" INICIACIÓN TEORICO-PRÁCTICA A LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS I : CAPITALIZACIÓN Y RENTAS"

Autor: Dr. D. Roberto Gómez López
Profesor de la Universidad de Granada (Dpto. Economía Financiera y Contabilidad)
Profesor Tutor del Centro Asociado de Málaga y Ronda

Prólogo:

Nuevamente ante la finalización de este manual, me encuentro cansado por el esfuerzo de estos últimos momentos, pero ilusionado porque creo que ayudaré a muchos alumnos a tener un instrumento de estudio y aprendizaje de la materia. Llegó a ustedes ante la convicción de que estimo haber realizado un trabajo que aportará contenidos educativos que permitirán conocer mejor el mundo de la matemáticas financieras, que de habitual, tanta dificultad crea al que se adentra por primera vez al mismo, quizá porque hay que conocer su lenguaje e instrumentación, para poder entenderlo.

La razón que justifica la realización de estos manuales o trabajos, ambos frutos de la docencia que estoy desarrollando en la ***Universidad de Granada, en particular en el Departamento de Economía Financiera y Contabilidad así como en la UNED de los centros asociados de Málaga y Ronda (Departamento de Economía y Administración de Empresas),*** queda justificada por el interés como docente de dotar al alumno con el que trabajo de un elemento a través del cual se pueda desarrollar el curso académico, y por tanto el aprendizaje de la presente materia, desde una perspectiva de planteamientos teóricos que se van reforzando con desarrollos prácticos.

Tanto los contenidos teóricos, así como los ejercicios prácticos, en lo que toca principalmente a la resolución y planteamiento de los mismos, ha sido trabajado y planteado por el docente que presenta este manual, indicando en particular que la parte práctica, en algunos casos, han sido enunciados que se utilizan y se han desarrollado por el equipo de trabajo del área de matemáticas financieras al que pertenezco en los indicados departamentos. Especial mención en tal sentido, quizá por su calidad pedagógica y por el especial conocimiento de las personas que han trabajado en la realización de algunos de ellos, se determina en lo que respecta al departamento de la Universidad de Granada.

No he querido perder mis raíces docentes de la UNED, por lo que he indicado algunas referencias en donde docentes de la sede central de Madrid muestran un trabajo interesantes también y enriquecedor a estos manuales, donde se ponen a disposición del alumno diversidad de problemas con sus respectivas soluciones, así como interesantes cuestionarios, también resueltos.

Finalizadas estas precisiones, entiendo que necesarias, para poder comprender el sentido y trabajo desarrollado, me es necesario recordar algunos detalles importantes sin los cuales este material no habría llegado a tomar forma. En primer lugar nombrar a ***mi familia, en donde mis padres Manuel y Antonia, así como mis hermanos Víctor y Antonio, mi cuñada María José y mis sobrinas Maria José y Patricia Gómez López***, han sido y son permanentemente los que me apoyan en todo momento, respectando y asumiendo la gran cantidad de ausencias y aislamiento que produce el tener una actividad solitaria y constante cuyo fruto está más a favor de una causa de amor hacia la docencia, por la privación de tiempo libre y disfrute en general que se plantea en cualquiera de estas misiones, en la mayoría de los casos poco valorada por la sociedad en general.

Hay amigos y compañeros que han sido apoyos morales, sin los que el talante de hombre altruista y generoso con los demás no habría sido posible, en tal sentido tengo que nombrar a mis amigos y compañeros de los Guindos, en particular a la Escuela de Baloncesto de Málaga, en donde siempre se me ha entendido, apreciado y querido, con una especial mención, a mi amigo ***Nicolás García Chinchilla, y a Enrique Moyano Carballo***, quien con mucha paciencia y colaboración ha creado la web donde se encuentran las diversas investigaciones y publicaciones, solventando los numeroso y continuados problemas informáticos

En la parte docente, no puedo olvidar, puntualmente a mis jefes del departamento de Economía Financiera y Contabilidad que me han dado apoyo y comprensión en mi relación docente con la Universidad de Granada, especial mención he de realizar al profesor y Director del Departamento Don Antonio María López Hernández, quién desde el inicio ha apostado por mí, al permitirme asumir docencia en este departamento.

En definitiva, agradecer a todo el que me apoya y confía en mi. Gracias de corazón. Roberto.

Programa Sintético

LEYES DE CAPITALIZACIÓN

Tema 1.- Conceptos básicos

Tema 2.- Leyes financieras simples de capitalización y descuento

Tema 3.- Leyes financieras compuestas de capitalización y descuento

Ejercicios.- capitalización simple

Ejercicios.- capitalización compuesta

Ejercicios.- de ambas capitalizaciones

Relación.- primera

RENTAS FINANCIERAS

Tema 4.- Introducción al estudio de rentas

Tema 5.- Rentas constantes en capitalización compuestas

Tema 6.- Rentas variables en capitalización compuesta

Tema 7.- Rentas continuas

Ejercicios.- de rentas

Relación.- segunda

Programa analítico

Tema 1.- Conceptos básicos

1.1. Capital financiero
1.2. Operaciones financieras
1.3. Leyes financieras: propiedades
1.4. Sistema financieros
1.5. Equivalencia entre capitales financieros
1.6. Operaciones con capitales financieros
1.7. Factores financieros, réditos y tantos.
1.8. Reserva matemática en una operación financiera
1.9. Características comerciales, tanto efectivos y TAE en una operación financiera

Tema 2.- Leyes financieras simples de capitalización y descuento

2.1. Capitalización simple o tanto vencido
2.2. Descuento simple racional
2.3. Descuento simple comercial
2.4. Capitalización simple a tanto anticipado
2.5. Comparación entre las distintas leyes
2.6. Cambio en las unidades de medida: tantos equivalentes
2.7. Operaciones que se suelen realizar utilizando las leyes simples

Tema 3.- Leyes financieras compuestas de capitalización y descuento

3.1. Capitalización compuesta a tanto vencido
3.2. Descuento compuesto a tanto por vencido
3.3. Capitalización y descuento compuesto a tanto anticipado
3.4. Comparación entre las leyes simples y las leyes compuestas
3.5. Cambio en las unidades de medida: tantos equivalentes
3.6. Tanto nominal y tanto efectivo
3.7. Capitalización y descuento continuos
3.8. Operaciones que se suelen realizar utilizando las leyes compuestas

Tema 4.- Introducción al estudio de rentas

4.1. Definición y clasificación de rentas
4.2. Valoración de rentas con las leyes simples
4.3. Valoración de rentas con las leyes compuestas

TEMA 1: *CONCEPTOS BÁSICOS*

1.0. Aspectos Preliminares

Cuando se dispone de una cantidad de dinero (capital) se puede destinar, o bien a gastarlo –satisfaciendo alguna necesidad–, o bien a invertirlo para recuperarlo en un futuro más o menos próximo, según se acuerde.

De la misma manera que estamos dispuestos a gastarlo para satisfacer una necesidad, estaremos dispuestos a invertir siempre y cuando la compensación económica nos resulte suficiente. En este sentido el principio básico de la preferencia de liquidez establece que a igualdad de cantidad los bienes más cercanos en el tiempo son preferidos a los disponibles en momentos más lejanos. La razón es el sacrificio del consumo.

Este aprecio de la liquidez es subjetivo pero el mercado de dinero le asigna un valor objetivo fijando un precio por la financiación que se llama interés. El interés se puede definir como la retribución por el aplazamiento en el tiempo del consumo, esto es, el precio por el alquiler o uso del dinero durante un período de tiempo.

Esta compensación económica se exige, entre otras, por tres razones básicas:

- Por el riesgo que se asume.
- Por la falta de disponibilidad que supone desprenderse del capital durante un tiempo.
- Por la depreciación del valor del dinero en el tiempo.

La cuantificación de esa compensación económica, de los intereses, depende de tres variables, a saber:

- La cuantía del capital invertido,
- El tiempo que dura la operación, y
- El tanto de interés al que se acuerda la operación.

Por otra parte, cuando se habla de capital financiero nos referimos a una cuantía (C) de unidades monetarias asociada a un momento determinado de tiempo (n).

Finalmente, en una operación financiera no tiene sentido hablar de capitales iguales (aquellos en los que coinciden cuantías y vencimientos), sino que siempre estaremos refiriéndonos a capitales equivalentes, se dice que hay equivalencia entre dos capitales cuando a su propietario le resulta indiferente una situación u otra. Es decir, si a usted le resulta indiferente cobrar hoy 1.000 euros a cobrar 1.050 euros dentro de un año, entonces diremos que ambos capitales son equivalentes.

Para que una operación financiera se realice es necesario que a los sujetos intervinientes las cuantías que dan y reciben les resulten equivalentes. Es necesario que deudor y acreedor se pongan de acuerdo en cuantificar los capitales de los que se parte y a los que finalmente se llega. Esto implica elegir un método matemático que permita dicha sustitución: una ley financiera. La ley financiera se define como un modelo matemático (una fórmula) para cuantificar los intereses por el aplazamiento y/o anticipación de un capital en el tiempo.

Conociendo las diferentes leyes financieras que existen y cómo funcionan se podrán sustituir unos capitales por otros, pudiéndose formalizar las diferentes operaciones financieras.

1.1. CAPITAL FINANCIERO.

El capital financiero es la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad, vencimiento o entrega.

En el mercado financiero se negocian operaciones, consistentes en un intercambio de:

- Cuantías
- Vencimientos

Representación: ***(C , t)***

C: Cuantía de k en u.m $\begin{cases} +\text{: Cobro} \\ -\text{: Pago (Reintegro)} \end{cases}$

***n*:** Momento del vencimiento $\begin{cases} +\text{ : Vto. Posterior} \\ -\text{ : Vto. Anterior} \end{cases}$

1.2. OPERACIONES FINANCIERAS.

1.2.1. Concepto.

Se entiende por operación financiera la sustitución de uno o más capitales por otro u otros equivalentes en distintos momentos de tiempo, mediante la aplicación de una ley financiera.

En definitiva, cualquier operación financiera se reduce a un conjunto de flujos de caja (cobros y pagos) de signo opuesto y distintas cuantías que se suceden en el tiempo. Así, por ejemplo, la concesión de un préstamo por parte de una entidad bancaria a un cliente supone para este último un cobro inicial (el importe del préstamo) y unos pagos periódicos (las cuotas) durante el tiempo que dure la operación. Por parte del banco, la operación implica un pago inicial único y unos cobros periódicos.

La realización de una operación financiera implica, que se cumplan tres puntos:

1. **Sustitución de capitales.** Ha de existir un intercambio de un(os) capital(es) por otro(s).
2. **Equivalencia.** Los capitales han de ser equivalentes, es decir, debe resultar de la aplicación de una ley financiera.
3. **Aplicación de una ley financiera.** Debe existir acuerdo sobre la forma de determinar el importe de todos y cada uno de los capitales que compongan la operación, resultado de la consideración de los intereses generados.

1.2.2. Elementos.

1.2.2.1. Personales.

En una operación financiera básica interviene un sujeto (acreedor) que pone a disposición de otra (deudor) uno o más capitales y que posteriormente recuperará, incrementados en el importe de los intereses.

La operación concluirá cuando el deudor termine de entregar al acreedor el capital (más los intereses); a esta actuación por ambas partes se le denomina la contraprestación de la operación financiera.

En toda operación financiera las cantidades entregadas y recibidas por cada una de las partes no coinciden. El aplazamiento (o adelantamiento) de un capital en el tiempo supone la producción de intereses que formarán parte de la operación y que habrá que considerar y cuantificar. Por tanto, prestación y contraprestación nunca son aritméticamente iguales. No obstante, habrá una ley financiera que haga que resulten financieramente equivalentes, es decir, que si valorásemos prestación y contraprestación en el mismo momento, con la misma ley y con el mismo tanto, entonces sí se produciría la igualdad numérica entre ambas.

Acreedor: Sujeto que entrega un capital (K) financiero: *Prestación.*
Deudor: Sujeto que recibe el capital (K) financiero y que lo va a devolver en otro momento del tiempo: *Contraprestación.*

1.2.2.2. Temporales.

Al momento de tiempo donde comienza la prestación de la operación financiera se le denomina origen de la operación financiera. Donde concluye la contraprestación de la operación financiera se le llama final de la operación financiera. Al intervalo de tiempo que transcurre entre ambas fechas se le denomina duración de la operación financiera, durante el cual se generan los intereses.

Origen: Vencimiento del primer capital financiero.
Final: Vencimiento del capital financiero.
Duración: Tiempo que media entre origen y final.

Si comparamos:

1	$C_1 = C_2$	$t_1 < t_2$	Se prefiere (C_1 , t_1)
2	$C_1 < C_2$	$t_1 = t_2$	Se prefiere (C_2 , t_2)
3	$C_1 = C_2$	$t_1 = t_2$	Indiferente
4	$C_1 \neq C_2$	$t_1 \neq t_2$	Coordinar al concepto de Ley fr^a: Hace posible referir al mismo momento.

1.2.2.3. Objetivos.

La realización de la operación financiera exige un acuerdo sobre aspectos tales como: la cuantía del capital de partida, la ley financiera que se va a emplear y, finalmente, el tanto de interés unitario acordado.

1.2.3. Clasificación.

1. Según la duración:

- **A corto plazo:** la duración de la operación no supera el año.
- **A largo plazo:** aquellas con una duración superior al año.

2. Según la ley financiera que opera:

Según la generación de intereses:
- **En régimen de simple:** los intereses generados en el pasado no se acumulan y, por tanto, no generan, a su vez, intereses en el futuro.
- **En régimen de compuesta:** los intereses generados en el pasado sí se acumulan al capital de partida y generan, a su vez, intereses en el futuro.

Según el sentido en el que se aplica la ley financiera:
- **De capitalización:** sustituye un capital presente por otro capital futuro.
- **De actualización o descuento:** sustituye un capital futuro por otro capital presente.
- **Mixtas.**

3. Según el número de capitales de que consta:

- **Simples:** constan de un solo capital en la prestación y en la contraprestación.
- **Complejas (o compuestas):** cuando constan de más de un capital en la prestación y/o en la contraprestación.

4. Según la naturaleza de los capitales:

- **Ciertas:** cuando tenemos certeza de las cuantías a entregar y recibir durante la duración de la operación. Así mismo, conocemos que las mismas se mantendrán constantes o si, en cambio, muestran una variabilidad es conocida de antemano. Ejemplo: préstamos.
- **Aleatorias:** tenemos conocimiento de que las cuantías cambiarán a lo largo de la duración de la operación financiera. Así, puede cambiar el tipo de interés aplicable, entre otras variables. Un ejemplo que nos puede ayudar a comprender mejor la situación es el de los mercados bursátiles cambiantes en la que la volatilidad tiende a cambiar.

5. Según el sentido de la operación:

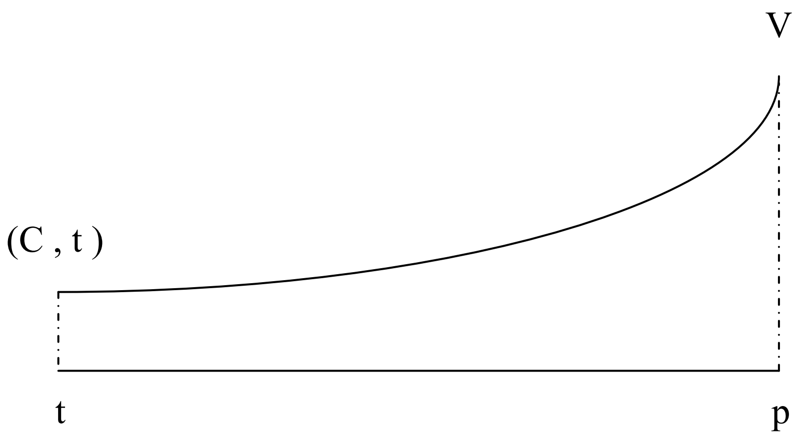
- **Unilateral.**
- **Recíproca.**

1. Naturaleza de los capitales.
   - ***Ciertas.***
   - ***Aleatorias.***
2. Duración de operación
   - ***c/p :*** < 1 año
   - ***l/p :*** > 1 año
3. Nº capitales
   - ***Simples:*** prestación de un capital.
   - ***Compuesta:*** Prestación de varios capitales.
4. Sentido de la operación
   - ***Unilateral.***
   - ***Recíproca.***
5. Según la Ley que interviene
   - ***Capitalización.***
   - ***Descuento.***
   - ***Mixtas.***

1.3. Leyes financieras.

Es una función F a través de la cual, dado un capital financiero (C , t) se puede calcular su capital financiero equivalente en un momento del tiempo "p" llamado punto de aplicación o de referencia.

$$\boxed{V = F(C, t ; p)}$$



Propiedades:

1. **Positividad:** La ley debe ser siempre positiva:
$$F(1, t ; p) = F(t ; p) > 0$$

2. **Subestimación:** $\begin{cases} V > C \text{ si } p > t & \text{Ley de capitalización.} \\ V < C \text{ si } p < t & \text{Ley de descuento.} \end{cases}$

3. **Proporcionalidad:** $F(C, t ; p) = C \cdot F(1, t ; p) = C \cdot F(t ; p)$

4. **Continuidad:** Para todo valor de "t" , existe un valor de C_t

5. **Creciente:** con respecto al punto "p" y decreciente al "t".

Ejemplo 1:

Dada una función $G(t,p)=1+K(p-t)$

1. *Positividad: $G(t,p)>0$; $t<p$; $(p-t)>0$*
   $K>0$
2. *Subestimación : $V>C$; $G(t,p)>1$ $(p-t)>0$*
   $G(t,p)=1+K(p-t)$ si $k>0$ $G(t,p)>1$
2. *Proporcionalidad : $G(c,t,p)= C\, G(1,t,p)= C\, G(t,p)$ $C=1$*
3. *Continuidad : para todo valor que damos a t existe un referente denominado C_t*
4. *Creciente/decreciente: $V \rightarrow p$*
   $C \rightarrow t$

Ejemplo 2:

Dada una función G(t,p)= $(1\oplus i)^{p-t}$

1. *Positividad G(t,p) >0*
   i>0
   p>t $\quad (1+i)^{p-t} > o$
2. *Subestimación V>C* $\Rightarrow G(t,p) > 1$
   p>t
   $(1\oplus i)^{p-t} > 1$
3. *Proporcionalidad G(c,t,p)= C G(1,t,p) = C G(t,p)*$\Rightarrow C = 1$
4. *Continuidad t*$\Rightarrow c_t$
5. *Creciente/decreciente*

Ejemplo 3:

Dada la siguiente ley financiera $\Rightarrow 1+(p-t)i$ *Dado dos capitales distintos, analizar su equivalencia financiera utilizando la ley.*

$(C_1,t_1) \quad (C_2,t_2)$

$C_1[1+(p-t)i] = C_2[1+(p-t_2)i]$

$$C_2 = C_1 \frac{1+(p-t_1)i}{1+(p-t_2)i}$$

Dados los siguientes valores simplificar la función al máximo:

$t_1 = 1 \quad t_2 = 4 \quad p = 5$

$$C_2 = C_1 \frac{1+(5-1)i}{1+(5-3)i} = C_1 \frac{1+4i}{1+2i}$$

Calcular C_1

$$C_2 = C_1 \frac{1+(p-t_1)i}{1+(p-t_2)i}; \quad C_1 = C_2 \frac{1+2i}{1+4i}$$

1.4. Sistemas financieros.

1.5. Equivalencias entre capitales financieros.

Dados dos capitales (C_1 , t_1) y (C_2 , t_2) cuyas proyecciones son (V_1, p) y (V_2 , p) respectivamente, se dirá que lo capitales (C_1, t_1) y (C_2 , t_2) son <u>*equivalentes y por tanto ínter cambiantes*</u> si $V_1 = V_2$, y <u>*no equivalentes*</u> si $V_1 \neq V_2$.

1.6. Operaciones con capitales financieros.

Es posible sumar capitales financieros. El caso más sencillo sería el de dos capitales, con el mismo vencimiento donde se podría constatar que su suma sería el valor aritmético de sus cuantías cuando $t_1 = t_2$

$$(C_1, t_1) + (C_2, t_2) = (C_1 + C_2, t_1)$$
$$(C_1, t_1) + (C_2, t_1) = (C_1 + C_2, t_1)$$

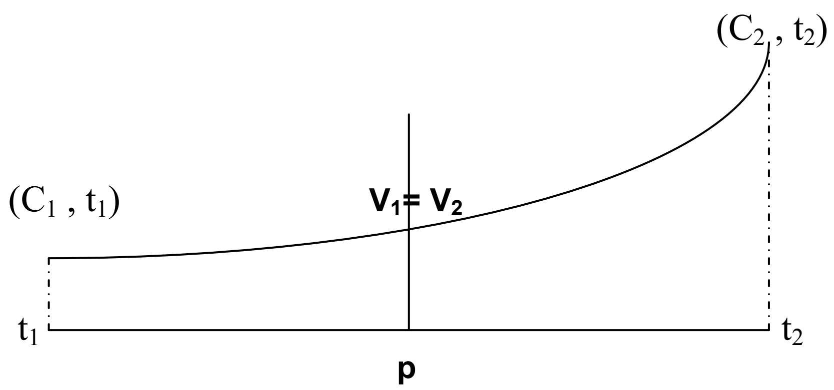
En la situación en la que los vencimientos son distintos el criterio de proyección permitirá homogeneizar vencimientos en un punto de proyección p y por tanto, podamos, analíticamente, sumar así:

$$(C_1, t_1) + (C_2, t_2) = (V_1 + V_2, p)$$

1.7. Factores financieros, réditos y tantos.

El factor financiero es un instrumento a través del cual, dado un capital financiero en t_1, podremos calcular su capital financiero equivalente en t_2, aún cuando las magnitudes p y t_2 son distintas ($p \neq t_2$).

Gráficamente la expresión que se está determinando será de la siguiente manera:



Suponemos : $(C_1, t_1) \prec\succ (C_2, t_2) \Rightarrow V_1 = V_2$

A tenor de lo indicado van a suceder dos posibilidades o situaciones analíticas que son:

1. Conocido el capital (C_1 , t_1) , ¿Cómo calcularíamos (C_2 , t_2) ?

(C_1 , t_1) (C_2 , t_2) $\Rightarrow$ $V_1 = V_2$

$C_1 \cdot F(1, t_1; p) = C_2 \cdot F(1, t_2; p)$

$C_1 \cdot F(t_1; p) = C_2 \cdot F(t_2; p)$

$F(t_1,t_2;p) = \boxed{\dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{F(t_1,p)}{F(t_2,p)}}$: factor frª . *desplazamiento a la derecha*

Si se trabaja con la ley de capitalización:

$$\boxed{u(t_1,t_2;p) = \frac{\angle(t_1,p)}{\angle(t_2,p)} = \frac{C_2}{C_1}}$$

Si se trabaja con la ley de descuento:

$$\boxed{u(t_1,t_2;p) = \frac{A(t_1,p)}{A(t_2,p)}}$$

2. Conocido (C_2, t_2), ¿Cómo calcularíamos su equivalente en t_1?

$$C_1 \cdot F(t_1, p) = C_2 \cdot F(t_2, p)$$

$$C_1 = C_2 \cdot \frac{F(t_2,p)}{F(t_1,p)}$$

$\boxed{\int^*(t_1,t_2,p) = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{F(t_2,p)}{F(t_1,p)}}$: factor frª *desplazamiento a la izquierda*

Si se trabaja con ***factor de contracapitalización:***

$$\boxed{u^*(t_1,t_2;p) = \frac{\angle(t_1,p)}{\angle(t_2,p)} = \frac{C_1}{C_2}}$$

Si se trabaja con la ***ley de descuento:***

$$\upsilon(t_1,t_2;p)=\frac{A(t_1,p)}{A(t_2,p)}$$

Matemáticamente , el ***"rédito" de capitalización*** se define como:

$$i(t_1,t_2,p)=u(t_1,t_2,p)-1 \qquad \Rightarrow \frac{C_2}{C_1}-1=\frac{C_2-C_1}{C_1}=\frac{I}{C_1}$$

Se entiende por rédito (r) el rendimiento generado por un capital. Se puede expresar en tanto por cien (%), o en tanto por uno. Si en el momento t_1 disponemos de un capital C_1 y éste se convierte en un capital C_2 en un determinado momento t_2, el rédito de la operación será:

$$\Rightarrow \frac{C_2}{C_1}-1=\frac{C_2-C_1}{C_1}=\frac{I}{C_1}$$

Sin embargo, aunque se consideran las cuantías de los capitales inicial y final, no se tiene en cuenta el aspecto temporal, es decir, en cuánto tiempo se ha generado ese rendimiento. Surge la necesidad de una medida que tenga en cuenta el tiempo: el tanto de interés (i).

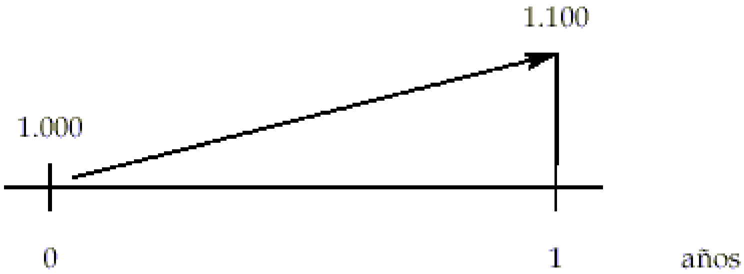
Se define el tipo de interés (i) como el rédito por unidad de tiempo, es decir:

$$i=\frac{r}{t_2-t_1}=\frac{\frac{C_2-C_1}{C_1}}{t_2-t_1}$$

Rédito y tanto coincidirán cuando el intervalo de tiempo es la unidad.

Ejemplo 4:

Un capital de 1.000 euros se sustituye hoy por otro de 1.100 disponible dentro de un año. ¿Cuál es el rédito de la operación? ¿Y el tanto de interés anual?



$$Rédito = r = \frac{1.100 - 1.000}{1.000} = 0'1 = 10\%$$

$$Tipo\ de\ in = i = \frac{\frac{1.100 - 1.000}{1.000}}{1 - 0} = 0'1 = 10\%$$

Pero si la operación dura 2 *años* :

$$Rédito = r = \frac{1.100 - 1.000}{1.000} = 0'1 = 10\%$$

$$Tipo\ de\ in = i = \frac{\frac{1.100 - 1.000}{1.000}}{2 - 0} = 0'05 = 5\%$$

Por lo tanto, el rédito permanece constante ante variaciones del horizonte temporal, no ocurriendo lo mismo con el tipo de interés que es, permaneciendo invariable el resto de elementos, inversamente proporcional al plazo de la operación.

El ***tanto de capitalización*** es:

$$p(t_1, t_2, p) = \frac{i(t_1, t_2, p)}{t_2 - t_1} = \frac{I}{C_1 \cdot (t_2 - t_1)} \begin{cases} \frac{I}{C_1}(t_2 - t_1) \\ \frac{I}{C_1(t_2 - t_1)} \end{cases}$$

Si el tanto se refiere a un instante del tiempo, aparece el concepto de **"tanto instantáneo",** definido como:

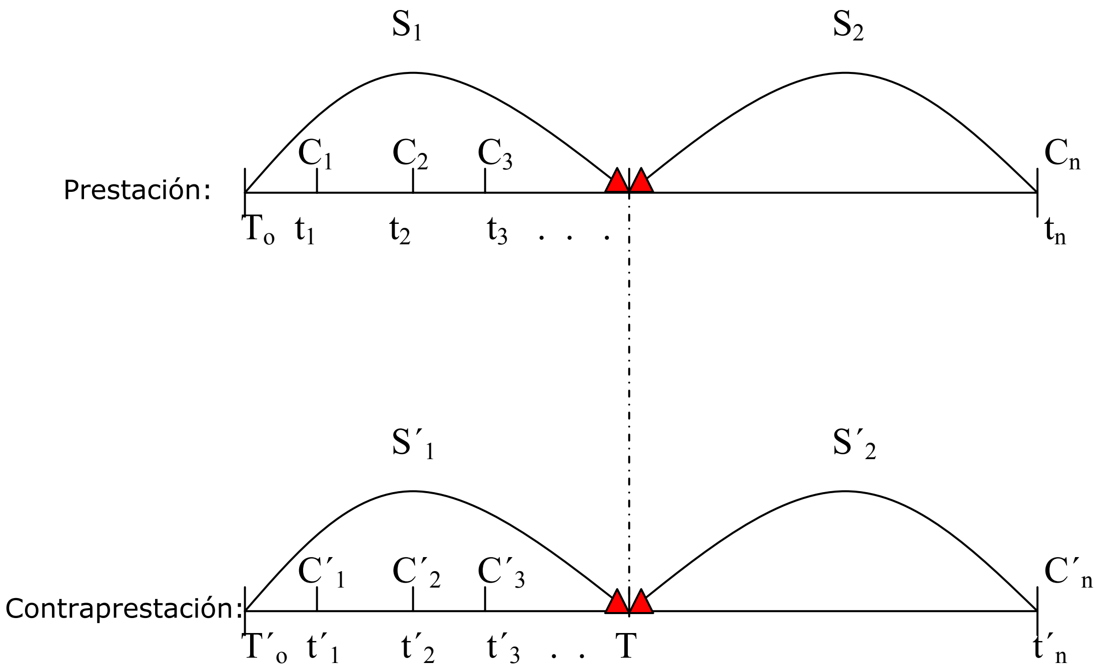
$$\lim_{t_2 - t_1} p(t_1, t_2, p) = i \quad \underline{\text{precio de una u.m. en un momento concreto de tiempo}}$$

1.8. Reserva matemática en una operación financiera.

En cualquier operación financiera se puede plantear su cancelación anticipadamente, hecho que ocurre en la práctica diaria. La cancelación anticipada consiste en saldar la deuda pendiente de la operación por el deudor en un momento T anterior al final de la operación y posterior al origen de la misma.

El saldo de una operación en T que indica el valor de la cancelación nos lo da el cálculo de la reserva matemática en ese momento T. Unas veces este saldo responde al hecho de finalizar la operación y otras veces para renegociar la operación bajo nuevas condiciones.

Para su determinación matemática, supongamos la siguiente operación financiera.



Vamos a analizar el estado de la operación en este punto.

Como en toda operación financiera en la que intervienen dos sujetos económicos, la suma financiera(S) de los capitales que el primer sujeto entrega al segundo debe ser igual a la suma financiera (S´) de los capitales que el segundo le devuelve al primero.

Analíticamente se podrá representar de la siguiente forma:

$$S = S'$$
$$S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2$$

$$\boxed{\sum_{i=1} C_I \cdot \frac{F(t_i, p)}{F(T, p)}} = \boxed{\sum_{k=1} C'_k \cdot \frac{F(t'_k, p)}{F(T, p)}}$$

Método retrospectivo se basa en el estudio de los compromisos pasados

Método prospectivo se basa en el estudio de los compromisos futuros.

$$\frac{S_1 - S'_1}{1} = \frac{S'_2 - S_2}{2} = R_T \quad \Longrightarrow \quad S_1 - S'_1 = S'_2 - S_2 = R_T$$

El diferencial de cada una de las operaciones determinará el valor de las reservas en T.

Existen distintos métodos de cálculo:

- **<u>Método retrosprectivo:</u>** (S_1-S'_1), se basa en el estudio de los compromisos que ya han sucedido o pasado.
- **<u>Método prosprectivo:</u>** (S_2-S'_2), se basa en el estudio de los compromisos futuros.
- **<u>Método recurrente:</u>** se determina la reserva en momentos distintos.

Reserva por la derecha $R_T^{+} \Rightarrow [t_1, T];]T_1, t'_m]$

Reserva por la izquierda $R_T^{-} \Rightarrow [t_1, T[; [T, t'_n]$

Interpretaciones atendiendo a la Reserva R_t^{+} si fuese + y por tanto:

a) Si $R_\gamma > 0 \to S_1 - S'_1 > 0 \to S_1 > S'_1$:**<u>Reserva acreedora</u>.** Esta desigualdad implica que el primer sujeto financieramente ha entregado más capitales que el segundo, luego en caso de cancelación debe ser el segundo sujeto quien entregue al primero el valor de la diferencia , esto es el valor de la reserva.

b) Si $R_\gamma < 0 \rightarrow S_1 - S'_1 < 0 \rightarrow S_1 < S'_1$: **Reserva deudora.** Aquí el deudor hasta T ha devuelto más capital que el acreedor le ha entregado. En caso de cancelación anticipada será, por tanto, el acreedor quien entregue al deudor el valor de la reserva en valor absoluto.

c) Si $R_\gamma = 0$: La **operación** esta **saldada**.

1.9. Características comerciales, tantos efectivos y TAE en una operación financiera.

Características complementarias o adicionales a al operación financiera en sí, que modifican sustancialmente el conjunto de capitales a entregar o recibir, alternando el equilibrio de la operación.

Si altera el precio de la operación (prestación-contraprestación) al conjunto de capitales de la prestación y de la contraprestación una vez incorporadas dichas características comerciales, se les denomina prestación real y contraprestación real.

Tanto efectivo real: valor que iguala la prestación real de la contraprestación real i_e.

TAE: el cálculo del coste de una operación financiera realizada entre particulares puede realizarse por cualquier procedimiento o acuerdo que los interesados consideren oportuno. Pero cuando una de las partes que intervienen es una entidad de crédito, en este caso que existe una regulación específica establecida por el Banco de España.El Banco de España ha regulado el cálculo de la TAE (Tasa Anual Equivalente).La tasa anual equivalente queda regulada por el Banco de España y en función de su valoración indicar que este valor no coincide casi nunca con el verdadero coste o rentabilidad de la operación.

Por lo tanto, como norma general , para la determinación de la TAE no se incluyen las características que afectan a terceras personas (no se tiene en cuenta las características unilaterales). No obstante, aún existiendo sólo características bilaterales $i_e \neq$ TAE .

Características comerciales

En las operaciones financieras, en la práctica cotidiana, surgen ciertas características complementarias o adicionales a la operación en sí, que modifican sustancialmente el conjunto de capitales a entregar o recibir, alterando el equilibrio de la operación, dado por la ecuación:

Prestación ⇔ Contraprestación

A estas condiciones o características complementarias se las denomina características comerciales y al conjunto de capitales de la prestación y de la contraprestación una vez incorporadas dichas características se las denomina ***prestación real*** y ***contraprestación real.***

Hablaremos de operaciones pura como aquella en la que no se consideran las características complementarias, esto prácticamente sólo ocurre en la teoría, y operación con características comerciales cuando éstas se incorporan a la operación.

Las características comerciales se pueden clasificar en dos grupos:

- Características bilaterales o recíprocas.
- Características unilaterales.

Características comerciales bilaterales

Son aquellas que afectan por igual tanto al sujeto de la prestación como al de la contraprestación. Así pues, si el sujeto de la prestación tiene un gasto inicial, este repercutirá directamente sobre el sujeto de la contraprestación. Esto es, la prestación real entrega por el prestamista coincide con la recibida por el prestatario u viceversa.

Por tanto, a mayores gastos para el sujeto de la prestación, mayores ingresos para el de la contraprestación. Se puede decir que es un juego de suma nula: todo lo que el primero gana lo pierde el segundo.

Entre las características comerciales bilaterales se pueden destacar las que modifican la cuantía de los capitales como bonificaciones, primeras, lotes, recargos, etc.

Características comerciales unilaterales

Estas características afectan a uno de los dos sujetos que intervienen en la operación modificando las cuantías o vencimientos.

Estos gastos complementarios o suplidos surgen generalmente por la aparición de una tercera persona en la operación, ajena, en un principio, ésta (por ejemplo: gastos notariales, impuestos surgido de la operación, etc.).

Dado que el aumento de pagos que realiza un sujeto no se traduce en un incremento de cuantía a recibir por el segundo sujeto, surge la necesidad de distinguir entre prestación real y contraprestación real tanto para el prestamista (acreedor) como para el prestatario (deudor).

Entre los gastos suplidos, los más habituales son:

- *Gastos iniciales,* o gastos que surgen en el momento en el que se pacta la operación, o sea, en le origen. Así pues, están los impuestos por transmisiones patrimoniales y actos jurídicos documentados (timbre), gastos notariales, gastos administrativos, etc. Por G^a_i y G^d_i representamos los gastos iniciales del acreedor y deudor, representativamente.
- *Gastos intermedios o periodos,* que son los que aparecen durante la operación como, por ejemplo, gastos de administración, correo, etc. Éstos los representaremos por G^a_{Pj} y G^d_{Pj} , según sean a cargo del acreedor o del deudor en el momento t_j.

Características Comerciales: Tantos Efectivos y TAE

- **Unilaterales:** afecta a una sola de las partes y tercera persona.
- **Bilateral:** afecta a las dos partes.

Características comerciales en los prestamos:

1. *Gastos a cargo del prestatario:*

- Comisión de apertura.
- Comisión de estudio

2. *Suplidos:*

- Corretaje (o notario)→(registro)→(Seguros)→(Tasaciones)
- Impuestos (Impuesto sobre transmisiones patrimoniales y actos jurídicos documentados)

- Otros gastos iniciales (Gestoría...)
- Subvenciones.

3. *Fiscalidad:*

- Gastos e intereses, son deducibles para la empresa → ahorro fiscal.
- Gastos no suplidos e intereses los considera como ingreso gravable fiscalmente la entidad.
- Hipotecarios para adquisición de viviendas.

→ Conste para el prestatario: (i_p). coste, pasivo.
→ Rentabilidad para el prestamista. (i_a), Rendimiento, Actividad.
→ TAE → normas del Banco de España: sólo se deben incluir las comisiones que, por diferentes conceptos, pueda percibir la entidad (no los gastos suplidos).
  - No las subvenciones recibida por la entidad
  - Variables

4. *Las características comerciales,* lo mismo que las restantes condiciones, pueden ser libremente acordadas por las partes, existen ciertas normas establecidas en la Circular del Banco de España (CBE)[4] nº 8/1990, 7 Sep.

TEMA 2: *LEYES FINANCIERAS SIMPLES DE CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO*

2.0. Introducción.

Las operaciones en régimen de simple se caracterizan porque los intereses a medida que se van generando no se acumulan y no generan intereses en períodos siguientes (no son productivos). De esta forma los intereses que se producen en cada período se calculan siempre sobre el mismo capital –el inicial–, al tipo de interés vigente en cada período.

Este régimen financiero es propio de operaciones a corto plazo (menos de un año).

Operación financiera cuyo objeto es la sustitución de un capital presente por otro equivalente con vencimiento posterior, mediante la aplicación de la ley financiera en régimen de simple.

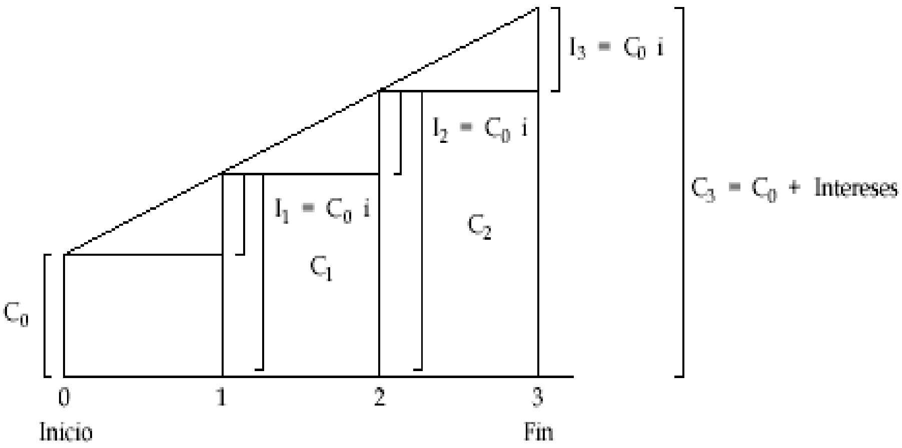
Partiendo de un capital (C_0) del que se dispone inicialmente –capital inicial–, se trata de determinar la cuantía final (C_n) que se recuperará en el futuro sabiendo las condiciones en las que la operación se contrata (tiempo –n– y tipo de interés –i–).

