ou Talvez. Justifique a sua resposta.
a) O multiplicador de orçamento equilibrado (aumento dos gastos do governo = aumento dos impostos) é igual à zero.
b) A taxa de inflação, no curto prazo, depende apenas da política monetária.
c) Quando a política monetária é expansionista, a liquidez real da economia diminui.
d) A inércia da inflação aumenta o custo social de combater a inflação.
e) A taxa de juros real independe do déficit público, no caso de equivalência ricardiana.
f) O aumento dos gastos do governo aumenta o produto real da economia, tanto no curto como no longo prazo.

14) Suponha que um modelo econômico pode ser apresentado pela seguinte equação de diferenças finitas:

$$y_t = \alpha\, E\left(y_{t+1} / I_t\right) + \beta\, x_t\,, |\alpha| < 1$$

Mostre como obter a solução de fundamentos e de bolha deste modelo. e aplique este método nos seguintes casos:
a) Arbitragem entre renda fixa e renda variável (sem risco):

$$\frac{E\left(p_{t+1} / I_t\right) - p_t + d_t}{p_t} = r$$

b) Determinação do nível de preços no modelo de demanda de moeda de Cagan:

$$m_t - p_t = -\gamma\left[E\left(p_{t+1} / I_t\right) - p_t\right]$$

15) Considere o seguinte modelo:

IS: $y = -\alpha\, r + u$
LM: $m = -\beta\, r + \gamma\, y + v$

onde u e v são variáveis aleatórias, não correlacionadas, com médias iguais a zero e variâncias σ_u^2 e σ_v^2, respectivamente. A função de perda do banco central é dada por:

$$L = y^2$$

O banco central pode escolher como instrumento de política a taxa de juros *(r)* ou a quantidade de moeda (*m*).
a) Qual o valor de *m* que minimiza o valor esperado da função de perda?
b) Qual o valor de *r* que minimiza o valor esperado da função de perda?
c) Qual instrumento o banco central deve escolher?

16) O nível de preços p_t é uma média ponderada do preço x_t e do preço no período *t-1*, de acordo com:

$$p_t = \lambda\, x_t + (1-\lambda)\, p_{t-1}$$

a) Mostre através de substituição recursiva (para trás) que:

$$p_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda\,(1-\lambda)^i\, x_{t-i}$$

b) Resolva o mesmo exercício usando o operador de defasagem *L*, $L\, z_t = z_{t-1}$, e a propriedade $\frac{1}{1-a\,L} = 1 + aL + a^2\, L^2 + \ldots.$.

17) O preço ótimo x_t depende do preço p_t^* e da esperança matemática $E_t\, x_{t+1}$, de acordo com:

$$x_t = [\,1-\beta\,(1-\lambda)]\; p_t^* + \beta\,(1-\lambda)\; E_t\; x_{t+1}$$

a) Mostre através de substituição recursiva (para frente) que:

$$x_t = [1-\beta\,(1-\lambda)] \sum_{j=0}^{\infty} [\,\beta\,(1-\lambda)]^j\; E_t\; p_{t+j}^*$$

b) Resolva o mesmo exercício usando o operador de avanço *F*, $F\, z_t = z_{t+1}$, e a propriedade

$$.\frac{1}{1-a\,F} = 1 + aF + a^2\, F^2 + \ldots..$$

18) Considere a seguinte curva de Phillips:

$$\pi_t - \pi^* = \beta\,(\,E_t\;\pi_{t+1} - \pi^*\,) + \delta\,(\,y_t - \bar{y}_t)$$

onde π^* é a inflação de longo prazo. Esta curva é vertical no longo prazo?

19) Cada empresa determina o preço do seu produto, mas só o faz quando recebe um sinal aleatório com distribuição exponencial. Isto é, a probabilidade de que o sinal seja recebido em *h* períodos a partir de hoje é dada por:

$$\delta\, e^{-\delta h}, \delta > 0$$

O (logaritmo do) preço fixado pela empresa em *t,* quando ela recebe o sinal, é expresso por:

$$v_t = \int_t^{\infty} \left(p_s + \alpha\, x_s\right) \delta\, e^{-\delta(s-t)} ds,\ \alpha > 0$$

onde p_s é o nível de preços e x_s o excesso de demanda, ambos no período *s.*

O (logaritmo do) nível de preços (*p*) é definido pela fórmula:

$$p_t = \int_{-\infty}^{t} v_s\ \delta\, e^{-\delta(t-s)} ds$$

a) Mostre que a média da variável aleatória H é dada por: $EH=1/\delta$.
b) Explicite os argumentos que justificam as expressões de $v_t\ e\ p_t$.
c) Derive $v_t\ e\ p_t$ com relação ao tempo, aplicando a regra de Leibnitz, e mostre que:

$$\dot{v} = \delta\left(v - p - \alpha\, x\right)$$
$$\pi = \dot{p} = \delta\left(v - p\right)$$

d) Derive π com relação ao tempo e mostre que:

$$\dot{\pi} = -\alpha\, \delta^2\, x$$

e) Suponha que v_t seja dado por:

$$v_t = \int_t^{\infty} e^{-\rho(s-t)}\left(p_s + \alpha x_s\right)\delta\, e^{-\delta(s-t)} ds,\ \alpha > 0$$

onde ρ é a taxa de desconto. Mostre que:

$$\dot{\pi} = \rho\,\delta\, p + \rho\,\pi - \alpha\ \delta^2 x$$

f) A curva de Phillips do item anterior é vertical no longo prazo?

20) No modelo da curva de Phillips,

$$\pi = \pi^e + \delta\ (y - \bar{y})$$

admita que a taxa de inflação esperada segue o mecanismo de expectativa adaptativa:

$$\dot{\pi}^e = \beta\ (\pi - \pi^e)$$

Mostre que a aceleração da taxa de inflação é dada por:

$$\dot{\pi} = \beta\ \delta\ (y - \bar{y}) + \delta\ \dot{y}$$

supondo-se que a taxa de crescimento do produto potencial é igual a zero: $\dot{\bar{y}} = 0$.

Capítulo 5

Flutuação Econômica e Estabilização

Este capítulo apresenta o equilíbrio e a dinâmica de quatro modelos com preços rígidos. O primeiro tem uma curva IS, uma curva de Phillips, uma regra de política monetária de Taylor, e existe inércia da taxa de inflação. O segundo modelo tem as mesmas equações do primeiro, mas não existe inércia na taxa de inflação. O terceiro é o modelo novo-keynesiano, sem inércia da taxa de inflação, com curva IS derivada da equação de Euler e curva de Phillips à la Calvo. No quarto modelo, o banco central controla a taxa de crescimento da moeda, de acordo com a regra de Friedman, e existe inércia tanto do nível de preços como da taxa de inflação. Embora esta regra não seja adotada por nenhum banco central do mundo, o modelo tem algumas propriedades que o torna atrativo do ponto de vista didático.

1. Modelo Keynesiano: Regra de Taxa de Juros e Inércia da Inflação

O modelo de rigidez de preços, inércia na inflação e regra de taxa de juros é formado por três equações, uma curva IS, uma curva de Phillips (CP) e a regra de Taylor de política monetária (RPM). A hipótese simplificadora é de que na política fiscal o déficit público e o gasto do governo são constantes, e iguais aos níveis de pleno emprego. O modelo tem a seguinte especificação:

IS: $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(f - \bar{f}) + g - \bar{g}$

CP: $\overset{\circ}{\pi} = \delta(y - \bar{y})$

RPM: $r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Hipótese simplificadora: $f = \bar{f},\ g = \bar{g}$

O símbolo CI representa as condições iniciais do modelo. Os parâmetros são positivos, exceto o parâmetro do hiato da inflação na regra de política monetária que tanto pode ser positivo como negativo, dependendo do comportamento do banco central.

Álgebra

A equação da regra de política monetária permite escrever a diferença entre a taxa de juros real e a taxa natural como função dos hiatos da inflação e do produto:

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$$

Substituindo-se esta expressão na curva IS, o hiato do produto depende do hiato da inflação de acordo com:

$$y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi})$$

Sistema Dinâmico

O modelo resume-se, então, a duas equações, a curva de Phillips e a equação de demanda agregada que resulta da combinação da regra de política monetária com a curva IS:

$$\begin{cases} \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) \\ \pi = \bar{\pi} - \dfrac{(1 + \alpha\theta)}{\alpha\phi}(y - \bar{y}) \end{cases}$$

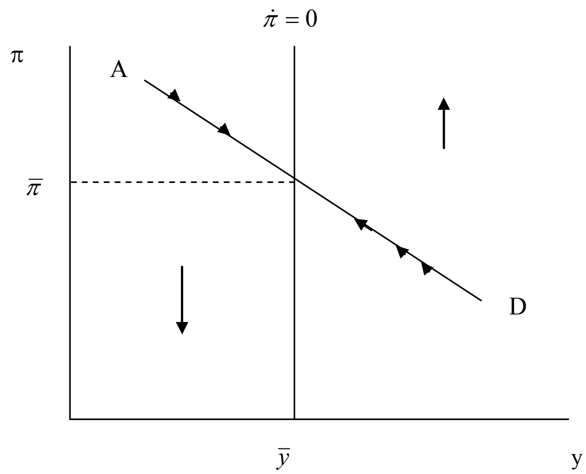


Figura 5.1. $\phi > 0$

A Figura 5.1 mostra o diagrama de fases do modelo. No eixo horizontal mede-se o produto real e no eixo vertical a taxa de inflação. Na curva de Phillips quando a aceleração da inflação é nula, o produto é igual ao produto potencial. Se o produto real da economia for maior do que o produto potencial a inflação aumenta, e se for menor a inflação diminui. As setas da Figura 5.1 indicam justamente esta dinâmica. A equação que resulta da combinação da regra de política monetária com a curva IS é negativamente inclinada quando o parâmetro ϕ for positivo. Neste caso, o modelo é estável porque se a economia estiver em qualquer ponto fora do equilíbrio de longo prazo, a trajetória da mesma será em direção ao ponto de equilíbrio, como indicado nas setas da Figura 5.1.

A Figura 5.2 mostra o diagrama do modelo quando o parâmetro ϕ da regra de política monetária for negativo. Nesta hipótese a equação que resulta da combinação da regra de política monetária com a curva IS é positivamente inclinada. O diagrama de fases da curva de Phillips continua sendo o mesmo do caso anterior. Logo, o modelo é instável porque se a economia estiver fora do equilíbrio de longo prazo, ela não converge para este equilíbrio. O ponto de equilíbrio do modelo, na linguagem dos sistemas dinâmicos, é um repulsor e não um atrator como no caso anterior. A instabilidade deste modelo prende-se ao fato de que o banco central não responde de forma adequada quando ocorre um desvio da taxa de inflação com relação à meta de inflação. Para cada um por cento de desvio da taxa de inflação com relação à meta, a taxa de juros nominal aumenta de um valor inferior a um por cento. Este tipo de resposta do banco central faz com que a taxa de juros real da economia fique abaixo da taxa de juros real de longo prazo, produzindo aquecimento da economia e acarretando aumento da taxa de inflação.

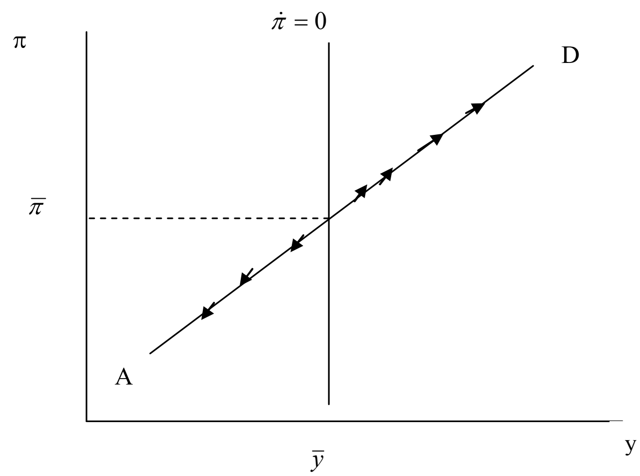


Figura 5.2 $\phi < 0$

Experimento

A Figura 5.3 descreve um experimento de política monetária, no qual o banco central, sem anúncio prévio, reduz a meta de inflação, de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1$.

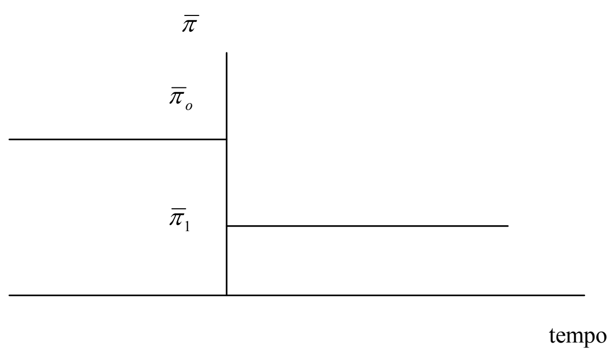


Figura 5.3 Experimento: Mudança da Meta de Inflação

Este experimento será analisado para o caso do modelo estável, isto é, quando o parâmetro ϕ for positivo. O diagrama de fases da Figura 5.4 é idêntico ao diagrama da Figura 5.2. O novo ponto de equilíbrio de longo prazo do modelo é determinado pela interseção da ordenada da nova meta de inflação com a abscissa do produto real de pleno emprego. O equilíbrio inicial do modelo é representado pelo ponto E_0. A taxa de inflação neste modelo é inercial, o que significa dizer que ela não muda instantaneamente. No momento da mudança da meta, a taxa de inflação continua igual à antiga meta, o produto real da economia cai em virtude do aumento da taxa de juros nominal pelo banco central. A economia entra em recessão, a taxa de inflação começa a cair, e a economia segue uma trajetória de convergência para o novo equilíbrio de longo prazo, como indicado pelas setas da Figura 5.4.

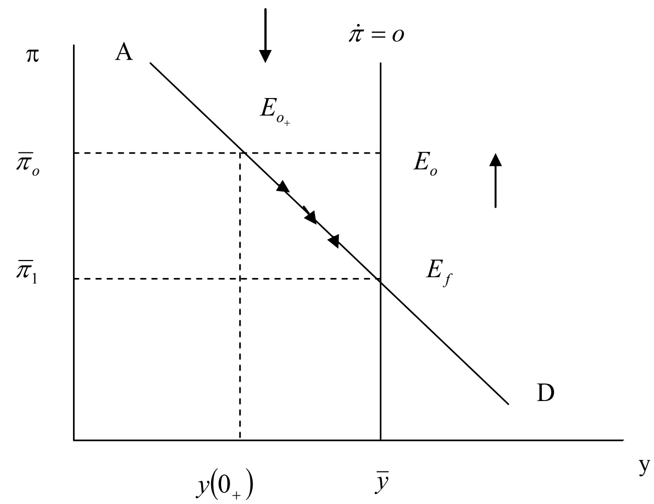


Figura 5.4

Choque de Demanda

A regra de política monetária, de fixação da taxa de juros, supõe que o banco central conhece, a cada momento do tempo, a taxa de juros real de longo prazo da economia (a taxa natural). Nem sempre este é o caso. Quando ocorre um choque de demanda, seja por mudanças no comportamento do setor privado ou na política fiscal, a taxa de juros natural muda.

Admita-se que a taxa de juros real de longo prazo na fórmula usada pelo banco central não seja sempre igual à taxa de juros natural da economia. Isto é:

$$r = \overline{\rho}^{BC} + \pi + \phi(\pi - \overline{\pi}) + \phi(y - \bar{y})$$

A curva de demanda agregada da economia, obtida substituindo-se a taxa de juros da regra de política monetária na curva IS, é dada por:

$$\pi = \overline{\pi} - \frac{(1 + \alpha\,\theta)}{\alpha\,\phi}(y - \bar{y}) + \frac{1}{\phi}\left(\overline{\rho} - \overline{\rho}^{BC}\right)$$

Quando $\overline{\rho} = \overline{\rho}^{BC}$ obtém-se a curva de demanda agregada que está desenhada na Figura 5.4.

Suponha que ocorra um choque de demanda positivo, que faça com que $\overline{\rho} > \overline{\rho}^{BC}$. A Figura 5.5 mostra as conseqüências deste choque de demanda. A curva de demanda agregada desloca-se de A_oD_o para A_1D_1. Em virtude da inércia da taxa de inflação, a taxa de inflação no momento do choque não se altera, mas o produto real aumenta. O aumento do produto real provoca o aumento da taxa de inflação. O equilíbrio de longo prazo da economia ocorrerá com uma taxa de inflação mais elevada, acima da meta de inflação fixada pelo banco central.

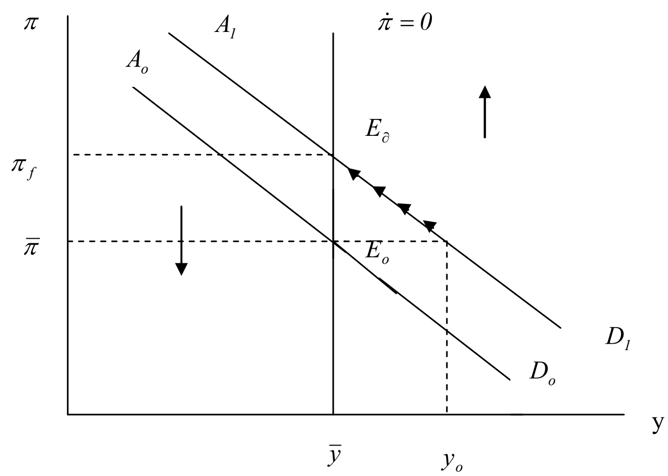


Figura 5.5

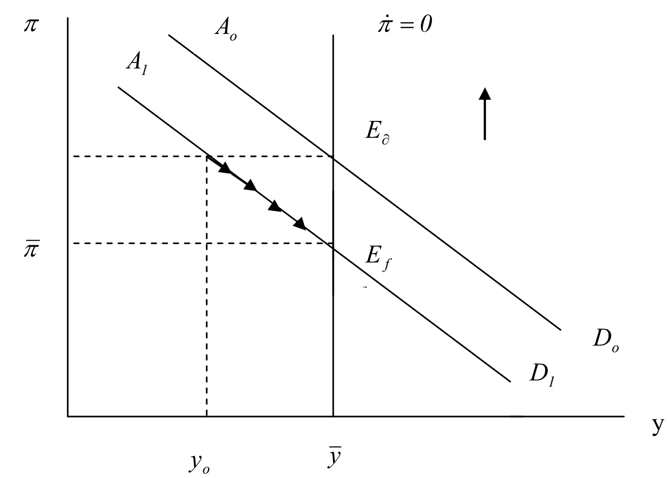


Figura 5.6

A Figura 5.6 mostra a dinâmica da economia quando ocorre um choque de demanda negativo $\left(\bar{\rho} < \bar{\rho}^{BC}\right)$ e o banco central não ajusta a taxa de juros nominal de acordo com a nova taxa de juros natural. O produto real tem uma queda, fica abaixo do produto potencial da economia. A taxa de inflação começa, então, a diminuir, convergindo para o novo equilíbrio de longo prazo, com a taxa de inflação abaixo da meta fixada pelo banco central.

A conclusão que se chega é de que o banco central deve anular completamente os choques de demanda para manter a economia em equilíbrio de pleno emprego e com inflação igual à meta por ele estabelecida. Na prática, esta não é uma tarefa tão simples, pois supõe que o banco central conhece a taxa de juros natural a cada momento do tempo.

Choque de Oferta

Os choques de oferta podem ser representados como mudanças do produto potencial da economia. A Figura 5.7 supõe um choque de oferta negativo, com uma redução do produto potencial. Este choque reduz o produto real, mas aumenta a taxa de inflação, um processo conhecido como estagflação, uma combinação de estagnação com inflação. A economia converge para uma taxa de inflação mais elevada, acima da meta de inflação do banco central. Caso o choque de oferta seja permanente, o banco central terá de aumentar a taxa de juros para que a economia volte para a antiga meta de inflação. Caso contrário, isto não ocorrerá.

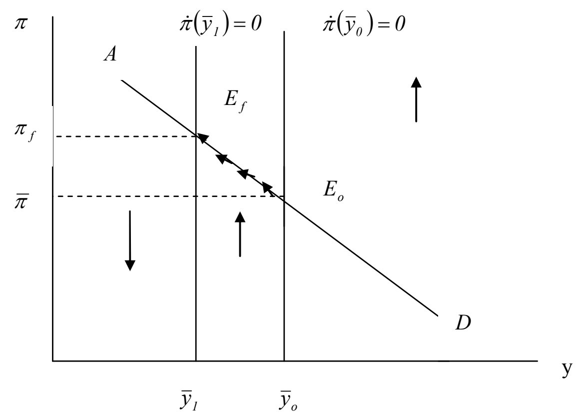


Figura 5.7

A Figura 5.8 mostra a dinâmica de um choque de oferta favorável, com o aumento do produto potencial da economia. Este choque acarreta o aumento do produto real e a redução da taxa de inflação. Esta converge para uma taxa abaixo da meta de inflação. Neste caso, o banco central teria que reduzir a taxa de juros nominal para que a economia voltasse à antiga meta de inflação.

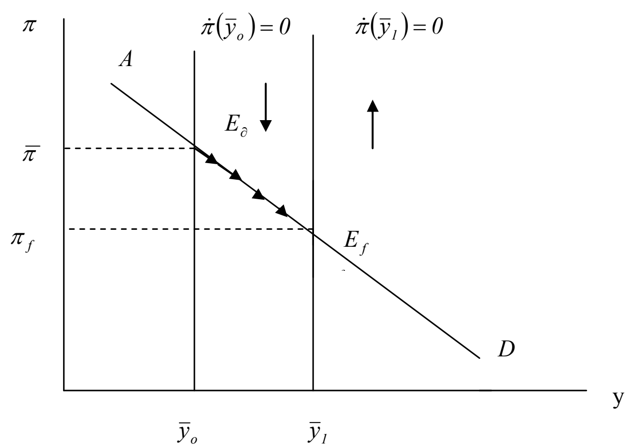


Figura 5.8

Coordenação das Políticas Monetária e Fiscal

Considere um modelo de curto prazo especificado por uma curva IS, uma curva de Phillips (CP) e duas regras de política econômica, uma monetária (RPM) e outra fiscal (RPF). Isto é:

$$\text{RPM:} \quad r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta\,(y - \bar{y}), \phi > 0, \theta > 0$$
$$\text{RPF:} \quad f - \bar{f} = -\varphi(y - \bar{y}),\ \varphi > 0$$

A regra de política monetária é a regra de Taylor. A regra de política fiscal é uma regra anticíclica. Quando o produto estiver acima do produto de pleno emprego, o produto potencial, o déficit público será menor do que o déficit de pleno emprego $(\bar{f})$, o déficit estrutural. Por outro lado, quando a economia estiver em recessão, com o produto menor do que o produto potencial, o déficit público será maior do que o déficit estrutural. O hiato da taxa de juros real da RPM e o hiato do déficit público da RPF podem ser substituídos na curva IS. Isto é:

$$y - \bar{y} = -\alpha\phi\,(\pi - \bar{\pi}) - \alpha\,\theta(y - \bar{y}) - \beta\,\varphi(y - \bar{y})$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$\pi = \bar{\pi} - \left(\frac{1 + \alpha\theta + \beta\varphi}{\alpha\phi}\right)(y - \bar{y})$$

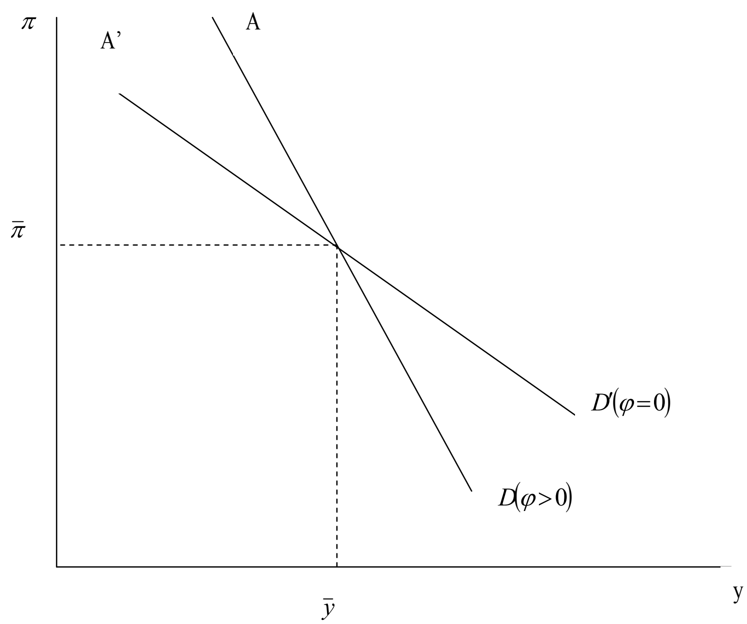


Figura 5.9

A Figura 5.9 mostra o gráfico desta equação. Quando não houver regra de política fiscal, o parâmetro φ é igual a zero. Neste caso, a curva está representada na Figura 5.9 pelas letras A'D'. Quando houver política fiscal anticíclica, $\varphi > 0$, a curva está representada pelas letras AD. Observe que a existência de política fiscal anticíclica torna a curva AD mais inclinada, com um coeficiente angular maior do aquele quando inexiste política fiscal anticíclica.

Experimento

Considere um experimento de política monetária, no qual o banco central reduz a meta de inflação de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1$, como indicado na Figura 5.10.

A Figura 5.11 descreve o processo de ajustamento dinâmico da economia. O novo equilíbrio da economia será dado pelo ponto E_f. O ponto de equilíbrio inicial é E_o. Admita-se que haja inércia da taxa de inflação, isto é, a taxa de inflação não muda de valor instantaneamente (em inglês diz-se que a taxa de inflação não é uma variável de jump). Quando existe política fiscal anticíclica, a economia no momento da subida da taxa de juros nominal pelo banco central sofre uma queda do produto real, passando do ponto E_o para o ponto G. Daí em diante, a economia converge para o pleno emprego, na trajetória GE_f indicada pelas setas.

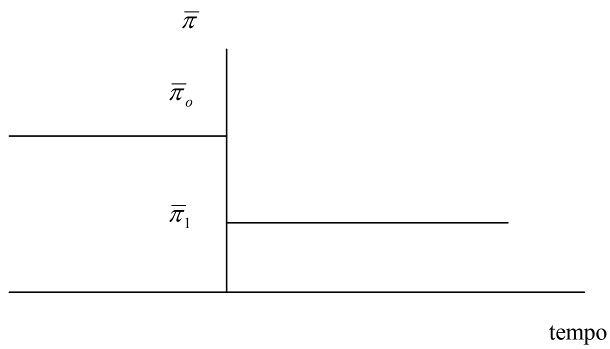


Figura 5.10

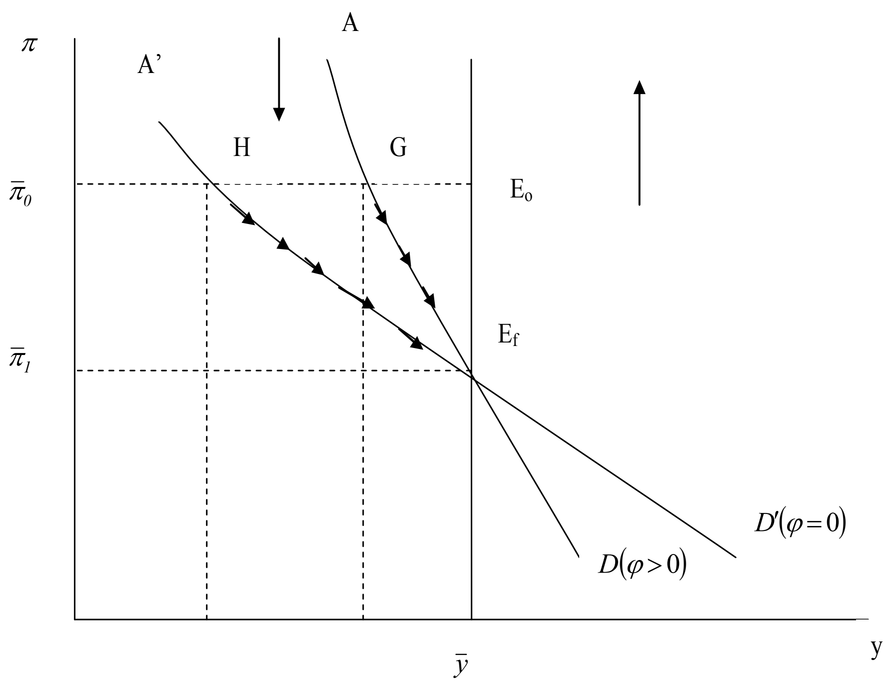


Figura 5.11

Quando não existe coordenação das políticas monetária e fiscal, o coeficiente φ da regra de política fiscal é igual a zero, que corresponde à curva *A'D'* da Figura 5.11. Neste caso, no momento da mudança da taxa de juros nominal, em virtude da inércia da taxa de juros, o produto real da economia diminui porque a economia passa do ponto E_o

para o ponto H. A economia percorre a trajetória de convergência HE_f, até chegar ao pleno emprego e a nova meta de inflação.

A Figura 5.11 permite uma visualização simples do benefício da regra de política fiscal: a perda de produto é bem menor quando há uma regra de política fiscal. O pior cenário seria de uma regra de política fiscal procíclica. Nestas circunstâncias, em algum momento, o Banco Central e o Tesouro estariam remando em direções opostas.

2. Modelo Keynesiano: Regra de Taxa de Juros sem Inércia da Inflação

O modelo de rigidez de preços, sem inércia da taxa de inflação e regra de taxa de juros tem três equações, a curva IS, a curva de Phillips e a regra de Taylor. A especificação da curva de Phillips supõe que o nível de preços é rígido, mas que a taxa de inflação pode mudar de valor instantaneamente, ou seja, não há inércia da taxa de inflação, mas o nível de preços é uma variável predeterminada. As três equações e a condição inicial do modelo são as seguintes:

IS: $y-\bar{y}=-\alpha\left(\rho-\bar{\rho}\right)$

CP: $\dot{\pi}=-\delta\left(y-\bar{y}\right)$

RPM: $r=\bar{\rho}+\pi+\phi\left(\pi-\bar{\pi}\right)+\theta\left(y-\bar{y}\right)$

CI: Dado *p(0)*

Sistema Dinâmico

O modelo pode ser reduzido a duas equações desde que se substitua a diferença entre a taxa de juros real de curto e de longo prazo da regra de política monetária na equação da curva IS. As duas equações do modelo são:

$$\begin{cases} \dot{\pi}=-\delta\left(y-\bar{y}\right) \\ \pi=\bar{\pi}-\dfrac{\left(1+\alpha\theta\right)}{\alpha\phi}\left(y-\bar{y}\right) \end{cases}$$

A Figura 5.12 contém o diagrama de fases do modelo. No eixo vertical mede-se a taxa de inflação e no eixo horizontal o produto real. No longo prazo quando a inflação for constante ($\dot{\pi}=0$) o produto real da economia é igual ao produto potencial. Quando o produto real estiver acima do produto potencial a aceleração da inflação é negativa, e no caso contrário a aceleração da inflação é positiva, como indicado nas setas desta figura. A curva de demanda agregada é negativamente inclinada e para um produto igual ao produto potencial, a taxa de inflação é igual à meta de inflação do banco central.

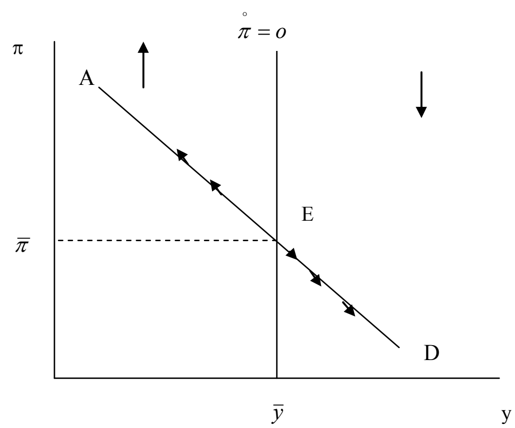


Figura 5.12

A Figura 5.12 mostra que este modelo é instável porque se a economia estiver fora do equilíbrio de longo prazo ela não retorna ao mesmo. Como funcionaria a dinâmica desta economia caso o banco central reduzisse a meta de inflação de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1$ como no experimento descrito na Figura 5.3? A Figura 5.13 responde esta questão, mostrando que a taxa de inflação se ajustaria imediatamente para a nova meta, e o produto real continuaria igual ao produto potencial. A desinflação seria indolor, pois não há recessão como no modelo da primeira seção deste capítulo, aonde existe inércia da taxa de inflação.

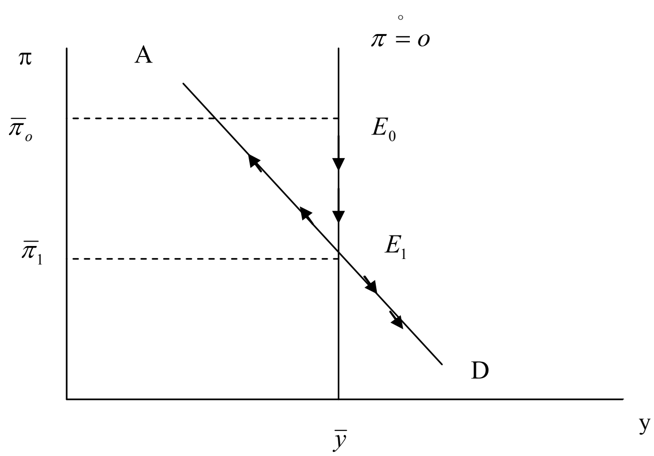


Figura 5.13

3. Modelo Novo-Keynesiano

O modelo novo-keynesiano foi desenvolvido para substituir o modelo tradicional das curvas IS e de Phillips. O principal argumento para justificar sua especificação é de que ele consiste numa aproximação linear, em logaritmos, de um modelo deduzido a partir de microfundamentos. Este modelo seria, portanto, imune à famosa crítica de

Lucas, de que os parâmetros dos modelos tradicionais, sem microfundamentos, não são invariantes as regras de política econômica.

O modelo novo-keynesiano é, então, especificado por uma curva de Phillips, uma curva IS, e uma regra de política monetária. A curva de Phillips em tempo contínuo é dada por,

$$\dot{\pi} = -\delta\,(y - \bar{y})\ ,\quad \delta > 0$$

Nesta curva inexiste uma relação de trocas de longo prazo entre inflação (π) e o hiato do produto ($y - \bar{y}$), com y medindo o logaritmo do produto real e $\bar{y}$ o logaritmo do produto potencial. O nível de preços é predeterminado e os reajustes dos preços não são sincronizados, com uma pequena proporção das empresas reajustando seus preços a cada momento.

A curva IS deduzida a partir da equação de Euler, da otimização intertemporal do consumidor, supõe que a aceleração do produto real depende da diferença entre a taxa de juros real ($r - \pi$) e a taxa de juros real de longo prazo ($\bar{\rho}$). Isto é:

$$\dot{y} = \sigma\,(r - \pi - \bar{\rho})\ ,\ \sigma > 0$$

onde σ é a elasticidade de substituição do consumo.

A regra de política monetária estabelece que a taxa de juros nominal seja fixada levando-se em conta a taxa de juros real de longo prazo, a taxa de inflação, o hiato da inflação medido pela diferença entre a taxa de inflação e a meta de inflação do banco central, e o hiato do produto, de acordo com,

$$r = \bar{\rho} + \pi + \phi\,(\pi - \bar{\pi}) + \theta\,(y - \bar{y})$$

O parâmetro ϕ mede a resposta da taxa de juros nominal a uma variação da taxa de inflação. Na regra de Taylor este parâmetro é positivo, pois a taxa de juros nominal aumenta mais do que a variação da taxa de inflação. Quando este parâmetro for negativo, a reação do banco central ao mudar a taxa de juros nominal é menor do que a variação da inflação. O sinal do parâmetro ϕ influencia a estabilidade do modelo, como já foi visto no modelo da seção anterior, e será mostrado logo adiante para o modelo desta seção.

O modelo novo-keynesiano é, então, especificado por três equações e a condição inicial de que o nível de preços é dado. Isto é:

IS: $\dot{y} = \sigma\,(r - \pi - \bar{\rho})\ ,\ \sigma > 0$

CP: $\dot{\pi} = -\delta\,(y - \bar{y})\ ,\quad \delta > 0$

RPM: $r = \bar{\rho} + \pi + \phi\,(\pi - \bar{\pi}) + \theta\,(y - \bar{y})$

CI: Dado *p(0)*

Álgebra

Substituindo-se a regra de política monetária na curva IS resulta na equação diferencial do produto real:

$$\dot{y} = \sigma\,\phi\,(\,\pi - \overline{\pi}\,) + \sigma\,\theta\,(y - \overline{y})$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico é formado por esta equação e pela equação da aceleração da taxa de inflação:

$$\dot{y} = \sigma\,\phi\,(\,\pi - \overline{\pi}\,) + \sigma\,\theta\,(y - \overline{y})$$

$$\dot{\pi} = -\delta\,(\,y - \overline{y}\,)\ , \quad \delta > 0$$

Este sistema tem a seguinte matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\,\dot{\pi}}{\partial\,\pi} & \dfrac{\partial\,\dot{\pi}}{\partial\,y} \\ \dfrac{\partial\,\dot{y}}{\partial\,\pi} & \dfrac{\partial\,\dot{y}}{\partial\,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \\ \sigma\,\phi & \sigma\,\theta \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é igual a

$$|J| = \sigma\,\phi\,\delta$$

O sinal deste determinante tanto pode ser negativo quanto positivo, dependendo do sinal do coeficiente ϕ da regra de política monetária. Quando ϕ for positivo o determinante é positivo, e o traço da matriz J é positivo:

$$t\,r\,J = \sigma\,\theta$$

Logo, neste caso o sistema é instável. A conclusão que se chega é de que uma regra de política monetária à la Taylor, com uma variação da taxa de juros nominal maior do que a variação da taxa de inflação produz um sistema instável. Porém, a solução do modelo é única. O diagrama de fases da Figura 5.14 descreve a dinâmica do sistema.

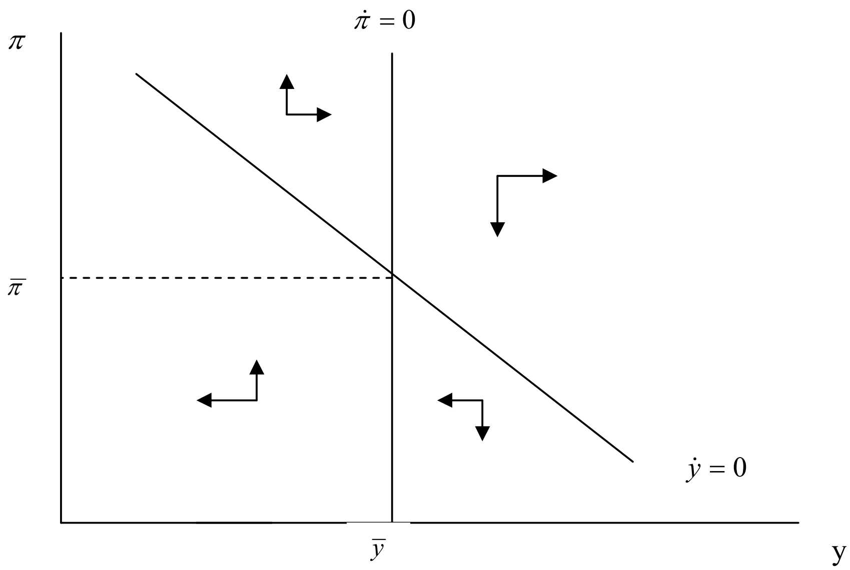


Figura 5.14

Quando o parâmetro ϕ for negativo o sistema de equações diferenciais tem um ponto de sela, como indicado no diagrama de fases da Figura 5.15. A reta onde o produto real permanece estável é positivamente inclinada, e aquela em que a taxa de inflação não muda é vertical, como no caso anterior. A sela SS é positivamente inclinada, e este é o único caminho em que a economia converge para o equilíbrio de longo prazo.

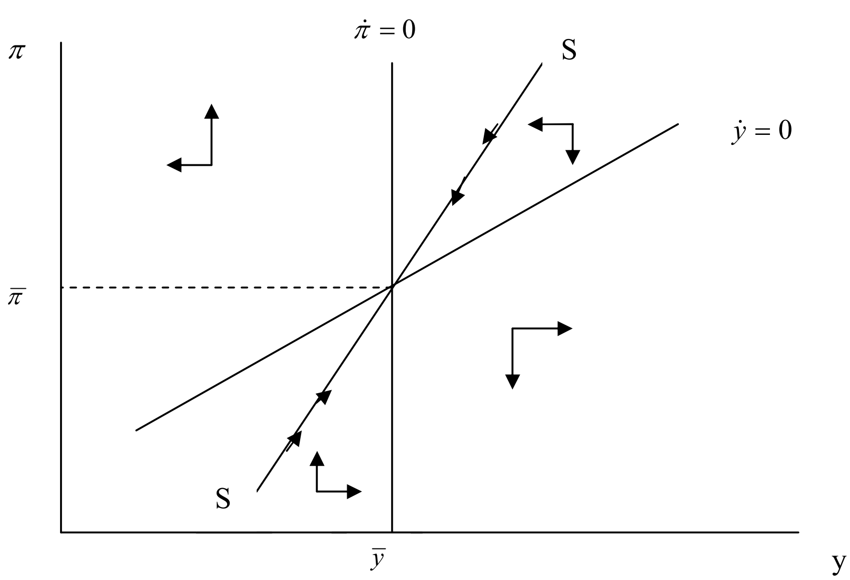


Figura 5.15

Experimento

Considere o experimento de política monetária, descrito na Figura 5.16, no qual o banco central anuncia que no instante *T*, no futuro próximo, reduzirá a meta de inflação de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1$. Neste modelo não existe incerteza e, portanto, não há dúvida de que a política anunciada será implementada.

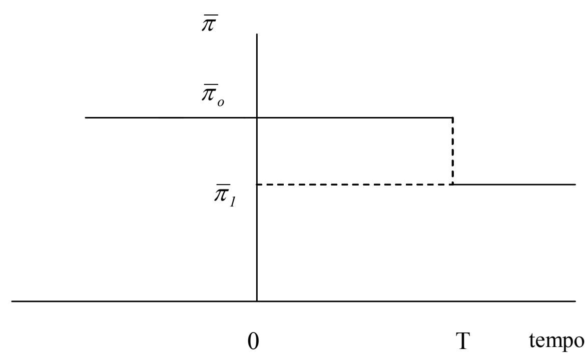


Figura 5.16

Este experimento será analisado tanto no modelo instável, em que o parâmetro ϕ é positivo, como no modelo com trajetória de sela, no qual o parâmetro ϕ é negativo. Quando o tempo *T* for igual a zero, a política monetária de redução da meta de inflação será implementada imediatamente. Este caso particular corresponde ao experimento de uma mudança de política não antecipada pelo público.

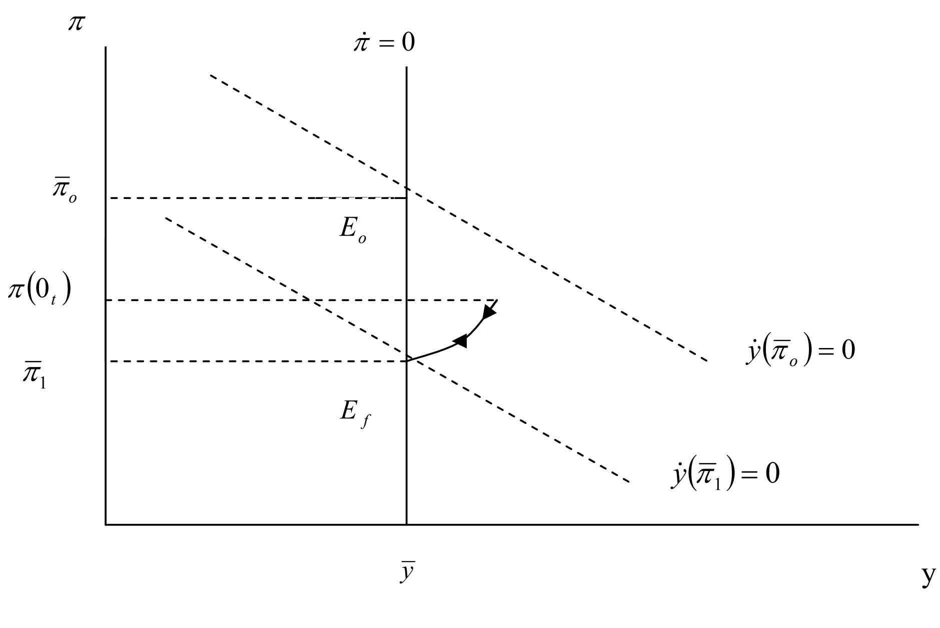


Figura 5.17

Quando o parâmetro ϕ for positivo o modelo é instável. O diagrama de fases da Figura 5.17 mostra o que acontece na economia tão logo à política monetária seja anunciada. No modelo novo-keynesiano, o nível de preços é uma variável predeterminada, mas a taxa de inflação pode mudar instantaneamente. Logo, no momento inicial a inflação diminui e o produto real aumenta. A economia converge, então, gradualmente para o novo equilíbrio de longo prazo. Quando a mudança é implementada imediatamente, sem anúncio prévio (*T=0*), o produto real permanece no seu nível de pleno emprego, e a taxa de inflação muda instantaneamente para a nova meta fixada pelo banco central.

Quando o parâmetro ϕ da regra de política monetária for negativo, o produto real e a taxa de inflação mudam no momento do anúncio da nova política, a inflação sofrendo uma redução e o produto real aumentando, como mostra o ponto B no diagrama de fases da Figura 5.18. No instante *T* a trajetória da economia encontra a nova sela, com a inflação e o produto real iguais a, respectivamente, $\pi(T)$ e $y(T)$, convergindo, então, para o novo equilíbrio de longo prazo. Este diagrama de fases mostra quatro soluções do modelo (pontos A, B, C, e D). Entretanto, existe uma infinidade de soluções, todas com as mesmas características das soluções desenhadas na Figura 5.18. Neste experimento, o combate à inflação previamente anunciado é feito sem nenhum custo social. Na verdade, a redução da taxa de inflação produz um aquecimento da economia, com um ganho temporário de produto real.

Quando o intervalo de tempo *T* tende para zero, o período de anúncio da mudança da política monetária diminui. No caso limite em que *T* é igual a zero a mudança de política não é antecipada pela sociedade. É fácil verificar que nestas circunstâncias a taxa de inflação reduz-se instantaneamente para seu novo valor fixado pelo banco central, enquanto a economia mantém-se em pleno emprego, com o produto real igual ao produto potencial. A redução da inflação é indolor, bastando o simples anúncio da nova meta pelo banco central para que a taxa de inflação seja afetada de maneira permanente.

No modelo novo-keynesiano uma redução da meta de inflação pelo banco central, não antecipada pela sociedade, produz uma redução imediata da taxa de inflação para a nova meta, sem nenhum custo social, pois o produto real permanece no seu nível de pleno emprego.

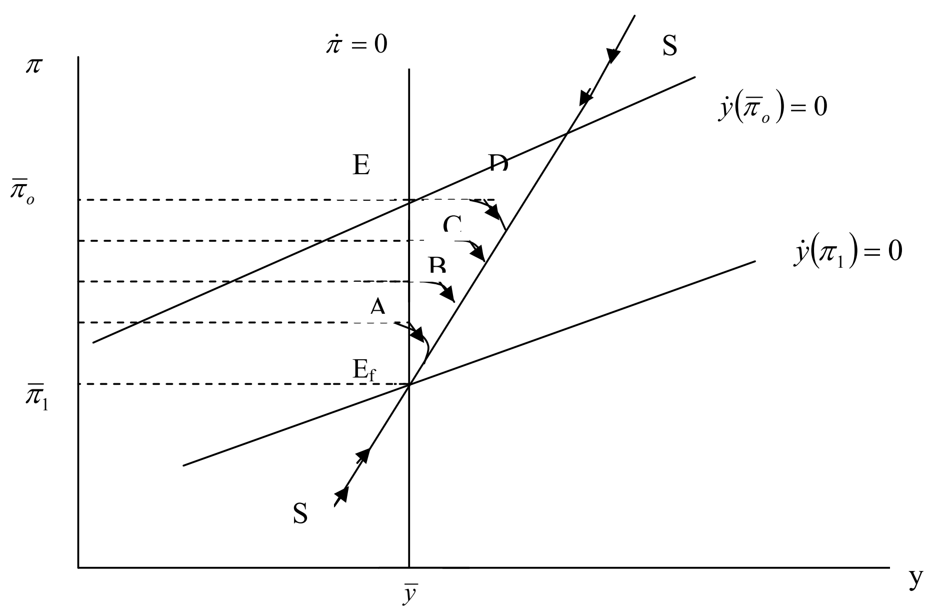


Figura 5.18

Quando o banco central anuncia previamente a redução da meta de inflação, o simples anúncio provoca uma redução da taxa de inflação e um aumento do produto real. A economia converge gradualmente para a nova meta, com o produto real acima do produto de pleno emprego, acarretando um benefício transitório para a sociedade. Todavia, existe uma infinidade de soluções com estas características.

Até que ponto estes fatos acontecem no mundo real? A evidência empírica de experiências de políticas de combate à inflação, previamente anunciadas ou não, em países que têm tradição de baixa inflação, rejeita as previsões do modelo novo-keynesiano, pois a redução da inflação, em geral, tem sido acompanhada de recessão. Por outro lado, nos programas de combate à hiperinflação os fatos não estão em desacordo com as previsões do modelo novo-keynesiano, pois as hiperinflações têm acabado sem custo ou mesmo com o aumento do produto real. Estas duas evidências seriam consistentes com um modelo em que a curva de Phillips tivesse tanto um componente de inércia como um componente da inflação futura. Isto é:

$$\pi(t) = \omega\,\pi(t-h) + (1-\omega)\,\pi(t+h) + \varphi\,[\,y(t) - \bar{y}(t)]$$

onde ω é o peso da inércia e h é o intervalo de tempo relevante para as decisões econômicas. A expansão de Taylor da inflação defasada é dada por $\pi(t-h) = \pi(t) + \dot{\pi}(t)\,(t-h-t)$, e a expansão de Taylor da inflação futura é igual a $\pi(t+h) = \pi(t) + \dot{\pi}(t)\,(t+h-t)$. Substituindo-se estas duas expressões na equação da curva de Phillips obtém-se a equação diferencial da taxa de inflação:

$$\dot{\pi} = \frac{\varphi}{(2\omega - 1)\,h}\,(y - \bar{y}), \quad \omega \neq 1/2$$

e $y = \bar{y}$, quando $\omega = 1/2$. Quando o peso for igual a 0,5, a aceleração da inflação independe do hiato do produto. Este valor do peso é o valor crítico, pois se ele for maior do que 50%, o coeficiente da curva de Phillips é positivo, e se ele for menor do que 50% o coeficiente é negativo como no modelo novo-keynesiano. A questão teórica colocada por esta formulação é explicar como ocorre a bifurcação do peso ω, ou seja, como este peso varia com a própria taxa de inflação.

O modelo novo-keynesiano tem sido usado em um bom número de trabalhos na análise de regras de política monetária em países com inflação anual abaixo de um dígito. Apesar de este modelo ter fundamentos teóricos, ele é rejeitado pela evidência empírica dos países com tradição de baixa inflação. Logo, como a lógica do modelo não tem respaldo nos fatos, este tipo de análise deve ser visto com cautela, ou apenas como parte de um processo científico que investiga os microfundamentos dos modelos que sirvam de apoio às decisões de política monetária dos bancos centrais. Neste esforço, uma questão importante que deve ser tratada é de como a taxa de inflação deixa de ser uma variável predeterminada do modelo para se transformar numa variável endógena do mesmo.

4. Modelo Keynesiano: Regra de Estoque de Moeda e Inércia da Inflação

O modelo desta seção tem quatro equações, uma curva IS, uma curva de Phillips, uma curva LM, uma regra de política monetária (RPM), e uma hipótese simplificadora sobre a política fiscal. Isto é:

IS: $y - \bar{y} = -\alpha\left(\rho - \bar{\rho}\right) + \beta\left(f - \bar{f}\right) + g - \bar{g}$

CP: $\dot{\pi} = \delta\left(y - \bar{y}\right) + \phi\left(\dot{y} - \dot{\bar{y}}\right)$

LM: $m - \bar{m} = \lambda\left(y - \bar{y}\right) - \theta\left(r - \bar{r}\right)$

RPM: $\mu = \dfrac{d \log M}{dt} = constante$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Hipóteses simplificadoras: $f = \bar{f}$, $g = \bar{g}$

A curva de Phillips supõe que tanto o hiato do produto como sua taxa de variação afetam a taxa de inflação. Isto é, se a taxa de crescimento do produto real da economia for maior do que a taxa de crescimento do produto potencial a taxa de inflação aumenta, e vice versa. A regra de Friedman supõe que o banco central aumenta a base monetária a uma taxa constante e igual a μ, independente da situação da economia.

Álgebra

A equação de Fisher permite escrever que a diferença entre as taxas de juros nominais de curto e de longo prazo seja dada por:

$$r - \bar{r} = \rho - \bar{\rho} + \pi - \bar{\pi}$$

Substituindo-se esta expressão na equação da curva LM resulta em:

$$m - \bar{m} = \lambda\left(y - \bar{y}\right) - \theta\left(\rho - \bar{\rho}\right) - \theta\left(\pi - \bar{\pi}\right)$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$\rho - \bar{\rho} = -\left(\pi - \bar{\pi}\right) + \frac{\lambda}{\theta}\left(y - \bar{y}\right) - \frac{1}{\theta}\left(m - \bar{m}\right)$$

Levando-se este hiato entre as taxas de juros reais, de curto e de longo prazo, na equação da curva IS obtém-se:

$$y-\overline{y}=\alpha(\pi-\overline{\pi})-\frac{\alpha\lambda}{\theta}(y-\overline{y})+\frac{\alpha}{\theta}(m-\overline{m})$$

O hiato do produto é, então, dado por:

$$y-\overline{y}=\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}}(\pi-\overline{\pi})+\frac{\alpha/\theta}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}}(m-\overline{m})$$

Diferenciando-se os dois lados desta expressão com relação ao tempo se obtém a primeira equação do sistema de equações diferenciais abaixo, levando-se em conta que a derivada com relação ao tempo do logaritmo do estoque real de moeda é igual à diferença entre a taxa de crescimento do estoque nominal de moeda (μ) e a taxa de inflação (π). A segunda equação do sistema de equações diferenciais é a equação da curva de Phillips que, por simplicidade, admite que a taxa de crescimento do produto potencial seja igual a zero.

$$\begin{cases} \dot{y}=\dfrac{\alpha}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}}\dot{\pi}+\dfrac{\alpha/\theta}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}}(\mu-\pi) \\ \\ \dot{\pi}=\delta\,(y-\overline{y})+\phi\,\dot{y} \end{cases}$$

O sistema de equações diferenciais pode ser escrito em notação matricial do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}} \\ -\phi & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\pi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha/\theta}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}} & (\mu-\pi) \\ \delta & (y-\overline{y}) \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema de equações lineares é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\pi} \end{bmatrix}=\frac{1}{1-\dfrac{\alpha\phi}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}}}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}} \\ \phi & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha/\theta}{1+\frac{\alpha\lambda}{\theta}} & (\mu-\pi) \\ \delta & (y-\overline{y}) \end{bmatrix}$$

Sistema Dinâmico

As duas equações diferenciais do modelo, da taxa de variação do produto real e da aceleração da inflação, são, então, dadas por:

$$\overset{\circ}{y} = \frac{\alpha}{\theta + \alpha(\lambda - \phi\theta)}(\mu - \pi) + \frac{\alpha\theta\delta}{\theta + \alpha(\lambda - \phi\theta)}(y - \bar{y})$$

$$\dot{\pi} = \frac{\phi\alpha}{\theta + \alpha(\lambda - \phi\theta)}(\mu - \pi) + \frac{\delta(\theta + \alpha\lambda)}{\theta + \alpha(\lambda - \phi\theta)}(y - \bar{y})$$

A matriz jacobiana tem a seguinte expressão:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial \pi} \\ \\ \dfrac{\partial \dot{\pi}}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{\pi}}{\partial \pi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta + \alpha(\lambda - \phi\theta)} \begin{bmatrix} \alpha\theta\delta & -\alpha \\ \\ \delta(\theta + \alpha\lambda) & -\phi\alpha \end{bmatrix}$$

O determinante e o traço desta matriz são iguais a:

$$|J| = \frac{-\alpha\theta\delta\phi\alpha + \alpha\delta(\theta + \alpha\lambda)}{[\theta + \alpha(\lambda - \phi\theta)]^2} \quad , \; tr\ J = \frac{\alpha\theta\delta - \phi\alpha}{\theta + \alpha(\lambda - \phi\theta)}$$

O modelo é estável quando o determinante for positivo e o traço negativo. O determinante é positivo quando os parâmetros satisfazem a restrição:

$$|J| > 0 \Rightarrow \alpha\delta(\theta + \alpha\lambda) > \alpha\theta\delta\phi\alpha$$
$$\theta + \alpha\lambda > \theta\,\alpha\,\phi$$
$$\theta + \alpha(\lambda - \phi\theta) > 0$$

Por sua vez, o traço é negativo quando os parâmetros do modelo atendam a desigualdade:

$$tr\ J < 0 \Rightarrow \alpha\theta\delta - \phi\alpha < 0$$
$$\theta\delta < \phi$$

A combinação das duas restrições para a estabilidade do modelo, a do determinante e a do traço, implica que os parâmetros devem satisfazer as desigualdades:

$$\theta\delta < \phi < \frac{\theta + \alpha\lambda}{\theta\alpha}$$

Cabe observar que se $\phi = 0 \Rightarrow |J| > 0$ e $tr\ J > 0$. Logo, neste caso o modelo é instável.

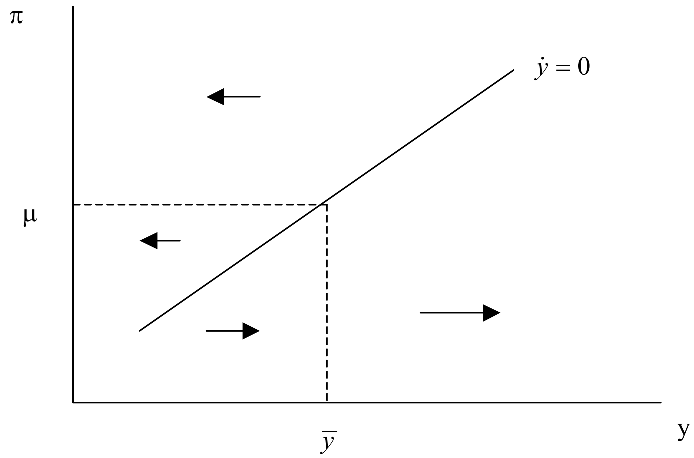


Figura 5.19. Diagrama de Fases: $\overset{\circ}{y} = 0 \Rightarrow \pi = \mu + \theta\,\delta\left(y - \bar{y}\right)$

A Figura 5.19 mostra o diagrama de fases da equação do produto real. A reta em que o produto real permanece constante é positivamente inclinada. Na região abaixo e a direita desta reta o produto real aumenta, e na região acima e a esquerda da reta o produto real diminui, como indicado pelas setas. A Figura 5.20 corresponde ao diagrama de fases da equação diferencial da taxa de inflação. Ela também é positivamente inclinada. Na região acima e a esquerda da reta a taxa de inflação diminui, enquanto na região abaixo e a direita da reta a taxa de inflação aumenta como indicado pelas setas. As duas retas, do produto real e da taxa de inflação, são positivamente inclinadas. As desigualdades que os parâmetros do modelo têm de satisfazer implicam que o coeficiente angular da reta em que a taxa de inflação é constante é maior do que o coeficiente angular da reta na qual o produto real é constante. Isto é:

$$\frac{\delta\left(\theta + \alpha\lambda\right)}{\phi\alpha} \div \theta\,\delta = \frac{\delta\left(\theta + \alpha\,\lambda\right)}{\phi\alpha\theta\delta} > 1$$

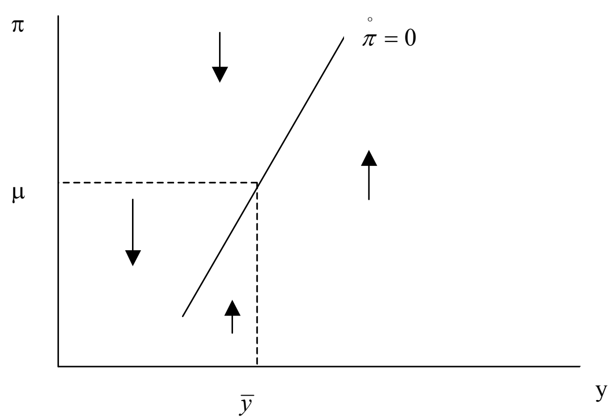


Figura 5.20 Diagrama de Fases: $\overset{\circ}{\pi} = 0 \Rightarrow \pi = \mu + \frac{\delta\left(\theta + \alpha\lambda\right)}{\phi\,\alpha}\left(y - \bar{y}\right)$

A Figura 5.21 apresenta o diagrama de fases do modelo que tem quatro regiões distintas. Na região I a economia move-se na direção nordeste, na região II a taxa de inflação e o produto real movimentam-se no sentido noroeste, na região III a trajetória da economia tem a direção sudoeste e na região IV ambas variáveis tomam o rumo sudeste.

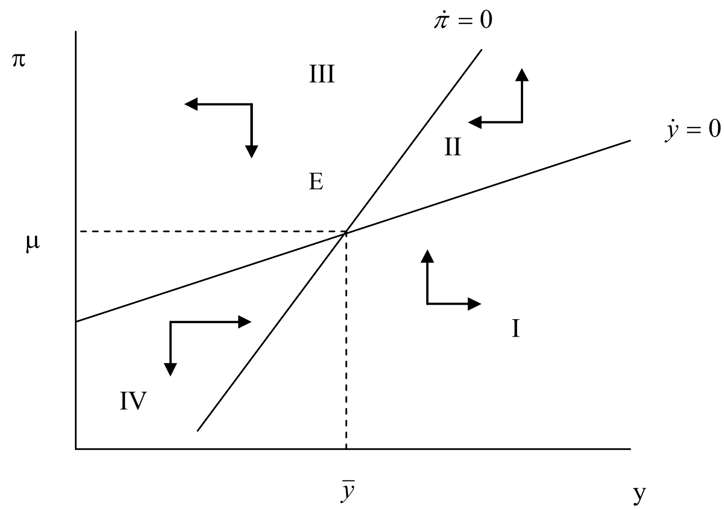


Figura 5.21. Diagrama de Fases do Modelo

Experimento

A Figura 5.22 descreve um experimento de política monetária em que o banco central aumenta a taxa de expansão da base monetária de μ_0 para μ_1. Neste modelo o nível de preços e a taxa de inflação não mudam instantaneamente, em virtude das hipóteses de rigidez e de inércia. No momento da mudança da política monetária a economia encontra-se em equilíbrio no ponto E_0, como indicado na Figura 5.23. Esta figura não mostra as duas curvas do sistema dinâmico que resultavam neste equilíbrio para não sobrecarregar o gráfico. No momento da mudança da política monetária as equações do sistema dinâmico deslocam-se para cima e passam pelo novo ponto de equilíbrio de longo prazo, que corresponde à taxa de inflação π_1 e ao nível do produto de pleno emprego da economia.

O aumento da taxa de crescimento da base monetária faz com que a taxa de juros nominal decresça, o mesmo ocorrendo com a taxa de juros real em virtude da rigidez da taxa de inflação. O produto real da economia começa uma trajetória de expansão e a inflação gradualmente aumenta. Neste processo, a taxa de inflação ultrapassa (o que em inglês é conhecido por *overshooting*) a nova taxa de equilíbrio de longo prazo da taxa de inflação ($\pi_1 = \mu_1$) e continua a subir durante determinado período de tempo até encontrar a reta $\dot{\pi} = 0$. A partir daí, a taxa de inflação começa a diminuir e converge para o novo equilíbrio num movimento oscilatório, de acordo com a hipótese com que o gráfico foi desenhado.

O fenômeno da ultrapassagem ocorre porque no longo prazo a taxa de juros nominal aumenta para um novo patamar e a quantidade real de moeda demandada pelo público diminui. Como no início do processo de ajuste a taxa de inflação é menor do que a nova taxa de expansão da base monetária, a quantidade real de moeda inicialmente aumenta. Para que ela diminua para seu novo equilíbrio de longo prazo, a taxa de inflação tem que crescer a uma taxa maior que a taxa de crescimento da base monetária durante determinado período de tempo.

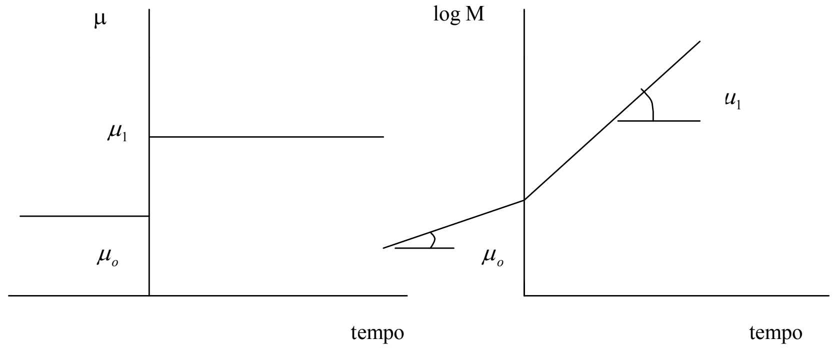


Figura 5.22 Experimento de Política Monetária

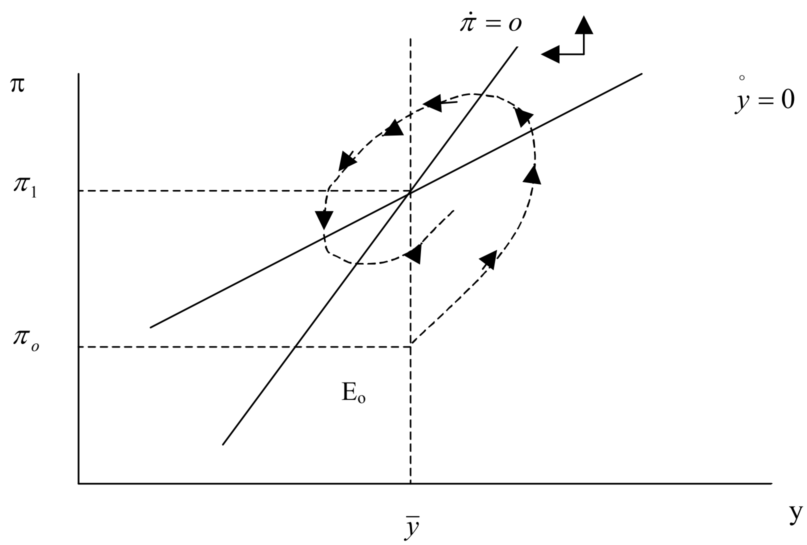


Figura 5.23 Dinâmica do Modelo

O diagrama de fases da Figura 5.23 mostra a complexidade do ajuste da economia a um choque monetário. Ele mostra que existe um período no qual tanto a taxa de inflação quanto o produto real aumentam, depois um período em que o produto real começa a diminuir, mas a taxa de inflação continua aumentando, em seguida um intervalo de tempo em que ambas as variáveis, o produto real e a taxa de inflação, diminuem. O processo de ajuste dinâmico continua com um período em que o produto real aumenta e a taxa de inflação diminui. No longo prazo a taxa de inflação é igual à taxa de crescimento da base monetária, mas no curto prazo isto não ocorre.

5. Exercícios

1) Considere o seguinte modelo:

IS: $\dot{y} = \sigma(r - \pi - \overline{\rho})$
CP: $\dot{\pi} = \delta(y - \overline{y})$
RPM: $r = \overline{\rho} + \pi + \phi(\pi - \overline{\pi}) + \theta(y - \overline{y})$
CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\overline{y}$ = produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\overline{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; π = taxa de inflação; $\overline{\pi}$ = meta da taxa de inflação $\dot{\pi} = d\pi / dt$; r = taxa de juros nominal; $\alpha, \delta, \sigma, \phi\ e\ \theta$ são parâmetros positivos.

Analise as conseqüências de uma mudança permanente, não antecipada, na meta de inflação.

2) Considere o seguinte modelo:

IS: $\dot{y} = -\lambda(y - \overline{y}) - \alpha(\rho - \overline{\rho})$
CP: $\dot{\pi} = \delta(y - \overline{y})$
RPM: $r = \overline{\rho} + \pi + \phi(\pi - \overline{\pi}) + \theta(y - \overline{y})$
CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\dot{y} = dy / dt : \overline{y}$= produto potencial; ρ= taxa de juros real; $\overline{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; π= taxa de inflação; $\dot{\pi} = d\pi / dt$; r = taxa de juros nominal; λ, α, δ, ϕ e θ são parâmetros positivos.
a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases, com a taxa de inflação (π) no eixo vertical e o produto real *(y)* no eixo horizontal.
b) Mostre o que acontece neste modelo, com o diagrama de fases do item a, quando o banco central aumenta a meta da taxa de inflação.
c) O que acontece neste modelo se o parâmetro ϕ for negativo? Qual a interpretação da regra de política monetária neste caso?
3) Considere o seguinte modelo:

IS: $y - \overline{y} = -\alpha(\rho - \overline{\rho}) + \beta(f - \bar{f}) + g - \overline{g}$
CP: $\dot{\pi} = \delta(y - \overline{y})$
RPM: $r = \overline{\rho} + \pi + \phi(\pi - \overline{\pi}) + \theta(y - \overline{y})$
CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$
Regra de Política Fiscal: $f - \bar{f} = -\varphi_1(y - \overline{y}),\ g - \overline{g} = -\varphi_2(y - \overline{y})$

Os parâmetros $\alpha, \beta, \delta, \phi, \theta, \varphi_1, \varphi_2$ são positivos, e os demais símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\overline{y}$ = produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\overline{\rho}$ = taxa de juros real de equilíbrio de longo prazo; f = déficit público; $\bar{f}$ = déficit público de pleno emprego; g = gastos do governo; $\overline{g}$ = gastos do governo de pleno emprego; π = taxa de inflação; $\overline{\pi}$ = meta de inflação, $\dot{\pi} = d\pi / dt$.
a) Como você interpreta as regras de políticas monetária e fiscal?
b) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama com π no eixo vertical e y no eixo horizontal.

c) O que aconteceria neste modelo se o parâmetro ϕ fosse negativo?

d) O que aconteceria nesta economia se o governo aumentasse a meta da taxa de inflação de $\overline{\pi}_0$ para $\overline{\pi}_1 > \overline{\pi}_0$?

4) Considere o seguinte modelo:

IS: $y - \overline{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right)$, $\alpha > 0$

CP: $\dot{\pi} = -\delta\left(y - \overline{y}\right)$, $\delta > 0$

RPM: $r = \overline{\rho}^{BC} + \pi + \phi\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \theta(y - \overline{y})$

CI: Dados $p(0)$ e $\pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\overline{y}$ = produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\overline{\rho}$ = taxa de juros real de equilíbrio de longo prazo; π = taxa de inflação; $\dot{\pi} = d\pi / dt$; r = taxa de juro nominal; $\overline{\rho}^{BC}$ = taxa de juros real do Banco Central; α, δ, ϕ $e \theta$ são parâmetros positivos.

a) Quais as conseqüências, de curto e longo prazo, se $\overline{\rho} \neq \overline{\rho}^{BC}$?

b) Como você interpretaria a hipótese de que $\overline{\rho} \neq \overline{\rho}^{BC}$?

5) Considere o seguinte modelo:

IS: $\dot{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right), \alpha > 0$

CP: $\dot{\pi} = \delta\left(y - \overline{y}\right), \delta > 0$

RPM: $r = \overline{\rho} + \pi + \phi\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \theta\left(y - \overline{y}\right), \phi > 0, \theta > 0$

CI: Dados $p(0)$ e $\pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: $\dot{y} = dy / dt$, y = logaritmo do produto real; $\overline{y}$ = logaritmo do produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\overline{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; r = taxa de juros nominal; π = taxa de inflação; $\overline{\pi}$ = meta da taxa de inflação, $\dot{\pi} = d\pi / dt$; α, δ, ϕ e θ são parâmetros positivos.

a) Discuta a especificação de cada uma das equações do modelo;

b) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo no diagrama de fases com π no eixo vertical e y no eixo horizontal.

b) Mostre a dinâmica deste modelo, no diagrama de fases do item anterior, quando o banco central reduz a meta de inflação.

c) O que aconteceria neste modelo se o parâmetro ϕ fosse negativo?

6) Considere o seguinte modelo:

IS: $u - \overline{u} = \alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right)$, $\alpha > 0$

CP: $\dot{\pi} = -\delta\left(u - \overline{u}\right)$, $\delta > 0$

RPM: $\dot{r} = \phi\left(\pi - \overline{\pi}\right) - \theta\, \dot{u}$

CI: Dados $p(0)$ e $\pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: u=taxa de desemprego; $\overline{u}$ =taxa de desemprego natural; ρ = taxa de juros real; $\overline{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; r = taxa de juros

nominal; $\dot{r} = dr/dt$ π = taxa de inflação; $\overline{\pi}$ = meta da taxa de inflação, $\dot{\pi} = d\pi/dt$; $\dot{u} = du/dt$ α, δ, ϕ e θ são parâmetros positivos.
a) Como você obteria a curva IS deste modelo?
b) A regra de política monetária necessita informação de alguma variável não observável?
c) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fase com a inflação no eixo horizontal e a taxa desemprego no eixo horizontal. Este modelo é estável?
d) Admita que a inflação inicial deste modelo seja uma variável endógena e que o parâmetro δ seja negativo. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo nestas circunstâncias.
e) Você recomendaria o uso desta regra de política monetária?

7) Considere o seguinte modelo

IS: $y - \overline{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right)$
CP: $\dot{\pi} = \delta\left(y - \overline{y}\right)$
RPM: $r = \overline{\rho} + \pi + \phi\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \theta\left(y - \overline{y}\right)$

a) Neste modelo, a inflação no longo prazo é um fenômeno monetário?
b) Admita que a curva LM seja especificada por:

$$LM: \quad m - \overline{m} = \lambda\left(y - \overline{y}\right) - \beta\left(r - \overline{r}\right)$$

onde m é a quantidade real de moeda $m = M/P$. A meta da taxa de inflação, no longo prazo, é igual à taxa de crescimento da base monetária?
c) A regra de política monetária, que fixa a taxa de juros, implica que, no longo prazo, a inflação não é um fenômeno monetário?
d) Pode-se afirmar, com base neste modelo, que se o objetivo da sociedade for a diminuição da taxa de juros, deve-se inicialmente aumentá-la?

8) Considere o seguinte modelo:

IS: $y - \overline{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right)$
CP: $\dot{\pi} = \delta\left(y - \overline{y}\right)$
RPM: $r^s = \overline{\rho}^s + \pi + \theta\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \phi\left(y - \overline{y}\right)$
Crédito: $r = r^s + \overline{sp} + \beta\left(sp - \overline{sp}\right)$
CI: Dados $p(0)$ e $\pi(0)$
Definições: $r = \rho - \pi$, $\overline{\rho} = \overline{\rho}^s + \overline{sp}$

O símbolo sp representa o spread da taxa de juros no mercado de crédito e $\overline{sp}$ é o spread de equilíbrio de longo prazo.
a) Mostre que a equação de demanda agregada deste modelo é dada por:

$$\pi = \overline{\pi} - \frac{\left(1 + \alpha\,\phi\right)}{\alpha\,\theta}\left(y - \overline{y}\right) - \frac{\beta}{\theta}\left(sp - \overline{sp}\right)$$

b) Mostre, num diagrama de fases (π no eixo vertical e y no eixo horizontal), o que acontece com o produto real e a taxa de inflação, quando um choque no mercado de crédito faz com que $sp - \overline{sp} > 0$.

9) Considere o seguinte modelo:

IS: $\dot{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right), \alpha > 0$
CP: $\dot{\pi} = -\gamma(\pi - \overline{\pi}) + \delta\left(y - \overline{y}\right), \delta > 0$
RPM: $r = \overline{\rho} + \pi + \phi\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \theta\left(y - \overline{y}\right), \phi > 0, \theta > 0$
CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: $\dot{y} = dy / dt$, y= logaritmo do produto real; $\overline{y}$ = logaritmo do produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\overline{\rho}$= taxa de juros real de longo prazo; r = taxa de juros nominal; π = taxa de inflação; $\overline{\pi}$ = meta da taxa de inflação, $\dot{\pi} = d\pi / dt$; $\alpha, \gamma, \delta, \phi\ e\ \theta$ são parâmetros positivos.
a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo no diagrama de fases com π no eixo vertical e y no eixo horizontal.
b) Mostre a dinâmica deste modelo, no diagrama de fases do item anterior, quando o banco central reduz a meta de inflação.
c) O que aconteceria neste modelo se o parâmetro ϕ fosse negativo?

10) Considere o seguinte modelo:

IS: $\dot{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right), \alpha > 0$
CP: $\dot{\pi} = \delta\left(y - \overline{y}\right), \delta > 0$
RPM: $r = \overline{r}$
CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: $\dot{y} = dy / dt$, y= logaritmo do produto real; $\overline{y}$ = logaritmo do produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\overline{\rho}$= taxa de juros real de longo prazo; r = taxa de juros nominal; π = taxa de inflação; $\overline{\pi}$ = meta da taxa de inflação, $\dot{\pi} = d\pi / dt$; α, δ são parâmetros positivos.
a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo no diagrama de fases com π no eixo vertical e y no eixo horizontal.
b) Mostre a dinâmica deste modelo, no diagrama de fases do item anterior, quando o banco central reduz a meta de inflação.

Capítulo 6

Macroeconomia da Economia Aberta

Este capítulo trata da macroeconomia da economia aberta. As duas primeiras seções apresentam modelos de arbitragem dos preços dos bens e serviços que são objeto do comércio internacional e das taxas de juros, doméstica e externa, dos ativos que participam do movimento de capitais entre países. A terceira seção apresenta a condição de Marshall-Lerner que estabelece as condições para que haja correlação positiva entre a taxa de câmbio real e a conta corrente do balanço de pagamentos. As duas seções seguintes, a quarta e a quinta, cuidam da especificação da equação da curva IS na economia aberta, que relaciona o produto real, a taxa de juros real e a taxa de câmbio real. As especificações da curva IS são apresentadas para o modelo tradicional e para o modelo com microfundamentos. A sexta seção analisa a determinação da taxa de câmbio real de equilíbrio de longo prazo, a taxa natural de câmbio real. A sétima seção trata da especificação da curva de Phillips na economia aberta, que inclui a variação da taxa de câmbio real como um dos seus argumentos. Os modelos de regime de câmbio fixo e de câmbio flexível são apresentados na oitava e na nona seção, respectivamente.

1. Arbitragem de Preços dos Bens e Serviços

Na economia aberta existe mobilidade de bens e serviços, de capital e de mão de obra entre os países. As leis de imigração restringem bastante à mobilidade de mão de obra e, portanto, este tipo de mobilidade não será considerado nos modelos da macroeconomia aberta. A mobilidade dos bens e serviços é feita através do comércio internacional. O exportador e o importador podem ser vistos como agentes cujo principal negócio consiste na arbitragem dos preços em diferentes países.

1.1. Paridade do Poder de Compra Absoluta

A taxa de câmbio (S) é a quantidade de moeda doméstica que compra uma unidade da moeda estrangeira. Admita que o preço do bem doméstico seja igual a P e o preço do mesmo bem importado na moeda do país de origem seja igual a P^*. O preço do bem importado convertido em moeda doméstica é, portanto, igual a $S\,P^*$. Logo, se este preço for menor do que o preço do bem doméstico compra-se o bem importado. Caso contrário compra-se o bem doméstico. A lei do preço único estabelece que um bem será vendido pelo mesmo preço:

$$S\,P^* = P$$

A taxa de câmbio nominal pode ser escrita, então, como a razão entre o inverso do índice de preços estrangeiro e o inverso do índice de preços doméstico,

$$S = \frac{1/P^*}{1/P}$$

O numerador desta expressão é o poder de compra da moeda estrangeira e o denominador é o poder de compra da moeda doméstica. Esta equação mostra que a arbitragem dos preços dos bens e serviços estabelece a paridade de poder de compra entre as moedas.

A taxa de câmbio real é definida pela razão entre os níveis de preços dos dois países medidos na mesma moeda:

$$Q = \frac{SP*}{P}$$

Q é a taxa de câmbio real, S é a taxa de câmbio nominal, P* o índice de preços externo e P o índice de preços doméstico. A taxa de câmbio real é o preço relativo dos bens e serviços dos dois países e mede a quantidade de bens e serviços domésticos necessários para se comprar uma unidade física do bem estrangeiro. Quando os bens são homogêneos a paridade do poder de compra absoluta implica que a taxa de câmbio real é igual a um:

$$Q=1$$

1.2. Paridade do Poder de Compra Relativa

Admita que no cálculo do índice de preços de cada país entrem dois bens, mas que o peso de cada bem não seja o mesmo nos dois países. A proporção do gasto com o bem dois no índice doméstico é α e esta proporção no índice de preços estrangeiro é igual a β. Os índices geométricos de preços de cada país são dados por:

$$P = P_1^{1-\alpha} \; P_2^{\alpha} = P_1 \left(P_2 / P_1\right)^{\alpha}$$

$$P^* = \left(P_1^*\right)^{1-\beta} \left(P_2^*\right)^{\beta} = P_1^* \left(\frac{P_2^*}{P_1^*}\right)^{\beta}$$

A taxa de câmbio real é facilmente obtida a partir destes dois índices:

$$Q = \frac{S\,P^*}{P} = \frac{S\,P_1^* \quad p^{\beta}}{P_1 \quad p^{\alpha}}$$

onde p é o preço relativo dos dois bens.A arbitragem do comércio internacional implica na lei do preço único:

$$S\,P_1^* = P_1 \qquad S\,P_2^* = P_2$$

A taxa de câmbio real é, portanto, dada por:

$$Q = p^{\beta-\alpha}$$

Quando $\alpha = \beta$, $Q = 1$. Se $\alpha \neq \beta$, e p = *constante*, então se obtém a paridade do poder de compra relativa:

Q= constante

A paridade do poder de compra relativa é equivalente à proposição de que a taxa de variação da taxa nominal de câmbio é igual à diferença entre a taxa de inflação doméstica e a taxa de inflação externa:

$$\hat{S} = \hat{P} - \hat{P}^*$$

O acento circunflexo nas variáveis indica taxa de variação.

1.3. Bens Comercializáveis e Bens Não Comercializáveis

Existe um bom número de bens e serviços em cada país que não são objeto do comércio internacional. Estes bens e serviços são denominados não comercializáveis (*N*). O índice de preços em cada país é uma média geométrica dos preços dos dois bens:

$$P = P_T^{1-\omega} P_N^{\omega} = P_T \left(P_N / P_T \right)^{\omega}$$

$$P^* = P_T^{*\,1-\omega} P_N^{*\,\omega} = P_T^* \left(\frac{P_N^*}{P_T^*} \right)^{\omega}$$

Admite-se, por simplicidade, que o peso de cada bem é o mesmo nos dois países. Para os bens comercializáveis (*T*) a lei do preço único implica:

$$S\,P_T^* = P_T$$

A taxa de câmbio real depende, portanto, da razão dos preços relativos nos dois países:

$$Q = \left(\frac{p^*}{p} \right)^{\omega}$$

Neste caso não vale nem a paridade relativa nem tampouco a paridade absoluta do poder de compra e a taxa de variação do câmbio real é proporcional à diferença entra as taxas de variações dos dois preços relativos:

$$\hat{Q} = \omega \left(\hat{p}^* - \hat{p} \right)$$

2. Arbitragem da Taxa de Juros

A mobilidade de capital interliga os mercados financeiros dos países, tornando possível a arbitragem de juros dos títulos, de renda fixa e de renda variável, emitidos em diferentes moedas. Nesta seção admite-se que existe perfeita mobilidade de capital, que os ativos são substitutos perfeitos e que os agentes são neutros ao risco.

2.1. Paridade da Taxa de Juros Descoberta

Considere um investidor que pode investir seus recursos domesticamente ou no exterior. Caso invista no seu país ele terá no resgate o principal investido acrescido dos juros durante o período:

$$1 + r_t$$

Caso prefira investir no exterior ele terá de converter sua moeda doméstica no mercado de câmbio para obter *1/S* de moeda externa, aplicá-la a taxa de juros externa r^*, e no momento do resgate converter o principal e os juros pela taxa de câmbio S_{t+1}:

$$\frac{1}{S_t}\left(1 + r_t^*\right) S_{t+1}^e$$

Adicionou-se o símbolo *e* na taxa de câmbio do período *t+1* para indicar o fato de que no momento *t* do investimento esta taxa não é conhecida. Para um investidor neutro ao risco estas duas opções são equivalentes. Logo, pela lei do preço único:

$$1 + r_t = \left(1 + r_t^*\right) \frac{S_{t+1}^*}{S_t}$$

Tomando-se o logaritmo na base natural nos dois lados desta expressão e a aproximação $\log(1 + x) \cong x$ conclui-se que a mudança antecipada na taxa de câmbio é igual ao diferencial das taxas de juros:

$$s_{t+1}^e - s_t = r_t - r_t^*$$

2.2. Determinação da Taxa de Câmbio

A taxa de câmbio, o preço de um ativo financeiro, é determinada a partir da arbitragem entre os ativos domésticos e externos. A equação de arbitragem da taxa de juros descoberta pode ser escrita como:

$$r_t + s_t = r_t^* + s_{t+1}^e$$

A Figura 6.1 mostra o gráfico desta equação com a taxa de juros no eixo horizontal e a taxa de câmbio no eixo vertical, supondo que a taxa de juros externa e a de câmbio futuro, sejam conhecidas. Para uma taxa de juros doméstica igual a r_0 à taxa de câmbio determinada pela arbitragem é igual a s_0. A taxa de câmbio hoje depende da taxa de câmbio prevista para amanhã. Caso se antecipe uma mudança da taxa de câmbio futura, a taxa de câmbio muda imediatamente, como indicado na Figura 6.1. A curva *AA* desloca-se para *A'A'* e a taxa de câmbio aumenta de s_0 para s_1.

A taxa de câmbio, como o preço de qualquer ativo pode ter uma bolha, isto é, seu preço pode sofrer variação sem que haja uma mudança nos fundamentos, basta que as pessoas que participam do mercado acreditem que os preços no futuro vão subir. Esta crença pode gerar uma profecia que se auto-realiza. A inexistência de fundamentos que sustentem a alta dos preços prevalecerá mais cedo ou mais tarde, e a bolha terminará se dissipando.

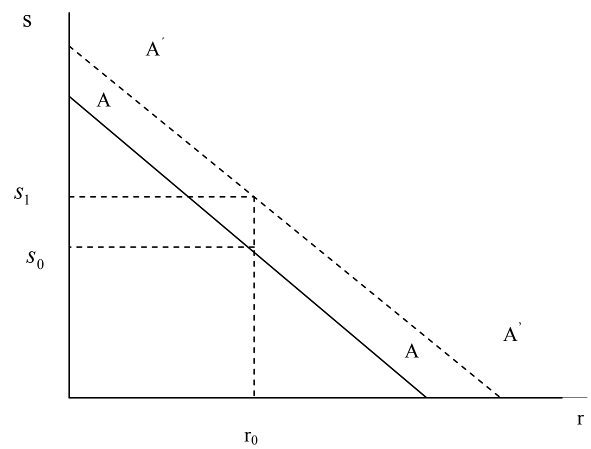


Figura 6.1

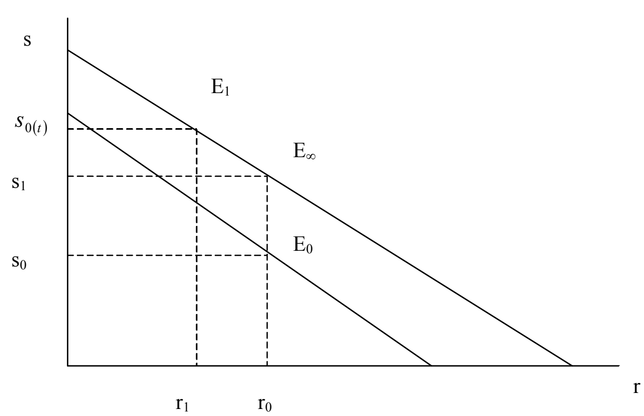


Figura 6.2

A taxa de câmbio é uma variável que pode mudar de valor instantaneamente, como o preço de qualquer outro ativo. Todavia, os preços dos bens e serviços podem ser rígidos e no curto prazo não mudarem de valor repentinamente, isto é, os preços dos bens e serviços podem ser variáveis predeterminadas do modelo. Admita que este seja o caso. Suponha também que o banco central reduza a taxa de juros de r_0 para r_1, como indicado na Figura 6.2. A redução da taxa de juros provoca um aumento da quantidade de moeda e no longo prazo o nível de preços terá um aumento proporcional ao aumento do estoque de moeda. A taxa de câmbio futura aumentará porque não houve mudança da taxa de câmbio real. No longo prazo, a taxa de juros volta ao seu valor inicial devido ao aumento do nível de preços, que mantém a liquidez real da economia inalterada. No longo prazo, a taxa de câmbio da economia será igual a s_1. No curto prazo, a taxa de câmbio será maior do que este valor, para impedir ganhos de arbitragem, pois a taxa de câmbio tem que se apreciar depois de sua subida inicial. Este fenômeno é conhecido como o fenômeno da ultrapassagem (em inglês, *overshooting)*, no qual a taxa de câmbio ultrapassa no curto prazo seu valor de longo prazo.

2.3. Paridade da Taxa de Juros Coberta

Considere, agora, o caso de um investidor que pode aplicar seus recursos no mercado doméstico a uma taxa de juros *r*. No resgate sua aplicação terá o seguinte valor em moeda doméstica:

$$1 + r_t$$

Este investidor pode optar por ir ao mercado pronto de câmbio comprar *1/S* de moeda estrangeira e aplicá-la a uma taxa de juros r^*. No momento do investimento ele sabe exatamente o valor em moeda estrangeira que receberá no resgate do mesmo. O investidor pode vender esta moeda estrangeira no mercado futuro, ou a termo, no momento do investimento ao preço *F* vigente no mercado futuro, ou no mercado a termo, para entrega de moeda estrangeira no período *t+1*. No resgate do investimento, o valor do mesmo será igual a:

$$\frac{1}{S_t}\left(1 + r_t^*\right) F_t$$

A lei do preço único implica que os retornos destes dois ativos devem ser iguais porque eles são idênticos. Isto é:

$$1 + r_t = \left(1 + r_t^*\right)\frac{F_t}{S_t}$$

Neste caso não há necessidade da hipótese de neutralidade ao risco por parte do investidor porque não existe risco neste investimento. Tomando-se o logaritmo natural dos dois lados da expressão, com a mesma aproximação usada anteriormente, conclui-se que o diferencial de preços entre o mercado futuro, ou a termo, e o mercado pronto é igual ao diferencial das taxas de juros:

$$f_t - s_t = r_t - r_t^*$$

Comparando-se esta expressão com sua equivalente para a paridade descoberta da taxa de juros é fácil concluir que a taxa de câmbio no mercado futuro é igual à taxa de câmbio esperada para o futuro:

$$s_{t+1}^e = f_t$$

2.4. Paridade da Taxa de Juros Real Descoberta

A paridade da taxa de juros descoberta estabelece que o diferencial entre as taxas de juros interna e externa é igual à taxa de variação antecipada da taxa de câmbio:

$$1 + r_t = \left(1 + r_t^*\right) \frac{S_{t+1}}{S_t}$$

Esta expressão não se altera quando se multiplica e se divide os dois lados da mesma pela relação dos índices de preços, domésticos e externos, nos períodos *t* e *t+1*:

$$\frac{1 + r_t}{P_{t+1} / P_t} = \frac{1 + r_t^*}{P_{t+1}^* / P_t^*} \frac{\frac{S_{t+1}\ P_{t+1}^*}{P_{t+1}}}{\frac{S_t P_t^*}{P_t}}$$

O lado esquerdo desta equação é igual a um mais a taxa de juros real doméstica. A primeira fração do lado direito é igual a um mais a taxa real de juros externa. A segunda fração do lado direito é igual à razão entre a taxa de câmbio real no período *t*+1 e a taxa de câmbio real no período *t*. A paridade da taxa de juros real descoberta tem uma expressão análoga à paridade da taxa de juros nominal. Isto é:

$$1 + \rho_t = \left(1 + \rho_t^*\right) \frac{Q_{t+1}}{Q_t}$$

Tomando-se logaritmo dos dois lados desta expressão tem-se que o diferencial das taxas de juros reais é igual ao valor esperado da mudança da taxa de câmbio real:

$$\rho_t = \rho_t^* + q_{t+1} - q_t$$

onde $q_i = \log Q_i$. Esta expressão pode ser escrita em variáveis contínuas, isto é, a cada momento do tempo a diferença das taxas de juros reais é igual à derivada da taxa de câmbio real com relação ao tempo:

$$\rho = \rho^* + \dot{q}$$

No longo prazo, quando a taxa de câmbio real estiver em equilíbrio $\dot{q} = 0,$ à taxa de juros real doméstica é igual à taxa de juros real externa: $\overline{\rho} = \rho^*$.

3. Condição de Marshall-Lerner

O produto interno bruto é igual à soma do consumo(*C*), investimento (*I*), despesas do governo (*G*), exportações de bens e serviços não fatores (X), deduzido do total das importações de bens e serviços não fatores (*Z*). Isto é:

$$Y = C + I + G + X - Z$$

Quando do produto interno bruto é subtraído a renda líquida enviada para o exterior obtém-se o produto nacional bruto. A exportação líquida de bens e serviços não fatores menos a renda líquida enviada para o exterior é igual a conta corrente do balanço de pagamentos. Portanto, deve ficar claro do contexto qual o significado do símbolo *Y*, se produto interno bruto ou produto nacional bruto:

$$Y = PIB \Rightarrow X\text{-}Z = \text{exportação líquida de bens e serviços;}$$

$$Y = PNB \Rightarrow X\text{-}Z = \text{conta corrente do balanço de pagamentos.}$$

Dividindo-se a expressão do produto nacional bruto nominal pelo índice de preços obtém-se:

$$\frac{Y}{P} = \frac{C}{P} + \frac{I}{P} + \frac{G}{P} + \frac{X}{P} - \frac{SP^*}{P} z$$

O valor nominal das importações é obtido se multiplicando a taxa de câmbio nominal (*S*) pelo índice de preços (P^*) dos bens e serviços importados vezes a quantidade de bens e serviços importados (*z*). O produto nacional bruto em termos reais é dado, portanto, por:

$$y = c + i + g + x - Q\,z$$

Q é a taxa de câmbio real definida anteriormente. A conta corrente do balanço de pagamentos é igual à exportação líquida de bens e serviços, fatores e não fatores. Isto é:

$$cc = x - Q\,z$$

As exportações de bens e serviços variam no mesmo sentido da taxa de câmbio real, ou seja, quando a taxa de câmbio real aumenta (diminui) as exportações líquidas aumentam (diminuem):

$$x = x(Q,\ldots) \quad , \frac{\partial x}{\partial Q} > 0$$

As importações de bens e serviços, por sua vez, variam no sentido contrário da taxa de câmbio real. A derivada parcial das importações com relação à taxa de câmbio real é negativa:

$$z = z(Q,\ldots) \quad , \frac{\partial z}{\partial Q} < 0$$

Álgebra

A derivada da conta corrente com relação à taxa de câmbio real é dada por:

$$\frac{\partial\, cc}{\partial Q} = \frac{\partial x}{\partial Q} - \left(z + Q \frac{\partial z}{\partial Q} \right)$$

Esta expressão pode ser escrita como:

$$\frac{\partial cc}{\partial Q} = \frac{x}{Q}\frac{\partial x}{\partial Q}\frac{Q}{x} - z\left(1 + \frac{Q}{z}\frac{\partial z}{\partial Q}\right)$$

As elasticidades da exportação e da importação com relação à taxa de câmbio real são definidas por:

$$\eta_{x,Q} = \frac{\partial x}{\partial Q}\frac{Q}{x} \quad , \quad \eta_{z,Q} = \frac{\partial z}{\partial Q}\frac{Q}{z}$$

A derivada da conta corrente com relação à taxa de câmbio real pode ser escrita em função das duas elasticidades de acordo com:

$$\frac{\partial cc}{\partial Q} = \frac{x}{Q}\eta_{x,Q} - z\left(1 + \eta_{z,Q}\right)$$

Se $x = Q\, z$, isto é, se a conta corrente estiver inicialmente em equilíbrio pode-se colocar z, ou x/Q, em evidência e a derivada da conta corrente com relação à taxa de câmbio real é dada por:

$$\frac{\partial cc}{\partial Q} = \frac{x}{Q}\left(\eta_{x,Q} - \eta_{z,Q} - 1\right)$$

Marshall-Lerner

A elasticidade das importações com relação à taxa de câmbio real é um número negativo. Logo, o seu valor absoluto é igual ao valor da elasticidade das importações com o sinal trocado, e a derivada da conta corrente com relação à taxa de câmbio real depende da soma das elasticidades de acordo com:

$$\frac{\partial cc}{\partial Q} = \frac{x}{Q}\left(\eta_{x,Q} + \left|\eta_{z,Q}\right| - 1\right)$$

A condição de Marshall-Lerner estabelece as restrições que devem ser satisfeitas para que a taxa de câmbio real e a conta corrente variem no mesmo sentido. Quando a soma das duas elasticidades, em valores absolutos, for maior do que um a conta corrente aumenta (diminui) quando a taxa de câmbio real aumenta (diminui):

$$\eta_{x,Q} + \left|\eta_{z,Q}\right| - 1 > 0 \Rightarrow \frac{\partial cc}{\partial Q} > 0$$

4. Curva IS na Economia Aberta

Na economia aberta o produto nacional bruto é obtido somando-se o consumo, o investimento, os gastos do governo e a conta corrente do balanço de pagamentos:

$$y = c + i + g + cc$$

O consumo depende da renda disponível, o investimento da taxa de juros real, e a conta corrente é função da taxa de câmbio real:

$$y = c\,(y-\tau) + i\,(\rho) + g + cc(Q)$$

No equilíbrio de pleno emprego esta equação é dada por:

$$\bar{y} = c(\bar{y}-\bar{\tau}) + i(\bar{\rho}) + \bar{g} + cc(\bar{Q})$$

Álgebra

As expansões de Taylor das funções consumo, investimento e conta corrente do balanço de pagamentos, em torno do ponto correspondente ao pleno emprego, desprezando-se os termos de segunda ordem, têm as seguintes expressões:

$$c\,(y-\tau) = c\,(\bar{y}-\bar{\tau}) + c^{'}\,(y-\bar{y}-(\tau-\bar{\tau}))$$

$$i\,(\rho) = i\,(\bar{\rho}) + i^{'}\,(\rho-\bar{\rho})$$

$$cc\,(Q) = cc\,(\bar{Q}) + cc^{'}(Q-\bar{Q})$$

Subtraindo-se do produto o produto de pleno emprego e substituindo-se as expressões acima se obtém:

$$y-\bar{y} = c^{''}\,[(y-\bar{y})-(\tau-\bar{\tau})] + i^{'}\,(\rho-\bar{\rho}) + g-\bar{g} + cc^{'}(Q-\bar{Q})$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$y-\bar{y} = -\frac{c^{'}}{1-c^{'}}(\tau-\bar{\tau}) + \frac{i^{'}}{1-c^{'}}(\rho-\bar{\rho}) + \frac{1}{1-c^{'}}(g-\bar{g}) + \frac{cc^{'}}{1-c'}(Q-\bar{Q})$$

O déficit público pode substituir uma das variáveis de política fiscal nesta equação. O imposto arrecadado pelo governo é igual à diferença entre o gasto do governo e o déficit público, $\tau = g - f$. Portanto, $\tau - \bar{\tau} = g - \bar{g} - (f - \bar{f})$. Logo:

$$y-\bar{y} = \frac{i^{'}}{1-c^{'}}(\rho-\bar{\rho}) + \frac{cc^{'}}{1-c'}(Q-\bar{Q}) + \frac{c'}{1-c'}(f-\bar{f}) + g - \bar{g}$$

Esta equação, como a da curva IS da economia fechada, pode ser escrita com o hiato do produto no lado esquerdo bastando para isto que se dividam os dois lados da mesma pelo produto potencial da economia. No termo que contém o desvio da taxa de câmbio real com relação à taxa de câmbio real de pleno emprego deve-se multiplicá-lo e dividi-lo pela taxa de câmbio real de pleno emprego. Deste modo o desvio do logaritmo da taxa de câmbio real em relação ao logaritmo da taxa de câmbio real de longo prazo será um dos argumentos da curva IS. Isto é:

$$\frac{Q-\overline{Q}}{\overline{Q}} \cong \log\left(1+\frac{Q-\overline{Q}}{\overline{Q}}\right) = \log Q - \log \overline{Q} = q - \overline{q}$$

Equação da Curva IS

Na equação da curva IS numa economia aberta, o hiato do produto depende, portanto, dos hiatos da taxa de juros real, da taxa de câmbio real, do déficit público e do gasto do governo de acordo com,

$$y - \overline{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right) + \beta\left(q - \overline{q}\right) + \gamma\left(f - \bar{f}\right) + g - \overline{g}$$

Os coeficientes α, β, γ são positivos. Na hipótese de equivalência ricardiana o parâmetro γ é igual a zero, pois o déficit público não afeta o hiato do produto.

5. Curva IS na Economia Aberta: Microfundamentos

A dedução da curva IS na economia aberta com microfundamentos pode ser feita de modo simplificado admitindo-se a hipótese de que as importações e a mão-de-obra são usadas como insumos na produção do bem doméstico [enfoque de McCallum e Nelson (2000)]. O produto real da economia é, então, igual à soma do consumo, do gasto do governo e das exportações. Esta equação em logaritmos é dada por:

$$y_t = \omega_1\ c_t + \omega_2\ g_t + \omega_3\ ex$$

O peso ω_i é a proporção da respectiva variável no estado estacionário. A equação de demanda pelas exportações é a equação de demanda de um insumo que depende do produto mundial e do preço relativo:[1]

$$ex_t = y_t^* + \eta\ q_t + \kappa$$

O parâmetro η é a elasticidade de substituição entre o insumo e a mão-de-obra, κ é uma constante e q é a taxa de câmbio real definida por:

$$q_t = s_t + p_t^* - p_t$$

A quarta equação do modelo é a equação de Euler:

$$c_t = -\sigma\left(\rho_t - \delta\right) + c_{t+1}$$

Substituindo-se esta expressão na equação do produto real obtém-se:

---

[1] A equação de demanda das exportações, $Ex = \gamma(\frac{P}{SP^*})^{-\eta}\, Y^* = \gamma\ Q^{\eta}\ Y^*$, é obtida a partir de uma função de produção CES. Tomando-se o logaritmo da mesma obtém-se a equação do texto.

$$y_t = -\omega_1 \sigma(\rho_t - \delta) + \omega_1 \; c_{t+1} + \omega_2 \; g_t + \omega_3 \; ex_t$$

A equação do produto real permite escrever que:

$$\omega_1 \; c_{t+1} = y_{t+1} - \omega_2 \; g_{t+1} - \omega_3 \; ex_{t+1}$$

Substituindo-se esta equação na anterior resulta em:

$$y_t = y_{t+1} - \omega_1 \sigma(\rho_t - \delta) + \omega_2 \; (\, g_t - g_{t+1} \,) + \omega_3 \; (\, ex_t - ex_{t+1})$$

A equação de exportação quando substituída nesta expressão obtém-se:

$$y_t = y_{t+1} - \omega_1 \sigma(\rho_t - \delta) + \omega_2 \; (\, g_t - g_{t+1} \,) + \omega_3 \; (\, y_t^* - y_{t+1}^*) + \omega_3 \; \eta \; (\, q_t - q_{t+1})$$

O hiato do produto é a diferença entre o produto real e o produto potencial: $x = y - \overline{y}$ e $x^* = y^* - \overline{y}^*$. A curva IS da economia aberta é, então, igual a:

$$x_t = x_{t+1} - \omega_1 \sigma(\rho_t - \overline{\rho}) + \omega_2 \; (\, g_t - g_{t+1} \,) + \omega_3 \; (\, x_t^* - x_{t+1}^*) + \omega_3 \; \eta \; (\, q_t - q_{t+1})$$

A taxa de juros real de longo prazo, a taxa de juros natural, é dada pela seguinte expressão:

$$\overline{\rho} = \delta + \frac{1}{\omega_1 \; \sigma} \Delta \; \overline{y} - \frac{\omega_3}{\omega_1 \; \sigma} \Delta \; \overline{y}^*$$

Numa economia aberta pequena a taxa de juros real no equilíbrio de longo prazo é igual à taxa de juros internacional porque a taxa de câmbio real é igual ao seu nível de equilíbrio estacionário: $q_t = q_{t+1} = \overline{q}$. Admitindo-se que a taxa de juros real internacional seja constante, a taxa natural da economia é igual à taxa internacional. Isto é:

$$\overline{\rho} = \rho^*$$

A comparação das duas últimas equações permite concluir que:

$$\overline{\rho} = \delta + \frac{1}{\omega \sigma} \Delta \, \overline{y} - \frac{1 - \omega}{\omega \sigma} \Delta \, \overline{y}^* = \rho^*$$

Esta igualdade somente ocorreria por acaso, ou seja, não existe nenhuma razão para que dois parâmetros do modelo sejam iguais. Logo, a curva IS para uma economia aberta pequena, deduzida a partir do modelo do agente representativo com vida infinita, implica numa hipótese não palatável. Esta hipótese não é razoável, tanto do ponto de vista empírico como do ponto de vista teórico.

6. Taxa de Câmbio Real de Longo Prazo

A curva IS representa a condição de equilíbrio entre poupança e investimento. Na economia aberta o déficit da conta corrente do balanço de pagamentos é a poupança externa. Quando houver superávit na conta corrente à poupança doméstica financia a compra de ativos no estrangeiro, e no caso de déficit a poupança externa compra ativos domésticos. Subtraindo-se o imposto e o consumo do produto nacional bruto obtém-se a poupança doméstica:

$$y-\tau-c(y-\tau)=i(\rho)+g-\tau+cc(q)$$

A poupança doméstica financia o investimento, o déficit público e o superávit na conta corrente do balanço de pagamentos:

$$s(y-\tau)=i(\rho)+g-\tau+cc(q)$$

Quando a economia estiver em pleno emprego esta igualdade pode ser escrita como:

$$s(\bar{y}-\bar{\tau})-cc\ (\ \bar{q}\ )=i(\bar{\rho})+\bar{g}-\bar{\tau}$$

As poupanças, doméstica e externa, financiam, portanto, o investimento e o déficit público:

$$s(\bar{y}-\bar{\tau})+s_e\ (\ \bar{q}\ )=i(\bar{\rho})+\bar{f}$$

No equilíbrio de longo prazo numa economia aberta com perfeita mobilidade de capital a taxa de juros real de longo prazo é igual à taxa de juros externa. Portanto, a política fiscal afeta a taxa de câmbio real de equilíbrio de longo prazo. A Figura 6.3 ilustra esta proposição. No eixo vertical desta figura mede-se a taxa de juros real, no eixo horizontal mede-se a poupança e o investimento.

A curva IF é a soma do investimento com o déficit público. Ela é negativamente inclinada porque a taxa de juros real e o investimento são negativamente correlacionados. Se a economia fosse uma economia fechada na conta de capital do balanço de pagamentos a taxa de juros real seria dada pela interseção da curva IF com a curva vertical da poupança SS. Na economia aberta pequena a taxa de juros real de longo prazo é igual à taxa de juros real externa (ρ^*). A Figura 6.3 mostra que neste caso o balanço de pagamentos terá um déficit e este déficit determina a taxa de câmbio real de longo prazo.

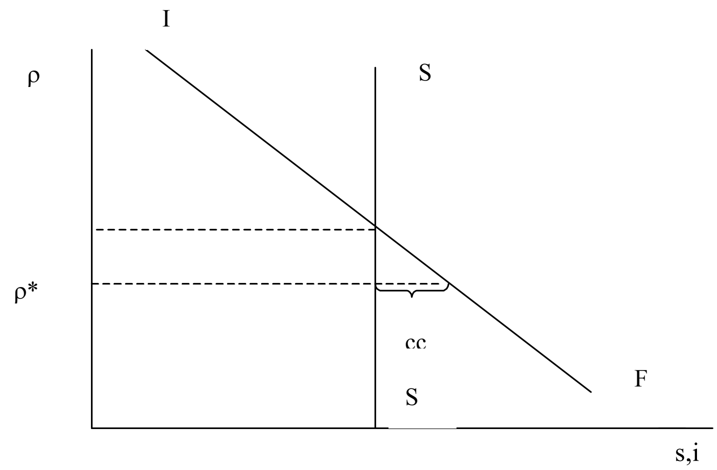


Figura 6.3

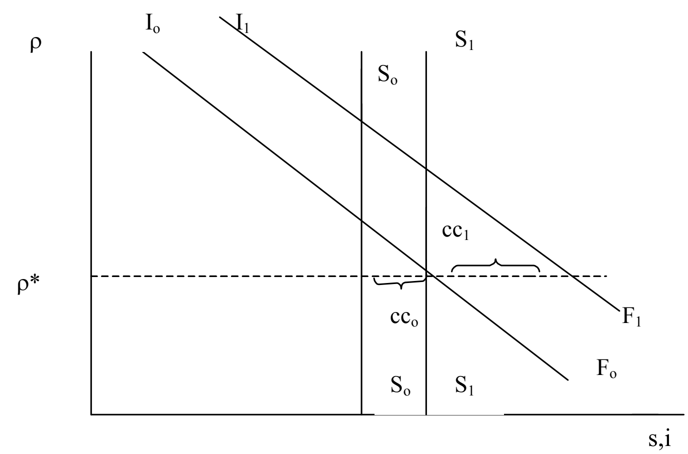


Figura 6.4

A Figura 6.4 mostra o que acontece nesta economia quando o déficit público de pleno emprego aumenta. Numa economia fechada o aumento do déficit provocaria um aumento da taxa de juros real. Numa economia aberta pequena, com perfeita mobilidade de capital, o aumento do déficit público acarreta uma apreciação do câmbio real, a expulsão (em inglês, *crowding out*) das exportações, a geração de um déficit na conta corrente do balanço de pagamentos, fenômeno este conhecido na literatura econômica como déficits gêmeos.