Este capital final o montante se irá formando por la acumulación al capital inicial de los intereses que genera la operación periódicamente y que, al no disponerse de ellos hasta el final de la operación, se añaden finalmente al capital inicial.

Los intereses no son productivos, lo que significa que:

- A medida que se generan no se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses en el futuro y, por tanto
- Los intereses de cualquier período siempre los genera el capital inicial, al tanto de interés vigente en dicho período.

Gráficamente para una operación de tres períodos:



Demostraciones:

PERIODOS	PRINCIPIO C_0	INTERÉS ANUAL	FINAL
1	C_0	$C_0 \cdot i$	$C_0 + C_0 \cdot = C_0(1+i)$
2	$C_0(1+i)$	$C_0 \cdot i$	$C_0(1+i) + C_0 \cdot i = C_0(1+2i)$
3	$C_0(1+2i)$	$C_0 \cdot i$	$C_0(1+2i) + C_0 \cdot i = C_0(1+3i)$
n	$C_0(1+(t-1)i)$		$C_0(1+ti)$

$$C_n = C_0(1+ni)$$

El capital al final de cada período es el resultado de añadir al capital existente al inicio del mismo los intereses generados durante dicho período. De esta forma, la evolución del montante conseguido en cada momento es el siguiente:

Momento 0: C0

Momento 1: C1 = C0 + I1 = C0 + C0 i = C0 x (1 + i)

Momento 2: C2 = C0 + I1 + I2 = C0 + C0 i + C0 i = C0 x (1 + 2 i)

Momento 3: C3 = C0 + I1 + I2 + I3 = C0 + C0 i + C0 i + C0 i = C0 x (1 + 3 i)

…

Momento n: Cn = C0 + I1 + I2 + … + In = C0 + C0 i + … + C0 i = C0+C0xnxi

$$C_n = C_0(1+ni)$$

Expresión aplicable cuando el tipo de interés de la operación se mantiene constante todos los períodos.

A partir de la expresión anterior (denominada fórmula fundamental de la capitalización simple) no solamente se pueden calcular montantes sino que, conocidos tres datos cualesquiera, se podría despejar el cuarto restante.

Finalmente, hay que tener en cuenta que «n» lo que indica es el número de veces que se han generado (y acumulado) intereses al capital inicial, por tanto, esa variable siempre ha de estar en la misma unidad de tiempo que el tipo de interés (no importando cuál sea).

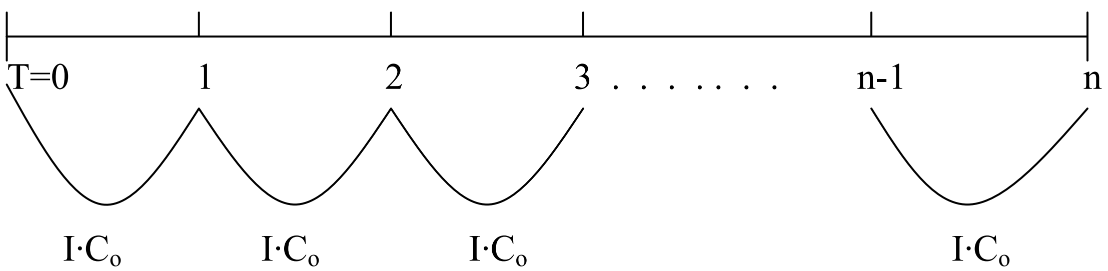
2.1. Capitalización simple a tanto vencido.

Ley financiera: criterio de comparación, permite calcular capitales equivalentes.
Capitalización: cálculo de un capital equivalente en un tiempo posterior.
Simple: los intereses no son acumulativos, es decir, no se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses.

A tanto vencido: pago del precio (i) al final de la operación.

Supongamos que se invierte un capital inicial Co en régimen de capitalización simple o tanto anual unitario i, durante "n" periodos anuales. Deseamos, calcular el valor final Cn al cabo de esos periodos.

Tal operación queda determinada en el gráfico temporal que indicamos:



$$\boxed{C_n = C_o\,(1 + I \cdot n)}$$

$$C_o(1+ni)$$

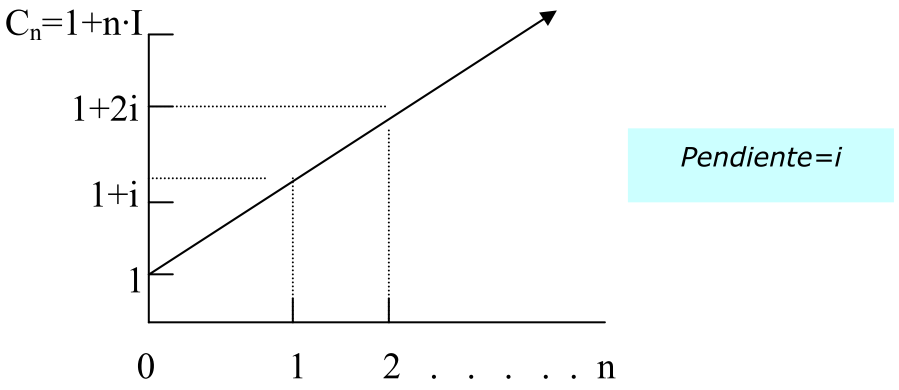
Ejemplo 5:

Dados dos capitales señalar $(C_0, 0) \leftrightarrow (C_n, n)$*, cuya representación gráfica será de la siguiente forma:*

$$\Rightarrow C_n = C_0(1+ni)$$

Suponemos

$$C_0 = 1 \Rightarrow f(n) = 1 + ni$$
$$si\ n = 0 \Rightarrow f(n) = 1 + 0 \cdot i = 1$$
$$si\ n = 1 \Rightarrow f(n) = 1 + 1 \cdot i = 1 \cdot i$$
$$si\ n = 2 \Rightarrow f(n) = 1 + 2 \cdot i$$



Intereses totales de la operación : $I = C_n - C_o$

$I = C_o(1+i \cdot n) - C_o$

$\mathbf{I = C_o \cdot i \cdot n}$

Rédito: I / C_o

Tanto: $I / C_o\,(t_2 - t_1)$

La ley de la capitalización simple o tanto vencido, como todas las leyes simples, se utiliza para operaciones a corto plazo.

Calculo del capital inicial

Partiendo de la fórmula de cálculo del capital final o montante y conocidos éste, la duración de la operación y el tanto de interés, bastará con despejar de la misma:

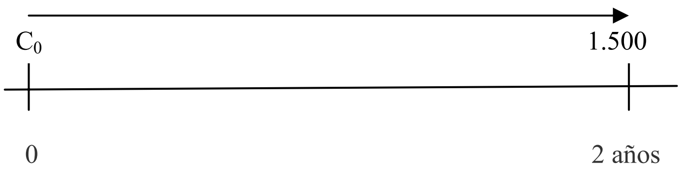
$$C_n = C_0 \times (1 + n \times i)$$

despejando C0 resulta:

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i}$$

Ejemplo 6:

¿Cuánto deberé invertir hoy si quiero disponer dentro de 2 años de 1.500 euros para comprarme un coche, si me aseguran un 6% de interés anual para ese plazo?



$$C_0 = \frac{1.500}{1 + 2 \cdot 0'06} = 1.339'29\,€$$

Cálculo del tipo de interés.

Si se conocen el resto de elementos de la operación: capital inicial, capital final y duración, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización simple y despejar la variable desconocida.

$$C_n = C_0 \times (1 + n \times i)$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

Pasar el C0 al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_0} = 1 + n \times i$$

Pasar el 1 al primer miembro (restar 1 en los dos miembros):

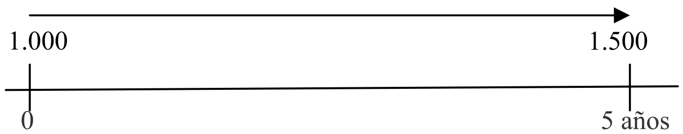
$$\frac{C_n}{C_0} - 1 = n \times i$$

Despejar el tipo de interés, dividiendo por n la expresión anterior:

$$i = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n}$$

Ejemplo 7:

Determinar el tanto de interés anual a que deben invertirse 1.000 euros para que en 5 años se obtenga un montante de 1.500 euros.



i=?

$$1.000 = (1 + 5 \cdot i) = 1.500$$

$$i = \frac{\frac{1.500}{1.000} - 1}{5} = 0'10 = 10\%$$

Cálculo de la duración.

Conocidos los demás componentes de la operación: capital inicial, capital final y tipo de interés, partiendo de la fórmula general de la capitalización simple y despejando la variable desconocida.

Punto de partida:

$$C_n = C_0 \text{ x } (1 + n \text{ x } i)$$

Pasar el C0 al primer miembro (dividir por C0 la ecuación anterior):

$$\frac{C_n}{C_0} = 1 + n \times i$$

Pasar el 1 al primer miembro (restar 1 a los dos miembros):

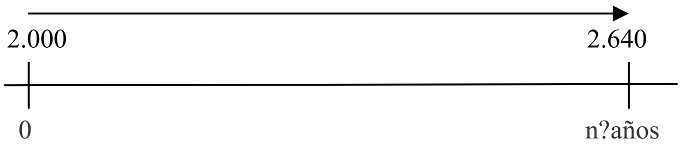
$$\frac{C_n}{C_0} - 1 = n \times i$$

Despejar la duración n, dividiendo por i:

$$n = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{i}$$

Ejemplo 8:

Un capital de 2.000 euros colocado a interés simple al 4% anual asciende a 2.640 euros. Determinar el tiempo que estuvo impuesto.



$$2.000 \cdot (1 + 0'04 \cdot n) = 2.640$$

$$n = \frac{\frac{2.640}{2.000} - 1}{0'04} = 8 años$$

Cálculo de los intereses totales.

Bastará con calcular los intereses de cada período, que siempre los genera el capital inicial y sumarlos.

Intereses totales$= I_1 + I_2 + \ldots + I_n = C_0\ i_1 + C_0\ i_2 + \ldots + C_0\ i_n$

$$C_0 \cdot (i_1 + i_2 + \ldots + i_n)$$

Si $i_1 = i_2 = \ldots = i_n = i$ se cumple:

Intereses totales $= I_1 + I_2 + \ldots + I_n = C_0\, i + C_0\, i + \ldots + C_0\, i$

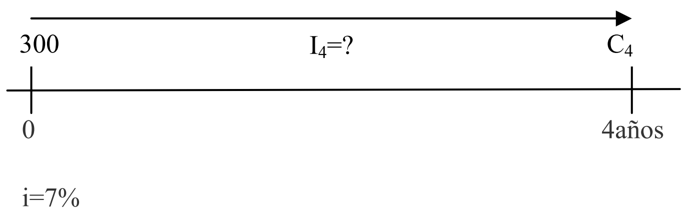
$$C_0 \cdot i \cdot n$$

Conocidos los capitales inicial y final, se obtendrá por diferencias entre ambos:

$$I_n = C_n - C_0$$

Ejemplo 9:

¿Qué intereses producirán 300 euros invertidos 4 años al 7% simple anual?



Por suma de los intereses de cada período:

Intereses totales $= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = C_0\, i + C_0\, i + C_0\, i + C_0\, i =$

$= C_0 \times i \times 4 = 300 \times 0{,}07 \times 4 = 84$ €

También se puede obtener por diferencias entre el capital final y el inicial:

$C_4 = 300 \times (1 + 0{,}07 \times 4) = 384$

$I_n = 384 - 300 = 84$ €

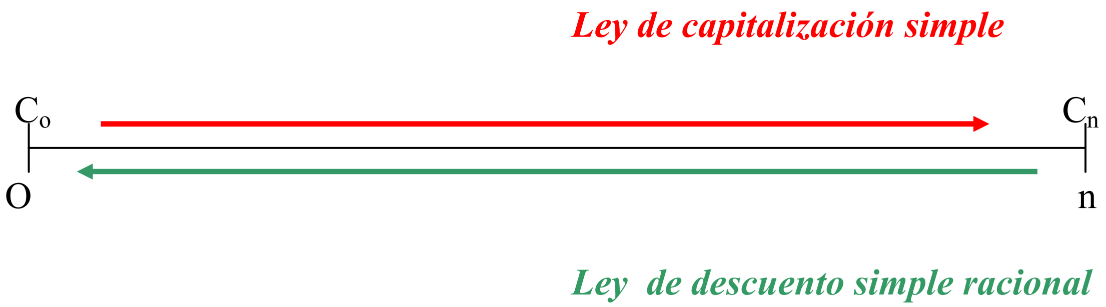
2.2. Descuento simple racional.

Descuento: cálculo de un capital equivalente en un tiempo anterior.

Racional: los intereses se calculan sobre Co.

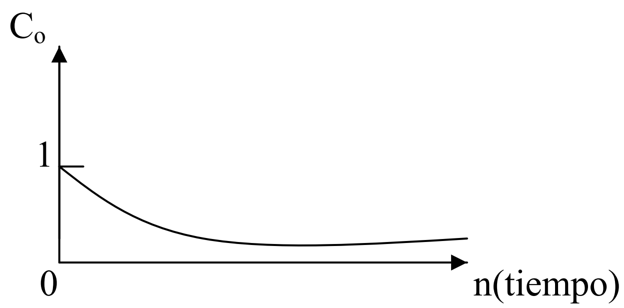
La ley frª de descuento simple racional se define como la ley recíproca de la capitalización simple a tanto vencido.

$C_n = C_o(1+i\cdot n) \rightarrow C_0 = \frac{C_n}{(1+i\cdot n)}$: en este caso , conocemos la cuantía del capital financiero, cuyo vencimiento se produce en el momento "n" y queremos determinar (Co, 0).



La representación gráfica para una función como la obtenida sería de la siguiente forma: (Suponemos Cn = 1)

$$C_0 = \frac{C_n}{1+ni} \Rightarrow f(n) = \frac{1}{1+n\cdot i} = (1+i\cdot n)^{-1}$$



- $1+n\cdot i > 0 \quad (i \geq 0) \ (n \geq 0) \rightarrow f(n) \rightarrow 0$, si $n \rightarrow \infty$
- $f'(n) = -(1+n\cdot I)^{-2} \cdot I < 0 \rightarrow$ ***Decreciente***
- $f''(n) = 2\cdot(1+n\cdot I)^{-3} \cdot i^2 > 0 \rightarrow$ ***Convexa"*** $\cup$ **"**.

Descuento total de la operación:

$$\mathrm{Dc} = \mathrm{Cn} - \mathrm{Co} = \mathrm{Cn} - \frac{\mathrm{C_n}}{(1+\mathrm{n{\cdot}i})} = C_n{\cdot}(1 - \frac{1}{(1+n{\cdot}i)})$$

$$\downarrow$$

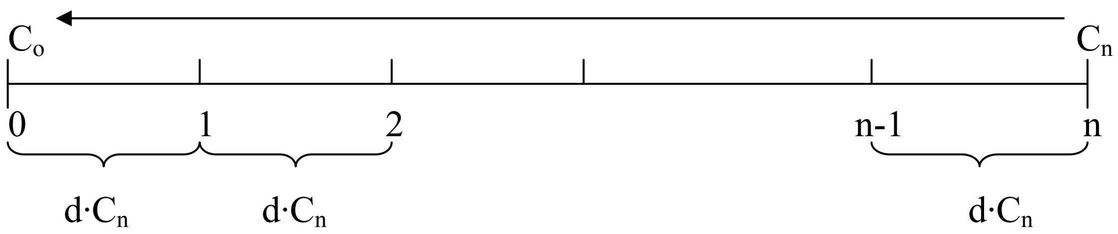
$$C_n = \frac{n{\cdot}i}{1+n{\cdot}i}$$

2.3. Descuento simple comercial.

Descuento: Cálculo de un capital equivalente en un tiempo anterior.
Simple: El precio es el mismo para todas las unidades.
Comercial: Los intereses se calculan sobre Cn
Anticipada: pago al principio de la operación.

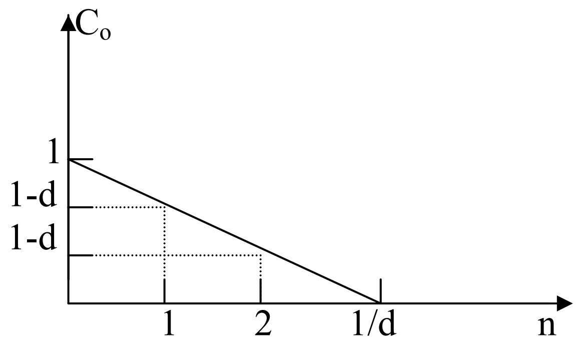
Se utiliza en operaciones a c/p como descuento de efectos.

En un gráfico temporal podemos indicar que su determinación sería:



$$C_o = C_n - n \cdot d \cdot C_n \quad \rightarrow \quad \boxed{C_n \cdot (1 - n \cdot d)}$$

La representación para la función que hemos indicado, sería de la siguiente forma: (*Suponemos* $C_n = 1 \rightarrow f(n) = (1 - n{\cdot}d)$)



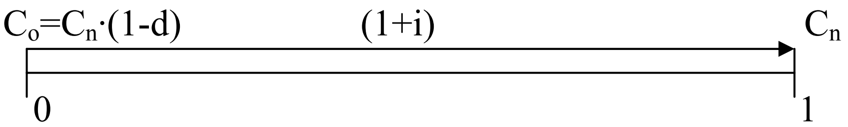
$(1- n\cdot d) \geq 0 \;\rightarrow\; 1 \geq n\cdot d \rightarrow \mathbf{1/n \geq d}$

Descuento total de la operación:

$D_c = C_n - C_o = C_n - C_n\,(1-n\cdot d) = C_n\cdot n \cdot d$

$D_r \langle D_c$

Si $I = d \;\rightarrow\; D_c = C_n \dfrac{n\cdot d}{1+n\cdot d}$

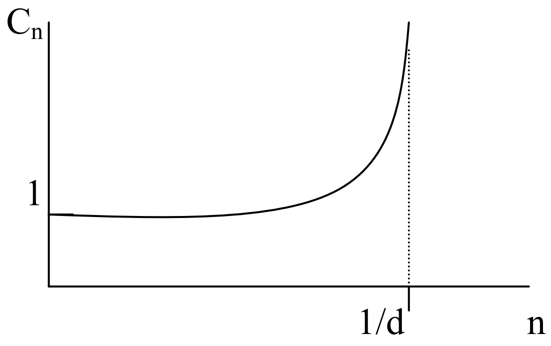


2.4. Capitalización simple a tanto anticipado.

Es una ley conjugada en base a la ley de descuento simple comercial. Recordamos la siguiente formulación:

$C_o = C_n\cdot(1-n\cdot d) \;\rightarrow\; C_n = \dfrac{C_0}{1-n\cdot d}$

Representación: $f(n) = \dfrac{1}{1-n\cdot d} = (1-n\cdot d)^{-1}$



$(1-n\cdot d) > 0 \rightarrow 1 > n\cdot d \rightarrow \mathbf{1/d > n}$

$f\,'(n) = -1\cdot(1-n\cdot d)^{-2}\cdot(-d) = \dfrac{d}{(1-n\cdot d)^2} > 0 \rightarrow$ ***Creciente***

$f''(n) = +2 \cdot \frac{1}{(1-n \cdot d)} \cdot (-d)^2 > 0 \;\rightarrow$ ***Convexa***

Intereses totales de al operación: $I_A = C_n - C_o$

$$= \frac{C_0}{1-n \cdot d} - C_0 = C_0 \left(\frac{1}{1-n \cdot d} - 1\right) = C_0 \cdot \frac{1-1+n \cdot d}{1-n \cdot d} = C_0 \cdot \frac{n \cdot d}{1-n \cdot d}$$

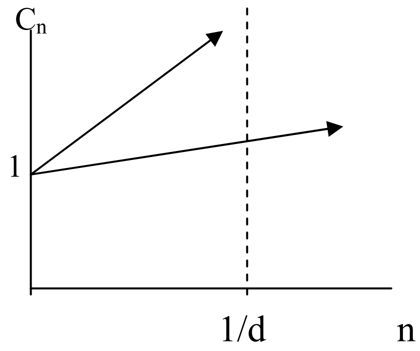
Según la ley de capitalización simple o tanto vencido:

$I = C_o \cdot d \cdot n$

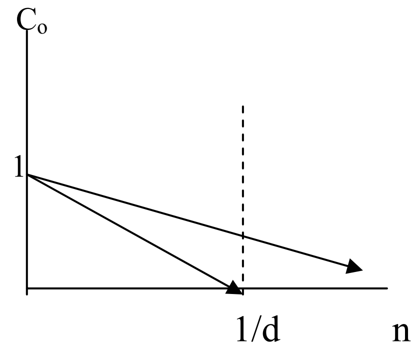
Si $d = I \;\rightarrow\; I_v = C_o \cdot d \cdot n$

2.5. Comparación entre las distintas leyes.

Capitalización



Descuento



Si $i = d$ y $C_o = 1$

Capitalización a tanto <u>anticipado</u>:

$$C_n = \frac{C_o}{1-n \cdot d} = \frac{1}{1-n \cdot i} = \frac{1-n \cdot i+n \cdot i}{1-n \cdot i} = 1 - \frac{n}{1-n \cdot i} \cdot i$$

Capitalización a tanto vencido:

$$C_n = C_o(1+n \cdot i) = 1+n \cdot i$$

$$\left(1+\frac{n \cdot i}{1-n \cdot i}\right) > (1+n \cdot i) \rightarrow C_{nA} > C_{nV} \Rightarrow I_A > I_V$$

Si $i = d$ y $C_n = 1$

Descuento comercial: $C_o = C_n \cdot (1 - n \cdot d) = (1 - n \cdot i)$

Descuento racional: $C_o = \frac{C_n}{(1 + n \cdot i)} = \frac{1}{(1 + n \cdot i)} = \frac{1 + n \cdot i - n \cdot i}{1 + n \cdot i} = 1 - \frac{n \cdot i}{1 + n \cdot i}$

$$(1 - n \cdot i) < (1 - \frac{n \cdot i}{1 + n \cdot i}) \rightarrow C_{oC} < C_{oR} \rightarrow D_c > D_R$$

Capitalización tanto anticipado: (C_o=1) ***$C_o = C_n(1- n \cdot d)$***

$$C_n = \frac{1}{1 - n \cdot d} = \frac{1 - n \cdot d + n \cdot d}{1 - n \cdot d} = 1 + n \cdot \frac{d}{1 - n \cdot d}$$

Capitalización tanto vencido: (Co=1)

$$C_n = 1 + n \cdot i$$

$$\boxed{1 + n\frac{d}{1 - nd} = 1 + ni}$$

$$\boxed{\frac{d}{1 - n \cdot d} = i = \frac{i}{1 - n \cdot i}}$$

Capitalización a tanto vencido cuando coincide con una capitalización a tanto anticipado

Descuento comercial: (C_n = 1)

$C_o = (1- n \cdot d)$

Descuento racional: (C_n = 1)

$$C_0 = (1 - n \cdot \frac{i}{1 + n \cdot i})$$

$$\boxed{(1 - nd) = \left[1 - n\frac{i}{1 + ni}\right]}$$

$$\boxed{d = \frac{i}{1 + n \cdot i} = i}$$

Tanto de descuento (d) para que el descuento simple racional coincida con el descuento simple comercial.

2.6. Cambio en las unidades de medida: tantos equivalentes.

Los tipos de interés suelen venir expresados en términos anuales aunque no siempre se devengan con esa periodicidad sino que en la mayoría de las ocasiones la acumulación de los interés al capital inicial se hace en periodos más pequeños (meses, semestres, trimestres…). La cuestión es indicar cual es la frecuencia de cálculo de los intereses para así conocer si gano o pierdo dinero.

Parecería lógico pensar que cualquiera que sea el número de veces que se calculan los intereses, al final, el importe total de los mismo no deberían de variar el resultado final de la operación, es decir, no se siente afectado. Como indicación, precisar que si se cambian las frecuencias del cálculo de los intereses se hace necesario cambiar el importe del tanto de interés que se va a aplicar en cada caso o momento. Esta razón justifica el que nazca la idea de "tantos equivalentes".

Dos tantos cualesquiera expresados en distintas unidades de tiempo se dicen que son tantos equivalentes cuando aplicados a un mismo capital inicial durante un mismo periodo de tiempo producen el mismo interés o también, generan el mismo capital final o montante. Para el caso de los tantos de interés equivalentes en régimen de simple, podemos indicar que son proporcionales, en tal sentido matizar que llamaremos K a la frecuencia de capitalización y se define como el número de partes iguales en las que se divide el periodo de referencia (en nuestro caso, un año).

En tal sentido, si:

K=2 => semestres i_2

K=3 => cuatrimestre i_3

K=4 => trimestre i_4

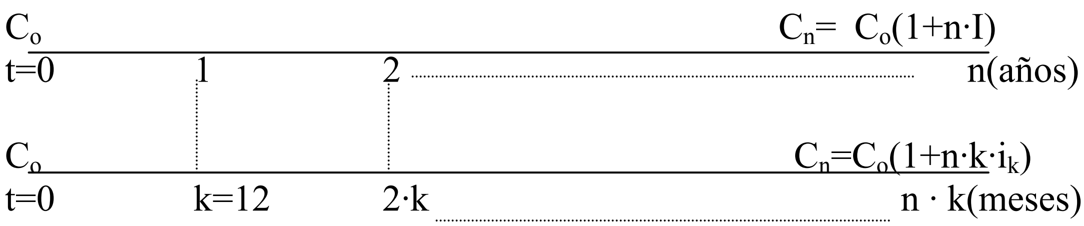
.

k=12 => mensual i_{12}

***i:** referida a una unidad de tiempo. Ej.: año*

***i_k:** referida a la unidad de tiempo anterior dividido en k partes . Ej.: meses*

Gráficamente en un termino temporal podemos precisar la equivalencia indicada de la siguiente forma:



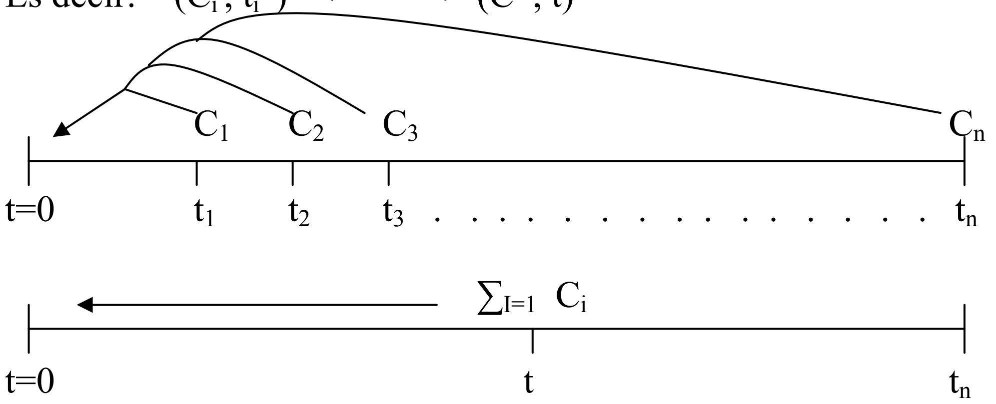
Equivalentes: $i=k\cdot i_k$ $\boxed{i_k = \frac{i}{k}}$

Observación: se aplica frecuentemente un tipo de interés **diario i/360** en lugar de **i/365**, pues se considera que el año comercial tiene una duración de 360 días.

Vencimiento medio de efectos comerciales

En la práctica comercial son frecuentes las operaciones de sustitución de un nº de efectos comerciales con vencimiento en distintas fechas por uno en un vencimiento único.

Es decir: $(C_i , t_i) \longleftrightarrow (C , t)$



Si hacemos un desarrollo analítico sobre el término que estamos estudiando y pensamos que en t=0 va a producirse la siguiente situación analítica:

$$C_1(1-t_1 \cdot d)+C_2(1-t_2 \cdot d)+\ldots+C_n \cdot(1-t_n \cdot d)=\sum C_i \cdot(1-t \cdot d) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i t_i = t\sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$\boxed{t=\frac{\sum_{i=1} C_i \cdot t_i}{\sum_{i=1} C_i}} \Rightarrow \text{Vencimiento medio}$$

2.7. Operaciones que se suelen realizar utilizando las leyes simples.

Los activos financieros a corto plazo suelen ser los elementos que más utilizan este tipo de capitalización. En tal sentido ponemos como ejemplo de los mismo los siguientes: letras de cambio, pagaré de empresa, pagaré financiero, descuento comercial (se usa para descartar efectos comerciales), operaciones con pacto de recompra "REPO"...

Algunas especificaciones sobre algunos:

Letra de cambio: activo financiero emitido al descuento.

Pagaré de empresa: título de renta fija, emitidos a la orden por grandes empresas. Se define como un documento privado, por el que una persona (emisor o suscriptor) se obliga a pagar a otra (tomador o beneficiario) cierta cantidad de dinero (nominal) en la fecha determinada en el documento.

Pagaré financiero: el emisor es una entidad de depósito, es decir, banco o caja de ahorro.

Descuento comercial: se usa para descontar efectos comerciales. Existen también algunos productos que también están incluidos en esta determinación de uso de la ley simple y que pueden tener pacto de recompra, ejemplo de ello, REPO.

EJERCICIOS INTERÉS SIMPLE

1. Calcular el montante obtenido al invertir 2.000€, al 8% anual, durante 4 años en régimen de capitalización simple.

$$C_0 = 2.000$$
$$i = 8\% anual$$
$$n = 4$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i)$$
$$C_n = 2.000(1 + 4 \cdot 0'08) = 2.640$$

2. Indicar qué capital podremos retirar dentro de 3 años si hoy colocamos 1.000€ al 5% de interés anual, durante el primer año y cada año nos suben el tipo de interés un punto %.

$$n = 3$$
$$C_0 = 1.000$$
$$i = 5\%, \textit{primer año}$$
$$C_n = ?¿$$

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i); C_n = 1.000(1 + 1 \cdot 0'05 + 1 \cdot 0'06 + 1 \cdot 0'07); C_n = 1.180$$

3. ¿Cuánto debo invertir hoy, si quiero disponer dentro de 2 años de 1.500€, para comprar un vehículo, si me aseguran un 6% de interés anual para ese periodo?

$$C_n = 1.500$$
$$i = 6\% anual$$
$$Co = ?¿$$
$$n = 2$$
$$C_n = C_o(1 + n \cdot i); C_o = \frac{C_n}{(1 + n \cdot i)} = \frac{1.500}{1 + 2 \cdot 0'06} = 1.339'29$$

4. ¿Qué interés producirán 300€ invertidos a cuatro años y al 7% de interés simple anual?

$$n = 4 años$$
$$i = 7\% simple\ anual$$
$$C_0 = 300 euros$$
$$\text{int}\, ereses\ producidos$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i); C_n = (1 + 4 \cdot 0'07) = 384$$

A partir de calcular el montante, resulta fácil obtener los intereses producidos, llegando a decir que son 84€

5. ¿Qué interés produciran 6.000€ invertidos 8 meses al 1% simple mensual?¿Y si fuera el 1% anual?

$$i \ producidos = ?¿$$
$$C_0 = 6.000 euros$$
$$n = 8 meses / 0'66 años$$
$$C_n = ?¿$$
$$i = 1\% simple \ mensual$$
$$i = 12\% simple \ anual$$

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) = 6.000\left(1 + \tfrac{2}{3} \cdot 0'12\right) = 6.480$$
$$iproducidos = 6.480 - 6.000 = 480 euros$$

6. Determinar el % de interés anual a que deben invertirse 1.000€ para que en 5 años se obtengan un montante de 1.500€?

$$i = ?¿$$
$$C_0 = 1.000 euros$$
$$n = 5 años$$
$$C_n = 1.500 euros$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) \Rightarrow i = \frac{\frac{C_n - C_0}{C_0}}{n} = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot n} = \frac{1.500 - 1.000}{1.000 \cdot 5} = 0'1 = 10\%$$

7. Un capital de 2.000€ colocado a un interés simple al 4% anual asciende a 2.640€. Indique que tiempo estuvo impuesto.

$$C_0 = 2.000 euros$$
$$i = 4\% simple \ anual$$
$$C_n = 2.640 euros$$
$$n = ?¿$$

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} = 1 + n \cdot i \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} - 1 = n \cdot i \Rightarrow \frac{\frac{C_n - C_0}{C_0}}{i} = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot i} = n$$
$$n = \frac{2.640 - 2.000}{2.000 \cdot 0'04} = 8 años$$

8. Calcular el montante alcanzado por un capital de 200€ colocados al 6% durante 5 años.

$C_n = ?¿$

$C_0 = 200 euros$

$i = 6\% anual\ simple$

$n = 5 años$

$C_n = C_0(1 + n \cdot i) = 200(1 + 5 \cdot 0'06) = 260$

9. Calcular el capital que colocado a 6% durante 5 años da un montante de 260€.

$C_0 = ?¿$

$i = 6\% anual\ simple$

$n = 5 años$

$C_n = 260 euros$

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i); \frac{C_n}{(1 + n \cdot i)} = C_0 = \frac{260}{(1 + 5 \cdot 0'06)} = 200 euros$$

10. ¿Cuál es el tanto de interés al que hemos de colocar 200€ para obtener en 5 años 260€?

$i = ?¿$

$C_0 = 200 euros$

$C_n = 260 euros$

$n = 5 años$

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) \Rightarrow \frac{C_n}{C_o} = 1 + n \cdot i \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} - 1 = n \cdot i \Rightarrow \frac{C_n - C_0}{C_0} = n \cdot i \Rightarrow \frac{\frac{C_n - C_0}{C_0}}{n} = i \Rightarrow \frac{C_n - C_0}{C_o \cdot i} = i$$

$$\frac{260 - 200}{200 \cdot 5} = 0'06 = 6\%$$

11. ¿Cuántos meses hemos de colocar al 6%, 200€ para obtener 260€?

$n = meses\ ?¿$

$i = 6\% simple\ anual$

$C_0 = 200 euros$

$C_n = 260 euros$

$$n = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot i} = \frac{260 - 200}{200 \cdot 0'06} = 5 años \Rightarrow 60 meses$$

12. Determinar los intereses de un capital de 200€ al 6% durante 5 años.

$$i \quad generados = ?¿$$
$$C_0 = 200$$
$$C_n = ?¿$$
$$i = 6\% simple\ anual$$
$$n = 5 años$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) = 200(1 + 5 \cdot 0'06) = 260$$
$$\text{int}\,ereses\ generados = 260 - 200 = 60 euros$$

13. ¿Cuál es el montante alcanzado por 300€ colocados al 2% trimestral durante2años, 5meses y 7 días?

$$C_n = ?¿$$
$$C_0 = 300 euros$$
$$i = 2\% trimestral simple \Rightarrow 8\% anual$$
$$n = 2 años, 5 meses\ y\ 7 días$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) = 300\left(1 + \frac{877}{260} \cdot 0'08\right) = 300\left(1 + \frac{70'16}{360}\right) = 300\left(\frac{360 + 70'16}{360}\right) = 300\left(\frac{430'16}{360}\right) = 358'47$$

14. ¿Cuánto tiempo hemos de colocar 350€ al 2% semestral para obtener un montante de 460€?

$$n = ?¿$$
$$C_0 = 350 euros$$
$$i = 2\% simple\ semestral \Rightarrow 4\% anual$$
$$C_n = 460 euros$$
$$n = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot i} = \frac{460 - 350}{350 \cdot 0'04} = 7'86 años \Rightarrow 7 años, 10 meses, 9 días, 14 horas\ y\ 24 \min utos$$

15. Determinar el montante que resulta de invertir 700€ durante 3 años en las siguientes condiciones:
a) interés anual del 12%
b) interés semestral del 6%
c) interés mensual del 1%

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) = 700(1 + 3 \cdot 0'12) = 952$$
$$C_n = 700(1 + 6 \cdot 0'06) = 952$$
$$C_n = 700(1 + 36 \cdot 0'01) = 952$$

16. Se pretende anticipar el montante actual en el vencimiento de un capital de 100% con vencimiento de 3 años, a un tanto anual del 10%. Calcular el capital inicial y el descuento de la operación:

a) Descuento racional.
b) Descuento comercial.

$n = 3años$

$i = 10\%anual$

$C_n = 100$

$C_0 = \frac{C_n \cdot n \cdot i}{1 + n \cdot i} = \frac{100 \cdot 3 \cdot 0'1}{1 + 3 \cdot 0'1} = \frac{30}{1'3} = 23'08euros \quad DESCUENTO\ RACIONAL$

$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \cdot i} = \frac{100}{1 + 3 \cdot 0'1} = 76'92euros \Rightarrow CAPITAL\ INICIAL$

$DESCUENTO\ COMERCIAL = C_n \cdot n \cdot d = 100 \cdot 3 \cdot 0'1 = 30euros$

17. Un señor tiene tres deudas de 3.000, 4.000 y 5.000€, con vencimientos a 6 8 y 10 meses respectivamente; intenta, él, sustituir las 3 deudas por una sola a pagar a los 9 meses. Determina el importe a pagar si la operación se concierta al 8% de interés simple anual.

1deuda==2.000euros Vencimiento=6meses
1deuda==4.000euros Vencimiento=8meses
1deuda==5.000euros Vencimiento=10meses
i anual=8% $i_k = \frac{0'08}{12} = i_{12} = 0'0066 \Rightarrow 0'66\%$

$C_0 = \frac{3.000}{1 + 6 \cdot 0'0066} \frac{4.000}{1 + 8 \cdot 0'0066} \frac{5.000}{1 + 10 \cdot 0'0066} = 11.375'54$

$C_n = C_o(1 + n \cdot i) = 11.375'54(1 + 9 \cdot 0'0066) = 12.051'24u.m.$

18. Igual al anterior; de acuerdo con el acreedor, determina, hoy, sustituir esas deudas por una sola, cuya cuantía es de 11.200€. Se pide calcular el momento de pago si la operación se concreta al 8% de interés simple anual

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + n \cdot i)} \Rightarrow \frac{12.000}{1 + n \cdot 0'08} = \frac{2.000}{\left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0'08\right)} + \frac{4.000}{\left(1 + \frac{8}{12} \cdot 0'08\right)} + \frac{5.000}{\left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0'08\right)} = 11'41$$

19. Calcular los intereses alcanzados por un capital de 40€ durante 5 años al 12%.

Co = 40 I = Co * i * t

t = 5	I = 40*0.12*5
i = 12%	**I = 24**
I = ?	

20. Calcular durante cuantos años hemos de colocar un capital de 20€ al 7% para obtener uno intereses de 8€.

Co = 20	I = Co * i * t
i = 7%	8 = 20*0.07*t
I = 8€	8 = 1,4t
t = ?	**t = 5,7142857**

21. Hallar el tanto por ciento al que se le coloca a un capital de 70€ durante 6 años para producir unos intereses de 3€.

Co = 70	I = Co * i * t
t = 6	3 = 70 * i * 6
I = 3	3 = 420i
i = ?	i = 0,0071428
	0.71428%

22. Hallar el capital final obtenido al cabo de 7 años por un capital de 40€ colocado al 12% bianual.

Ct = ?	Ct = Co (1+ it)
t = 7	Ct = 40 (1+0.06 * 7)
Co = 40	Ct = 40 * 1.42
i = 12% bianual	**Ct = 56,8**
6% anual	

23. ¿Durante cuantos meses hemos de colocar al 8% un capital de 90€ para obtener un montante de 103€?