O modelo keynesiano (Mundell-Fleming) da economia aberta tem uma inconsistência que é facilmente percebida pela análise da Figura 6.3. Numa economia aberta pequena, a taxa de juros externa não produz, em geral, equilíbrio na conta corrente do balanço de pagamentos. Na Figura 6.3 a taxa de juros ρ^* corresponde um déficit na conta corrente. Este déficit aumenta o estoque da dívida externa do país. Enquanto a taxa de juros externa permanecer abaixo da taxa que equilibra o balanço de pagamentos, a dívida externa continuará aumentando. Neste modelo não há mecanismo que corrija este desequilíbrio.

Riqueza na Curva IS

Uma maneira de resolver esta anomalia seria admitir-se que o consumo doméstico dependa não somente da renda disponível, mas também da riqueza líquida (a) do país:

$$c = c(\ y - \tau, a\ )\ \ ,\ \ \frac{\partial\ c}{\partial\ a} > 0$$

A poupança depende, então, da renda disponível e da riqueza líquida de acordo com:,

$$s = s(\ y - \tau, a\ )\ \ ,\ \ \frac{\partial\ s}{\partial\ a} < 0$$

Quando a dívida externa do país aumenta, a riqueza do país diminui. O consumo, então, diminui e a poupança aumenta. A curva da poupança (*SS*) da Figura 6.3 desloca-se para a direita até o ponto em que a conta corrente é igual a zero. Portanto, no longo prazo, o efeito riqueza ajusta a conta corrente do balanço de pagamentos.

Não seria difícil mostrar que a curva IS da economia aberta, com o efeito riqueza na função consumo, tem um termo adicional do hiato da riqueza. Isto é:

$$y - \bar{y} = -\alpha\left(\rho - \bar{\rho}\right) + \beta\left(q - \bar{q}\right) + \gamma\left(f - \bar{f}\right) + g - \bar{g} + \psi(\ a - \bar{a})$$

onde $\bar{a}$ é a riqueza líquida de equilíbrio de longo prazo.

7. Curva de Phillips na Economia Aberta

Numa economia aberta o índice de preços ao consumidor (P_c) é uma média ponderada dos preços dos bens domésticos e dos bens importados, com o peso ω igual à proporção das despesas do consumidor com os bens e serviços importados. Isto é:

$$P_c = P^{1-\omega}\left(SP^*\right)^{\omega} = P\left(\frac{SP^*}{P}\right)^{\omega}$$

O índice de preços ao consumidor pode ser escrito como função do índice de preços domésticos e da taxa de câmbio real de acordo com:

$$P_c = P\ Q^{\omega}$$

A taxa de inflação medida pelo índice ao consumidor depende, portanto, da taxa de inflação dos bens domésticos e da taxa de variação da taxa de câmbio real:

$$\pi_c = \pi + \omega\ \overset{\circ}{q}$$

A taxa de reajuste dos salários dos trabalhadores depende da taxa de inflação esperada, medida pela taxa de inflação dos preços ao consumidor, das condições do mercado de trabalho, medida pelo hiato do produto, e do crescimento da produtividade do trabalho. Isto é:

$$\frac{\overset{\circ}{W}}{W} = \pi_c^e + \delta^* \left(y - \overline{y}\right) + \frac{\overset{\circ}{\left(y/L\right)}}{y/L}$$

As empresas reajustam os preços dos bens domésticos adicionando uma margem ao custo unitário de produção:

$$P = \left(1 + k\right)\frac{WL}{y} = \left(1 + k\right)\frac{W}{y/L}$$

A taxa de inflação dos bens e serviços domésticos é igual à diferença entre a taxa de aumento dos salários e a taxa de crescimento da produtividade da mão de obra:

$$\pi = \frac{\overset{\circ}{W}}{W} - \frac{\overset{\circ}{\left(y/L\right)}}{y/L}$$

Substituindo-se a taxa de crescimento dos salários nesta expressão obtém-se a seguinte curva de Phillips:

$$\pi = \pi^e + \omega \overset{\circ}{q} + \delta^* \left(y - \overline{y}\right)$$

A diferença entre esta curva de Phillips e aquela deduzida para uma economia fechada está na inclusão da taxa de variação do câmbio real como um dos argumentos da taxa de inflação dos bens e serviços domésticos.

Quando a inflação tem um componente inercial, a taxa esperada de inflação depende da taxa de inflação passada:

$$\pi^e = \pi\left(t - h\right)$$

A curva de Phillips é expressa, então, por:

$$\pi = \pi\left(t - h\right) + \omega \overset{\circ}{q} + \delta^* \left(y - \overline{y}\right)$$

A expansão de Taylor da taxa de inflação passada em torno do ponto correspondente à taxa de inflação atual resulta em,

$$\pi\left(t - h\right) = \pi\left(t\right) + \overset{\circ}{\pi}\left(t - \left(t - h\right)\right)$$

Logo, a curva de Phillips expressa à aceleração da inflação como função da taxa de variação do câmbio real e do hiato do produto:

$$\overset{\circ}{\pi} = \gamma \overset{\circ}{q} + \delta \left(y - \overline{y}\right)$$

onde $\gamma = \omega / h$ e $\delta = \delta^* / h$.

8. Regime de Câmbio Fixo

No regime de câmbio fixo o banco central compra e vende moeda estrangeira a um preço fixo. Admita que o modelo desta economia aberta pequena tenha as seguintes equações: a curva IS, a curva de Phillips, a paridade de juros descoberta e a regra de política monetária para fixação da taxa de câmbio. As especificações destas equações são as seguintes:

IS: $y - \overline{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right) + \beta\left(q - \overline{q}\right)$

CP: $\overset{\circ}{\pi} = \gamma \overset{\circ}{q} + \delta\left(y - \overline{y}\right)$

PJD: $\rho = \overline{\rho} + \overset{\circ}{q}, \ \ \overline{\rho} = \rho^*$

RPM: $s = \overline{s}$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

A curva IS supõe, por simplicidade, que o déficit público e o gasto do governo são iguais aos seus valores de pleno emprego. Este modelo tem cinco variáveis, o produto real, a taxa de juros real, a taxa de câmbio real, a taxa de inflação e a taxa de câmbio nominal. A quinta equação do modelo é a definição da taxa de câmbio real, em logaritmo natural, que é expressa por:

$$q = s + p^* - p$$

Álgebra

Este modelo é um modelo dinâmico e pode ser resolvido de diferentes maneiras. A solução que será apresentada a seguir irá reduzi-lo a um sistema dinâmico em duas variáveis, a taxa de inflação e o produto real. Para este objetivo, comecemos por derivar ambos os lados da expressão da taxa de câmbio real com relação ao tempo. Isto é:

$$\overset{\circ}{q} = \overset{\circ}{s} + \pi^* - \pi$$

A regra de política monetária supõe que a taxa de câmbio nominal é fixa ($\dot{s} = 0$). Logo, a taxa de variação da taxa de câmbio real é igual á diferença entre a taxa de inflação externa e a taxa de inflação doméstica:

$$\overset{\circ}{q} = \pi^* - \pi$$

De acordo com a paridade de juros descoberta a diferença entre as taxas de juros reais, interna e externa, é igual à variação da taxa de câmbio real. Portanto, da última equação segue-se que:

$$\rho - \overline{\rho} = \mathring{q} = \pi^{*} - \pi$$

Substituindo-se este resultado na curva de Phillips, conclui-se que a aceleração da inflação depende da diferença entre as taxas de inflação externa e doméstica, e do hiato do produto:

$$\mathring{\pi} = \gamma\left(\pi^{*} - \pi\right) + \delta\left(y - \overline{y}\right)$$

Para obter a segunda equação diferencial do modelo comecemos por derivar a curva IS com relação ao tempo:

$$\mathring{y} = -\alpha\ \mathring{\rho} + \beta\ \mathring{q}$$

Levando-se em conta que a variação da taxa de câmbio real é igual à diferença entre as taxas de inflação externa e doméstica segue-se que:

$$\mathring{y} = -\alpha\ \mathring{\rho} + \beta\left(\pi^{*} - \pi\right)$$

Como a diferença entre as taxas de juros real, interna e externa, é igual à derivada da taxa de câmbio real com relação ao tempo, que por sua vez é igual à diferença entre as taxas de inflação externa e interna, é fácil deduzir que:

$$\mathring{\rho} = \ddot{q} = \mathring{\pi}^{*} - \mathring{\pi} = -\mathring{\pi}$$

Esta equação supõe que a taxa de inflação externa seja constante ($\dot{\pi}^{*} = 0$). Substituindo-se esta expressão na equação da derivada do produto real com relação ao tempo obtém-se:

$$\mathring{y} = \alpha\,\mathring{\pi} + \beta\left(\pi^{*} - \pi\right)$$

Substituindo-se a expressão da aceleração da inflação nesta equação resulta em:

$$\mathring{y} = \alpha\,\gamma\left(\pi^{*} - \pi\right) + \alpha\delta\left(y - \overline{y}\right) + \beta\left(\pi^{*} - \pi\right)$$

Rearranjando-se os termos desta equação podemos escrever que a variação do produto real depende da diferença entre as taxas de inflação externa e doméstica, e do hiato do produto de acordo com:

$$\mathring{y} = \left(\alpha\gamma + \beta\right)\left(\pi^{*} - \pi\right) + \alpha\,\delta\left(y - \overline{y}\right)$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico do modelo, com regime de câmbio fixo, é formado pelas duas equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{\pi} = \gamma\left(\pi^* - \pi\right) + \delta\left(y - \bar{y}\right) \\ \\ \dot{y} = \left(\alpha\gamma + \beta\right)\left(\pi^* - \pi\right) + \alpha\,\delta\left(y - \bar{y}\right) \end{cases}$$

A matriz jacobiana deste sistema é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \overset{\circ}{\pi}}{\partial \pi} & \dfrac{\partial \overset{\circ}{\pi}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \overset{\circ}{y}}{\partial \pi} & \dfrac{\partial \overset{\circ}{y}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & \delta \\ -\left(\alpha\gamma + \beta\right) & \alpha\,\delta \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é positivo,

$$\left|J\right| = -\alpha\delta\gamma + \delta\left(\alpha\gamma + \beta\right) = \delta\,\beta > 0$$

e o traço tanto pode ser positivo como negativo:

$$tr\ J = \alpha\delta - \gamma$$

Para que o sistema dinâmico seja estável admite-se que a seguinte desigualdade seja válida:

$$\alpha\delta - \gamma < 0$$

Neste caso, o traço da matriz jacobiana do sistema dinâmico é negativo.

Os pontos do diagrama de fases, com a inflação no eixo vertical e o produto real no eixo horizontal, ao longo do qual a inflação não muda de valor correspondem à equação:

$$\overset{\circ}{\pi} = 0 \quad \Rightarrow \pi = \pi^* + \frac{\delta}{\gamma}\left(y - \bar{y}\right)$$

A Figura 6.5 contém o gráfico desta reta e as setas indicam o que ocorre com a dinâmica da taxa de inflação. Nos pontos abaixo da reta a inflação aumenta e nos pontos acima da reta a taxa de inflação diminui.

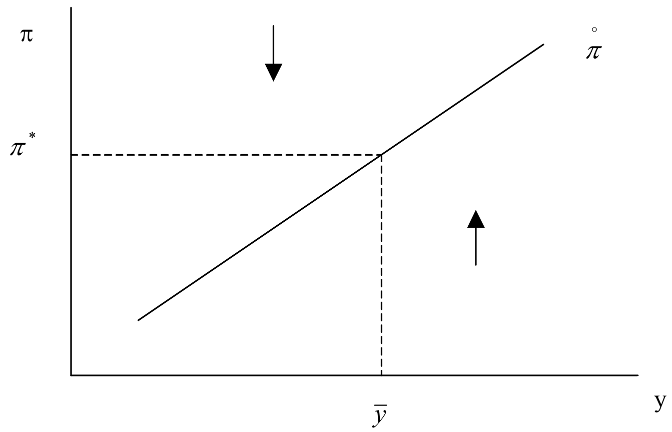


Figura 6.5

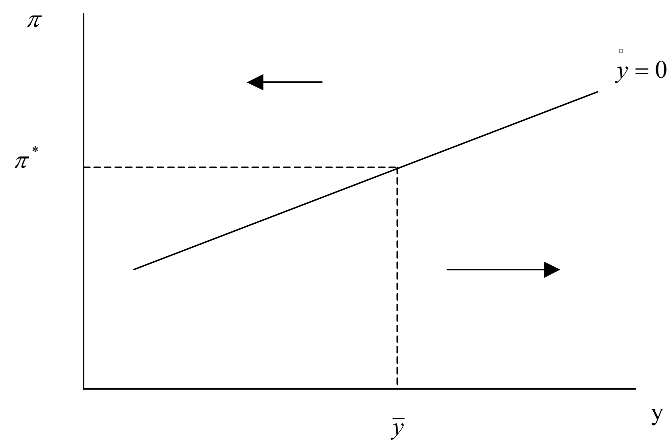


Figura 6.6

Para desenhar o gráfico do diagrama de fases da equação diferencial do produto real, a equação em que o produto real não muda de valor é dada por:

$$\overset{\circ}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi = \pi^* + \frac{\alpha\,\delta}{\alpha\gamma + \beta}\left(y - \bar{y}\right)$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$\pi = \pi^* + \frac{\delta}{\gamma\left(1 + \dfrac{\beta}{\alpha\gamma}\right)}\left(y - \bar{y}\right)$$

O coeficiente angular desta curva é menor do que o coeficiente da reta na qual a taxa de inflação não muda de valor. A Figura 6.6 mostra o gráfico da reta e a direção do produto real. Nos pontos acima da reta o produto real diminui. Nos pontos abaixo da reta o produto real aumenta.

A Figura 6.7 mostra o diagrama de fases do modelo, com quatro regiões. Na região I a economia move-se na direção nordeste; na região II o movimento é na direção noroeste; na região III a economia quando estiver em desequilíbrio caminha na direção sudoeste e na região IV move-se numa rota sudeste. No ponto de equilíbrio, a taxa de inflação é igual à taxa de inflação externa e o produto é igual ao produto potencial.

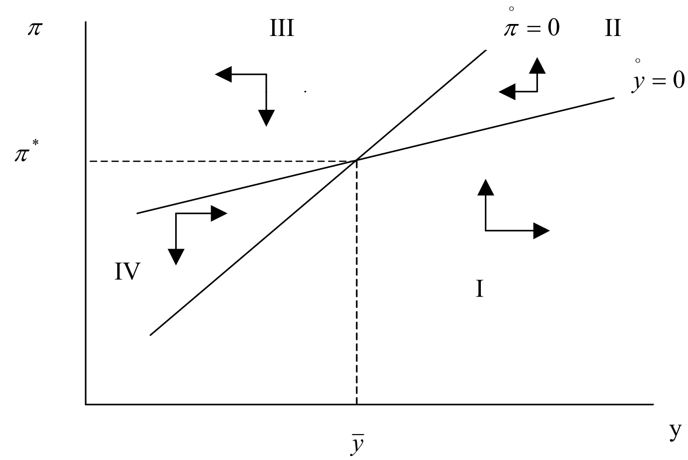


Figura 6.7

Experimento

A Figura 6.8 descreve o experimento que consiste num aumento da taxa de inflação externa de $\pi^*{}_0$ para $\pi^*{}_1$. No novo equilíbrio de longo prazo a taxa de inflação é igual à nova taxa de inflação externa.

No curto prazo a taxa de inflação aumenta lentamente em virtude da inércia da taxa de inflação. A economia encontra-se na região I e o produto real começa a aumentar como descrito na Figura 6.9. Depois de certo tempo a taxa de inflação ultrapassa a taxa de inflação externa e o produto continua aumentando. A razão desta ultrapassagem é de que no início do processo de ajuste a taxa de câmbio real aumenta, mas no longo prazo retorna ao seu valor inicial. Para que isto ocorra é necessário que durante algum tempo a taxa de inflação doméstica cresça mais rapidamente que à taxa de inflação externa.

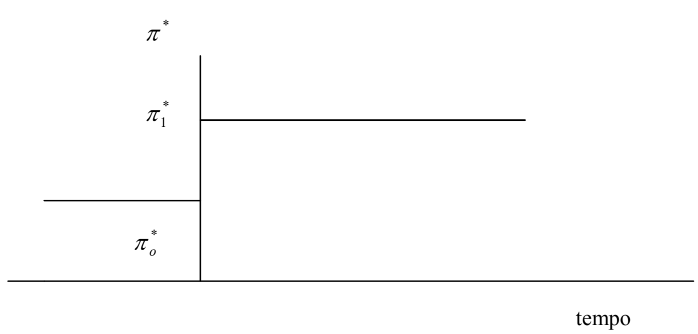


Figura 6.8

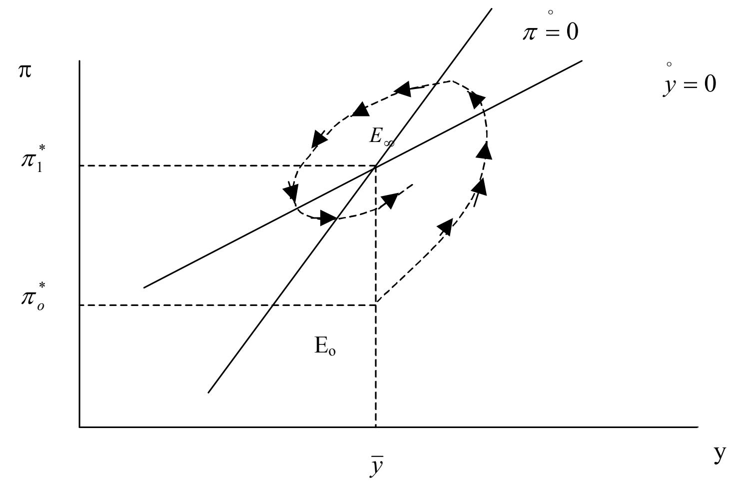


Figura 6.9

A Figura 6.10 descreve a trajetória de ajuste da inflação doméstica à mudança da taxa de inflação externa, supondo que os parâmetros do modelo produzam um ajuste oscilatório.

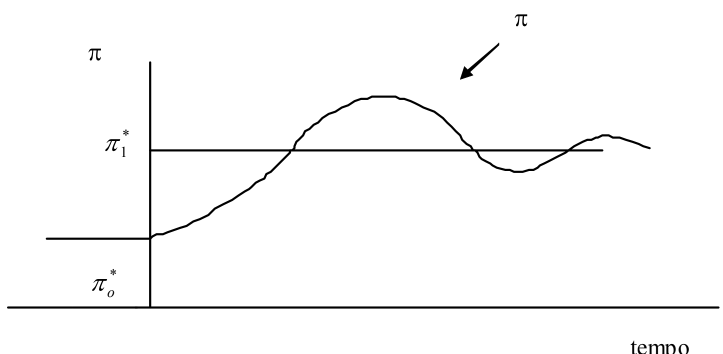


Figura 6.10

9. Regime de Câmbio Flexível

No regime de câmbio flexível o banco central controla a taxa de juros nominal e o mercado determina a taxa de câmbio. As curvas IS, de Phillips e a paridade descoberta da taxa de juros têm a mesma especificação do modelo com regime de câmbio fixo. A regra de política monetária é a regra de Taylor. O modelo tem, então, as seguintes equações:

$$\text{IS: } y - \bar{y} = -\alpha\left(\rho - \bar{\rho}\right) + \beta\left(q - \bar{q}\right)$$

$$\text{CP: } \overset{\circ}{\pi} = \gamma \overset{\circ}{q} + \delta\left(y - \bar{y}\right)$$

PJD: $\rho = \overline{\rho} + \mathring{q}\ ,\ \overline{\rho} = \rho^*$

RPM: $r = \overline{\rho} + \pi + \phi(\pi - \overline{\pi}) + \theta(y - \overline{y})$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Este modelo pode ser resolvido de diferentes maneiras. Em primeiro lugar, apresenta-se a solução em que ele é reduzido a um sistema dinâmico de duas equações diferenciais, do produto real e da taxa de inflação. Depois se apresenta a solução do modelo num sistema dinâmico de equações diferenciais das taxas de juros e de câmbio reais.

Álgebra

A combinação da curva de Phillips com a paridade descoberta de juros permite escrever a aceleração da taxa de inflação em função dos hiatos da taxa de juros real e do produto:

$$\mathring{\pi} = \gamma(\rho - \overline{\rho}) + \delta(y - \overline{y})$$

O hiato da taxa de juros real de acordo com a regra de política monetária é dado por:

$$\rho - \overline{\rho} = \phi(\pi - \overline{\pi}) + \theta(y - \overline{y})$$

Substituindo-se esta equação na expressão anterior obtém-se a equação diferencial da taxa de inflação como função do hiato da taxa de inflação e do hiato do produto:

$$\mathring{\pi} = \gamma\,\phi(\pi - \overline{\pi}) + (\gamma\,\theta + \delta)(y - \overline{y})$$

Para obter a equação diferencial do produto real comecemos por derivar, com relação ao tempo, a curva IS e a regra de política monetária:

$$\mathring{y} = -\alpha\,\mathring{\rho} + \beta\,\mathring{q}$$
$$\mathring{\rho} = \phi\,\mathring{\pi} + \theta\,\mathring{y}$$

Substituindo-se a segunda equação na primeira resulta em:

$$\mathring{y} = -\alpha\,\phi\,\mathring{\pi} - \alpha\,\theta\,\mathring{y} + \beta(\rho - \overline{\rho})$$

Levando-se em conta a regra de política monetária para substituir o hiato da taxa de juros real e transferindo-se para o lado esquerdo o termo que contém a derivada do produto real com relação ao tempo chega-se a seguinte expressão:

$$(1 + \alpha\,\theta)\mathring{y} = -\alpha\phi\,\mathring{\pi} + \beta\phi(\pi - \overline{\pi}) + \beta\theta(y - \overline{y})$$

Substituindo-se a derivada da inflação com relação ao tempo pela expressão da equação diferencial da mesma obtém-se:

$$\left(1+\alpha\,\theta\right)\overset{\circ}{y} = -\alpha\phi\gamma\phi\,\left(\pi-\overline{\pi}\right) - \alpha\phi\left(\gamma\theta+\delta\right)\left(y-\overline{y}\right) + \beta\phi\left(\pi-\overline{\pi}\right) + \beta\theta\left(y-\overline{y}\right)$$

Esta expressão pode ser reescrita como:

$$\left(1+\alpha\theta\right)\overset{\circ}{y} = \phi\,\left(\beta-\alpha\phi\gamma\right)\left(\pi-\overline{\pi}\right) + \left[\beta\theta-\alpha\phi\left(\gamma\theta+\delta\right)\right]\left(y-\overline{y}\right)$$

Sistema Dinâmico

O modelo da economia aberta pequena, com regime de câmbio flexível, pode ser resumido no sistema dinâmico de duas equações diferenciais do produto real e da taxa de inflação:

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{\phi\left(\beta-\alpha\phi\gamma\right)}{1+\alpha\theta}\left(\pi-\overline{\pi}\right) + \dfrac{\left[\beta\theta-\alpha\phi\left(\gamma\theta+\delta\right)\right]}{1+\alpha\theta}\left(y-\overline{y}\right) \\ \\ \dot{\pi} = \gamma\phi\,\left(\pi-\overline{\pi}\right) + \left(\gamma\,\theta+\delta\right)\left(y-\overline{y}\right) \end{cases}$$

A matriz jacobiana deste sistema é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\,\overset{\circ}{\pi}}{\partial\pi} & \dfrac{\partial\,\overset{\circ}{\pi}}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\,\overset{\circ}{y}}{\partial\pi} & \dfrac{\partial\,\overset{\circ}{y}}{\partial\,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\phi & \gamma\theta+\delta \\ \\ \dfrac{\phi\left(\beta-\alpha\phi\gamma\right)}{1+\alpha\theta} & \dfrac{\beta\theta-\alpha\phi\left(\gamma\theta+\delta\right)}{1+\alpha\theta} \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é negativo e o sistema tem um ponto de sela. Isto é:

$$\left|J\right| = \frac{\gamma\phi\beta\theta-\gamma\phi\alpha\phi\,\left(\gamma\theta+\delta\right)-\left(\gamma\theta+\delta\right)\left(\phi\beta-\alpha\phi\phi\gamma\right)}{1+\alpha\theta} = -\,\frac{\delta\;\phi\;\beta}{1+\alpha\;\theta}$$

$$\left|J\right| < 0 \Rightarrow sela$$

A Figura 6.11 mostra o diagrama de fases da equação diferencial da taxa de inflação. No eixo vertical mede-se a taxa de inflação e no eixo horizontal o produto real. A equação que descreve os pontos em que a taxa de inflação não muda é uma linha reta com uma inclinação negativa. Isto é:

$$\dot{\pi} = 0 \Rightarrow \pi = \overline{\pi} - \frac{\gamma\;\theta+\delta}{1+\alpha\;\theta}\left(y-\overline{y}\right)$$

Nos pontos acima da reta a taxa de inflação aumenta e nos pontos abaixo da mesma a taxa de inflação diminui.

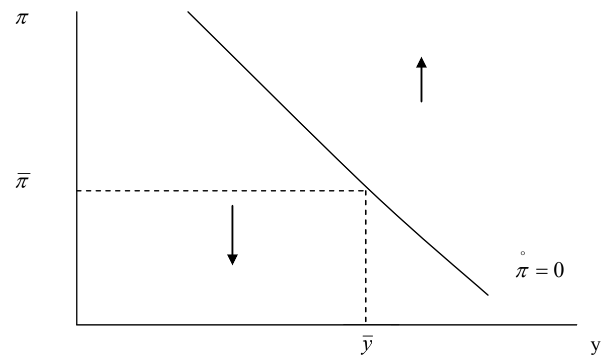


Figura 6.11

O diagrama de fases da equação diferencial do produto real depende dos valores dos parâmetros do modelo. A equação $\dot{y} = 0$ é uma linha reta, porém sua inclinação depende dos sinais dos parâmetros, como se pode constatar examinando-se o coeficiente do hiato do produto na equação:

$$\overset{\circ}{y} = 0 \Rightarrow \pi = \bar{\pi} - \frac{[\beta\theta - \alpha\phi(\gamma\theta + \delta)]}{\phi(\beta - \alpha\phi\gamma)}(y - \bar{y})$$

A equação anterior pode ser escrita como:

$$\pi = \bar{\pi} - \frac{\theta(\beta - \alpha\phi\gamma) - \alpha\phi\delta}{\phi(\beta - \alpha\phi\gamma)}(y - \bar{y})$$

Se $\beta - \alpha\phi\gamma < 0$ a inclinação desta reta é negativa. Na hipótese de que $\beta - \alpha\phi\gamma < 0$ as retas que correspondem a $\dot{y} = 0$ e a $\dot{\pi} = 0$ são negativamente inclinadas. Para saber qual delas é a mais inclinada verifica-se a diferença entre os valores absolutos dos dois coeficientes angulares. Isto é, o valor absoluto do coeficiente angular da reta $\dot{y} = 0$ é maior do que o valor absoluto do coeficiente angular da reta $\dot{\pi} = 0$:

$$\frac{\theta(\beta - \alpha\phi\gamma) - \alpha\phi\delta}{\phi(\beta - \alpha\phi\gamma)} - \frac{\gamma\theta + \delta}{\gamma\phi} = \frac{-\beta\delta}{\gamma\phi(\beta - \alpha\phi\gamma)} > 0$$

Na hipótese de que os parâmetros do modelo satisfaçam à desigualdade $\beta - \alpha\phi\gamma > 0$ existem duas possibilidades. Caso $\theta(\beta - \alpha\phi\gamma) > \alpha\phi\delta$ a reta $\dot{y} = 0$ é negativamente inclinada e a diferença dos coeficientes (veja expressão acima) é negativa, ou seja, o valor absoluto do coeficiente angular desta reta é menor do que o coeficiente angular da reta $\dot{\pi} = 0$. Quando $\theta(\beta - \alpha\phi\gamma) < \alpha\phi\delta$ a reta $\dot{y} = 0$ é positivamente inclinada. O diagrama de fases deste caso está apresentado na Figura 6.12. Nos pontos abaixo da reta o produto real diminui e nos pontos acima da reta o produto real aumenta.

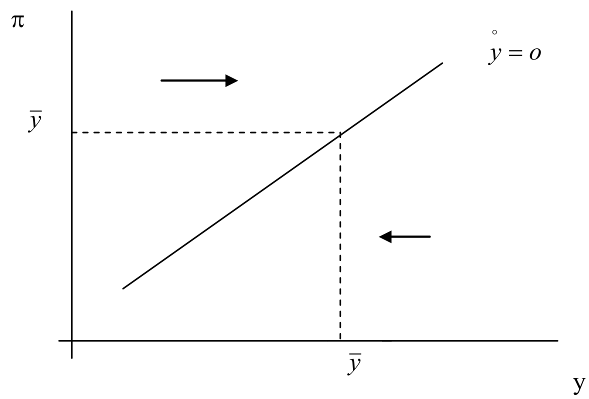


Figura 6.12

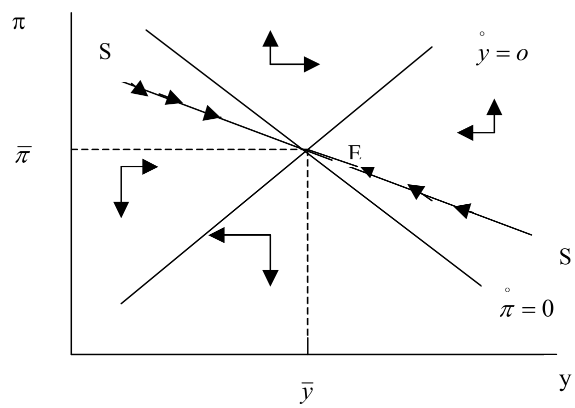


Figura 6.13

A Figura 6.13 mostra o diagrama de fases do sistema dinâmico, com a reta $\dot{y} = 0$ positivamente inclinada. A trajetória de sela *SS* convergente é negativamente inclinada.

Experimento

Este modelo pode ser usado para analisar o experimento de política econômica que consiste na mudança da meta de inflação pelo banco central. Admita que o banco central reduza a meta de inflação de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1$, como indicado na Figura 6.14. Neste modelo a taxa de inflação não muda instantaneamente, porque ela é uma variável predeterminada. O gráfico da Figura 6.15 mostra a dinâmica de ajuste da economia. O produto real tem uma redução no momento do anúncio da nova meta de inflação, e a economia entra numa recessão. A taxa de inflação começa a diminuir gradualmente, seguindo a trajetória da sela *SS*, até atingir a nova meta de inflação e a economia retorna ao produto real de pleno emprego.

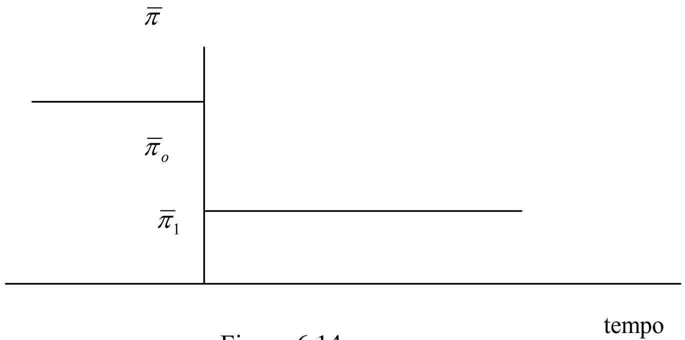


Figura 6.14

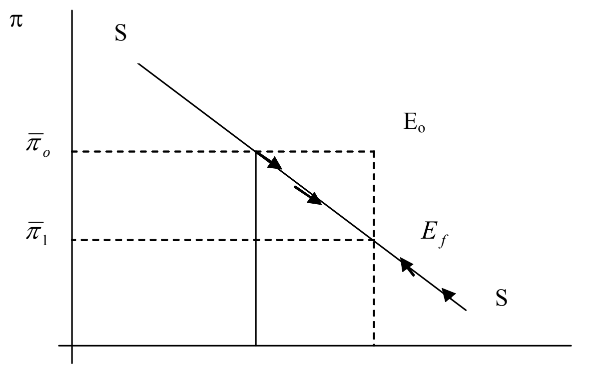


Figura6.15

Álgebra

O modelo apresentado nesta seção também pode ser resolvido com um sistema de equações diferenciais nas variáveis taxas de câmbio real e de juros real. A equação diferencial da taxa de câmbio real é a equação da paridade de juros descoberta:

$$\mathring{q} = \rho - \overline{\rho}$$

Para obter-se a equação diferencial da taxa de juros real comecemos por derivar, com relação ao tempo, as equações da regra de política monetária e da curva IS. Isto é:

$$\mathring{\rho} = \phi\,\mathring{\pi} + \theta\,\mathring{y}$$

$$\mathring{y} = -\alpha\,\mathring{\rho} + \beta\,\mathring{q}$$

Substituindo-se o valor de $\dot{y}$ na equação de $\dot{\rho}$ resulta:

$$\mathring{\rho} = \phi\,\mathring{\pi} - \alpha\theta\,\mathring{\rho} + \beta\theta\,\mathring{q}$$

A aceleração da inflação depende da variação do câmbio real e do hiato do produto. Logo:

$$(1+\alpha\theta)\overset{\circ}{\rho} = \phi\left[\gamma\,\dot{q} + \delta(y-\overline{y})\right] + \beta\theta\,\overset{\circ}{q}$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$(1+\alpha\theta)\overset{\circ}{\rho} = \phi\delta(y-\overline{y}) + (\beta\theta+\phi\gamma)\overset{\circ}{q}$$

O hiato do produto depende dos hiatos da taxa de juros real e do câmbio real de acordo com a curva IS. A expressão anterior transforma-se, então, na seguinte equação:

$$(1+\alpha\theta)\overset{\circ}{\rho} = \phi\delta[-\alpha(\rho-\overline{\rho}) + \beta(q-\overline{q})] + (\beta\theta+\phi\gamma)(\rho-\overline{\rho})$$

Colocando-se em evidência os termos que correspondem aos hiatos de juros e de câmbio obtém-se a equação diferencial da taxa de juros real:

$$(1+\alpha\theta)\overset{\circ}{\rho} = (\beta\theta+\phi\gamma-\alpha\phi\delta)(\rho-\overline{\rho}) + \beta\phi\delta\,(q-\overline{q})$$

Sistema Dinâmico

O sistema dinâmico do modelo, no regime de câmbio flexível, é formado pelas equações diferenciais da taxa de juros real e da taxa de câmbio real:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \dfrac{\beta\theta+\phi\gamma-\alpha\phi\delta}{1+\alpha\theta}(\rho-\overline{\rho}) + \dfrac{\beta\phi\delta}{1+\alpha\theta}(q-\overline{q}) \\ \\ \overset{\circ}{q} = \rho-\overline{\rho} \end{cases}$$

A matriz jacobiana deste sistema é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\overset{\circ}{\rho}}{\partial\rho} & \dfrac{\partial\overset{\circ}{\rho}}{\partial q} \\ \dfrac{\partial\overset{\circ}{q}}{\partial\rho} & \dfrac{\partial\overset{\circ}{q}}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta\theta+\phi\gamma-\alpha\phi\delta}{1+\alpha\theta} & \dfrac{\beta\phi\delta}{1+\alpha\theta} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é negativo:

$$|J| = -\frac{\beta\phi\delta}{1+\alpha\theta} < 0 \Rightarrow sela$$

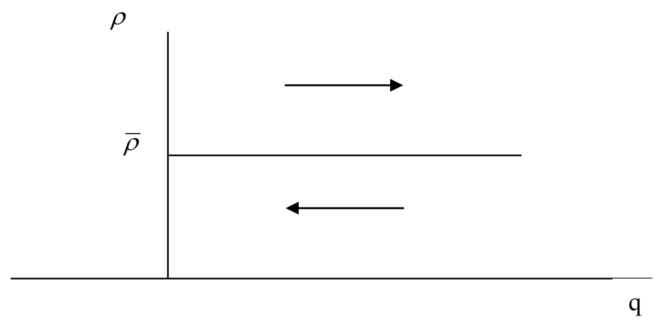


Figura6.16

A Figura 6.16 mostra o diagrama de fases da equação diferencial da taxa de câmbio real, com a taxa de juros real no eixo vertical e a taxa de câmbio real no eixo horizontal. Quando a taxa de câmbio real não varia, a taxa de juros real é igual à taxa de juros real externa:

$$\overset{\circ}{q} = 0 \Rightarrow \rho = \overline{\rho}$$

Nos pontos acima da taxa de juros real externa a taxa de câmbio real aumenta, e nos pontos abaixo da taxa de juros real externa a taxa de câmbio real diminui, como indicado pelas setas.

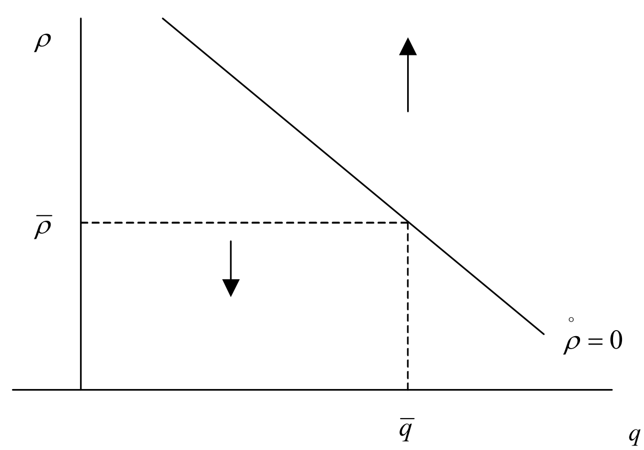


Figura 6.17

O diagrama de fases da equação diferencial da taxa de juros real está desenhado na Figura 6.17. A reta que corresponde aos pontos em que à taxa de juros real permanece constante tanto pode ser negativamente inclinada como positivamente inclinada, dependendo dos parâmetros do modelo:

$$\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \overline{\rho} - \frac{\beta\phi\delta}{\beta\theta + \phi\gamma - \alpha\phi\delta}\left(q - \overline{q}\right)$$

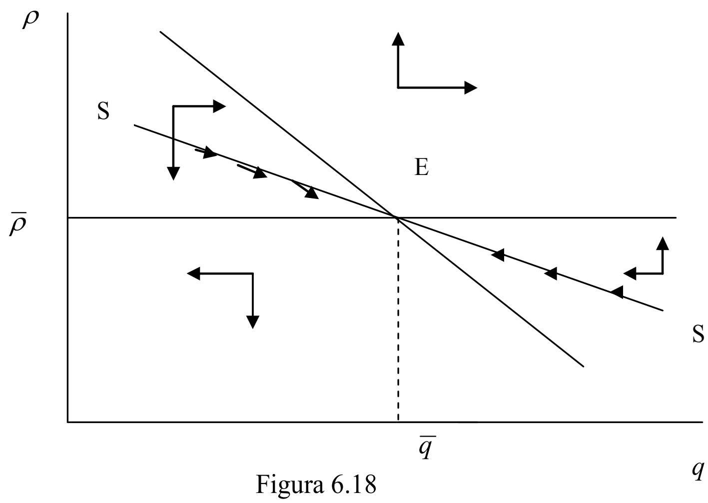


Figura 6.18

Na Figura 6.17 supõe-se que a reta $\dot{\rho} = 0$ seja negativamente inclinada. Esta hipótese não altera as conclusões qualitativas do modelo. Nos pontos acima desta reta a taxa de juros real aumenta e nos pontos abaixo a taxa de juros real diminui.

A Figura 6.18 mostra o diagrama de fases do sistema dinâmico formado pelas equações diferenciais das taxas de juros e de câmbio reais. A sela convergente *SS* é negativamente inclinada. A principal conclusão é de que a taxa de juros real e a taxa de câmbio real movem-se em sentidos opostos, ou seja, a taxa de juros real e a taxa de câmbio real devem estar negativamente correlacionadas. Analiticamente, na sela, o hiato do câmbio e o hiato do juros estariam relacionados por uma equação do tipo:

$$q - \bar{q} = -\kappa\,(\rho - \bar{\rho})$$

onde o coeficiente κ é positivo e depende dos parâmetros do modelo. Esta equação quando substituída na equação da curva IS resulta em:

$$y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) = -(\alpha + \beta\,\kappa)\,(\rho - \bar{\rho})$$

O efeito da política monetária sobre o hiato do produto é muito maior na economia aberta em virtude da taxa de juros afetar a taxa de câmbio e esta influenciar a conta corrente do balanço de pagamentos.

Experimento

O experimento de política econômica, descrito na Figura 6.14, em que o banco central reduz a meta de inflação de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1$ pode ser analisado a partir do diagrama de fases da Figura 6.18. As duas retas, $\dot{\rho} = 0$ e $\dot{q} = 0$, não deslocam com a mudança da política monetária e mantêm-se inalteradas. Todavia, a economia não permanece no ponto de equilíbrio *E*. Este ponto é o ponto de equilíbrio de longo prazo. No momento do anúncio da nova meta de inflação o banco central aumenta a taxa de juros nominal. Como a inflação é uma variável predeterminada, a taxa de juros real também aumenta, e o produto da economia é afetado. Por outro lado, o aumento da taxa de juros nominal acarreta a redução da taxa de câmbio nominal em virtude da entrada de divisas no mercado de câmbio. Como conseqüência, a taxa de câmbio real aprecia-se. As duas variáveis, as taxas reais de juros e de câmbio, mudam instantaneamente. Como determinar o ponto na sela *SS* para o qual estas variáveis saltam do seu ponto de equilíbrio inicial? Estas variáveis têm de satisfazer a cada momento a curva IS e a regra de política monetária. Eliminando-se o hiato do produto destas duas equações obtém-se:

$$\rho - \bar{\rho} = \frac{\phi}{1+\alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}) + \frac{\beta\theta}{1+\alpha\theta}(q - \bar{q})$$

A Figura 6.19 mostra o gráfico desta reta, representada pelas letras *RR*, no momento da mudança da política monetária. Neste instante o hiato da taxa de inflação é medido pela diferença entre a antiga e a nova meta de inflação. O ponto de interseção da reta *RR* com a sela *SS* é o ponto inicial das taxas de juros e de câmbio reais logo após o anúncio da nova meta de inflação. A economia começa, então, a mover-se na direção do equilíbrio de longo prazo (ponto E), com a redução da taxa de juros real e o aumento da taxa de câmbio real ao longo da trajetória da sela *SS*.

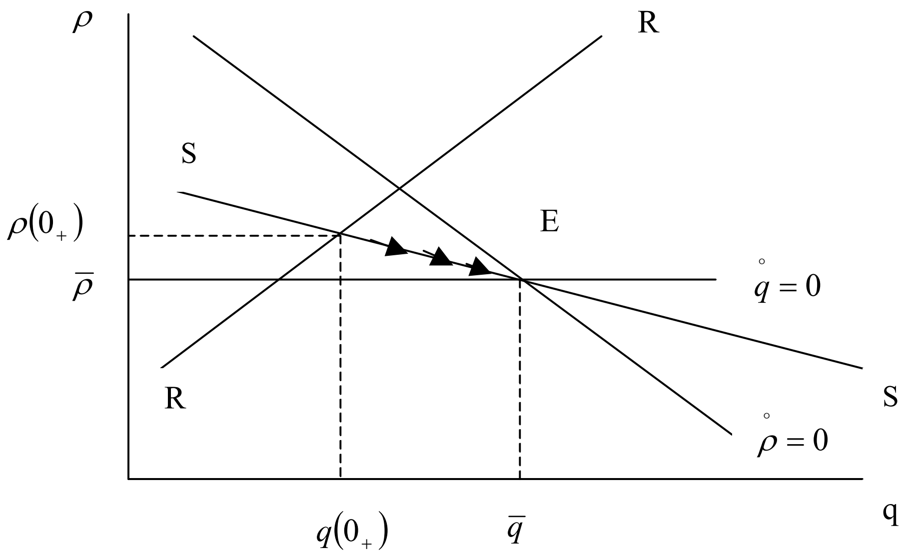


Figura 6.19

10. Exercícios

1) Considere o seguinte modelo de uma economia aberta pequena (enfoque monetário do balanço de pagamentos com taxa de câmbio fixo):

$$M^s = C + R$$
$$M^d = P\,L\,(y, r)$$
$$r = r*$$
$$y = \bar{y}$$
$$P = SP*\text{ , } S = \bar{S} = \text{constante}$$

Os símbolos têm o seguinte significado: M^s= quantidade ofertada de moeda; C = crédito doméstico líquido; R= reservas internacionais; M^d = quantidade demandada de moeda; P = nível de preços domésticos; r = taxa de juros no país; $r*$ = taxa de juro internacional; S = taxa de câmbio nominal; $P*$ = nível de preços internacional.

a) Qual o efeito de uma desvalorização cambial sobre o balanço de pagamentos?
b) Qual o efeito de um aumento do crédito doméstico líquido sobre o balanço de pagamentos?

2) Considere o seguinte modelo de uma economia aberta pequena (enfoque monetário do balanço de pagamentos com taxa de câmbio flexível):

Equilíbrio no mercado monetário do país A: $\dfrac{M}{P} = L(y, r)$

Equilíbrio no mercado monetário do país B: $\dfrac{M^*}{P^*} = L(y^*, r^*)$

Taxa de câmbio: $S = \dfrac{P}{P^*}$

Comente as seguintes proposições:

a) a taxa de câmbio se desvaloriza quando o país cresce mais rapidamente do que os outros.
b) a taxa de câmbio se aprecia quando o estoque de moeda cresce mais rapidamente do que o estoque de moeda dos outros países.

3) Considere o seguinte modelo de uma economia aberta pequena (enfoque monetário do balanço de pagamentos com taxa de câmbio flexível):

Equilíbrio no mercado monetário do país A: $m - p = \alpha\ y - \beta\ r$

Equilíbrio no mercado monetário do país B: $m^* - p^* = \alpha\ y^* - \beta\ r^*)$

Taxa de câmbio: $s = p - p^*$

Paridade de juros descoberta: $r = r^* + \dot{s}$

a) Deduza a equação diferencial de determinação da taxa de câmbio.
b) A solução desta equação tem um componente de bolha?

4) Considere a seguinte regressão:

$$s_{t+1} - s_t = a_o + a_1 (f_t - s_t) + \in_t$$

ou

$$s_{t+1} - s_t = a_o + a_1 (r_t - r_t^*) + \in_t$$

Os símbolos têm o seguinte significado: s é o logaritmo da taxa de câmbio no mercado pronto (spot), f é o logaritmo da taxa de câmbio no mercado a termo (forward), r_t é a taxa de juros doméstica e r_t^* é a taxa de juros externa.

A taxa de câmbio no mercado a termo, ou o diferencial da taxa de juros, é uma boa previsão da taxa de câmbio no mercado pronto no futuro?

5) (Efeito Harberger-Laursen-Metzler (HLM)). Numa economia aberta o produto nacional (Y) é igual à soma de absorção (A) com o saldo da conta corrente do balanço de pagamentos (X-Z):

$$Y=A+X-Z$$

O índice de preços da absorção é uma média geométrica do preço do bem doméstico (P) e do preço do bem internacional, convertido em moeda doméstica pela taxa de câmbio (SP*):

$$P_a = P^{1-\alpha}(SP^*)^{\alpha} = P\left(\frac{SP^*}{P}\right)^{\alpha} = PQ^{\alpha}$$

onde α é a proporção do produto importado na absorção e $Q=SP^*/P$ a taxa de câmbio real. O produto pode ser escrito em termos reais como:

$$y = d + x - Q\,z$$

onde $d = \frac{P_a\, a}{P}$, $x = \frac{X}{P}$ e $z = \frac{Z}{SP^*}$. A absorção real (a) depende da renda real definida por: $y_a = \frac{Py}{P_a}$

a) Mostre que a elasticidade do dispêndio com relação à taxa de câmbio real $(\eta_{d,Q})$ é dada por:

$$\eta_{d,Q} = \alpha\left(1 - \eta_{a,y_a}\right)$$

onde η_{a,y_a} é a elasticidade da absorção com relação à renda real.

b) Mostre que a poupança (s-y-d-τ, onde τ é o imposto) varia com a taxa de câmbio real, de acordo com:

$$\frac{\partial s}{\partial Q} = \frac{\alpha\, d}{Q}\left(\eta_{a,y_a} - 1\right)$$

c) (Efeito HLM). O que acontece com a conta corrente do balanço de pagamentos de $\eta_{a,y_a} < 1$ e ocorre uma melhora nos termos de trocas do país?

6) Considere o seguinte modelo de uma economia aberta pequena (modelo Mundell-Fleming-Dornbusch):

$$\dot{p} = \delta \left(d - y\right)$$
$$d = k + \alpha \left(e + p^* - p\right) - \beta r$$
$$m - p = -\gamma \ r + \phi \ y$$
$$r = r^* + \dot{e}^e$$
$$\dot{e}^e = \dot{e}$$

Os símbolos têm o seguinte significado: p= índice de preços; d = dispêndio; y = produto real; e = taxa de câmbio nominal; p*= índice de preços do exterior; r = taxa de juros; m = estoque de moeda; r* = taxa de juros no exterior; $\delta, k, \alpha, \beta, \gamma \ e \ \phi$ são parâmetros positivos e o índice e indica o valor esperado da variável. As variáveis do modelo são os logaritmos das mesmas, com exceção da taxa de juros.

a) Qual o efeito, no curto e no longo prazo, sobre a taxa de câmbio, de um aumento do déficit público?

b) Qual o efeito, no curto e no longo prazo, sobre a taxa de câmbio, de um aumento do índice de preços, dos bens e serviços produzidos no exterior?

7) Considere o seguinte modelo:

$$\dot{p} = \phi(y - \bar{y})$$
$$y = \alpha_0 + \alpha_1(s + p^* - p) - \alpha_2 r$$
$$m - p = \beta_0 + \beta_1 y - \beta_2 r$$
$$r = r^* + \dot{s}$$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real, s = taxa de câmbio nominal, p* = índice de preços externos, p = índice de preços domésticos, r = taxa de juros, m = quantidade nominal de moeda, r* = taxa de juros internacional, $\bar{y}$ = produto potencial. As variáveis do modelo são os logaritmos das mesmas, com exceção da taxa de juros.

a) Qual o efeito de um aumento da quantidade de moeda sobre a taxa de câmbio?

b) Compare a resposta do item anterior com aquela que se obteria se substituísse a equação de $\dot{p}$ pela seguinte: $\dot{p} = \phi\,(d - y)$, com a segunda equação transformando-se na equação do dispêndio: $d = \alpha_o + \alpha_1(s + p^* - p) - k_2 r$. Existe a possibilidade de uma expansão monetária causar *undershooting* ao invés de *overshooting*?

8) Considere o seguinte modelo:

$$\begin{cases} M = m\ (r, r^* + \dot{s})\ W \\ B = b\ (r, r^* + \dot{s})\ W \\ S\ F = f\ (r, r^* + \dot{s})\ W \\ W = M + B + S\ F \\ \dot{F} = \varphi\ (S\ P^* / P) + r^* F \end{cases}$$

Os símbolos têm o seguinte significado: M = estoque de moeda; B = estoque de títulos domésticos; F = estoque de títulos denominados em moeda estrangeira; S = taxa de câmbio; s= logaritmo da taxa de câmbio r = taxa de juros doméstica; r* = taxa de juros

externa; P = nível de preços doméstico (exógeno); P* = nível de preços externo (exógeno).
a) Discuta a especificação de cada equação do modelo e analise o seu equilíbrio;
b) Mostre o que acontece com s e com F em cada uma das seguintes condições: i) aumento de M; ii) aumento de B.

9) Considere o seguinte modelo de portfolio de taxa de câmbio flexível:

$$S=g(F,M,B,r*),\ \frac{\partial S}{\partial F}<0$$

$$\dot{F}=X\left(\frac{S}{P}\right)+r*F$$

onde S é a taxa de câmbio, F é o total de ativos denominados em moeda estrangeira, M é o estoque de moeda, B é o estoque de títulos, r* é a taxa de juros internacional, P é o nível de preços doméstico. $\dot{F}=dF/dt$, e $X(S/P)$ representa as exportações líquidas. Com base neste modelo, comente a seguinte proposição. "Um país com déficit na conta corrente do balanço de pagamentos tende a depreciar o câmbio, enquanto um país com superávit tende a apreciar o câmbio."

10) Considere o seguinte modelo de uma economia aberta pequena:

IS: $y-\bar{y}=-\alpha\left(\rho-\bar{\rho}\right)+\beta\left(q-\bar{q}\right)$
CP: $\dot{\pi}=\gamma\dot{q}+\delta\left(y-\bar{y}\right)$
PJD: $\rho=\bar{\rho}+\dot{q}$, $\bar{\rho}=\rho*$
RPM: $r=\bar{\rho}+\pi+\phi\left(\pi-\bar{\pi}\right)+\theta\left(q-\bar{q}\right)$
CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\bar{y}$= produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\bar{\rho}$= taxa de juros real de longo prazo; q= taxa de câmbio real; $\bar{q}$ = taxa de câmbio real de longo prazo; π= taxa de inflação; $\dot{\pi}=d\pi/dt; \dot{q}=dq/dt; \rho*=$ taxa de juros real externa; r = taxa de juro nominal; α,β,γ,δ,ϕ e θ são parâmetros positivos.
a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com a taxa de juros real (ρ) no eixo vertical e a taxa de câmbio real (q) no eixo horizontal.
b) A taxa de juros real e a taxa de câmbio real são negativamente correlacionadas quaisquer que sejam os valores dos parâmetros do modelo?
c) Mostre, no diagrama de fases do item a, o que acontece neste modelo quando o déficit público aumenta.
d) Mostre, no diagrama de fases do item a, o que acontece neste modelo quando a taxa de juros real externa aumenta.