Co = 90	Ct = Co (1+ it)
Ct = 103	103 = 90 (1+ 0.08t)
t = ?	103 = 90 + 7.2t
i = 8%	13 = 7.2t
	t = 1.805
	t = 21.66 meses

24. Hallar el capital que colocado al 4% mensual durante 84 días, dio un montante de 320€

Co = ?	Ct = Co (1+ it)
Ct = 320	320 = Co (1+0,48*84/360)

i = 4% mensual
48% anual
t = 84 días

320 = Co * 1,1119999
Co = 287,76981

25. El montante de cierto capital prestado al 4% semestral durante 2 años, 2 meses y 15 días, ascendió a 396,5€ . ¿A cuánto ascendieron los intereses?

Ct = 396,5
i = 4% semestral
8% anual
t = 2 a, 2 m, 15d
2/360 = 720
2/30 = 60
15
795 d

Ct = Co (1+ it)
396,5 = Co (1+0,08*795/360)
396,5 = Co*1,176666
Co = 336,96885

I = Ct - Co
I = 396,5 – 336,96
I = 59,53

26. Cierto capital prestado al 11% se convirtió en 4750€, sabiendo que los intereses ascendieron a 78€ ¿Cuánto tiempo duró el préstamo?

Ct = 4750
i = 11%
I = 78
T = ?

I = Ct - Co
78 = 4750 - Co
Co = 4672

I = Co * i * t
78 = 4672 * 0,11 * t
78 = 513t
t = 0,1517745

$$\left.\begin{array}{l}0{,}1517745*12 = 1{,}821294\\ 0{,}821294*30 = 24{,}63\end{array}\right\}\quad \textbf{1 mes y 25 días}$$

27. Calcular los intereses trimestrales producidos por un capital de 600€ al 8%

I = trimestral?
Co = 600
i = 8%

I = Co i t
I = 600*0,08*1
I = 12

28. Hallar a qué tanto por ciento debe estar impuesto un capital para que se haga 5 veces durante 44 años, 5 meses y 10 días.

I = ?

Ct = Co (1+it)

Ct = 5Co
T = 44 a, 5 m, 10 d
44*360 = 15840
5*30 = 150
10
16000

5Co= Co (1+i*16000/360)
$\frac{5\cancel{Co}}{\cancel{Co}}$ = 1+ 44,4i
5-1= 44,4i
4 = 44,4i
i = 0,09
9%

29. Calcula la diferencia de intereses producidos por un capital de 40 € que se colocó al 16% durante 80 días.

Co = 40
i =16%
t = 80 días

dif = Coit * 5/360 * 365
dif = 40 * 0,16 * 80 * 5/360 *365
dif = **0,01948 €**

30. Los intereses de un capital por el año civil ascendieron a 3,4 € ¿a cuanto ascendieron por el año comercial?

Co=?
Ici = 3,4
Ico = ?

Ici= Coit /365= 3,4 Co= 365 * 3,4= **1241**
Ico = Coit /360= 1241/360= **3,45**

31. La diferencia de interés de un capital de 40000 € colocado al 15% ha sido de 3,28 €, durante qué tiempo estuvo colocado?

Co=40000
i = 15%
Dif = 3,28
t= ?

Coit/360*5/365= dif
40000*0,15*t/360*5/365=3,28
6000t/360*5/365= 3,28
30000t/131400 = 3,28 t =14,3664
t = **14 días**

32. Los intereses de un capital por el año comercial ascendieron a 5,2 €, ¿a cuánto ascendieron por el año civil?

Ici =?
Ico =4,2
Ici = Coit /365

Ico = 1872/360= 5,2
Ici = 1872/365= **5,13**

33. La diferencia entre los intereses comerciales y civiles es de 46,97. Calcula ambos intereses?

Dif = 46,97
Ico =?
Ici =?

Ico-Ici = 46,97
Ico* 5/365=46,97
Ico = 3428,81
3428,81-Ici = 46,97

Ici = 3381,84

34. Calcula el capital que colocado durante 95 días siguiendo el año civil al 3% semestral produjo uno intereses de 8 €.

Co=?	Ici= Coi(t/365)
t= 95	8 = Co*0,06*95/365
i= 3% semestral	8 = 5,7Co/365
6% anual	**Co= 550,94**
I= 8 €	

35. Calcular el capital obtenido al invertir un 2% trimestral 40€ durante 12 semanas.

Ct =?	Ct = Co(1+i(t/365))
i=2% trimestral	Ct = 40(1,08(84/365))
8% anual	**Ct = 40,73**
t = 12 semanas	
84 días	
Co = 40	

36. Hallar el interés de un capital de 42,56 € colocados a un 8% durante 142 días.

I=?	I= Coit/360
Co= 42,56	I= 42,56*0,08*142/360
i = 8%	**I= 1,3430044**
t =142	

37. Hallar durante cuantos días hemos colocado un capital de 50 € colocado al 7% semestral, sabiendo que nos han entregado 50,94 €.

t=?
Co= 50€
i= 7% semestral
 14% anual
Ct = 50,94€

Ct= Co*(1+i*(t/360))
50,94= 50(1,14(t/360))
t= 48

38. Dos capitales suman 720 € se coloca uno al 7% semestral durante 8 meses. Determinar durante que tiempo hemos colocado el otro capital al 12% sabiendo que la diferencia de intereses entre ambos capitales asciende a 15,3 € y que el capital colocado es tres veces que el colocado al 7%.

A + B = 720 €

7% semestral
8 meses

t =?
12%

A +3A = 720
A = 180
B = 180*3 = 540

$I_1 – I_2 = 15,3$ → $I_B – I_A = 15,3$
CoB = 3 A

I_B = Bit = 540*0,12*t
I_A= Ait = 180,014*8/12
I_B= 64,8t
I_A= 16,8

64,8t – 16,8 = 15,3; T= 0,4953703
5 meses y 28 días

39. Calcular durante cuántos meses ha de colocar 500 € al 4% semestral para obtener unos intereses de 32 €.

Co = 500
i = 4% sem
 8% anual
I = 32
t = ?

I = Ct - Co
32 = Ct-500
Ct = 532

Ct = Co (1+it)
532 = 500(1+0,08t)
t = 0,08 **9,6 meses**

40. A qué tanto de interés hemos colocado un capital de 20 € durante 7 años si nos han entregado 28,42 €.

i?	Ct = Co (1+it)	
Co = 20	28,42 = 20(1+i*7)	
t = 7	1,421 = 1+7i	
Ct = 28,42	i = 0,0601	**i = 6,01%**

41. Durante cuantos días hemos colocado al 9% un capital de 624 € si nos han entregado un montante de 630 €.

t?	Ct = Co (1+it)	
i = 9%	630 = 624 (1+0,09t)	
Co = 624	630 = 624 + 56,16t	
Ct = 630	t = 0,1068	**t = 38 días**

42. Calcular el tanto de interés semestral al que hemos de colocar un capital para que al cabo de un bienio se vea incrementado en su 80%.

I?	Ct = Co (1+it)	
Ct = Co+80%Co	1,8 Co = Co (1+i*2)	
i = 80% Co	0,8 = 2i	
t = 2	i = 0,4% anual	**0,2% semestral**

43. Un capital de 450 € está colocado, parte al 15% y parte al 18% produciendo mensualmente 6,13 € de intereses.¿cuánto está colocado al 15 y cuánto al 18?.

Co = 450	A + B = 450	
I_1 = 15%	$I_A + I_B$ = 6,13 mens	
I_2 = 18%	A*0,15*1/12 + B*0,18*1/12 = 6,13	
I = 6,13 € men	A = 450 - B	
Co_1?	(450-B)0,15*1/12 + B0,18*1/12 = 6,13	
	$\frac{67,5 + 0,03B}{12} = 6,13$	
	B = 202	A +B = 450
		A= 148

44. Calcular el tiempo al que hemos de colocar un capital al 9% para que se vea incrementado en su 15%.

t?	Ct = Co (1+it)
i = 9%	1,15Co = Co (1+0,09t)
Ct = Co +15% Co	0,15 = 0,09t
	T = 1,666
	1 año y 8 meses

45. Se colocan 1000 € a un cierto tanto durante 5 años, el montante final de este periodo se coloca a un tanto inferior en un 1% respecto al año anterior, obteniéndose así una renta anual de 65 €. Hallar el tanto por ciento.

Co = 1000 € ⟶ i ⟶ 5 años
Ct = Co (1+it) = 1000 (1+i5)
i' = (i-0,01)
t = 1 año   I = 65
I = Coi't
65 = 1000(1+i5) (i+0,01)*1
$0,065 = 5i^2 + 0,95i – 0,01$
i = 6%

46. Los intereses de un capital de 418,51 € prestado al 2,25% trimestral han sido de 10,11, ¿cuántos días duró el préstamo siguiendo el año civil?

Co = 418,51	I = Coit
I = 10,11	10,11 = 418,51 * 0,09t
i = 2,25% trim	10,11 = 37,6659t
9% anual	t = 0,2684125
t?	0,2684125 * 365 = 97,93 **98 días**

47. Unos intereses calculados por el año civil han dado 87,5€, a cuánto hubiesen ascendido por el año comercial.

Ici = 87,5
Ico?

$$Ici = \frac{Coit}{365} = 87,5$$
$$Ico = \frac{Coit}{360} = \frac{31937,5}{360} = 88,715$$
Ico = 88,715

48. La diferencia entre los intereses alcanzados por un capital de 9000 € ha sido de 0,4 €. ¿Durante qué tiempo estuvo colocado?

Ico – Ici = 0,4
i = 9%
Co = 9000
t?

$$Coit \frac{5}{360*365} = dif$$
$$9000*0,09t \frac{5}{360*365} = 0,4$$
t = 12,977   **t = 13 días**

49. Calcular el interés producido por un capital de 900€ colocado al 9% semestral durante 60 días.

I?	I = Coit/365
Co = 900	I = 900*0,18*60/365
i = 9% sem	**I = 26,63**
18%anual	
t = 60días	

50. ¿A qué tanto de interés trimestral hemos colocado un capital de 600 € durante 4 años, si nos han devuelto 6,50 €.

i?	I = Coit
Co = 600	50 = 600*i*4
t = 4	50 = 2400i
Ct = 650	i = 2,083% anual
I = 50	**0,52083 % trimestral**

51. ¿Cuánto tiempo tardará un capital colocado al 12% en producir de interés una cantidad igual a su centésima parte.

t?	I = Coit	
i = 12%	Co/100 = Co * 0,12t	
Co?	1/100 = 0,12t	
Ct = Co + Co/100	t = 0,083	**t = 1 mes**
I = Co/100		

52. ¿A qué tanto de interés cuatrimestral hemos colocado un capital de 500 € durante 8 meses si nos han devuelto 720 €.

i?	I = Coit	
Co = 500	220 = 500* i *8/12	
t = 8 meses	0,44 = 8i/12	
Ct = 720	5,28 =8i	
I = 220	i = 66% anual	**i = 22% cuatrimestral**

53. Partiendo de la fórmula I = Ct – Co, deducir la fórmula del tiempo que se necesita tener, impuesto un capital para que produzca unos intereses igual al capital.

$$I = Ct - Co$$
$$I = [Co\,(1+ it)] - Co$$
$$Co = [Co\,(1+it)] - Co$$
$$2Co = Co\,(1+it)$$
$$2 = 1+it$$
$$2 - 1 = it$$
$$\mathbf{t = \frac{1}{i}}$$

54. Un capital se prestó al 6% anual y otro equivalente a sus ¾ partes se prestó al 7%. Al cabo de 15 meses el total de los dos capitales y sus intereses respectivos ha sido de 132,34 €, ¿cuáles fueron los capitales prestado?

$A \longrightarrow 6\%$
$B = ¾\,A \longrightarrow 7\%$
t = 15 meses
$Ct_A + Ct_B = 132{,}34$

A(1+0,06*15/12) + B(1+0,07*15/12)
A(1+0,06*15/12) + ¾ A(1+0,07*15/12)
4,3 A + 3,2625 A = 529,36
A = 69,99
B = ¾ A
B = ¾ * 69,99 **B = 52,49**

55. Se coloca la 1/3 parte de un capital al 10% y el resto al 6% semestral, sabiendo que la segunda parte produce 70 € mas de intereses cada trimestre. Calcular el capital total colocado a interés.

Co?
A + B = Co
$A = 1/3\,Co \longrightarrow 10\%$
$B = 2/3\,Co \longrightarrow 6\%$ sem
12% anual
I_A ?
$I_B = I_A + 70$

1/3 A + B = Co
$I_A + I_B = Ico$
$I_A + I_A + 70 = Ico$

B(0,06)2*14/4 = 1/3Co * 0,1*1/4
2/3Co*0,12*1/4 = 1/3Co*0,1*1/4+70
0,02Co = 0,0083Co+70
Co = 6000

56. Colocamos 300 € a un tanto de interés durante 6 años, los intereses obtenidos se colocan durante 7 años al mismo tanto de interés, logrando como montante de los intereses 10,8 €. ¿ A qué tanto por ciento si hizo la operación?

Co = 300
i?
t = 6años

I = Coit
I = 300 * i * 6
I = 1800i

I?
t = 7 años
i?
Ct = 10,8

Ct = Co (1+it)
10,8 = 1800i (1+i*7)
$12600i^2 + 1800i – 10{,}8 = 0$
i = 0,5767%

57. Los intereses por el año civil de un capital colocado al 6% fueron de 435 € ¿A cuánto ascendieron por el año comercial?

Ici = 435
I = 6%
Ico?

$$Ici = \frac{Co * 0{,}06 * t}{365} = 435$$

$$Ico = \frac{Co * 0{,}06 * t}{360} = \frac{158775}{360}$$

Ico = 441,04

58. Suponiendo que el capital del ejercicio anterior fuese de 2000 € durante cuántos años se concedió?

Co = 2000	$Ici = \frac{Coit}{365}$	$435 = \frac{2000 * 0{,}06 * t}{365}$
i = 6%		
t?	158775 = 120t	
Ici = 435	t = 1323,125	t = 3,625
	3 años, 7 meses y 15 días	

59. Calcular los intereses conjuntos de 5 capitales al 25 de noviembre y al 16 % 625328 € 14 de julio; 328526 € 17 de agosto; 428529 € 20 de agosto;291742 € 5 de octubre; y 117413 € 26 de octubre.

625328 € 14 VII	134 D	837939
328526 € 17 VIII	100 D	328526
428529 € 20 VIII	97 D	415673,13
291742 € 5 X	51 D	148788,42
117413 € 26 X	30 D	35223,9
	SNºT	17661,51

$I = \frac{1766151*0{,}16}{360}$ **I = 78495,6**

60. Hallar los intereses conjuntos al 4 % mensual de 528419 €, durante 8 semanas, 739621 durante 46 días, 843230 durante un semestre, 628526 durante 2 trimestres.

518419	3 semanas	56 días	290320,24
739621	46 días		340225,66
843230	1 semestre	180 días	1517814
628526	2 trimestres	100 días	1131346,8
			3279706,7

$I = \frac{3279706{,}7*0{,}48}{360}$ **I = 437294,23**

61. ¿A qué tanto anual hemos de colocar 920 € para que al cabo de 6 semanas se transforme en 940 €?

Co = 920	Ct = Co(1+it)
Ct = 940	940 = 920 (1+i * 6/52)
T = 6 semanas	i = 18,8%

37,6%

62. Hallar el número de quinquenios necesarios para que un capital al 3% semestral se haga 5 veces mayor.

$5Co = Co\ 1+0,06 * t$
t = 13,13

63. Un capital se prestó al 8 % trimestral, y otro equivalente a su cuarta parte se prestó al 25%, al cabo de los 2 años la suma de los montantes de ambos capitales fue de 5000, ¿cuáles fueron los dos capitales?

A ......8% trimestral
32% anual
B = ¼ A 25%
t = 2

$Ct_A + Ct_B = 5000$
$Co_A(1+ i_A * t) + Co_B(1+ i_B * t) = 5000$
A(1+0,32*2) + ¼ A(1+0,25*2)= 5000
1,64 A + 1,5/4 A = 5000
A =2481,3896
B = 620,3474

64. Hallar el tiempo necesario para que un capital colocado al 3% trimestral se vea incrementado en su 35 %.

t =?
i = 3%
12% anual
Ct = Co + 0.35Co
Ct = 1.35Co

1,35Co = Co(1+0,12 * t)
1,35 = 1+0,12t
t= 2,91666
2 años y 12 meses

65. Calcular el tiempo al que hemos de colocar un capital al 12% para que la diferencia entre sus intereses comerciales y civiles supongan un 10/00 del capital.

Dif I = $1^{0}/_{00}$ Co   0,001Co
t=?
i= 12%

Ico-Ici=0,001Co
Dif= 5*Coit/360*365
0,001Co= 5*Co*0,12*t/360*365
131,4Co= 0,6Cot
131,4=0,6t
t= 219
7 meses y 9 días

66. En caso de descuento comercial despejar este en función del efectivo.

Dc= Ndt $N= \frac{Dc}{dt}$

N-E =Dc $\frac{Dc}{Dt} - E = Dc$ $\frac{Dc}{\cancel{d}t} - \frac{Edt}{\cancel{d}t} = \frac{Dcdt}{\cancel{d}t}$

Dc – Dcdt = Edt Dc(1-dt) = Edt

$$\mathbf{Dc = \frac{Edt.}{1-dt}}$$

67. Calcular el descuento de un efecto de 390 € al 8% durante 60 días.

D =?
E = 390 €
i = 8%
t = 6 días

Dc = Ndt
Dc = 390*0,08*60/360
Dc = 5,2

68. Al anticiparse 81 días el pago de una deuda de 2460 € a dado un efectivo de 5421,26 € ¿ Cuál ha sido la tasa de descuento aplicada?.

N = 2460
E = 2421,21
t = 81
D = 38,74

Dc = Ndt
38,74 = 2460* d *81/360
d = 0,069990966
d = 6.9990966%

69. ¿Cuántos días se anticipó el pago de una deuda de 240 € su el descuento comercial al 6% fue de 1,8 €?

Dc = 1,8
N = 240
d = 6%
t = ?

Dc = Ndt
1,8 = 240*0,06t/360
0,0075 = 0,06t/360
t = 45

70. El efectivo de un efecto descontado al 8% en tres meses ha de 17,64 € ¿cuál era el nominal?

d = 8%
E = 17,64
t = 3 meses
N =?

N = E (1+ it)
N = 17,64 (1+0,08*3/12)
N = 17,9928
N = 18

71. El efectivo de un efecto descontado al 4% semestral en tres meses ha sido de 529,20 €. Calcular el descuento.

d = 4% semestral
8% anual
t = 3 meses
E = 529,20
D?

$E = \frac{N}{1+0,08*3/12}$; $529,20 = \frac{N}{1,02}$
N = 539,784
D = N-E
D = 539,784-529,20 ; **D = 10,584**

72. Un crédito de 3480 € al ser descontado 4 meses dio un descuento de 101,36 € ¿A qué tanto de interés se hizo el cálculo?

N = 3480	Dr = Eit
D = 101,36	101,36 = 3480*i*4/12
t = 4 meses	i = 0,087088
	i = 9%

73. Un crédito descontado racionalmente al 8% tuvo un descuento de 5,94 si su efectivo fue de 594,06. Calcular el plazo en días.

d = 8%	Dc = Ndt
D = 5,94	5,94 = 588,12*0,08*t/360
E = 594,06	3,635 = 0,08t
t?	t = 45,44
N = 588,12	**t = 45 días**

74. Al anticiparse el pago de una deuda de 1000 en 15 días nos han entregado 993,5 ¿a qué tanto de interés se hizo la operación?

N = 1000	E = N (1+it)
t = 15 días	1000 = 993,5(1+ i *15/360)
E = 993,5	1,0065425 = 1+0,0416i
i =?	i = 0,1570202
	i = 15,70202%

75. ¿A qué tanto de descuento se hizo la operación del ejercicio anterior?

Dc = Ndt
6,5 = 1000 * d * 15/360
6,5 = 15000d/360
2340 = 15000d
d = 15,6%

76. Descontando un efecto al 9% durante 40 días se obtuvo un efectivo de 321,75 € ¿cuál era el nominal?

N =?	N = E (1+ it)
E = 321,75	N = 321,75(1+0,09*40/360)
d = 9%	N = 321,75*1,01
t = 40 días	**N = 325**

77. Calcular el valor efectivo que se obtiene al descontar un capital de 300 € al 1,5% trimestral durante 5 meses 292,5.

N = 300	N = E (1+ it)
d = 1,5% trim	300 = E(1+0,06*5/12)
6% anual	300 = 1,025E
t = 5 meses	**E = 292,68**
E?	

78. Sabiendo que el descuento de un crédito en 30 días fue de 16 €. Hallar el nominal si la operación se hizo al 8% de interés.

D = 16	D = N - E
t = 30 días	16 = N - E
i = 8%	E = N-16
N?	N = E (1+it)
	N = (N-16) (1+0,08*30/360)
	N = 1,0066N-16,1066
	-0,00666N = -16,1066
	N = 2416,0241

79. Determinar el tanto de descuento al que se descontó un capital de 680 € durante 3 años si nos entregaron un efectivo de 435,2 €. Determinar también el tanto de interés equivalente al de descuento obtenido.

Co = 680	D = N-E
d =?	D = 680-435,2
T = 3 años	D = 244,8
E = 435,2	Dc = Ndt
i = ?	244,8 = 680* d *3
	244,8 = 2040d
	d = 12%
	N = E(1+it)
	680 = 435,2(1+3i)
	1,5625= 1+ 3i
	i = 18,75%

80. La diferencia entre el descuento comercial y el racional de un crédito descontado al 8% en 63 días fue de 76,78, Calcular el descuento comercial.

Dif= Dc-Dr=76,78	Dif= Ndt
i =8%	76,78 = N *0,08*63/360
t = 63 días	76,78 = 5,04N/360
Dc?	**Dc = 5484,28**

81. En un crédito descontado al 7% en 45 días la diferencia entre ambos descuentos fue de 3,5 €. ¿Cuánto importaba el descuento matemático?

d = 7%	Dif = Ndt
t = 45 días	3,5 = Dr * 0,07*45/360
Dif = 3,5	3,5 = 3,15Dr/360
Dr?	1260 = 3,15Dr
	Dr = 400

82. A cambio de 800 € que teníamos que pagar el 15 de Abril, hemos entregado 200€ el 12 de febrero; 300€ el 5 de marzo; 100€ el 6 de abril. Cuándo entregaremos el resto.

800 15 abril ← 63 días

200	12 febrero	
300	5 marzo	22 días
100	6 abril	54 días
200	X	

800(63)= 200(0)+300(22)+100(54)+200(X)
50400= 0 +6600 +5400 +200t
38400 = 200t
t = 192 días **21 de Agosto**

83. Si la operación del ejercicio anterior se hubiese hecho al 6% de interés, ¿qué día hubiésemos entregado los 200€ restantes.

200	12 febrero	800	15 abril
300	5 marzo		
100	6 abril		
200	X		

200= E(1+0,06*0/360)= 200
300= E(1+0,06*21/360)= 298,95
100= E(1+0,06*53/360)= 99,12
598,07

$$791{,}69 = 598{,}07 + \frac{200}{1+0{,}06t/360}$$

193,62 (1+0,06* t/360) = 200
t = 197 **28 de Agosto**

84. Una vez aceptados los cuatro pagos anteriores a sus respectivos Vto. Decidimos sustituirlos en un solo pago con Vto. al 31 de julio, ¿qué cuantía tendremos que entregar haciendo también la compensación al 6% de interés?

31 julio

200 €	12 febrero	170 días
300 €	5 marzo	148 días

100 €	6 abril	116 días
200 €	28 agosto	25 días

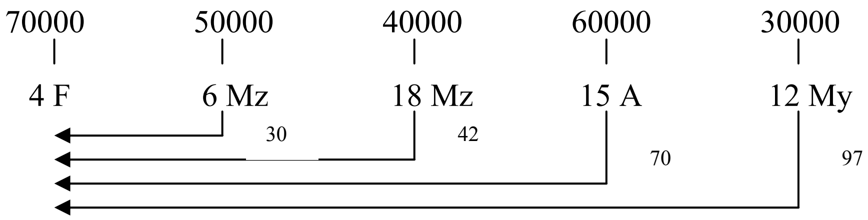
N = E(1+ dt)
N = 200(1+0,06*170/360) = 205,67
N = 300(1+0,06*148/360) = 307,4
N = 100(1+0,06*116/360) = 101,93
200 = E (1+0,06*25/360) = 199,17
814,17 €

85. Calcular el día que hemos de pagar 600 € para liquidar dos deudas: 1º de 400 € 8 de mayo; 2º con Vto. El 12 de junio.

600	t?	600t = 400 (0) + 200(35)
400	8 mayo	600t = 0+7000
200	12 junio	t = 11,5 → 12 días

8 Mayo +12 = **20 Mayo**

86. Hemos de pagar 70000 € el 4 de febrero, 50000 € el 6 de marzo, 40000 € el 18 de marzo, 60000 € el 15 de abril y 30000 € el 12 de mayo. Si queremos liquidar todas las deudas en un solo pago ¿cuándo tendremos que efectuarlo?



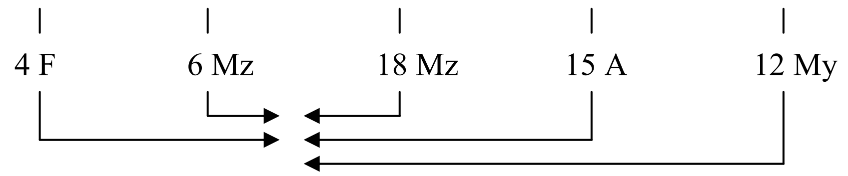
250000t = 70000(0)+50000(30)+40000(42)+60000(70)+30000(97)
250000t = 0+1500000+1680000+4200000+2910000
t = 41,16 → 41 días → **17 marzo**

87. Si la operación en el ejercicio anterior se hubiese hecho al 9% de descuento que cuantía hubiésemos entregado el 17 de marzo?

9% d — d → 17 Mz
E = N (1-dt)

17 Mz

70000 50000 | 40000 60000 30000



70000 = N (1-0,09*42/360)= 70742,93
50000 = N (1-0,09*11/360)= 50137,88
E = 40000 (1-0,09*1/360) = 39990
E = 60000 (1-0,09*29/360)= 59565
E = 30000 (1-0,09*56/360) = <u>29580</u>
250015,81

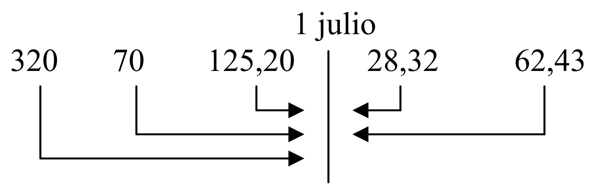
88. ¿Qué día hemos de entregar 17800 € para sustituir a 4000 € con Vto. a los 80 días, 3000 € con Vto. a los 50 días, 6000 € con Vto. a los 90 días, 5000 € con Vto. a los 120 días, haciendo la compensación al 6% de interés?

t?	17800	N = E (1+ dt)
4000	80 días	4000 = E(1+0,06*80/360) = 3947,37
3000	50 días	3000 = E(1+0,06*50/360) = 2976,21
6000	90 días	6000 = E(1+0,06*90/360) = 5911,33
5000	120 días	5000 = E(1+0,06*120/360)= <u>4901,96</u>
i = 6%		17735,87

17800 = 17735,87(1+0,06*t/360)
t = 22 días

89. Hemos de pagar 70 € el 8 abril, 320 € el 5 marzo, 125,20 € el 8 mayo, 28,32 € el 6 junio y 62,43 € el 8 agosto. ¿Qué cuantía entregaremos el 1 de julio para liquidar toda la deuda anterior haciendo la operación al 17% interés?

70	8 Ab
320	5 Mz
125,20	8 My
28,32	6 Jl
62,43	8 Ag



X 1 Julio
i = 17%

N = 320 (1+0,17*118/360)
N = 70 (1+0,17*84/360)
N = 125,20 (1+0,17*54/360)
28,32 = E (1+0,17*7/360)
62,43 = E (1+0,17*7/360)

337,83+72,78+128,39+28,23+61,33= **628,56**

90. Hemos de pagar 600000 € el 5 de julio, 300000 € el 4 de julio 250000 € el 6 de abril y 125000 € el 12 de julio. A cambio de ello entregaremos 400000 € el 8 de junio, 500000 € el 8 de julio, 225000 € el 7 de septiembre. ¿Cuándo pagaremos el resto?

600000(90)+300000(89)+250000(0)+125000(97) =
400000(63)+500000(93)+225000(154)+150000(t)

54000000+26700000+12125000 = 25200000+46500000+34650000+150000t
92825000 = 106350000+150000t
-13525000 = 150000t
t = -90,16 **6 de Enero**

91. El 8 de febrero entregamos 60000 € a cuenta de una deuda de 300000 € que vencía es 9 de marzo. Calcular en que fecha hemos de entregar el resto para liquidar totalmente la deuda.

9Mz	300000
8Fb	60000
X	240000

300000(29) = 60000(0)+240000t
8700000 = 240000t
t = 36,25 **16 Marzo**

92. Hemos de pagar 300000 €, el 4 de abril, 200000 el 5 de mayo, 300000 el 2 de febrero, 200000 el 3 de marzo. A cambio de todos los pagos entregamos 400000 el 6 de abril, 200000 el 5 de marzo, 100000 el 7 de mayo. ¿Cuándo entregaremos el resto?

$$\left.\begin{array}{ll} 300000 & 4Ab \\ 200000 & 5My \\ 300000 & 2Fb \\ 200000 & 3Mz \end{array}\right\} \quad 100000$$

400000	6Ab
200000	5Mz
100000	7My
300000	X

300000(61)+200000(92)+300000(0)+200000(29)=
4000000(63)+200000(31)+100000(94)+300000t
42500000= 40800000+ 300000t
170000 = 3000000t
t = 5,6 t = 6 días **8 febrero**

93. Una deuda de 100.000 € con vencimiento el 15 de febrero, lo vamos a descomponer en 5 pagos con vencimiento el 4 de enero, 5 de febrero, 6 de marzo, 7 de abril, 8 de mayo. Calcular la cuantía a pagar en cada fecha.

A + B + C + D + E = 1000000

A(0)+B(32)+C(61)D(92)+E(124)=1000000(42)

M+M+H+H+H= 100000 2M+3H=100000
M(0)+M(32)+H(61)+H(92)+H(124)= 100000(42)
32M+277H= 4200000

$$\left.\begin{array}{l} 2M+3H=100000 \\ 32M+277H=4200000 \end{array}\right\} \quad M=\frac{100000-3H}{2}$$

$$32\left(\frac{100000-3H}{2}\right)+277H=4200000$$

1600000-48H+277H=4200000
229H=2600000
H=11353,712
M = 32969,432

A = 32961,43
B = 32961,43
C = 11353,71
D = 11353,71
E = 11353,71

94. Calcular el tanto trimestral al que se ha realizado un préstamo de 450 euros, si en 2 años, 5 meses y 20 días ha producido 108'47euros.

$i = trimestral\ simple ?¿$

$C_0 = 450 euros$

$n = 2años, 5meses\ y\ 20días. \Rightarrow 2'4722221años$

$I = 108'47 euros$

$C_n = 450 + 108'47 = 558'47 euros$

$$C_n = C_0(1+n\cdot i) \Rightarrow i = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot n} = \frac{558'47 - 450}{450 \cdot 2'4722221} = 0'0975011 anual \Rightarrow 0'0243752 trimestral$$

95. Un capital de 1.000 euros se coloca en 2 partes, una parte al 7'5% semestral y el resto al 4'5% trimestral, produciendo semestralmente 80 euros de interés en conjunto. Determine el importe de ambas partes.

$$7'5\% semestral \Rightarrow 15\% anual \Rightarrow 7'5\%$$
$$4'5\% trimestral \Rightarrow 18\% anual \Rightarrow 9\%$$
$$80 = [(A \cdot 0'075 \cdot 1) + (B \cdot 0'09 \cdot 1)]$$
$$80 = 0'075A + 0'09B$$
$$1.000 = A + B$$
$$A = 1.000 - B$$

$$80 = 0'075(1.000 - B) + 0'09B$$
$$80 = 75 - 0'075B + 0'09B$$
$$5 = 0'015B; B = 333.33333333$$

$$A = 1.000 - 333'33333; A = 667$$

96. Calcular el montante alcanzado por un capital de 480 euros a un interés del 9%, en 6 años.

$$C_n = ?¿$$
$$C_0 = 480 euros$$
$$i = 9\% simple\ anual$$
$$n = 6 años$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i); C_n = 480(1 + 6 \cdot 0'09) = 739'2 euros$$

97. Calcular el capital que colocado al 9% durante 6 años dio un montante de 805'01 euros.

$$i = 9\%$$
$$n = 6 años$$
$$C_n = 805'01 euros$$
$$C_0 = ?¿$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i)$$
$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + n \cdot i)} = \frac{805'01}{(1 + 6 \cdot 0'09)} = 522'73377 euros$$

98. Calcular el tanto de interés al que hemos de colocar 480euros para obtener al cabo de 6 años un montante de 805'01euros.

$$i = ?¿$$
$$C_0 = 480 euros$$
$$n = 6 años$$
$$C_n = 805'01 euros$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) \Rightarrow i = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot n} = \frac{805'01 - 480}{480 \cdot 6} = 0'1128506$$

99. Calcular durante cuantos años hemos de colocar un capital de 480euros al 9% para obtener un montante de 805'01 euros.

$$n = ?¿$$
$$C_0 = 480 euros$$
$$i = 9\%$$
$$C_n = 805'01 euros$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) \Rightarrow n = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot i} = \frac{805'01 - 480}{480 \cdot 0'09} = 7'523379 años = 7 años, 6 meses, 8 días$$

100. Calcular cuánto tiempo tardará un capital de 30.000 euros en producir 20.000 euros de interés al 6%.

$$C_0 = 30.000 euros$$
$$i = 6\% simple\ anual$$
$$C_n = C_0 + I = 50.000$$
$$I = 20.000$$
$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) \Rightarrow n = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot i} = \frac{50.000 - 30.000}{30.000 \cdot 0'06} = 11'1111 años \Rightarrow 11 años, 1 mes\ y\ 9/10 días$$

TEMA3: *LEYES FINANCIERAS COMPUESTAS DE CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO*

3.0. Introducción.

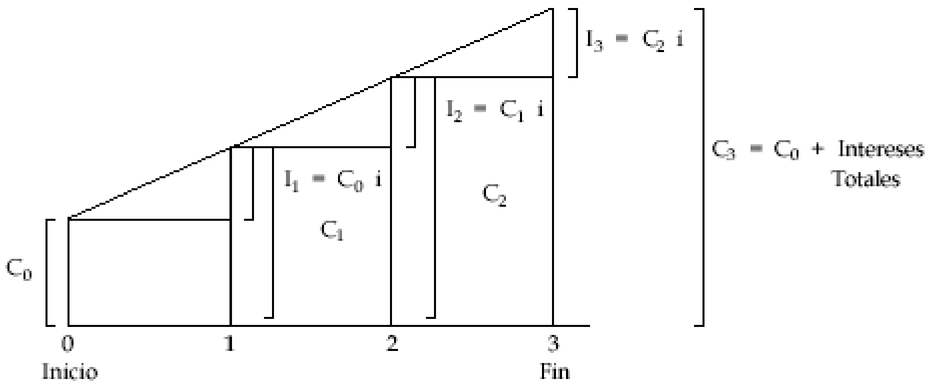
Las operaciones en régimen de compuesta se caracterizan porque los intereses, a diferencia de lo que ocurre en régimen de simple, a medida que se van generando pasan a formar parte del capital de partida, se van acumulando, y producen a su vez intereses en períodos siguientes (son productivos). En definitiva, lo que tiene lugar es una capitalización periódica de los intereses. De esta forma los intereses generados en cada período se calculan sobre capitales distintos (cada vez mayores ya que incorporan los intereses de períodos anteriores).

Podemos definir a la misma como aquella operación financiera cuyo objeto es la sustitución de un capital por otro equivalente con vencimiento posterior mediante la aplicación de la ley financiera de capitalización compuesta.

El capital final (montante) (C_n) se va formando por la acumulación al capital inicial (C_0) de los intereses que periódicamente se van generando y que, en este caso, se van acumulando al mismo durante el tiempo que dure la operación (n), pudiéndose disponer de ellos al final, en tal momento, recuperamos capital inicial y una masa económica producida por intereses de intereses (intereses productivos).

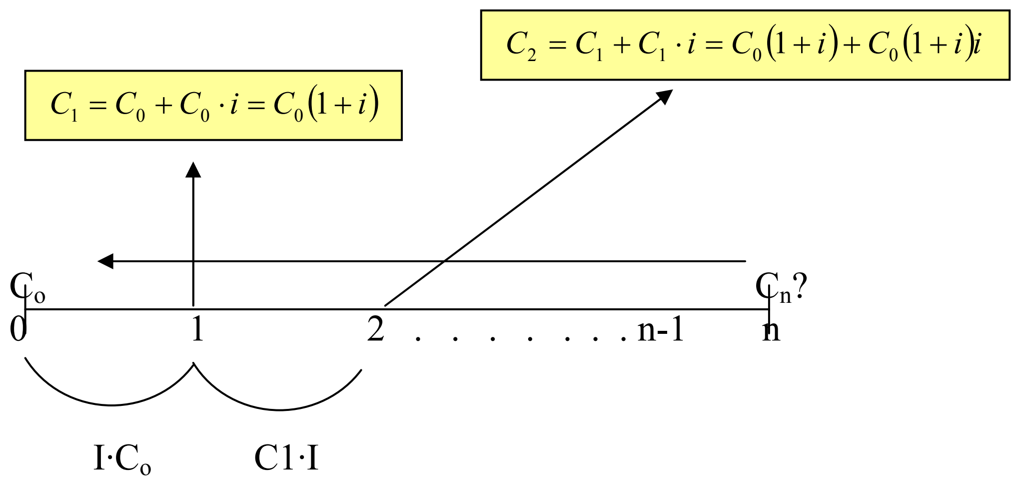
Los intereses son productivos, lo que significa que a medida que se generan, se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses en los períodos siguientes. Además, los intereses de cualquier período siempre los genera el capital existente al inicio de dicho período.

Gráficamente para una operación de tres períodos:



3.1. Capitalización compuesta a tanto vencido.

Operación que se caracteriza porque los intereses se pagan al final de la operación. Decir que es una operación compuesta es agregar que los intereses son acumulativos. Si indicamos el comportamiento de la mencionada capitalización en una gráfica de tipo temporal podríamos representar lo siguiente:



El capital al final de cada período es el resultado de añadir al capital existente al inicio del mismo los intereses generados durante dicho período. De esta forma, la evolución del montante conseguido en cada momento es el siguiente:

Momento 0: C_0

Momento 1: $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1+i)$

Momento 2: $C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_0(1+i) + C_0(1+i)i = C_0(1+i)(1+i) = C_0(1+i)^2$

Momento 3: $C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_0(1+i) + C_0(1+i) + C_0(1+i) \cdot i = C_0(1+i)(1+i)(1+i) = C_0(1+i)^3$

…

Momento n: $C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot i \Rightarrow\Rightarrow C_0 (1+i)^n$

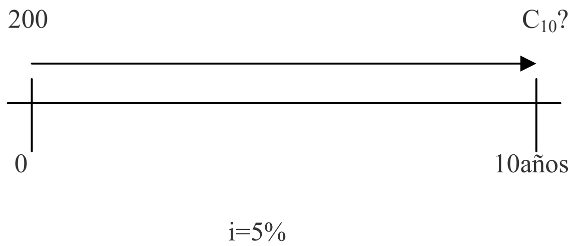
Expresión que permite calcular el capital final o montante (C_n) en régimen de compuesta, conocidos el capital inicial (C_0), el tipo de interés (i) y la duración (n) de la operación.

Expresión aplicable cuando el tipo de interés de la operación no varía. En caso contrario habrá que trabajar con el tipo vigente en cada período.

A partir de la expresión anterior (denominada fórmula fundamental de la capitalización compuesta) además de calcular montantes, podremos, conocidos tres datos cualesquiera, despejar el cuarto restante.

Ejemplo 9:

Calcular el montante obtenido al invertir 200 euros al 5% anual durante 10 años en régimen de capitalización compuesta.



C_{10} = 200 x (1 + 0,05)^{10} = 325,78 €

Si se hubiese calculado en simple:

C_{10} = 200 x (1 + 0,05 x 10) = 300 €

La diferencia entre los dos montantes (25,78 €) son los intereses producidos por los intereses generados y acumulados hasta el final.

Cálculo del capital inicial.

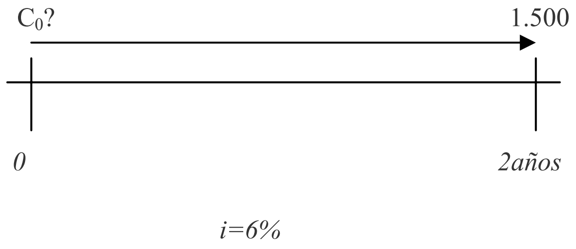
Partiendo de la fórmula de cálculo del capital final o montante y conocidos éste, la duración de la operación y el tanto de interés, bastará con despejar de la misma:

$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$

de donde se despeja C_0 $\Rightarrow$ $C_0 = \dfrac{C_n}{(1+i)^n}$

Ejemplo 10:

¿Cuánto deberé invertir hoy si quiero disponer dentro de 2 años de 1.500 euros para comprarme un coche, si me aseguran un 6% de interés anual compuesto para ese plazo?



$$C_0 = \frac{1.500}{(1+0'06)^2} = 1.334'99\ €$$

Cálculo del tipo de interés.

Si se conoce el resto de elementos de la operación: capital inicial, capital final y duración, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización compuesta y despejar la variable desconocida.

$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$

Los pasos a seguir son los siguientes:

- Pasar el C_0 al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + i)^n$$

• Quitar la potencia (extrayendo raíz n a los dos miembros):

$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = \sqrt[n]{(1 + i)^n}$$

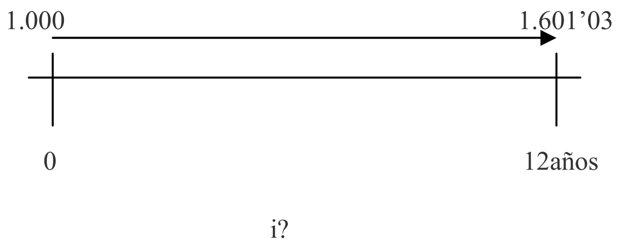
$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = (1 + i)$$

• Despejar el tipo de interés:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_o}} - 1$$

Ejemplo 11:

Determinar el tanto de interés anual a que deben invertirse 1.000 euros para que en 12 años se obtenga un montante de 1.601,03 euros.



$$1.000 \cdot (1 + i)^{12} = 1.601'03$$

$$i = \sqrt[12]{\frac{1.601'03}{1.000}} - 1 = 0'04 = 4\%$$

Cálculo de la duración

Conocidos los demás componentes de la operación: capital inicial, capital final y tipo de interés, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización compuesta y despejar la variable desconocida.

• Punto de partida:

$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$

• Pasar el C_0 al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_o} = (1+i)^n$$

- Extraemos logaritmos a ambos miembros:

$$\log \frac{C_n}{C_0} = \log(1+i)^n$$

- Aplicamos propiedades de los logaritmos:

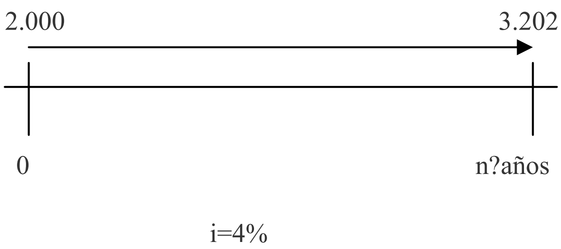
$$\log C_n - \log C_0 = n \cdot \log(1+i)$$

- Despejar la duración:

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$$

Ejemplo 12:

Un capital de 2.000 euros colocado a interés compuesto al 4% anual asciende a 3.202 euros. Determinar el tiempo que estuvo impuesto.



$$2.000 \cdot (1+0'04)^n = 3.202$$

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} = \frac{\log 3.202 - \log 2.000}{\log 1'04} = 12 años$$

Cálculo de los intereses totales.

Conocidos los capitales inicial y final, se obtendrá por diferencia entre ambos:

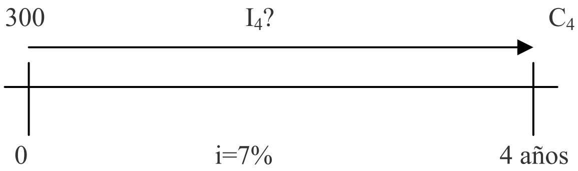
$$I_n = C_n - C_0$$

Otro modo de conseguirlo:

$$C_0(1+i)^n - C_0 = C_0\left[(1+i)^n - 1\right]$$

Ejemplo 13:

¿Qué intereses producirán 300 euros invertidos 4 años al 7% compuesto anual?



$$C_4 = 300 \cdot (1+0'07)^4 = 393'24\,€$$

$$I_n = 393'24 - 300 = 93'24\,€$$

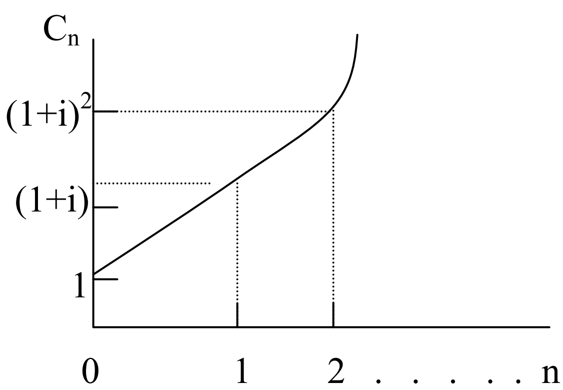
La representación de dicha ley es la siguiente:

$C_o=1 \rightarrow f(n)= (1+I)^n=C_n$

$(1+ I)^n > 0$ Si $n \rightarrow \infty$ $f(n) \rightarrow \infty$

$f'(n)=(1+i)^n \cdot \ln(1+i) > 0$ --- ***Creciente***

$f''(n)=(1+i)^n \cdot \ln^2(1+i) > 0$ --- ***Convexa***



La <u>capitalización compuesta :</u> se aplica normalmente en operaciones a l/p.

3.2. Descuento compuesto a tanto vencido.

Los intereses se pagan al finalizar la operación. Se define como la operación inversa a la ley financiera de capitalización compuesta a tanto vencido.

Los intereses son productivos, lo que significa que:

- A medida que se generan se restan del capital de partida para producir (y restar) nuevos intereses en el futuro y, por tanto.

- Los intereses de cualquier período siempre los genera el capital del período anterior, al tanto de interés vigente en dicho período.

En una operación de descuento el punto de partida es un capital futuro conocido (C_n) cuyo vencimiento se quiere adelantar. Deberemos conocer las condiciones en las que se quiere hacer esta anticipación: duración de la operación (tiempo que se anticipa el capital futuro) y tanto aplicado.

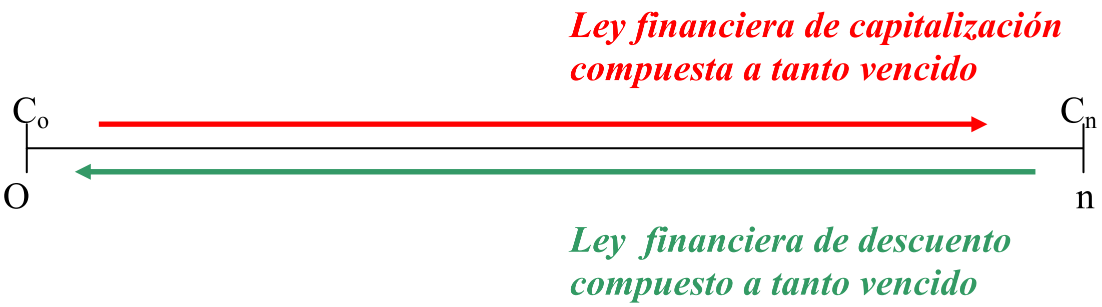
El capital que resulte de la operación de descuento (capital actual o presente –C_0–) será de cuantía menor, siendo la diferencia entre ambos capitales los intereses que un capital deja de tener por anticipar su vencimiento. En definitiva, si trasladar un capital desde el presente al futuro implica añadirle intereses, hacer la operación inversa, anticipar su vencimiento, supondrá la minoración de esa misma carga financiera.

Al igual que ocurría en simple, se distinguen dos clases de descuento: racional y comercial, según cuál sea el capital que se considera en el cómputo de los intereses que se generan en la operación:

- Descuento racional.

- Descuento comercial.

Gráficamente recordamos el comportamiento temporal de ambas leyes o magnitudes



Utilizando un desarrollo analítico, podemos señalar el siguiente recorrido matemático:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \rightarrow \left[C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n \cdot (1+i)^{-n} \right]$$

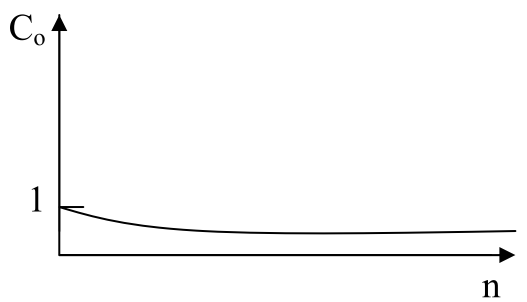
Representación:

$C_n = 1 \rightarrow f(n) = C_0 = (1+i)^{-n}$

$(1+ I)^{-n} > 0$ Si $n \rightarrow \infty$ $f(n) \rightarrow 0$

f ´(n)= $-(1+i)^{-n} \cdot \ln(1+i) < 0$--- ***Decreciente***

f ´´(n)= $(1+i)^{-n} \cdot \ln^2(1+i) > 0$--- ***Convexa***

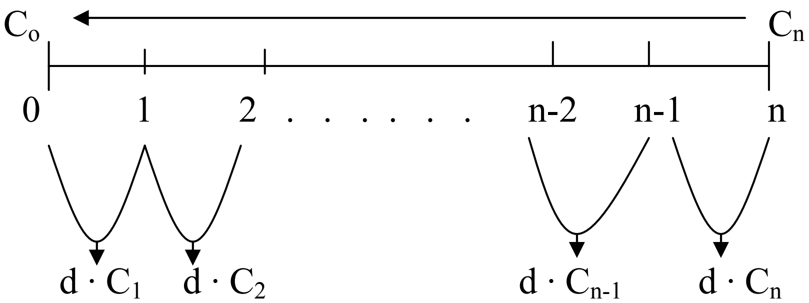


$$D_c = C_n - C_o = C_n - \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

3.3. Capitalización y descuentos compuestos a tanto anticipado.

Los intereses en esta operación se pagan al principio. En este caso se considera generador de los intereses de un período el capital al final de dicho período, utilizando el tipo de descuento (d) vigente en dicho período.

Gráficamente:



Si eso es así, podemos determinar la siguiente formulación:

$$C_{n-1} = C_n - d \cdot C_n = C_n \cdot (1-d)$$

$$C_{n-2} = C_{n-1} - d \cdot C_{n-1} = C_{n-1} \cdot (1-d) = C_n \cdot (1-d) \cdot (1-d) = C_n \cdot (1-d)^2$$

$$\vdots$$

$$C_0 = C_1 - d \cdot C_1 = C_1(1-d) = C_n(1-d)^{n-1} \cdot (1-d) = C_n \cdot (1-d)$$

$$\boxed{D_c = C_n - C_0 = C_n - C_n \cdot (1-d)^n = C_n \cdot \left[1-(1-d)^n\right]}$$

Decir, que dicha fórmula no es muy utilizada en la práctica

Relación de equivalencia entre el interés y el descuento.

$$C_n = C_0 \cdot (1-d)^{-n}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_n = C_0(1+d)^{-n} \\ C_n = C_0(1+i)^n \end{array}\right\} \qquad C_0(1-d)^{-n} = C_0(1+i)^n$$

Punto de corte

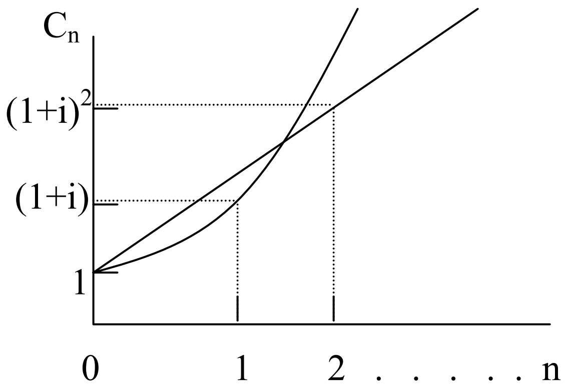
$$\sqrt[\cancel{n}]{(1-d)^{-1\cdot\cancel{n}}} = \sqrt[\cancel{n}]{(1+i)^{\cancel{n}}} \Rightarrow (1-d)^{-1} = (1+i) \rightarrow \frac{1}{1-d} \neq 1+i$$

a) $i = \dfrac{1}{1-d} - 1 = \dfrac{1-(1-d)}{1-d} = \dfrac{1-1+d}{1-d} = \dfrac{d}{1-d}$

b) $1=(1+i)(1-d);\ \frac{1}{1+i}=1-d \Rightarrow \frac{1}{1+i}-1=-d;\quad 1-\frac{1}{1+i}=d;\quad d=\frac{i}{1+i}$

3.4. Comparación entre las leyes simples y las leyes compuestas.

Pretendemos mostrar de manera gráfica la relación que se produce entre las leyes simples y las leyes compuestas, ambas a tanto vencido. En tal sentido, podemos encontrar una representación como la que se indica:



$f(n)=C_0(1+i)^n \Rightarrow COMPUESTA$

$f(n)=C_0(1+ni) \Rightarrow SIMPLE$

$n=1$

$(1+i)^1=(1+1\cdot i) \Leftrightarrow (1+i)=(1+i)$

$a\ corto\ plazo \Rightarrow simple \rangle compuesta$

- Si capitalizamos menos de un periodo de tiempo, es preferible la ley financiera simple.
- Por un tiempo igual a un periodo, encontramos que será igual o indistinto la utilización de cualquiera de estas leyes financieras.
- Si capitalizamos por un tiempo superior a un periodo la capitalización compuesta proporciona mayor montante.

Si el estudio se realiza con un capital de 1.000 euros colocados a un tipo del 10% efectivo anual, durante 6 años, el siguiente cuadro recoge el montante alcanzado al final de cada período en un caso y otro:

AÑOS	1	2	3	4	5	6
En simple	1.100'00	1.200'00	1.300'00	1.400'00	1.500'00	1.600'00
En compuesta	1.100'00	1.210'00	1.331'00	1.464'10	1.610'51	1.771'56

Donde se observa que el montante obtenido en régimen de simple va aumentando linealmente, cada año aumentan 100 euros (los intereses del año, generados siempre por el capital inicial de 1.000 €). Por su parte, en la operación en compuesta, cada año se van generando más intereses que en el período anterior: la evolución no es lineal sino exponencial, consecuencia de ser el capital productor de los mismos cada año mayor (los intereses generan nuevos intereses en períodos siguientes).

3.5. Cambio en las unidades de medida: tantos equivalentes.

La definición de tantos equivalentes es la misma que la vista en régimen de simple, esto es, dos tantos cualesquiera, expresados en distintas unidades de tiempo, son tantos equivalentes cuando aplicados a un mismo capital inicial y durante un mismo período de tiempo producen el mismo interés o generan el mismo capital final o montante.

Como ya se comentó cuando se hablaba del interés simple, la variación en la frecuencia del cálculo (y abono) de los intereses suponía cambiar el tipo de interés a aplicar para que la operación no se viera afectada finalmente. Entonces se comprobó que los tantos de interés equivalentes en simple son proporcionales, es decir, cumplen la siguiente expresión:

$$i = i_k \times k$$

Sin embargo, esta relación de proporcionalidad no va a ser válida en régimen de compuesta, ya que al irse acumulando los intereses generados al capital de partida, el cálculo de intereses se hace sobre una base cada vez más grande; por tanto, cuanto mayor sea la frecuencia de capitalización antes se acumularán los intereses y antes generarán nuevos intereses, por lo que existirán diferencias en función de la frecuencia de acumulación de los mismos al capital para un tanto de interés dado.

Este carácter acumulativo de los intereses se ha de compensar con una aplicación de un tipo más pequeño que el proporcional en función de la frecuencia de cómputo de intereses. Todo esto se puede apreciar en el siguiente ejemplo, consistente en determinar el montante resultante de invertir 1.000 euros durante 1 año en las siguientes condiciones:

a) Interés anual del 12%

$C_n = 1.000 \times (1 + 0{,}12)^1 = 1.120{,}00$

b) Interés semestral del 6%

$C_n = 1.000 \times (1 + 0{,}06)^2 = 1.123{,}60$

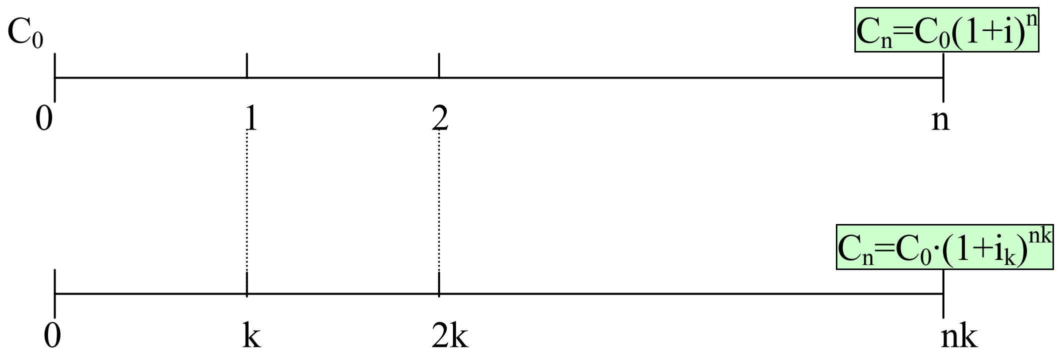
c) Interés trimestral del 3%

$C_n = 1.000 \times (1 + 0{,}03)^4 = 1.125{,}51$

Los resultados no son los mismos, debido a que la capitalización de los intereses se está realizando con diferentes frecuencias manteniendo la proporcionalidad en los diferentes tipos aplicados.

Para conseguir que, cualquiera que sea la frecuencia de capitalización, el montante final siga siendo el mismo es necesario cambiar la ley de equivalencia de los tantos.

Gráficamente podemos representar la situación como sigue:



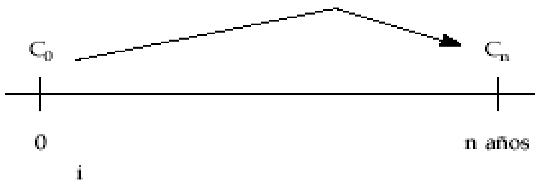
k es la frecuencia de capitalización, que indica:

• El número de partes iguales en las que se divide el período de referencia que se tome (habitualmente el año).

• Cada cuánto tiempo se hacen productivos los intereses, esto es, cada cuánto tiempo se acumulan los intereses, dentro del período, al capital para producir nuevos intereses.

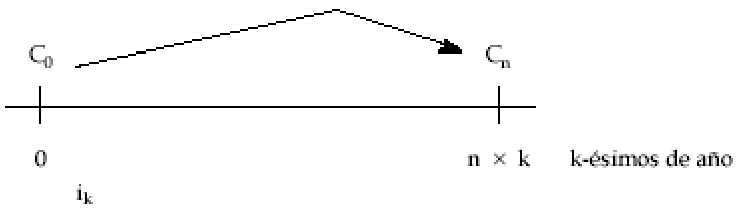
Esta relación se obtiene a partir de la definición de equivalencia vista anteriormente, obligando a que un capital (C_0) colocado un determinado período de tiempo (n años) genere el mismo montante (C_n) con independencia de la frecuencia de acumulación de intereses (i o i_k):

Utilizando el tanto anual i, el montante obtenido será:



$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Utilizando el tanto k-esimal i_k, el montante obtenido será:



$$C_n = C_0(1+i)^{nk}$$

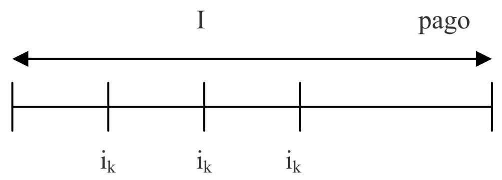
Si queremos que el montante sea el mismo en los dos casos, se tiene que producir la igualdad entre los resultados de ambas operaciones.

$$(1+i)^n = (1+i_k)^{nk} \rightarrow (1+i) = (1+i_k)^k$$

$$\left.\begin{array}{l} i_k = (1+i)^{1/k} - 1 \\ i = (1+i_k)^k - 1 \end{array}\right\} \quad \boxed{i_k < \frac{i}{k}}$$

3.6. Tanto nominal y tanto efectivo.

Suponemos que la liquidación de los intereses en lugar de realizarse en cada unidad de tiempo (por ejemplo:1 año), se puede realizar en tiempos que son menores a la unidad (semestrales, trimestrales, mensuales…).



El tanto nominal se define como un tanto teórico que se obtiene multiplicando la frecuencia de capitalización k por el tanto k-esimal:

$J_k = i_k \times k$

Expresión pensada para pasar fácilmente de un tanto referido al año (el tanto nominal) a un tanto efectivo k-esimal, ya que el tanto nominal es proporcional.

$J_2 = 2 \cdot i_2$ Supongamos una situación en la que se produzca un interés nominal anual que se liquide cada 6 meses, en tal situación podríamos indicar la anterior expresión. J_2 , le llamaremos interés nominal equivalente a 6 meses, periodo en el que se liquidarán los intereses, por tanto, i_2 será el tipo de interés efectivo semestral.

Así pues, en compuesta, los tantos de interés pueden ser tantos efectivos (i o i_k) o nominales (J_k), teniendo en cuenta que el tanto nominal (también conocido como anualizado) no es un tanto que realmente se emplee para operar: a partir de él se obtienen tantos efectivos con los que sí se harán los cálculos necesarios.

Las entidades financieras hablan habitualmente de tantos nominales en vez de tantos efectivos, con independencia de que se puedan pagar los intereses por anticipado o por vencido. En tal situación es importante hacer un desarrollo analítico para saber los modos de cálculo de esta magnitud.

Podríamos destacar:

$$j_k = K \cdot i_k$$

Sabemos que: $(1+i) = (1+i_k)^k \rightarrow (1+i) = (1+\frac{j_k}{k})^k$

$$\Rightarrow\Rightarrow (1+k)^{\frac{1}{k}} = \left(1+\frac{jk}{k}\right) \Rightarrow\Rightarrow$$

$$\boxed{j_k = \left[(1+i)^{1/k} - 1\right] \cdot k}$$

Como observación, podemos indicar como precisiones adicionales las siguientes:

$$i_k < \frac{i}{k} \rightarrow i_k \cdot k < i \Rightarrow j_k < i$$

A continuación se muestran las relaciones existentes entre tantos nominales y tantos efectivos.

Tabla de conversión de tantos nominales a tantos anuales efectivos (TAE).

La fórmula de cálculo es: $i = (1 + i_k)^k - 1 = (1 + J_k/k)^k - 1$

	K=1	***K=2***	***K=4***	***K=12***
Interés efectivo anual	***Anual***	***Semestral***	***Trimestral***	***Mensual***
8%	8'00%	7'846%	7'771%	7'721%
9%	9'00%	8'806%	8'711%	8'649%
10%	10'00%	9'762%	9'645%	9'569%
11%	11'00%	10'713%	10'573%	10'482%
12%	12'00%	11'660%	11'495%	11'387%

El tipo de interés efectivo anual correspondiente a un tipo nominal aumenta a medida que aumenta el número de capitalizaciones anuales. Es decir, cada tipo nominal está calculado para trabajar en una determinada unidad de tiempo y sólo en ésa; si se quiere cambiar a otra unidad distinta, habrá que volver a recalcular el tanto nominal, para que el resultado final no cambie.

Tabla de conversión de tantos efectivos anuales (TAE) a tantos nominales

La fórmula de cálculo es:

$J_k = i_k \times k = [(1 + i)^{1/k} - 1] \times k$

	K=1	***K=2***	***K=4***	***K=12***
Interés efectivo anual	***Anual***	***Semestral***	***Trimestral***	***Mensual***
8%	8'00%	8'160%	8'243%	8'300%
9%	9'00%	9'202%	9'308%	9'381%
10%	10'00%	10'250%	10'381%	10'471%
11%	11'00%	11'303%	11'462%	11'572%
12%	12'00%	12'360%	12'551%	12'683%

El tipo de interés nominal correspondiente a un tipo efectivo anual disminuye a medida que aumenta el número de capitalizaciones anuales.

Igual que antes, si queremos conseguir un mismo tanto efectivo anual a partir de un tanto nominal, éste deberá ser diferente en función de la frecuencia de capitalización para la cual se haya calculado.

3.7. Capitalización y descuento continuos.

Para el estudio de la capitalización en una situación continua se parte de la idea de que el valor de K tenderá a infinito.

$$(1+i) = (1+i_k)^k \rightarrow i = \left(1+\frac{j_k}{k}\right)^k - 1$$

$$i = \left(1+\frac{1}{\frac{k}{j_k}}\right)^k - 1 \rightarrow i = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{j_k}}\right)^{k/j_k}\right]^{j_k} - 1$$

$$i = \left[\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}\right]^{j_k} - 1$$

$$\boxed{i = \ell^{j_k} - 1}$$

3.8. Operaciones que se suelen realizar utilizando las leyes compuestas.

Vamos a conocer los convenios de tipo lineal y exponencial. El uso de uno u otro se produce en una situación en la que hay una parte anual entera, y un valor o exceso adicional que es fracción de un año.

Pensemos en un capital que definimos como C_p , en un tiempo que se va a determinar como p y equivalente a n+θ.

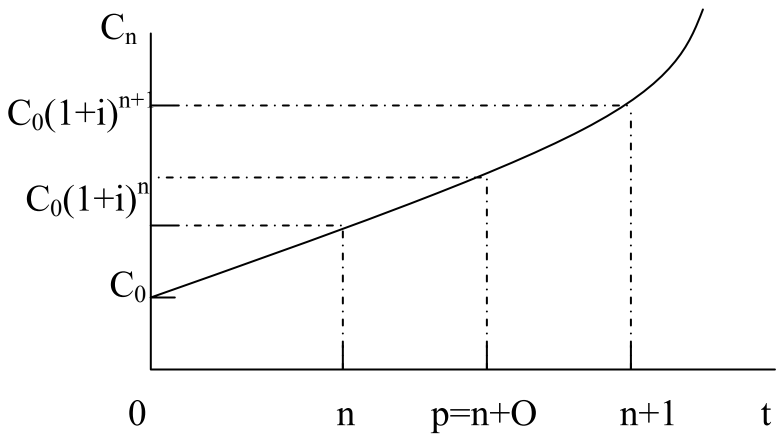
El convenio exponencial, podríamos determinar un tratamiento analítico como el siguiente:

$$C_p = C_0(1+i)^p \Rightarrow ley\ \ financiera\ compuesta$$

De otra parte, el convenio linea se caracterizaría porque consideraría a la parte anual en capitalización compuesta y la parte adicional en capitalización simple.

$$C_p^* = C_0(1+i)^n \cdot (1+\theta \cdot i)$$

El convenio lineal, en tal situación, supone un valor superior a lo que es el convenio exponencial. Gráficamente podríamos representarla de la siguiente forma.



$$C_p^* = C_0(1+i)^n \cdot (1+\theta \cdot i) = C_n(1+\theta \cdot i) = C_n + i \cdot C_n \cdot \theta = C_n(1+i\theta)$$

El montante obtenido con el convenio lineal es mayor que el convenio exponencial.

EJERCICIOS CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

1. Calcular el montante obtenido al invertir 200 euros al 5% anual, durante 10 años.

$$C_0 = 200 euros$$
$$i = 5\% compuesto$$
$$n = 10 años$$
$$C_n = ?¿$$
$$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow 200(1+0'05)^{10} = 325'78$$

2. Determinar cuál fue el capital inicial que se aplicó en una operación de dos años de duración al 6% de interés anual sabiendo que el capital final obtenido fue de 1.500euros.

$$C_0 = ?¿$$
$$n = 2 años$$
$$i = 6\% compuesto$$
$$C_n = 1.500 euros$$
$$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{1.500}{(1+0'06)^2} = 1.335 euros$$

3. ¿Qué interés producirán 300 euros invertidos cuatro años al 7% de interés compuesto anual?

$$C_0 = 300$$
$$n = 4 años$$
$$i = 7\% compuesto$$
$$C_n = ?¿$$
$$C_n = C_0(1+i)^n = 300(1+0'07)^4 = 393'24 - 300 = 93'24 euros$$

4. Determinar el tanto de interés anual a que deben invertirse 1.000 euros para que en 12 años se puedan obtener un montante de 1.601'03 euros.

$C_0 = 1.000 euros$

$C_n = 1.601'03 euros$

$n = 12 años$

$i = ?¿$

$$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = \sqrt[12]{\frac{1.601'03}{1.000}} - 1 = 0'04 = 4\%$$

5. Un capital de 2.000 euros colocado a un interés compuesto del 4% anual, asciende a 3.202 euros. Determinar el tiempo que estuvo impuesto.

$C_0 = 2.000 euros$

$i = 4\% compuesto$

$C_n = 3.202$

$n = ?¿$

$$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow n = \frac{\log C_n - \log C_o}{\log(1+i)} = \frac{\log 3.202 - \log 2.000}{\log(1+0'04)} = 11'99 = 12 años$$

6. Determinar el capital final que se obtiene si coloco 1.000 euros al 10% anual durante 6 años (capitalización simple y capitalización compuesta).

$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow compuesta$

$C_n = C_0(1+n \cdot i) \Rightarrow simple$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
SIMPLE	1.100	1.200	1.300	1.400	1.500	1.600
COMPUESTA	1.100	1.210	1.331	1.464'1	1.610'51	1.771'56

7. Calcular los intereses alcanzados por un capital de 193 euros colocados al 5% durante 16 años, 2 meses y 5 días.

$I = ?¿$

$C_0 = 193 euros$

$i = 5\% compuesto$

$n = 16 años, 2 meses, 5 días = 16'1805554 años$

$C_n = C_0(1+i)^n = 193(1+0'05)^{16'1805554} = 425'02251$

$I = 425'02251 - 193 = 232'02251$

8. El tanto nominal convertible semestralmente para que un capital de 110 euros se convierta en 200 euros, transcurridos 10 años. ·Se nos pide el tanto nominal convertible".

$C_0 = 110 euros$

$C_n = 200 euros$

$n = 10 años$

$C_n = C_0 (1 + i_k)^{10 \cdot 2}; i_k = \sqrt[10 \cdot 2]{\frac{200}{110}} - 1 = 0'030343$

9. Calcular el montante alcanzado por un capital de 680 euros que se colocó al 20% nominal, capitalizable trimestralmente, durante 2 años y 8 meses, siendo la capitalización cuatrimestral.

$C_n = ?¿$

$C_0 = 680\, euros$

$n = 2 años, 8 meses \Rightarrow 2'66666\ años$

$i = 20\% anual\ \ capitaliza\ ble\ trimestral\ mente$

$i = (1 + 0'05)^4 - 1; i = 21'550625\ \text{int}\ erés\ \ efectivo\ \ anual$

$j_k = \left[(1 + i)^{1/k} - 1\right]k \Rightarrow \left[(1 + 0'215506\ )^{1/3} - 1\right]1 = 0'06721161$

$C_n = 680 (1 + 0'06721161\ )^{2'6666 \cdot 3} = 1.144'2674$

10. Determine el tanto equivalente al 6% cuando se realiza una capitalización semestral.

$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1; i_k = (1 + 0'06)^{1/2} - 1 = 0'029563 \Rightarrow 2'9563\%$

11. Un capital está impuesto durante 4 años, al 5% al interés compuesto, calcular el tanto equivalente si la capitalización se realiza por trimestre.

$n = 4 años$

$i = 5\% compuesto\ efectivo$

$i_k = ?¿\ capitalizable\ \ por\ trimestres$

$i = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k - 1; 0'05 = \left(1 + \frac{j_k}{4}\right)^4 - 1; 1'05 = \left(1 + \frac{j_k}{4}\right); j_k = 0'0490889$

12. Determine los intereses producidos por un capital de 800 euros colocado al 9% durante 12 años.

$I = ?¿$

$C_0 = 800 euros$

$i = 9\%$

$n = 12 años$

$C_n = C_0(1+i)^n = 800(1+0'09)^{12} = 2.250'1318$

$I = 2.250'1318 - 800 = 1.450'1318$

13. Calcular el montante de 1.000 euros al 14% interés compuesto anual, sabiendo que se capitaliza por trimestre.

$C_0 = 1.000 euros$

$i = 14\% compuesta\ capitalizable\ trimestralmente$

$C_n = ?¿$

$n = 4$

$j_k = \left[(1+i)^{1/k} - 1\right] \cdot k = \left[(1+0'14)^{1/4} - 1\right] \cdot 1 = 0'0332994$

$C_n = C_0(1+i)^{n \cdot k} = 1.000(1+0'0332994)^{1 \cdot 4} = 1.139'9996 euros$

14. Hallar el interés compuesto de 2500 € prestados al 8% en 6 años.

I?	I = Co[(1+i)^t-1
Co = 2500	I = 2500 [(1,08)^6-1]
t = 6	I = 2500*0,5868743
i = 8%	**I = 1467,1858**

15. Hallar el tiempo que se necesita para triplicar un capital colocado al8% de interés compuesto.

t?	Ct = Co *(1+i)^t	
Co =	3Co = Co * 1,08^t	
Ct = 3Co	3 = 1,08^t	
i = 8%	log3 = t(log 1,08)	
	0,471212 = 0,0334237t	
	t = 14,27915	**14 años, 3 meses y 9 días**

16. Calcular el capital que habrá de imponerse a interés compuesto del 12% durante 6 años para obtener un montante de 6032,6 €

Co?	Ct = Co *(1+i)^t
i = 12%	6032,6 = Co (1,12)^6
t = 6	6032,6 = 1,9738227Co
Ct = 6032,6	**Co = 3056,3**

17. Calcular el tanto por ciento de interés compuesto al que se coloco un capital de 9000 € durante 6 años para obtener un montante de 14281,9€

i?	Ct = Co *(1+i)^t
Co = 9000	14281,9 = 9000*(1+i)^6
t = 6	1,5868778 = (1+i)^6

Ct = 14281,9	$(1{,}5878778)^{1/6} - 1 = i = 0{,}0800003$
	i = 8%

18. Hallar el tiempo que se necesito para duplicar un capital colocado a interés compuesto del 5 %.

t?	$Ct = Co * (1+i)^t$	
Co?	$2Co = Co * 1{,}05^t$	
Ct = 2Co	$2 = 1{,}05^t$	
i = 5%	log2 = t (log1,05)	
	T = 14,20669	**14 años, 2 meses y 14 días**

19. Calcular el tiempo necesario para que un capital colocado al 10% de interés compuesto se vea incrementado en un 60%.

t?	$Ct = Co * (1+i)^t$	
i = 10%	$1{,}6Co = Co * 1{,}1^t$	
Co?	$1{,}6 = 1{,}1^t$	log1,6= t (log1,1)
Ct = Co+0,6Co	t=4,313057	
Ct = 1,6Co	**4 años, 11 meses y 5 días**.	

20. Calcular el tanto por ciento que hemos de colocar un capital para que en 20 años y un mes produzca unos intereses igual a su tercera parte.

t = 20 años y 1 mes	$I = Co[(1+i)^t - 1$
i?	$1/3Co = Co\ [(1+i)^{7230/360} - 1]$
Co?	$1/3 = (1+i)^{7230/360} - 1]$
I= 1/3 Co	i = 0,0144275
	i = 1,44275%

21. Calcular los intereses producidos por un capital de 800 € colocados al 9% durante 12 años.

I?	$I = Co[(1+i)^t - 1$
Co = 800	$I = 800[(1+0{,}09)^{12} - 1]$
i = 9%	**I = 1450,1318**
t = 12 años	

22. Calcular el tanto de interés al que se coloco un capital de 50000€ durante 4 años si nos dieron unos intereses de 13123,8 €

i?	$I = Co[(1+i)^t - 1$

Co = 50000 $\qquad$ $13123{,}8 = 50000[(1+i)^4-1]$
t = 4 $\qquad$ $1{,}262476 = (1+i)^4$
I = 13123,8 $\qquad$ $1{,}262476^{1/4} - 1 = i$
$i = 0{,}0599997$ $\qquad$ **i = 5,99997%**

23. La diferencia del montante obtenido por un capital colocado al 4% durante 5 años según se siga capitalización compuesta o simple es de 49,96 €. ¿cual fuel el capital?

i = 4% $\qquad$ $Co(1+i)^t - Co(1+it) = 49{,}96$
t = 5 años $\qquad$ $Co[(1{,}04)^5 - (1+0{,}04*5)] = 49{,}96$
Co= ? $\qquad$ $Co[1{,}2166529-1{,}2] = 49{,}46$
$0{,}0166529Co = 46{,}96$
Co = 3000,0781

24. Calcular el tanto equivalente al 6% cuando se realiza la capitalización por semestre 2,9563014% por periodo.

Semestral → Anual $\qquad$ anual trimestral
$I = (1+0{,}06)^2 - 1$ $\qquad$ $¿? = (1 * 0{,}1236)^{1/4} - 1$
$I = 0{,}1236 = 12{,}36\%$ $\qquad$ $i_4 = 0{,}039563$
i_4= 2,9563%

25. Un capital esta impuesto durante 4 años al 5% de interés compuesto calcular el tanto equivalente se la capitalización se realiza por trimestres.

I= 5% $\qquad$ $i = \left(1 + \frac{Jk}{k}\right)^k - 1$
I_4= ?
$0{,}05 = (1+\underline{Jk})^4 - 1$
$1{,}05^{1/4} - 1 = Jk/4$
$Jk = 0{,}0490889$
Jk=4,90889

26. Sabiendo que en tanto nominal convertible semestralmente es del 6%. Hallar el tanto efectivo correspondiente.

$I_2 = \frac{0{,}06}{2}$ $\qquad$ $i = (1+0{,}05)^{2-1}$
$i = 0{,}0609$
$i_2 = 0{,}03$ $\qquad$ **i = 6,09%**

27. Sabiendo que el tanto efectivo es de 5% determinar el correspondiente tanto nominal convertible trimestralmente.

I= 5% — $i = \left(1 + \frac{Jk}{k}\right)^{k} - 1$

I_4= ?