11) Considere o seguinte modelo:

IS: $y-\bar{y}=-\alpha\left(\rho-\bar{\rho}\right)+\beta\left(q-\bar{q}\right)$

CP: $\dot{\pi} = \phi\,\dot{q} + \theta(y - \bar{y})$

PJD: $\rho = \bar{\rho} + \dot{q},\ \ \bar{\rho} = \rho^*$

RPM: $s = \bar{s}$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\bar{y}$ = produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\bar{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; q = taxa de câmbio real; $\bar{q}$ = taxa de câmbio real de longo prazo; r = taxa de juro nominal; π = taxa de inflação; $\dot{\pi} = d\pi / dt$; $\dot{q} = dq / dt$; $\dot{\rho} =$ taxa de juros real externa. Os parâmetros α, β, ϕ e θ são positivos. Admita que a taxa de inflação externa é constante($\pi^* = d\,p^* / d\,t$ = constante).
Mostre em um diagrama de fases, com ρ no eixo vertical e q no eixo horizontal, o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.

12) Considere o seguinte modelo:

IS: $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q})$

CP: $\dot{\pi} = \gamma\,\dot{q} + \delta\,(y - \bar{y})$

PJD: $\rho = \bar{\rho} + \dot{q}$

RPM: $r = \bar{\rho} + \pi + \theta(\pi - \bar{\pi}) + \phi\,\dot{q}$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = logaritmo do produto real; $\bar{y}$ = logaritmo do produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\bar{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; q = taxa de câmbio real; $\bar{q}$ = taxa de câmbio real de longo prazo; π = taxa de inflação; $\dot{\pi} = d\pi / dt$; $\bar{\pi} =$ meta da taxa de inflação; $\dot{q} = dq / dt$; $r =$ taxa de juros nominal.

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com a taxa de inflação (no eixo vertical) e a taxa de câmbio real (no eixo horizontal);
b) Mostre no diagrama de fases do item anterior o que acontece quando o banco central reduz a meta de inflação de $\bar{\pi}_o$ para $\bar{\pi}_1(< \bar{\pi}_o)$.
13) Considere o seguinte modelo:

IS: $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q})$

CP: $\dot{\pi} = \gamma\,\dot{q} + \delta\,(y - \bar{y})$

PJD: $\rho = \bar{\rho} + \dot{q}$

RPM: $r = \bar{\rho} + \pi_C + \theta(\pi_C - \bar{\pi}_C)$

IPC: $\pi_C = \pi + \omega\,\dot{q}$

TJR: $r = \rho + \pi_C$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = logaritmo do produto real; $\bar{y}$ = logaritmo do produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\bar{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; q = taxa de câmbio real; $\bar{q}$ = taxa de câmbio real de longo prazo; π = taxa de inflação; $\dot{\pi} = d\pi / dt$; $\bar{\pi}_C =$ meta da taxa de inflação; $\dot{q} = dq / dt$; $r =$ taxa de juros nominal.

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com a taxa de juros real (no eixo vertical) e a taxa de câmbio real (no eixo horizontal);
b) Mostre no diagrama de fases do item anterior o que acontece nesta economia quando a taxa de juros real aumenta de ρ_0^* para $\rho_1^* > \rho_0^*$?
c) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo com a taxa de inflação no eixo vertical e o produto real no eixo horizontal.
d) Mostre no diagrama de fases do item anterior o que acontece quando o banco central reduz a meta de inflação de $\bar{\pi}_o$ para $\bar{\pi}_1 (< \bar{\pi}_o)$.

14) Considere o seguinte modelo:

IS: $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q})$

CP: $\dot{\pi} = \gamma\, \dot{q} + \delta\, (y - \bar{y})$

PJD: $\rho = \bar{\rho} + \dot{q}$

RPM: $s = \bar{s}$

IPC: $\pi_C = \pi + \omega\, \dot{q}$

TJR: $r = \rho + \pi_C$

TCR: $q = s + p^* - p_C$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = logaritmo do produto real; $\bar{y}$ = logaritmo do produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\bar{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; q = taxa de câmbio real; $\bar{q}$ = taxa de câmbio real de longo prazo; π = taxa de inflação dos bens domésticos; π_C = taxa de inflação dos preços ao consumidor; $\dot{\pi} = d\pi / dt$; $\dot{q} = dq / dt$; $r =$ taxa de juros nominal.

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com a taxa de juros real (no eixo vertical) e a taxa de câmbio real (no eixo horizontal);
b) Mostre no diagrama de fases do item anterior o que acontece nesta economia quando a taxa de juros real aumenta de ρ_0^* para $\rho_1^* > \rho_0^*$?
c) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo com a taxa de inflação no eixo vertical e o produto real no eixo horizontal.
d) Mostre no diagrama de fases do item anterior o que acontece quando a taxa de inflação internacional diminui de π_0^* para $\pi_1^* (< \pi_0^*)$.

15) Considere o seguinte modelo:

IS: $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q})$

CP: $\dot{\pi} = \gamma\, \dot{q} + \delta\, (y - \bar{y})$

PJD: $\rho = \overline{\rho} + \dot{q}$

RPM: $\dot{s} = \pi - \pi^{*}$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\overline{y}$ = produto potencial; ρ = taxa de juros real; $\overline{\rho}$ = taxa de juros natural; q = taxa de câmbio real; $\overline{q}$ = taxa de câmbio natural; π = taxa de inflação; s=taxa de câmbio nominal.

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.
b) Mostre o que acontece nesta economia quando a taxa de juros natural aumenta.

PARTE III: MODELOS DE POLÍTICAS MONETÁRIA E FISCAL

Capítulo 7

Restrição Orçamentária do Governo

Este capítulo apresenta a restrição orçamentária do governo e vários tópicos que podem ser analisados a partir deste arcabouço contábil. A primeira seção mostra que a restrição orçamentária do governo resulta da consolidação das contas do Tesouro e do Banco Central. A segunda seção estabelece as condições para que a dívida pública seja sustentável. A terceira seção cuida do imposto inflacionário e das diferentes alternativas para o cálculo do custo social deste imposto. A quarta seção apresenta diferentes modelos de hiperinflação. A quinta seção cuida da equivalência ricardiana. A sexta seção trata da teoria fiscal do nível de preços. A oitava seção analisa as condições de sustentabilidade do regime monetário.

1.Consolidação das Contas do Tesouro e do Banco Central

As principais contas do balanço de um banco central estão apresentadas na Tabela 7.1. No ativo estão os títulos denominados em moeda estrangeira, no item Reservas Internacionais *(RI)*, e os títulos em moeda doméstica, em geral Títulos Públicos emitidos pelo Tesouro (B^{BC}). O passivo do banco central consiste da Base Monetária (*M*) e dos Depósitos do Tesouro (*DT*). Os depósitos do Tesouro não necessariamente são efetuados no banco central, dependendo da legislação de cada país. No Brasil, a Constituição de 1988 obriga que eles sejam feitos no Banco Central do Brasil. A base monetária é composta do papel moeda em poder do público e das reservas bancárias. A conta Reservas Bancárias é uma conta que os bancos são obrigados a manterem no banco central, onde inclusive os depósitos compulsórios dos bancos são feitos. Nesta conta trafega todas as operações do banco central com os bancos e todas as operações do sistema de pagamentos brasileiro, supervisionado pelo banco central.

O banco central tem o monopólio da emissão de moeda e seu negócio consiste em vender e comprar a moeda que ele próprio emite. Quando deseja vender sua moeda ele compra títulos, estrangeiros ou domésticos. Na compra de títulos estrangeiros ele compra divisas estrangeiras no mercado pronto de câmbio para entrega imediata, ou no mercado a termo para entrega futura. Na compra de títulos domésticos ele pode efetuar compras definitivas, ou compras temporárias através de operações de recompras. Quando o banco central deseja comprar sua moeda ele vende títulos de sua carteira, seja títulos estrangeiros ou títulos domésticos. Na venda, ou compra, de títulos estrangeiros ele opera no mercado de câmbio, e no caso da venda, ou compra, de títulos domésticos ele atua no mercado secundário de títulos públicos, em ambos casos as operações são conduzidas pela mesa de operações do banco central.

A hipótese simplificadora de que as reservas internacionais e os depósitos do tesouro são iguais a zero, $RI = DT = 0$, será usada na análise que se segue. Nestas circunstâncias, o lucro do banco central será igual aos juros dos títulos públicos existentes em sua carteira, desprezando-se seus custos operacionais. Isto é:

$$L^{BC} = r\ B^{BC}$$

Tabela 7.1

Balanço do Banco Central

ATIVO	PASSIVO
1.Reservas Internacionais (RI)	1.Base Monetária (M) c) Papel Moeda em Poder do Público d) Reservas Bancárias
2.Títulos Públicos (B^{BC})	2.Depósitos do Tesouro (DT)

$$RI + B^{BC} \equiv M + DT$$

A variação da Base Monetária é igual à variação do estoque de títulos públicos em sua carteira:

$$\overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{B}{}^{BC}$$

O Tesouro financia os gastos do governo com a arrecadação de impostos, com o lucro do Banco Central e com a emissão de dívida pública:

$$G - T + rB^{T} - L^{BC} \equiv \overset{\circ}{B}{}^{T}$$

A variação do estoque da dívida pública é igual à variação do estoque em poder do público mais à variação do estoque em poder do banco central:

$$\overset{\circ}{B}{}^{T} = \overset{\circ}{B} + \overset{\circ}{B}{}^{BC}$$

A dívida pública emitida pelo Tesouro ou é carregada pelo público ou pelo banco central:

$$B^{T} = B + B^{BC}$$

Substituindo-se na restrição do Tesouro o lucro do banco central e a decomposição da dívida pública resulta:

$$G - T + r\,B^{T} - r\,B^{BC} \equiv \overset{\circ}{B} + \overset{\circ}{B}{}^{BC}$$

O Tesouro financia o déficit vendendo títulos públicos diretamente para o setor privado e indiretamente para o Banco Central, que compra títulos emitidos pelo Tesouro no mercado secundário.

Consolidando-se as contas do Tesouro e do Banco Central obtém-se a restrição orçamentária do governo:

$$G - T + r\,B \equiv \overset{\circ}{B} + \overset{\circ}{M}$$

O nome mais apropriado para esta restrição seria fontes de financiamento do governo porque os gastos do governo, com consumo e investimento (*G*), e o serviço da dívida pública, são financiados por impostos, aumento da dívida pública ou emissão de moeda. Esta equação de financiamento torna-se facilmente compreendida quando medida em termos do produto interno bruto da economia. Isto é:

$$\frac{G-T}{Y}+r\,\frac{B}{Y}\equiv\frac{\overset{\circ}{B}}{Y}+\frac{\overset{\circ}{M}}{Y}$$

O superávit primário é definido pela diferença entre a receita tributária e os gastos do governo que não incluem o pagamento dos juros da dívida pública:

$$\frac{G-T}{Y}=-f_s$$

O símbolo f_s representa o superávit primário. A letra *b* representa a relação Dívida/PIB (*b=B/Y)*. Derivando-se a relação Dívida/PIB com relação ao tempo obtém-se:

$$\overset{\circ}{b}=\frac{\overset{\circ}{B}}{Y}-\frac{B\,\overset{\circ}{Y}}{Y^2}=\frac{\overset{\circ}{B}}{Y}-\frac{B}{Y}\,\frac{\overset{\circ}{Y}}{Y}$$

O produto nominal da economia é igual ao índice de preços vezes o produto real, $Y=P\,y$. Logo, a taxa de crescimento do produto nominal é igual à soma da taxa de inflação com a taxa de crescimento (n) do produto real:

$$\frac{\overset{\circ}{Y}}{Y}=\frac{\overset{\circ}{P}}{P}+\frac{\overset{\circ}{y}}{y}=\pi+n$$

O aumento do endividamento público como proporção do produto interno bruto pode, então, ser escrito do seguinte modo:

$$\frac{\overset{\circ}{B}}{Y}=\overset{\circ}{b}+b\left(\pi+n\right)$$

Definindo-se a letra *m* como a relação entre a base monetária e o produto nominal da economia, derivando-se *m* com relação ao tempo e procedendo-se do mesmo modo que foi feito com a relação Dívida/PIB, resulta em:

$$\frac{\overset{\circ}{M}}{Y}=\overset{\circ}{m}+m\left(\pi+n\right)$$

Substituindo-se estes resultados na restrição orçamentária do governo, ela transforma-se em:

$$-f_s+rb\equiv\overset{\circ}{b}+\left(\pi+n\right)b+\overset{\circ}{m}+\left(\pi+n\right)m$$

ou ainda:

$$- f_s + (r - \pi - n)\, b - (\pi + n)\, m \equiv \overset{\circ}{b} + \overset{\circ}{m} \equiv f$$

O déficit fiscal f é definido como o aumento do passivo do governo, seja em títulos públicos ou em moeda. Isto é:

$$f = \overset{\circ}{b} + \overset{\circ}{m}$$

2. Sustentabilidade da Dívida Pública

A análise da sustentabilidade da dívida pública será feita nesta seção com a hipótese simplificadora de que a variação do estoque de moeda é igual a zero:

$$\dot{M} = 0$$

A restrição orçamentária do governo pode, então, ser escrita como:

$$\overset{\circ}{b} = (r - \pi - n)\, b - f_s$$

Como a diferença entre a taxa de juros nominal e a taxa de inflação é igual à taxa de juros real, a equação anterior transforma-se em:

$$\overset{\circ}{b} = (\rho - n)\, b - f_s$$

2.1 Déficit (Superávit) Primário Constante

Quando a taxa de juros real for menor do que a taxa de crescimento do produto real da economia, $\rho - n < 0$ a equação diferencial que descreve a dinâmica da dívida pública é negativamente inclinada como mostra a Figura 7.1. Se houver déficit primário, $f_d = - f_s > 0$ a relação Dívida/PIB converge para um valor de equilíbrio. Caso haja superávit primário, o Tesouro se estiver inicialmente endividado resgatará seus títulos e ao longo do tempo começa a comprar ativos. A relação ativo/PIB, em equilíbrio, converge para um valor fixo, com mostra o gráfico da esquerda na Figura 7.1.

Qualquer que seja o valor inicial da relação Dívida/PIB esta relação converge para o valor de equilíbrio:

$$\bar{b} = \frac{f_s}{\rho - n}$$

Este valor é positivo quando houver déficit primário e negativo no caso de superávit primário.

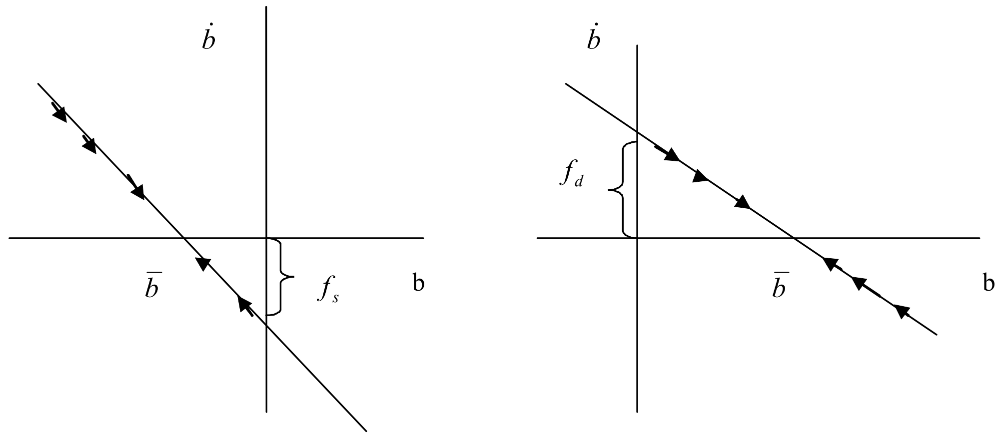


Figura 7.1: $\rho - n < 0$

Quando a taxa de juros real for igual à taxa de crescimento do produto real $\rho = n$ e houver déficit fiscal financiado por endividamento público, a dívida pública tem uma trajetória explosiva como indicado no diagrama de fases da Figura 7.2. Qualquer que seja o valor inicial da relação Dívida/PIB ela cresce indefinidamente. Quando o Tesouro tiver superávit primário ele acumula ativos, e o estoque dos mesmos também cresce ilimitadamente.

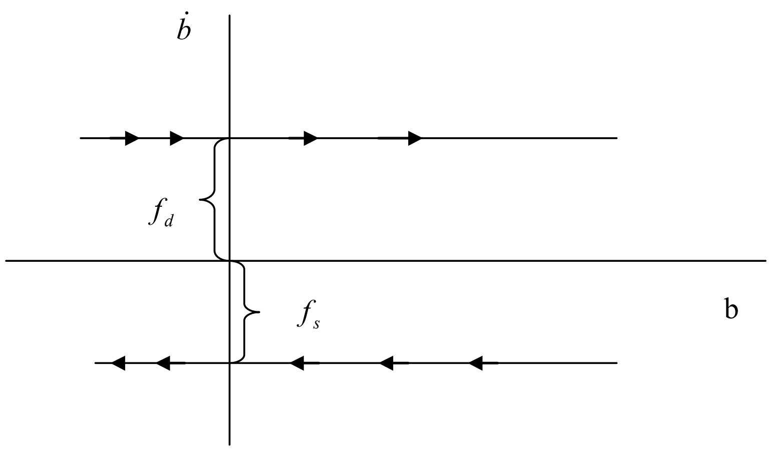


Figura 7.2: $\rho - n = 0$

Quando a taxa de juros real for maior do que a taxa de crescimento do produto real da economia, $\rho - n > 0$, a equação diferencial que descreve a evolução da relação Dívida/PIB é positivamente inclinada como mostra a Figura 7.3. Caso haja superávit primário existe um valor de equilíbrio para a relação Dívida/PIB. Se o valor inicial desta relação for diferente do valor de equilíbrio a dívida pública é insustentável, pois o modelo é instável. Na hipótese de que o Tesouro tenha um déficit primário, ele deve ter um estoque de ativos para que a política fiscal seja sustentável. O diagrama da esquerda da Figura 7.3 mostra o diagrama de fases que corresponde a este caso.

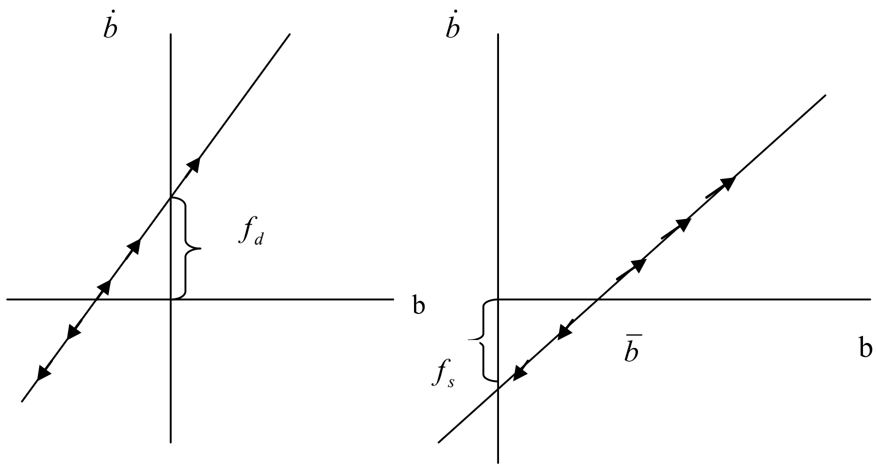


Figura 7.3: $\rho - n > 0$

2.2 Déficit (Superávit) Primário Variável

Quando o superávit (déficit) primário é variável ao longo do tempo o termo f_s na equação diferencial

$$\dot{b} - (\rho - n)\,b = -f_s$$

que descreve a evolução da relação Dívida/PIB não é mais um parâmetro, mas sim uma função do tempo.

Álgebra

Para determinar a solução desta equação comecemos por multiplicar ambos os lados da mesma pelo número natural elevado à diferença entre as taxas de juros real e de crescimento do produto real vezes o tempo com o sinal menos. Isto é:

$$e^{-(\rho-n)v}\left[b - (\rho - n)b\right] = -f_s\, e^{-(\rho-n)v}$$

É fácil verificar que:

$$\frac{d}{dv}\, b\, e^{-(\rho-n)v} = -f_s\, e^{-(\rho-n)v}$$

Logo,

$$d\, b\, e^{-(\rho-n)v} = -f_s\, e^{-(\rho-n)v}\, dv$$

Integrando-se esta expressão entre hoje (t) e o futuro (T) obtém-se:

$$\int_t^T d\, b\, e^{-(\rho-n)v} = -\int_t^T f_s\, e^{-(\rho-n)v} dv$$

Calculando-se a integral do lado esquerdo desta expressão resulta,

$$b(T)\, e^{-(\rho-n)T} - b(t)\, e^{-(\rho-n)t} = -\int_t^T f_s\, e^{-(\rho-n)v} dv$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$b(t) = b(T)\, e^{-(\rho-n)(T-t)} + \int_t^T f_s\, e^{-(\rho-n)(v-t)} dv$$

Sustentabilidade da Dívida

Uma dívida torna-se impagável quando seu emissor não somente faz a rolagem do principal, mas financia integralmente os juros com nova emissão de dívida. Este comportamento tornou-se conhecido na literatura econômica pelo nome de jogo de Ponzi. A condição para inexistência de jogo de Ponzi é de que o seguinte limite seja igual a zero:

$$\lim_{T\to\infty} b(T)\, e^{-(\rho-n)(T-t)} = 0$$

Este limite afirma que a dívida pública é sustentável se a dívida pública como proporção do produto crescer a uma taxa menor do que a taxa de juros real deduzida da taxa do crescimento do produto real, supondo-se que $\rho > n$. Nestas circunstâncias, a relação Dívida /PIB existente deve ser igual ao valor presente dos superávits primário futuros descontados pela taxa de juros real líquida da taxa de crescimento da economia:

$$b(t) = \int_t^\infty f_s\, e^{-(\rho-n)(v-t)} dv$$

Esta equação corresponde à restrição orçamentária intertemporal do governo, isto é, o valor presente dos tributos deve ser capaz de financiar o valor presente dos gastos mais o valor da dívida pública que existe em poder do público:

$$b(t) + \int_t^\infty g\, e^{-(\rho-n)(v-t)}\, dv = \int_t^\infty \tau\, e^{-(\rho-n)(v-t)} dv$$

Cabe observar que se o superávit primário for constante a relação entre o mesmo e a dívida pública deve ser igual à taxa de juros real líquida: $\rho - n = \bar{f}_s / b$.

Quando a taxa de juros real for menor do que a taxa de crescimento do produto real da economia, $\rho < n$, a solução da equação diferencial da dívida pública pode ser escrita como:

$$b(T) = b(t)\, e^{-(n-\rho)(T-t)} + \int_t^T f_d\, e^{-(n-\rho)(T-v)} dv$$

Como

$$\lim_{T\to\infty} b(t)\, e^{-(n-\rho)(T-t)} = 0$$

segue-se, então, que:

$$\lim_{T\to\infty} b(T) = \int_t^{\infty} f_d \; e^{-(n-\rho)(T-v)} dv$$

Quando o déficit primário, f_d, for constante tem-se o resultado obtido anteriormente de que a dívida pública converge para um valor finito e igual a $f_d/(\eta-\rho)$. Quando o déficit primário variar com o tempo deve-se exigir que o limite da dívida pública, como proporção do produto interno bruto, seja finito. Todavia, a análise de sustentabilidade não indica qual o valor deste limite.

3. Imposto Inflacionário

Na restrição orçamentária do governo aparece como fonte de receita um termo que é igual ao produto da taxa de inflação pela quantidade real de moeda. Este termo é denominado de imposto inflacionário,

$$\tau = \pi \; m$$

A taxa de inflação π é a alíquota do imposto e m a base do mesmo. A quantidade de moeda demandada depende do nível do produto real e da taxa de juros nominal, o custo de oportunidade de reter moeda. Admite-se, por simplicidade, que a elasticidade da quantidade real de moeda com relação ao produto real seja igual a um. A equação de demanda de moeda pode ser escrita com a taxa de juros nominal em função da quantidade real de moeda:

$$m = \frac{M}{P\,y} = L(r), \; r = L^{-1}(m) = r(m)$$

A Figura 7.4 mostra a curva de demanda de moeda. O imposto inflacionário é a área tracejada. Esta área mede a perda do poder de compra, em virtude da inflação, de quem detém o estoque de moeda que não é remunerada. Para recompor o estoque real de moeda o público demanda uma quantidade adicional de moeda, o banco central emite esta moeda e se apropria dos recursos reais correspondentes para financiar as despesas do governo. A Figura 7.5 mostra o formato da curva do imposto para dois casos particulares. No eixo vertical desta figura mede-se o imposto inflacionário e no eixo horizontal a taxa de inflação, a alíquota do imposto. No caso da Figura 7.5a o imposto tem um máximo e no caso da Figura 7.5b o imposto aumenta quando a alíquota do imposto aumenta.

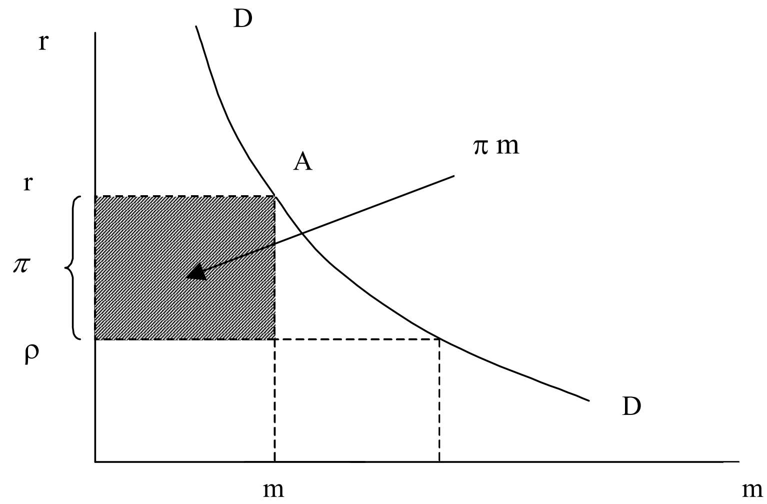


Figura 7.4

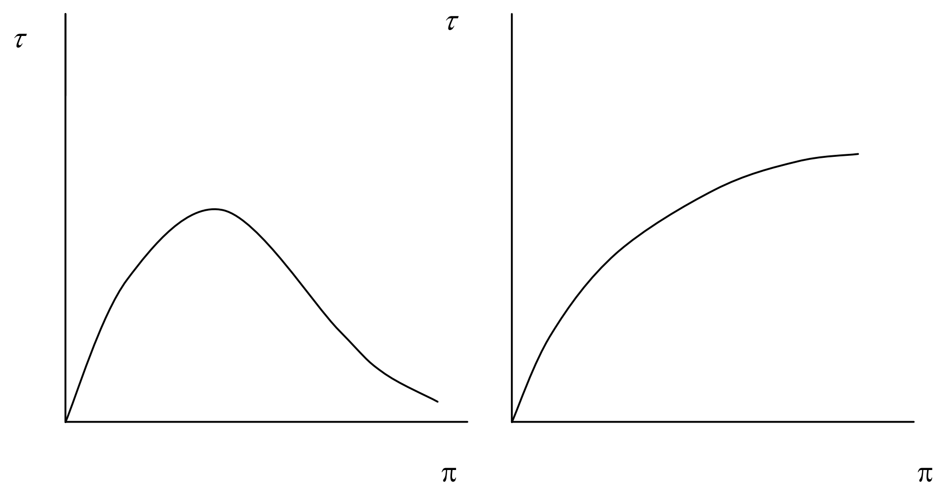


Figura 7.5

Custo Social do Imposto Inflacionário: Excedente do Consumidor

O imposto inflacionário, como qualquer outro imposto, tem um custo social porque cria uma cunha fiscal entre o valor para quem detém a moeda e o valor para quem emite a moeda. A área tracejada da Figura 7.6 mostra o custo social da inflação, desprezando-se os custos operacionais do banco central e levando-se em conta que o custo de produção da moeda é bastante pequeno, e também pode ser desconsiderado. A área corresponde à seguinte integral:

$$\omega (r) = \int_{m(r)}^{m(0)} r \left(m\right) dm = \int_{0}^{r} m(v)\, dv - r\, m$$

O cálculo do custo social pela primeira integral usa a função inversa da equação de demanda de moeda, enquanto a fórmula depois do segundo sinal de igualdade usa a equação de demanda de moeda. É fácil verificar-se à equivalência das duas fórmulas pela análise da Figura 7.6.

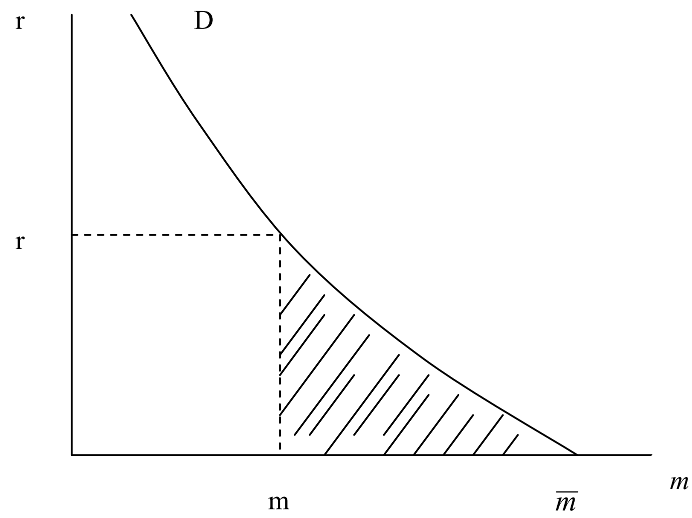


Figura 7.6

Para uma equação de demanda de moeda com a semi-elasticidade constante, especificada por $\log m = -\alpha\, r$, o custo social da inflação é igual a:

$$\omega(r) = \int_0^r e^{-\alpha v}\, dv - r\, e^{-\alpha r} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r}\right) - r\, e^{-\alpha r}$$

Quando $r \to \infty$ o custo social da hiperinflação é finito e igual ao inverso do parâmetro α, isto significa dizer que o custo social é proporcional à quantidade de moeda que a sociedade deseja reter quando a taxa de juros é igual a zero, o coeficiente de proporcionalidade sendo igual ao inverso da semi-elasticidade.

Quando a equação de demanda de moeda tem uma elasticidade constante, especificada por $\log m = -\alpha \log r$, $\alpha < 1$, o custo social da inflação é dado por:

$$\omega(r) = \int_0^r v^{-\alpha}\, dv - r\, r^{-\alpha} = \frac{r^{1-\alpha}}{1-\alpha} - r^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\, r^{1-\alpha}$$

É fácil verificar-se através desta expressão que o custo social da hiperinflação neste caso é infinito por que

$$\lim_{r \to \infty} \omega(r) = \infty$$

A análise dos dois casos, da semi-elasticidade constante e da elasticidade constante, mostra que se a moeda não for essencial o custo social da hiperinflação é finito, mas se ela for essencial o custo social é infinito. A forma funcional da equação de demanda de moeda produz, portanto, resultados completamente diferentes quanto ao custo social da hiperinflação.

Custo Social do Imposto Inflacionário: Agente Representativo

O custo social da inflação calculado nas expressões anteriores baseia-se no excedente do consumidor da análise de equilíbrio parcial. Num modelo de uma economia monetária, com microfundamentos, o consumo (c) e os serviços da moeda (m) são argumentos da função utilidade:

$$u = u(c, m)$$

Um real, alocado na forma de moeda, produz um aumento de bem estar igual à utilidade marginal da moeda ($\partial u / \partial m$). O custo de oportunidade da moeda é igual ao juro nominal que se deixa de ganhar numa aplicação financeira alternativa. Logo, quando se mantém um real sob a forma de moeda, a perda de bem estar é igual ao produto da taxa de juros *r* pela utilidade marginal do consumo ($\partial u / \partial c$). Portanto, em equilíbrio:

$$r = \frac{\partial u / \partial m}{\partial u / \partial c} = \frac{u_m(c, m)}{u_c(c, m)}$$

A utilidade total do agente representativo é máxima quando a utilidade marginal de moeda for igual a zero. A quantidade ótima de moeda é obtida, então, quando a taxa de juros nominal for igual a zero. Para calcular o custo social da inflação neste enfoque, é conveniente normalizar o consumo, fazendo-o igual a um. Logo,

$$r = \frac{u_m(1, m)}{u_c(1, m)}$$

Esta expressão define implicitamente a equação de demanda de moeda: $m=m(r)$.

O custo do bem estar da inflação é a percentagem da renda que o consumidor deve receber para que ele seja indiferente entre duas situações, uma na qual a taxa de juros é igual a *r* e a outra na qual a taxa de juros é zero. O custo de bem estar da inflação $\omega(r)$, é então, definido por:

$$u(1 + \omega(r), m(r)) = u\,(1, m(0))$$

O valor aproximado de $\omega(r)$ pode ser obtido expandindo-se esta função em série de Taylor, em torno do ponto $r=0$, desprezando-se os termos de terceira ordem. Isto é:

$$\omega(r) \cong \omega(0) + \omega'(0)\,(r - 0) + \frac{\omega''(0)}{2}(r - 0)^2$$

O custo social para $r=o$ é zero: $\omega(0) = 0$. Para se obter as expressões de $\omega'(0)$ e $\omega''(0)$ deriva-se a equação de definição do custo social.

$$u_c\ \omega'(r) + u_m\ m'(r) = 0$$

Como em equilíbrio $r\,u_c = u_m$, segue-se que:

$$\omega'(r) = -r\, m'(r)$$

A segunda derivada do custo social com relação à taxa de juros é, então, dada por:

$$\omega''(r) = -\left(m'(r) + r\, m''(r)\right)$$

É fácil verificar-se que $\omega'(0)$ e $\omega''(0) = -m'(0)$. O custo do bem estar da inflação é, então, aproximado por:

$$\omega(r) \cong -\frac{m'(0)}{2} r^2$$

O custo social da inflação é proporcional ao quadrado da taxa de juros. Para valores pequenos da taxa de juros, o custo social também é pequeno. Todavia, para valores elevados, o custo social aumenta com o quadrado da taxa de juros. Na especificação da equação de demanda de moeda semilogarítmica, $log\, m = -\alpha\, r, m'(r) = -\alpha\, m(r)$, e o custo social depende do estoque inicial da quantidade real de moeda e da semi-elasticidade α da equação de demanda, de acordo com:

$$\omega(r) = \frac{1}{2} m(0) \alpha\, r^2$$

4. Hiperinflação

Um arcabouço teórico para explicar a hiperinflação tem que ser capaz de reproduzir alguns fatos estilizados observados neste processo. Estes fatos são comuns a todas as experiências e estão documentados em vários trabalhos clássicos sobre o tema. Os fatos estilizados das hiperinflações são os seguintes: i) a quantidade real de moeda aproxima-se de zero; ii) a taxa de inflação aumenta de maneira explosiva; iii) o déficit público é financiado através da emissão de moeda; iv) a duração da hiperinflação é bastante variável, dependendo da experiência de cada país; v) a moeda local sofre a concorrência de uma moeda estrangeira, primeiro substituindo as funções de reserva de valor e de unidade de conta, e depois substituindo a própria moeda local como meio de pagamentos; e vi) a hiperinflação é estancada da noite para o dia, por meio de um programa de estabilização que muda o regime das políticas monetária e fiscal.

A literatura econômica apresenta quatro hipóteses para explicar este fenômeno: i) a hipótese de bolha; ii) a hipótese de equilíbrio múltiplo ; iii) a hipótese de crise fiscal e rigidez de expectativas ou ajustamento e iv) a hipótese de crise fiscal e expectativas racionais. Nem todas estas hipóteses são capazes de explicar os fatos estilizados que acabamos de enumerar.

Nos modelos de hiperinflação que serão analisados nesta seção admite-se que o déficit público é financiado único e exclusivamente por moeda. A dívida pública e sua taxa de variação são iguais a zero:

$$B = \overset{\circ}{B} = 0$$

Dinâmica da Inflação

A restrição orçamentária do governo é, então, dada por:

$$\overset{\circ}{m} = f - \pi\, m$$

Somando-se e subtraindo-se a taxa de juros real vezes a quantidade real de moeda esta restrição permanece inalterada:

$$\overset{\circ}{m} = f - \rho m - \pi\, m + \rho m$$

Usando-se a equação de Fisher, de que a taxa de juros nominal é igual à soma da taxa de juros real com a taxa de inflação, obtém-se a equação diferencial da quantidade real de moeda:

$$\overset{\circ}{m} = f + \rho m - r\, m$$

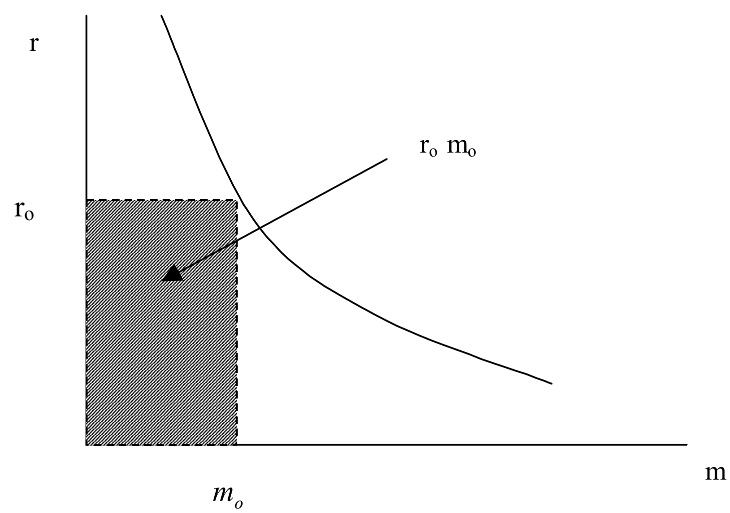


Figura 7.7

O valor dos serviços da moeda *rm* é função da quantidade real de moeda, como indicado na Figura 7.7. Logo, esta equação pode ser escrita como:

$$\overset{\circ}{m} - \rho m = f - s(m)$$

Integrando-se a equação anterior entre o momento *t* e o tempo *T* no futuro obtém-se a restrição intertemporal do governo:

$$m\,(t) = m\,(T)\, e^{-\rho\,(T-t)} + \int_t^T \left(s(m) - f\right) e^{-\rho(v-t)} dv$$

A condição para que não haja hiperdeflação é de que o seguinte limite seja igual a zero:

$$\lim_{T\to\infty} m(T)\, e^{-\rho\ (T-t)} = 0$$

A restrição intertemporal do governo é, então, dada pela seguinte expressão:

$$m(t)=\int_{t}^{\infty}\left[s(m)-f\right]e^{-\rho\,(v-t)}\,dv$$

Esta restrição afirma que a quantidade real de moeda em poder do público é igual ao valor presente dos serviços da moeda subtraída do déficit público financiado pela emissão de moeda. Outra maneira de ler esta restrição é a seguinte: a quantidade real de moeda existente atualmente na economia (o passivo monetário do governo) mais o valor presente dos déficits público tem que ser igual ao valor presente dos serviços da moeda. Caso esta restrição não seja satisfeita, a política de financiar o déficit público emitindo moeda não é sustentável.

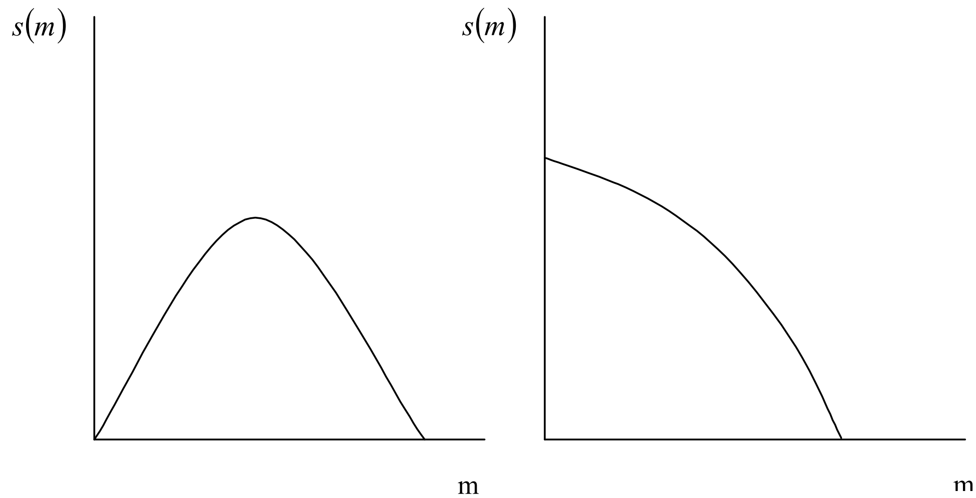


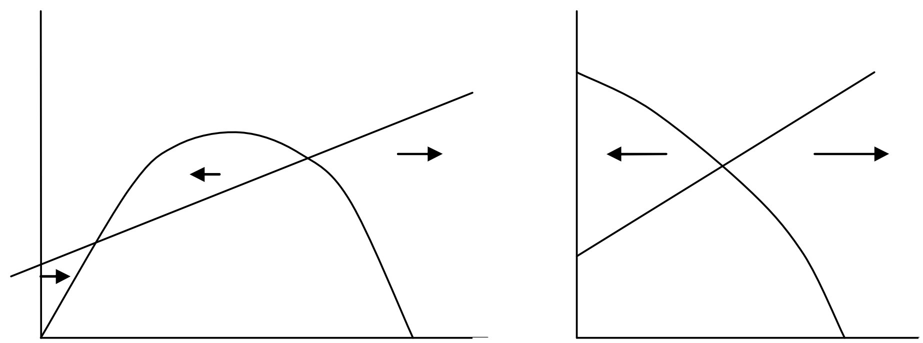
Figura 7.8

A função que representa os serviços da moeda pode ter diferentes formatos de acordo com a elasticidade da quantidade real de moeda com relação à taxa de inflação. A Figura 7.8 ilustra dois casos. Na curva em formato de sino (*U* invertido) a moeda não é essencial porque o valor dos serviços da moeda tende para zero quando a quantidade real de moeda aproxima-se de zero. Na outra curva da Figura 7.8, o valor dos serviços da moeda converge para um valor finito quando a quantidade real de moeda tende para zero, e a moeda neste caso é essencial.

4.1 Bolha

O preço da moeda como o preço de qualquer outro ativo financeiro pode eventualmente ter uma bolha. O preço da moeda tem dois componentes, aquele que corresponde aos fundamentos e o componente de bolha. A Figura 4.9 mostra dois casos. No diagrama da esquerda, a curva de serviços da moeda tem o formato de sino, e existem dois pontos de equilíbrio. O ponto de equilíbrio de inflação alta, no qual a quantidade real de moeda é menor, é um ponto de equilíbrio estável. Neste caso, não existe a possibilidade de hiperinflação de bolha, pois a quantidade real de moeda não converge para zero.

No gráfico da direita da Figura 7.9 a curva de serviços da moeda é negativamente inclinada e somente existe um ponto de equilíbrio, que é instável. Neste caso pode existir uma trajetória de bolha, na qual a quantidade real de moeda converge para zero. O formato da curva de serviços da moeda pressupõe que a elasticidade da quantidade real de moeda com relação à taxa de inflação é, em valor absoluto, menor do que um. Isto é, a trajetória de bolha existe desde que a demanda de moeda seja inelástica.



m m

a) Inexiste bolha b) Existe bolha

Figura 7.9

4.2. Equilíbrio Múltiplo

A hipótese de equilíbrio múltiplo para explicar a hiperinflação na verdade não explica hiperinflação, mas sim um processo de alta inflação. Na Figura7.10 estão desenhados os vários componentes da equação diferencial,

$$\dot{m} = f + \rho\, m - s(\, m\,)$$

A curva *s(m)* tem a forma de sino e a reta positivamente inclinada $f + \rho\, m$ corta esta curva em dois pontos. O ponto m_B corresponde ao ponto de inflação baixa e o ponto m_A é o ponto de inflação alta. Na região entre os dois pontos $\dot{m}$ é negativa, a quantidade real de moeda diminui e a taxa de inflação aumenta. Nos pontos acima do ponto de inflação baixa $\dot{m}$ é positiva, a quantidade real de moeda aumenta e a taxa de inflação diminui. Nos pontos compreendidos entre m_A e a origem dos eixos $\dot{m}$ é positiva, a quantidade real de moeda aumenta e a inflação diminui. Portanto, o ponto de inflação baixa é instável e o ponto de inflação alta é estável. A hipótese de equilíbrio múltiplo admite que, por alguma razão, a economia entre numa trajetória que tem início em algum ponto entre os pontos *A* e *B*, e que termina no ponto *A*, com a quantidade real de moeda diminuindo e a taxa de inflação aumentando. Esta trajetória é na verdade uma trajetória transitória de desequilíbrio porque não houve nenhuma mudança nos fundamentos da economia, isto é, o déficit público financiado por moeda continua sendo exatamente o mesmo. A taxa de inflação atinge um novo patamar de equilíbrio, mas não ocorre uma hiperinflação no sentido estrito da palavra.

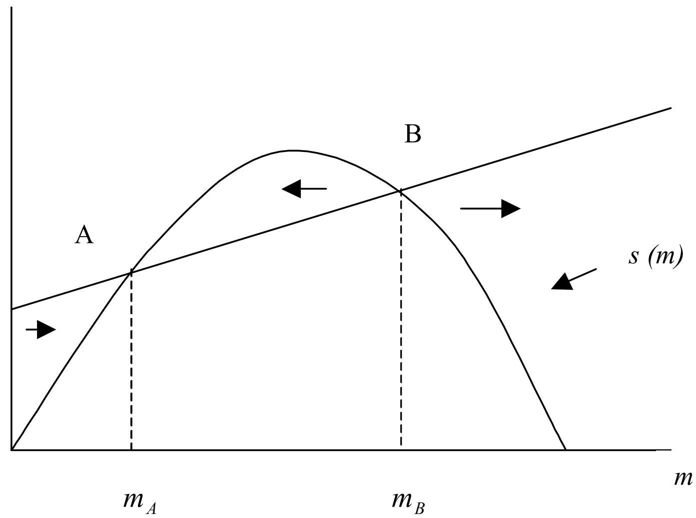


Figura 7.10

4.3 Crise Fiscal e Rigidez

O modelo de hiperinflação produzida por uma crise fiscal e com rigidez na formação de expectativas tem quatro equações:

$$\dot{m} = f - m\pi$$

$$\log m = k - \alpha\, \pi^e$$

$$\dot{\pi}^e = \beta\left(\pi - \pi^e\right)$$

$$f = f(t)$$

A primeira equação supõe que o déficit público f é financiado por moeda; a segunda é a equação de demanda de moeda onde o logaritmo da quantidade real de moeda *m(=M/P)* depende da taxa de inflação esperada π^e e α é a semi-elasticidade da demanda de moeda; a terceira equação é o mecanismo de expectativa adaptativa com β o parâmetro que mede a velocidade de ajuste da previsão; e a quarta equação representa a evolução do déficit público ao longo do tempo.

Álgebra

Derivando-se com relação ao tempo a segunda equação obtém-se, depois de levar em conta o mecanismo de formação de expectativa, a seguinte expressão:

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\alpha\,\dot{\pi}^e = -\alpha\,\beta\left(\pi - \pi^e\right) = -\alpha\,\beta\,\pi + \alpha\,\beta\,\pi^e$$

Esta equação se transforma em,

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\alpha\,\beta\,\pi + \beta\,k - \beta\,\log m$$

quando substitui-se o valor da taxa de inflação esperada π^e da equação de demanda de moeda. A taxa de inflação é obtida combinando-se esta expressão com a primeira equação do modelo. Isto é:

$$\pi = \frac{1}{1-\alpha\,\beta}\left(\frac{f}{m} - \beta\,k + \beta\,\log m\right)$$

O imposto inflacionário $\tau(m)$ é igual ao produto da taxa de inflação (π) pela quantidade real de moeda (m). Logo, da expressão anterior segue-se que:

$$\tau\left(m\right) = \frac{1}{1-\alpha\,\beta}\left(f - \beta\,km + \beta\,m\,\log\,m\right)$$

As derivadas de $\tau(m)$ com respeito à quantidade real de moeda m são dadas por:

$$\frac{d\tau\,(m)}{dm} = \frac{1}{1-\alpha\,\beta}\left(-\beta\,k + \beta\left(\log m + 1\right)\right)\,, \qquad \frac{d^2\tau\left(m\right)}{dm^2} = \frac{\beta}{(1-\alpha\,\beta\,)\,m} > 0\,.$$

A desigualdade supõe que $1\text{-}\alpha\,\beta > 0$, caso contrário o modelo não produz hiperinflação. Portanto, a função do imposto inflacionário é convexa, com um mínimo no ponto $m^* = \exp(k\text{-}1)$, e o imposto aumenta quando m aproxima-se de zero. A Figura 7.11 mostra que o imposto inflacionário tem a forma de um U. Esta função é completamente diferente do formato de sino da curva de Laffer que corresponde à equação de demanda de moeda de Cagan quando a taxa de inflação esperada é igual à taxa de inflação observada. A elasticidade da quantidade demandada de moeda, em valor absoluto, é maior do que um para m maior do que o mínimo do imposto $\left(m = m^*\right)$, e menor do que um, em valor absoluto, para valores de m compreendidos entre zero e a quantidade real de moeda que corresponde ao ponto de mínimo. O limite do imposto inflacionário, quando m aproxima-se de zero é positivo,

$$\lim_{m\to\infty} \tau\left(m\right) = \frac{f}{1-\alpha\,\beta} > 0$$

Neste modelo a moeda é essencial, pois o imposto inflacionário não se aproxima de zero quando a quantidade real de moeda tende a zero, a despeito da forma funcional da equação de demanda de moeda supor que o valor absoluto da elasticidade com relação à taxa de inflação esperada tenda para mais infinito.

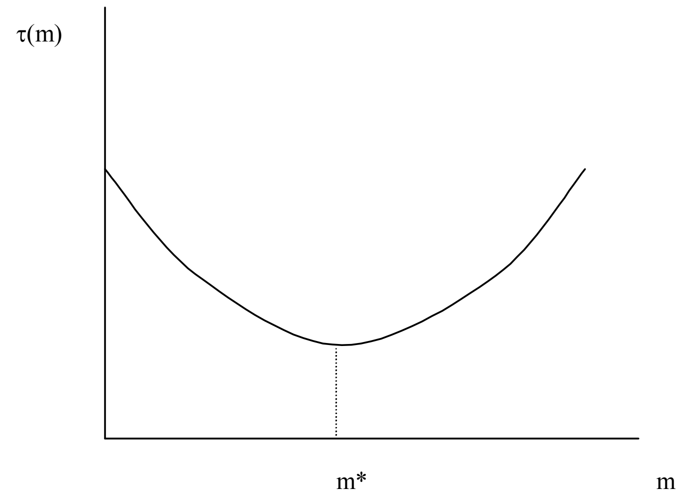


Figura 7.11

Dinâmica da Hiperinflação

Combinando-se a equação do imposto inflacionário com a primeira equação do modelo obtém-se a equação diferencial não linear:

$$\dot{m} = -\frac{\alpha\,\beta}{1-\alpha\,\beta}\,f(t) + \frac{\beta\,k\,m}{1-\alpha\,\beta} - \frac{\beta}{1-\alpha\,\beta}\,m\,\log m$$

Esta equação descreve a dinâmica do modelo. A hiperinflação é produzida quando a função *f(t)* tem a forma de degrau,

$$f(t) = \begin{cases} f_o < f^*, & se \;\; t < 0 \\ \bar{f} > f^* = \dfrac{e^{k-1}}{\alpha} & , se \;\; t \geq 0 \end{cases}$$

O diagrama de fases da Figura 7.12, com a quantidade real de moeda no eixo horizontal e sua taxa de variação com relação ao tempo no eixo vertical, mostra a dinâmica da hiperinflação. No momento antes da crise fiscal a economia está em equilíbrio no ponto A. Quando o déficit público, financiado por moeda, aumenta de f_o para $\bar{f}$, a economia muda para o ponto B e começa, então, a trajetória de hiperinflação. A quantidade real de moeda não pula, mas começa a diminuir até atingir o valor zero. A curva do imposto inflacionário desloca-se para cima, como indicado na Figura 7.13. O imposto inflacionário aumenta imediatamente (do ponto A para o ponto I), e começa a diminuir, passa por um ponto de mínimo, e depois aumenta até chegar ao ponto máximo quando toca o eixo vertical. A correlação entre o imposto inflacionário e a taxa de inflação não pode ser inferida a partir do ramo ascendente ou do trecho descendente da curva do imposto inflacionário, pois a dinâmica do modelo é muito mais complexa, e nem sempre reconhecida na literatura econômica que trata deste modelo.

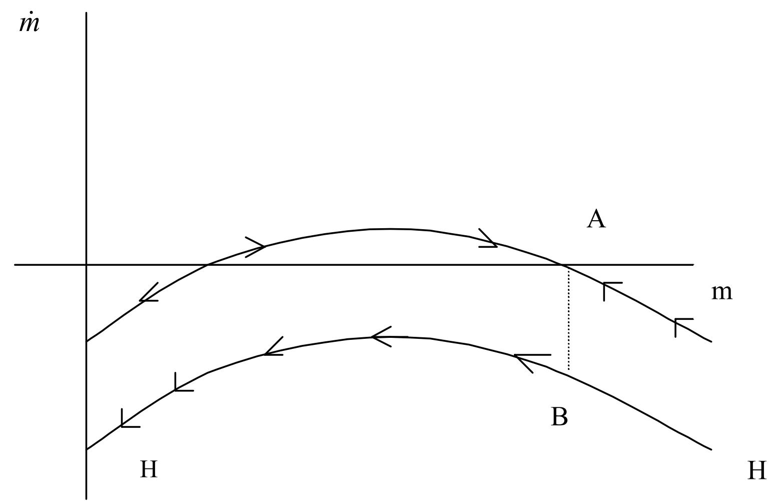


Figura 7.12

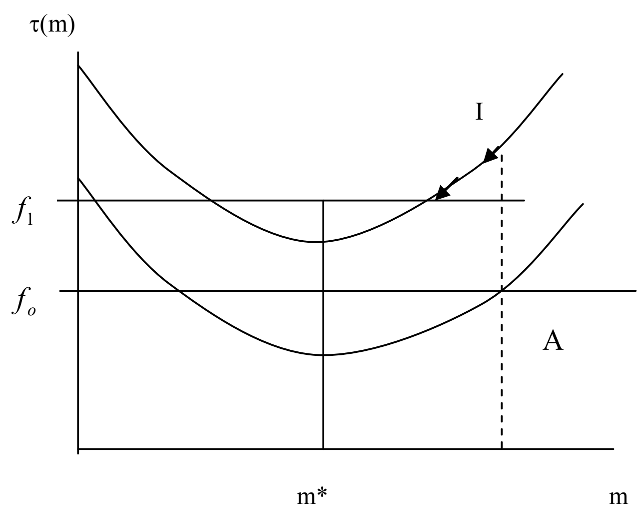


Figura 7.13

<u>4.4 Crise Fiscal e Expectativas Racionais</u>

Na hipótese de hiperinflação produzida por uma crise fiscal e com expectativas racionais há duas hipóteses para a equação de demanda de moeda. Na primeira, a moeda é inelástica e, portanto, essencial. Esta hipótese corresponde à hiperinflação forte, ou hiperinflação propriamente dita. Na segunda hipótese a moeda é não inelástica. Neste caso a crise fiscal produz uma hiperinflação fraca porque a quantidade real de moeda não converge para zero nem tampouco a taxa de inflação tende para infinito. Em ambos os casos o modelo pode ser resumido em duas equações. Uma equação da dinâmica da quantidade real de moeda e uma equação da crise fiscal:

$$\overset{\circ}{m} = f + \rho\, m - s(m)$$

$$f = f(t),\ \ \dot{f} > 0\,,\, f < \bar{f}$$

A especificação da crise fiscal supõe que o déficit público financiado por moeda aumenta ao longo do tempo, mas que ele é menor do que um limite superior predeterminado ($\bar{f}$). Este limite é maior do que seria possível arrecadar, de modo sistemático nesta economia, através do imposto inflacionário. Este modelo produz uma equação diferencial não autônoma.