K=4 — $0{,}05 = \left(1 + \frac{Jk}{4}\right)^{4} - 1$

Jk=?

$1{,}05^{1/4} - 1 = Jk/4$

Jk =0,0490889

Jk = 4,90889%

28. Hallar los tantos anuales equivalentes a :

- Tanto semestral del 3%

i_k= 3% — $i = (1+0{,}03)^2 - 1$

i = 0,0609%

- Tanto trimestral del 1,5625%

i_k= 1,5625% — $i = (1+0{,}015625)^4 - 1$

i = 10,0639801

i = 6,39801%

- Tanto mensual del 0,5%

i_k= 0,5 — $i = (1+0{,}005)^{1/2} - 1$

i =0,0616778

i = 6,16778%

29. Operando al 6% nominal convertible semestralmente. Calcular el montante de 150 € en 10 años.

Ct = ? — $i_2 = 0{,}06/2$ $\quad i_2 = 0{,}03$

Co= 150€ — $Ct = 150(1+0{,}03)^{20}$

t = 10 años ___ 20 sem — **Ct = 270,91669**

i = 6%

30. Hallar el tanto nominal convertible semestralmente para que un capital de 110 € se convierta en 200 € en 10 años.

Co = 110 — $i_2 = (1+0{,}0616068)^2 - 1$

Ct = 200 — $i_2 = 0{,}030343096$

t = 10 años_____210 sem — $J_2 = 0{,}0303496*2$

$200 = 110\,(1+i)^{10}$ — $J_2 = 0{,}060686192$

i = 0,0616068 — $\mathbf{J_2 = 6{,}068692\%}$

31. Calcular el montante alcanzado por un capital de 50000€ que se coloco durante 7 años al 10% nominal capitalizable se3mestralmente.

Ct=? — $Ct = Co\,(1+i_k)^{k*(\text{año})}$

Co= 50000 € — $Ct = 50000\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^{2*7}$

t = 7 años

10% nominal capitalizable semestralmente — **Ct = 98996,58**

Jk = 10%

$Ik = \frac{Jk}{2k} = \frac{0,1}{2}$

32. ¿Cuál hubiese sido el montante alcanzado en el ejercicio anterior si el tanto hubiese sido del 10% anual?.

Ct =?
Co = 10000€
t = 7 años
i = 10% anual

$Ct= Co(1+i_k)^k$
$Ct= 50000 (1+0,1)^7$
Ct= 97435,855

33. Calcular el tanto trimestral al que hemos colocado 80000€ para que al cabo de 12 años se convierta en 240000€.

Co= 80000
Ct = 240000
t = 12 años
i_4= ?

$Ct= Co (1+i_k)^k$
$240000=80000(1+i_k)^{4*12}$
$3=(1+i_k)^{4*12}$
$i_4=0,0231516$
$\mathbf{i_4=2,31516\%}$

34. Un capital se 500000€ se coloca al 6% anual durante cinco años mientras que otro capital de igual cuantía se coloca en las mismas condiciones durante el mismo tiempo pero al tanto de 6% nominal capitalizable trimestralmente. Calcula la diferencia de intereses.

Co= 500000€
i = 6%
t=5años

Co=500000€
t=5 años
Jk= 6%
$i_k=\frac{0,06}{4}=0,015$

$Ct= Co (1+i_k)^k$
$Ct= 500000(1+0,06)^5$
$Ct= 669112,79 \Rightarrow I_1=169113,79$
$Ct=500000(1+0,015)^{4*5}$
$Ct=673427,5 \Rightarrow I_2=173427,5$

$\mathbf{I_1-I_2= 4314,7133}$

35. En una entidad bancaria se ingresó el 1 de octubre de 1997, 500000€ al 1% por semestres naturales. Determinar la cuantía retirada el 16 de Marzo de 2002.

1 Oct 1997
Co = 500000€
J_k =1% nominal capitalizable Semestralmente
16 Mz 2002

$Ct= Co(1+i_k)(1+i_k \frac{W}{K})(1+i_k\frac{X}{H})$
Ct = 520353,52*1,0025278*1,0220
Ct = 522755,68

Oct_____30	4 años	Ene____31
Nov_____30		Feb____28
Dic______31		Maz____16
91 días		75 días

$i_k = \frac{Jk}{k} = \frac{0,01}{2} = 0,006$

36. Calcular cuánto tiempo tardará un capital de 30000 € en producir 20000 € de interés al 6%.

Co = 30000	$I = Co\,[(1+i_k)^t - 1]$
Ct = Co + 20000	$20000 = 30000[(1+0,06)^t - 1]$
t = ?	$0,6 = (1,06)^t - 1$
i = 6%	log 1,6 = t (log 1,06)
I = 20000	**t = 8,7667136**

37. Hallar el capital que se colocó el 1 de octubre de 1997 al 2% semestral siguiendo el convenio lineal para que el montante al 16 de febrero de 2002 sea 14272.

Co?	$Ct' = Co\,(1+i)^t\,(1+i_k\, w/k)$
1 octubre 1997	$14272 = Co\,(1+0,02)^4\,(1+0,02 * 135/180)$
16 febrero 2002	14272 = Co 1,1716594 * 10,015
Ct = 14272	14272 = Co 1,1892343
2% semestral	**Co = 12000,999**
convenio lineal	
4 años	

$\left.\begin{array}{l}\text{4 meses}\\ \text{15 días}\end{array}\right\}$ 135/180

38. Calcular el montante alcanzado por un capital de 12000 € al 3% en 2 años y 8 meses, siguiendo el convenio lineal.

Ct =?	$Ct = Co\,(1+ i_k)^t\,(1+ i_k\, w/k)$
Co = 12000	$Ct = 12000\,(1,03)^2\,(1,03 * 8/12)$
i = 8%	$Ct = 12000\,(1,03)^2\,(1,02)$

t = 2 años y 8 meses — **Ct = 12985,42 €**
Convenio lineal

39. Calcular el tiempo que tardará en triplicarse un capital colocado al 4% de interés compuesto.

t?	$Ct = Co\ (1+i)^t$	
Co =	$3Co = Co\ (1{,}04)^t$	
Ct = 3 Co	$3 = 1{,}04^t$;	$\log 3 = t \log 1{,}04$
i = 4%	t = 28,011084	
	28 años y 4 días	

40. La diferencia entre los montantes alcanzados por un capital fue de 14,16 según se coloque siguiendo el convenio lineal o en convenio exponencial al 5% durante 3 años y medio. Determinar el capital.

I= 14,16	$Ct= Co(1+ i_k)^n(1+i_k)^{w/k}(1+i_k)^{x/h}$___exp.
i = 5%	$Ct= Co(1+i_k)^n(1+i_k\ w/k)$____lineal.
t = 3 años, 6 meses	Ct`-Ct = 14,16

$14{,}16= Ct= Co(1+i_k)^n(1+i_k\ w/k)- Co(1+ i_k)^n(1+i_k)^{w/k}(1+i_k)^{x/h}$
14,16=Co 1,157625*1,025-Co1,186216Co
14,16=1,1865656Co-1,18621623Co
14,16=0,000358025Co
Co = 40110,474

41. Hallar el valor actual de 4000 € pagaderos dentro de 8 años al 6% de descuento.

E =?	$E = N\ (1\text{-}d)^t$
N = 4000	$E = 4000\ (1\text{-}0{,}06)^8$
t = 8	$E = 4000 * 0{,}94^8$
d = 6%	**E = 243828**

42. Hallar el valor actual de 4000 € pagaderos dentro de 8 años al 6%

N = 4000	$Ct = Co\ (1+i)^t$
t = 8	$4000 = E\ (1{,}06)^8$
i = 6%	4000 = E 1,5938481
	E = 2509,65

43. Supuesto el tanto unitario del 0,05. Hallar el valor actual de una deuda de 50000€, pagadera a los 15 años.

N = 50000 — $E = N * V^t$

$i = 5\%$	$E = 5000 * 1{,}05)^{-15}$
$t = 15$ años	$\mathbf{E = 24050{,}855}$

44. Al comprar una casa, un señor paga 200000€, acordando pagar 2 años después 200000€, Hallar el valor al contado de la casa supuesto un 3% de valoración.

5000 €	$E = N(1+ i)^t$
t = 2 años____200000 €	$E = 200000(1{,}08)^{-2}$
Al contado?	$E = 171467{,}76$
$i = 8\%$	
	1711467,76+50000 = **221467,76**

45. Calcular el descuento de 80000 € al 6%, 7 meses antes de su vencimiento.

Dc =?	Dc = Ndt
N = 80000	Dc = 8000 * 0,06 * 7/12
d = 6%	**Dc = 2800**
t = 7 meses	

46. Un capital descontado 10 años antes de su vencimiento al 4%, dio un descuento de 648,87 €. Hallar su valor actual.

Dc = 648,87	$Dc = N [1 – (1-d)^t]$
N?	$648{,}87 = N [1-(1-0{,}04)^{10}]$
d = 4%	N = 1935,869
t = 10 años	
	E = N – Dc ; E = 1935,869 – 648,87
	E = 1287,09

47. Calcular el valor actual al 8% de un crédito de 6000€ tres años antes de su vencimiento.

N= 6000	$Ct= Co(1+i)^t$
t = 3 años	$N = E(1+ i)^t$
d = 8%	$6000 = E (1{,}08)^3$
E = ?	**E = 4762,9904**

48. Un crédito de 8250 € al ser descontado al 9% de descuento compuesto se redujo a 4684,92 €. ¿Cuál era su plazo?

E = 4684,92	$E = N (1-d)^t$
N = 8250	$4684{,}92 = 8250 (1-0{,}09)^t$
d = 9%	$0{,}567869 = 0{,}91^t$
t?	t = 6,0000047 **t = 6 años**

49. Hallar durante cuantos años hemos de descontar un capital al 3% mensual compuesto para que se vea disminuido en su 30%.

t = ?	E = N-60% N
N =?	E = N(1-0,3)
d_k = 3%	E = N(0,7)
k = 12 meses	$E = N(1-d_k)^p$
	$0,7=0,97^p$
	log 0,7= log 0,97 p
	p =11,70965

50. Calcular el tanto por ciento de descuento compuesto que se aplicó a un crédito de 235000€ si al ser descontado tres años antes de su vencimiento redujo en 4900,85€.

N = 23500	$E = N\,(1-d)^t$
E = 4900,85	$18599=23500[(1-d)^3]^{1/3}$
t = 3 años	0,924999=(1-d)
i =?	d = 0,075
	d = 7,5%

51. El descuento de un capital de 40000€ con vencimiento dentro de 3 años fue de 1500€ ¿ que tipo se aplicó?.

N = 4000	$E = N\,(1-d)^t$	
t = 3 años	$38500-4000(1-d)^3$	
D = 1500	$0,9625= (1-d)^3$	
	-0,0126595=-d	**d = 1,26595%**

52. Hallar el tanto de interés equivalente al tanto de descuento del ejercicio anterior.

$$i = \frac{d}{1-d}.$$

$$i = \frac{0,0126595}{1-0,0126595}.$$

$$\mathbf{i = 1,28218\%}$$

53. Cual fue el nominal de un efecto a dos años y un tanto de 10% sabiendo que la diferencia entre Dc y Dr fue de 164,46€.

N = ?
t= 2 años
i= 10%
Dc-Dr=164,46€

$Dc=N[1-(1-d)^t]$
$Dr= N[1-(1+i)^{-t}]$

$N[1-(1-d)^t] - N[1-(1+i)^{-t}] = 164,46$
$N[1-(1-0,1)^2]-N[1-(1+0,1)^{-2}]=164,46$
N 0,19-N0,1735537=164,46
N = 9999,829

54. Cual será el efectivo que se obtendrá por el descuento de tres letras, de 20000€ nominales cada una que vencen a 1, 2 y 3 años respectivamente si se le aplica un 10% de interés.

$N_1=20000$
$N_2=20000$
$N_3=20000$
i= 10%
$t_1=1$ año
$t_2= 2$ años
$t_3= 3$ años

$E_1=?$
$E_2=?$
$E_3=?$

$E = N(1+1)^{-t}$
$E_1= 20000 (1+01)_{-1}$
$E_1= 28181,818$

$E_2=20000(1+0,1)^{-2}$
$E_2=16528,826$

$E_3=20000(1+0,1)^{-3}$
$E_3=15026,296$

$E_1+ E_2+ E_3 = E$
$18181,818+16528,826+15026,296_{=}$
E = 49737,04

55. La diferencia entre el descuento comercial y el racional de un crédito fue de 4250€ sabiendo que el descuento comercial superó en un 15% al descuento racional. Hallar el nominal del crédito. El tiempo es inferior al año.

Dc-Dr= 4250
Dc=Dr + 15% Dr
N= ?
Dc=Dr(1+0,15)
1,15Dr-Dr=4250
0,15Dr=4250
Dr=28333,3

$Dc= N*d*t$
$Dr= \frac{N*i*t}{(1+it)}$

$Ndt-\frac{N\ i\ t}{(1+it)} = 4250$
$N= \underline{1,15\ Dr}$; 0,15N= 1,15 Dr

1,15 –1

0,15N= 1,15 * 28333,3

0,15N=32583,3

N= 21722,22

56. Se adeuda 90000€ a pagar a los 30días. Se va a liquidar la deuda a los 70 días , contando intereses al 9%, ¿que cantidad se entregará?.

90000____ 30 d_ 40d
60000____ 60 d_ 10d
50000____ 90 d_ -20 d

Liquidar 70días
i = 9%

N= E (1+it)
N = 90000(1+0,09* 40/360)
N = 90900

N = 60000(1+0,09*10/360)
N = 60150

50000= E(1+0,09* -20/360)
N = 49751,244

90900+60150+49751,244= **200801,244**

57. Aplicando un 8% de interés compuesto anual agrupar en un solo pago en el día de hoy tres deudas:
    a. 2000 ; vencen dentro de 4 años
    b. 5000; vencen dentro de 6 años
    c. 1850; con vencimiento hoy.

$Ct(1+i)^{t} = C_1(1+i)^{-t_1} + C_2(1+i)^{-t2} C_3(1+i)^{-t3}$

$Ct\ (1{,}08)^{-0}= 2000(1{,}08)^{-4}+5000(1{,}08)^{-6}+1850(1{,}08)^{0}$

Ct= 1470,66+3150,85+1850

Ct=6470,91

58. Calcular el vencimiento medio de tres capitales de 10000 €,1500 €, 2000 €, que vencen respectivamente dentro de 3,4,y 5 años se los intereses compuestos se computan al 7,8%.

$$\left.\begin{array}{l}10000\_\_\_3\\15000\_\_\_4\\20000\_\_\_5\end{array}\right\}\quad 45000$$

i = 7,5%

$Ct(1+i)^{-t} = C_1(1+i)^{-t1}+C_2(1+i)^{-t2}+C_3(1+i)^{-t3}$

$45000(1{,}075)^{-t}=10000(1{,}075)^{-3}+15000(1{,}075)^{-4}+20000(1{,}075)^{-5}$

$$(1{,}075)^{-t}= \frac{8049{,}61+11232{,}01+13931{,}17}{45000}$$

-t log 1,075=log 0,738062

t=0,2381103

t=2 meses

59. Calcular el momento en que deben sustituirse 3 deudas de 1000, 2000 y 3000 € que vencen dentro de 3, 5 y 7 años respectivamente si el tanto de interés es del 6% compuesto anual y pago único desea hacerse de: a) 55000€; b) 80000€ y c) suponiendo que el pago único se quiere realizar dentro de 6 años determinar la cuantía a pagar.

a) Ct= 55000

$55000(1{,}06)^{-t}= 10000(1{,}06)^{-3}+20000(1{,}06)^{-5}+30000(1{,}06)^{-7}$

$55000(1{,}06)^{-t}= 43293{,}06$

$(1{,}06)^{-t}= 0{,}7871465$

-t log (1,06)= log 0,7871465

t = 4,1075223

4 años, 1 mes y 9 días

b) Ct = 60000

$60000(1{,}06)^{-t}= 10000(1{,}06)^{-3}+20000(1{,}06)^{-5}+30000(1{,}06)^{-7}$

$60000(1{,}06)^{-t}= 43293{,}06$

-t log (1,06)= log 0,721551

t = 5,6007951

t = 5 años, 7 meses y 6 días

c) Ct = ?

t = 6 años

$Ct = 10000(1{,}06)^3+20000(1{,}06)^4+30000(1{,}06)^5$

Ct = 11910,16+21200+28301,887

Ct = 61412,047

60. En una entidad bancaria se ingresó el uno de octubre de 19X7, 500.000 euros al 1% nominal capitalizable por semestres naturales. Determinar la cuantía retirada el 16 de marzo del año 20X2.

$C_0 = 500.000 euros$

$inicio = 1/10/19X7$

$i = 1\% no \min al\ capitalizable\ por\ semestres$

$final = 16/03/20X2$

$5 meses\ y\ 16 días = 0'46111 años$

$C_n = C_0(1+i)^{n \cdot k} = 500.000(1+0'01)^{0'46111 \cdot 2} = 504.609'3243 euros$

61. Determinar el montante alcanzado por un capital de 12.000 euros al 3%, en 2 años y 8 meses, siguiendo el convenio lineal. ¿Calcule lo mismo con el convenio exponencial?

$C_0 = 12.000 euros$

$i = 3\% simple\ anual$

$n = 2 años\ y\ 8 meses$

$C_p^* = C_0(1+i)^n(1+\theta \cdot i) = 12.000(1+0'03)^2\left(1+\frac{8}{12}\cdot 0'03\right) = 12.985'416$

$C_p = C_0(1+i)^n(1+i)^\theta = 12.000(1+0'03)^2(1+0'03)^{8/12} = 12.984'1596$

62. Calcular la cantidad alcanzada por un capital de 50.000 euros que se colocó durante 7 años al 10% nominal, capitalizable semestralmente.

$C_0 = 50.000 euros$

$n = 7 años$

$j_k = 10\% no \min al, capitalizable\ semestralmente$

$i_k = \frac{J_k}{k}$

$C_n = C_0(1+i)^{n \cdot k} = 50.000(1+0'1)^{7 \cdot 2} = 189.874'92 euros$

63. ¿Cuál es el montante alcanzado en el ejercicio anterior si el tanto hubiese sido del 10% anual?

$C_0 = 50.000 euros$

$n = 7 años$

$i = 0'1 anual$

$C_n = ?¿$

$C_n = C_0(1+i)^n = 50.000(1+0'1)^7 = 97.435'855 euros$

64. Calcular el tanto trimestral al que hemos colocado 80.000 euros para que al cabo de 12 años se convierta en 240.000 euros.

$$C_0 = 80.000$$
$$n = 12 años$$
$$C_n = 240.000$$
$$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = \sqrt[12]{\frac{240.00}{80.000}} - 1 = 0'0958727$$
$$trimestral = i/4 = 0'02397$$

65. Un capital de 50.000 euros se coloca al 6% anual durante 5 años, mientras que otro capital de igual cuantía se coloca en las mismas condiciones durante el mismo tiempo pero al tanto del 6% nominal capitalizable trimestralmente. Calcula la diferencia de intereses.

$$C_0 = 50.000 euros$$
$$i = 6\% simple\ anual$$
$$n = 5 años$$

$$C_0 = 50.000 euros$$
$$j_k = 6\% no\min al\ capitalizable\ trimestralmente$$
$$n = 5 años$$

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i) = 50.000(1 + 5 \cdot 0'06) = 65.000$$
$$C_n = C_0(1+i)^{n \cdot k} = 50.000(1 + 0'06)^{4 \cdot 5} = 160.356'8$$
$$Diferencia: 95.356'8$$

66. Determine el tiempo que tardará en triplicarse un capital colocado al 4% de interés compuesto.

$$C_0 = C_0\ ó\ A$$
$$C_n = 3C_0\ ó\ 3A$$
$$i = 4\% compuesto\ anual$$
$$n = ?¿$$
$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} = \frac{\log 3A - \log A}{\log(1+0'04)} = 28'0110 años \Rightarrow 28 años, 3 días / casi\ 4 días$$

67. La diferencia entre los montantes alcanzados por un capital fue de 14'16 euros según se coloque siguiendo el convenio lineal o el convenio exponencial, siendo el 5% aplicable durante 3 años y medio. Determine el capital.

$$C_o = ?¿$$
$$C_p^* - C_p = 14'16 euros$$
$$i = 5\%$$
$$n = 3 años\ y\ medio$$

$$C_p = C_o(1+i)^n(1+i)^\theta$$
$$C_p^* = C_0(1+i)^n(1+\theta \cdot i)$$
$$\left[C_0(1+i)^n(1+\theta \cdot i)\right] - \left[C_o(1+i)^n(1+i)^\theta\right] = 14'16$$
$$\left[C_0(1+0'05)^3\left(1+\frac{1}{2}0'05\right)\right] - \left[C_0(1+0'05)^3(1+0'05)^{1/2}\right] = 14'16$$
$$\left[C_0 1'186565625\right] - \left[C_0 1'186212639\right] = 14'16$$
$$C_0 = 40.114'91 euros$$

PRÁCTICA DE AMBAS CAPITALIZACIONES

1) Calcular el numero de trimestres al que hemos de colocar 730000 € al 6% semestral para que la diferencia entre sus intereses sea de 600 € según se fija el año comercial o el año civil.

Co = 730000
i = 6%x2 = 12% = 0´12
Dif = 600

Dif = 5CoiT / 360x365;
600 = 5x730000x0´12xT / 360x365
600 = 438000T / 131400

T = 600 / 3´333; T = 180 días / 90 = 2trimestres

2) Se coloca el 70% de un capital al 12% anual el resto al 4´5 semestral, sabiendo que transcurrido 6 meses los intereses de la 1º parte fueron en 6000 € mas grande que la segunda parte. Halla el capital.

0´7 Co → 12% = 0´12

0´3 Co → 4´5% x 2 = 9% = 0´09
T = 6x30 = 180 días

$I_1 = I_2 + 6000$; 0´7Cox0´12x0´5 = (0´3Cox0´09x0´5) + 6000;

0´042Co – 0´0285Co = 6000; Co = 210526´32

3) El descuento racional de un crédito de 80000 en 75 días fue de 2000 ¿ A que tanto de descuento se realizó la operación?

N = 80000
T = 75 / 360 = 0´208
Dr = 2000

Dr = NiT / (1 + iT); 2000 = 80000x i x 0´208 / (1 + 0´208i); 2000 + 416i = 1664i;

i = 2000 / 16224; i = 0´123274162;

d = i / 1 + iT; d = 0´123274162 / 1 + 0´123274162 x 0´208; d = 0´12 = 12%

4) Hallar durante cuantos meses nos han descontado un capital sabiendo que según nos lo descuentan al 4% de interés simple o al 4% de descuento simple nos hacen un descuento de 390 y 409´5 respectivamente.

Dif = Dc – Dr; Dif = 409´5 – 390 = 19´5

Dif = DrdT; 19,5 = 390x 0´04xT; T = 1´25 años x 12 = 15 meses

5) El pago de 5 letras iguales con vencimiento en 10, 20, 30, 40, y 50 días respectivamente fue sustituido por un pago único de 800000 €. Calcular el día en que se entregaron.

$Nt = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$; 800000 = 5N; N = 160000

800000T = 160000x10 + 160000x20 + 160000x30 + 160000x40 + 160000x50;

800000T = 24000000; T = 30 días

6) El 12 de Abril acordamos sustituir 3 efectos de 25000, 36000 y 27000 € con vencimientos respectivos el 26 mayo, el 17 de junio y el 2 de julio por 2 efectos uno con vencimiento 3l 23 de Abril, y otra cuantía que es el triple de la anterior. ¿Cual será el vencimiento de este ultimo efecto?

$E_1 + E_2 + E_3 = E_4 + 3E_4$; 25000 + 36000 + 27000 = $4E_4$; E_4= 22000

$E_1 = 25000 \rightarrow$ 26 mayo a 12 abril = 44 días

$E_2 = 36000 \rightarrow$ 17 junio a 12 abril = 66 días

$E_3 = 27000 \rightarrow$ 2 julio a 12 abril = 81 días

$E_4 = 22000 \rightarrow$ 23 abril a 12 abril = 11 días

$E_5 = 66000 \rightarrow T =$ ¿? = 82 días = 3 de Julio

$25000x44 + 36000x66 + 27000x81 = 22000x11 + 66000T;$

$5663000 = 242000 + 66000T;$ $T = 82$ días

7) Deseamos sustituir dos deudas de 70000 y 90000 que vencen dentro de 50 y 70 días respectivamente, por un solo efecto. Suponiendo que la negociación se realiza aplicando un 9% de interés simple anual, determinar:

A) El vencimiento del pago único, si este es de 165000
B) El vencimiento del pago único, si este es de 160000
C) Cuantía del pago único si se realiza dentro de 100 días

A)

$N = E(1 + iT) \rightarrow E = N / (1 + iT)$

$E_1 = 70000 / 1 + 0'09x\ (50/360) = 691355'8$

$E_2 = 90000 / 1 + 0'09x(70/360) = 88452'1$

$E_1 + E_2 = E_3; \rightarrow 691355'8 + 88452'1 = 165000 / 1 + 0'09x(T/360);$

$157587'9 + 39'4T = 165000;$ $T = 188$ días

B) Como la suma de los dos capitales es igual a 160000, el tanto de interés no influye en la operación

$N_1T_1 + N_2T_2 = N_3T_3 \rightarrow 70000x50 + 9000x90 = 160000T \rightarrow$ $T = 61$ días

C)Me dan tanto de interés por lo que utilizo la siguiente formula: N = E(1 + iT)

$N_1 = 70000\ (1 + 0'09(50/360)) \rightarrow N_1 = 70875$

$N_2 = 90000\ (1 + 0'09(70/360)) \rightarrow N_2 = 91575$

$N_1 + N_2 = N_3 \rightarrow N_3 = 162450$

8) Tres letras de 50000, 60000, y 70000 que vencen dentro de 3, 5, y 7 meses respectivamente se van a sustituir por otros dos, uno de 100000 con vencimiento en 4 meses y otro de cuantía a determinar dentro de 6 meses. Si el tanto de negociación es el 6% simple anual, determinar la cuantía de dicho pago.

$N = E(1 + iT)$

$50000(1 + 0'09(3/12)) + 60000(1 + 0'09(5/12)) + 70000(1 + 0'09(7/12)) = 100000(1 + 0'09(4/12)) + X(1 + 0'09(6/12))$

$51125 + 73500 + 73675 = 103000 + 1'045X \rightarrow X = 91196'17$

9) El 14 de mayo de 1997, colocamos 30000 € que retiramos el 15 de abril del 2000, si el tanto efectivo anual fue del 22% y la capitalización es por trimestres naturales, calcular la cuantía que retiramos.

Com. Natural $\rightarrow C_T = C_o(1 + i_K(w/k)) \times (1 + i_K)^T \times (1 + i_K(w/s))$

$i = 22\% = 0'22 \rightarrow i_K = (1 + i)^{1/K}-1 \rightarrow i_K = 0'050969125 = 5'0969125\%$

97 →
- 1-1 → 31-3
- 1-4 → 30-6 → 47 Días
- 1-7 → 30-9 → 1 Trimestre
- 1-10 → 31-12 → 1 Trimestre

98 y 99 = 8 Trimestres

1-1 → 31-3 → 1 Trimestre

1-4 → 30-3 → 15 Días

2000

1-7 → 30-9

1-10 → 31-12

C_T =30000(1 + 0´050969125(47/90)) x (1 + 0´050969125)^{11}x (1 + 0´050969125(15/90))

C_T = 53665´23

10)Calcular el tanto nominal capitalizable trimestralmente al que se colocó 100000 € el 15 de mayo de 1997 si al retirarlo el 28 de septiembre de 1999 nos entregaron 123320

Com. Exponencial → $C_T = C_o(1 + i_K)^{T+W/K}$

15 mayo 97 → 15 mayo de 99 → 12 Trimestres
16 mayo 99 → 28 septiembre 99 → 1 Trimestre y 44 días

$123320 = 100000(1 + i_K)^{13+44/90}$→ $i_K = (1´2332)^{1/13´4888889}$→ i_K = 0´015661003
i_K = 1´5661003%

$J_K = i_K$ x K → J_K = 0´015661003 x 4 → J_K = 0´062644014 → J_K = 6´2644014%

11)Determinar el capital que impuesto el 15 de enero de 1996 al 3% por trimestres naturales y retirado el 20 de octubre de 1999 produjo 35674 Eu de intereses.

$I = [C_o(1 + i_K(w/k)) \times (1 + i_K)^T \times (1 + i_K(s/k))] – C_0$

1-1 → 31-3 → 74 días

1-4 → 30-6 → 1 trimestre

96

1-7 → 30-9 → 1 trimestre

1-10 → 31-12 → 1 trimestre

97 y 98 → 8 trimestres

1-1 → 31-3 → 1 trimestre

1-4 → 30-6 → 1 trimestre

99

1-7 → 30-9 → 1 trimestre

1-10 → 31-12 → 20 días

$35674 = [C_o(1 + 0'03(74/90)) \text{ x } (1 + 0'03)^{14} \text{x } (1 + 0'03(20/90))] - C_o$

$35674 = 0'560227783\ C_o \rightarrow$ $C_o = 63677'67$

12)Cuanto tiempo estuvo descontado un efecto de 40000 si nos entregaron 27429´49 al 9% de descuento compuesto.

$d = 9\% = 0'09$

$D = N - E \rightarrow D = 40000 - 27429'49 \rightarrow D_C = 12570'51$

$D_C = N(1 - (1 - d)^T) \rightarrow 12570'51 = 40000(1 - (1 - 0'09)^T) \rightarrow 0'68573725 = (0'91)^T \rightarrow$

$\text{Log}(0'68573725) = T \text{ x } \text{Log}(0'91) \rightarrow$ $T = 4$ Años

13)¿Cual fue el nominal de un efecto de 2 años y un tanto del 10% sabiendo que la diferencia entre Dc y Dr fue de 164´46?

$\text{Dif} = Dc - Dr \rightarrow 164'46 = (N(1 - (1 - 0'1)^2\ ) - (N(1 - (1 + 0'1)^{-2} \rightarrow$

$164'46 = \cancel{N} - N(1 - 01)^2 \cancel{- N} + N(1 + 0'1)^{-2} \rightarrow 164'46 = 0'19N - 0'173553719N$

$\rightarrow$ $N = 10000$

14)Calcular el montante que se obtiene al imponer un capital de 40000 € al 4% anual compuesto durante 4 años.

$C_T = C_0(1 + i)^T \rightarrow C_T = 40000(1 + 004)^2 \rightarrow C_T = 46794'34$

15)Durante cuanto tiempo se invirtió un capital de 120000 al 4% Compuesto anual, si alcanzó un montante de 129792.

$C_T = C_o(1 + i)^T \rightarrow 129792 = 120000(1 + 0'04)^T \rightarrow 1'08116 = (1'04)^T \rightarrow$

$\text{Log}(108116) = T \times \text{Log}(1'04) \rightarrow T = 2$ año

16)Un capital invertido al 8% anual compuesto produjo unos intereses de 6919. Sabiendo que al cabo de 2 años alcanzo un capital final de 48500 ¿Cuál fue la cuantía de dicho capital?

$I = C_T - C_o \rightarrow C_o = C_T - I \rightarrow C_o = 48500 - 6919 \rightarrow C_o = 41581$

17)Halla el tanto por ciento anual efectivo compuesto al que se invirtió un capital de 100000 € durante 3 años. Si alcanzó un montante de 122504´3.

$C_T = C_o(1 + i)^T \rightarrow 122504'3 = 100000(1 + i)^3 \rightarrow i = (122504'3/100000)^{1/3}-1 \rightarrow$

$i = 0'07 = 7\%$

18)Dos personas invierten el mismo capital de 300000 € durante 2 años. El primero lo coloca al 10% anual compuesto y el segundo a un 10% simple. ¿Cual de ellos conseguirá un capital final mayor? ¿Por qué?

$C_o = 300000$ $T = 2$ años 363000 $i = 10\%$	Compuesto $\rightarrow C_T = C_o(1 + i)^T \rightarrow C_T = 300000(1 + 0'1)^2 \rightarrow C_T =$

$C_o = 300000$ $T = 2$ años 360000 $i = 10\%$	Simple $\rightarrow C_T = C_o(1 + iT) \rightarrow C_T = 300000(1 + 0'1x2) \rightarrow C_T =$

Obtiene más dinero el de la compuesta, porque permanece el interés constante durante todo el proceso de capitalización.

19)Un capital de 300000 € se invierte durante dos años a un 7% anual compuesto ¿Cuáles son los intereses obtenidos?

$C_T = C_o(1 + i)^T \rightarrow C_T = 300000(1'07)^2 \rightarrow C_T = 343470$

$I = C_T - C_o = 343470 - 300000 \rightarrow I = 34470$

20)Sabemos que con un capital de 320000, obtenemos a las 7 años un montante de 584963. Calcular:

A) El tanto efectivo anual
B) El tanto efectivo cuatrimestral
C) El tanto nominal capitalizable por cuatrimestre.

A) $C_T = C_o(1 + i)^T \rightarrow 584963 = 320000(1 + i)^7 \rightarrow i = (584963/320000)^{1/7}-1 \rightarrow$

$i = 0'09 = 9\%$

B) $i_K = (1 + i_K)^{1/K} \rightarrow i_K = (1'09)^{1/7}-1 \rightarrow i_K = 0'029141669 = 2'9141669\%$

C) $J_K = i_K \text{ x } K \rightarrow J_K = 0'029141669 \text{ x } 3 \rightarrow J_K = 0'087425007 = 8'7425007\%$

21)Calcula el montante que se obtiene al invertir un capital de 50000 al 8% nominal capitalizable por semestre durante 3 años.

$J_K = 8\% = 0'08 \rightarrow J_K = i_K \text{ x } K \rightarrow i_K = J_K/K \rightarrow i_K = 0'08/2 \rightarrow i_K = 0'04 = 4\%$

$i = (1 + i_K)^K-1 \rightarrow i = (1 + 0'04)^2-1 \rightarrow i =0'0816 = 8'16\%$

$C_T = C_o(1 + i)^T \rightarrow C_T = 50000(1 + 0'0816)^3 \rightarrow C_T = 58492'93$

22)Calcular el capital que se colocó al 5% semestral durante 6 años sabiendo que los intereses del ultimo semestre ascendieron a 76965´3.

T = 6 años = 12 semestres
$i_K = 5\% = 0'05$
$I_{12} = 76965'3$

$I_T = I_1(1 + i_K)^{K-1} \rightarrow I_T = C_o \text{ x } i_K(1 + i_K)^{K-1} \rightarrow I_T = C_o \text{ x } 0'05(1'05)^{11} \rightarrow C_o = 900000$

23)El descuento racional de un crédito de 80000 en 75 días fue de 2000 ¿A que tanto de descuento se hizo la operación?

Dr = 2000
N = 80000
T = 75 días

Dr = NiT/i + iT → (2000 = 80000 x i x 75/360)/ 1 + i x 75/360 →

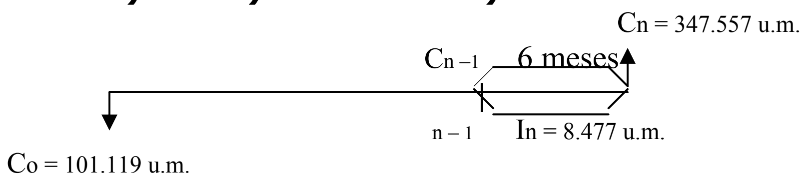
2000 + 41´66666 i = 16666´6666 i → i = 0´120300751 = 12´0300751%

d = i /1 + iT → d = 0´120300751/ 1 + 0´120300751 →

d = 0´117359412 = 11´7359412%

Relación de Ejercicios Universitarios: Capitalización Simple y Compuesta

1. Los intereses del último semestre en que estuvo impuesto un capital de 101.119u.m. fueron de 8.477u.m. La devolución de la imposición exigió un pago de 347.577 u.m. Se pide calcular: a) Tanto efectivo semestral, b) Tanto nominal anual capitalizable semestralmente c) Tanto efectivo anual y d) Duración de la operación.
Sol: a) 2'5% b) 5% c) 5'0625 % d) 25 años.



a) Tanto efectivo semestral. (i_2 ***)***

$C_n = C_{n-1} + I_n \Rightarrow C_{n-1} = C_n - I_n = 347.557$ u.m. – 8.477 u.m. = <u>339.080 u.m.</u>

$$C_{n-1} = \frac{C_n}{(1+i_2)} \Rightarrow 339.080 = \frac{347.557}{(1+i_2)} \Rightarrow i_2 = 2'5\%$$

b) Tanto nominal anual capitalizable semestralmente. (j_2 ***)***

$$j_2 = i_2 \cdot 2 = 2'5\% \cdot 2 = 5\%$$

c) Tanto efectivo anual (i ***)***

$(1+i) = (1+i_2)^2\text{-}1 \Rightarrow (1+0.025)^2\text{-}1 \Rightarrow i = \underline{5'0625\%} \quad > j_2$

d) Duración de la operación

$\text{Cn} = \text{Co} \cdot (1+i)^n \Rightarrow 347.557 \text{ u.m.} = 101.119 \text{ u.m.} \ (1+0'050625)^n \Rightarrow$

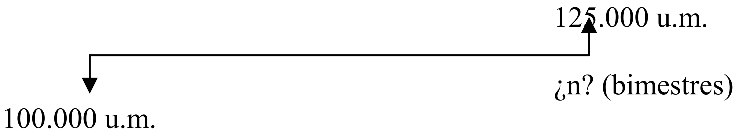
$\Rightarrow \quad 3'4371087 = (1'050625)^n \Rightarrow \log(3'4371087) = n \cdot \log(1'050625) \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 25 años$

Otra alternativa apartado d:

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} = \frac{\log 347.557 - \log 101.119}{\log 1'050625} = 25 años$$

2. Una persona deposita 100.000 u.m. en una entidad financiera al 9% de interés nominal anual capitalizable bimestral. ¿Al cabo de cuanto tiempo podrá retirar 125.000 u.m.?
Sol. 2 años, 5 meses y 29 días.



$j_6 = 9\%$

$$i_6 = \frac{j_6}{6} = \frac{9\%}{6} = 1'5\%$$

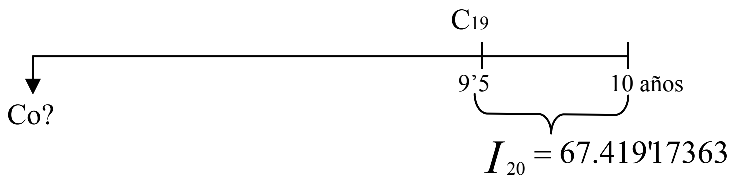
$100.000 \quad (1+0'015)^n = 125.000 \quad \Rightarrow \quad (1'015)^n = 1'25 \quad \Rightarrow$
$n \cdot \log(1'015) = \log(1'25) \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 14'98$ periodos bimensuales $\Rightarrow n = 2 \cdot 14'98 = 29'96$ meses $\Rightarrow$
$\Rightarrow n = 2$ años, 5 meses y 29 días.

29'96
-12
-12
- 5
0'96 $\rightarrow 0'96 \cdot 30$ días =28'8 días

Otra alternativa de resolución:

$$n = \frac{\log C_n - \log C_o}{\log(1+i)} = \frac{\log 125.000 - \log 100.000}{\log 1'015} = 14'987532$$

3. Un capital ha sido colocado durante 10 años al 8'16 % de interés efectivo anual en una cuenta bancaria que capitaliza los intereses semestralmente. Se sabe que el interés producido en el último semestre fue de 67.419'17363 u.m. ¿ Cuál fue el capital invertido? **Sol: 800.000 u.m.**



$i = 8'16\%$ capitalización semestral

$$(1+i) = (1+i_2) \Rightarrow (1+0'0816) = (1+i_2)^2 \Rightarrow i_2 = \sqrt{1'0816} - 1 = 0'04 \Rightarrow i_2 = 4\%$$

$$I_{20} = C_{19} \cdot i_2 \Rightarrow 67.419'17363 \text{ u.m} = C_{19} \cdot 0'04 \Rightarrow C_{19} = 1.685.479'341 \text{ u.m.}$$

$$C_{19} = C_0 \cdot (1+i_2)^{19} \Rightarrow 1.685.479'341 \text{ u.m.} = C_0 \cdot (1'04)^{19} \Rightarrow C_0 = 800.000 \text{ u.m.}$$

Otra alternativa para obtener el tipo de interés:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1 = i_2 = (1+0'0816)^{1/2} - 1 = 0'04 = 4\%$$

4. Tres entidades financieras nos ofrecen los siguientes tantos de interés:

1. 12 % efectivo anual.

2. 12 % nominal capitalizable semestralmente.
3. 12 % nominal capitalizable mensualmente.

a) ¿ Cual deberíamos escoger y qué tanto efectivo obtendríamos en cada una de ellas?
b) Si aplicando un 12 % nominal nos capitalizan continuamente. ¿ Cuál sería el tipo de interés efectivo obtenido? ¿Cuánto podríamos retirar si colocamos 1.000.000 durante 2 años?

Sol. a) 3, 12'68% b) 12'7496852%, 1.271.294 u.m.

1. $i = 12\%$
2. $j_2 = 12\%$
3. $j_{12} = 12\%$

a) 1. $i = 12\%$

2. $j_2 = 12\% \Rightarrow i_2 = \frac{12\%}{2} = 6\%$

$$(1+i) = (1+0'06)^2 \Rightarrow i = 12'36\%$$

3. $j_{12} = 12\% \Rightarrow i_{12} = \frac{12\%}{12} = 1\%$

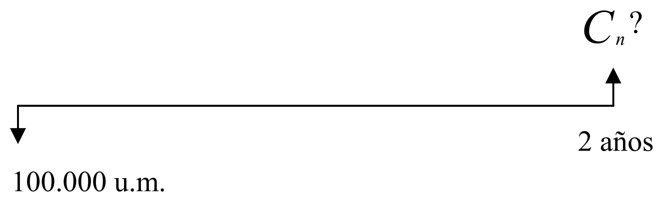
$$(1+i) = (1+0'01)^{12} \Rightarrow i = 12'6825\%$$

b) $j_k = 12\% \Rightarrow ¿i?$

$$¿C_n? \quad \begin{cases} C_0 = 1.000.000 \text{ u.m.} \\ \text{Si} \quad n = 2 \text{ años} \end{cases}$$

$$(1+i) = (1+i_k)^k \Rightarrow (1+i) = (1+i) = \left(1+\frac{j_k}{k}\right)^k \Rightarrow (1+i) = \left(1+\frac{1}{\frac{k}{j_k}}\right)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{j_k}}\right)^{k/j_k}\right]^{j_k} - 1 \Rightarrow i = e^{j_k} - 1 \Rightarrow i = e^{0'12} - 1 = 12'74968\%$$



c)

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n = 1.000.000 \cdot (1 + 0'1274968)^2 = 1.271.249 \text{ u.m.}$$

5. Una entidad financiera nos ofrece la posibilidad de descontar un efecto de nominal 2.000.000 u.m., cuyo vencimiento es a 90 días, a un tanto de descuento anual simple del 10% o bien al 10'5 % de interés simple anual.

a) ¿Cuál es la oferta más ventajosa desde el punto de vista del cliente?

b) ¿Cuál sería el descuento total realizado en cada una de las operaciones? Nota: Utilice el año comercial.

Sol. a) La primera, b) 50.000 u.m. 51.157 u.m.

d = 10%
i = 10'5%

a) ¿Cuál es la oferta más ventajosa desde el punto de vista del cliente?

Si d = 10% : *Descuento simple comercial:*

$$C_0 = N - n \cdot d \cdot N$$

$$C_0 = N(1 - n \cdot d)$$

$$C_0 = 2.000.000 \cdot \left(1 - 90 \cdot \frac{0'10}{360}\right) = 1.950.000 \text{ u.m.}$$

Si i = 10'5 %. *Descuento simple racional.*

$$C_0 = N - n \cdot d \cdot N$$

$$C_0 = \frac{N}{1 + n \cdot i}$$

$$C_0 = \frac{2.000.000}{1 + 90 \cdot \frac{0'105}{360}} = 1.948.842 \text{ u.m.}$$

$$\Downarrow$$

Es más ventajosa la primera.

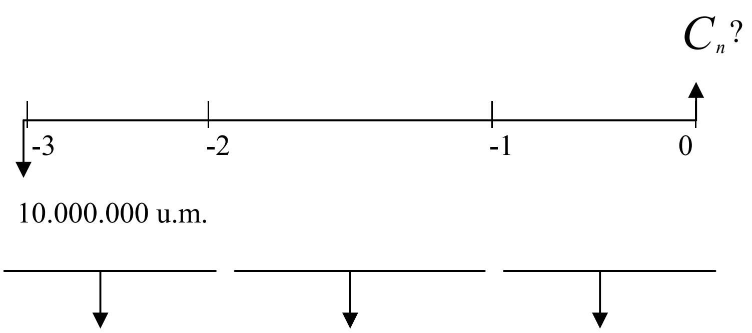
b) ¿Cuál sería el descuento total realizado en cada una de las operaciones?

$$D_c = N - C_0 \Rightarrow 2.000.000 - 1.950.000 = 50.000 \text{ u.m.}$$

$$D_c = N - C_0 \Rightarrow 2.000.000 - 1.948.842 = 51.158 \text{ u.m.}$$

6. Hace tres años se colocaron 10.000.000 u.m. en una entidad que computa intereses mensualmente. Los tantos nominales ofrecidos para estos 3 años han sido: 6% para el primero, 5% para el segundo y un 4% para el tercero. Calcula la cuantía que se ha podido retirar.

Sol. 11.614.626 u.m.

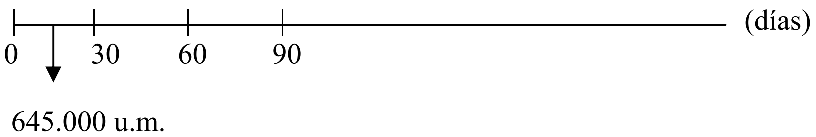


$$j_{12} = 6\% \qquad j_{12} = 5\% \qquad j_{12} = 4\%$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$i_{12} = 0'5\% \qquad i_{12} = 04166`\% \qquad i_{12} = 4\%$$

$$C_n = 10.000.000 \cdot (1 + 0'005)^{12} \cdot (1 + 0`004166`)^{12} \cdot (1 + 0`0033) = 11.614.626 \text{ u.m.}$$

7. Si quisiéramos sustituir tres pagos de 100.000, 200.000 y 350.000 u.m. dentro de 30,60 y 90 días por uno solo de 645.000 u.m. ¿cual sería el vencimiento si todos los efectos son descontados comercialmente al 5 % anual?, ¿y si la cuantía del efecto a sustituir es de 650.000 u.m. y valoramos al 5 % de interés simple anual?
Sol. 16'27 días. Sol. 71'5 días.

a) ¿Cuál sería el vencimiento si todos los efectos son descontados comercialmente al 5% anuall?

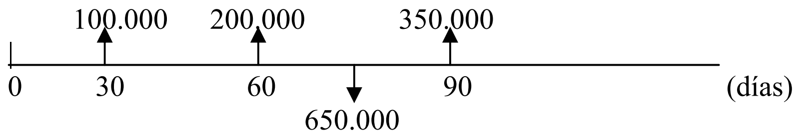


d = 5%

$$645.000 \cdot (1 - \frac{n}{360} \cdot 0'05) = 100.000 \cdot (1 - \frac{30}{360} \cdot 0'05) + 200.000 \cdot (1 - \frac{60}{360} \cdot 0'05) +$$
$$+ 350.000 \cdot (1 - \frac{90}{360} \cdot 0'05) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 645.000 - 89'5833333 \cdot n = 100.000 - 416'6666667 + 200.000 - 1.666'666667 + 350.000 - 4.375 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -89'58333333 \cdot n = -1458'333333 \Rightarrow n = 16'279 \, días$$

b) ¿Y si la cuantía del efecto a sustituir es de 650.000 u.m. y valoramos al 5% de interés simple anual?



i = 5%

$$650.000 \cdot (1 + \frac{n}{360} \cdot 0`05)^{-1} = \frac{100.000}{(1 + \frac{30}{360} \cdot 0'05)} + \frac{200.000}{(1 + \frac{60}{360} \cdot 0'05)} + \frac{350.000}{(1 + \frac{90}{360} \cdot 0'05)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{650.000}{(1 + \frac{n}{360} \cdot 0'05)} = 99585'06224 + 198347'1074 + 345679'0123 \Rightarrow n = 71'47 \, días$$

8. Un prestamista dispone de una cierta cantidad de dinero para prestar a 9 meses. Tiene dos ofertas: Un cliente le ofrece pagar el 9 % por vencido, mientras que otro señor le ofrece un 8'5 % pero por anticipado. ¿A que cliente elegirá el prestamista?
Sol. vencidos: 9 % y 9'078%.

$i = 9\%$ (por vencido)
$d = 8'5\%$ (por anticipado)

¿ A que cliente elegirá el prestamista?

$$\left.\begin{array}{l} C_n = C_0 + n \cdot d \cdot C_n \text{(anticipado)} \\ C_n = C_0 + n \cdot i \cdot C_0 \text{(vencido)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (1-nd) \cdot C_n = C_0 \\ C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_n = \dfrac{C_0}{1-nd} \\ C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C_0}{1-nd} = C_0 \cdot (1 + n \cdot i) \Rightarrow \frac{1 - n \cdot d + n \cdot d}{1 - n \cdot d} = 1 + n \cdot i \Rightarrow 1 + i \cdot \frac{d}{1 - n \cdot d} = 1 + n \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{d}{1-nd} \Rightarrow i = \frac{0'085}{1 - \frac{9}{12} \cdot 0'085} = 9'078\%$$

$\Downarrow$

elegirá al segundo cliente

$$d = \frac{i}{1+ni} = \frac{0'09}{1 + 0'085 \cdot \frac{9}{12}} = 8'46\%$$

Otra alternativa de resolución:

$$i = \frac{d}{1-nd} = \frac{0'085}{1 - \frac{9}{12} \cdot 0'085} = 0'0907 \Rightarrow d = 0'085$$

$$d = \frac{i}{1+ni} = \frac{0'09}{1 + \frac{9}{12} \cdot 0'09} = 0'083 \Rightarrow i = 0'09$$

9. Un inversor presta dinero al 10 % cuando lo hace a 6 meses y al 12 % cuando lo hace a 9 meses. En adelante desea prestar con interés anticipado, pero obteniendo la misma rentabilidad que antes. ¿ A que tipo de interés ha de prestar?
   Sol. 9'5238% y 11'0092%

$$\left.\begin{array}{l} i = 10\% \text{ (presta a 6 meses)} \\ i = 12\% \text{ (presta a 9 meses)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¿d?}$$

$$\left.\begin{array}{ll} C_n = C_0 + n \cdot d \cdot C_n & \text{(anticipado)} \\ C_n = C_0 + C_0 \cdot n \cdot i & \text{(vencido)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = C_n \cdot (1 - n \cdot d) \\ C_0 = \dfrac{C_n}{1 + n \cdot i} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

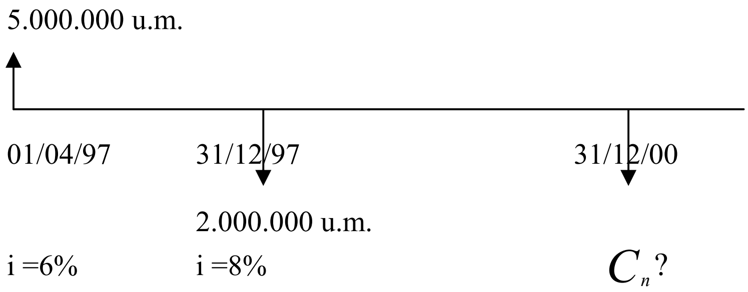
$$C_n \cdot (1 - n \cdot d) = \frac{C_n}{1 + n \cdot i} \Rightarrow \; 1 - n \cdot d = \frac{1 + ni - ni}{1 + ni} \; \Rightarrow \; 1 - n \cdot d = 1 - \frac{n \cdot i}{1 + n \cdot i} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = \frac{i}{1 + n \cdot i}$$

$$d = \frac{0'10}{1 + \frac{6}{12} \cdot 0'10} = 9'5238\% \quad \text{(presta a 6 meses)}$$

$$d = \frac{0'12}{1 + \frac{9}{12} \cdot 0'12} = 11'0092\% \; \text{(presta a 9 meses)}$$

10. El 1/04/97 un señor contrató un préstamo de 5.000.000 u.m. para devolverlo mediante un pago único que se efectuará el

31/12/00.el tipo de interés estipulado fue del 6 % efectivo anual. Hoy 31/12/97, este señor, que tuvo la suerte de ser agraciado con un premio de la lotería de Navidad, decide entregar a cuenta al prestamista el importe de 2.000.000 u.m. Si el prestamista tiene la oportunidad de invertir este dinero al 8% de interés efectivo anual. ¿ Qué cantidad debería exigir éste último al final del contrato para no sufrir ni perdidas ni ganancias?.
Sol. 3.701.673'4 u.m.



$$C_n = C_0(1+i)^n = 5.000.000 \cdot (1+0'06)^{45/12} - 2.000.000 \cdot (1+0'08)^{36/12} = 6.221.097'374 - 2.519.424 =$$

=3.701.673'374 u.m.

11. Si se descuenta un determinado efecto según descuento racional el importe de dicho descuento es de 3.000 u.m. Si ese mismo efecto, durante el mismo tiempo y al mismo tipo, se hubiera descontado según descuento comercial el importe del descuento hubiese sido 3.150 u.m. el nominal de dicho efecto.**
Sol. 63.000 u.m.

$$D_r = 3.000$$

n

$i = d$

$D_c = 3.150$

$N?$

$$D_r = N - C_0 \Rightarrow 3.000 = N - \frac{N}{1+n\cdot i} \Rightarrow 3.000 = N\cdot\left(1-\frac{1}{1+n\cdot i}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.000 = N\cdot\frac{1+n\cdot i-1}{1+n\cdot i} \Rightarrow 3.000 = N\cdot\frac{n\cdot i}{1+n\cdot i}$$

$$D_c = N - C_0 \Rightarrow 3.150 = N - N\cdot(1-n\cdot d) \Rightarrow 3.150 = N\cdot(1-1+n\cdot d) \Rightarrow$$

$$3.150 = N\cdot n\cdot d$$

$$\Downarrow$$

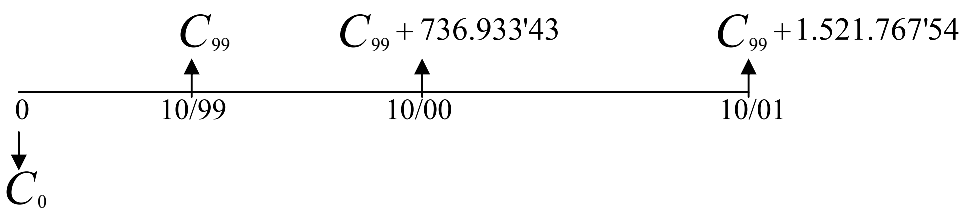
$$\left.\begin{array}{l} 3.000 = N\cdot\dfrac{n\cdot i}{1+n\cdot i} \\ \\ 3.150 = N\cdot n\cdot i \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 3.000 = \dfrac{3.150}{1+n\cdot i} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1+n\cdot i = 1'05 \Rightarrow \\ \Rightarrow n\cdot i = 0'05 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$3.150 = N\cdot 0'05 \Rightarrow N = 63.000 \text{ u.m.}$$

12. Hace varios años, el Sr. Carbel depositó cierta cantidad en un banco. En octubre de 1.999 retiró la totalidad del depósito (principal e intereses). Si el Sr. Carbel hubiese mantenido justo en año más su depósito (hasta octubre de 2.000) habría podido retirar 736.933'43 u.m. más de las que retiró en 1.999. y si hubiese mantenido otro año más su depósito (hasta octubre de 2.001) habría podido retirar 1.521.767'54 u.m. más de las que

retiró en 1.999. Dígase la cantidad total retiró en octubre de 1.999.**
Sol. 11.337.437’38 u.m.



$$\left.\begin{array}{l} I_{00} = C_{99} \cdot i = 736.933'43 \\ \\ I_{01} = C_{00} \cdot i = 1.521.767'54 - 736.933'43 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

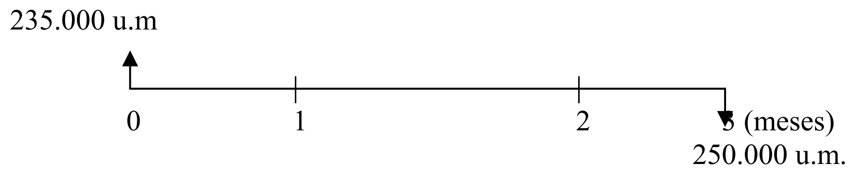
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_{99} \cdot i = 736.933'43 \\ \\ C_{99} \cdot (1+i) \cdot i = 784.834'11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 736.933'43 \cdot (1+i) = 784.834'11 \Rightarrow \\ \Rightarrow \; i = 6'5\% \end{array}$$

$$C_{99} = \frac{736.933'43}{0'065} = 11.337.437'38 \text{ u.m.}$$

13. Se sustituye hoy una deuda de 250.000 u.m., que vence dentro de tres meses, por 235.000 u.m. Si la tasa anual de interés simple en el mercado para este tipo de operaciones es del 12 %, se pide:
a.- Determine se la operación resulta conveniente para el deudor.

b.- La tasa de descuento comercial de la operación y su comparación con la del mercado.

Sol. a) si es $d_{(aplicado)} =$ **conveniente b) 24 % anual.**



$i_m = 12\%$

a) Determine si la operación resulta conveniente para el deudor.

$$250.0000 \cdot \left(1 - \frac{3}{12} \cdot d\right) = 235.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0'25 \cdot d = 0'94 \Rightarrow d = 24\%$$

$$C_0 = \frac{250.000}{\left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0'12\right)} = 242.718 \text{ u.m.} \Rightarrow \textit{Sí es más ventajosa para el deudor}$$

$$\textit{porque } C_0 > 235.000 \textit{ u.m.}$$

b) La tasa de descuento comercial de la operación y su comparación con la del mercado.

$$250.000 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0'12\right) \Rightarrow C_0 = 242.718 \text{ u.m.}$$

$$242.718 = 250.000 \cdot \left(1 - \frac{3}{12} \cdot d_m\right) \Rightarrow d_m = 11'65\%$$

$$\Downarrow$$

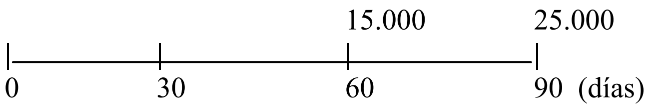
$$\textit{Resulta conveniente para el deudor porque } d > d_m$$

Otra alternativa de conseguir el término d:

$$d = \frac{i}{1 + ni} = \frac{0'12}{1 + 0'25 \cdot 0'12} = 0'1165$$

14. Un deudor tiene pendientes dos letras de 15.000 y 25.000 u.m. que vencen dentro de 60 y 90 días respectivamente. ¿ En que momento deberá sustituirlas por una letra única de 45.000 u.m. si en el momento de la negociación se aplica un 10 % anual de descuento comercial?. **

Sol. 470 días o 1 año, 3 meses y 20días.



d = 10%

45.000 u.m.

$$15.000 \cdot \left(1 - \frac{60}{360} \cdot 0'10\right) + 25.000\left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0'10\right) = 45.000\left(1 - \frac{n}{360} \cdot 0'10\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14.750 + 24.375 = 45.000 - 12'5 \cdot n \Rightarrow$$

$\Rightarrow n =$ <u>470 días,</u> es decir, 1 año, 3 meses y 20 días.

15. Calcula la cuantía efectiva a pagar por un pagaré de empresa de 5 millones de u.m. de nominal, que vence de 120 días si el tipo de interés del mercado en estos momentos es del 6 %.

Sol. 4.901.961 u.m.

$i_m = 6\%$

$$C_0 = \frac{5.000.000}{\left(1 + \frac{120}{360} \cdot 0'06\right)} = 4.901.961 \text{ u.m.}$$

Otra alternativa:

$$i_k = \frac{i}{k} \Rightarrow i_k = \frac{6\%}{12} = 0'5\%$$

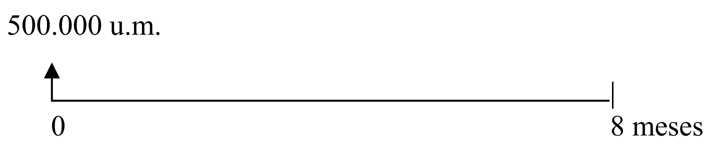
$$C_0 = \frac{5.000.000}{(1 + 4 \cdot 0'005)} = 4.901.960'784 \text{ u.m}$$

16. Para pagar un préstamo de 500.000 u.m. a 8 meses, tenemos los siguientes precios.

1. 7% anual por vencido.
2. 6'8% anual por anticipado.

¿Qué opción resulta más conveniente?

Sol. La primera.



1. $i = 7\%$ *(por vencido)*
2. $d = 6'8\%$ *(por anticipado)*

1- $$500.000 = \frac{C_n}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0'07} \Rightarrow C_n = 523.333 \text{ u.m.}$$

$$\Downarrow$$

$$500.000 = 523.333 \cdot \left(1 - \frac{8}{12} \cdot d_1\right) \Rightarrow d_1 = 6'6878\%$$

2- $$500.000 = C_n \cdot \left(1 - \frac{8}{12} \cdot 0'068\right) \Rightarrow C_n = 523.743 \text{ u.m.}$$

$$500.000 = \frac{523.743}{1 + \frac{8}{12} \cdot i_2} \Rightarrow i_2 = 7'1229\%$$

$$\Downarrow$$

Resulta más conveniente la primera opción.

17. Cierta entidad aplica en sus operaciones de depósito un 6 % nominal con liquidación trimestral de intereses, aplicando el convenio lineal en el cálculo del montante. ¿Qué cantidad retiraremos correspondiente a un depósito de 1.000.000 u.m. que hemos impuesto por un plazo de 38 meses?
Sol. 1.207.574 u.m.

$j_4 = 6\%$
Convenio lineal.

$$i_4 = \frac{j_4}{4} = \frac{6\%}{4} = 1'5\%$$

3años por cuatro trimestres

$$C_n = 1.000.000 \cdot (1 + i_4)^{12} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot i_4\right) = 1.000.000 \cdot (1'015)^{12} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0'015\right) =$$
$$= 1.207.574'353$$

Convenio exponencial

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^{38/12} = 1.000.000 \cdot (1 + 0'06136355)^{38/12} = 1.207.574'658$$

18. Para contratar un préstamo distintas entidades nos ofrecen los siguientes precios.
a) 8% nominal anual capitalizable mensualmente.
b) 4 % efectivo semestral.
c) 8% nominal anual capitalizable trimestralmente
d) 8% nominal anual capitalizable continuamente.
¿ Cuál(es) es(son) la(s) opción(es) más favorable(s)?
Sol. b

a) $$j_{12} = 8\% \Rightarrow i_{12} = \frac{8\%}{12} = 0'6667\%$$

$$(1 + i) = (1'006667)^{12} \Rightarrow i = 8'29995\%$$

b) $$i_2 = 4\%$$

$$(1+i)=(1'04)^{2} \Rightarrow i=8'16\%$$

c) $$j_4 = 8\% \Rightarrow i_4 = \frac{8\%}{4} = 2\%$$

$$(1+i)=(1'02)^{4} \Rightarrow i=8'2432\%$$

d) $$j_{k\,k\to\infty} = 8\% \Rightarrow i_k = \frac{8\%}{k}$$

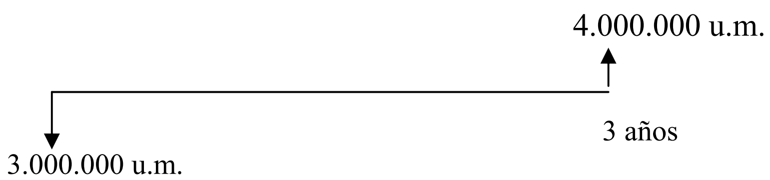
$$(1+i)=(1+i_k)^{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+i)=\left(1+\frac{8\%}{k}\right)^{k} \Rightarrow (1+i)=\left[\left(1+\frac{1}{k/8\%}\right)^{k/8\%}\right]^{8\%} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+i)=e^{8\%} \Rightarrow i=8'3287\%$$

19. Calcula la tasa nominal convertible trimestralmente a la que un capital de 3.000.000 u.m. invertido durante tres años se convierte en 4.000.000 u.m.
Sol. 9'7052722%

¿j_4?



$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^{n}$$

$$4.000.000 = 3.000.000 \cdot (1+i)^{3} \Rightarrow i = 10'0642416\%$$

$$(1+i)=(1+i_4)^{4} \Rightarrow i_4 = 2'426318\%$$

$$j_4 = i_4 \cdot 4 \Rightarrow j_4 = 9'7052722\%$$

Otra alternativa para conseguir el término i_4:

$$i_k = \sqrt[12]{\frac{4.000.000}{3.000.000}} - 1 = 0'02426318$$

20. Para que nos descuenten un efecto de nominal 100.000 u.m. y con vencimiento dentro de seis meses tenemos dos posibilidades:
a) Descuento comercial al 7'85%.
b)Descuento racional al 8%.
¿Cuál resulta más conveniente y cuánto cobraremos en ella?
Sol. 96.154

¿ C_0? 100.000 u.m.

0 6 meses

a) $d = 7'85\%$

$$C_0 = 100.000 \cdot \left(1 - \frac{6}{12} \cdot 0'0785\right) = 96.075 \text{ u.m.}$$

b) $i = 8\%$

$$C_0 = \frac{100.000}{1 + \frac{6}{12} \cdot 0'08} = 96.153'85 \text{ u.m.}$$

21. Una entidad tiene en su cartera Letras del Tesoro con vencimiento el 31/12/03. Hoy 1/3/03, necesita 40 millones de euros, cantidad que puede conseguir mediante una operación al 3'5% y por 1 mes. Calcule el número de letras que tendrá que poner como garantía y el importe que tendrá que devolver al terminar la operación.
Sol. 40.116.991'5 €

40.000.000

01/03/03 01/04/03 31/12/03

$i = 3'5\%$

Una letra del tesoro $\rightarrow N = 1.000$ ***€ (vencimiento 31/12/03)***

$$E = \frac{1.000}{\left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0'035\right)} = 971'659919 \text{ €/ letra}$$

Nº de letras que necesito $= \dfrac{40.000.000}{971'659919} = 41.166'67 \Rightarrow$ Necesito <u>41.167</u> letras del Tesoro.

Importe a devolver al terminar la operación:

$$T = 41.167 \cdot 971'659919 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot 0'035\right) = 40.116.991'5$$

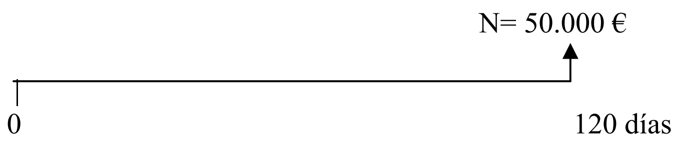
Otra alternativa::

$$40.000.000 = \frac{N}{1 + \frac{10}{12} \cdot 0'035} \Rightarrow N = 41.166.667 \text{ €}$$

Nº de letras que necesito $= \dfrac{41.166.667}{1.000} = 41.167$

$$T = 40.000.000 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot 0'035\right) = 40.116.667 \text{ €}$$

22. Calcula la cuantía efectiva a pagar por un pagaré de empresa de 50.000 € de nominal, que vence dentro de 120 días, si el tipo de interés de mercado para activos de similares características en estos momentos es el 6%.
Sol. 49.019'61.



$i_m = 6\%$

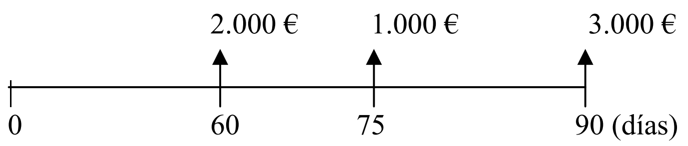
$$E = \frac{N}{1 + n \cdot i} \Rightarrow E = \frac{50.000}{1 + \frac{120}{360} \cdot 0'06} = 49.019'6 \text{ €}$$

23. Un empresario remite a su banco, que aplica un tanto de descuento del 9%, la siguiente remesa de efectos.

Nominal (euros)	**Días hasta su** vencimiento
3.000	90
2.000	60
1.000	75

Calcula el valor efectivo de la remesa y su TAE.
Sol. a) 5.883'75 y b) 9'65%

$d = 9\%$



a) $$C_0 = 2.000 \cdot \left(1 - \frac{60}{360} \cdot 0'09\right) + 1.000\left(1 - \frac{75}{360} \cdot 0'09\right) + 3.000 \cdot \left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0'09\right) =$$
$$= 5.883'75 \text{ €}$$

b) $$t_m = \frac{2.000 \cdot 60 + 1.000 \cdot 75 + 3.000 \cdot 90}{6.000} = 77'5 \text{ días}$$
$$6.000 = 5.883'75 \cdot (1 + i_e)^{77'5/365} \Rightarrow i_e = 9'65\%$$

24. El 1 de enero de 2002 la empresa SIERRA NEVADA S.A. abrió una póliza de crédito en las siguientes condiciones.

Límite: 300.000 €
Plazo : 2 años.
Liquidaciones semestrales aplicando los siguientes precios,

$i_a = 0'1\%$ (365) Retención = 18%

$i_d = 6\%$ (360)

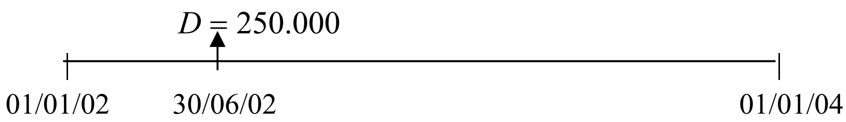
$i_e = 20\%$ (360)

Comisión de apertura: 1% sobre el límite.
Comisión de disponibilidad: 1% sobre el saldo medio no dispuesto.
Comisión de excedido: 2% sobre el mayor excedido contable.
El saldo de la póliza a fecha 30 de junio de 2002, después de la anterior liquidación, era de 250.000 (D), y los movimientos correspondientes a la última liquidación del año 2002 fueron los siguientes,

FECHA	CUANTÍA
15/7/02	30.000 (H)
30/9/02	100.000 (D)
31/10/02	175.000 (H)
15/12/02	200.000 (H)

Calcula el saldo financiero de la póliza a fecha 31 de diciembre de 2002.

Sol. 47.156'21.



Límite: 300.000 €

Liquidaciones semestrales: $i_a = 0'1\%$ (365) Retención = 18%

$i_d = 6\%$ (360)

$i_e = 20\%$ (360)

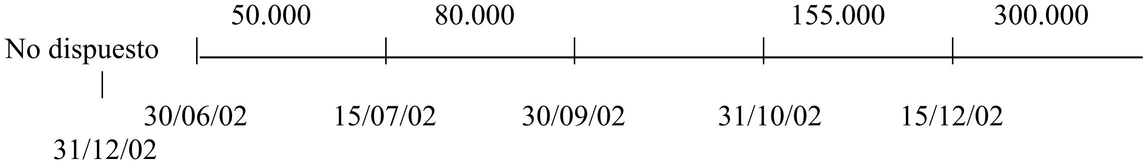
Comisión de
- apertura: 1% sobre el límite.
- disponibilidad: 1% sobre el saldo medio no dispuesto.
- excedido: 2% sobre el mayor excedido contable.

Movimientos:

15/7/02 $\rightarrow$ 30.000 (H)
30/9/02 $\rightarrow$ 100.000 (D)
31/10/02 $\rightarrow$ 175.000 (H)
15/12/02 $\rightarrow$ 200.000 (H)

¿Saldo a 31/12/02?

30/06/02 $\rightarrow$ 250.000 (D)
15/07/02 $\rightarrow$ 220.000 (D)
30/09/02 $\rightarrow$ 320.000 (D)
31/10/02 $\rightarrow$ 145.000 (D)
15/12/02 $\rightarrow$ 55.000 (H)



$$S_{mnd} = 50.000 \cdot \frac{15}{184} + 80.000 \cdot \frac{77}{184} + 155.000 \cdot \frac{45}{184} + 300.000 \cdot \frac{16}{184} = 101.548'913 \ €$$

Comisión de disponibilidad = 1.015'48913 €
Comisión de excedido = $2\% \cdot 20.000 = 400$ €

$$I_a = 55.000 \cdot \frac{16}{365} \cdot 0'001 \cdot (1 - 0'18) = 1'976986301 \ €$$

$$I_d = 250.000 \cdot \frac{15}{360} \cdot 0'06 + 220.000 \cdot \frac{77}{360} \cdot 0'06 + 300.000 \cdot \frac{31}{360} \cdot 0'06 + 145.000 \cdot \frac{45}{360} \cdot 0'06 =$$
$$= 6.085'833 \ €$$

$$I_e = 20.000 \cdot \frac{31}{360} \cdot 0'2 = 344'4444 \ €$$

$$Saldo_{31/12/02} = 55.000 - 1.015'49 - 400 + 1'98 - 6.085'83 - 344'44 = 47.152'26 \ €$$

TEMA 4: *INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE RENTAS*

4.0. Introducción

Hasta ahora las operaciones financieras que venimos realizando se componían de un capital único (o pocos) tanto en la prestación como en la contraprestación. Sin embargo, hay un gran número de operaciones que se componen de un elevado número de capitales: la constitución de un capital, los planes de jubilación, los préstamos, ... En todas ellas intervienen muchos capitales y sería difícil y poco práctico moverlos de uno en uno, como lo hemos hecho hasta ahora.

Surge la necesidad de buscar un método matemático que nos facilite la tarea de desplazar un elevado número de capitales con relativa facilidad: las rentas. Se trata de unas «fórmulas» que en determinados casos permitirán desplazar en el tiempo un grupo de capitales a la vez.

4.1. Definición y clasificación de rentas

Definición de renta: Conjunto de capitales asociados a los períodos de tiempo donde son disponibles.

En matemáticas financieras recibe el nombre de renta un conjunto de capitales que han de hacerse efectivos en determinados vencimientos. Normalmente, y en la mayoría de los casos, dichos vencimientos son equidistantes, es decir, el tiempo que media entre un vencimiento y otro consecutivo siempre es el mismo.

Para que exista renta se tienen que dar los dos siguientes requisitos:

- Existencia de varios capitales, al menos dos.
- Periodicidad constante, entre los capitales, es decir, entre dos capitales consecutivos debe existir siempre el mismo espacio de tiempo (cualquiera que sea).

En toda renta podemos distinguir:

a) ***Fuente de una renta:*** fenómeno económico que da origen al nacimiento de la renta.
b) ***Término de una renta***: se denomina término de la renta a cada uno de los capitales que constituyen la renta: $\mathbf{C_j\ (j = 1\ ,\ 2\ )}$.
c) ***Periodo de maduración o periodo de una renta:*** cada uno de los subintervalos de tiempo: $\mathbf{I_J(j = 1, 2\ ,...,n)}$.
d) ***Origen de una renta:*** momento en el que comienza a devengarse el primer capital. Es el extremo inferior del primer subintervalo, lo llamamos $\mathbf{I_o}$ y en una posición temporal del 0-n.
e) ***Final de la renta:*** momento en el que termina de devengarse el último capital. Es el extremo superior del último subintervalo lo conocemos como $\mathbf{I_n}$.
f) ***Duración de la renta:*** tiempo que transcurre desde el origen hasta el final de la renta, lo podemos designar como **(In – Io)**.
g) ***Valor de una renta***: podemos dar dos sentidos a esta variable:
- En el sentido de valorar todos los términos de la renta: se entiende por valor de la renta en un momento determinado a la suma de los valores que en ese momento tienen todos los términos que la constituyen. En este sentido obtendremos el valor actual y el valor final de una renta.
- En el sentido de valorar solamente los términos pendientes de efectividad: se entiende por valor de la renta en un momento

cualquiera como la suma de los valores que en ese momento tienen los términos pendientes de efectividad.

Para un mayor entendimiento en cuanto al valor de una renta, señalar la siguiente aclaración:

- *Valor actual de una renta:V_0: es la suma del valor de todos los capitales descontados al momento I_0.*
- *Valor final de una renta:V_n: es la suma del valor de todos los capitales actualizados al momento I_n.*

La valoración de la renta se hará arreglo al régimen de capitalización adoptado, es decir, en régimen de capitalización simple o en régimen de capitalización compuesta.

Debido a que en la mayoría de los casos las rentas abarcan períodos largos de tiempo su valoración suele hacerse en régimen de capitalización compuesta. Por otro lado y por razones prácticas también suelen valorarse las rentas en régimen de capitalización compuesta ya que las fórmulas de éste son más flexibles y sus equivalencias teóricamente exactas, cosa que no ocurre en un régimen de capitalización simple.

Clasificación de las rentas

Depende del criterio de clasificación seguido se pueden establecer las distintas clasificaciones de las rentas, entre ellas tenemos:

1. Según la amplitud de los intervalos:

a) *Rentas Discretas:* cuando la amplitud de sus intervalos es finita A su vez se pueden distinguir :
   - **De período *Uniforme*:** cuando todos sus períodos de maduración tienen la misma amplitud (anual, semestral...)
   - **De período No Uniforme**: en caso contrario.

b) *Rentas Continuas:* cuando la amplitud de sus intervalos tienden a cero.

2. Según los elementos que definen la renta :

a) *Rentas ciertas:* todos los elementos de definición de la renta son ciertos.
b) *Rentas aleatorias:* cuando alguno de los elementos son aleatorios.