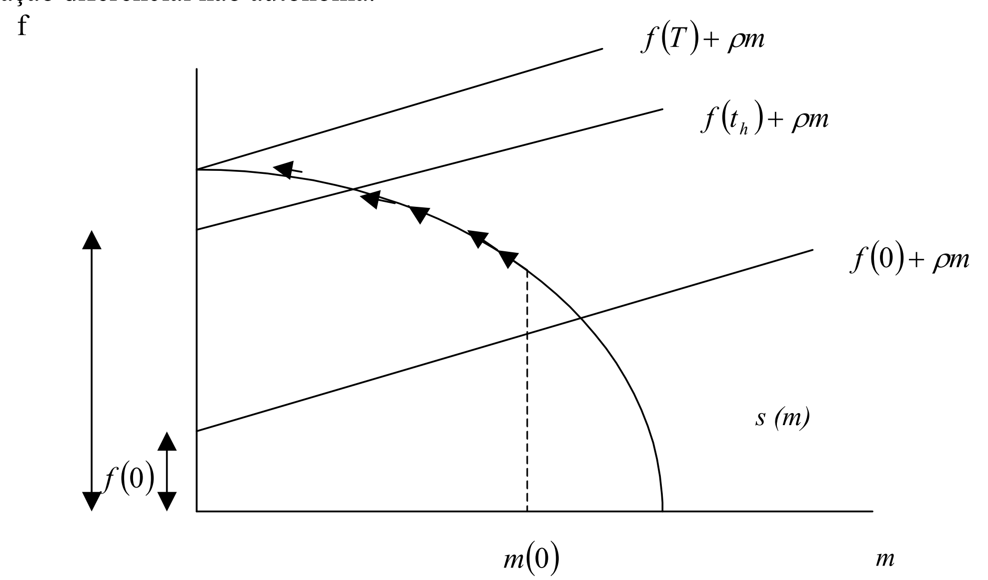


Figura 7.14 Hiperinflação Forte

A Figura 7.14 descreve a solução desta equação para o caso da moeda inelástica. No momento inicial, o déficit público financiado por moeda é igual a $f(0)$. A quantidade real de moeda neste ponto é igual a *m(0)* e o valor de $\dot{m}$ é negativo. A quantidade real de moeda começa a diminuir e a taxa de inflação aumenta, descrevendo uma trajetória hiperinflacionária. A sociedade sabe de antemão que a restrição orçamentária não é sustentável, e que em algum ponto do tempo haverá a estabilização da economia. O período de tempo t_h indica o maior período de tempo que a hiperinflação pode durar. A estabilização da economia pode ocorrer a qualquer momento antes de terminar este período. Todavia, mesmo sabendo que a situação é insustentável a sociedade continua usando a moeda porque ela é essencial para as transações econômicas.

A Figura 7.15 mostra a solução do modelo quando a moeda é não inelástica. No momento inicial quando o déficit público é *f(0)* a quantidade real de moeda é igual a *m(0)* e $\dot{m}(0) < 0$. Isto é, a quantidade real de moeda começa a diminuir e a taxa de inflação aumentar. A dinâmica do processo pode levar a economia eventualmente ao "lado errado" da curva de Laffer. Este fato não resulta de um comportamento irracional do governo, no sentido de que poderia arrecadar mais com menos inflação. Ele resulta da irracionalidade da crise fiscal financiada por moeda ser uma política insustentável, pois a restrição intertemporal do governo não é satisfeita.

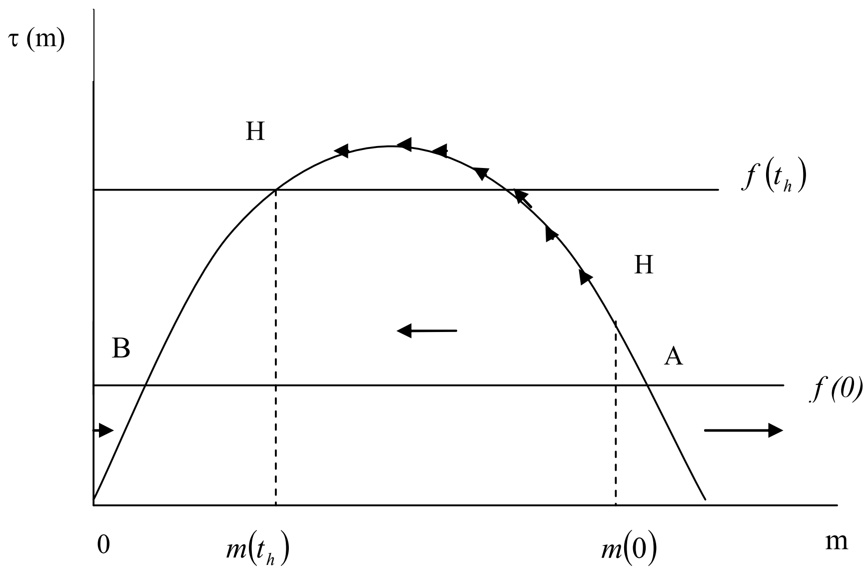


Figura 7.15 Hiperinflação Fraca

5. Equivalência Ricardiana

O teorema da equivalência ricardiana estabelece que dívida pública e imposto são equivalentes, para uma dada trajetória dos gastos do governo. O teorema admite as seguintes hipóteses: i) o agente representativo tem um horizonte infinito; i) o agente representativo toma emprestado e empresta a mesma taxa de juros real que o governo; iii) os impostos futuros são completamente previsíveis; iv) os impostos não têm efeitos alocativos e são do tipo "soma total"(*lump sum* em inglês). A demonstração deste teorema é bastante simples, bastando para isto que se faça a consolidação das restrições orçamentárias do setor privado e do governo.

Restrição Orçamentária: Setor Privado

A restrição orçamentária do setor privado mostra como os recursos deste setor são usados. A renda Y mais os juros dos títulos públicos em carteira rB financiam os gastos com consumo C, o pagamento de impostos T, a variação do estoque de moeda $\dot{M}$ e a variação do estoque de títulos públicos $\dot{B}$:

$$Y + r\,B = C + T + \overset{\circ}{M} + \overset{\circ}{B}$$

Dividindo-se os dois lados desta equação pelo nível de preços tem-se:

$$\frac{Y}{P} + r\,\frac{B}{P} = \frac{C}{P} + \frac{T}{P} + \frac{\overset{\circ}{M}}{P} + \frac{\overset{\circ}{B}}{P}$$

Usando-se letras minúsculas para denominar os valores reais das varáveis, esta restrição pode ser escrita como:

$$y + r\, b = c + \tau + \dot{m} + \pi\, m + \dot{b} + \pi\, b$$

Somando-se e subtraindo-se o produto da taxa de juros real pela quantidade real de moeda não altera a expressão anterior. Isto é:

$$y + (r - \pi)b = c + \tau + \dot{m} + \dot{b} + m\rho - m\rho + \pi\, m$$

Os serviços da moeda dependem da quantidade real de moeda, $r\ m = s\ (m)$. Logo, a restrição orçamentária do setor privado afirma que a renda e os rendimentos provenientes dos ativos financeiros são usados na compra de bens e serviços, no pagamento de impostos, no consumo dos serviços da moeda e na variação dos estoques reais de moeda e de títulos da dívida pública. Em símbolos:

$$y + \rho(m + b) = c + \tau + s(m) + \dot{m} + \dot{b}$$

O total de ativos financeiros do setor privado é igual à soma do estoque de moeda com o estoque de títulos: $a = m+b$. Segue-se, portanto, que a restrição orçamentária do setor privado em termos de fluxos é descrita pela equação diferencial:

$$\dot{a} = \rho a + y - c - \tau - s(m)$$

A integral desta equação entre as datas t e T produz a restrição orçamentária do setor privado em termos de estoque:

$$a(t) = a(T)\, e^{-\rho(T-t)} + \int_t^T [c + \tau + s(m) - y]\, e^{-\rho(v-t)} dv$$

Para que não ocorra jogo de Ponzi o seguinte limite deve ser satisfeito:

$$\lim_{T\to\infty} a(T) e^{-\rho(T-t)} = 0$$

Esta condição afirma que o agente não pode se endividar em bola de neve, ou seja, ele não pode refinanciar sua dívida e os juros devidos com mais dívida. Esta proposição é equivalente a afirmação de que o valor presente dos seus gastos com consumo, pagamento de impostos e com os serviços da moeda tem que ser igual ao valor presente de sua renda adicionada ao patrimônio atual de seus ativos financeiros:

$$a(t) + \int_t^\infty y\, e^{-\rho(v-t)} dv = \int_t^\infty [c + \tau + s(m)] e^{-\rho(v-t)} dv$$

Restrição Orçamentária: Setor Público

A restrição orçamentária do governo estabelece que o mesmo financie suas despesas cobrando impostos, emitindo moeda e se endividando:

$$\frac{G}{P}+r\,\frac{B}{P}-\frac{T}{P}=\frac{\overset{\circ}{M}}{P}+\frac{\overset{\circ}{B}}{P}$$

Os valores foram deflacionados pelo índice de preços. Usando-se letras minúsculas para denominar os valores reais das varáveis, levando-se em conta que $\dot{M}/P=\dot{m}+\pi\ m$ e de que $\dot{B}/P=\dot{b}+\pi\ b$, a restrição anterior transforma-se em:

$$g-\tau+r\,b=\dot{m}+\pi\,m+\dot{b}+\pi\,b$$

Adicionando-se e subtraindo-se $\rho\ m$ nesta equação obtém-se:

$$g-\tau+(r-\pi)b=\dot{m}+\dot{b}+\rho\,m-\rho\,m+\pi\,m$$

Esta equação é equivalente a:

$$g-\tau+\rho(m+b)=\dot{m}+\dot{b}+r\,m$$

A restrição orçamentária do governo em termos de fluxos é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{a}=\rho\,a+g-\tau-s(m)$$

Integrando-se os dois lados desta expressão obtém-se a restrição orçamentária do governo em termos de estoque:

$$a(t)=\int_t^\infty\,[\tau+s(m)-g]\,e^{-\rho\,(v-t)}dv$$

Esta expressão supõe que a condição para inexistência de jogo de Ponzi seja satisfeita:

$$\lim_{T\to\infty} a(T)\,e^{-\rho\,(T-t)}=0$$

Consolidação dos Setores Privado e Público

Substituindo-se o valor de *a(t)* da restrição orçamentária do governo na restrição orçamentária do setor privado conclui-se que o valor presente dos gastos de consumo tem que ser igual ao valor presente do fluxo de renda do setor privado deduzido dos gastos do governo:

$$\int_t^\infty\,c\,e^{-\rho\,(v-t)}dv=\int_t^\infty\,(y-g)\,e^{-\rho(v-t)}dv$$

A dívida pública e os impostos são irrelevantes nas decisões de gastos de consumo do agente representativo. A razão básica para este resultado é de que a dívida pública não é considerada como parte do patrimônio do setor privado porque ao valor da dívida pública corresponde um passivo igual ao valor presente dos impostos futuros para pagar a dívida.

6. Teoria Fiscal do Nível de Preços

A teoria fiscal do nível de preços supõe que o banco central fixa a taxa de juros nominal da economia,

$$r = \bar{r}$$

e que o tesouro fixa o superávit primário,

$$f_s = \bar{f}_s$$

A política fiscal é uma política não ricardiana porque o governo escolhe livremente o superávit primário e não aquele que seria consistente com a restrição orçamentária do governo.

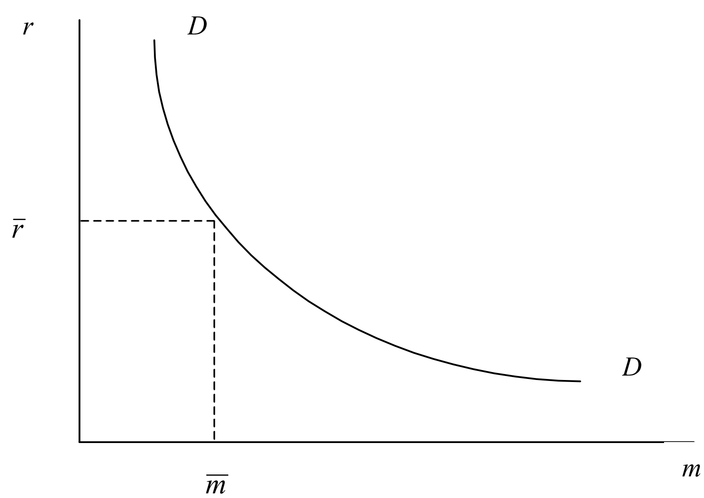


Figura 7.16

Na teoria fiscal do nível de preços a restrição orçamentária do governo não é uma identidade, mas sim uma condição de equilíbrio do modelo. A combinação de políticas monetária e fiscal resolveria o problema de indeterminação do nível de preços quando o banco central fixa a taxa de juros nominal. Na Figura 7.16 a quantidade real de moeda está determinada pela taxa de juros nominal, mas o nível de preços e a quantidade nominal de moeda estão indeterminados. A teoria fiscal resolve este problema determinando o nível de preços pelo lado fiscal, de tal sorte que a dívida pública seja solvente.

O equilíbrio no mercado de bens e serviços ocorre quando o dispêndio é igual ao produto:

$$y = c + g \quad , \quad y = \bar{y}$$

Nesta economia o produto real, por hipótese, é fixo, ou seja, a dotação do produto real é igual a $\bar{y}$.

A dívida do governo é composta pela quantidade real de moeda em poder do público e pelo estoque real da dívida pública, que por hipótese não é indexada a nenhum índice de preços. Isto é:

$$a(t) = m(t) + b(t) = \overline{m} + b(t)$$

A dívida do governo será sustentável quando ela for igual ao valor presente dos fluxos de superávit primários:

$$a(t) = \int_t^\infty \bar{f}_s \, e^{-\rho(v-t)} \, dv$$

Esta condição de solvência combinada com a definição da dívida permite escrever:

$$\overline{m} + b(t) = \int_t^\infty \bar{f}_s \quad e^{-\rho(v-t)} dv$$

Como o estoque real da dívida é igual à razão entre o estoque nominal e o índice de preços, segue-se que:

$$\frac{B(t)}{P(t)} = \int_t^\infty \bar{f}_s \quad e^{-\rho(v-t)} dv - \overline{m}$$

O nível de preços é, então, dado pela razão entre o estoque nominal da dívida pública e o valor presente dos superávits primários deduzido da quantidade real de moeda:

$$P(t) = \frac{B(t)}{\int_t^\infty \bar{f}_s \quad e^{-\rho(v-t)} dv - \overline{m}}$$

O mecanismo por trás da determinação do nível de preços é um efeito riqueza proveniente da política fiscal não ricardiana. Quando o governo fixa o superávit primário, a riqueza do público aumenta e este aumento da riqueza acarreta aumento na compra de bens e serviços. A conseqüência deste aumento do dispêndio é o aumento do nível de preços, que recompõe a lógica do sistema tornando a dívida do governo igual ao valor presente dos fluxos de superávit primários.

7. Sustentabilidade do Regime Monetário

O banco central pode escolher o regime monetário, fixando a taxa de câmbio ou a taxa de juros. No regime de câmbio fixo, o banco central compra e vende a moeda estrangeira a um preço previamente estipulado. Neste regime, a taxa de inflação, no longo prazo, será igual à taxa de inflação do país ao qual o câmbio está atrelado. No regime monetário de câmbio flexível, o banco central controla a taxa de juros do mercado interbancário. A taxa de câmbio é dada pelo mercado de câmbio. O banco central, neste regime, pode escolher livremente a taxa de inflação de longo prazo do país.

Em ambos os regimes, a taxa de inflação de longo prazo, isto é, a alíquota do imposto inflacionário é escolhida sem que se leve em conta a restrição orçamentária do governo. Estes regimes monetários são sustentáveis no longo prazo? Para responder a esta pergunta, tem-se que analisar a restrição orçamentária intertemporal do governo.

A restrição orçamentária do governo, em termos de fluxos, pode ser escrita como:

$$\dot{b} + \dot{m} = (\rho - n)(b + m) - f_s - (\rho + \pi) m$$

A notação é a mesma que tem sido usada neste capítulo. Como $a = b + m$ e $s(m) = (\rho + \pi) m$, esta restrição é equivalente a:

$$\dot{a} = (\rho - n) a - f_s - s(m)$$

A restrição intertemporal do governo, admitindo-se que não haja jogo de Ponzi é, portanto, dada por:

$$a(t) = \int_t^\infty [f_s + s(m)] e^{-(\rho-n)(v-t)} dv$$

No longo prazo, qualquer que seja o regime monetário, o valor dos serviços da moeda depende da taxa de inflação e é fixo. Isto é:

$$s(m) = (\rho + \bar{\pi}) \bar{m} = \bar{s}$$

onde a taxa de inflação de longo prazo $(\bar{\pi})$ é igual à taxa de inflação externa $(\bar{\pi} = \pi^*)$ quando o câmbio é fixo, ou então, igual à meta de inflação, implícita ou explícita, no regime de câmbio flexível. A taxa de juros nominal $(\rho + \bar{\pi})$ determina a quantidade real de moeda $(\bar{m})$ e, portanto, o valor dos serviços de moeda $(\bar{s})$.

Como $a(t) = b(t) + \bar{m}$ segue-se, então, que a restrição orçamentária intertemporal do governo pode ser escrita como:

$$b(t) = \int_t^\infty f_s \, e^{-(\rho-n)(v-t)} dv + \frac{(n + \bar{\pi})\bar{m}}{\rho - n}$$

A conclusão a que se chega, a partir desta restrição intertemporal, é de que a sustentabilidade de qualquer regime monetário, seja de câmbio fixo ou de câmbio flexível, depende do regime fiscal. Se o regime fiscal não for sustentável, o regime monetário também não será sustentável.

8. Exercícios

1) O governo financia seu déficit emitindo títulos e moeda de acordo com:

$$g - \tau + rb = \dot{b} + (n + \pi) b + \mu\, m$$

onde g, τ, b e m são os valores das despesas, dos impostos, da dívida pública e da base monetária, como proporção do produto nominal; r é a taxa de juros nominal, n é a taxa de crescimento do produto real, π é a taxa de inflação, μ é a taxa de crescimento da base monetária, e $\dot{b} = db/dt$. Admita que a política fiscal siga a regra:

$$f = g - \tau + r\, b = a + \alpha\, b > 0$$

As letras a e α são parâmetros e $0 \leq \alpha \leq$ r. Analise a sustentabilidade da dívida pública com esta regra de política fiscal.

2) Considere o seguinte modelo:

déficit público financiado por títulos e moeda: $g - \tau + \rho\, b = \dot{b} + \mu\, m$

imposto depende da dívida pública: $\tau = \tau(b) \quad , \tau' > 0$

demanda de moeda: $m = f(r) \quad , f' < 0$

regra de política monetária: $\dot{m} = m\ (\ \mu - \pi\ )\ ,\ \mu = constante$

taxa de juro real constante.

Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.

3) Considere o seguinte modelo:

Demanda de moeda: $m = \alpha - \beta\pi^e, \alpha > 0,\ \beta > 0,\ m \leq \overline{m}$

Déficit público financiado por moeda: $f = \frac{dM}{dt}\frac{1}{P},\ f =$ constante

Taxa de inflação esperada: $\dot{\pi}^e = \theta\ (\pi - \pi^e)$

Os símbolos têm o seguinte significado: m é a quantidade real de moeda *($m = M/P$)*, π^e a taxa de inflação esperada, M o estoque nominal de moeda, P o índice de preços e π a taxa de inflação.

a) Analise a dinâmica e o equilíbrio deste modelo;

b) Repita o item a) quando $\theta \to \infty$;

c) Qual a taxa de inflação que maximiza a receita do imposto inflacionário?

4) Suponha uma economia descrita pela seguinte equação diferencial

$$\dot{\pi} = F\ (\ \pi, m, \alpha)$$

onde $\pi = d \log P/dt$ é a taxa de inflação, P é o índice de preços e m o nível de liquidez real ($m = M/P$, onde M é o estoque de moeda) e α é um vetor de parâmetros de economia.

Admita dois regimes de política econômica:

RPM (Regime monetário, política monetária ativa): $\dot{m} = m\,(\,\mu - \pi)$.

RPM (Regime fiscal, política monetária passiva): $\dot{m} = f - m\,\pi$.

Os símbolos têm o seguinte significado: μ é a taxa de expansão do estoque de moeda *($\mu = d \log M/dt$)* e f é o déficit público real.

a) Especifique uma função F para a equação de $\dot{\pi}$, indicando as hipóteses que você adotou na especificação.
b) Analise a dinâmica da economia para cada um dos regimes de política econômica.
c) O que acontece quando o déficit real *(f)* diminui?
d) O que acontece quando a taxa de expansão monetária (μ) diminui?

5) Considere o seguinte modelo:

Demanda agregada: $y = k + \alpha \left(m - p\right) + \beta \pi$

CP: $\pi = \pi^{e} + \delta \ \left(y - \bar{y}\right)$

Expectativa: $\pi^{e} = \mu$

RPM: $\dfrac{\dot{M}}{M} = \mu = constante$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = *log* do produto real; m = *log* do estoque nominal de moeda, p = *log* do índice de preços; $\dot{p} = \pi$.
a) Nesta economia o produto pode ser diferente do produto de pleno emprego $\left(\bar{y}\right)$?
b) Pode-se afirmar que a estabilidade deste modelo independe dos valores dos parâmetros?
c) Você seria capaz de resolver este modelo quando a regra de política monetária é substituída pela seguinte regra $\dfrac{\dot{M}}{P} = f = constante$, e responder à questão do item anterior?

6) Considere a seguinte restrição orçamentária do governo:

$$f + \rho\, b = \dot{b} + \frac{\dot{M}}{P}$$

Suponha que o governo adota a seguinte regra de política monetária/fiscal:

$$\frac{\dot{M}}{P} = \alpha\ f$$

a) Qual o valor do parâmetro α para que a dívida pública seja sustentável?
b) Suponha que ocorra uma inovação financeira que desloque a curva de demanda de moeda. Pode acontecer uma hiperinflação nesta economia?

7) A restrição orçamentária do governo é dada por:

$$G_t + r_{t-1}\ B_{t-1} = T_t + B_t - B_{t-1}$$

Defina:

$$d_t = \frac{d_{t-1}}{1 + r_{t-1}} \quad ,t = 1, 2, \ldots$$

$$d_o = 1$$

a) Mostre que: $\sum_{t=1}^{\infty} d_t \; T_t = \sum_{t=1}^{\infty} d_t \; G_t + B_o - \lim_{T \to \infty} \; d_T \; B_T$

b) Se $\lim_{T \to \infty} d_T \; B_T > 0$, você compraria títulos públicos?

Os símbolos têm o seguinte significado: B= dívida pública; G = gastos do governo; T = impostos, r = taxa de juros.

8) O governo financia o déficit público emitindo moeda de acordo com:

$$G_t - T_t = M_t - M_{t-1}$$

Os símbolos têm o seguinte significado: G = gastos (nominais) do governo, T = impostos (nominais) arrecadados pelo governo, M_t = estoque da base monetária.

Como você mediria o imposto inflacionário neste modelo com variáveis discretas?

9) O saldo em conta corrente do balanço de pagamentos $\left(\dot{B}\right)$ é dado pela seguinte expressão

$$\dot{B} = -TB + \rho^* \; B$$

TB é o saldo das exportações sobre as importações dos bens e serviços, ρ^* é a taxa de juros que incide sobre a dívida externa *B* (em dólares). Divida ambos os lados desta expressão pelo produto interno bruto *Y* (em dólares) dos bens e serviços transacionados no comércio internacional. Isto é: $\frac{\dot{B}}{Y} = -\frac{TB}{Y} + \rho^* \frac{B}{Y}$.

Analise a sustentabilidade da dívida externa deste país.

10) Admita que o governo dê um calote na dívida pública. Admita também que o teorema da equivalência ricardiana é válido. Quais as conseqüências deste calote?

11) Um partido político tem os seguintes objetivos em seu programa de governo:

a) Manter a carga tributária estável;
b) Aumentar a proporção dos gastos do governo em relação ao produto;
c) Reduzir o serviço da dívida;
d) Não aumentar a taxa de inflação.

Analise a consistência deste programa.

12) A restrição orçamentária do governo é dada por:

$$\frac{\mathrm{G-T}}{\mathrm{Y}} + \mathrm{r}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{Y}} \equiv \frac{\overset{\circ}{\mathrm{B}}}{\mathrm{Y}} + \frac{\overset{\circ}{\mathrm{M}}}{\mathrm{Y}}$$

Os símbolos têm o seguinte significado: G = gastos do governo; T = arrecadação tributária; Y = produto nominal; r = taxa de juro nominal; B = estoque da dívida pública; M = estoque da base monetária; $\overset{\circ}{B} = dB/dt$; $\overset{\circ}{M} = dM/dt$. Admita que o aumento de base monetária seja desprezível $\left(\overset{\circ}{M} = 0\right)$.

a) Suponha que o governo tivesse como objetivo um déficit nominal de 3%. Qual seria o valor do superávit primário necessário para atingir tal objetivo?
b) Suponha que o governo fixasse o superávit primário de acordo com a seguinte regra: $\frac{T - G}{Y} = \alpha \rho b$. A taxa de juros real é $\rho = r - \pi$ e α um coeficiente positivo. Qual a restrição que o coeficiente α deve obedecer para que a dívida pública seja sustentável?
c) Suponha que a regra do superávit primário fosse dada por: $\frac{T - G}{Y} = \alpha \ b$. A dívida pública é sustentável?

13) Considere o seguinte modelo (Aritmética Monetarista Perversa):

Déficit público financiado por títulos e moeda: $\dot{b} = f + \rho b - \mu m$
Política monetária: $\dot{m} = m(\mu - \pi)$, $\mu = constante$
Demanda de moeda: $m = m(r)$, $m' < 0$
Equação de Fisher: $r = \rho + \pi$
Admita que o déficit público *f* seja constante.
a) Analise a dinâmica e o equilíbrio deste modelo num diagrama de fases com *b* no eixo vertical e *m* no eixo horizontal.
b) Admita que o Banco central decida reduzir a taxa de expansão monetária, mas que exista um teto para a dívida pública igual a *b(T)*. Que acontece com a taxa de inflação no momento da mudança da política monetária?

14) Considere o limite,

$$\lim_{T \to \infty} m(T)\, e^{-\rho(T-t)} = C\, e^{\rho t}$$

onde: $C = \lim_{T \to \infty} m(T) e^{-\rho T}$. Quando $C \neq 0$ o que acontece com a solução da equação diferencial:

$$\dot{m} = \rho m + f - s(m)$$

15) Derive b(t) com relação ao tempo,

$$b(t) = \int_t^{\infty} f_s \, e^{-(\rho - n)(v - t)} \, dv$$

para obter a equação diferencial:

$$\dot{b} = (\rho - n) b - f_s$$

A solução deste exercício requer a aplicação da regra de Leibnitz da derivada de V(r) com relação à r:

$$V(r) = \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(x,r)\, dx$$

A regra de Leibnitz é a seguinte:

$$\frac{dV(r)}{dr} = f(\beta(r), r)\frac{d\beta(r)}{dr} - f(\alpha(r), r)\frac{d\alpha(r)}{dr} + \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} \frac{\partial f}{\partial r}(x,r)\, dx$$

16) Derive m(t) com relação ao tempo,

$$m(t) = \int_t^{\infty} [s(m) - f]\, e^{-\rho(v-t)}\, dv$$

para obter a equação diferencial:

$$\dot{m} = \rho m + f - s(m)$$

17) Derive a(t) com relação ao tempo,

$$a(t) = \int_t^{\infty} [\tau + s(m) - g]\, e^{-\rho(v-t)}\, dv$$

para obter a equação diferencial:

$$\dot{a} = \rho\, a + g - \tau - s(m)$$

18) Dada a restrição orçamentária

$$-f_s + (\rho - n)b - (\pi + n)m = \dot{b} + \dot{m}$$

a) Mostre que ela pode ser escrita como:

$$a(t) = \int_t^{\infty} [f_s + s(m)]\, e^{-(\rho-\eta)(v-t)}\, dv$$

onde $a=b+m$.

b) Mostre que

$$\int_t^{\infty} s(m)\, e^{-(\rho-n)(v-t)} dv - m(t) = \int_t^{\infty} (\rho - n)[m(v) - m(t)]\, e^{-(\rho-n)(v-t)}\, dv +$$
$$\int_t^{\infty} (\pi + n)\, m(v) e^{-(\rho-n)(v-t)}\, dv$$

c) Qual a interpretação dos dois componentes do lado direito da expressão acima?

19) O déficit público é financiado através da venda pelo Tesouro, de títulos denominados em moeda local e em moeda estrangeira, de acordo com:

$$G - T + rB + r^* SB^* \equiv \dot{B} + S\dot{B}^*$$

onde G = gastos do governo, T = impostos, r = taxa de juros nominal, B = estoque de títulos denominados em moeda local, S = taxa de câmbio, B^*= estoque de títulos denominados em moeda estrangeira. $\dot{B} = dB/dt; \dot{B}^* = dB^*/dt$. Seja Y o produto nominal da economia: $Y = P_y$, P é o índice de preços e y o produto real. Defina-se: $f = (G - T)/Y : b = B/Y, b^* = SB^*/Y$.

a) Mostre que a restrição orçamentária do governo pode ser escrita como:

$$f + (r - \pi - n)b + (r^* - n - \pi + \dot{s})b^* = \dot{b} + \dot{b}^*$$

onde $\pi = \dot{P}/P, \dot{s} = \dot{s}/s, n = \dot{y}/y$.

b) Supondo que a arbitragem descoberta da taxa de juros real, $\dot{q} = \rho - \rho^*$, mostre que a restrição orçamentária transforma-se em:

$$f + (\rho - n)(b + b^*) = \dot{b} + \dot{b}^*$$

20) Considere o seguinte modelo:

Função de Produção: $y = f(k)$
Restrição Orçamentária do Governo: $g + rb = \tau(y + rb)$
Taxa de Juros Bruta: $r = f'(k)$
Taxa de Juros Líquida: $\rho = (1 - \tau)r$

a) Mostre que:

$$\frac{dk}{db} = \left[\frac{\tau}{1 - \tau} + \frac{f\,f''}{(f')^2}\right]^{-1}$$

b) Admita que $y = k^\alpha$, $\tau = 1/3$ e $\alpha = 1/3$. Mostre que: $\frac{dk}{db} = -\frac{2}{3}$

Capítulo 8

Teoria e Política Monetária

Este capítulo apresenta vários tópicos da teoria e política monetária. A primeira seção cuida da determinação do preço da moeda como um preço de um ativo financeiro, com seus dois componentes: fundamentos e bolhas. A segunda seção mostra a possibilidade de equilíbrio múltiplo numa economia monetária, onde num dos equilíbrios a moeda não tem valor. A terceira seção trata da questão da indeterminação do preço da moeda quando o banco central adota uma regra de política monetária rígida fixando a taxa de juros nominal, independente das condições vigentes da economia. A quarta seção deduz a quantidade ótima de moeda numa economia com preços flexíveis. A quinta seção analisa a armadilha da liquidez na sua versão moderna com o limite zero da taxa de juros nominal. A sexta seção trata do problema da inconsistência dinâmica quando existem incentivos para que as decisões tomadas no presente para o futuro não sejam levadas a cabo. A sétima seção cuida da suavização da taxa de juros pelos banqueiros centrais que preferem não mudar bruscamente a taxa de juros, mas sim alterá-la gradualmente produzindo certo grau de inércia no comportamento da taxa de juros do mercado interbancário. A oitava seção trata do programa de metas de inflação, um sistema adotado por vários bancos centrais do mundo. A nona seção analisa os procedimentos operacionais da política monetária no mercado de reservas bancárias, onde o banco central tem um papel dominante. A décima seção mostra como se pode introduzir a estrutura a termo da taxa de juros nos modelos macroeconômicos de curto prazo. Este arcabouço permite que se analise o efeito do anúncio do banco central com relação a taxa de juros de curto prazo sobre o nível de atividade e a taxa de inflação da economia.

1. Preço da Moeda: Bolhas x Fundamentos

O preço da moeda é igual à quantidade de bens e serviços que pode ser comprada com uma unidade monetária. Isto é, o preço da moeda (q) é igual ao inverso do nível de preços (P):

$$q = \frac{1}{P} = \frac{m}{M}$$

O termo depois do segundo sinal da igualdade mostra que o preço da moeda é igual à razão entre a quantidade real (m) e o estoque nominal (M) de moeda. O enfoque tradicional para determinar o valor da moeda consiste justamente em analisar as variáveis que afetam os estoques, real e nominal, da moeda. Os indivíduos decidem a quantidade real de moeda que desejam ter nas suas carteiras de ativos financeiros, e o banco central dispõe de instrumentos para a compra e a venda de moeda que lhe permite controlar o estoque nominal da mesma.

Um problema fundamental na teoria monetária é a provisão de micro-fundamentos da equação de demanda de moeda. Quatro enfoques têm sido usados com este propósito na literatura: i) moeda na função utilidade (MIU); ii) restrição prévia de liquidez (CIA); iii) custos de transação (TC) e iv) modelos de gerações superpostas (OLG). Os acrônimos são formados pelas iniciais das letras em inglês que denominam cada um destes enfoques. Os três primeiros enfoques foram apresentados no Capítulo 1 e o último enfoque foi abandonado porque ele não leva em consideração o principal atributo da moeda, a função de meio de pagamentos. Qualquer um destes enfoques produz uma equação inversa para a quantidade real demandada de moeda,

$$r = r(m), \qquad r' < 0$$

A taxa nominal de juros r é o custo de oportunidade de reter moeda. A equação de demanda de moeda depende também de uma variável de escala, como a renda ou o consumo. A análise que se segue supõe que esta variável não mude de valor.

Os serviços de liquidez da moeda podem ser medidos pelo custo de oportunidade dos recursos usados na forma de moeda. Isto é:

$$s = r\, m = s(m)$$

O valor dos serviços corresponde ao retângulo com a área tracejada da Figura 8.1. Os serviços de liquidez por unidade de moeda são obtidos dividindo-se o fluxo de serviços *(s)* pelo estoque nominal de moeda*: s(m)/M***.**

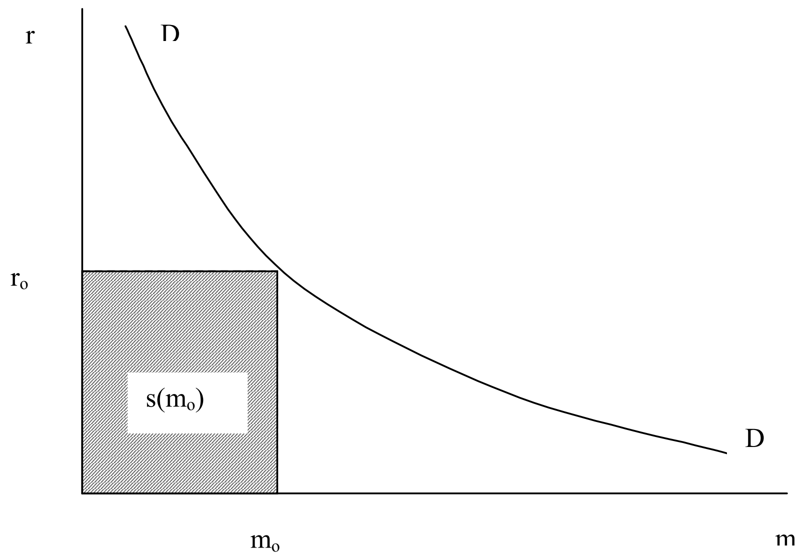


Figura 8.1

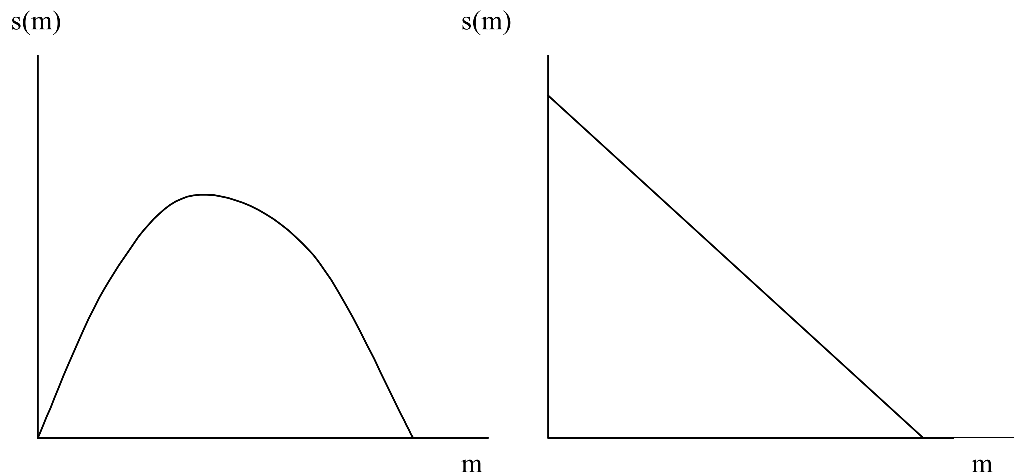
Exemplos usuais da função *s(m)* correspondem às especificações da equação de demanda de moeda nas formas funcionais semi-logarítmica e dupla logarítmica. Na forma semi-logarítmica $\log m = -\alpha\, r,\ \alpha > 0,\ s(m) = -(m \log m)/\alpha,\ s'(m) = 0$ quando $m = \exp(-1)$ e $s''(m) < 0$. A forma funcional dupla logarítmica é um caso particular de $\log m = -\epsilon \log(\beta + r),\ \epsilon > 0$, quando $\beta = 0$. A função de serviços de liquidez neste caso é dada por $s(m) = m\left(m^{-1/\epsilon} - \beta\right),\ s'(m) < 0$ e $s''(m) \geq 0$ quando $\epsilon \leq 1$. Os gráficos da Figura 8.2 correspondem aos casos particulares das equações semi-logarítmica e dupla logarítmica em que $\epsilon = 1$. Na Figura 8.2a a elasticidade da quantidade real demandada de moeda com relação à taxa de juros varia entre zero e menos infinito. Na Figura 8.2b a elasticidade é menor do que um em valor absoluto. Neste caso a moeda é definida como essencial.

A moeda é essencial quando ela não é facilmente substituível por outros ativos financeiros na sua função de meio de pagamentos. A moeda é uma convenção social que depende tanto do arcabouço jurídico que estabelece as condições legais para a liquidação financeira dos contratos quanto do grau em que a sociedade é obrigada a cumprir as leis vigentes. Portanto, a essencialidade da moeda é determinada não somente pela tecnologia das transações econômicas, mas também pelas instituições de cada país.

O preço de qualquer ativo em equilíbrio, quando existe certeza e os mercados de capitais são perfeitos, é tal que sua taxa de retorno é igual à taxa de juros. Caso contrário existe oportunidades para arbitragem. Portanto, se ρ é a taxa de juros real, o preço da moeda satisfaz à seguinte condição de arbitragem:

$$\rho = \frac{\dot{q} + \frac{s(m)}{M}}{q}$$

onde $\dot{q} = dq / dt$ é o ganho (perda) de capital quando o preço da moeda aumenta (diminui).



a) Moeda Não Essencial b) Moeda Essencial

Figura 8.2

Para deduzir esta equação basta combinar-se $s(m) = rm$ e a equação de Fisher $r = \rho + \pi = \rho - \dot{q}/q$, ou seja, $s(m) = \left(\rho - \dot{q}/q\right) M\ q$, levando-se em conta o fato de que $m{=}Mq$. A equação de arbitragem também pode ser escrita do seguinte modo:

$$\dot{q} = \rho\, q - s\,(Mq) / M$$

A solução desta equação diferencial necessita da especificação da função que representa os serviços da moeda *s(m)* e do processo que gera o estoque nominal *(M)* de moeda. Todavia, qualquer que seja a solução, ela tem dois componentes, um de fundamentos e outro de bolha:

$$q(t) = q_f(t) + q_b(t)$$

A solução de bolha q_b é dada por:

$$q_b(t) = C\, e^{\rho\, t}$$

É fácil verificar que esta expressão é solução da equação de arbitragem. Com efeito, derivando-se ambos os lados da mesma, levando-se em conta os dois componentes da solução e substituindo-se na equação de arbitragem, obtém-se:

$$\dot{q}_f + \rho\; C e^{\rho\, t} = \rho q_f + \rho\; C e^{\rho\, t} - s(m)/M$$

Simplificando-se, resulta em:

$$\dot{q}_f = \rho\; q_f - s(m)/M$$

Logo, a solução da equação de arbitragem tem dois componentes. A constante C da solução de bolha pode ser negativa porque no caso da moeda sem lastro nada impede que o seu preço seja igual a zero, diferente do que ocorre com um ativo real que não teria uma bolha que levasse seu preço a zero. A solução de fundamentos (q_f) é igual ao valor presente dos fluxos dos serviços da moeda. Isto é:

$$q_f(t) = \int_t^{\infty} \frac{s(m)}{M} e^{\,-\rho\,(v-t)}\, d\,v$$

A afirmação de que a moeda é um ativo financeiro usado como meio de pagamentos e seu preço é igual ao valor presente dos fluxos de serviços de liquidez que ela produz deve ser qualificada. Esta proposição baseia-se no seguinte teorema: O preço da moeda é dado pelo valor presente dos fluxos de serviços de liquidez se e somente se r=r(m) e $r = \rho + \pi$, onde r( ) é a função inversa da equação de demanda de moeda e $r = \rho + \pi$ é a equação de Fisher. A demonstração de que esta condição é suficiente já foi feita da expressão acima. Para demonstrar que esta condição é necessária basta derivar a mesma expressão com relação ao tempo e usar a definição da função *s(m).*

2. Equilíbrio Múltiplo

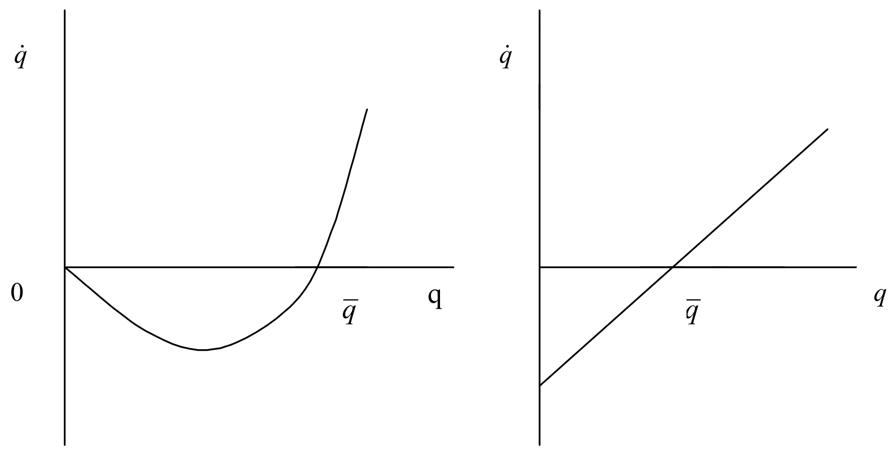
Para analisar a questão de equilíbrio múltiplo admita-se que o estoque nominal de moeda é constante e igual a uma unidade: *M=1*. Esta hipótese simplifica o problema sem acarretar nenhuma perda de generalidade. A equação diferencial de arbitragem da moeda torna-se então,

$$\dot{q} = \rho\, q - s(\,q\,)$$

O diagrama de fases da Figura 8.3, com o preço da moeda no eixo horizontal e sua derivada com relação ao tempo no eixo vertical, mostra que esta equação diferencial pode ter dois equilíbrios estacionários, ou apenas um, dependendo do limite da função *s(q)*, quando o preço da moeda aproxima-se de zero,

$$\lim_{q \to O_+} s(q) \begin{cases} = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Quando a moeda for essencial este limite é positivo e existe apenas um equilíbrio. Quando a moeda não for essencial, o limite é igual a zero e existem dois pontos de equilíbrio. Num equilíbrio, a moeda não tem valor, e existem trajetórias de hiperinflação que conduzem o valor da moeda para zero. As trajetórias que conduzem ao equilíbrio no qual o preço da moeda é igual a zero têm sido denominadas de bolhas. Todavia, elas não correspondem a soluções de bolhas propriamente ditas por que o valor da moeda em equilíbrio é igual a zero em virtude dos fluxos de serviços de liquidez da moeda, neste caso, serem iguais a zero.



a) Equilíbrio Múltiplo b) Equilíbrio Único

Figura 8.3

Como verificar empiricamente qual das duas situações é a relevante na prática? A resposta para esta pergunta é simples, porque se a moeda é essencial à elasticidade da quantidade real de moeda com relação à taxa de inflação é menor do que ou igual a um em valor absoluto. Quando a moeda não é essencial tal fato não ocorre. Logo, em princípio, dados de experiências de hiperinflação podem ser usados para testar esta hipótese.

3. Indeterminação do Preço da Moeda

O preço da moeda é indeterminado quando o banco central fixa a taxa de juros nominal $(r = \bar{r})$. Nestas circunstâncias, o fluxo de serviços é constante, $s(m) = \bar{s}$, mas a quantidade nominal de moeda não é determinada. Logo, a equação diferencial de arbitragem é dada por:

$$\dot{q} = \rho q - \frac{\bar{s}}{M}$$

O diagrama de fases da Figura 8.4 mostra que para cada valor de M existe um valor de equilíbrio para o preço da moeda. A indeterminação pode ser resolvida caso o banco central mude a regra de fixação da taxa de juros, para uma regra do tipo:

$$r = \bar{r} + \alpha \ (\bar{q} - q), \quad \alpha > 0$$

onde $\bar{q}$ é a meta do preço da moeda para o banco central. Em equilíbrio, quando $r = \bar{r}$, $q = \bar{q}$, e o preço é determinado.

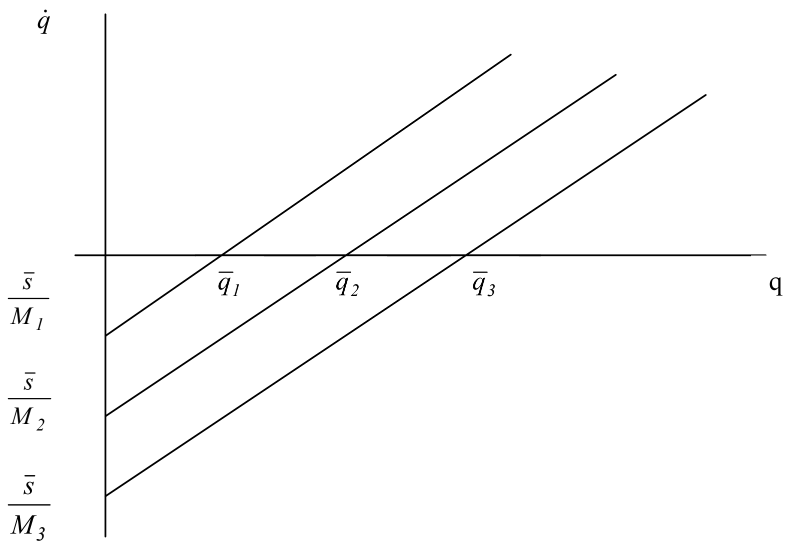


Figura 8.4

4. Quantidade Ótima de Moeda

O custo de oportunidade de reter moeda, para o setor privado, é a taxa de juros nominal. Numa economia com moeda sem lastro, o custo social de produzi-la é nulo. A Figura 8.5 mostra que o excedente do consumidor é máximo quando a taxa de juros nominal for igual a zero, e a quantidade real demandada de moeda igual a $\bar{m}$. O valor dos serviços da moeda, neste caso, é nulo: $s(\bar{m}) = 0$. Quando o valor dos serviços de liquidez da moeda é igual à zero, a equação diferencial de arbitragem é, então, dada por:

$$\dot{q} = \rho \ q$$

O preço da moeda cresce a uma taxa igual à taxa de juros real da economia. O preço da moeda, pelos fundamentos, é igual a zero. Todavia, o preço da moeda é dado pelo componente de bolha. Esta solução pode parecer estranha, mas ela não é uma solução de bolha típica dos modelos de otimização intertemporal, em virtude da hipótese de existência de uma quantidade real de moeda finita quando a taxa de juros nominal é igual a zero. Ademais, a interpretação mais adequada neste caso não seria com uma bolha, mas com o preço de um ativo que não produz um fluxo de caixa como o ouro, cujo preço, em equilíbrio, num mundo sem incerteza e com mercados perfeitos, deve aumentar a uma taxa igual à taxa de juros real. A analogia neste caso é com a conhecida regra para recursos naturais não renováveis. Esta regra estabelece que o preço sombra de um recurso não-renovável deve crescer a uma taxa igual à taxa de juros. Quando o custo marginal de extração do recurso não-renovável é igual a zero, o preço deste ativo aumenta a uma taxa igual à taxa de juros.

A regra de Friedman, da taxa de juros nominal igual a zero, que determina a quantidade ótima de moeda sofre do problema da indeterminação analisado na seção anterior, se o banco central decidir implementá-la fixando a taxa de juros. No instante inicial o preço da moeda não está definido, pois o valor presente dos fluxos dos serviços de liquidez da moeda é igual a zero. Esta condição, portanto, não pode ser usada para calcular o preço inicial da moeda. Logo, o banco central pode escolher qualquer valor inicial, de acordo com a regra modificada da taxa de juros em função do hiato do poder de compra da moeda. Isto equivale a dizer que existe um número infinito de trajetórias para o preço da moeda.

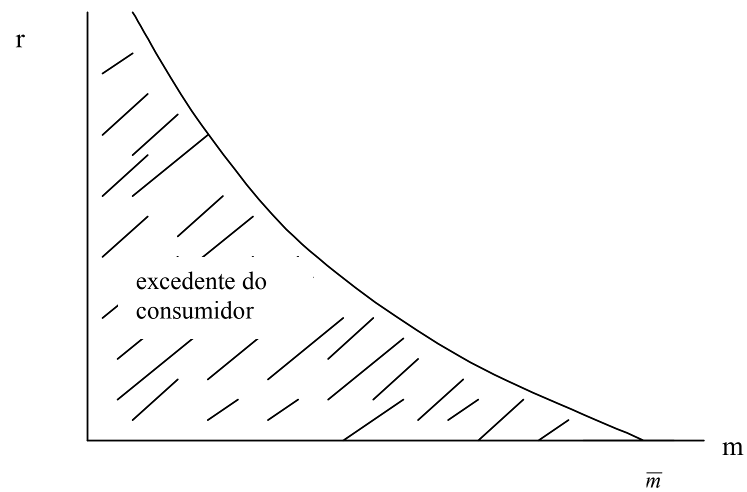


Figura 8.5

O preço da moeda tem de satisfazer a condição de que ele cresça a uma taxa igual à taxa de juros real da economia, qualquer que seja o seu valor inicial. O banco central ao invés de fixar a taxa de juros pode, portanto, implementar a política monetária ótima estabelecendo a trajetória da quantidade de moeda, com o estoque nominal diminuindo a uma taxa igual à taxa de juros real. As duas formas de implementar a política ótima são equivalentes desde que o preço inicial escolhido na regra da taxa de juros corresponda ao estoque inicial da trajetória do estoque nominal de moeda.

5. Limite Zero da Taxa de Juros Nominal

A taxa de juros nominal fixada pelo banco central tem como limite inferior o valor zero, pois não faz o mínimo sentido uma taxa negativa na presença de papel moeda (ou moeda metálica). Ninguém estaria disposto a aplicar, por exemplo, cem reais para obter um valor inferior no seu resgate. Portanto, se r^* é a taxa de juros calculada através de uma regra de política monetária, como a regra de Taylor, o banco central teria a seguinte regra de política,

$$r = \begin{cases} r^*, & se \quad r^* > 0 \\ 0\,, & se\; r^* \leq 0 \end{cases}$$

A taxa de juros r^* é dada por:

$$r^* = \overline{\rho} + \pi + \phi\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \theta\left(y - \overline{y}\right)$$

Quando o valor desta taxa for negativo ou igual a zero, o banco central fixaria em zero a taxa de juros nominal do mercado interbancário de reservas. Este caso corresponde à versão moderna da armadilha da liquidez. Que aconteceria com o equilíbrio e a dinâmica de uma economia que funcionasse nestas circunstâncias? Para analisar esta questão admita-se um modelo formado por uma curva IS tradicional, uma curva de Phillips, com rigidez de preços e inércia na taxa de inflação, e a regra de política monetária com taxa de juros nominal zero. Isto é:

IS: $y - \overline{y} = -\alpha\left(r - \pi - \overline{\rho}\right)$

CP: $\dot{\pi} = \delta\left(y - \overline{y}\right)$

RPM: $r=0$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Substituindo-se a taxa de juros da regra de política monetária na curva IS obtém-se a equação:

$$y - \overline{y} = \alpha\left(\overline{\rho} + \pi\right)$$

Esta equação combinada com a curva de Phillips pode ser analisada num diagrama de fases com a taxa de inflação medida no eixo vertical e o produto real no eixo horizontal, como indicado na Figura 8.6. A taxa de inflação de equilíbrio é negativa, ou seja, uma deflação, igual à taxa de juros real. O equilíbrio do produto real é igual ao produto potencial da economia. O equilíbrio do modelo é instável, como mostra as setas da reta positivamente inclinada no diagrama da Figura 8.6. Que aconteceria neste modelo se a taxa de juros real de longo prazo mudasse? Neste caso, em virtude da inércia da taxa de inflação, a economia entraria num processo recessivo se a taxa de juros real de longo prazo diminuísse e ela não retornaria ao pleno emprego. No caso oposto, se a taxa de juros real de longo prazo aumentasse, o produto real aumentaria sem que houvesse um mecanismo que fizesse a economia voltar ao pleno emprego.