3. Según la cuantía de los términos:

a) *Rentas constantes:* cuando toda las cuantías de sus términos son iguales entre sí, es decir, $\mathbf{C_1 = C_2 = \ldots C_n = C}$.
b) *Rentas variables:* cuando las cuantías de sus términos no son iguales. Los casos más destacables son:

- Cuando la cuantía de sus términos varían en *progresión geométrica,* "cuando los términos varían en progresión geométrica, es decir, cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante, la razón":

$$C_1$$

$$C_2 = C_1 \cdot q$$

$$C_3 = C_2 \cdot q = C_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$C_n = C_{n-1} \cdot q = C_1 \cdot q^{n-1}$$

- Cuando varían en *progresión aritmética*, "cuando los términos varían en progresión aritmética, es decir, cada término se diferencia del anterior por una constante, la razón":

$$C_1$$

$$C_2 = C_1 + d$$

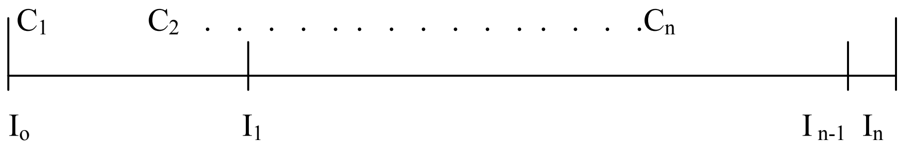
$$C_3 = C_2 + d = C_1 + 2 \cdot d$$

$$\vdots$$

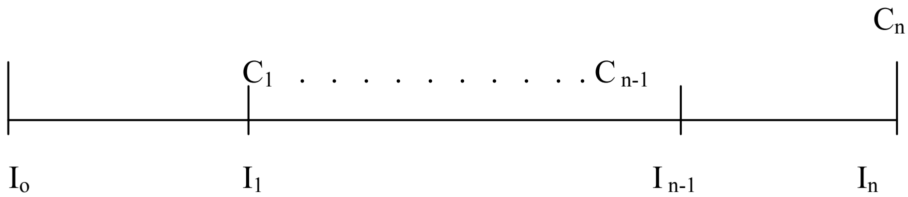
$$C_n = C_{n-1} + d = C_1 + (n-1) \cdot d$$

4. Según los vencimientos de los términos.

a) *Prepagables* : los vencimientos de los capitales tienen lugar en el extremo inferior de intervalo correspondiente. Aquellas en las que la efectividad de los términos se produce a principio del periodo.



b) *Postpagables:* los vencimientos de los capitales coinciden con el extremo superior del intervalo asociado. Aquellas en las que la efectividad de los términos se produce al final del periodo.



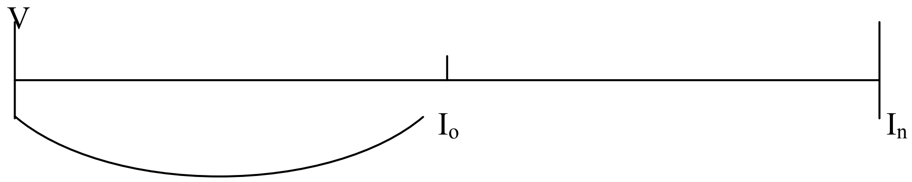
5. En función de su duración :

a) *Rentas temporales :* son aquellas que constan de un número finito de términos y conocidos.
b) *Rentas perpetuas:* el número de términos es infinito y su duración es, en consecuencia, ilimitada.

6. Atendiendo al momento de su valoración :

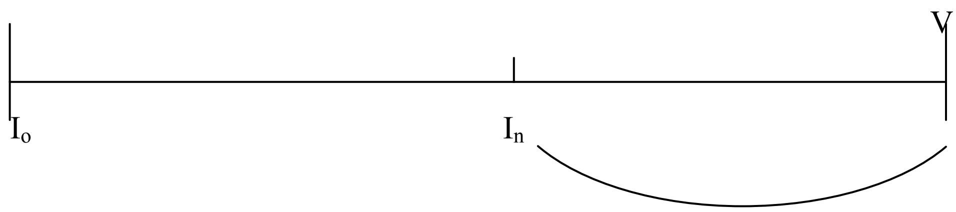
a) *Rentas inmediatas:* se valoran en cualquier momento situado entre I_o y I_n. Son aquellas en las que la valoración de la renta coincide con el origen de la renta. En ellas la efectividad del primer término tiene lugar en el primer período de la renta, coincidiendo con el momento de realizar el convenio. En ellas desde el momento del acuerdo hasta la efectividad del primer término pasa como máximo un periodo.

b) *Rentas <u>diferidas</u>:* cuando el punto de valoración es anterior al comienzo de la renta (I_o). Son aquellas en la que la efectividad del primer término tiene lugar en un período de tiempo posterior al momento de realizarse el convenio, esto es, entre el momento de realizar el convenio y la iniciación del primer periodo media un tiempo que se denomina período de diferimiento, la valoración es anterior al origen de la renta financiera. En ellas desde el momento del acuerdo hasta la efectividad del primer término pasa como mínimo un periodo.



Diferimiento

c) *Rentas <u>anticipadas</u>:* cuando el punto de valoración es posterior al final de la renta (I_n). Son aquellas en las que la valoración es posterior a la efectividad del último término, la valoración es posterior a la finalización de la renta financiera. En ellas desde la efectividad del último término hasta la valoración de la renta ha de transcurrir como mínimo un periodo.



Anticipación

7. <u>Según la periodicidad del vencimiento:</u>

a) *Rentas <u>anuales</u>:* si las cuantías de sus términos vencen cada año.

b) *Rentas <u>fraccionadas</u>:* los capitales vencen con periodicidad inferior al año. Ej: Renta mensual.

c) *Rentas con <u>periodicidad superior al año:</u>* el periodo que transcurre entre dos vencimientos consecutivos es mayor que el año Ej: Renta Bianual .

8. <u>Según la ley financiera:</u>

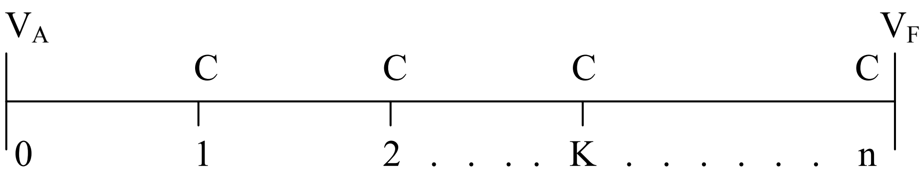
a) *<u>Simple:</u>* emplea una ley financiera a interés simple, para desplazar los capitales.
b) *Compuesta:* la ley financiera empleada es la de capitalización compuesta.

Algunos autores hacen una clasificación distinta, en cuanto a la periodicidad del vencimiento:

a) Entera: el término de la renta viene expresado en la misma unidad de tiempo que el tanto de valoración, cualquiera que sea la unidad tomada.
b) No entera: el término de la renta viene expresado en una unidad de tiempo distinta a la del tanto de valoración.
c) Fraccionada: el término de la renta se expresa en una unidad de tiempo menor que aquella en la que viene expresada el tipo de valoración de la renta.

4.2. Valoración de rentas con las leyes simples.

Caso de una renta *inmediata*
<u>Postpagable</u>
Temporal : n
Constante: C



Ley financiera de capitalización:

$$V_f = C + C(1+i) + C(1+2i) + \ldots + C(1+(n-k)i) + \ldots + C(1+(n-2)i) + C(1+(n-1)i)$$

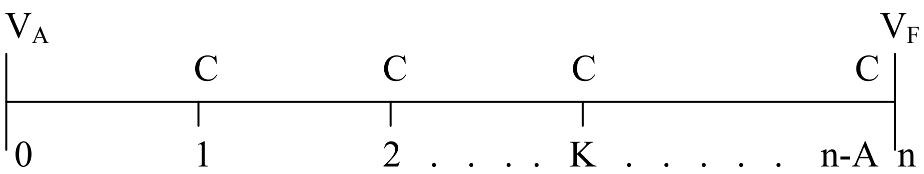
$$V_f = \sum_{k=1}^{n} C[1+(n-k)i]$$

Ley financiera de descuento:

$$V_A = C(1-d) + C(1-2d) + \ldots + C(1-kd) + \ldots + C(1-nd)$$

$$V_A = \sum_{k=1}^{n} C(1-kd)$$

Caso de una renta inmediata
Prepagable
Temporal : n
Constante: C



Ley financiera de capitalización :

$$V_F = C(1+i) + \ldots + C(1+(n-k)\cdot i) + \ldots + C[1+(n-2)\cdot i] + C[1+(n-1)\cdot i] + C(1+ni)$$

$$V_F = \sum_{K=0}^{n-1} C[1+(n-k)i]$$

Ley financiera de descuento:

$$V_A = C + C(1-d) + C(1-2d) + \ldots + C(1-kd) + \ldots + C[1-(n-1)d]$$

$$V_A = \sum_{K=0}^{n-1} C[1-kd]$$

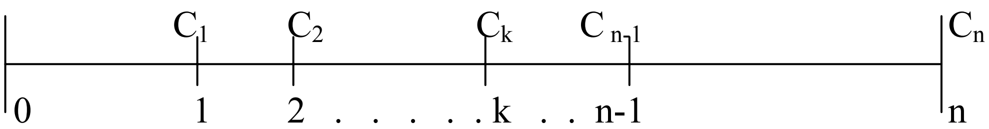
4.3. Valoración de rentas con las leyes compuestas.

Renta
- temporal
  - inmediata
    - Postpagable
    - Prepagable
  - diferida
    - Postpagable
    - Prepagable
- Perpetua
  - inmediata
    - Postpagable
    - Prepagable
  - diferida
    - Postpagable
    - Prepagable

Renta temporal , inmediata, postpagable

$$V_A = C_1(1+i)^{-1} + C_2(1+i)^{-2} + \ldots + C_K(1+i)^{-k} + \ldots + C_{n-1}(1+i)^{-n+1} + C_n(1+i)^{-n}$$

$$V_A = \sum_{k=1}^{n} C_K (1+i)^{-k}$$

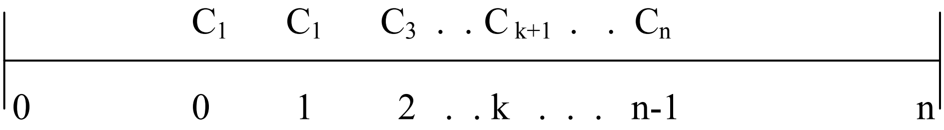


$$V_F = V_A \cdot (1+i)^n$$

Renta temporal, inmediata, Prepagable.

$$V_A = C_1 + C_2(1+i)^{-1} + C_3(1+i)^{-2} + \ldots + C_{k+1}(1+i)^{-k} + \ldots + C_n(1+i)^{-n+1}$$

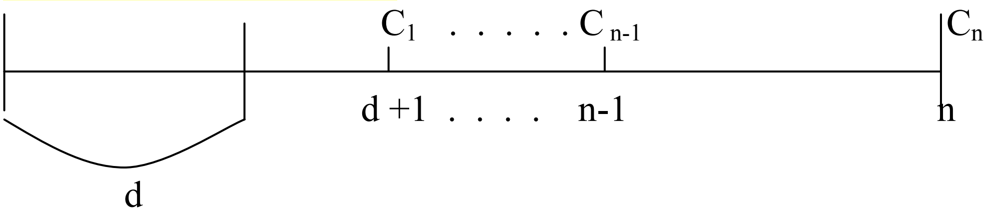
$$V_A = [1+i]\sum_{k=1}^{n} C_K (1+i)^{-k}$$



$V_F = (1+i) V_A (1+i)^{-n}$

Renta temporal , diferida, postpagable.

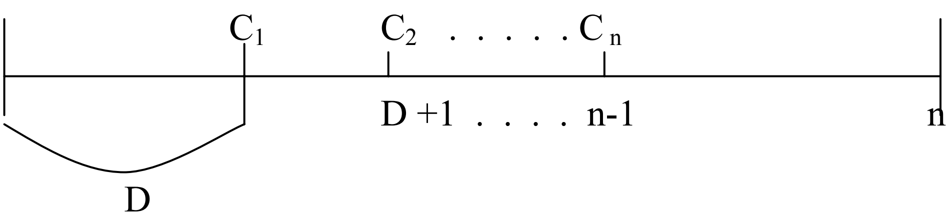
$V_A = (1+i)^{-d} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_K (1+i)^{-k}$



$V_F = (1+i)^{-d} \cdot V_A \cdot (1+i)^{-n}$

Renta temporal , diferida, prepagable.

$V_A = (1+i) \cdot (1+i)^{-d} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_K (1+i)^{-k}$



$V_F = (1+i) \cdot (1+i)^{-d} \cdot V_A \cdot (1+i)^{-n}$

TEMA 5: *RENTAS CONSTANTES VALORADAS CON CAPITALIZACIÓN COMPUESTA*

5.1. Rentas constantes temporales

Inmediata:

Renta Postpagable:

C C C . . . . . .C C

0 1 2 k . . . . . .n-1 n

Valor actual de una renta unitaria postpagable.

$$A_n = V_A = \sum_{k=1}^{n} C\cdot(1+i)^{-k} = C\cdot\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k} = C\cdot a_n\cdot i$$

Suma de los términos de una progresión geométrica:

$$S = \frac{a_1 - a_n\cdot r}{1-r} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{(\cancel{1+i})^{-n}\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{1-(1+i)^{-1}}; S = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i/\cancel{1+i}} = a_n i$$

$$A_n = V_A = C \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right)$$

Valor final de una renta unitaria postpagable.

$$S_n = V_F = (1+i)^n \cdot V_A = C \cdot a_n \cdot i \cdot (1+i)^n = C \cdot A_n \cdot i$$

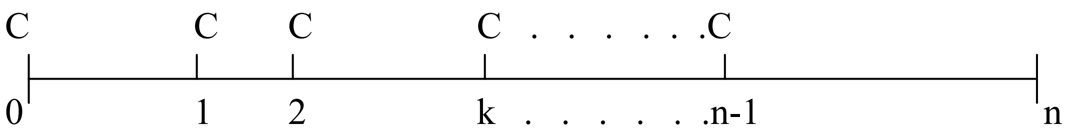
Suma de los términos de una progresión geométrica:

$$\boxed{S = \frac{a_n \cdot i - a_1}{i-1}}$$

Comprobación: $A_n \cdot i = a_n \cdot i \cdot (1+i)^n$

$$V_F = C \cdot \left[(1+i)^n \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] = C \cdot \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-n}}{i} \right] = C \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{I} \right] = C \cdot S_n i$$

Renta Prepagable



$$A_n = V_A = V_A \cdot (1+i) = C \cdot a_n \cdot i \cdot (1+i) = C \cdot a_n \cdot i$$
$$S_n = V_F = V_F \cdot (1+i) = C \cdot A_n \cdot i \cdot (1+i) = C \cdot A_n \cdot i$$

Si yo tengo $a_n i \cdot (1+i) = \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right) \cdot (1+i) \Rightarrow \frac{(1+i)-(1+i)^{-n+1}}{i}$

Si yo tengo $A_n i = S_n i = (1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$

Si queremos conseguir el valor actual, de una renta constante, temporal, postpagable y además que sea diferida:

$$V_A = C \cdot a_n i \cdot (1+i)^{-d}$$

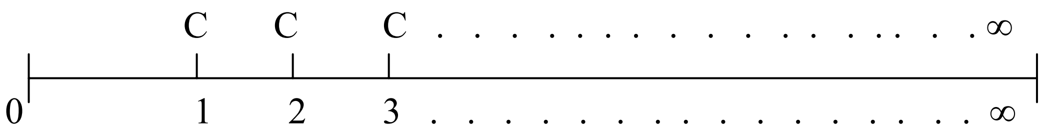
Si en cambio, deseamos obtener el valor actual, de una renta constante, temporal, postpagable y anticipada:

$$V_A = C \cdot a_n i \cdot (1+i)^p$$

Como podemos observar, para ir obteniendo los distintos tipos de posibilidades tenemos que ir combinando las distintas expresiones conocidas.

5.2. Rentas constantes perpetuas.

Renta Postpagable:



$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} C\cdot a_n \cdot i = C\cdot \lim_{n\to\infty} \cdot a_n \cdot i = C \lim_{n\to\infty} \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = C\cdot\frac{1}{i} = \frac{C}{i}$$

En cuanto a la obtención del valor final, no es posible obtener.

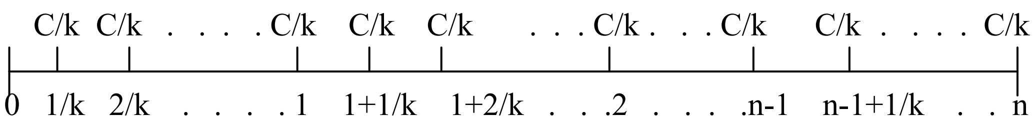
Hacer una aclaración, en cuanto, a la obtención de las distintas posibilidades de rentas, como pueden ser: renta constante, perpetua, postpagable,diferida, en cuyo caso, su expresión sería:

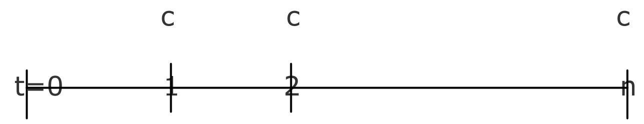
$$A_\alpha = C \cdot a_n i \cdot (1+i)^{-d} = C \cdot \frac{1}{i} \cdot (1+i)^{-d} = \frac{C(1+i)^{-d}}{i}$$

5.3. Rentas constantes fraccionadas.

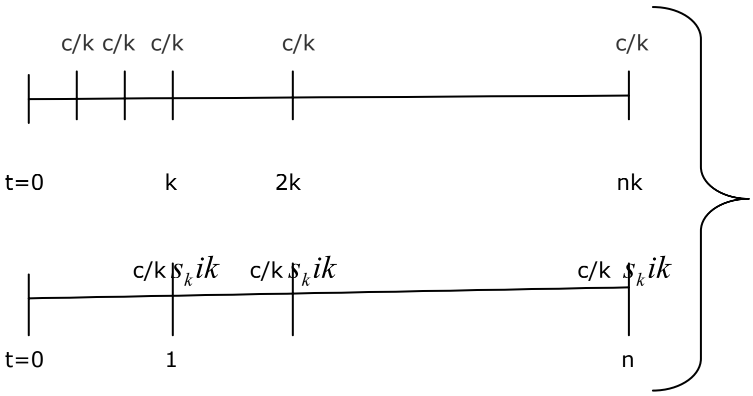
Son rentas de frecuencia inferior al anual.

El fraccionamiento de las rentas consiste en dividir cada período de varios subperíodos (k) asociando a cada subperíodo un capital. Por tanto, el fraccionamiento de una renta de n períodos la transforma en otra de n x k términos referidos a otros tantos subperíodos.





$$V_{t=0} = C \cdot a_n i$$



$$V_{t=0} = \frac{C}{K} \cdot a_{nk} ik = \frac{C}{K} \cdot S_k ik \cdot a_n i = \frac{C}{K} \cdot \frac{i}{ik} \cdot a_n i = C \cdot \frac{i}{jk} \cdot a_n i = \frac{i}{jk} \cdot C \cdot a_n i$$

$$a_{nk} ik = \frac{1-(1+ik)^{-nk}}{ik}$$

$$S_k ik = \frac{(1+ik)^k - 1}{ik} = \frac{1+i-1}{ik} = \frac{i}{ik}$$

TEMA 6: *RENTAS VARIABLES VALORADAS CON CAPITALIZACIÓN COMPUESTA*

6.1. Rentas geométricas temporales.

Este tipo de rentas sirve para valorar un conjunto de capitales equidistantes en el tiempo cuyas cuantías son variables siguiendo una ley en progresión geométrica, esto es, cada término es el anterior multiplicado por un mismo número (que se denomina razón de la progresión geométrica) y que notaremos por q.

Para calcular cualquier término basta con conocer, por tanto, el primero de ellos (c) y la razón de la progresión (q).

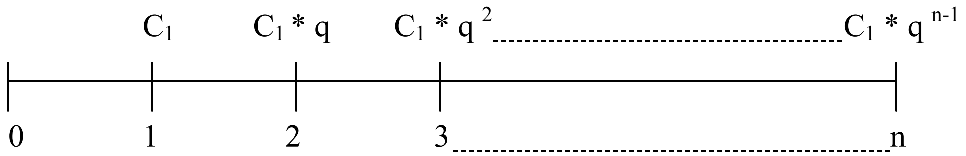
Se caracterizan porque sus términos varían en progresión geométrica, esto es:

C_1
$C_2 = C_1 \cdot q$
$C_3 = C_2 \cdot q = C_1 \cdot q^2$

$C_n = C_{n-1} \cdot q = C_1 \cdot q^{n-1}$

donde **q>0** y representa la razón de la progresión geométrica.

Renta temporal, inmediata y postpagable:



$$A_n'' = VA = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + C_1 \cdot q \cdot (1+i)^{-2} + C_1 \cdot q^2 \cdot (1+i)^{-3} + \ldots + C_1 \cdot q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n} =$$

$$= C_1 \cdot \underbrace{[q^0 \cdot (1+i)^{-1} + q \cdot (1+i)^{-2} + q^2 \cdot (1+i)^{-3} + \ldots + q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}]}_{\text{Suma de los términos de una progresión geométrica de razón } r = q\,(1+i)^{-1}}$$

Suma de los términos de una progresión geométrica de razón $r = q\ (1+i)^{-1}$

Siendo, $S = \dfrac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$

Observaciones

$a_1 = q^0 \cdot (1+i)^{-1}$

$a_n = q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}$

$r = q \cdot (1+i)^{-1}$

$$\mathbf{S} = \frac{q^0 \cdot (1+i)^{-1} - q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n} \cdot q \cdot (1+i)^{-1}}{1-q \cdot (1+i)^{-1}} = \frac{(1+i)^{-1} \cdot [1- q^n\,(1+i)^{-n}]}{\underbrace{1-q \cdot (1+i)^{-1}}_{\rightarrow\ *1}} =$$

$$*1 \longrightarrow 1 - q \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-q}{1+i}$$

$$= \frac{\cancel{(1+i)^{-1}} \cdot [1-q^n \cdot (1+i)^{-n}]}{(1+i-q) \cdot \cancel{(1+i)^{-1}}} = \frac{1-q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$V_A = C_1 \cdot \frac{1-q^n (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

Casos posibles

A) $q \neq 1+i$

$$A_n'' = VA = C_1 \cdot \frac{1-q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} \text{, siempre que } q \neq 1+i$$

B) Si q = 1+i

$$A_n'' = VA = C_1 \cdot [q^0 \cdot (1+i)^{-1} + q \cdot (1+i)^{-2} + \ldots + q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}] =$$

$$= C_1 \cdot [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-1} + \ldots + (1+i)^{-1}] = C_1 \cdot n \cdot (1+i)^{-1} = C_1 \cdot \frac{n}{1+i}$$

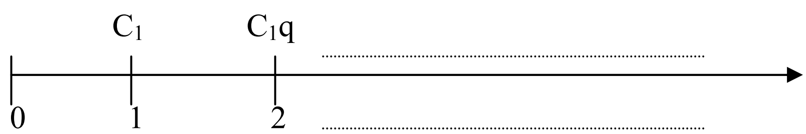
$$\boxed{C_1 \cdot \frac{n}{1+i} \text{ , siempre que } q = 1+i}$$

$$\boxed{S_n'' = VF = VA \cdot (1+i)^n = A_n'' \cdot (1+i)^n}$$

6.2. Rentas geométricas perpetuas.

El cálculo de la renta en progresión geométrica perpetua se realiza, como las demás rentas perpetuas, a través del límite cuando el número de términos de la renta (n) tiende a infinito.

Resultando finalmente que el límite, y por tanto el resultado del valor actual, está en función de la relación existente entre el valor de la razón de la progresión (q) y (1 + i), y sólo tendrá sentido financiero cuando q < 1 + i, quedando el siguiente valor actual:



$$\boxed{q \neq 1+i}$$

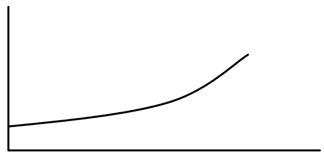
$$A_\alpha'' = VA = \lim_{n \to \alpha} C_1 \cdot \frac{1+q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} = \lim_{n \to \alpha} C_1 \frac{1 - \left\langle \frac{q}{1+i} \right\rangle}{1+i-q}$$

Casos posibles

La función es divergente, luego no es posible determinar el VA.

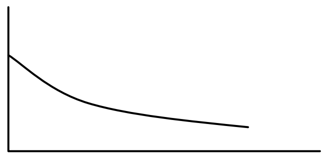
a) Si q > 1+i , la función es divergente

$$\left\langle \frac{q}{(1+i)} \right\rangle^{n}$$



b) Si q< 1+i , la función convergente a cero

$$\left\langle \frac{q}{(1+i)} \right\rangle^{n}$$



✳ Sólo es posible determinar el V_A si $\boxed{q < 1+i}$

$$\boxed{A_{\alpha}" = VA = C_1 \cdot \frac{1}{1+i-q} \text{ , siempre que } q < 1+i}$$

"Único caso en el que existe VA para la renta perpetua".

$\boxed{q = 1+i}$

$$A_{\alpha}" = VA = \lim_{n \to \alpha} C_1 \frac{n}{1+i}$$

La función es divergente, luego tampoco es posible determinar el VA.

6.3. Rentas geométricas fraccionadas.

Son aquellas en las que los términos siguen una progresión pero la razón de la variación se produce en una unidad de tiempo mayor que aquella en la que vienen dados los capitales, cualquiera que sea el tipo de interés de la renta. Por ejemplo, el caso de la renta formada por las nóminas de un individuo que cobra mensualmente y tiene subidas salariales anuales calculadas sobre el sueldo del año anterior: los sueldos varían anualmente pero se mantienen constantes dentro del año.

Conviene recordar que las fórmulas de las rentas en geométrica utilizadas sólo se pueden aplicar cuando los términos, el tanto de valoración y la razón de la renta están expresados en la misma unidad (obligatoriamente la de la razón, para que haya progresión).

Por tanto, el ejemplo anterior (y cualquier caso parecido) no se podría resolver aplicando directamente las fórmulas de las rentas en progresión geométrica sin más.

Deberemos trabajar obligatoriamente en la unidad de tiempo en la que se produce la variación de los capitales (la unidad de la razón), lo que supondrá transformar, si es necesario, el tanto de valoración del problema (a través de la expresión de tantos equivalentes en compuesta). Por lo que se refiere a los capitales, éstos se mantienen constantes a nivel de subperíodo, dentro de cada período, y sólo varían de un período a otro (en el caso del ejemplo anterior, los sueldos se mantienen constantes dentro del año y varían de un año para otro), y de la misma manera que se cambia el tipo de interés, se deberán sustituir los términos por otros equivalentes en la unidad de la razón de la progresión.

Para obtener el valor actual, basta con tener en cuenta la fórmula correspondiente para las rentas geométricas temporales, pero teniendo en cuenta, que debemos de utilizar la expresión correspondiente para convertirla en fraccionada. De este modo, la expresión siguiente representa dicha situación:

$$\boxed{V_A = C_1 \cdot \frac{1}{(1+i)-q} \cdot \left(\frac{i}{jk}\right)}$$

A partir del valor actual pospagable se puede obtener el resto de valores.

6.4. Rentas aritméticas temporales.

Este tipo de rentas se refiere a un conjunto de capitales cuyas cuantías van variando y lo hacen siguiendo una ley en progresión aritmética, esto es, cada término es el anterior aumentado (o disminuido) en una misma cuantía (que se denomina razón de la progresión aritmética) y que notaremos por d, siempre expresada en unidades monetarias.

Para calcular cualquier término basta con conocer, por tanto, el primero de ellos (c) y la razón de la progresión (d).

Se caracterizan porque la cuantía de sus términos varían en progresión aritmética, esto es:

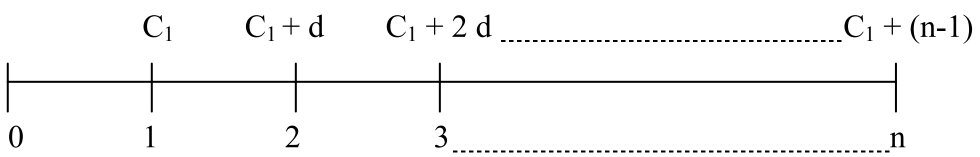
C_1
$C_2 = C_1 + d$
$C_3 = C_2 + d = C_1 + 2\,d$

$C_n = C_{n-1} + d = C_1 + (n-1)\cdot d$

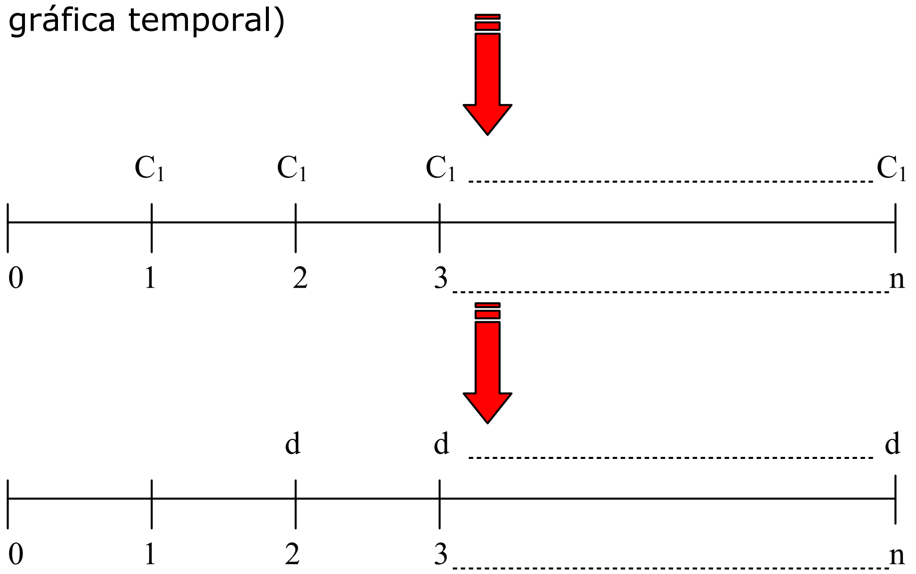
✳Donde d puede ser + ó – pero siempre, $C_1 + (n-1) \cdot d > 0$

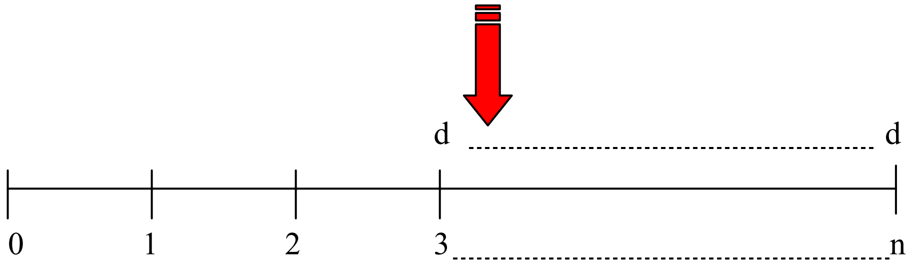
$$\boxed{d \rangle -\frac{C_1}{n-1}}$$

Renta temporal, inmediata y postpagable

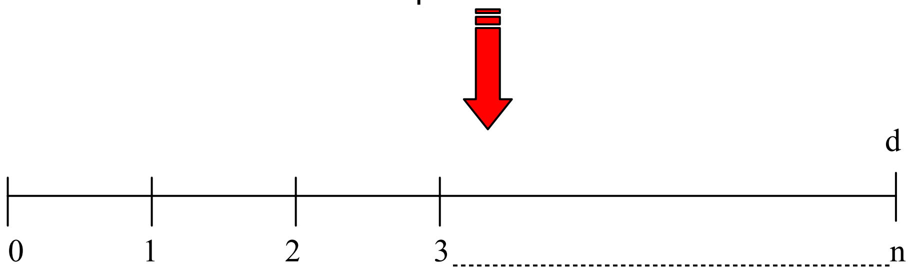


Desarrollado en varias gráficas es: (desarrollo de la renta en una gráfica temporal)





Si estuvieramos en la posición enésima:



↓

Analíticamente lo podemos expresar de la siguiente forma:

↓

$$A_n' = C_1 \cdot a_{\overline{n|}i} + d \cdot a_{\overline{n-1|}i}(1+i)^{-1} + d \cdot a_{\overline{n-2|}}\ (1+i)^{-2} + d \cdot a_{\overline{1|}i}(1+i)^{-(n-1)}$$

$$= C_1\, a_{\overline{n|}i} + d \cdot \sum_{k=1}^{n-1} a_{\overline{n-k|}i} \cdot (1+i)^{-1} \longrightarrow \ast 2$$

$\ast 2 \longrightarrow$ ***Desarrollo de la expresión:***

$$a_{\overline{n-k|}i} \cdot (1+i)^{-k} = \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} \cdot (1+i)^{-k} = \frac{(1+i)^{-k} - (1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= \frac{(1+i)^{-k}}{i} - \frac{(1+i)^{-n}}{i}$$

$$= An' = C_1 \cdot a_{\overline{n|}i} + d \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \cdot \left[\frac{(1+i)^{-k}}{i} - \frac{(1+i)^{-n}}{i} \right] =$$

$$\Rightarrow C_1 \cdot a_n i \cdot \frac{d}{i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (1+i)^{-k} - \frac{d}{i}(1+i)^{-n}(n-1) =$$

$$C_1 \cdot a_n i + \frac{d}{i} \sum_{k=1}^{n-1} (1+i)^{-k} - \frac{d}{i}(1+i)^{-n} n + \frac{d}{i}(1+i)^{-n} =$$

$$C_1 \cdot a_n i + \frac{d}{i} \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} - \frac{dn}{i}(1+i)^{-n} =$$

$$C_1 \cdot a_n i + \frac{d}{i} \cdot a_n i - \frac{nd}{i}(1+i)^{-n}$$

Hay autores que obtienen el valor actual de la siguiente forma:

$$A_n = C_1 \cdot a_n i + \frac{d}{i} \cdot a_n i - \frac{nd}{i}(1+i)^{-n} + \frac{nd}{i} - \frac{nd}{i}$$

$$n \cdot d \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A_n = \left[C_1 + \frac{d}{i} + nd\right] a_n i - \frac{nd}{i}$$

6.5. Rentas aritméticas perpetuas.

Renta aritmética perpetua, inmediata y postpagable

$$A_\alpha' = \lim_{n \to \alpha} A_n' = \lim_{n \to \alpha} = \left[C_1\, a_{\overline{n}|\, i} + \frac{d}{i} \cdot a_{\overline{n}|\, i} - \frac{n \cdot d}{i} (1+i)^{-n} \right] =$$

$$= C_1 \cdot \frac{1}{i} + \frac{d}{i} \cdot \frac{1}{i} = \boxed{\left[C_1 + \frac{d}{i} \right] \cdot \frac{1}{i}}$$

Aclaraciones Analíticas

1. $C_1 \cdot a_{\overline{n}|}\, i \rightarrow C_1 \frac{1}{i}$

$\lim_{n \to \alpha}$

$\frac{d}{i}$ $\frac{d}{i}$ $\frac{1}{i}$ $\frac{d}{i^2}$

$$C_1 \cdot \frac{1}{i} + \frac{d}{i^2} = \left[C_1 + \frac{d}{i} \right] \cdot \frac{1}{i}$$

2. $\_\_\_\_\_ \quad a_{n\rceil i} \rightarrow \cdot \qquad \cdot \qquad = \_\_\_$

$\lim_{n\to\alpha}$

3. $\dfrac{n \cdot d}{i} \cdot [1+i]^{-n} \rightarrow$ tiende a " 0 "

$\lim_{n\to\alpha} (1+i)^{-n} \rightarrow 0$

6.6. Rentas aritméticas fracionadas.

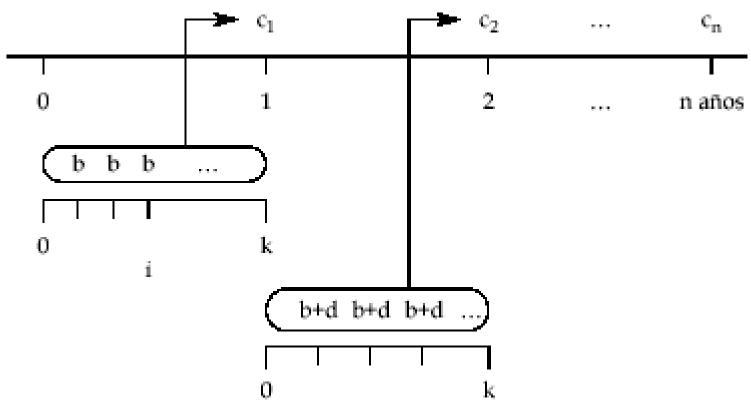
Al igual que en el caso de las geométricas fraccionadas, los términos varían, en este caso de forma lineal (aumento/disminución constante), produciéndose la variación con una unidad de tiempo mayor que aquella en la que vienen los capitales, cualquiera que sea el tipo de interés de la renta (por ejemplo, variación anual y capitales semestrales; variación trimestral y capitales mensuales…).

Las fórmulas de las rentas en aritmética sólo se pueden aplicar cuando los términos, el tanto de valoración y la razón de la renta están expresados en la misma unidad (obligatoriamente la de la razón, para que haya progresión).

Por tanto, las situaciones anteriores (y cualquier caso parecido) no se podrán resolver aplicando directamente las fórmulas de las rentas en progresión aritmética sin más.

Deberemos trabajar obligatoriamente en la unidad de tiempo en la que se produce la variación de los capitales (la unidad de la razón), lo que supondrá transformar, si es necesario, el tanto de valoración del problema (a través de la expresión de tantos equivalentes en compuesta). Por lo que se refiere a los capitales, éstos se mantienen constantes a nivel de subperíodo, dentro de cada período, y sólo varían de un período a otro y de la misma manera que se cambia el tipo de interés, se deberán sustituir los términos por otros equivalentes en la unidad de la razón de la progresión.

Para el caso de una renta variable en la que los términos aumentan periódicamente una cantidad d (progresión aritmética de razón d), con términos fraccionados, pospagables, temporal (de n períodos), al tanto i de valoración, la representación será la siguiente:



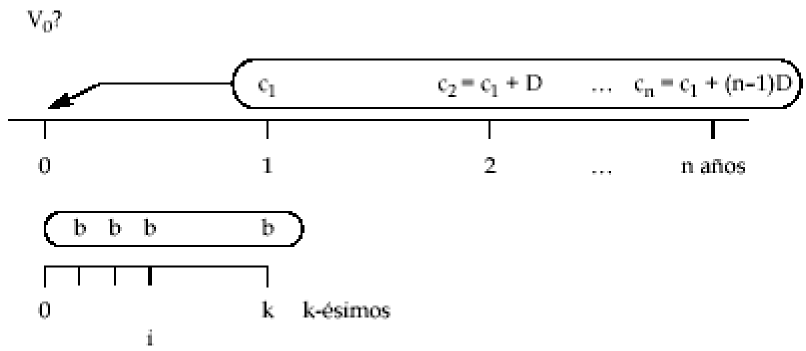
Calculando el primero de los términos equivalentes (c_1):

$$C_1 = b \cdot S_k ik = b \cdot k \cdot \frac{i}{jk}$$

el resto de términos equivalentes se obtienen a partir del primero, porque varían en progresión aritmética, siendo la razón el valor final de la renta que forma los aumentos constantes (d):

$$Razón = D = d \cdot S_k ik = d \cdot k \cdot \frac{i}{jk}$$
$$C_2 = (b+d) \cdot S_k ik = b \cdot S_k ik + d \cdot S_k ik = C_1 + d$$
$$C_3 = C_1 + 2d = (b+2d) \cdot S_k ik = b \cdot S_k ik + 2d \cdot S_k ik = C_1 \cdot 2d$$

Trabajando en la unidad de variación de los capitales (la de la razón):



Renta aritmética fraccionada,postpagable

Partimos del valor actual de una renta aritmética, teniendo en cuenta, que para convertirla en fraccionada, utilizamos la expresión apropiada, como a continuación se observa:

$$A_n = \left[C_1 + \frac{d}{i} + nd\right] a_n i - \frac{nd}{i} \cdot \left(\frac{i}{jk}\right)$$

A partir del valor actual pospagable se puede obtener el resto de valores: prepagable, final, perpetuo, diferido, anticipado… sin más que tener las consideraciones ya comentadas para estos cálculos en cualquier tipo de renta.