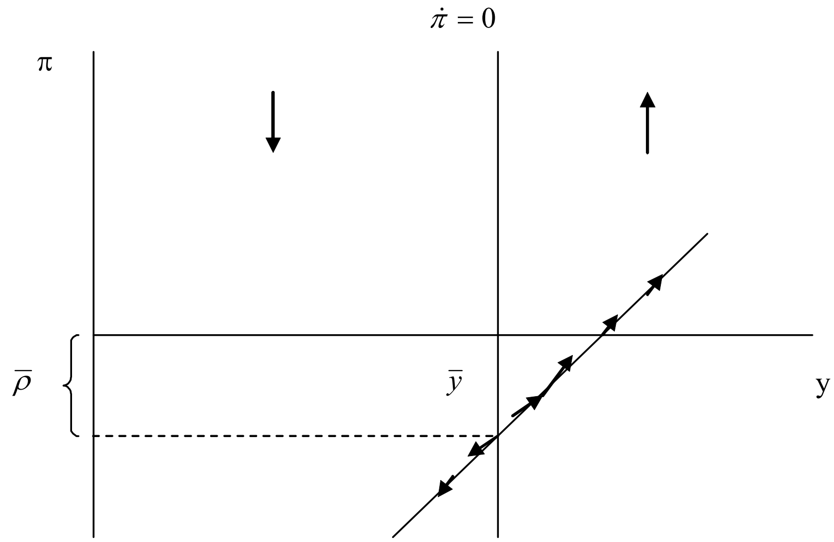


Figura 8.6: $\delta > 0$

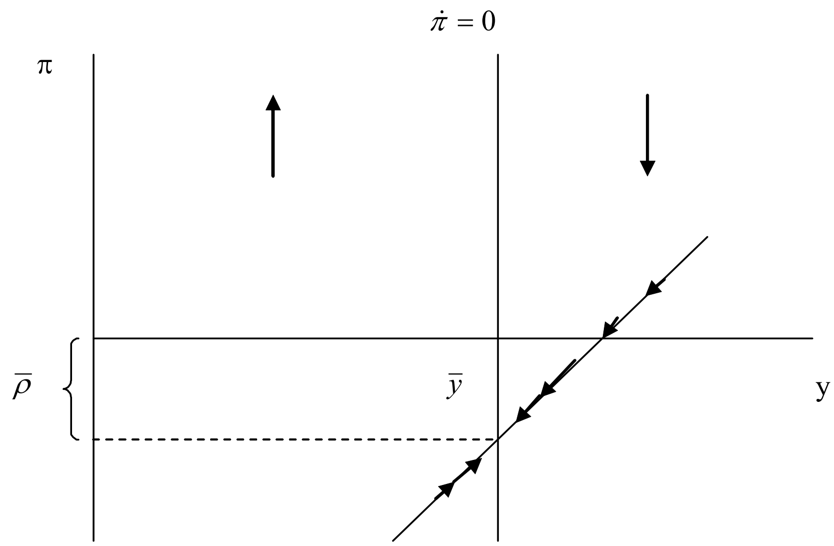


Figura 8.7 : $\delta < 0$

A outra possibilidade do modelo é de que o parâmetro δ da curva de Phillips seja negativo. Esta hipótese ocorre quando existe rigidez do nível de preços e não há inércia da taxa de inflação, que pode mudar de valor instantaneamente. O modelo é estável, como indicado no diagrama de fases da Figura 8.7. Todavia, existe agora multiplicidade de soluções. Uma mudança da taxa de juros real de longo prazo é consistente com uma infinidade de soluções, pois a taxa de inflação é uma variável que pode mudar de um valor para outro bruscamente.

<u>6. Inconsistência Dinâmica</u>

A inconsistência dinâmica é o fenômeno que acontece quando o agente econômico não tem como ser obrigado a cumprir amanhã o que prometeu hoje. Admita que o banqueiro central anuncie uma meta de inflação igual a $\bar{\pi}$ e que sua função objetivo dependa do quadrado da diferença entre a taxa de inflação observada e a meta da taxa de inflação, e do quadrado da diferença entre o produto real e a meta do produto real y^*. Isto é:

$$L = \frac{\varphi}{2}\left(\pi - \bar{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y - y^*\right)^2$$

O coeficiente φ desta função objetivo indica o peso relativo que o banco central atribui à taxa de inflação com relação ao produto. Quando φ é igual a zero o banco central só está preocupado com o produto real. Por outro lado, quando este parâmetro tende para infinito o banco central preocupa-se apenas com a inflação.

A meta do produto real é igual ao produto potencial da economia acrescido de uma constante *k*:

$$y^* = \bar{y} + k \quad , \quad k > 0$$

Substituindo-se este valor na função objetivo do banco central, a função de perda *L*, obtém-se:

$$L = \frac{\varphi}{2}\left(\pi - \bar{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y - \bar{y} - k\right)^2$$

A curva de Phillips será simplificada para não incluir parâmetros irrelevantes para as conclusões qualitativas do problema tratado nesta seção. A taxa de inflação é igual à taxa de inflação esperada e o coeficiente do hiato do produto é igual a um:

$$\pi = \pi^e + y - \bar{y}$$

Substituindo-se o hiato do produto da curva de Phillips na função de perda resulta em:

$$L = \frac{\varphi}{2}\left(\pi - \bar{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\pi - \pi^e - k\right)^2$$

O banco central apesar de ter anunciado a meta de inflação escolhe a taxa de inflação minimizando a função de perda com relação à taxa de inflação. A derivada parcial de *L* com relação à taxa de inflação π é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial \pi} = \varphi\left(\pi - \bar{\pi}\right) + \left(\pi - \pi^e - k\right) = 0$$

A solução da condição de primeira ordem deste problema é a seguinte taxa de inflação:

$$\pi = \frac{\varphi\,\bar{\pi} + \pi^e + k}{1 + \varphi}$$

Os agentes desta economia têm informação dos critérios adotados pelo banco central e expectativas racionais que neste caso é equivalente a previsão perfeita. Logo, a taxa de inflação esperada é igual à taxa de inflação observada:

$$\pi^e = \pi$$

Substituindo-se a taxa de inflação esperada pela taxa de inflação observada na solução da condição de primeira ordem, a taxa de inflação da economia será igual a meta de inflação prometida pelo banco central adicionada de um termo positivo que depende da constante k e do parâmetro φ da função de perda do banco central. Isto é:

$$\pi = \overline{\pi} + \frac{k}{\varphi}$$

A política monetária sofre de inconsistência dinâmica porque a meta de inflação anunciada não foi cumprida. Até que ponto este modelo, bastante popular na literatura econômica, é relevante na prática para explicar o comportamento do banqueiro central? A hipótese crucial para o resultado do modelo é de que o banco central tem como objetivo atingir uma meta para o produto real maior do que o produto potencial da economia. Esta hipótese é bastante implausível. Ela seria adequada num país com um governo populista que desejasse usar o banco central para atingir objetivos que ele não pode atingir. A proposta de que o problema do viés inflacionário (k/φ) do banco central seria resolvido com a escolha de um banqueiro central conservador com um parâmetro φ bastante elevado, diferente do parâmetro da população, também não parece adequada num país democrata. Dificilmente numa sociedade democrática instituições que não representem as preferências da população sobrevivem. Ademais, um banqueiro central conservador não teria como argumento na sua função objetivo uma meta para o produto real que não fosse o produto potencial da economia.

7. Suavização da Taxa de Juros

Um fato estilizado no comportamento dos bancos centrais consiste no ajuste gradual da taxa de juros, evitando movimentos súbitos. A conseqüência é tornar a taxa de juros menos volátil. Este fenômeno é conhecido na literatura como suavização da taxa de juros (*interest rate smoothing*, em inglês). A taxa de juros depende, então, de sua própria história recente, como descrito, por exemplo, na equação,

$$r_t = \omega \ r_t^* + (1 - \omega)\, r_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ 0 < \omega \leq 1$$

A taxa de juros no período t é função da taxa de juros do período $t-1$ e da taxa de juros desejada r^*, ω é o peso da taxa de juros desejada r^*, que deve ser especificada de acordo com a regra de política monetária seguida pelo banco central, e ε representa choques estocásticos. Alguns trabalhos empíricos reportam que para dados trimestrais a ordem de grandeza para o parâmetro ω fica entre 0,1 e 0,2, que sugere um ajustamento muito lento e uma inércia muito grande para a taxa de juros.

As razões que determinam este tipo de comportamento ainda não são bem conhecidas na teoria monetária. Cabe aqui mencionar duas. A primeira é a preocupação de preservar a saúde do setor financeiro. A segunda é afetar a taxa de juros de longo prazo, que depende da expectativa da taxa de juros futura do banco central. Qualquer que seja a motivação, a inércia da taxa de juros por parte dos bancos centrais é um fato empírico bem documentado. Esta seção tem como objetivo analisar as condições que o parâmetro de suavização tem de satisfazer para que a regra de política monetária seja estável.

A inércia da taxa de juros, no modelo em tempo contínuo, é descrita por um mecanismo de ajustamento parcial, onde a variação da taxa de juros é proporcional à diferença entre a taxa de juros desejada e a taxa de juros atual. Isto é:

$$\dot{r} = \lambda (r^* - r), \quad \lambda > 0$$

Esta equação supõe que existe algum custo de ajustamento que impede o banco central de fixar imediatamente a taxa de juros nominal no nível desejado. Quando o parâmetro $\lambda \to \infty$ o ajustamento é instantâneo. Caso contrário, a taxa de juros ajusta-se gradualmente para sua posição de equilíbrio. A taxa de juros desejada segue a regra de Taylor:

$$r^* = \overline{\rho} + \pi + \phi (\pi - \overline{\pi}) + \theta (y - \overline{y})$$

O modelo para analisar as condições de estabilidade da economia com a suavização da taxa de juros é formado por uma curva IS e uma curva de Phillips. A curva IS supõe que o hiato do produto depende da diferença entre as taxas de juros real de curto (ρ) e de longo prazo ($\overline{\rho}$), de acordo com:

$$y - \overline{y} = - \alpha (\rho - \overline{\rho}), \quad \alpha > 0$$

onde y é o logaritmo do produto real e $\overline{y}$ é o logaritmo do produto potencial.

A curva de Phillips supõe que a aceleração da inflação proporcional ao hiato do produto:

$$\dot{\pi} = \delta (y - \overline{y}) \quad , \delta > 0$$

O modelo é, então, especificado de acordo com:

IS: $y - \overline{y} = - \alpha (\rho - \overline{\rho}), \quad \alpha > 0$

CP : $\dot{\pi} = \delta (y - \overline{y}) \quad , \delta > 0$

RPM: $\dot{r} = \lambda (r^* - r), \quad r^* = \overline{\rho} + \pi + \phi (\pi - \overline{\pi}) + \theta (y - \overline{y})$

CI: Dados $p(0)$ e $\pi(0)$

Diferenciando-se a equação de suavização juntamente com a regra de política monetária, e com um pouco de álgebra resulta na equação diferencial para a taxa de juros real:

$$\dot{\rho} = \phi \lambda (\pi - \overline{\pi}) - [(1 + \alpha \theta) \lambda - \alpha \delta] (\rho - \overline{\rho})$$

A segunda equação diferencial do modelo é obtida combinando-se as curvas IS e de Phillips. Isto é:

$$\dot{\pi} = -\alpha \, \delta \, (\rho - \overline{\rho})$$

Sistema Dinâmico

O modelo é formado pelas equações diferenciais da taxa de inflação e da taxa de juros real:

$$\dot{\pi} = -\alpha \, \delta \, (\rho - \overline{\rho})$$

$$\dot{\rho} = \phi \, \lambda \, (\pi - \overline{\pi}) - [\, (1 + \alpha \, \theta \,) \, \lambda - \alpha \, \delta \,] \, (\rho - \overline{\rho})$$

O sistema de equações diferenciais tem a seguinte matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{\pi}}{\partial \pi} & \dfrac{\partial \dot{\pi}}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial \pi} & \dfrac{\partial \dot{\rho}}{\partial \rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \, \delta \\ \phi \, \lambda & -[\, (1 + \alpha \, \theta \,) \, \lambda - \alpha \, \delta \,] \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é positivo:

$$|J| = \alpha \;\; \delta \, \phi \, \lambda > 0$$

O traço da matriz J tanto pode ser positivo, como negativo. Para que o sistema dinâmico seja estável o traço tem de ser negativo. Isto significa dizer que o parâmetro λ de ajuste da taxa de juros tem de satisfazer a restrição:

$$tr \;\, J < 0 \;\;\; se \;\;\; \lambda > \underline{\lambda} = \frac{\alpha \, \delta}{1 + \alpha \, \theta}$$

A conclusão que se chega com esta restrição é que o banco central não pode ser muito lento em ajustar a taxa de juros quando houver uma mudança na taxa de juros desejada. A estabilidade do modelo impõe um piso ao parâmetro λ de ajuste da taxa de juros, que depende do parâmetro α da curva IS, do parâmetro δ da curva de Phillips, e do parâmetro θ da regra de política monetária. Quanto maior os dois primeiros, menor a inércia da taxa de juros. Quanto maior a resposta da política monetária ao hiato do produto, menor o piso do coeficiente de ajuste da taxa de juros.

A existência de um piso para o coeficiente λ significa dizer que na especificação da equação de suavização existe um limite superior para o grau de suavização, ou de inércia, da taxa de juros pelo banco central. Os parâmetros da economia e da regra de política monetária impõem uma restrição ao comportamento do banco central no processo de suavização da taxa de juros. As Tabelas 8.1 e 8.2 mostram alguns valores para o limite superior do coeficiente de inércia, em função de valores dos parâmetros α , δ , e θ.

Tabela 8.1

Limite Superior do Coeficiente de Inércia

$\alpha = 1,0$

δ	θ		
	0,25	0,50	1,00
0,25	0,82	0,85	0,88
0,50	0,67	0,72	0,78
1,00	0,45	0,51	0,61

A Tabela 8.1 supõe que o coeficiente α é igual a um, enquanto a Tabela 8.2 calcula o coeficiente de inércia supondo que α é igual a dois. Estes dois valores são bem representativos de valores usados em exercícios de calibragem, e também próximos de estimativas econométricas. As Tabelas 8.1 e 8.2 usam os mesmos valores para os parâmetros δ e θ, que assumem os valores de 0,25, 0,50 e 1,00. As primeiras linhas nas Tabelas 8.1 e 8.2 mostram que coeficientes de inércia entre 0,8 e 0,9, observados no comportamento dos bancos centrais, são consistentes com alguns valores dos parâmetros do modelo.

Tabela 8.2

Limite Superior do Coeficiente de Inércia

$\alpha = 2,0$

δ	θ		
	0,25	0,50	1,00
0,25	0,72	0,78	0,85
0,50	0,51	0,61	0,72
1,00	0,26	0,37	0,51

O diagrama de fases da Figura 8.8 mostra a dinâmica do modelo, existindo quatro regiões com diferentes movimentos das taxas de inflação e de juros real, caso a economia não esteja no ponto *E* de equilíbrio de longo prazo.

Experimento

A Figura 8.9 descreve a dinâmica de ajustamento da economia quando o banco central decide mudar a meta de inflação, no experimento de política monetária em que a meta é reduzida de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1$. A taxa de inflação começa a cair gradualmente, enquanto a taxa de juros real aumenta até atingir seu nível máximo no ponto em que a trajetória da economia corta a reta em que $\dot{\rho} = 0$. A taxa de inflação continua a declinar, atingindo depois um valor menor do que aquele que corresponde ao de equilíbrio de longo prazo (no conhecido fenômeno conhecido em inglês pelo nome de *undershooting*), voltando a subir até convergir para a nova meta de inflação. A economia tem uma trajetória recessiva desde a mudança da política monetária até a taxa de inflação atingir o seu menor valor, quando começa a ocorrer um período de aquecimento, com o produto real ultrapassando o produto potencial, em virtude da taxa de juros real está abaixo, durante determinado intervalo de tempo, do seu valor de equilíbrio de longo prazo.

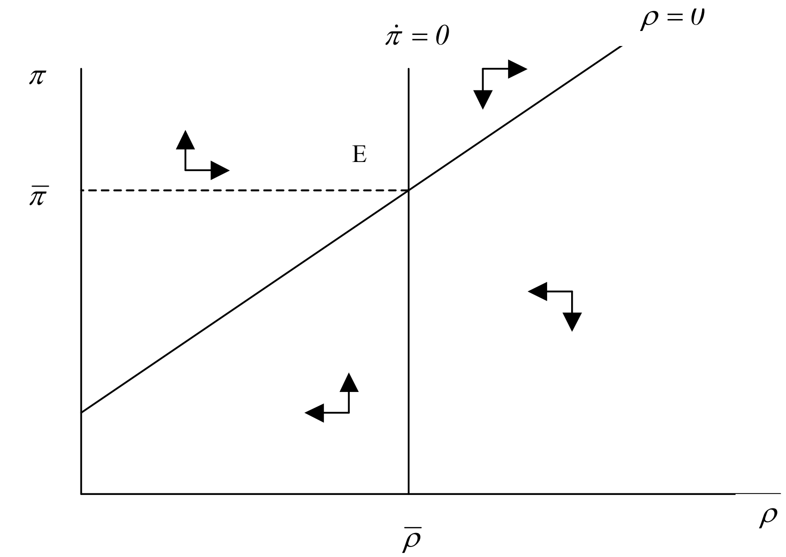


Figura 8.8

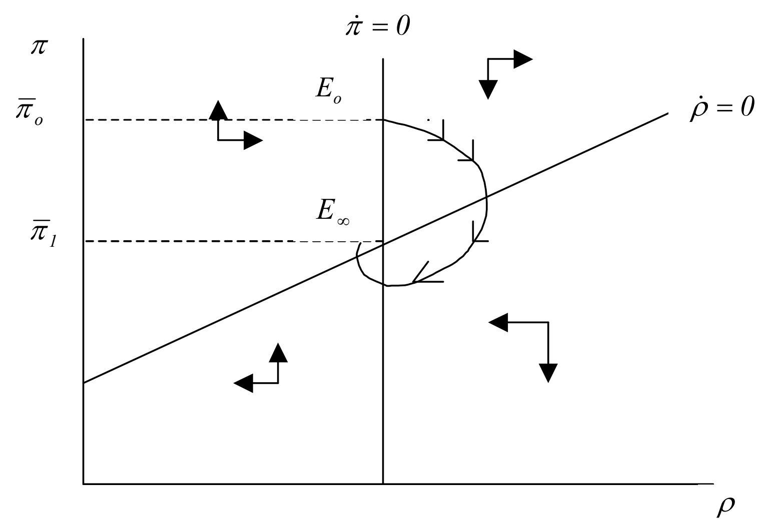


Figura 8.9

8. Programa de Metas de Inflação

Na segunda metade da década de 60, argumentos teóricos demonstraram a inexistência de uma relação de trocas entre inflação e desemprego no longo prazo. A curva de Phillips seria vertical no longo prazo. A evidência empírica subseqüente não rejeitou esta hipótese. Esta evidência teve como conseqüência prática o convencimento dos banqueiros centrais de que a política monetária é responsável pelo patamar da inflação, isto é, o banco central não controla a taxa de inflação a cada momento do tempo, mas sim sua tendência.

Uma questão prática que certamente surgiu entre os banqueiros centrais foi a de como implementar, no dia a dia, a política monetária para atingir uma dada taxa de inflação. No início da década de 90, o Banco Central da Nova Zelândia fez uma inovação que terminou sendo copiada por diversos bancos centrais, introduzindo o programa de metas de inflação. Neste programa, o banco central anuncia a meta de inflação para certo horizonte de tempo e calibra a taxa de juros do mercado interbancário de reservas para que esta meta seja atingida. A previsão da taxa de inflação para o horizonte de tempo especificado torna-se uma variável crucial neste processo. O banco central aumenta a taxa de juros quando a taxa de inflação prevista está acima da meta, e reduz a taxa de juros do mercado interbancário de reservas quando a previsão da taxa de inflação está abaixo da meta. Esta proposição pode ser deduzida a partir de um modelo bastante simples, onde existe uma defasagem de dois períodos para que a taxa de juros afete a taxa de inflação.

O modelo tem três equações, uma curva IS, uma curva de Phillips e uma função de perda do Banco central. As equações têm as seguintes especificações:

$$y_{t+1} - \bar{y} = \lambda \left(y_t - \bar{y}\right) - \alpha \left(r_t - \pi_t - \bar{\rho}\right) + \varepsilon_{t+1}$$
$$\pi_{t+1} = \pi_t \quad + \delta \left(y_t - \bar{y}\right) + u_{t+1}$$

$$L = \beta^i \frac{1}{2} \left(\pi_{t+i} - \bar{\pi}\right)^2$$

Neste modelo o hiato do produto afeta a taxa de inflação com uma defasagem e a taxa de juros afeta o hiato do produto também com uma defasagem. Portanto, a taxa de juros afeta a taxa de inflação depois de dois períodos. Para um modelo com dados anuais isto significaria dizer que o banco central leva dois anos para atingir a taxa de inflação. Os símbolos u e ε são os choques que afetam, respectivamente, as curvas de Phillips e IS. Estes choques têm média zero, variância constante e não são correlacionados serialmente. O coeficiente β é a taxa de desconto do banco central.

A taxa de inflação dois períodos adiante é dada por:

$$\pi_{t+2} = \left(1 + \alpha\, \delta\right) \pi_t + \delta\left(1 + \lambda\right)\left(y_t - \bar{y}\right) - \alpha\, \delta\left(r_t - \bar{\rho}\right) + u_{t+1} + \delta\, \varepsilon_{t+1} + u_{t+2}$$

O problema do banco central consiste em escolher a taxa de juros nominal de tal sorte que o valor esperado da perda daqui a dois períodos seja o menor possível. Isto é:

$$\min_{r_t} E_t \frac{\beta^2}{2} \left(\pi_{t+2} - \bar{\pi}\right)^2$$

A condição de primeira ordem deste problema estabelece que a previsão da inflação daqui a dois períodos seja igual à meta da taxa de inflação:

$$E_t\, \pi_{t+2} = \bar{\pi}$$

O objetivo intermediário do programa de metas de inflação consiste, portanto, na previsão da taxa de inflação. Esta previsão permite calibrar a taxa de juros nominal do mercado de reservas interbancárias para atingir o objetivo final, a meta de inflação. Com efeito, a equação da taxa de inflação dois períodos adiante permite calcular a previsão da taxa de inflação:

$$E_t \, \pi_{t+2} = (1 + \alpha \, \delta) \; \pi_t + \delta \, (1 + \lambda)(y_t - \bar{y}) - \alpha \, \delta \, (r_t - \bar{\rho}) = \bar{\pi}$$

A taxa de juros nominal para atingir a meta da taxa de inflação é facilmente obtida a partir desta expressão, escrevendo-se a taxa de juros como função das demais variáveis que são conhecidas no período *t*. Isto é:

$$r_t = \bar{\rho} + \pi_t + \frac{1}{\alpha \, \delta} (\pi_t - \bar{\pi}) + \frac{\delta \, (1 + \lambda)}{\alpha \, \delta} (y_t - \bar{y})$$

A taxa de inflação no período *t+2* será igual ao valor de sua previsão feita no período *t*, adicionada aos choques que ocorreram ao longo do período:

$$\pi_{t+2} = E_t \, \pi_{t+2} + u_{t+1} + \delta \, \varepsilon_{t+1} + u_{t+2}$$

9. Procedimentos Operacionais da Política Monetária

O principal instrumento de política monetária da maioria dos bancos centrais do mundo é a taxa de juros no mercado de reservas bancárias. No Brasil esta taxa é conhecida como taxa SELIC, nos Estados Unidos como *FED funds rate*, na Nova Zelândia como *cash rate*, na Inglaterra *bank rate*, no Japão *call rate.* O comitê de política monetária do banco central, ou sua diretoria, decide o valor desta taxa e manda que as respectivas mesas de operações implementem a decisão.

Um procedimento operacional que está se tornando bastante comum é do banco central fixar um corredor para a taxa de juros, com um limite superior e outro inferior. Caso o banco comercial tenha reservas em excesso ele pode aplicar estas reservas no banco central recebendo por estes recursos uma remuneração igual ao limite inferior da taxa de juros. Na hipótese que o banco comercial não tenha reservas ele pode pedir emprestado ao banco central que cobrará por este empréstimo uma taxa de juros igual ao limite superior da taxa de juros. A Figura 8.10 descreve este mecanismo. A taxa de juros r^* é a taxa de juros fixada pelo comitê de política monetária do banco central. A taxa de juros r^s é a taxa de juros que o banco central cobra nas reservas emprestadas (em inglês *marginal lending facility*) e a taxa de juros r^i é a taxa de juros que o banco central remunera as reservas dos bancos comerciais (em inglês *deposity facility*). Este procedimento impede que a taxa de juros do mercado de reservas bancárias suba acima do limite superior, ou que diminua abaixo do limite inferior.

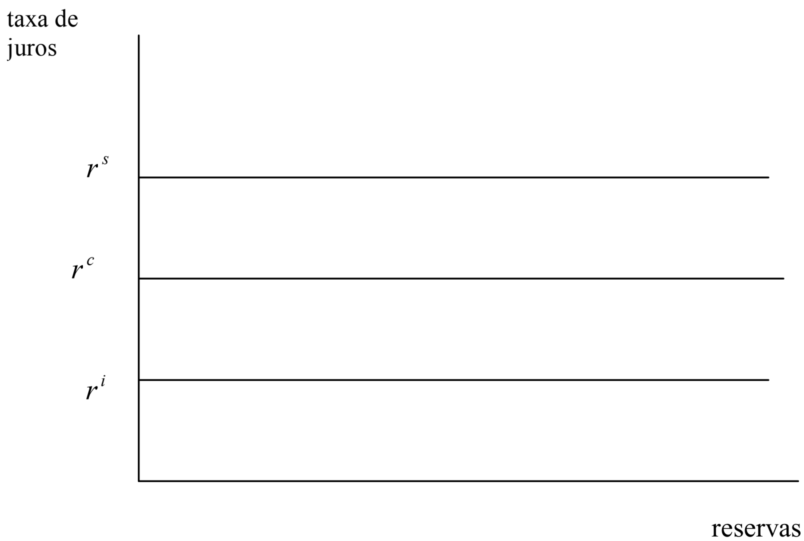


Figura 8.10

A mesa de operações do banco central mantém a taxa de juros do mercado de reservas bancárias no patamar decidido pelo comitê de política monetária por meio de suas operações de compra e venda de títulos, geralmente com acordos de recompra (em inglês conhecida pela sigla *repo,* de *repurchase agreement*). O modelo formado pelas duas equações abaixo descreve, de maneira estilizada, o funcionamento do mercado de reservas bancárias. A primeira equação do modelo é a função de reação da mesa de operações. Quando a taxa de juros estiver abaixo da taxa fixada pelo comitê, a mesa sobe a taxa de juros retirando reservas do mercado. Por outro lado, quando a taxa estiver acima da taxa fixada pelo comitê de política monetária, a mesa injeta reservas no mercado para fazer a taxa baixar. O parâmetro ψ mede a velocidade de reação da mesa de operações quanto ao diferencial da taxa de juros. A segunda equação do modelo é a equação de demanda de reservas bancárias, na qual a quantidade demandada de reservas aumenta (diminui) quando a taxa de juros diminui (aumenta). A taxa de juros está limitada por um teto (r^s) e por um piso (r^i). A especificação do modelo é, então, a seguinte:

$$\begin{cases} \dot{r} = \psi \left(r^c - r\right), \ \psi > 0 \\ r = a - b\,R \\ r^i < r^c < r^s \end{cases}$$

A Figura 8.11 contém o diagrama de fases do modelo, com a taxa de juros no eixo vertical e a quantidade de reservas no eixo horizontal. O diagrama mostra o corredor da taxa de juros, com o teto e o piso da taxa de juros. O modelo é estável indicando que a mesa de operações através da injeção e retirada de reservas é capaz de implementar a decisão do comitê de política monetária do banco central.

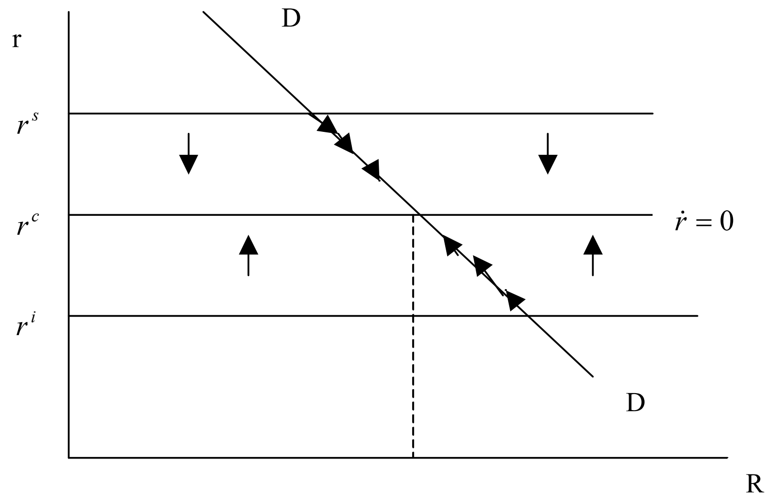
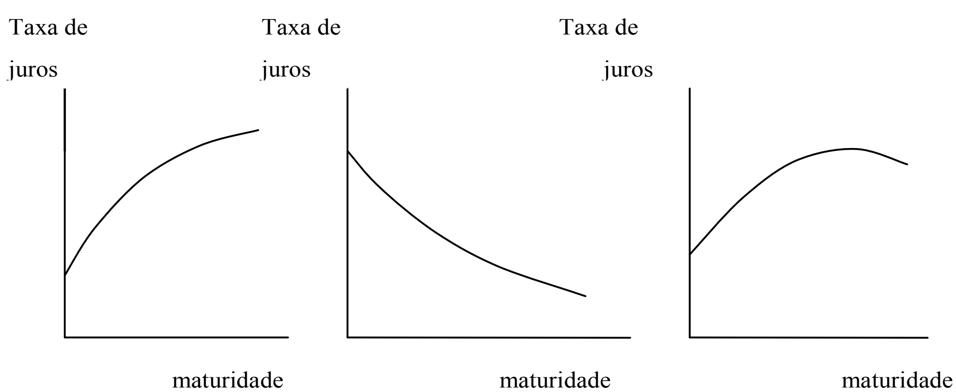


Figura 8.11

10. Estrutura a Termo da Taxa de Juros

A estrutura a termo da taxa de juros trata da relação entre as taxas de juros de curto e de longo prazo. Os bancos centrais controlam a taxa de juros de curto prazo, no mercado interbancário, enquanto as taxas de juros de longo prazo são determinadas no mercado financeiro. A Figura 8.12 mostra três tipos de curvas de juros que têm sido observadas na prática. No eixo horizontal, mede-se a maturidade do título e no eixo vertical a taxa de juros correspondente. Na Figura 8.12a a curva de juros é positivamente inclinada, ou seja, a taxa longa é maior do que a taxa curta. Na Figura 8.12b, a curva de juros é negativamente inclinada, isto é, a taxa de juros longa é menor do que a taxa curta. Na Figura 8.12c, a curva de juros tem o formato de uma corcunda. Que tipo de arcabouço teórico é capaz de explicar estes fatos? Aqui, trataremos apenas da teoria da expectativa da estrutura a termo da taxa de juros.



a) Positivamente inclinada b) Negativamente inclinada c) Formato de corcunda
Figura 8.12

Admita que alguém deseje aplicar seus recursos por dois períodos, do período *t* ao período *t+2,* como indicado na Figura 8.13. Ele pode aplicar no período t comprando

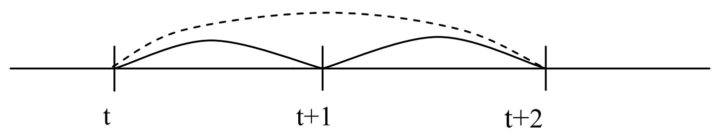


Figura 8.13

um título com um período de maturidade e no vencimento reaplicar o principal e os juros noutro título de um período. O valor de sua aplicação, no final do segundo período, será igual a:

$$(1 + r_{t,t+1})(1 + r_{t+1,t+2})$$

onde $r_{t,t+1}$ é a taxa de juros vigente em *t* para um período, e $r_{t+1,t+2}$ será a taxa de juros em *t+1* para um título com vencimento em *t+2.* Este indivíduo tem a alternativa de aplicar seus recursos comprando um título com dois períodos de maturidade com taxa de juros, por período, igual a $r_{t,t+2}$. O valor da sua aplicação no vencimento do título, será igual a:

$$(1 + r_{t,t+2})^2$$

Qual a alternativa mais vantajosa? A teoria da expectativa de estrutura a termo da taxa de juros admite agentes econômicos racionais e que, por arbitragem, as duas alternativas sejam exatamente iguais. Caso contrário, existiria oportunidade para lucro. Isto é:

$$(1 + r_{t,t+2})^2 = (1 + r_{t,t+1})(1 + r_{t+1,t+2})$$

Tomando-se o logaritmo de ambos os lados desta expressão e usando-se a aproximação $log(1 + x) \cong x$, resulta:

$$r_{t,t+2} = \frac{r_{t,\,t+1} + r_{t+1,\,t+2}}{2}$$

Conclui-se, portanto, que a taxa longa $(r_{t,t+2})$ é uma média das taxas curtas $(r_{t,t+1}\ e\ r_{t+1,t+2})$. É fácil verificar que:

i) se $r_{t,t+2} > r_{t,t+1} \Rightarrow r_{t+1,t+2} > r_{t,t+1}$

ii) se $r_{t,t+2} < r_{t,t+1} \Rightarrow r_{t+1,t+2} < r_{t,t+1}$

A primeira conclusão da teoria da expectativa afirma, então, que se a taxa longa for maior (menor) do que a taxa curta, a taxa curta deve subir (diminuir) no futuro.

A arbitragem entre a taxa longa e as taxas curtas pode ser escrita no sistema de capitalização contínua. Seja *R* a taxa longa para uma maturidade *T,* e *r* a taxa de juros curta a cada momento do tempo. Por arbitragem, tem-se:

$$e^{R(T-t)} = e^{\int_t^T r(s)\,ds}$$

Logo, a taxa longa é uma média das taxas curtas:

$$R = \int_t^T r(s)\,ds \,/\, (T-t)$$

Derivando-se com relação ao tempo *t,* obtém-se:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{1}{T-t}\left(R-r\right)$$

A segunda conclusão da teoria de expectativa da estrutura a termo da taxa de juros pode ser facilmente deduzida a partir da expressão anterior. Quando $R > r, \dot{R} > 0.$ Isto é, a segunda conclusão da teoria da expectativa afirma que se a taxa longa for maior do que a taxa curta, a taxa longa deve subir, gerando uma perda de capital para os detentores dos títulos longos.

Os bancos centrais controlam a taxa de juros do mercado interbancário, a taxa de juros de empréstimos entre os bancos, em geral, por um dia. A taxa de juros longa é afetada por anúncios do banco central quanto à trajetória futura da taxa curta. Deste modo, mesmo que a taxa curta no momento atual não mude, o simples anúncio de mudanças futuras pode afetar o lado real da economia.

Modelo com Estrutura a Termo da Taxa de Juros

Admita o seguinte modelo:

IS: $y - \bar{y} = -\alpha\left(R - \pi - \bar{\rho}\right)$

CP: $\dot{\pi} = \delta\left(y - \bar{y}\right)$

ETTJ: $\dot{R} = \lambda\left(R - r\right)$

RPM: $r = \bar{\rho} + \pi + \phi\left(\pi - \bar{\pi}\right) + \theta\left(y - \bar{y}\right)$

C.I.: $p(0)\ e\ \pi(0)\quad dados$

A equação de estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) supõe que a taxa longa é determinada pela teoria da expectativa. A Curva IS admite que a taxa longa (R) afeta as decisões de dispêndio dos agentes econômicos. Na regra de política monetária (RPM) o banco central determina a taxa de juros curta (*r*) da economia.

Álgebra

Derivando-se a curva IS com relação ao tempo, substituindo-se as equações da curva de Phillips e da estrutura a termo da taxa de juros e usando-se o valor de R da curva IS, obtém-se, depois de um pouco de álgebra, a seguinte equação diferencial para o produto real:

$$\dot{y} = \left(\lambda + \alpha\lambda\theta + \alpha\delta\right)\left(y - \bar{y}\right) + \alpha\lambda\phi\left(\pi - \bar{\pi}\right)$$

Sistema Dinâmico

O sistema de equações diferenciais é formado por esta equação e pela curva de Phillips:

$$\dot{\pi} = \delta\left(y - \bar{y}\right)$$

$$\dot{y} = \left(\lambda + \alpha\lambda\theta + \alpha\delta\right)\left(y - \bar{y}\right) + \alpha\lambda\phi\left(\pi - \bar{\pi}\right)$$

Este sistema tem a seguinte matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{\pi}}{\partial \pi} & \dfrac{\partial \dot{\pi}}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial \pi} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ \\ \alpha\lambda\phi & \lambda + \alpha\lambda\theta + \alpha\delta \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é negativo: $\left|J\right| = -\alpha\lambda\phi\delta < 0$. Logo, o sistema tem um ponto de sela. A Figura 8.14 é o diagrama de fases do modelo, com a taxa de inflação $\left(\pi\right)$ no eixo vertical e o produto real *(y)* no eixo horizontal. A curva $\dot{\pi} = 0$ é vertical. A curva $\dot{y} = 0$ é negativamente inclinada. A trajetória de sela *SS* também é negativamente inclinada. Dada a taxa de inflação inicial do modelo, a economia converge pela trajetória de sela para a meta de inflação e para o produto de pleno emprego.

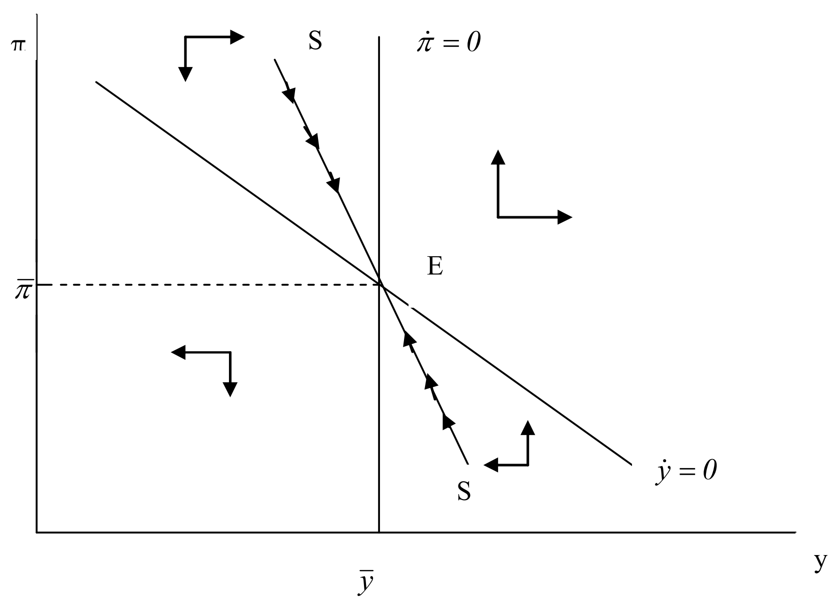


Figura 8.14

Experimento

A Figura 8.15 descreve o experimento de política monetária no qual o banco central anuncia hoje que no instante T, no futuro próximo, a meta de inflação será reduzida de $\bar{\pi}_o$ para $\bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$.

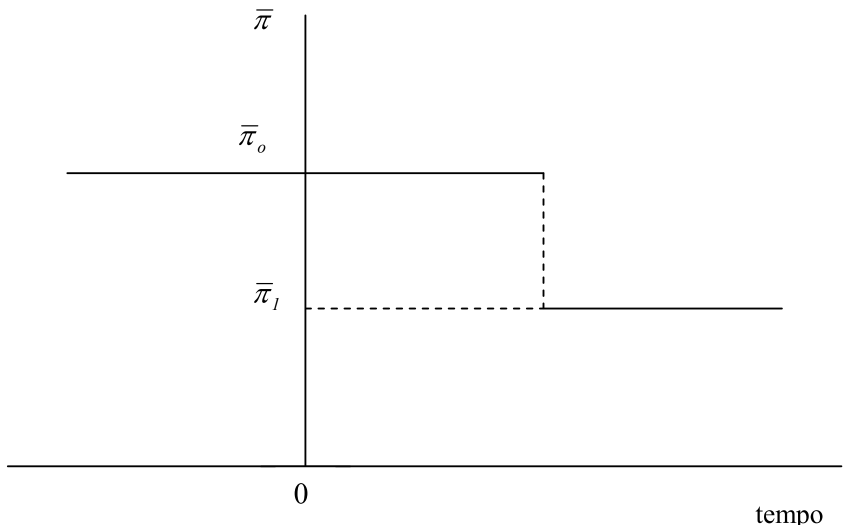


Figura 8.15

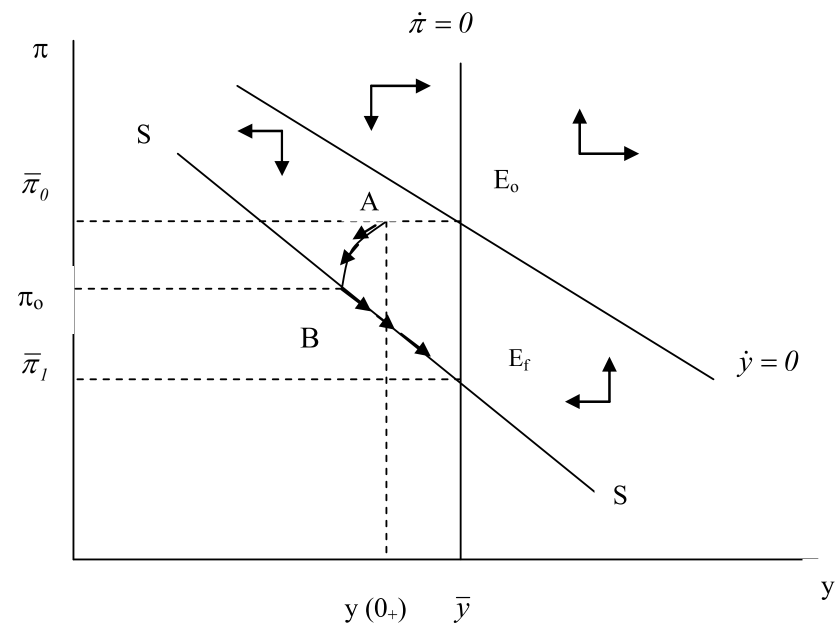


Figura 8.16

Este anúncio equivale a dizer que no instante T o banco central aumentará a taxa de juros de curto prazo. Pela teoria da expectativa de estrutura a termo da taxa de juros, a taxa de juros longa (R) aumenta no instante do anúncio. O dispêndio da economia será, então, reduzido, e a taxa de inflação começará a diminuir antes mesmo que o banco central reduza a taxa de juros de curto prazo, como indicado na Figura 8.16. No instante do anúncio, a economia tem uma contração no produto real, em virtude do aumento da taxa de juros real longa, e a economia pula do ponto E_o para o ponto A, pois a inflação tem inércia. O ponto B é justamente o momento em que o banco central aumenta a taxa de juros. Daí em diante, a economia segue a trajetória da nova sela, até chegar ao equilíbrio final do ponto E_f, com a nova meta de inflação e com pleno emprego da economia.

10. Exercícios

1) Considere o seguinte modelo:

IS: $\mathrm{y} - \bar{\mathrm{y}} = -\alpha\left(\rho - \bar{\rho}\right), \alpha > 0$

CP: $\overset{\circ}{\pi} = \delta\left(\mathrm{y} - \bar{\mathrm{y}}\right), \delta > 0$

RPM: $\overset{\circ}{r} = \lambda\left(r^* - r\right), \gamma > 0 \quad , r^* = \bar{\rho} + \pi + \phi\left(\pi - \bar{\pi}\right)$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\bar{\mathrm{y}}$ = produto potencial; ρ = taxa de juros real; π = taxa de inflação; r = taxa de juro nominal; $\bar{\pi}$ = meta da taxa de inflação; $\overset{\circ}{\pi} = \mathrm{d}\pi/\mathrm{dt}$.

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com π no eixo vertical e ρ no eixo horizontal.

b) Mostre o que acontece quando a meta de inflação é reduzida de $\bar{\pi}_\circ$ para $\bar{\pi}_1$.

2) Considere o seguinte modelo:

IS: $y - \bar{y} = -\alpha\left(r - \pi - \bar{\rho}\right)$

CP: $\dot{\pi} = \delta\left(y - \bar{y}\right)$

RPM: $r = \bar{r}$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\bar{y}$ = produto potencial; $\bar{\rho}$ = taxa de juros real de longo prazo; π = taxa de inflação; $\dot{\pi} = d\pi / dt$; r = taxa de juros nominal; $\bar{r}$ = taxa de juros nominal fixada pelo banco central; α, δ são parâmetros.

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.

b) Admita que o parâmetro δ seja negativo. Analise o equilíbrio e a dinâmica do modelo com esta hipótese.

c) Você recomendaria o uso desta regra de política monetária?

3) A função de perda do banco central é dada por:

$$L = \frac{\alpha}{2}\pi^2 - y + \bar{y}, \ \alpha > 0$$

Os símbolos têm o seguinte significado: π é a taxa de inflação, $\bar{y}$ é o produto potencial, y é o produto real, e α é um parâmetro. A curva de Phillips desta economia tem o seguinte formato:

$$\pi = \pi^e + \beta\left(y - \bar{y}\right) \quad , \beta > 0$$

O símbolo π^e é a taxa de inflação esperada. Admita que a expectativa de inflação do setor privado seja determinada antes do banco central formar sua decisão sobre a taxa de inflação.

a) Qual a taxa de inflação desta economia se o banco central age de maneira casuística?

b) Uma regra de política monetária que não fosse capaz de ser violada seria melhor para esta economia?

c) Um banqueiro central conservador produziria melhores resultados do que um casuísta no banco central?

d) Um banqueiro central conservador teria a função de perda especificada neste exercício?

4) Considere o seguinte modelo:

IS: $y_t = \bar{y} - \alpha\left(\rho_t - \bar{\rho}\right) + \in_t$

CP: $\pi_t = \pi_{t-1} + \beta\left(y_t - \bar{y}\right) + v_t$

Os símbolos têm os significados tradicionais, e $\in_t$ e v_t são variáveis aleatórias, com médias iguais a zero, variâncias constantes e não correlacionadas.

A função de perda do banco central é dada por:

$$L = \gamma\left(\pi_t - \bar{\pi}\right)^2 + \left(y_t - \bar{y}\right)^2$$

Qual a regra de política monetária para a taxa de juros real, quando o banco central tem como objetivo minimizar o valor esperado de L?

5) Considere o seguinte modelo do mercado de reservas bancárias

$$R^d = R_0 - \alpha\, r$$

$$R^s = BR + NBR$$

$$BR = \beta\left(r - r^d\right)$$

$$R^d = R^s$$

Os símbolos têm o seguinte significado: R^d é o total de reservas bancárias demandada, R^s o total de reservas bancárias ofertada, r a taxa de juros, BR a parcela de reservas obtidas no redesconto, NBR a parcela de reservas que o banco central tem controle efetivo, r^d a taxa de redesconto (não punitivo, $r > r^d$).

Considere três procedimentos operacionais do banco central: i) fixar $r = \bar{r}$; ii) fixar $BR = \overline{BR}$; iii) fixar $NBR = \overline{NBR}$. Analise o que aconteceria no mercado de reservas bancárias, para cada um destes procedimentos, quando ocorre uma mudança na demanda de reservas bancárias.

6) Considere o seguinte modelo do mercado de reservas bancárias:

$$\mathrm{R}_t^d = \alpha - \beta\,\mathrm{r}_t + \delta\,\mathrm{r}_{t+1}^e$$

$$\mathrm{R}_t^s = \overline{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{R}_t^d = \mathrm{R}_t^s$$

Os símbolos têm o seguinte significado: R^s = volume de reservas ofertadas pelo banco central; r = taxa de juros; α, β e δ parâmetros positivos; r^e_{t+1} = taxa de juros antecipada em t para o período $t+1$.
Mostre graficamente o que acontece hoje quando o mercado antecipa que o banco central pretende aumentar a taxa de juros amanhã.

7) Admita que o título de longo prazo seja uma perpetuidade que paga um real por período. O preço P deste título é o inverso da taxa de juros de longo prazo: *P=1/R.*
a) Por que a taxa de juros de curto prazo deve satisfazer à seguinte equação:

$$r = \frac{1+\dot{P}}{P}$$

b) Mostre que: $\dfrac{\dot{R}}{R} = R - r$

8) Considere o seguinte modelo:
IS: $y - \overline{y} = -\alpha\left(\rho - \overline{\rho}\right), \alpha > 0$

CP: $\overset{\circ}{\pi} = \delta\left(y - \overline{y}\right), \delta > 0$

ETTJ: $\dot{\rho} = \beta\,(\,\rho - \rho^s\,),\ \beta > 0,\ \rho^s = r - \pi$

RPM: $r = \overline{\rho} + \pi + \phi\left(\pi - \overline{\pi}\right) + \theta\,(\,y - \overline{y})$

CI: Dados $p(0)\ e\ \pi(0)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real; $\overline{y}$ = produto potencial; ρ = taxa de juros real de longo prazo; ρ^s = taxa de juros real de curto prazo; π = taxa de inflação; r = taxa de juro nominal de curto prazo; $\overline{\pi}$ = meta de taxa de inflação; $\overset{\circ}{\pi} = d\pi/dt$.
a) Qual a interpretação da equação ETTJ (estrutura a termo da taxa de juros)?
b) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com π no eixo vertical e *y* no eixo horizontal.
c) Mostre o que acontece quando a meta de inflação é reduzida de $\overline{\pi_\circ}$ para $\overline{\pi_1}$ nas seguintes situações: i) a redução não é antecipada e ii) a redução é antecipada..

PARTE IV: APÊNDICE MATEMÁTICO

APÊNDICE A

Equações Diferenciais

Este apêndice apresenta alguns resultados básicos de equações diferenciais lineares que são largamente utilizados no texto. A primeira seção trata da equação diferencial linear de primeira ordem. A segunda analisa a equação diferencial linear de segunda ordem. A terceira seção é dedicada ao sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem. A quarta seção analisa o fenômeno de histerese.

1- Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem

A equação diferencial linear de primeira ordem é definida por:

$$\dot{x}+ax=0$$

onde a é um coeficiente que independe do tempo. Se $x = e^{rt}$ for uma solução , $\dot{x}=re^{rt}$, ela deve satisfazer esta equação:

$$r\,e^{rt} + a\,e^{rt} = 0$$

Logo, r = - *a.* A solução da equação é, então, dada por:

$$x=Ce^{-at}$$

onde C é uma constante determinada pelas condições iniciais. Esta equação pode ter as seguintes situações: i) o coeficiente a é positivo, a > 0, e a solução da equação é estável, pois ela converge para zero; ii) o coeficiente a é negativo, a< 0, e a solução da equação é instável, pois o valor de x cresce indefinidamente.

Considere agora a equação diferencial da primeira ordem não homogênea:

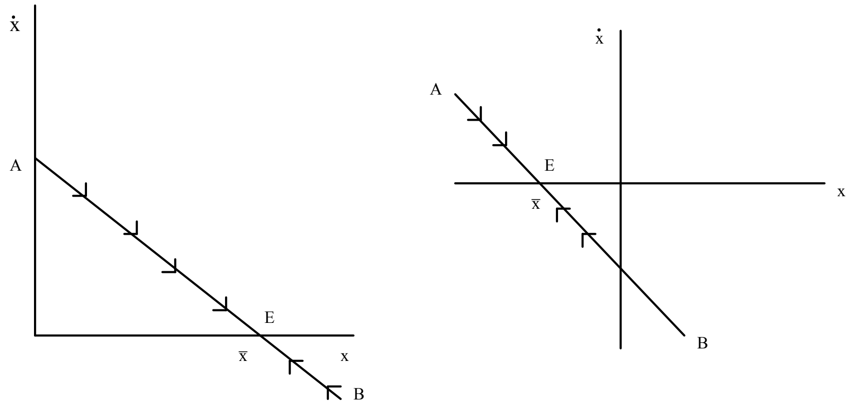
$$\dot{x}+ax=k$$

onde k é um parâmetro. A solução desta equação é dada por:

$$x=\bar{x}+Ce^{-at}$$

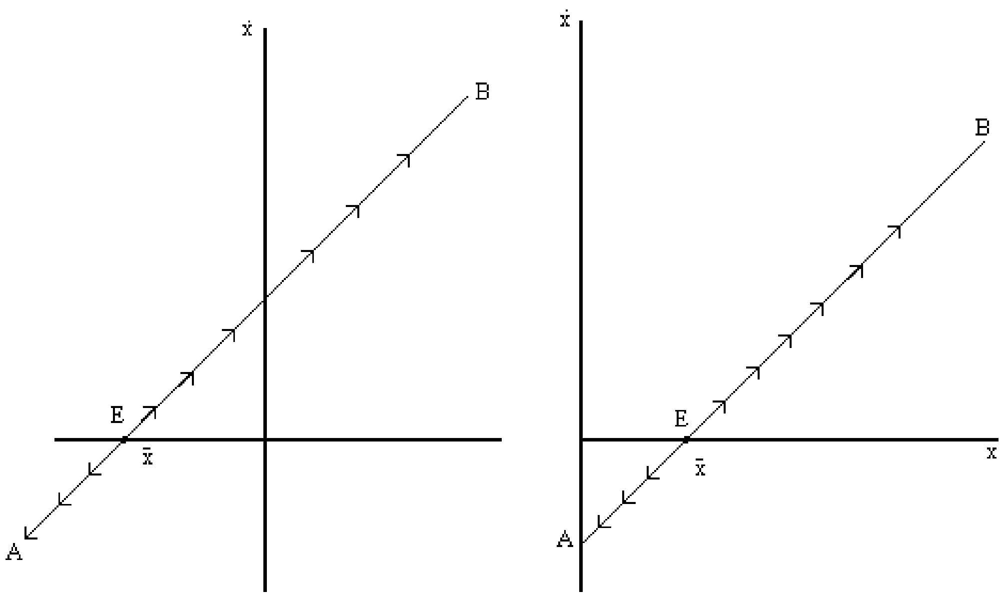
onde $\bar{x} = k / a$. Obviamente, se a > 0 a solução é estável, e em caso contrário, a < 0, a solução é instável. Cabe ainda lembrar que se o valor da constante C for igual a zero há uma solução estacionária, mas instável.

A análise da estabilidade desta equação pode ser feita com auxílio de um diagrama de fases, com o valor de $\dot{x}$ no eixo vertical, e o valor de x no eixo horizontal, como indicado nas Figuras A1 e A2. A reta *AB* é a representação geométrica da equação $\dot{x} + ax = k$. As setas da Figura A1 indicam que o valor de x converge para $\bar{x}$, porque para valores à esquerda de $\bar{x}$, $\dot{x} > 0$ e, portanto, x está aumentando. Por outro lado, para valores de x à direita de $\bar{x}$, $\dot{x} < 0$, ou seja, x está diminuindo. As setas da Figura A2 indicam que para valores de x diferentes de $\bar{x}$, a trajetória de x diverge do ponto E. Logo, a solução é instável.



i) a > 0,k > 0 ii) a > 0, k < 0

Figura A1. Solução Estável



i) a < 0, k > 0 ii) a < 0, k < 0

Figura A 2. Solução Instável

2 - Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem

A equação diferencial linear de segunda ordem é definida por:

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$$

onde a e b são coeficientes que independem do tempo. Se $x = e^{rt}$ for uma solução desta equação, tem-se:

$$\dot{x} = r\, e^{rt},\ \ddot{x} = r^2\, e^{rt}$$

Substituindo-se os valores de x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ na equação diferencial obtém-se a equação do segundo grau:

$$r^2 + a\,r + b = 0$$

cujas raízes são:

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)^{1/2}$$

$$r_2 = -\frac{a}{2} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right)^{1/2}$$

A soma das raízes é igual a menos a e o produto das mesmas é igual ao parâmetro b. Isto é:

$$r_1 + r_2 = -a$$

$$r_1\, r_2 = b$$

Raízes Reais e Distintas

As raízes são reais e distintas quando:

$$\frac{a^2}{4} - b > 0$$

A solução da equação diferencial é dada por:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes a serem determinadas. Os seguintes casos particulares são possíveis: a) Ambas as raízes são negativas: $r_1 < r_2 < 0$. Neste caso a solução é estável, pois o valor de x converge para zero; b) Ambas as raízes são positivas: $r_1 > r_2 > 0$. Nesta hipótese o valor de x cresce sem limites, e a solução é instável; c) Uma raiz é positiva e a outra é negativa: $r_1 > 0 > r_2$ Se a constante C_1 for diferente de zero, o valor de x cresce indefinidamente com o passar do tempo. Se o valor da constante C_1 é nulo, e a constante C_2 é diferente de zero, a solução é estável pois x converge para zero. Esta hipótese corresponde a um ponto de sela; d) Uma raiz é nula e a outra é negativa: $r_1 = 0$ e $r_2 < 0$, a solução é estável; e) Uma raiz é nula e a outra é positiva: $r_1 = 0$ e $r_2 > 0$, a solução é instável.

Raízes Reais e Iguais

As raízes são reais e iguais quando:

$$\frac{a^2}{4} - b = 0$$

A solução da equação diferencial é dada por:

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{1}{2}at}$$

pois: $r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}$. Dois casos são possíveis: a) quando a > 0, a solução é estável e b) quando a < 0, a solução é instável.

Raízes Complexas Conjugadas

As raízes são complexas conjugadas quando a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\frac{a^2}{4} - b < 0$$

Sejam $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i$ as duas raízes complexas onde $i^2 = -1$ e:

$$\alpha = -\frac{a}{2}; \quad \beta = (b - \frac{a^2}{4})^{1/2}$$

Podemos escrever que:

$$\underline{e^{r_1 t} = e^{(\alpha + \beta i)t} = e^{\alpha t} e^{\beta i t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \; sen \beta t)}$$

$$e^{r_2 t} = e^{(\alpha - \beta i)t} = e^{\alpha t} e^{-\beta i t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \; sen \beta t)$$

pois $e^{zi} = \cos z + i \; sen \; z$. Precisamos agora do seguinte resultado: Seja u(t) e ν(t) duas soluções da equação diferencial $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, então a combinação linear θ u(t) + ϕ ν(t), onde θ e ϕ são parâmetros, também é solução da equação. Com efeito, substituindo-se a combinação linear das soluções na equação , obtém-se:

$$(\theta \ddot{u} + \phi \ddot{v}) + a(\theta \dot{u} + \phi \dot{v}) + b(\theta u + \phi v) = \theta.0 + \phi.0 = 0$$

Logo, θ u (t) + ϕ ν(t) é também solução da equação $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$. Portanto, se $e^{r_1 t}$ e $e^{r_2 t}$ são soluções destas equações, é fácil verificar-se que as seguintes combinações lineares,

$$\frac{1}{2} e^{r_1 t} + \frac{1}{2} e^{r_2 t} = e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$\frac{1}{2i} e^{r_1 t} - \frac{1}{2i} e^{r_2 t} = e^{\alpha t} \; sen \; \beta t$$

são soluções da equação $\ddot{x} + a\dot{x} + b = 0$. Conclui-se, então, que

$$x = e^{\alpha\, t} \quad (C_1 \cos \beta t + C_2 \, sen\, \beta t)$$

é solução da equação diferencial linear de segunda ordem, pois resulta de uma combinação linear das duas soluções anteriores. As seguintes situações são possíveis: a) As raízes são puramente imaginárias: $\alpha = a = 0$. Neste caso a solução oscila dentro de limites fixos. b) A parte real do número complexo é negativa: $\alpha < 0$, isto é, $a > 0$. A solução oscila e converge para zero. c) A parte real do número complexo é positiva: $\alpha > 0$, ou seja, $a < 0$. A solução oscila e cresce indefinidamente.

Podemos agora estabelecer o seguinte teorema: A equação diferencial de segunda ordem $\ddot{x} + a\,\dot{x} + b = 0$ é estável se e somente se $a > 0$ e $b > 0$.

Equação Diferencial de Segunda Ordem Não Homogênea

A equação diferencial de segunda ordem não homogênea é definida por:

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\,x = k$$

A solução desta equação é dada por:

$$x = \bar{x} + C_1 \; e^{r_1 t} + C_2 \; e^{r_2 t}$$

onde $\bar{x} = k/b$ é a solução de equilíbrio estacionário e r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2+ar+b=0$. Os resultados vistos até aqui para a equação homogênea aplicam-se neste caso.

A partir das condições iniciais determinam-se os valores das constantes C_1 e C_2. Com efeito, da expressão anterior segue-se que:

$$x(0) = \bar{x} + C_1 + C_2$$

Derivando-se em relação ao tempo a solução da equação diferencial, obtém-se:

$$\dot{x}(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = C_1 \; r_1 \; e^{r_1 t} + C_2 \; r_2 \; e^{r_2 t}$$

Logo:

$$\dot{x}(0) = C_1 \; r_1 + C_2 \; r_2$$

O sistema de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x(0) - \bar{x} \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 = \dot{x}(0) \end{cases}$$

pode ser resolvido, quando $r_1 \neq r_2$ para obter-se os valores de C_1 e de C_2. Quando $r_1 = r_2$ aplica-se um procedimento idêntico.

3 - Sistema Linear de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

O sistema de equações diferenciais de primeira ordem é definido por:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}\ x + a_{12}\ y + b_1 \\ \\ \dot{y} = a_{21}\ x + a_{22}\ y + b_2 \end{cases}$$

onde os coeficientes $a_{i\,j}$ e b_i independem do tempo. Seja A a matriz formada pelos valores de $a_{i\,j}$:

cujo traço e determinante são dados por:

$$tr\ A = a_{11} + a_{22}$$

$$\left| A \right| = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}$$

Com auxílio do operador $Dx = \dot{x}$ o sistema de equações diferenciais pode ser escrito como:

$$\begin{cases} (D - a_{11})x - a_{12}\, y = b_1 \\ \\ -a_{21}\, x + (D - a_{22})y = b_2 \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema é dada por:

Depois de um pouco de álgebra, usando-se as propriedades do operador D, $D\ x = \dot{x}$ e $D^2\ x = \ddot{x}$, este sistema transforma-se em:

O sistema de equações diferenciais de primeira ordem é, portanto, equivalente a duas equações diferenciais de segunda ordem, nas variáveis x e y. O operador de defasagem D é uma forma simples e elegante de transformar o sistema linear de equações diferenciais em duas equações diferenciais de segunda ordem. Este mesmo resultado pode ser obtido do seguinte modo. Em primeiro lugar derive-se com relação ao tempo a equação de $\dot{x}$:

$$\ddot{x} = a_{11}\ \dot{x} + a_{12}\ \dot{y}$$

Substituindo-se a expressão de $\dot{y}$ nesta equação obtém-se:

$$\ddot{x} = a_{11}\ \dot{x} + a_{12}\ (\ a_{21}\ x + a_{22}\ y + b_2\ )$$

A equação diferencial de $\dot{x}$ permite escrever que $y = (\dot{x} - a_{11}\ x - b_1) / a_{12}$. Substituindo-se este valor de y na expressão anterior obtém-se:

$$\ddot{x} = (\ a_{11} + a_{22}\ )\ \dot{x} - (\ a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}\ )\ x + a_{12}\ b_2 - a_{22}\ b_1$$

Esta é a equação diferencial de segunda ordem da variável x associada ao sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem.

A solução, $\bar{x}$ e $\bar{y}$, de equilíbrio estacionário do sistema de equações diferenciais é obtida resolvendo-se o sistema de duas equações e duas incógnitas,

$$a_{11}\ \bar{x} + a_{12}\ \bar{y} + b_1 = 0$$

$$a_{21}\ \bar{x} + a_{22}\ \bar{y} + b_2 = 0$$

A solução é facilmente obtida a partir do sistema anterior fazendo-se $\ddot{x} = \dot{x} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$. Isto é:

$$\bar{x} = \frac{a_{12}\ b_2 - a_{22}\ b_1}{|A|}$$

$$\bar{y} = \frac{a_{21}\ b_1 - a_{11}\ b_2}{|A|}$$

O sistema de equações diferenciais de primeira ordem pode ser escrito de uma forma alternativa subtraindo-se das equações de $\dot{x}$ e de $\dot{y}$ as equações da solução de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y})$ do sistema. O sistema de equações diferenciais de primeira ordem é, então, expresso por:

$$\dot{x} = a_{11}\ (\ x - \bar{x}\ ) + a_{12}\ (\ y - \bar{y}\ )$$

$$\dot{y} = a_{21}\ (\ x - \bar{x}\ ) + a_{22}\ (\ y - \bar{y}\ )$$

Quando $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Por outro lado, quando pelo menos uma das variáveis não for igual ao seu valor de equilíbrio estacionário o sistema dinâmico está em movimento, na direção do ponto de equilíbrio se ele for um atrator, ou para longe do equilíbrio se o ponto for um repulsor.

Os resultados obtidos anteriormente sobre a estabilidade da equação diferencial de segunda ordem aplicam-se aqui. Isto é, a condição necessária e suficiente para que o sistema linear de equações diferenciais seja estável é de que o determinante da matriz seja positivo e seu traço negativo:

$$|A| > 0$$
$$tr\ A < 0$$

A análise da estabilidade do sistema pode ser feita com auxílio do diagrama de fases, com y no eixo vertical e x no eixo horizontal.

Sistema Estável

Admita-se que $a_{11}<0$, $a_{22}<0$, $a_{21}>0$ e $a_{12}<0$. É fácil verificar-se que o sistema é estável com estes valores pois trA<0 e |A|>0. Quando $\dot{x} = 0$, os valores de y e de x que correspondem a este lugar geométrico são dados por:

$$y = \frac{a_{11}}{a_{12}} x - \frac{b_1}{a_{12}}$$

Quando $\dot{x} > 0$ a seguinte desigualdade deve ser obedecida:

$$\underline{y < -\frac{a_{11}}{a_{12}} x - \frac{b_1}{a_{12}}}$$

Por outro lado, quando $\dot{x} < 0$, tem-se:

$$y > -\frac{a_{11}}{a_{12}} x - \frac{b_1}{a_{12}}$$

As setas na Figura A 3 mostram o que acontece com o movimento dos pontos fora da reta $\dot{x} = 0$. O movimento da variável *x* pode ser facilmente obtido examinando-se o que acontece nos pontos *A, B, C* ou *D* da Figura A 3. Por exemplo, no ponto *A* o valor de *y* é igual a $\bar{y}$, porém *x* é maior do que $\bar{x}$. Logo, como $a_{11} < 0$ segue-se que $\dot{x} < 0$. No ponto *C* a abscissa *x* é igual a $\bar{x}$, mas neste ponto $y < \bar{y}$ e $a_{12} < 0$; segue-se, então, que $\dot{x} > 0$. Raciocínio análogo pode ser aplicado aos pontos *B* e *D*.

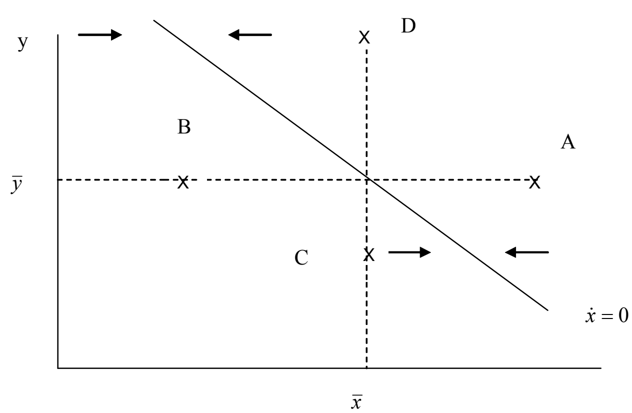


Figura A 3. Diagrama de Fases: Equação $\dot{x} = 0$

Quando $\dot{y}=0$, os valores de y e de x que correspondem a este lugar geométrico são dados por:

$$y=-\frac{a_{21}}{a_{22}}x-\frac{b_2}{a_{22}}$$

Se $\dot{y}>0$ a seguinte desigualdade verifica-se:

$$y<-\frac{a_{21}}{a_{22}}x-\frac{b_2}{a_{22}}$$

Por outro lado, quando $\dot{y}<0$, tem-se a seguinte desigualdade:

$$y>-\frac{a_{21}}{a_{22}}x-\frac{b_2}{a_{22}}$$

As setas da Figura A4 mostram o que acontece com o movimento dos pontos fora da reta $\dot{y}=0$. As direções das setas, como no caso anterior, podem ser obtidas analisando-se um dos pontos *A, B, C* ou *D*, da Figura A4. No ponto *B* a ordenada é igual a $\bar{y}$ e a abscissa *x* é menor do que $\bar{x}$. Como o coeficiente $a_{21}>0$ segue-se que $\dot{y}<0$. No ponto *C* a abscissa é igual a $\bar{x}$ e a ordenada é maior do que $\bar{y}$. Como $a_{22}<0$ segue-se que $\dot{y}<0$. Raciocínio análogo pode ser empregado para os pontos *A* e *D*.

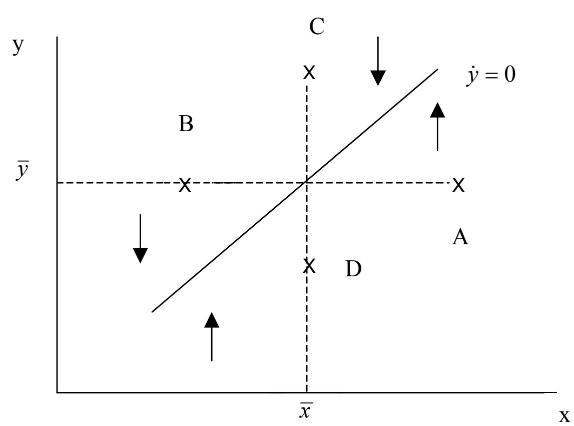


Figura A 4 Diagrama de Fases: Equação $\dot{y}=0$

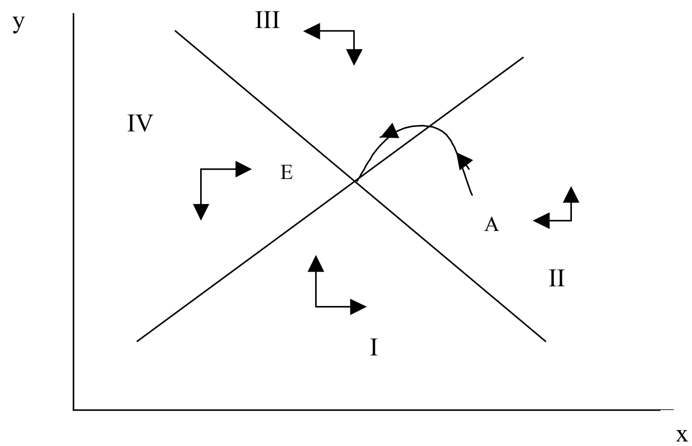


Figura A5. Diagrama de Fases e Análise de Estabilidade

Os gráficos das Figuras A3 e A4 podem ser combinados para analisar-se a estabilidade do sistema de equações, como indicado na Figura A5. As setas da Figura A5 indicam que a partir de qualquer ponto, como o ponto A, a dinâmica do sistema leva a convergência para o ponto E, que é um ponto de equilíbrio estável.

Sistema Instável

Admita-se que $a_{11} > 0$, $a_{12} > 0$, $a_{21} < 0$ e $a_{22} > 0$. O sistema é instável porque trA > 0. A Figura A6 mostra o diagrama de fases deste caso. O sistema é instável porque a partir de qualquer ponto, como o ponto A, move-se para longe do ponto de equilíbrio E.

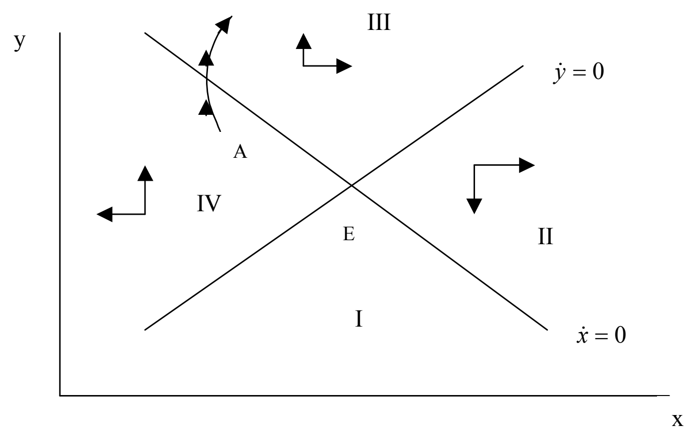


Figura A 6.Diagrama de Fases: Sistema Instável

Sistema Instável: Ponto de Sela

Suponha-se, agora, que $a_{11} < 0$, $a_{12} < 0$, $a_{21} < 0$ e $a_{22} > 0$. O sistema é instável porque $|A| < 0$. O sinal do traço da matriz A é a priori indeterminado, $trA \gtrless 0$, e não tem a mínima importância para este caso. A Figura A7 mostra o diagrama de fases para este exemplo. O sistema é instável, pois se partindo de pontos como os pontos A e B move-se para longe da posição de equilíbrio (ponto E).

Observe-se que neste caso uma das raízes da equação $\ddot{x} - (trA)\,\dot{x} + |A|\,x = 0$ é positiva, enquanto que a outra é negativa, em virtude de $r_1\, r_2 = |A| < 0$. Portanto, se o valor da constante associada à raiz positiva for nulo, o sistema converge para o ponto de equilíbrio E. Nestas circunstâncias denomina-se o ponto de equilíbrio de ponto de sela, existindo, portanto, uma trajetória, representada na Figura A7 pela reta *SS*, que conduz o sistema ao equilíbrio.

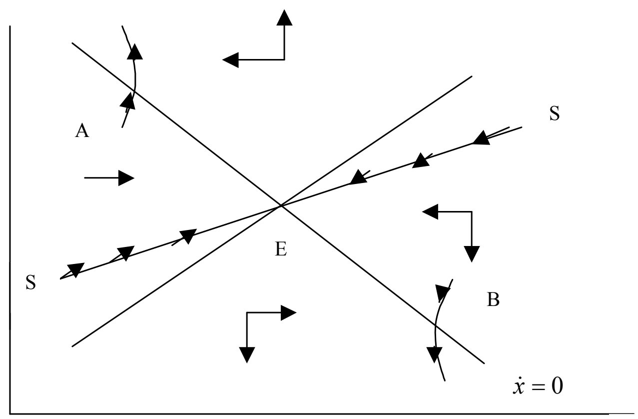


Figura A7. Diagrama de Fases: Ponto de Sela

4- Histerese

Quando o determinante da matriz *A* do sistema linear de equações diferenciais é igual a zero,

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

uma das raízes é igual a zero(lembre-se que o produto das raízes é igual ao determinante). Admita-se que o sistema de equações diferenciais tem uma infinidade de soluções. Logo, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{11}}{a_{21}}$$

Neste caso o sistema de equações diferenciais produz o fenômeno de histerese, no qual a solução do sistema depende da história, ou seja, a solução depende das condições iniciais do modelo. Com esta condição as duas equações de $\dot{x} = 0$ e de $\dot{y} = 0$ são idênticas:

$$a_{11}\,\bar{x} + a_{12}\,\bar{y} + b_1 = 0$$

$$a_{21}\,\overline{x} + a_{22}\,\overline{y} + b_2 = 0$$

Sistema Estável

O sistema de equações é estável quando o traço da matriz *A* for negativo:

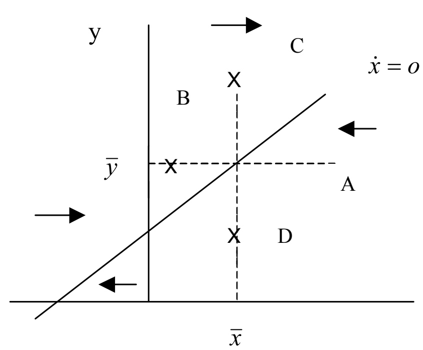
$$tr\,A = a_{11} + a_{22} < 0$$

Para que o traço seja negativo os coeficientes da matriz *A* devem satisfazer as seguintes restrições:

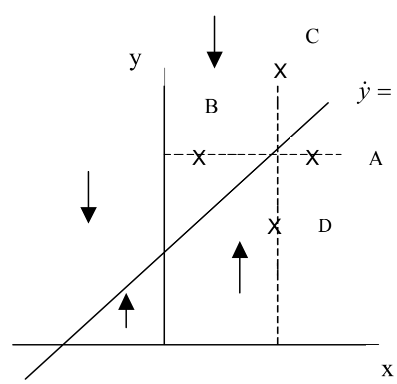
$$a_{11} < 0,\ \ a_{22} < 0,\ \ a_{12} > 0,\ \ a_{21} > 0$$

Quando $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$ os pontos que correspondem a abscissa *x* e a ordenada *y* pertencem à reta:

$$y = -\frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\,x$$



a) Equação $\dot{x} = 0$



Equação $\dot{y} = 0$

Figura A 8. Diagrama de Fases

Os diagramas da Figura A8 mostram a dinâmica do sistema para os pontos que não pertencem a esta reta. A análise dos pontos *A*, *B*, *C* ou *D* desta figura permite determinar facilmente a direção das setas que indicam o movimento das variáveis *x* e *y*. O diagrama de fases da Figura A9 combina estes dois diagramas e descreve a dinâmica do sistema de equações diferenciais. Admita-se que o ponto inicial do sistema é o ponto *A* . O equilíbrio deste sistema converge para o ponto B, que é uma solução estacionária do sistema.

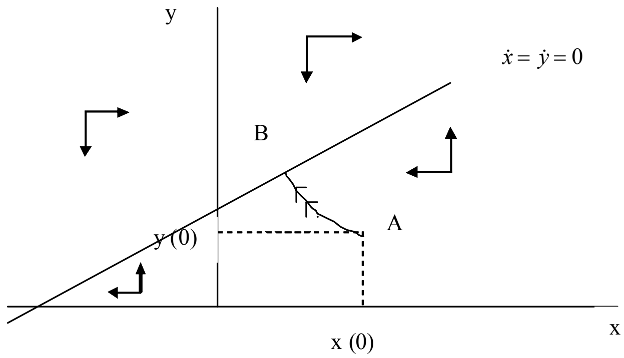


Figura A 9. Diagrama de Fases: Sistema Estável

Solução Instável

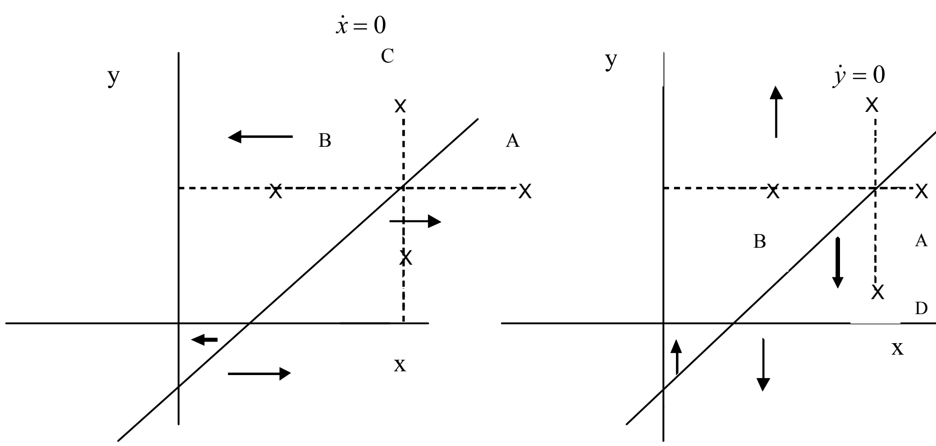
A solução do sistema de equações diferenciais é instável quando o traço da matriz A é positivo,

$$tr\ A = a_{11} + a_{22} > 0$$

Para que este traço seja positivo os coeficientes da matriz A devem satisfazer as seguintes desigualdades:

$$a_{11} > 0,\ \ a_{22} > 0,\ \ a_{12} < 0,\ \ a_{21} < 0$$

Os diagramas de fases da Figura A10 indicam a direção de movimento das variáveis do sistema quando em desequilíbrio. A Figura A11 combina estes dois diagramas e mostra que as variáveis não convergem para o equilíbrio se o sistema não estiver em equilíbrio estacionário.



a) Equação $\dot{x} = 0$ Equação $\dot{y} = 0$

Figura A 10. Diagrama de Fases

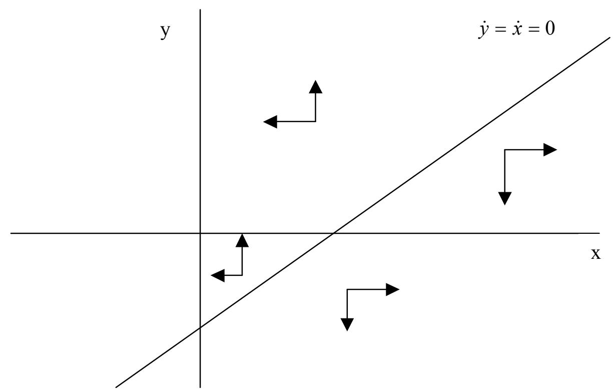


Figura A11. Diagrama de Fases: Sistema Instável

5. Exercícios

1) O modelo de mercado de um bem é especificado pelas equações:

demanda: $q^d = \alpha - \beta\ p$

oferta: $q^s = \gamma + \delta\ p$

ajustamento: $\dot{p} = \dfrac{dp}{dt} = \phi\left(q^d - q^s\right),\ \ \phi > 0$

a) Qual o preço de equilíbrio deste bem?
b) Dado um valor inicial de preço $\left[p(0) = p_o\right]$, qual a trajetória do preço?
c) Mostre num diagrama de fases [$\dot{p}$ no eixo vertical e p no eixo horizontal] as respostas dos itens a) e b).

2) Modelo Harrod-Domar de Crescimento Econômico– A poupança é proporcional ao produto interno bruto,

$$S = s\ Y$$

O investimento é proporcional à taxa de variação do produto,

$$I = v\ \dot{Y}$$

Os parâmetros s e v são positivos. O mercado de bens e serviços está em equilíbrio quando a poupança for igual ao investimento:

$$I = S$$

a) Qual a trajetória do produto desta economia supondo que o valor do produto no instante inicial é igual a Y_o?
b) Mostre num diagrama de fases [$\dot{Y}$ no eixo vertical e Y no eixo horizontal] a trajetória do produto desta economia.

3) Modelo de Determinação de Preço do Ativo – Numa economia existem dois ativos, um de renda fixa e outro de renda variável. A taxa de juros do ativo de renda fixa é igual a r. O ativo de renda variável não tem risco, e paga, por unidade de tempo, dividendos iguais a um valor de v. Por arbitragem as taxas de retornos nos dois ativos devem ser iguais. Isto é:

$$r = \frac{v + \dot{p}^e}{p}$$

onde $\dot{p}^e$ é a variação esperada do preço p do ativo de renda variável. Admita que a previsão do preço do ativo seja perfeita, no sentido de que:

$$\dot{p}^e = \dot{p}$$

a) Qual o preço de equilíbrio deste ativo?
b) O preço de mercado pode divergir do preço de equilíbrio?
c) Você seria capaz de montar este modelo com variáveis discretas?

4) O modelo de uma economia é especificado pelas equações:

ajustamento no mercado de bens e serviços: $\dot{y} = \alpha\left(d - y\right)$

dispêndio: $d = c + i + g$

consumo: $c = \beta y$

investimento: $i = \bar{i}$

regra de política fiscal: $\dot{g} = -\gamma\left(y - \bar{y}\right)$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real, $\dot{y} = dy/dt$, d = dispêndio, c = consumo, i = investimento, g = gastos do governo, $\bar{y}$ = produto de pleno emprego; α, β e γ são parâmetros positivos.

a) Qual o valor do produto real de equilíbrio?
b) A regra de política fiscal conduz o produto real desta economia ao produto de pleno emprego?

5) O modelo de uma economia é especificado pelas equações:

ajustamento no mercado de bens e serviços: $\dot{y} = \alpha\left(d - y\right)$

dispêndio: $d = c + i$

consumo: $c = \beta y$

ajustamento no mercado monetário: $\dot{r} = \gamma\left(m^d - m\right)$

demanda de moeda: $m^d = \delta\ y - \lambda\ r$

Os símbolos têm o seguinte significado: y = produto real, $\dot{y} = dy/dt$, d = dispêndio, c = consumo, i = investimento, r = taxa de juros, m^d = quantidade demandada de moeda, m = quantidade ofertada de moeda, α, β, γ, δ e λ são parâmetros positivos.

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo quando o investimento for constante, $i = \bar{i}$.

b) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo quando o investimento depender da taxa de juros de acordo com $i = \tau - \theta\ r$, onde θ é um parâmetro positivo.

6) Considere o seguinte modelo:

$$\dot{P} = \alpha(d - y)\ ,\ \alpha > 0$$

$$\dot{r} = \beta(L(y,r) - \frac{M}{P})\ ,\ \beta > 0$$

$$d = d(y,r)\ ,\ \frac{\partial d}{\partial y} > 0\ ,\ \frac{\partial d}{\partial r} < 0$$

$$y = \bar{y}$$

onde P é o índice de preços, d é o nível de dispêndio, y é o produto real, r é a taxa de juros, M é o estoque nominal de moeda, $\bar{y}$ é o produto potencial.

Analise o equilíbrio e a estabilidade deste modelo.

7) Considere o seguinte modelo:

$$\dot{p} = \beta(\frac{M}{p} - L(y,r))\ ,\ \beta > 0$$

$$\dot{r} = \alpha(i + g - t - s)\ ,\ \alpha > 0$$

$$i = i(r)\ ,\ \frac{\partial i}{\partial r} < 0$$

$$s = s(y)\ ,\ \frac{\partial s}{\partial y} > 0$$

$$y = \bar{y}$$

onde p é o índice de preços, M é o estoque nominal de moeda, y é o produto real, r é a taxa de juros, i é o nível de investimento, g é a despesa do governo, t é a receita tributária, s é o nível de poupança, $\bar{y}$ é o produto potencial. Analise o equilíbrio e a estabilidade deste modelo.

8) Considere o seguinte modelo:

$$\dot{y} = \alpha\,(d - y)\ \ ,\ \alpha > 0$$

$$\frac{M}{P} = L\ (y,r)$$

$$d = d\ (y,r)\ ,\ \frac{\partial d}{\partial y} > 0\ ,\ \frac{\partial d}{\partial r} < 0$$

$$M = \overline{M}\quad ,\quad P = \overline{P}$$

onde y é o produto real, d é o nível de dispêndio, M é o estoque nominal de moeda, p é o índice de preços, r é a taxa de juros. Analise o equilíbrio e a estabilidade deste modelo.

9) Considere o seguinte modelo:

$$\dot{y} = \varnothing(d - y)$$
$$\pi = \pi^e + \delta(y - \bar{y})$$
$$\dot{\pi}^e = \theta(\pi - \pi^e)$$
$$d = d(y, \pi^e),\ \frac{\partial d}{\partial y} > 0\ ,\ \frac{\partial d}{\partial \pi^e} > 0$$

onde y é o nível do produto real, $\bar{y}$ é o nível do produto potencial, d é o nível de dispêndio, π é a taxa de inflação, π^e é a taxa de inflação esperada, ϕ, δ e θ são parâmetros positivos. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.

10) Considere o seguinte modelo:

$$\pi = \pi^e + \varnothing(d - y)$$
$$\dot{y} = \psi(\bar{y} - y)$$
$$\dot{\pi}^e = \theta(\pi - \pi^e)$$
$$d = d(y, \pi^e),\ \frac{\partial d}{\partial y} > 0,\ \frac{\partial d}{\partial \pi^e} > 0$$

onde os símbolos têm o mesmo significado do exercício anterior, e ϕ, ψ e θ são parâmetros positivos. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.

11) Considere o seguinte modelo:

$$d = \alpha_0 + \alpha_1 y - \alpha_2 (R - \pi^e) + \alpha_3 f$$
$$\dot{y} = \phi(d - y)$$
$$m - p = \beta_0 + \beta_1 y - \beta_2 r$$
$$\dot{R} = R - r$$

onde: d = dispêndio real; y = produto real; *R*= taxa de juros de longo prazo; π^e = taxa de inflação esperada; f = variável de política fiscal (gastos do governo); m = logaritmo da quantidade nominal de moeda; p = logaritmo do índice de preços; r = taxa de juros de curto prazo.

a) Qual o efeito sobre o produto real do aumento dos gastos do governo?

b) Qual o efeito sobre o produto real do aumento da quantidade de moeda?

12) Em uma situação de desequilíbrio, a taxa de juros de mercado (r) é diferente da taxa de juros natural (r*), e o excesso de investimento (I) sobre a poupança (S) é financiado através da emissão de moeda. Isto é:

$$I - S = -\alpha(r - r^*) = \frac{dM}{dt} \quad , \alpha > 0$$

A variação dos preços ($\dot{p} = \frac{dp}{dt}$) depende do excesso de demanda:

$$\dot{p} = \beta(I - S) \quad , \quad \beta > 0$$

O Banco Central muda a taxa de juros ($\dot{r} = \frac{dr}{dt}$) de acordo com a seguinte equação:

$$\dot{r} = \gamma(p - \overline{p}) + \delta\,\dot{p}, \quad \gamma > 0, \delta > 0$$

onde $\overline{p}$ é a meta para o nível de preços. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.

13) Considere o seguinte modelo:
demanda agregada: $y = k + \alpha \log \frac{M}{P} + \beta\, \pi^e + \gamma\, f$
Curva de Phillips: $\pi = \pi^e + \delta\,(y - \overline{y})$
previsão perfeita: $\pi^e = \pi$

onde os símbolos têm o seguinte significado: y é o produto real, M é o estoque nominal de moeda, P é o índice de preços, π^e é a taxa de inflação esperada, f representa uma variável fiscal, π é a taxa de inflação *(π= dlogP/dt)*, $\overline{y}$ é o produto potencial da economia.

a) Analise o efeito de uma mudança na política fiscal do governo, nas seguintes situações:
   i) permanente, não antecipada;
   ii) permanente, antecipada;
   iii) transitória, não antecipada;
   iv) transitória, antecipada.

b) Analise o efeito de uma mudança na taxa de crescimento do estoque de moeda ($\mu = \frac{d \log M}{dt}$), nas seguintes situações:
   i) permanente, não antecipada;
   ii) permanente, antecipada;
   iii) transitória, não antecipada;
   iv) transitória, antecipada.

14) Admita que o aluguel (A), explícito ou implícito, de um imóvel é dado por:

$$\text{A} = (\delta + r - \pi + \tau)\text{P} - \dot{P}$$

onde P é o preço do mesmo, δ a taxa de depreciação, r a taxa de juros nominal, π a taxa de inflação, τ a alíquota do imposto (IPTU) do imóvel, e $\dot{P} = dP/dt$ a variação do preço do imóvel. A equação inversa de demanda de aluguel do imóvel depende da quantidade de imóveis (H) de acordo com,

$$A = A(H), \frac{dA}{dH} < 0$$

A variação do estoque de imóveis depende da oferta de novos imóveis e da taxa de depreciação. Isto é:

$$\overset{\circ}{H} = S(P) - \delta H$$

onde S(P) é a curva de oferta de novos imóveis e $dS/dP > 0$

a) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo no plano H (eixo horizontal) e P(eixo vertical)

b) Analise as conseqüências no mercado de imóveis (P e H) de um aumento da alíquota do IPTU quando o aumento da alíquota é:

i) permanente, não antecipada;
ii) permanente, antecipada;
iii) transitória, não antecipada;
iv) transitória, antecipada.

15). Considere o seguinte modelo:

$$\dot{q} = (r + \delta)\,q - F'(K) \quad , F''(K) < 0$$

$$\dot{K} = I(q) - \delta\, K \quad , \qquad I'(q) > 0$$

onde os símbolos têm o seguinte significado: q = q de Tobin; r = taxa de juros; δ = taxa de depreciação; F'(K) = produtividade marginal do capital; K = estoque de capital, $\dot{q} = dq/dt$, $\dot{K} = dK/dt$.

a) Qual a interpretação econômica das equações do modelo?

b) Na trajetória de sela *q* e *K* estão correlacionados negativamente?

c) Quais os efeitos de curto e de longo prazo de um aumento da taxa de juros que seja:

i) permanente, não antecipado;
ii) permanente, antecipado;
iii) transitório, não antecipado;
iv) transitório, antecipado.

APÊNDICE B

Teoria do Controle Ótimo

Este apêndice apresenta de maneira sucinta a teoria do controle ótimo**.** A primeira seção trata do problema básico de controle ótimo. A segunda introduz o hamiltoniano e a condição de transversalidade. A terceira seção trata do problema de controle ótimo com taxa de desconto e horizonte infinito. A quarta seção apresenta o controle ótimo linear. A quinta seção analisa a dinâmica comparativa da solução do problema do controle ótimo.

1. Controle Ótimo: Problema Básico

A teoria do controle ótimo trata do problema de otimização de sistemas dinâmicos. O objetivo a ser maximizado é um funcional que associa as trajetórias das variáveis de estado (x) e de controle (u) um número real. Isto é:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f\left(t, x(t), u(t)\right) dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{x} = g\left(t, x(t), u(t)\right)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_1) \; livre$$

$$t_0, x_0 \quad e \quad t_1 \ fixos$$

O símbolo *t* representa o tempo. O momento inicial t_0 e o final t_1 do problema são fixos. O valor inicial da variável de estado é dado, mas o valor final não é conhecido. A equação diferencial de primeira ordem da variável de estado é a equação de estado, ou equação de transição. Conhecida a trajetória da variável de controle, a equação de transição permite que se calcule a trajetória da variável de estado.

Admita que *u(t)* seja uma solução para este problema e considere pequenas perturbações na vizinhança desta trajetória, de acordo com o gráfico da Figura B1. Analiticamente, a trajetória na vizinhança do controle ótimo é dada por:

$$u\ (t,\ a) = u\ (t) + a\ h\ (t)$$

onde *a* é um parâmetro e *h(t)* uma função arbitrária fixa. A trajetória próxima do controle ótimo corresponde a uma trajetória da variável de estado, $u(t,a) \to x(t,a)$. Quando $a=0$ tem-se a trajetória ótima para a variável de estado, $x(t,0\ )= x(t)$, e o valor fixo inicial da variável de estado, $x\ (t_0,\ a) = x_0$.

A equação de estado pode ser escrita como:

$$g\left(t, x(t,a), u(t,a)\right) - \dot{x}(t,a) \equiv 0\ ,\ \forall\ t \in \left[t_o, t_1\right]$$

Segue-se, então, que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\left[g\left(t, x(t,a), u(t,a)\right) - \dot{x}(t,a)\right] d\,t \equiv 0$$

onde $\mu\ (t)$ é uma variável de co-estado, uma função do tempo, mas desconhecida.

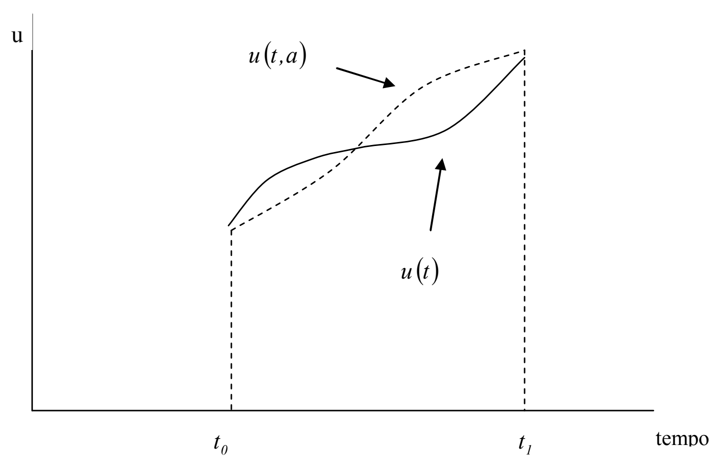


Figura B.1

Usando-se esta restrição, as condições de primeira ordem do problema de controle ótimo podem ser deduzidas a partir da função *F* do parâmetro *a*. Isto é:

$$F(a) = \int_{t_0}^{t_1} \left[f\left(t, x(t,a), u(t,a)\right) + \mu(t)\left[g\left(t, x(t,a), u(t,a)\right) - \dot{x}(t,a)\right]\right] d\,t$$

A integração por partes, $\int u\,d\,v = u\,v - \int v\,du$, do termo nesta expressão que contém a derivada da variável de estado com relação ao tempo resulta em:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\dot{x}(t,a)d\,t = \mu(t)x(t,a)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mu}\,x(t,a)d\,t$$

ou ainda:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\dot{x}(t,a)d\,t = \mu(t_1)x(t_1,a) - \mu(t_0)x(t_0,a) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mu}\;x(t,a)d\,t$$

Substituindo-se esta expressão na função *F(a)* obtém-se:

$$\begin{aligned} F(a) = \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t,x(t,a),u(t,a)) + \mu(t)g(t,x(t,a),u(t,a)) + \dot{\mu}\,x(t,a)\right] d\,t \\ - \mu(t_1)x(t_1,a) + \mu(t_0)x(t_0,a) \end{aligned}$$

F (a) é uma função do parâmetro *a* e *F (0)* $\geq$ *F(a)*. Logo: *F'(0) = 0.* Portanto:

$$\begin{aligned} &F'(a) = \int_{t_0}^{t_1} (f_x + \mu\,g_x + \dot{\mu})\frac{\partial x(t,a)}{\partial a} d\,t + \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \mu\,g_u)h(t)d\,t \\ &- \mu(t_1)\frac{\partial x(\,t_1\,,\,a)}{\partial a} + \mu(t_0)\frac{\partial x(t_0,a)}{\partial a} = 0 \end{aligned}$$

As derivadas parciais são definidas por:

$$f_x = \frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}\;;\; f_u = \frac{\partial f(t,x,u)}{\partial u}\;\;;\; g_x = \frac{\partial g(t,x,u)}{\partial x}\;;\; g_u = \frac{\partial g(t,x,u)}{\partial u}$$

As condições de primeira ordem para um máximo da função *F(a)*, $F'(0) = 0$, são então, dadas por:

$$f_x + \mu\;g_x + \dot{\mu} = 0$$

$$f_u + \mu\,g_u = 0$$

$$\mu(t_1) = 0$$

Quando a condição inicial da variável de estado não for um valor conhecido, isto é, quando $x(t_0)$ não for um dado do problema, a variável de co-estado no ponto inicial deve ser igual a zero: $\mu(t_0) = 0$. Esta condição decorre do fato de que, nestas circunstâncias, $\partial x(t_0,a)/\partial a \neq 0$.

<u>2. Hamiltoniano e Condição de Transversalidade</u>

As condições de primeira ordem do problema do controle ótimo podem ser escritas com auxílio do Hamiltoniano H definido por:

$$H = H(t, x, u, \mu) = f(t, x, u) + \mu\, g(t, x, u)$$

A condição de primeira ordem implica que o Hamiltoniano deve ser maximizado com relação à variável de controle:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = f_u + \mu\ g_u = 0$$

A derivada parcial do Hamiltoniano com relação à variável de estado é igual à derivada da variável de co-estado com relação ao tempo com sinal trocado:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = f_x + \mu\, g_x = -\dot{\mu}$$

A derivada parcial do Hamiltoniano com relação à variável de co-estado resulta na equação de transição:

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = g(t, x, u) = \dot{x}$$

A condição inicial do problema é dada por:

$$x(t_o) = x_o$$

A outra condição para determinar a solução do problema é a condição terminal limítrofe, conhecida como condição de transversalidade, dada por:

$$\mu(t_1) = 0$$

Condição de Transversalidade: Interpretação Geométrica

Seja $V = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\,dt$ o valor máximo do problema de controle ótimo. Admita-se que o instante final t_1 e o valor $x(t_1)$ não sejam conhecidos. O valor ótimo depende, então, destas variáveis:

$$V = V(t_1, x(t_1)) = V(t_1, x_1)$$

Admita-se, também, que t_1 e $x(t_1)$ devam satisfazer a restrição:

$$T = T(t_1, x(t_1)) = T(t_1, x_1) = 0$$

As condições terminais são, então, obtidas maximizando-se

$$V(t_1, x_1)$$

com a condição de que a seguinte restrição seja satisfeita:

$$T(t_1, x_1) = 0$$

O lagrangiano deste problema é dado por:

$$\ell = V(t_1, x_1) + \varphi\, T(t_1, x_1)$$

onde φ é o multiplicador de Lagrange. A condição de primeira ordem deste problema implica que:

$$\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial t_1}} = \frac{\dfrac{\partial T}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial T}{\partial t_1}}$$

O nome condição de transversalidade vem da seguinte interpretação geométrica desta equação: o gradiente da curva V intercepta a curva T num ângulo reto no ponto final ótimo, como indicado na Figura B2. Quando o tempo t_1 é fixo, a função T é dada por:

$$T(t_1, x_1) = t_1 - \bar{t}_1 = 0$$

Logo, $\partial T / \partial x_1 = 0$ e

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \mu(t_1) = 0$$

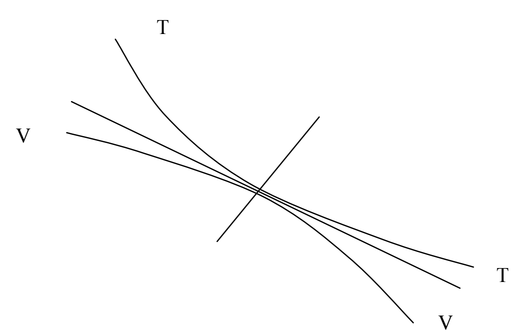


Figura B2

Sistema Dinâmico

As condições de primeira ordem para que se determine o controle ótimo, o princípio do maximum, mais a condição inicial da variável de estado e a condição de transversalidade são as seguintes:

$$
\begin{aligned}
&H_u = 0\\
&\dot{\mu} = -H_x\\
&\dot{x} = H_\mu\\
&x(0) = x_0\\
&\mu(t_1) = 0
\end{aligned}
$$

Observe-se que a solução deste problema transforma-se na solução de um sistema de duas equações diferenciais, quando se substitui a variável de controle obtida da condição de primeira ordem de maximização do Hamiltoniano, como função das variáveis de estado e de co-estado, nas equações diferenciais destas variáveis. A condição inicial da variável de estado e a condição de transversalidade da variável de co-estado determinam, então, as trajetórias destas variáveis. Isto é:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu} &= M(\mu, x, \alpha)\\
\dot{x} &= X(\mu, x, \alpha)\\
x(0) &= x_0\\
\mu(t_1) &= 0
\end{aligned}
$$

onde α é um vetor de parâmetros que afeta o sistema dinâmico. Este sistema supõe que o tempo não seja um argumento das equações diferenciais, ou seja, que o sistema é autônomo. A Figura B.3 mostra o diagrama de fases deste sistema dinâmico, admitindo-se que haja um ponto de sela. *SS* é a sela convergente e *DD* a sela divergente. A trajetória *AB* é a solução ótima do problema de controle. O ponto *A* tem como abscissa o valor inicial ($x(t_0)$) da variável de estado, e o ponto *B* tem como ordenada o valor final ($\mu(t_1)$) da variável de co-estado. A trajetória *AB* é tal que o intervalo de tempo para percorrer esta trajetória é igual a t_1.

Interpretação Econômica

Uma interpretação econômica do princípio do maximum pode ser obtida multiplicando-se o Hamiltoniano *H* pelo intervalo de tempo *dt*:

$$
Hdt = f(t,x,u)dt + \mu\, g(t,x,u)dt = f(t,x,u)dt + \mu\, \dot{x}\, dt
$$

onde levou-se em conta a equação de transição. Como $\dot{x}\, dt = dx$ segue-se, então, que:

$$
Hdt = f(t,x,u)dt + \mu\ dx
$$

O primeiro componente desta expressão é a contribuição direta para o objetivo do problema, quando a variável de estado é igual a *x* e aplica-se o controle *u*. O segundo componente mede a contribuição indireta, para o objetivo do problema, da variação da variável de estado *x*, quando a variável de controle é igual a *u* no intervalo de tempo *dt*. O coeficiente μ pode ser interpretado como o preço sombra (*shadow price*) da variável de estado.

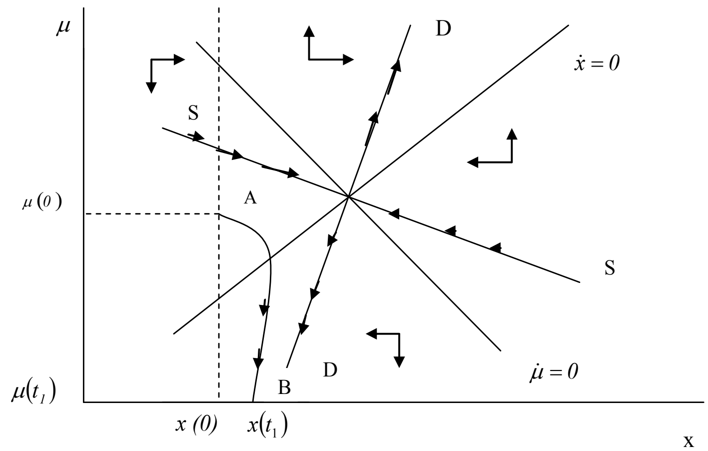


Figura B.3

3. Controle Ótimo com Taxa de Desconto e Horizonte Infinito

Na maioria dos problemas de controle ótimo da teoria econômica o objetivo a ser otimizado é descontado por um fator, a taxa de preferência intertemporal no caso dos consumidores e a taxa de juros quando se trata de fluxo de caixa das empresas. Seja ρ a taxa de desconto e $f(x,u)$ a função que representa o critério do agente. O problema de controle ótimo consiste, então, em

$$\max \int_0^T e^{-\rho t} f(x,u) dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{x} = g(x,u)$$

$$x(0) = x_o, \ dado$$

O Hamiltoniano de valor presente H^* é expresso por:

$$H^* = e^{-\rho t} f(x,u) + \mu \ g(x,u)$$

e o Hamiltoniano de valor corrente, *H,* é definido por:

$$H = H^* e^{\rho t}$$

Substituindo-se a equação de H^* na equação anterior obtém-se:

$$H = f(x,u) + \lambda \ g(x,u)$$

onde a nova variável de co-estado λ é igual a:

$$\lambda = \mu e^{\rho t}$$

As condições de primeira ordem deste problema são:

$$\frac{\partial H^*}{\partial u} = e^{-\rho t} f_u + \mu g_u = 0$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} = e^{-\rho t} f_x + \mu g_x = -\dot{\mu}$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial u} = g(x,u) = \dot{x}$$

A primeira equação implica que:

$$f_u + \mu e^{\rho t} g_u = f_u + \lambda g_u = 0$$

onde levou-se em conta a definição de λ. Logo, a condição de primeira ordem para maximização do Hamiltoniano de valor presente é equivalente a seguinte condição para a maximização do Hamiltoniano de valor corrente:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = f_u + \lambda g_u = 0$$

A segunda equação das condições de primeira ordem para o problema de controle ótimo pode ser escrita como:

$$f_x + \mu e^{\rho t} g_x = -e^{\rho t} \dot{\mu}$$

A derivada da variável de co-estado λ com relação ao tempo é igual a:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\mu} e^{\rho t} + \rho \mu e^{\rho t}$$

Logo:

$$e^{\rho t} \dot{\mu} = \dot{\lambda} - \rho \lambda$$

Substituindo-se esta expressão na condição de primeira ordem resulta:

$$f_x + \lambda g_x = -\left(\dot{\lambda} - \rho \lambda\right)$$

Esta equação pode ser escrita, portanto, como:

$$\dot{\lambda} = \rho \lambda - (f_x + g_x) = \rho \lambda - H_x$$

É fácil verificar que:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(x,u) = \dot{x}$$

A condição inicial da variável de estado é um dado do problema. Isto é:

$$x(t_o) = x_o$$

A condição de transversalidade transforma-se em

$$\mu(T) = \lambda(T)\, e^{-\rho T} = 0$$

O problema de controle ótimo com taxa de desconto pode ser resolvido tanto com auxílio do Hamiltoniano de valor presente como através do Hamiltoniano de valor corrente. Esta é uma questão de preferência. A solução do problema é exatamente a mesma, exceto pela interpretação da respectiva variável de co-estado. As condições de primeira ordem, a condição inicial e a condição de tranversalidade são, então, dadas por:

$$\begin{cases} H_u = f_u + \lambda g_u = 0 \\ \dot{\lambda} = \rho \lambda - H_x = \rho \lambda - (f_x + \lambda g_x) \\ H_\lambda = \dot{x} = g(x,u) \\ x(t_o) = x_o \\ \lambda(T) = 0 \end{cases}$$

Quando $T \to \infty$ tem-se o caso de horizonte infinito. Obviamente a integral a ser otimizada

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} f(x,u)\, dt$$

deve ser uma integral própria, ou seja, ela deve existir. A condição de transversalidade transforma-se em:

$$\lim_{T \to \infty} \lambda(T)\, e^{-\rho T} = 0$$

Quando a variável de estado tem de satisfazer a condição de não-negatividade no período final, $x(T) \geq 0$, a condição de transversalidade é dada por:

$$\lim_{T \to \infty} \lambda(T)\, x(T)\, e^{-\rho T} = 0$$

A equação diferencial da variável de co-estado,

$$\dot{\lambda} = \rho \lambda - H_x$$

pode ser escrita como uma equação de arbitragem para determinação do preço λ, isto é:

$$\frac{\dot{\lambda} + H_x}{\lambda} = \rho$$

A taxa de retorno do capital obtida dividindo-se a soma do lucro de uma unidade adicional de capital com o ganho de capital pelo seu preço deve, em equilíbrio, ser igual a taxa de juros. A solução desta equação determina o preço do capital λ, de acordo com:

$$\lambda(t) = \int_t^{\infty} e^{-\rho(\tau - t)} H_x \, d\tau$$

4. Controle Ótimo Linear

Em alguns problemas de controle ótimo o Hamiltoniano é linear na variável de controle. Isto é:

$$H = f(x,u) + \lambda \; g(x,u) = F(x,\lambda) + \sigma(x,\lambda)\, u$$

onde F e σ são funções que não dependem da variável de controle. Admita-se que a variável de controle seja limitada tanto superiormente ($\overline{u}$) como inferiormente $\underline{u}$, de acordo com:

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$$

A função $\sigma(x,\lambda)$ é denominada função de mudança (*switching function*). Se $\sigma > 0$, o máximo de H ocorre quando $u = \overline{u}$. Se $\sigma < 0$, o valor máximo do Hamiltoniano corresponde a $u = \underline{u}$. Este tipo de controle ótimo é chamado controle "bang bang", pois a variável de controle oscila entre estes dois valores, de acordo com o sinal de σ.

Quando existem valores de x e λ tal que $\sigma(x,\lambda) = 0$ é possível que exista uma solução para o controle ótimo, que não é obtida pelo princípio do maximum. Neste caso, o controle ótimo é denominado controle singular.

5. Dinâmica Comparativa

A solução do problema de controle ótimo com horizonte infinito pode ser obtida com um sistema autônomo de equações diferenciais nas variáveis de co-estado (λ) e de estado (x), quando o valor do controle ótimo (u) da equação $H_u = 0$ é substituído nas demais equações das condições de primeira ordem. O sistema é, então, dado por:

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda} = \Gamma(\lambda, x, \alpha) \\
&\dot{x} = G(\lambda, x, \alpha) \\
&x(0) = x_0 \\
&\lim_{T \to \infty} \lambda(T)\, x(T)\, e^{-\rho T} = 0
\end{aligned}$$

onde α é um vetor de parâmetros, o valor inicial da variável de estado é dado e a condição de transversalidade deve ser satisfeita. No estado estacionário, $\dot{\lambda} = \dot{x} = 0$, as variáveis de co-estado e de estado dependem do vetor α. Isto é:

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}\ (\alpha)$$
$$\bar{x} = \bar{x}\ (\alpha)$$

A dinâmica comparativa analisa como a solução ótima do problema muda quando o parâmetro α muda de valor. Quatro casos devem ser considerados: i) mudança permanente não antecipada; ii) mudança permanente antecipada; iii) mudança transitória não antecipada; iv) mudança transitória não antecipada.

5.1 Mudança Permanente Não antecipada

A Figura B.4 mostra uma mudança não antecipada no parâmetro α, aumentando de α_0 para α_1. O gráfico da Figura B.4 supõe que os valores de estado estacionário das variáveis de co-estado e de estado aumentem quando isto acontece. Esta hipótese será também usada nos demais casos analisados nesta seção. A variável de estado é predeterminada, porém a variável de co-estado pode mudar repentinamente de valor.

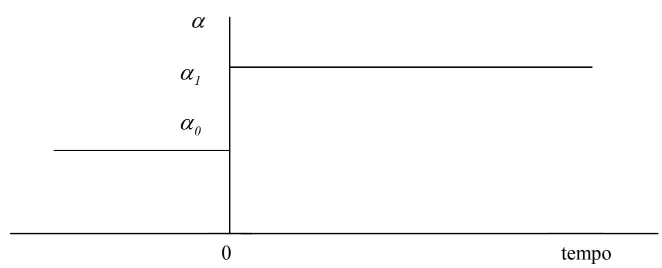


Figura B.4

A Figura B.5 mostra a dinâmica do sistema com a mudança do parâmetro α. A variável de co-estado no momento inicial, quando ocorreu a mudança, dar um salto para a nova sela. As variáveis de co-estado e de estado convergem, então, para o novo estado estacionário.

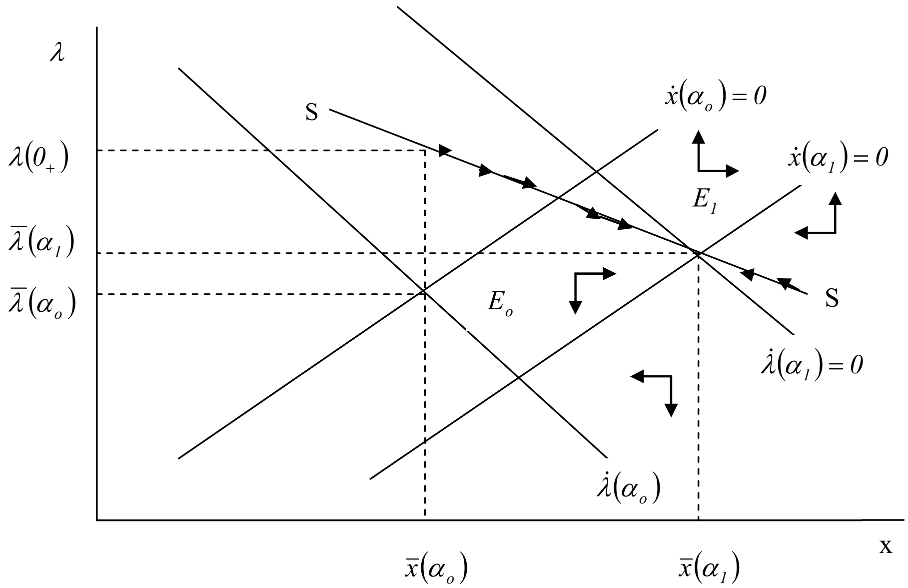


Figura B.5

5.2 Mudança Permanente Antecipada

A Figura B.6 mostra uma mudança permanente antecipada do parâmetro α. No momento inicial, isto é, quando $t = 0$, anuncia-se que em *T* períodos este parâmetro aumentará de α_0 para α_1.

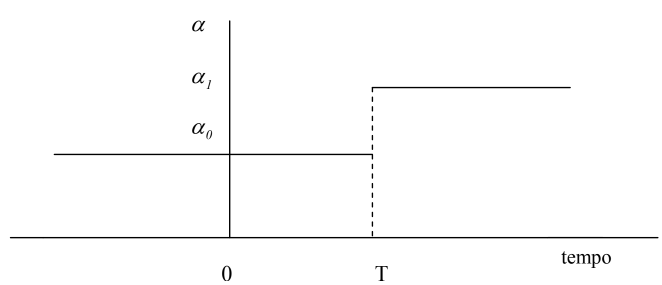


Figura B.6

A Figura B.7 descreve o comportamento do sistema dinâmico depois do anúncio da mudança do parâmetro α. No momento do anúncio a variável de co-estado dar um pulo, isto é, muda seu valor repentinamente para $\lambda(0_+)$. A variável de estado no momento do anúncio não muda de valor, pois ela é uma variável predeterminada. No momento *T*, o sistema de equações diferenciais muda e tem como seu novo ponto de equilíbrio o ponto E_1. O pulo da variável de co-estado no momento inicial tem que ser tal que no momento *T* a economia esteja na nova sela. Caso contrário a economia não convergiria para seu novo ponto de equilíbrio. A trajetória no intervalo de tempo antes da mudança do parâmetro segue a dinâmica das setas tracejadas, na direção nordeste.

Do momento T em diante a trajetória ótima segue a sela até o novo ponto de equilíbrio E_1.

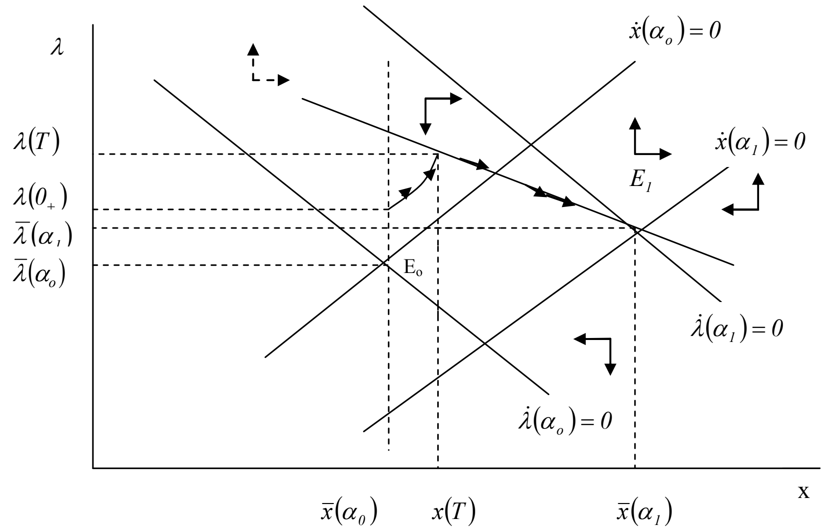


Figura B.7

5.3 Mudança Transitória Não Antecipada

A Figura B.8 mostra uma mudança transitória não antecipada no parâmetro α, que muda de α_0 para α_1 no momento $t = 0$, mas que retorna ao seu valor inicial depois de um intervalo de tempo igual a *T*. No momento inicial, o sistema de equações diferenciais desloca-se, passando pelo novo ponto de equilíbrio correspondente ao valor α_1, como descrito na Figura B.9. A dinâmica do sistema é determinada pelas setas indicadas nesta figura. No momento *T* as equações diferenciais voltam para suas posições originais, e a sela convergente do sistema é representada pelas letras *SS*. A variável de co-estado no momento inicial dar um salto para um novo valor, de tal sorte que no momento *T* a economia esteja na sela convergente *SS*. No longo prazo a economia retorna ao seu equilíbrio inicial.

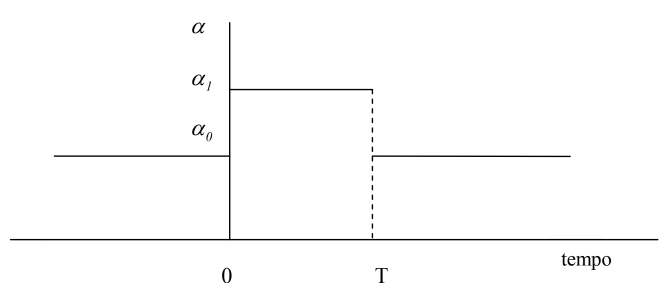


Figura B.8

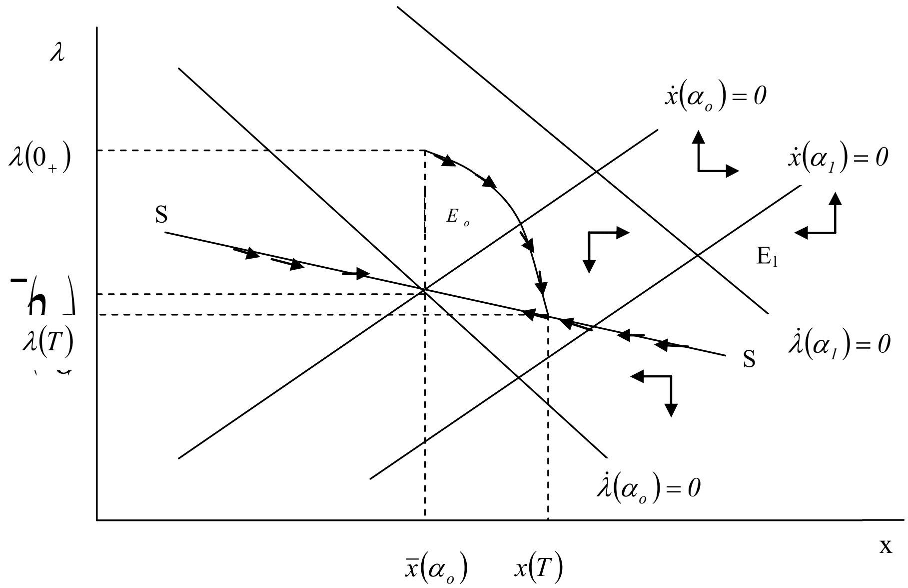


Figura B.9

5.4 Mudança Transitória Antecipada

A Figura B.10 descreve uma mudança antecipada no parâmetro α, que muda de α_0 para α_1 daqui a T_1 períodos, e volta ao seu valor inicial depois de decorrido um intervalo de tempo T_2, a contar de $t = 0$.

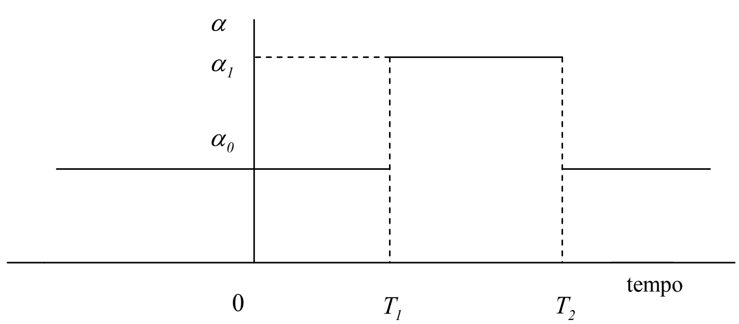


Figura B.10

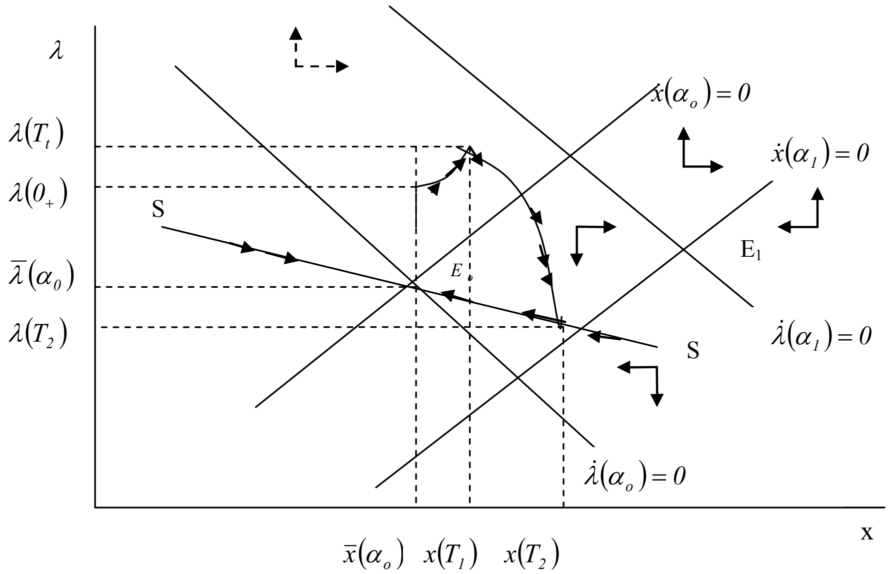


Figura B.11

No momento do anúncio, a variável de co-estado muda de valor e dar um salto para $\lambda(0_+)$, como indicado na Figura B11. No momento T_1, quando o parâmetro muda de valor, a dinâmica do sistema será regida pela nova configuração das equações diferenciais (setas ortogonais com linhas cheias). Até lá a dinâmica é dada pela configuração inicial (setas ortogonais tracejadas). Portanto, depois do salto da variável de co-estado, o sistema toma uma trajetória com a direção nordeste. No momento T_1, quando ocorre a mudança do parâmetro, a dinâmica do sistema de equações diferenciais é dada pelo novo sistema de equações diferenciais que tem como ponto de equilíbrio estacionário o ponto E_1, e a trajetória toma o rumo sudeste. No momento T_2 o parâmetro α volta ao seu antigo valor. Neste momento a trajetória da economia tem que encontrar a sela do sistema, para que ela convirja para seu equilíbrio estacionário de longo prazo.

6. Exercícios

1) (Cálculo de Variações) Considere o seguinte problema:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt$$

$$x(t_o) = x_o, \; dado$$

$$x(t_1) \; livre$$

a) Transforme este problema em um problema de controle ótimo definindo a variável de controle $u = \dot{x}$.

b) Deduza a condição necessária para a solução do problema, a equação de Euler:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}$$

ou na sua forma alternativa:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{x}}\,\ddot{x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\,\dot{x}+\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}}-\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

c) Mostre que a condição de transversalidade é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=t_1}=0$$

2) O agente representativo maximiza

$$\int_o^{\infty} e^{-\rho\, t}\, u\left(c\right) dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{k}=f\left(k\right)-c-\delta\, k$$
$$k\left(0\right)=k_o$$

onde c é o consumo, $u(c)$ a função utilidade, ρ a taxa de preferência intertemporal, k o estoque de capital, $f(k)$ a função de produção e δ a taxa de depreciação do capital. As funções utilidade e produção seguem as propriedades tradicionais. Denomine por λ a variável de co-estado do problema.
a) Analise, num diagrama de fases, com λ no eixo vertical e k no eixo horizontal o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.
b) Use o cálculo de variações (exercício 1) para resolver este problema.

3) O indivíduo, quando está em uma situação de desequilíbrio, tem um custo de ajustamento (C) com dois componentes. O primeiro é o custo de não estar em equilíbrio $\left(x-\overline{x}\right)$ e o segundo componente é o custo de mudança $\left(\dot{x}\right)$, de acordo com a seguinte função:

$$C=\frac{\alpha}{2}\left(x-\overline{x}\right)^2+\frac{1}{2}\,\dot{x}^2$$

O indivíduo resolve o seguinte problema

$$\min\int_o^{\infty} e^{-\rho\, t}\left[\frac{\alpha}{2}\left(x-\overline{x}\right)^2+\frac{\dot{x}^2}{2}\right] d\,t$$
$$x\left(0\right)=x_0,\ dado$$

Aplique a equação de Euler para mostrar que a trajetória da variável x é dada pela equação diferencial:

$$\dot{x} = k\left(\bar{x} - x\right)$$

4) Considere o seguinte modelo

$$\text{IS: } y - \bar{y} = -\alpha\left(\rho - \bar{\rho}\right)$$

$$\text{CP: } \dot{\pi} = \beta\left(y - \bar{y}\right)$$

A função de perda do Banco Central é dada por:

$$L = \frac{1}{2}\left(\pi - \bar{\pi}\right) + \frac{\varphi}{2}\left(y - \bar{y}\right)^2$$

O Banco Central determina a taxa de juros nominal resolvendo o seguinte problema:

$$\min \int_o^\infty e^{-\delta t}\left[\frac{1}{2}\left(\pi - \bar{\pi}\right)^2 + \frac{\varphi}{2}\left(y - \bar{y}\right)^2\right] d\,t$$

sujeito à seguinte restrição:

$$\dot{\pi} = \beta\left(y - \bar{y}\right)$$

$$p\left(0\right) e\ \pi(0) \quad dados$$

onde δ é a taxa de desconto do banco central e tanto o nível de preços como a taxa de inflação iniciais são dados.
Deduza a fórmula da taxa de juros nominal fixada pelo banco central.

5) O consumidor decide a estrutura temporal do seu consumo resolvendo o seguinte problema:

$$\max \int_o^\infty e^{-\delta t}\ u\left(c\right) d\,t$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{a} = \rho\, a + y - c$$
$$a\left(0\right) = a_o, \quad dado$$

onde δ é a taxa de preferência intertemporal, *u(c)* a função consumo, $u'\left(c\right) > 0$, $u''\left(c\right) < 0$, *a* é o total de ativos financeiros, *y* o nível de renda e *c* o consumo.
a) Admita a existência de equilíbrio estacionário. Analise o equilíbrio e a dinâmica do modelo num diagrama de fases com *c* no eixo vertical e *a* no eixo horizontal.
b) No caso do item anterior, mostre o que acontece, no diagrama de fases, quando corre uma mudança na renda:

i) permanente, não antecipada;
ii) permanente, antecipada;
iii) transitória, não antecipada;
iv) transitória, antecipada.

c) No caso do item anterior, mudanças transitórias têm efeitos permanentes (problema da raiz unitária)?
d) Admita a inexistência de equilíbrio estacionário. Deduza a equação de consumo quando:

$$u(c) = \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \quad , \sigma \neq 1$$

$$u(c) = \log c \, , \, \sigma = 1$$

6) (q de Tobin) O fluxo de caixa de uma empresa é obtido subtraindo-se da receita (p Q) o custo da mão-de-obra (ω L), o investimento (I) e o custo de instalação (C(I)). A empresa resolve, então, o seguinte problema:

$$\max \int_o^{\infty} e^{-\rho t}\left[p \, Q(K,L) - \omega L - I - C(I)\right] d\,t$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{K} = I - \delta K$$

$$K(0) = K_o, \quad dado$$

Q = Q(K,L) é a função de produção com retornos constantes de escala, que depende do capital *(K)* e da mão-de-obra *(L), p* é o preço do produto, ω é o salário, I o investimento, δ a taxa de depreciação do capital. A função custo de instalação é dada por:

$$C(I) = \alpha \frac{I^2}{K}$$

a) Represente pela letra q (q de Tobin) a variável de co-estado e analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com q no eixo vertical e K no eixo horizontal.
b) Mostre que:

$$q(0)\, K_0 = V_o$$

onde V_o é o valor da empresa. Interprete este resultado.
c) O que acontece quando o parâmetro α é igual a zero?

7) O objetivo da política monetária é maximizar o valor presente da senhoriagem,

$$\frac{\dot{M}}{P} = \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{P} = \mu\, m$$

onde $\mu = \dot{M} / M$, $m = M / P$, M é a base monetária e P o nível de preços. Isto é:

$$\max \int_{o}^{\infty} e^{-\rho t} \mu\, m\, dt$$

sujeito à restrição:

$$\dot{m} = \mu\, m - \tau(m)$$

onde $\tau(m) = \pi\, m$ é o imposto inflacionário. Admita que as expectativas são racionais, que o nível de preços inicial *P(0)* é uma variável endógena e que a base monetária no instante inicial, *M(0),* é dada.

a) Mostre que a condição de primeira ordem implica que:

$$\tau'(m) = -\rho$$

diferente de $\tau'(m) = 0$, que maximiza o imposto inflacionário.

b) Mostre que esta política é inconsistente, pois o banco central tem incentivo para mudá-la, aumentando a taxa de expansão monetária para o nível compatível com a maximização do imposto inflacionário.

8) Usando a restrição,

$$\dot{m} = \mu\, m - \tau(m)$$

mostre que:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} \mu\, m\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} \tau(m) dt + \infty \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} \rho \left(m - m(0)\right) dt$$

admitindo que $\lim_{t \to \infty} m\, e^{-\rho t} = 0$

9) (Política do Governo 'Honesto'). Admita que o objetivo da política monetária seja maximizar o valor presente da senhoriagem, mas que o nível de preços no momento inicial *P(0)* seja mantido constante através de variações do estoque inicial de moeda. O governo, nestas circunstâncias, é honesto, pois não permite ganhos ou perdas de capital pelos detentores da moeda.

O objetivo do banco central consiste, portanto, em maximizar,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} \mu m\, dt + m(0) - m(0_{-})$$

onde $m(0) - m(0_{-})$ é a variação do estoque real de moeda no momento inicial.

Mostre que, neste caso, não há inconsistência dinâmica, pois o banco central não tem incentivo para mudar a política monetária.

10) O objetivo da política monetária é maximizar o valor presente da senhoriagem,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} \mu\, m\, dt$$

sujeito à restrição,

$$\dot{m} = -\frac{\alpha\,\beta}{1-\alpha\,\beta}\,\mu\, m - \frac{\beta}{1-\alpha\beta}\, m\, log\, m$$

e a condição inicial,

$$m(0) = m_o$$

a) Mostre que a equação de estado é obtida da equação de demanda de moeda,

$$log\, m = -\alpha\, \pi^e$$

e do mecanismo de expectativa adaptativa,

$$\dot{\pi}^e = \beta\left(\pi - \pi^e\right)$$

onde α e β são parâmetros positivos e π^e é a taxa de inflação esperada.
a) Mostre que não existe um controle ótimo para este problema, a não ser que $m_0 = \overline{m}$, onde $\overline{m}$ é a solução estacionária do controle linear.
b) Suponha que o banco central pode injetar ou retirar moeda no momento inicial. Existe uma política monetária ótima neste caso?

11) (Inconsistência Dinâmica) A economia produz um bem de consumo (c), cuja produção é afetada pelo imposto (x), de acordo com:

$$c = f(x), f(x) > 0\,,\ \underline{x} < x < \overline{x}\,,\ \underline{x} < 0\,, \overline{x} > 0$$
$$f(\underline{x}) = f(\overline{x}) = 0\,,\ f''(x) < 0, f(0) > 0, f'(0) = 0$$

A quantidade real demandada de moeda $(m = M / P)$ depende da taxa de inflação esperada:

$$log\ m^d = -\alpha\, \pi^e, \alpha > 0$$

As expectativas são racionais e o mercado de moeda está em equilíbrio:

$$\pi^e = \pi$$
$$m^d = m^s$$

A restrição orçamentária do governo é expressa por;

$$\frac{\dot{M}}{P} = -x$$

O agente representativo maximiza seu bem estar. A função utilidade é aditiva:

$$U(c,m) = u(c) + v(m)$$

com as funções u *(c)* e *v(m)* obedecendo às propriedades tradicionais.
a) Mostre que o problema do agente representativo consiste em maximizar

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\left[u(c(f(x))) + v(m)\right]dt$$

sujeito à restrição:

$$\dot{m} = m\frac{log\, m}{\alpha} - x$$

b) Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases com a variável de co-estado no eixo vertical e a quantidade real de moeda no eixo horizontal.
c) Neste problema, a quantidade real de moeda inicial (m_o)não é dada. Ela é uma variável endógena do modelo. A condição de transversalidade obriga que a variável de co-estado no momento inicial seja igual a zero, $\lambda(0) = 0$. O que acontece nestas circunstâncias?

12) O Banco central controla a taxa de crescimento da base monetária μ e fixa o seu valor minimizando

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[\frac{\varphi}{2}x^2 + \frac{1}{2}\pi^2\right]dt$$

onde ρ é a taxa de juros real, x o hiato do produto, π a taxa de inflação e φ um parâmetro positivo, sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{\pi} = \alpha\left(\pi - \mu\right) + \beta x$$
$$\dot{x} = \gamma\left(\pi - \mu\right) + \delta x$$
$$\pi\left(0\right) = \mu_o$$
$$x\left(0\right) = 0$$

a) O Hamiltoniano (H) é linear na variável de controle μ. Determine uma solução do modelo de tal sorte que H não dependa da variável de controle.
b) Analise o equilíbrio e a dinâmica da solução num diagrama de fases com π no eixo vertical e x no eixo horizontal.
13) A sociedade tem um recurso não-renovável cujo estoque atual é igual a S. O consumo (c) deste recurso tem que satisfazer à condição:

$$\int_o^T c(t)\,dt = S$$

onde T é o horizonte de tempo em que o recurso será totalmente consumido. O estoque remanescente *(x)* do recurso não-renovável, no tempo *t*, é definido, portanto, por:

$$x\left(t\right) = S - \int_o^t c\left(\tau\right)d\tau$$

O consumidor maximiza

$$\int_o^T e^{-\rho t}u\left(c\right)dt$$

sujeito às seguintes condições:

$$\dot{x}(t) = -c(t)$$
$$x(0) = S$$
$$x(T) = 0$$

a) Determine a trajetória ótima do consumo.
b) O que acontece com a trajetória quando $\rho = 0$?

14) Uma empresa extrai um produto não renovável cujo estoque é igual a S:

$$\int_0^T q(t)\,dt = S$$

O estoque remanescente *(x)* no período *t* é, portanto, dado por:

$$x(t) = S - \int_0^t q(\tau)\,d\tau$$

O custo de extração deste recurso depende da quantidade extraída (q) e do estoque remanescente, de acordo com:

$$C = C(q,x)\,,\ C_q > 0\ ;\ C_x < 0$$
$$C_{qq} < 0\ ;\ C_{xx} > 0$$

A empresa maximiza o fluxo de caixa,

$$\int_0^T e^{-\rho t}\left[pq - C(q,x)\right]dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\dot{x} = -q$$
$$x(0) = S$$
$$0 < q < S$$

a) Quando *C (q,x)=0*, qual a solução deste problema? A taxa de juros é relevante na decisão da empresa?
b) Admita que *C (q,x)=c(x) q,* com $c'(x) < 0, c''(x) > 0$. Qual é a solução do controle ótimo neste caso?

15). O estoque de peixe *(x)* evolui de acordo com a equação de transição,

$$\dot{x} = f(x) - q$$

onde *q* é a quantidade pescada, e a função de reprodução *f(x)* atende às seguintes propriedades: $f(x) > 0, f''(x) > 0, f(0) = f(S) = 0$.

A empresa de pesca resolve o seguinte problema:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[p - c(x)\right] q \; dt$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) - q \\ &x(0) = 0 \\ &0 \le q \le S \end{aligned}$$

onde $c(x), c'(x) < 0$, é o custo unitário da pesca.
a) Determine o controle ótimo desta empresa.
b) Repita o item anterior quando a função *f(x)* for expressa por:

$$f(x) = \alpha\, x\left(1 - \frac{x}{s}\right)$$

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

I. Geral

Auernheimer, Leonardo (1974). The Honest Government's Guide to the Revenue from the Creation of Money. *Journal of Political Economy* **82**, 598-606.

Barbosa, Fernando de Holanda (1991). O Mercado Aberto Brasileiro: Análise dos Procedimentos Operacionais. *Revista Brasileira de Mercado de Capitais* **16**, 36-60.

Barbosa, Fernando de Holanda (1992). Política Monetária Ótima no Combate à Inflação. *Revista de Econometria* **12**, 57-80.

Barbosa, Fernando de Holanda (1999). Taxa de Câmbio e Poupança: Um Ensaio sobre o Efeito Harberger-Laursen-Metzler. *Estudos Econômicos* **29**, 5-21.

Barbosa, Fernando de Holanda (2002). Hyperinflation: Inflation Tax and Economic Policy Regime. *Brazilian Review of Econometrics* **22**, 215-238.

Barbosa, Fernando de Holanda e Alexandre Barros da Cunha (2003). Inflation Tax and Money Essentiality. *Economics Letters* **78**, 187-195.

Barbosa, Fernando de Holanda, Elvia Mureb Sollum e Alexandre Barros da Cunha (2006). Competitive Equilibrium Hyperinflation Under Rational Expectations. *Economic Theory* **29**, 185-195.

Barbosa, Fernando de Holanda (2008). The New Open Economy Macroeconomics IS Curve: A Requiem and a Redux. EPGE, mimeo.

Barbosa, Fernando de Holanda e Tito Nicias Teixeira da Silva Filho (2008). Testing Hyperinflation Theories using the Inflation Tax Curve: A Case Study. EPGE, mimeo.

Bailey, Martin J. (1956). The Welfare Costs of Inflationary Finance. *Journal of Political Economy* **64**, 93-110.

Barro, Robert J. e David B. Gordon (1983a). A Positive Theory of Monetary Policy in a Natural Rate Model. *Journal of Political Economy* **91**, 589-610.

Barro, Robert J. e David B. Gordon (1983b). Rules, Discretion and Reputation in a Model of Monetary Policy. *Journal of Monetary Economics* **12**, 101-120.

Baumol, William (1952). The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach. *Quarterly Journal of Economics* **67**, 545-556.

Bernanke, Ben S. E Allan S. Blinder (1988). Credit, Money and Aggregate Demand. *AmericanEconomic Review* **78**, 435-439.

Bernanke, Ben S. , Thomas Laubach, Frederic S. Mishkin e Adam S. Posen (1999). *Inflation Target Lessons from the International Experience.* Princeton: Princeton University Press.

Bernanke, Ben S. e Michael Woodford (2005). *The Inflation-Targeting Debate*. Chicago: The University of Chicago Press.

Blanchard, Olivier J. (1981). Output, the Stock Market and Interest Rates*. American Economic Review* **71**, 132-143.

Blanchard, Olivier J. (1985). Debts, Deficits and Finite Horizons. *Journal of Political Economy* **93**, 223-247.

Blanchard, Olivier J. (2000). What Do We Know about Macroeconomics that Fisher and Wicksell did not? *Quarterly Journal of Economics* **115**, 1375-1499.

Blanchard, Olivier J. e Nabuhiro Kiyotaki (1987). Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand. *American Economic Review* **77**, 647-666.

Blinder, Allan S. e Robert M. Solow (1973). Does Fiscal Policy Matter? *Journal of Public Economics* **2**, 319-337.

Bosworth, Barry e Susan M. Collins (2003). The Empirics of Growth: An Update. *Brookings Papers on Economic Activity* **34**, 113-206.

Bosworth, Barry e Susan M. Collins (2008). Accounting for Growth: Comparing China and India. *Journal of Economic Perspectives* **22**, 45-66.

Branson, W. H. e D. W. Henderson (1985). The Specification and Influence of Asset Markets. In R. W. Jones e P. B. Kenen (organizadores). *Handbook of International Economics*, Vol. II, Cap. 15. Amsterdam: North Holland.

Brock, William A. (1975). A Simple Perfect Foresight Monetary Model. *Journal of Monetary Economics* **1**, 133-150.

Bruno, Michael e Stanley Fischer (1990). Seigniorage, Operating Rules and High Inflation Trap. *Quarterly Journal of Economics* **105**, 353-374.

Buiter, W. H. (1988). Death, Population Growth, Productivity Growth and Debt Neutrality. *Economic Journal* **98**, 279-93.

Cagan, Phillip (1956). The Monetary Dynamics of Hyperinflation. In Milton Friedman (organizador) *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: Chicago University Press.

Calvo, Guillermo A. (1978). On the Time Inconsistency of Optimal Policy in a Monetary Economy. *Econometrica* **46**, 1411-1428.

Calvo, Guillermo A. (1983). Staggered Prices in a Utility Maximization Framework. *Journal of Monetary Economics* **12**, 983-998.

Chang, F. R. (1994). Optimal Growth and Recursive Utility: Phase diagram Analysis. *Journal of Optimization Theory and Applications* **80**, 425-439.

Clarida, R., J. Galí e M. Gertler (1999). The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective. *Journal of Economic Literature* **37**, 1661-1707.

Clower, Robert W. (1967). A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory. *Western Economic Journal* **6**, 1-8.

Corden, W. Max (1984). Booming Sector and Dutch Disease Economics: Survey and Consolidation. *Oxford Economic Papers* **36**, 359-380.

Denison, Edward F. (1961). *The Sources of Growth in the United States*. Nova York: Commitee for Economic Development.

Dixit, A. e Joseph Stiglitz (1977). Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *American Economic Review* **67**, 297-308.

Dorfman, R. (1969). An Economic Interpretation of Optimal Control Theory. American Economic Review **59**, 817-831.

Drazen, Allan (1984). Tight Money and Inflation Further Results. *Journal of Monetary Economics* **15**, 113-120.

Epstein, Larry G. (1987). A Simple Dynamic General Equyilibrium Model. *Journal of Economic Theory* **41**, 68-95.

Feenstra, Robert C. (1986). Functional Equivalence Between Liquidity Costs and the Utility of Money. *Journal of Monetary Economics* **17**, 271-291.

Feldstein, Martin S. e C. Horioka (1980). Domestic Saving and International Capital Flows. *Economic Journal* **90**, 314-329.

Fischer, Stanley (1977). Long-Term Contracts, Rational Expectations, and the Optimal Money Supply Rule. *Journal of Political Economy* **85**, 191-205.

Friedman, Milton (1953). *Essays in Positive Economics*. Chicago: The University of Chicago Press.

Friedman, Milton (1956). The Quantity Theory of Money: A Restatement. In Milton Friedman (organizador) *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: Chicago University Press.

Friedman, Milton (1957). *A Theory of Consumption Function*. Princeton: Princeton University Press.

Friedman, Milton (1960). *A Program for Monetary Stability*. Nova York: Fordham University.

Friedman, Milton (1969). *The Optimum Quantity of Money and Other Essays*. Chicago: Aldine.

Friedman, Milton (1971). *A Theoretical Framework for Monetary Analysis*. Nova York: NBER, Columbia University Press.

Friedman, Milton (1994). *Money Mischief Episodes in Monetary History.* San Diego: Harvest.

Friedman, Milton e Anna J. Schwartz (1963). *A Monetary History of the United States, 1867-1960*. Princeton: Princeton University Press.

Friedman, Milton e Anna J. Schwartz (1982). *Monetary Trends in the United States and the United Kingdom: Their Relation to Income, Prices and Interest Rates.* Chicago: Chicago University Press.

Giavazzi, Francesco e Charles Wyplosz (1985). The Zero Root Problem: A Note on the Dynamic Determination of the Stationary Equilibrium in Linear Models. *Review of Economic Studies* **52**, 353-357.

Goodfriend, Marvin (2004). Monetary Policy in the New Neoclassical Symthesis: A Primer. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly* **90**, 21-45.

Gordon, Robert J. (1974). *Milton Friedman's Monetary Framework: A Debate with His Critics*. Chicago: University of Chicago Press.

Griliches, Zvi (1996). The Discovery of the Residual: A Historical Note. *Journal of Economic Literature* **34**, 1324-1330.

Grossman, Gene M. e Elhanan Helpman (1994). Endogenous Innovation in the Theory of Growth. *Journal of Economic Perspectives* **8**, 23-44.

Hall, Robert E. (1978). Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence. *Journal of Political Economy* **86**, 971-987.

Hansen, Alvin H. (1949). *Monetary Theory and Fiscal Policy*. Nova York: McGraw-Hill.

Hansen, Gary D. (1985). Indivisible Labor and the Business Cycle. *Journal of Monetary Economics* **16**, 309-328.

Harberger, Arnold C. (1950). Currency Depreciation, Income and the Balance of Trade. *Journal of Political Economy* **58**, 47-60.

Hayashi, Fumio (1982). Tobin's Marginal *q* and Average *q*: A Neoclassical Interpretation. *Econometrica* **50**, 213-224.

Heller, Daniel e Yvan Lengwiler (2003). Payment Obligations, Reserve Requirements and the Demand for Central Bank Balances. *Journal of Monetary Economics* **50**, 419-432.

Hodrick, Robert J. e Edward C. Prescott (1997). Postwar US Business Cycles: An Empirical Investigation. *Journal of Money, Credit and Banking* **29**, 1-16.

Hotelling, Harold (1931). The Economics of Exhaustible Resources. *Journal of Political Economy* **39**, 137-175.

Inada, Ken-Ichi (1963). On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. *Review of Economic Studies* **34**, 249-280.

Jorgenson, D. W. (1963). Capital Theory and Investment Behavior. *American Ecopnomic Review*

Kirman, Alan P. (1992). Whom or What Does the Representative Individual Represent*?* *Journal of Economic Perspectives* **6**, 117-136.

Klein, Lawrence R. e Arthur S. Goldberger (1955). *An Econometric Model of the United States, 1929-1952*. Amsterdam: North-Holland.

Kouri, Penti J. K. (1976). The Exchange Rate and the Balance of Payments in the Short Run and in the Long Run: A Monetary Approach. *Scandinavian Journal of Economics* **78**, 280-304.

Kydland, Finn E. e Edward C. Prescott (1996). The Computational Experiment: An Econometric Tool. *Journal of Economic Perspectives* **10**, 87-104.

Laursen, Svend e Lloyd A. Metzler (1950). Flexible Exchange Rates and the Theory of Employment. *The Review of Economics and Statistics* **32**, 281-299.

Liviatan, Nissan (1984). Tight Money and Inflation. *Journal of Monetary Economics* **13**, 5-15.

Long, John B., Jr. e Charles I. Plosser (1983). Real Business Cycles. *Journal of Political Economy* **91**, 39-69.

Lucas, Robert E., Jr. (1987). *Models of Business Cycles*. Oxford: Basil Blackwell.

Lucas, Robert E., Jr.(2000). Inflation and Welfare. *Econometrica*

Lucas, Robert E, Jr. (2002). *Lectures on Economic Growth*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Mankiw, N. Gregory (1995). The Growth of Nations. *Brookings Papers on Economic Activity* **1**, 275-326.

Mankiw, N. Gregory. (2000). The Savers-Spenders Theory of Fiscal Policy. *American Economic Review* **90**, 120-125.

Mankiw, N. Gregory, David Romer e David N. Weil (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics* **107**, 407-37.

McCallum, Bennett T. (1981). Price Level Determinacy with an Interest Rate Policy. Rule and Rational Expectations. *Journal of Monetary Economics* **8**, 319-329.

McCallum, Bennett T. (1984). Are Bond-Financed Deficits Inflationary ? A Ricardian Analysis. *Journal of Political Economy* **92**, 123-135.

McCallum, Bennett T. e Edward Nelson (1999). An Optimizing IS-LM Specification for Monetary Policy and Business Cycle Analysis. *Journal of Money, Credit and Banking* **31**, 296-316.

McCallum, Bennett T. e Edward Nelson (2000). Monetary Policy for an Open Economy An Alternative Framework with Optimizing Agents and Sticky Prices. *Oxford Review of Economic Policy* **16**, 74-91.

Metzler, Lloyd A. (1951). Welath, Saving and the Rate of Interest. *Journal of Political Economy* **59**, 93-116.

Modigliani, Franco e Richard Brumberg (1954). Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data. In K.K. Kurihara (organizador). *Post-Keynesian Economics.* New Brunswick, N.J.: Rutgers University Press.

Modigliani, Franco e Albert Ando (1963). The Life Cycle Hypothesis of Saving: Aggregate Implications and Tests. *American Economic Review* **53**, 55-84

Modigliani, Franco (1988). The Role of International Tranfers and Life Cycle Saving in the Accumulation of Wealth. *Journal of Economic Perspectives* **2**, 15-40.

Mundell, Robert A. (1971). *Monetary Theory Inflation, Interest , and Growth in the World Economy*. Pacific Palisades, California: Goodyear Publishing Company, Inc.

Mussa, Michael (1986). Nominal Exchange rate regimes and the behavior of real Exchange Rates, Evidnce and Implications. In Karl Brunner e Allan Meltzer (organizadores), *Real Business Cycles, Real Exchange Rates, and Actual Policies.* Amsterdam: North Holland.

Muth, John F. (1961). Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica* **29**, 315-335.

Obstfeld, Maurice e Kenneth Rogoff (1983). Speculative Hyperinflation in Macroeconomic Models: Can We Rule them Out? *Journal of Political Economy* **91**, 675-687.

Obstfeld, Maurice (1990). Intertemporal Dependence, Impatience, and Dynamics. *Journal of Monetary Economics* **26**, 45-75.

Okun, Arthur M. (1962). Potential GNP: Its Measurement and Significance. In American Statistical Association *Proceedings of the Business and Economics Section,* 98-104

Pack, Howard (1994). Endogenous Growth Theory: Intellectual Appeal and Empirical Shortcomings. *Journal of Economic Perspectives* **8**, 55-72.

Patinkin, Don (1965). *Money, Interests, and Prices*. Nova York: Harper and Row.

Pearce, I. (1961). The Problem of the Balance of Payments. *International Economic Review* **2**, 1-28.

Phelps, Edmund S. (1961). The Golden Rule of Capital Accumulation: A Fable for Growthmen. *American Economic Review* **51**, 638-643.

Phelps, Edmund S. (1967). Phillips Curves, Expectations of Inflation and Optimal Unemployment Over Time. *Economica* **34**, 254-281.

Poole, William (1970). Optimal Choice of Monetary Policy Instrument in a Simple Stochastic Macro Model. *Quarterly Journal of Economics* **84**, 197-216.

Prachowny, Martin F. J. (1993). Okun's Law: Theoretical Foundations and Revised Estimates. *Review of Economics and Statistics* **75**, 331-336.

Rebelo, Sergio (2005). Real Business Cycle Models: Present and Future. *Scandinavian Journal of Economics* **107**, 217-238.

Reis, Ricardo (2007). The Analytics of Non-Neutrality in the Sidrauski Model. *Economics Letters* **94**, 129-135.

Rogoff, Kenneth (1985). The Optimal Degree of Commitment to an Intermediate Monetary Target. *Quarterly Journal of Economics* **100**, 1169-1189.

Romer, David (2000). Keynesian Macroeconomics Without the LM Curve. *Journal of Economics Perspectives* **14**, 149-169.

Romer, Paul M. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy* **98**, 71-102.

Romer, Paul. M. (1994). The Origins of Endogenous Growth. *Journal of Economic Perspectives* **8**, 3-22.

Ryder, Jr., Harl E. E Geoffrey M. Heal (1973). Optimal Growth with Intertemporally Dependent Preferences. *Review of Economic Sudies* **40**, 1-31.

Salter, W. (1959). Internal and External Balance The Role of Price and Expenditure Effects. *Economic Record* **35**, 226-238.

Samuelson, Paul A. (1939). Interaction Between the Multiplier and the Principle of Acceleration. *Review of Economics and Statistics* **21**, 75-78.

Samuelson, Paul A. (1947). *Foundations of Economic Analysis*. Nova York: Atheneum.

Samuelson, Paul A. e Robert M. Solow (1960). Analytical Aspects of Anti-Inflationary Policy, *American Economic Review*

Sargent, Thomas (1982). The End of the Four Big Inflations. In Robert H. Hall (org.), *Inflation: Causes and Effects.* Chicago: Chicago University Press.

Sargent, Thomas J. e Neil Wallace (1973). The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight. *Econometrica* **41**, 1043-1048.

Sargent, Thomas e Neil Wallace (1981). Some Unpleasant Monetarist Arithmetic. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* **5**, 1-17.

Sargent, Thomas e Neil Wallace (1987). Inflation and the Government Budget Constraint. In Razin, A. e E. Sadke (organizadores). *Economic Policy in Theory and Practice*. McMillan: Nova York.

Sidrauski, Miguel (1967). Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy. *American Economic Review* **57**, 534-544.

Slutsky, Eugen (1937). The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes. *Econometrica* **5**, 312-330.

Solow, Robert M. (1994). Perspectives on Growth Theory. *Journal of Economic Perspectives* **8**, 45-54.

Solow, Robert M. (2000). *Growth Theory an Exposition*, 2a Edição. Nova York: Oxford University Press.

Strotoz, Robert H. (1956). Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization. *Review of Economic Studies* **23**, 165-180.

Summers, Lawrence H. (1991). The Scientific Illusion in Empirical Macroeconomics. In Hylleberg, Svend e Martin Paldam (organizadores). *New Approaches to Empirical Macroeconomics*. Oxford: Blackwell Publishers.

Swan, Trevor. (1956). Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record* **32**, 334-361.

Swan, Trevor. (1960). Economic Control in a Dependent Economy. *Economic Record* **36**, 51-66.

Taylor, John B. (1979). Staggered Wage Setting in a Macro Model. *American Economic Review* **69**, 108-113.

Temin, Peter (1989). *Lessons from the Great Depression.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Theil, Henri (1971). *Principles of Econometrics*. Nova York: John Wiley.

Tinbergen, Jan (1952). *On the Theory of Economic Policy.* Amsterdam: North-Holland.

Tobin, James (1955). A Dynamic Aggregative Model. *Journal of Political Economy* **63**, 103-15.

Tobin, James (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *Review of Economic Studies* **25**, 65-86.

Tobin, James (1965). Money and Economic Growth. *Econometrica*, **33**, 14 pp.

Tobin, James (1967). The Neutrality of Money in Growth Models: A Comment. *Economica* February, 73-74.

Tobin, James (1968). Notes on Optimal Monetary Growth. *Journal of Political Economy* **76**, p. 833.

Tobin, James (1969). A General Equilibrium Approach to Monetary Theory. *Journal of Money, Credit and Banking* **1**, 15-29.

Tobin, James (1975). Keynesian Models of Recession and Depression. *American Economic Review* **65**, 195-202.

Tobin, James (1980). *Asset Accumulation and Economic Activity.* Chicago: Chicago University Press.

Tobin, James e William C. Brainard (1977). Asset Markets and the Cost of Capital. In Bela Belassa e Richard Nelson (org.), *Economic Progress, Private Values and Public Policy: Essays in Honour of William Fellner*.

Uzawa, Hirofumi (1968). Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings. In J. N. Wolfe (organizador) *Value, Capital and Growth: Papers in Honor of Sir John Hicks*. Aldine Publishing Company: Chicago.

Weil, Philippe (1989). Overlapping Families of Infinitely-Lived Agents. *Journal of Public Economics* **38**, 183-198.

Weil, Philippe (1991). Is Money Net Wealth? *International Economic Review* **37**, 37-53.

Wilson, Charles (1979). Anticipated Shocks and Exchange Rate Dynamics. *Journal of Political Economy* **87**, 639-647.

Woodford, Michael (1995). Price Level Determinacy without Control of a Monetary Aggregate. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* **43**, 1-46.

Yaari, Menahen E. (1965). Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer. *Review of Economic Studies* **32**, 137-150.

II. Clássicos

Barro, Robert J. (1974). Are Governments Bonds Net Wealth? *Journal of Political Economy* **82**, 1095-1117.

Cass, David (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *Review of Economic Studies* **32**, 233-40.

Diamond, Peter (1965). National Debt in a Neoclassical Growth Model. *American Economic Review* **55**, 1126-50.

Domar, Evsey V. (1946). Capital Expansion, Rate of Growth and Employment. *Econometrica* **14**, 137-47.

Dornbusch, Rudiger (1976). Expectations and Exchange Rate Dynamics. *Journal of Political Economy* **84**, 1161-76.

Fisher, Irving (1930). *The Theory of Interest*. Nova York: Macmillan.

Fleming, J. Marcus (1962). Domestic Financial Policies under Fixed and under Floating Exchange Rates. *International Monetary Fund Staff Papers* **9**, 369-79.

Friedman, Milton (1968). The Role of Monetary Policy. *American Economic Review* **58**, 1-17.

Harrod, Roy F. (1939). An Essay in Dynamic Theory. *Economic Journal* **49**, 14-33.

Hicks, John R. (1937). Mr. Keynes and the 'Classics': A Suggested Interpretation. *Econometrica* **5**, 147-59.

Keynes, John Maynard (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Londres: Macmillan.

Koopmans, Tjalling C. (1965). On the Concept of Optimal Economic Growth. In *The Econometric Approach to Development Planning*. Amsterdam: North-Holland.

Kydland, Finn E. e Edward C. Prescott (1982). Time to Build and Aggregate Fluctuations. *Econometrica* **50**, 1345-70.

Lucas, Robert E., Jr. (1972). Expectations and the Neutrality of Money. *Journal of Economic Theory* **4**, 103-24.

Lucas, Robert E., Jr. (1976). Econometric Policy Evaluation: A Critique. In *The Phillips Curve and the Labor Market* (organizadores: Karl Brunner & Allan H. Meltzer), 19-46. Amsterdam: North-Holland.

Lucas, Robert E., Jr. (1988). On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics* **22,** 3-42.

Modigliani, Franco (1944). Liquidity Preference and the Theory of Interest and Money. *Econometrica* **12**, 45-88.

Mundell, Robert A. (1963). Capital Mobility and Stabilization Policy under Fixed and Flexible Exchange Rates. *Canadian Journal of Economics and Political Science* **29**, 475-85.

Phillips, A. W. (1958). The Relationship between Unemployment and the Rate of Change of Money Wages in the United Kingdom, 1861-1957. *Economica* **25**, 283-99.

Ramsey, Frank R. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal* **38,** 543-59.

Romer, Paul M. (1986). Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy* **94,** 1002-37.

Samuelson, Paul A. (1958). An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. *Journal of Political Economy* **66**, 467-82.

Solow, Robert M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics* **70**, 65-94.

Solow, Robert M. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *Review of Economics and Statistics* **39**, 312-20.

Taylor, John B. (1993). Discretion versus Policy Rules in Practice. *Carnegie-Rochester Conferences Series on Public Policy* **39**, 195-214.

Wicksell, Knuck (1907). The Influence of the Rate of Interest on Prices. *Economic Journal* **17**, 213-19.

III. Livros Textos, Manuais e Coletâneas

Acemoglu, Daron (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton: Princeton University Press.

Agénor, Pierre Richard e Peter J. Montiel (1996). *Development Macroeconomics*. Princeton: Princeton University Press.

Azariadis, Costas (1993). *Intertemporal Macroeconomics.* Cambridge, Massachusetts: Blackwell.

Barro, Robert J. (org.) (1989). *Modern Business Cycle Theory.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Barro, Robert J. e Xavier Sala-I-Martin (1995). *Economic Growth*. Nova York: McGraw-Hill.

Blanchard, Olivier J. e Stanley Fischer (1989). *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Brock, W. A. e A. G. Malliaris (1989). *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*. Amsterdam: North-Holland.

Chiang, Alpha C. (1992). *Elements of Dynamic Optimization.* Nova York: McGraw-Hill.

Cooley, Thomas F. (org) (1995). *Frontiers of Business Cycle Research.* Princeton: Princeton University Press.

Claassen, Emil-Maria (1996). *Global Monetary Economics*. Oxford: Oxford University Press.

Galí, Jordi (2008). *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle, an Introduction to the New Keynesian Framework*. Princeton: Princeton University Press.

Gartner, Manfred (1993). *Macroeconomics under Flexible Exchange Rates*. New York: Harvester Wheatsheaf.

Hartley, James E. , Kevin D. Hoover e Kevin D. Salyer (org) (1998). *Real Business Cycle a Reader.* Londres: Routledge.

Havrilesky, Thomas M. (org.) (1985). *Modern Concepts in Macroeconomics*. Arlington Heights, Ill.: Harlan Davidson.

Heijdra, Ben J. e Frederick van der Ploeg (2002). *Foundations of Modern Macroeconomics*. Oxford: Oxford University Press.

Intriligator, M. D. (1971). *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Kamien, Morton I. e Nancy. L. Schwartz (1991). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Amsterdam: North-Holland.

Leonard, Daniel e Ngo Van Long (1992). *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Ljungqvist, Lars e Thomas J. Sargent (2004). *Recursive Macroeconomic Theory*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Lucas, Robert E., Jr., e Thomas J. Sargent (org.) (1981). *Rational Expectations and Econometric Practice, Vols. 1 e 2.* Minneapolis: The University of Minnesota Press.

Mankiw, N. Gregory e David Romer (orgs) (1991). *New Keynesian Economics*, Vols 1 e 2. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Miller, Preston J. (org.) (1994). *The Rational Expectations Revolution- Readings from the Frontline.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Nagatani, Keizo (1981). *Macroeconomic Dynamics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Obstfeld, Maurice e Kenneth Rogoff (1996). *Foundations of International Macroeconomics*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Ploeg, Frederick van der (1994). *The Handbook of International Economics.* Oxford: Blackwell.

Romer, David (2001). *Advanced Macroeconomics*, 2a. Edição. Nova York: McGraw-Hill.

Sargent, Thomas J. (1979), *Macroeconomic Theory*. Nova York: Academic Press.

Sehti, Suresh P. e Gerald L. Thompson (2000). *Optimal Control Theory Applications to Management Science and Economics,* 2a edição. Norwell, Ma.: Kluwer Academic Publishers

Seierstad, A. e K. Sydsaeter (1987). *Optimal Control Theory with Economic Applications.* Nova York: Elsevier.

Snowdon, Bian & Howard R. Vane (org.) (1997). *A Macroeconomic Reader*. Londres: Routledge.

Snowdon, Bian & Howard R. Vane (2005). *Modern Macroeconomics, its Origins, Development and Current State.* Cheltenhan,UK: Edward Elgar.

Stiglitz, Joseph E. e Hirofumi Uzawa (org) (1969). *Readings in the Modern Theory of Economic Growth.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Takayama, Akira (1993). *Analytical Methods in Economics*. Ann Harbor: University of Michigan Press.

Taylor, John B. e Michael Woodford (org.) (1999). *Handbook of Macroeconomics*. North-Holland: Amsterdam.

Turnovsky, Stephen J. (1995). *Methods of Macroeconomic Dynamics*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Turnovsky, Stephen J. (1997). *International Macroeconomic Dynamics*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Walsh, Carl E. (1998). *Monetary Theory and Policy*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Wickens, Michael (2008). *Macroeconomic Theory, a Dynamic General Equilibrium Approach*. Princeton: Princeton University Press.

Woodford, Michael (2003). *Interest and Prices Foundations of a Theory of Monetary Policy*. Princeton: Princeton University Press.