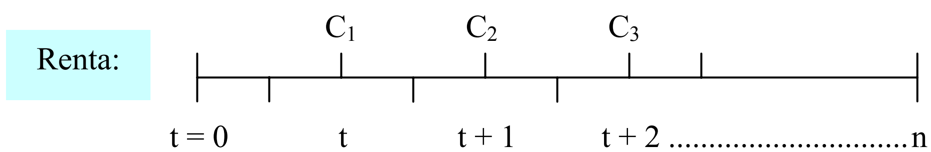
TEMA 7: *RENTAS CONTINUAS*

7.1. Definición de renta continua.

Una renta es continua si sus infinitos términos son de cuantía infinitesimal y vencen en cada instante del tiempo.

Será una renta continua todo conjunto de capitales separados entre sí por períodos infinitesimales. Parece, pues, que este tipo de rentas se pueden entender como rentas fraccionadas donde el fraccionamiento tiende a ser infinito dentro de cada período.

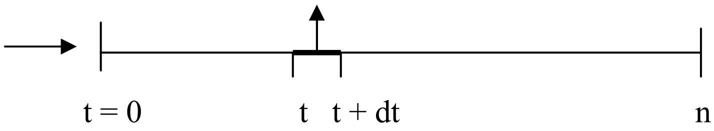
En la práctica se pueden considerar rentas continuas aquellas cuya frecuencia de fraccionamiento del término sea superior a 12.



La renta se dice continua cuando los periodos de maduración son infinitesimales. La renta continua tendrá infinitos términos exigibles en cada instante del tiempo.

C(t) d t = cuantía del capital que vendrá en (t , t+dt)

Renta continua



C(t) = tasa instantánea que de pago.

Algunas veces es razonable suponer flujos de tesorería que se distribuyen uniformemente a lo largo del año (para el presupuesto de capital) como aprovisionamiento para cuando hay pagos, muy frecuentes, así se pueden simplificar los cálculos.

7.2. Valoración de rentas continuas en capitalización compuesta.

1. Renta Continua (Constante)

Valor actual

$$V_o = \text{limit}_{n\to\alpha}\ C \cdot \frac{i}{J_k} \cdot a_{n\rceil\, i} = \boxed{C \cdot \frac{i}{P}\ a_{n\rceil\, i}} = C \cdot a_{n\rceil\, i}$$

$$J_k = K \cdot i_k$$

$$\text{Limit}_{k\to\alpha}\ Jk = \text{limit}_{k\to\alpha}\ K[1+i]^{1/k} - 1 = \overset{\text{Ln}}{\text{Log e}}\ (1+i) = \int \qquad \boxed{\text{Ln}\ (1+i) = \int}$$

Observación Analítica

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{C_o}\cdot(1+i_k)^{\cancel{n}\cdot k} = (1+i)^{\cancel{n}}\cdot\cancel{C_o} \\ (1+i_k)^{k} = (1+i) \rightarrow 1+i_k = (1+i)^{1/k} \\ (1+i_k)^{k} - 1 = i \rightarrow i_k = (1+i)^{1/k} - 1 \end{array}\right.$$

Valor final

$$\overline{V}_n = C\,(1+i)^n\ \bar{a}_{n\urcorner\, i} = C \cdot \acute{S}_{n\urcorner\, i}\ =\ C\frac{i}{\int}\ S_{n\urcorner\, i}$$

2. Renta Continua en Progresión Geométrica

Valor actual

$$\overline{V}_o = \bar{A}_{(c,q)\,n\urcorner\, i} = \text{limit}_{\,k\to\alpha}\ A^{(k)}_{(c,q)\,n\urcorner\, i} = \text{limit}_{\,k\to\alpha}\ \frac{i}{j_k}\ A_{(c,q)\,n\urcorner\, i} =$$

$$= \frac{i}{\int}\ A_{(c,q)\,n\urcorner\, i}$$

Valor actual

$$\overline{V} = \bar{A}_{(c,q)\,n\urcorner\, i} = \text{limit}_{\,k\to\alpha}\ A^{(k)}_{(c,q)\,n\urcorner\, i} = \text{limit}_{\,k\to\alpha}\ \frac{i}{j_k}\ A_{(c,q)\,n\urcorner\, i} =$$

$$= \frac{i}{\int}\,A_{(c,q)\,n\urcorner\, i}$$

Casos:

- $q \neq 1+i$

  $$\to \frac{i}{\int} \cdot C_1 \cdot \frac{1-q^n\,(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

- $q = 1+i$

  $$\to \frac{i}{\int} \cdot C_1 \cdot \frac{n}{(1+i)}$$

Valor final

$$\overline{V}_n = \acute{S}_{(c,q)\,n\urcorner\, i} = (1+i)\ \bar{A}_{(c,q)\,n\urcorner\, i} = \frac{i}{\int}\ \boxed{S(c,q)\ n\urcorner\, i} \to \frac{i}{\int}\,(1+i)^n \cdot A_{(c,q)\,n\urcorner\, i}$$

3. Datos: Rentas Continuas en Progresión Aritmética

Valor actual

$$\overline{V}_o = \bar{A}_{(c,d)n\urcorner\, i} = \text{limit}_{\,k\to\alpha}\, A^{(k)}_{(c,d)\, n\urcorner\, i} = \text{limit}_{\,k\to\alpha}\, \frac{i}{j_k}\, A_{(c,d)\, n\urcorner\, i} =$$

$$= \frac{i}{\int}\, A_{(c,d)n\urcorner\, i}$$

Valor final

$$\overline{V}n = \acute{S}_{(c,d)\, n\urcorner\, i} = (1+i)^n \cdot \bar{A}_{(c,d)n\urcorner\, i} = \frac{i}{\int} \cdot S_{(c,d)n\urcorner\, i}$$

$$= \frac{i}{\int} \cdot (1+i)^n \cdot A_{(c,d)n\urcorner\, i}$$

$$= \frac{i}{\int} \cdot (1+i)^n \left[C_1 \cdot a_{n\urcorner\, i} + \frac{d}{i}\, a_{\, n\urcorner\, i} - \frac{n\cdot d}{i}\, (1+i)^{-n} \right]$$

ALTERNATIVA

Si supongo la fórmula de interés constante. → $\int = L_n\,(1+i)$

$$V_{\,actual} = {}^{n}\!\int_o C\,(t)\,(1+i)^{-t}\, d\cdot t = {}^{n}\!\int_o C(t)\, e^{-pt}\, d\cdot t$$

Para una renta unitaria: C (t) = 1:

$$\left[\frac{(1+i)^{-t}}{Ln\,(1+i)} \right]_o^n \qquad \frac{1}{L_n\,(1+i)} \left[\qquad \right]$$

$$V_{actual} = {}^{n}\!\int_o (1+i)^{-t}\, d{\cdot}t = - \qquad = \qquad 1-(1+i)^{-n} \quad =$$

$$= \frac{i}{Ln\,(1+i)} \cdot a_{n\rceil\, i}$$

$L_n(1+i)$ = ***Tanto aplicable en capitalización continua, equivalente a un determinado tanto efectivo. i .***

P

RECORDAMOS

$$L_n(1+i) = P$$
$$(1+i) = e^{Ln(1+i)}$$

$$V_{actual} = {}^{n}\!\int_o c\, e^{-pt}\, d{\cdot}t = C \left[-\frac{1}{P}\, e^{-pt} \right]_o^n = \frac{C}{P}\,(1-e^{-np})$$

$$= \frac{C}{Ln\,(1+i)}\left(1-(1+i)^{-n}\right) = C\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) i \cdot \frac{1}{L_n\,(1+i)}$$

Para una renta cualquiera que se distribuye uniformemente al año:

C (t) = C (a partir de la renta unitaria)

$$V_{actual} = C\, a_{n\rceil\, i} \cdot \frac{i}{L_n(1+i)} = c \cdot a_{n\rceil\, i} \cdot \frac{i}{\int} = \frac{C}{L_n\,(1+i)}\left(1-(1+i)^{-n}\right) =$$

$$= \frac{C}{L_n\,(1+i)}\left(1-e^{-Ln(1+i)n}\right) =$$

Por tanto también será:

$$V_{actual} = \frac{C}{P}\,(1-e^{-nP}) = C_1\, \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} \cdot \frac{i}{L_n(1+i)}$$

Nota

$(1+i) = e^{P}$

Las rentas aritméticas y geométricas se pueden tratar integrando el cero:

$C(t) = C_1 + C_2 t + C_3 q^t$

¡¡Formulación!!

Arit: $C\,(t) = C + d{\cdot}t$ → $C_1 + (n-1)\,d$

Geom: $C\,(t) = Cq^t$ → $C_n = C_1 \cdot q^{\,n-1}$

ALTERNATIVA

Valor actual de una renta continua =

$$=\lim_{k\to\alpha} V_A^{fraccionada} = \lim_{k\to\alpha} C\cdot a_{n\rceil i}\cdot \frac{i}{i_k} = C\, a_{n\rceil i}\cdot i\, \frac{1}{\lim_{k\to\alpha} i_k} =$$

$$\boxed{\frac{J_k}{K} = \frac{1}{k/J_k}}$$

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$

$$(1+i) = \left(1+\frac{jk}{k}\right)^k$$

$$(1+i) = \boxed{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{i_k}}\right)^{k/j_k}\right]}$$

$$\underbrace{}_{e} \qquad e^{j_k}$$

$$(1+i) = e^{j_k} \xrightarrow[k\to\alpha]{} j_k = \ln(1+i)$$

7.3. Rentas continuas como límite de rentas fraccionadas.

a) caso constante:

Sacarlo a partir del caso perpetuo.

Rentas Básicas: n, C, i.

$V_{actual} = C\, a_{n\rceil i}$

2

$\frac{C}{2} = C \cdot 1/K \quad K=2 \qquad V_{actual} = C\, a_{n\rceil i} \frac{i}{J_2}$

4

$\frac{C}{4} = C \cdot 1/k \quad K=4 \qquad V_{actual} = C\, a_{n\rceil i} \frac{i}{J_4}$

Continua

$C\cdot d\cdot t \qquad K\to\alpha \qquad V_{actual} = C\, a_{n\rceil i} \frac{i}{\lim J_k}$

$$e^{j\alpha} = 1+i \Leftrightarrow j_k = k\, i_k = k\,[(1+i)^{1/k} - 1] = \frac{(1+i)^{1/k} - 1}{1/k} = f(x) = (1+i)x \to \lim_{k\to\alpha} J_k =$$

$$= f'(0) = L_n(1+i)$$

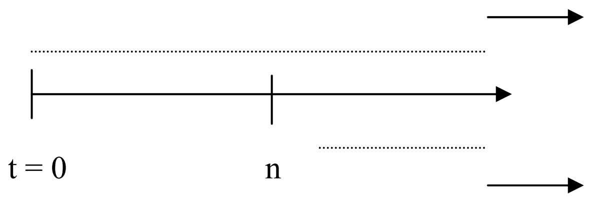
$\|$

P

Continua

$$V_{actual} = C \cdot a_{\overline{n}|\,i} \cdot \frac{i}{L_n\,(1+i)} = \frac{C}{P}\,(1-e^{-n \cdot p})$$

- Obtenemos a partir de la fórmula de rentas perpetuas; fraccionadas:



Cont. Perp.

$$V_{acual} = \frac{C}{P} = 1$$

Cont. Perp.

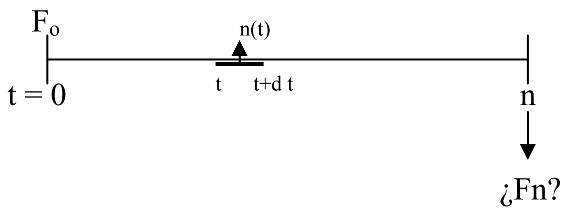
$$V_{acual} = \frac{C}{P} = e^{-np}$$

Renta continua temporal

$$V_{actual} = \frac{C}{P}\,(1-e^{-np})$$

C = Tasa instantánea anual de pago
P = Ln (1+i)
i = Tanto efectivo anual

- Ecuación de un fondo en general con pagos continuos.



$t = 0 \quad F_o$ = valor del fondo.

n (t) → pago (imposición) continua

Fuerza de interés: δ (t) para la capitalización continua.

Tasa instantánea anual de pago.

La cantidad depositada en el fondo durante un intervalo de tiempo infinitesimal (t, t+d·t) es P (t) d·t.

$$d\,F(t) = F(t)\,\delta(t)\,d\cdot t + n(t)\,d\cdot t$$

$$F'(t) = F(t)\,\delta(t) + n(t)$$

- $$\frac{d}{dt}\left[e^{-\int^{t}\delta(s)ds}F(t)\right] =$$

$$= e^{-\int^{t}\delta(s)ds}(-\delta(t))\,F(t) + e^{-\int^{t}\delta(s)ds}\left[F(t)\,\delta(t) + n(t)\right] =$$

$$= e^{-\int^{t}\delta(s)ds}\,P(t)$$

Así:

$$\int_{o}^{h}\left[\frac{d}{dt}\left(e^{-\int^{t}\delta(s)ds}F(t)\right)\right] = \underbrace{\int_{o}^{h} e^{-\int^{t}\delta(s)ds}P(t)\,d\cdot t}_{\text{Valor actual de los pagos}}$$

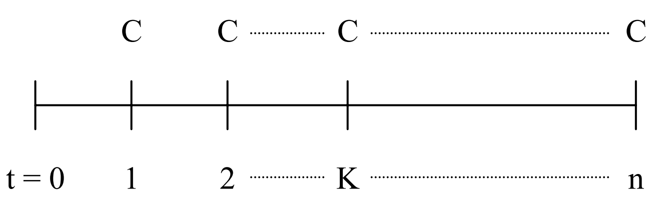
$$\underbrace{e^{-\int^{t}\delta(s)ds}\,{}''\,F(h) - F_o}$$

Valor actual de fondo.

Valoración de rentas con las leyes simples

- Caso inmediato, postpagable, temporal y constante.

n C



- Ley capitalización simple p = n : i precio para

$$V_{final} = \sum_{K=1}^{n} C\left(1 + (n-k)\,i\right)$$

Verificación:
$V_{actual}(1+i) = V\ final \leftarrow$

$$V_{actual} = \sum_{K=1}^{n} C \; \frac{\left(1+(n\text{-}k)\, i\right)}{1+n\, i}$$

- Ley de descuento comercial p = 0 : d

$$V_{actual} = \sum_{K=1}^{n} C\,(1-k\cdot d)$$

$$V_{final} = \sum_{K=1}^{n} C \; \frac{(1-k\cdot d)}{1-n\cdot d}$$

Lo normal es que se tome p = n.

Suma de progresiones aritméticas:

$a_1,\ a_2 = a_1 + d\ ,\ \ldots\ a_k = a_1 + (k\text{-}1)\, d,\ \ldots a_n = a_1+(n\text{-}1)\, d$

$\Sigma_n = a_1 + \ldots + a_n = a_1\ (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots$

$$\underbrace{a_1+(n-1)d}_{2a_1+(n-1)d} + \underbrace{a_1+(n-2)d}_{2a_1+(n-1)d} + \underbrace{a_1+(n-3)d}_{2a_1+(n-1)d}$$

$$\Sigma_n = (\,a_1 + a_n\,)\,\frac{n}{2}$$

Ejemplo14:

$$V_{final} = \sum_{K=1}^{n} C\left(1+(n\text{-}k)\, i\right) = \sum_{K=1}^{n} C + \sum_{K=1}^{n} n\cdot i\cdot C - \sum_{K=1}^{n} k\cdot i\cdot C =$$

$$= n\cdot c + n^2 i\cdot c - i\cdot c\,(1+2+\ldots+n) =$$

$$= n\cdot c + n^2 i\cdot c - i\cdot c\,(n+1)\,\frac{n}{2} =$$

$$= n\cdot c + n^2 i\cdot c - i\cdot c\,\frac{n^2}{2} - i\cdot c\,\frac{n}{2} =$$

$$= n\cdot c\left(1+\frac{in}{2} - \frac{i}{2}\right) =$$

$$= n\cdot c\left(1+ i\,\frac{n-1}{2}\right)$$

EJERCICIOS DE RENTAS

24) Calcular el término de una renta de 15 términos, al 3% sabiendo que su valor actual es de 200.000 €.

n = 15 $\qquad$ Ao = a * an

i = 8 % $\qquad$ $200.000 = a \dfrac{1-V^n}{i} \quad = \quad a$

$\dfrac{1-(1'08)^{-15}}{0'08}$

Ao = 200.000 $\qquad$ $a = \dfrac{200.000 * 0'08}{1-(1'08)^{-15}} = 23365'9$

25) Calcular el valor actual de una renta de 15 términos de 23365'91 €, cada uno, al 8%

n = 15

i = 8 % $\qquad$ $Ao = 23365'9 \; \dfrac{1-(1'08)^{-15}}{0'08}$

a = 23365'9 $\qquad$ Ao = 200.000

26)Calcular el término de una renta inmediata prepagable de 15 términos siendo su valor actual 200.000 € y el tanto de valoración el 8%.

n = 15 A'o = Ao (1 + i) = a $\frac{1-V^n}{i}$ (1 + i)

i = 8% $200.000 = a \frac{1-(1'08)^{-15}}{0'08}(1'08)$

A'o = 200.000 $a = \frac{200.000 * 0'08}{(1'08) * (1-(1'08)^{-15})} = 21635'10$

27)Calcular el valor final de la renta anterior.

S'n = Sn (1 + i) = a $\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$

S'n = 21635'10 $\frac{(1'08)^{-15} - 1}{0'08}(1'08)$

S'n = 634433'80

28)Calcular el valor final de la renta anterior suponiendo que fuese diferida en 4 años.

Coinciden los valores finales de la renta inmediata y la renta diferida. [634433,80]

29)Calcula el valor actual de la renta anterior.

d / A'o = S'n (1 + i) $^{-n-d}$

6.44..'80 (1'08) $^{-15-4}$ = d / A'o

d / A'o = 147005'97

30)Calcular el valor actual de una renta diferida en 4 años prepagable de término 21635'10 de 15 términos al 8 %

n = 15 d / A'o = a * an V^d = a $\frac{1-V^n}{i}V^d * (1+i)$

i = 8% d / A'o = 21635'10

$$\frac{1-(1'08)^{-15}}{0'08}(1'08)^{-4}(1'08)$$

a = 21635'90 d / A'o = 147005'96

d = 4 años

31) Calcular el valor actual de una renta de 10 términos de 150 € cada uno al 8%

Ao = a * an $\quad$ $Ao = 150\ \frac{1-(1'08)^{-10}}{0'08}$

an = $\frac{1-V^{d}}{i}$ $\quad$ Ao = 1006'51

n = 10

i = 8%

a = 150

32) Se sabe que el valor actual de una renta es de 5000 €, hallar su valor final si se coloca al 6% en 15 años.

Sn = Ao $(1+i)^n$ $\quad$ Sn = 5000 $(1'06)^{15}$

Ao = 5000 $\quad$ Sn = 11982'791

n = 15

i = 6%

33) Calcular el valor actual y final de una renta de 17 términos de 100 € cada uno al 12%, sabiendo que la renta es prepagable.

n = 17 $\quad$ A'o = a * an $(1+i)$

i = 12% $\quad$ $A'o = 100\ \frac{1-(1'12)^{-17}}{0'12}(1'12)$

a = 100 € $\quad$ A'o = 797'39862

prepagable $\quad$ S'n = A'o $(1+i)^n$

S'n = 797'3986 $(1'12)^{17}$

S'n = 5474'981

34) La diferencia y el cociente respectivamente de los valores final y actual de una renta son de 128198 y 2'1828746. Calcular los valores actual y final de la renta.

Sn – Ao = 128198

Sn / Ao = 2'1828746 $\quad$ Sn = Ao $(1+i)^n$

Ao $(1+i)^n$ / Ao = 2'1828746

$(1+i)^n$ = 2'1828746

Ao $(1+i)^n$ - Ao = 128198

Ao $\left[(1+i)^n - 1\right]$ = 128198

Ao [2'1828746 – 1] = 128198

Ao = 108378'35

Sn – Ao = 128198

Sn – 108378'35 = 128198

Sn = 236576'35

35) Hallar el número de períodos de una renta sabiendo que su valor final al 6% es de 93104, siendo los términos constantes de 4000 € cada uno.

i = 6%

Sn = 93104

a = 4000

An = a $\frac{1-V^n}{i}(1+i)^n$

$93104 = 4000\ \frac{1-(1'06)^{-n}}{0'06}(1'06)^n$

$23'276 = \frac{1-(1'06)^{-n}}{0'06}(1'06)^n$

$1'39656 = (1 - (1'06)^{-n})\ (1'06)^n$

$1'39656 = (1'06)^n - 1$

log 2'39656 = n log 1,06

0'3795883 = 0'0253058n

n = 15

36) Calcular el valor actual de una renta prepagable cuyo valor final es 31501'25 suponiendo que esta fuese diferida en 3 años y postpagable.

a = 500

n = 20

i = 10%

S'n = 31501'25

d = 3

Sn = $\frac{S'n}{(1+i)}$

Sn = $\frac{31501'25}{1'1}$ → Sn = 28637'5

d / Sn = Sn

d / Ao = Sn $(1+i)^{-n-d}$

d / Ao = 28637'5 $(1'1)^{-20-3}$

d / Ao = 3198'1832

37) Hallar el termino de una renta anual sabiendo que consta de 15 terminos, el tanto de valoración del 20% y el valor actual de 34285,28.

Ao= 34285,28

n= 15

i =20%

Ao= a · an

$$an = \frac{1-V^n}{i}$$

$$V^n = (1+i)^{-n}$$

$$34285{,}28 = a \cdot \frac{1-(1{,}20)^{-15}}{0{,}20}$$

a = 7333,0084

38) Calcular el valor actual de una renta prepagable de 400 € cada uno al 17% durante 18 años.

A´o?

a= 400

i =17%

n=18

Prepagable

$$A'o = a \cdot \frac{1-V^n}{i} \cdot (1+i)$$

$$A'o = 400 \cdot \frac{1-(1{,}17)^{-18}}{0{,}17}(1{,}17)$$

A´o= 2389,8421

39) Hallar el valor actual de una renta formada por 20 términos de 90 € cada uno al 8%.

n=20

i =8%

Ao?

a=90

$$Ao = a \cdot \frac{1-V^n}{i}$$

$$Ao = 90 \cdot \frac{1-(1{,}08)^{-20}}{0{,}08}$$

Ao = 883,63327

40) Hallar el valor final de la renta anterior.

$$An = Ao \cdot (1+i)^n$$

$$An = 883{,}63327 \cdot (1{,}08)^{20}$$

An = 4118,5768

41) Hallar el valor actual de una renta prepagable de 300€ anuales; al 15% durante 12 años.

i =15%

n=12

A´o?

a= 300

$$A'o = a \cdot \frac{1-V^n}{i} \cdot (1+i)$$

$$A'o = 300 \cdot \frac{1-(1{,}15)^{-12}}{0{,}15} \cdot (1+0{,}15)$$

$$A'o = 1870{,}1136$$

42)El valor actual de una renta al 20%, de termino 7333,01 es de 34285,28. Determina el número de terminos.

Ao= 34285,28 Ao = $a \cdot \frac{1-V^n}{i}$

a= 7333, 01 $34285{,}28 = 7333{,}01 \; \frac{1-(1{,}2)^{-n}}{0{,}2}$

i=20% 0,9350943= 1-(1,2)$^{-n}$

n? Log – 0,0649056 =-n log 1,2

1,187778 = -n 0,0791812

n= 14,99999

43)Calcula el valor final del ejercicio anterior suponiendo que la renta fuese prepagable.

$A'o = Ao(1+i)^n \rightarrow 34285{,}28(1{,}2)^{15} = 528234{,}05$

$A'n = A'o(1+i)$

A´n= 528234,05 · (1,2)

A´n= 633880,86

44)El valor actual de una renta de 16 terminos es de 108378. Siendo la diferencia entre su valor acual y final de 128197. A que tanto establecio la renta.

Ao= 108378

An –Ao = 128197→ An = 236575

i ? An = Ao · (1+i)^n

n =16 236575= 108378 (1+i)^{16}

(1828690)$^{1/16}$-1 =i

i= 0,04999

45)Se decide ingresar al principio de cada año 500 € en una entidad financiera al 10% de interes. Hallar el valor final de la renta formada por 20 terminos.

a= 500

i = 10% $A'o = a \cdot \frac{1-V^n}{i} \cdot (1+i)$

n=20 $A'o = 500 \cdot \frac{1-(1{,}1)^{-20}}{0{,}1}(1{,}1)$

Prepagable A´o= 4682,46

A´n? A´n = A´o · (1+i)^n

A´n= 4682,46(1,1)^{20}

A´n= 31501,25

46) Calcula el valor actual del ejercicio anterior suponiendo que la renta fuese diferida en 3 años. Postpagabales.

a= 500

n=20

$$Sn = \frac{S'n}{(1+i)}$$

i=10%

$$Sn = \frac{31501,25}{1,1} = 28637,5$$

S´n= 31501,25

d/Sn= Sn

d=3

d/Ao= Sn(1+i)$^{-n-d}$

d/Ao= 28637,5(1,1)$^{-20-3}$ $\rightarrow$ d/Ao= 3198,1832.

47) Una renta prepagable está formada por 2 términos de 500 € cada uno, si su valor final de la misma es de 1060'80 €, hallar el tanto por ciento de la renta.

S'n = 1060'80

a = 500

n = 2

S'n = a $\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$

1060'80 = 500 $\frac{(1+i)^2 - 1}{i}(1+i)$ ➔ 2'1216 = $\frac{(1+i)^2 - 1}{i}(1+i)$

2'1216 i = $\left[(1+i)^2 - 1\right](1+i)$ ➔

$$\frac{2'1216\ i}{(1+i)} = (1+i)^2 - 1$$

$$\frac{2'1216i}{(1+i)} = 1^2 + i^2 + 2*1*i - 1 \quad ➔ \quad \frac{2'1216i}{(1+i)} = 2i + i^2 = i(2+i)$$

2'1216i = $(2+i)i(1+i)$ ➔ $\frac{2'1216i}{i} = (2+i)(1+i)$

2'1216 = 3i + i^2

0'1216 = 3i + i^2

i^2 + 3i – 0'1216 = 0

$$i = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4*1*(-0'1216)}}{2*1} = \frac{-3 \pm 3'08}{2} = 0'04$$

i = 4%

48) Hallar el valor final de una renta diferida prepagable de 30 término sabiendo que la operación, se hizo al 24% siendo el periodo de diferimiento de 5 años y el termino de 60€.

d/S´n?

n=30

d=5

a=60

i=24%

d/S´n= $\frac{a \cdot (1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$

d/S´n=$\frac{60 \cdot (1{,}24)^{30} - 1}{0{,}24}(1{,}24)$

d/S´n= 1964,841792

49) Hallar el valor actual de una renta anterior.

d/S´n=1964,841792

d/A´o= a · $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)^{-d}(1+i)$

d/A´o= 60 · $\frac{1-(1{,}24)^{-30}}{0{,}24}(1{,}24)^{-5} \cdot (1{,}24)$

d/Ao= 105,58

50) Hallar el valor actual de una renta de 20 terminos al 9% sabiendo que mediante ello, se había amortizado una maquina siendo el importe total los pagos de 90000€.

n=20

i =9%

Ao= a ·an

a=$\frac{90000}{20} = 4500$ an= $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ an = 1

an =$\frac{1-0{,}178430888}{0{,}09}$

Ao= 4500 · 9,128545678

Ao = 41078,45

51) Hallar el valor del termino de una renta constante de 10 términos al 8%, siendo su valor actual de 8000 €.

Ao = $a \cdot \frac{1-V^n}{i}$; 8000= $a \cdot \frac{1-(1{,}08)^{-10}}{0{,}08}$

$a = 1192{,}24$

52) Concedido un préstamo a 10 años al 3% para amortizar en cuotas anuales constantes de 11723 €. Hallar el valor final del mismo, el importe total pagado y el principal del préstamo.

n = 10

i = 3% $\qquad Sn = a \, \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

a = 11723 $\qquad Sn = 11723 \, \dfrac{(1'03)^{10} - 1}{0'03}$

Sn = 134391'06

11723 * 10 = 117230 total pagado

Ao = a * an

$$Ao = 11723 \, \frac{1-(1'03)^{-10}}{0'03} = 100000$$

53) Hallar el número de períodos necesarios para que con la aportación de 2244'70 € al principio de cada año al 4% se forme un renta de 35000 € como mínimo.

a = 2244'7

i = 4%

S'n = 35000 S'n = a * an (1+i)

$$35000 = 2244'7 \frac{(1'04)^n - 1}{0'04}(1'04)$$

$$15'592284 = \frac{(1'04)^n - 1}{0'04}(1'04)$$

$$1'5997032 = (1'04)^n$$

$$\log 1'5997032 = n \log 1'04$$

$$0'2040394 = 0'0170333n$$

$$n = 11'978853$$

$$n = 12$$

54) La diferencia entre los valores actuales de dos rentas, una diferida en 3 años y otra inmediata es de 6467'83 €. Hallar el tanto al que se efectuó la operación conociendo que el valor actual de la renta diferida es de 33860'17 €.

$d/Ao = Ao * V^d \qquad d/Ao = Ao \, \dfrac{1}{(1+i)^d} \qquad d/Ao = \dfrac{Ao}{(1+i)^d}$

DIF = Ao – d/Ao = 6467'83

d = 3 años　　　　　　Ao – 33860'17 = 6467'83
d/Ao = 33860'17　　　　Ao = 40328

d/Ao = Ao $(1+i)^{-d}$ ➔　33860'17 = 40328 $(1+i)^{-3}$
0'8396193 = $(1+i)^{-3}$　➔　$(0'8396193)^{1/-3}$ = (1+i)
1'06 = (1+i)　➔　i = 0'06 = 6%

55) Calcula el valor del termino de una renta de 16 años de duración al 5% sabiendo que el valor de la misma al finalizar el séptimo año es de 7107,9 €.

a?

n=16　　$$A_{n-p} = Ao\frac{(1+i)^n-(1+i)^p}{(1+i)^n-1}$$

i=5%　　$$7107{,}9 = Ao\ \frac{(1{,}05)^{16}-(1{,}05)^7}{(1{,}05)^{16}-1}$$

An-p= 7107,9　　　7107,9 = Ao 0,655838
P=7　　　Ao= 10837,89

$$Ao = a\cdot\frac{1-V^n}{i}$$

$$10837{,}89 = a\cdot\frac{1-(1{,}05)^{-16}}{0{,}05}$$

a = 1000

56)Un edificio recién construido no necesitara reparación alguna hasta dentro de 7 años. A partir de ese momento se necesitaran 100000€ anuales al final de cada año durante 20años, más en concepto de gastos de mantenimiento. Calcular el valor actual del mantenimiento haciendo la operación al 12% de interes.

a=100000

n= 20 $\quad$ d/Ao= a · an· V^d

d=7 $\quad$ $d/Ao = 100000 \, \frac{1-(1{,}12)^{-20}}{0{,}12}(1{,}12)^{-7}$

i =12% $\quad$ d/Ao = 45234,922 · 7,4694436

d/Ao = 337879,7

57)Calcular el valor actual de una renta anual de infinitos términos de 1000 € cada uno, valorados al 8% de interés, si se trata de:

a) Una renta inmediata, postpagable
b) Una renta inmediata, prepagable
c) Una renta diferida en 6 años, postpagable
d) Una renta diferida en 6 años, prepagable
e) Una renta anticipada postpagable

a) a = 1000

i = 8% $\quad$ $Po = \frac{a}{i}$ $\quad$ $Po = \frac{1000}{0'08}$ $\quad$ Po = 12500

b) P'o = Po (1+i) $\quad$ P'o = 12500 (1'08) $\quad$ P'o = 13500

c) d/Po = Po $(1+i)^{-d}$ $\quad$ d/Po = 12500 $(1'08)^{-6}$

d/Po = 7877'12

d) d/P'o = P'o $(1+i)^{-d}$ $\quad$ d/P'o = 13500 $(1'08)^{-6}$

d/P'o = 8507'28

e) Po = 12500 = H/Po

58)Calcular la cuantía de cada anualidad de una renta perpetua cuyo valor actual es de 20000€ haciendo la valoración al 8%.

P= 20000

i= 8% $\quad Po = \frac{a}{i}$

$Po = \frac{20000}{0{,}08}$

Po = 1600

59)Calcular el valor actual de una finca sabiendo que la renta perpetua que se va a percibir por ella es de 20000€ al final de cada año siendo el tanto de valoración del 9%.

a=20000 $\quad Po = \frac{a}{i}$

i= 9% $\quad Po = \frac{20000}{0{,}09}$

Po= 222.222,2

60)Calcular el valor actual de una renta perpetua, diferida en 3 años prepagable, sabiendo que el valor actual de dicha renta en caso de ser inmediata postpagable, sería de 220.000 €, siendo el tanto de valoración del 6%.

Po= 220.000

d/P´o? $\quad$ d/Po= Po$(1+i)^{-d}$

d=3 $\quad$ d/Po= 220.000$(1{,}06)^{-3}$

i=6% $\quad$ d/Po= 184716,24

d/P´o= d/Po (1+i)

d/P´o= 184716,24 (1,06)

d/P´o= 195799,21

61)Determina el tanto de valoración de una renta perpetua de 15€ anuales si su valor actual es de 500€.

Po= 500 $\quad Po = \frac{a}{i}$

a=15 $\quad 500 = \frac{15}{i}$; 500i = 15

i? $\quad$ i= 15/500; i = 0,03

i = 3%

62)La diferencia los valores actuales de una renta perpetua, inmediata prepagable y una renta perpetua, diferida pospagable es de 46786 €. Hallar el periodo de diferimiento si el tanto de valoración es del 15%. Y el valor actual de la renta perpetua, inmediata prepagable es de 109250€.

P´o – d/Po =46786
i= 15%
P´o= 109250

109250- d/Po= 46786
d/Po = 62464.

d/Po= Po $(1+i)^{-d}$
P´o =Po (1+i)
109250 = Po (1,15) ; Po= 95000
62464 =95000 $(1,15)^{-d}$
log 0,65 = -d log 1,15
d= 3,0000048

63)44. Calcular el valor actual de una renta fraccionada por trimestres sabiendo que el tanto anual es del 8%, el número de términos 50 y el valor de cada término 100.

k = 4

i = 8%

p = 50
x = 100

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$
$$(1'08) = (1+i_k)^4$$
$$i_k = 1'94265\%$$

$$Ao^{(k)} = \frac{1}{k}\frac{1-(1+i_k)^{-p}}{i_k}$$
$$Ao^{(k)} = 100\frac{1-(1'0194265)^{-50}}{0'0194265}$$
$$Ao^{(k)} = 3180'58$$

64) Calcular el valor actual del ejercicio anterior suponiendo que la renta fuese prepagable.

$$A'o^{(k)} = Ao^{(k)}(1+i_k)$$
$$A'o^{(k)} = 3180'54(1'0194265)$$
$$A'o^{(k)} = 3242'37$$

65)Calcular el valor actual de la renta anterior suponiendo que fuese diferida en 3 años.

$$d / A'o^{(k)} = A'o^{(k)}(1+i_k)^{-d*k}$$
$$d / A'o^{(k)} = 3242'37(1'094265)^{-3*4}$$
$$d / A'o^{(k)} = 2573'90$$

66) Hallar el valor final de una renta cuya duración es de 8 años, la anualidad de 2500 €, pagadera en 2 plazos semestrales al 6% anual.

i = 6% t = 8 años
p = 8 * 2 = 16
a = 2500 k = 2

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$
$$(1'06) = (1+i_k)^2$$
$$i_k = 2'9563014\%$$

$$Sn^{(k)} = x\frac{(1+i_k)^p - 1}{i_k}$$
$$Sn^{(k)} = \frac{2500}{2}\frac{(1'029563014)^{16} - 1}{0'029563014} \qquad \left\|\frac{a}{k} = x\right\|$$
$$Sn^{(k)} = 25109'416$$

67) El valor actual de una renta es de 11436 €, fraccionada trimestralmente con cuotas anuales de 4000 € al 3% anual. Hallar el número de períodos.

$Ao^{(k)} = 11436$ $\quad$ $k = 4$

$a = 4000$ $\quad$ $i = 3\%$

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$

$$(1'08) = (1+i_k)^4$$

$$i_k = 0'7417071\%$$

$$Ao^{(k)} = x\frac{1-(1+i_k)^{-p}}{i_k}$$

$$11436 = \frac{4000}{4}\frac{1-(1'0074)^{-p}}{0'007417}$$

$$-0'9151791 = -(1'0074)^{-p}$$

$$\log 0'9151791 = -p * \log 1'007417071$$

$$p = 12$$

68) Hallar el valor final de una renta fraccionada de 60 términos trimestrales de 6000 €, cada uno al 10% nominal capitalizable por trimestre.

$Sn^{(K)}$?

$x = 6000$

$$Sn^{(K)} = x\frac{(1+i_k)^p - 1}{i_k}$$

$$i_k = \frac{j_k}{k} \to \frac{0,1}{4}$$

$$i_k = 0,0025$$

$p = 60$

$$Sn^{(K)} = 6000\frac{(1,025)^{60} - 1}{0,025}$$

$$Sn^{(K)} = 815949,54$$

$K = 4$

$Jk = 10\%$

69) Hallar el valor actual de una renta de 5 años de duración sabiendo que el termino es de 8000 € semestrales y el tanto de interes del 9% semestral.

$Ao^{(K)}$ **?**

$$Ao^{(K)} = x\frac{1-(1+i)^{-p}}{i_k}$$

n=5

$$Ao^{(K)} = 8000\frac{1-(1{,}09)^{-5\cdot 2}}{0{,}09}$$

$$Ao^{(K)} = 51341{,}262$$

x= 8000

K=2

$i_K = 9\%$

70)Hallar el tanto nominal al que se concertó la amortización de un prestamo de 119035€ mediante una renta fraccionada sabiendo que el tanto efectivo anual es del 15%, tiempo de duración de 6 años y cuota anual de 30000 €.

Jk?

$Ao^{(K)}$= 119035

i=15%

$$Ao^{(K)} = \frac{i}{j_k} \bullet Ao$$

$$119035 = \frac{0{,}15}{j_k}\cdot\left(a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

n= 6

$$119035 = \frac{0{,}15}{j_k}\cdot 30000\cdot\frac{1-(1{,}15)^{-6}}{0{,}15}$$

$$119035 = \frac{17030{,}172}{j_k}$$

$$J_k = 0{,}1430686 \rightarrow J_k = 14{,}30686\%$$

a= 30000

71) Calcular el valor actual de una renta perpetua, prepagable de 470€ mensuales, si el tipo que se aplica es del 1% mensual.

A´o?

$$Po = \frac{a}{i}$$

x= 470

$$Po = \frac{x}{i_k} \Rightarrow \frac{470}{0{,}01}$$

p=12

$$P'o = 47000(1+i) \Rightarrow 47000(1{,}01)$$

$$P'o = 47470$$

i_k=1%

k=12

72) Determinar el valor actual de una renta perpetua constante de 500€ cuatrimestrales, siendo el tanto del 14% anual y la renta es diferida en 10 años.

d/Po?

x=500

$$d/Po^{(K)} = \frac{x}{i_k} \cdot (1+i_k)^{-d \cdot k}$$

$$d/Po^{(K)} = \frac{500}{0{,}04643927}(1{,}04643927)^{-30}$$

$$d/Po^{(K)} = 3021{,}0583.$$

K=3

i=14%

d=10

i_k=4,4643927%

73) Cual hubiese sido el valor actual del ejercicio anterior si la renta es prepagable y el periodo de diferimiento 7 semestres.

Prepagable

$$d/P'o^{(K)} = \frac{x}{i_k} \cdot (1+i_k)^{-d \cdot k}(1+i_k)$$

$$d/P'o^{(K)} = \frac{500}{0{,}04643927}(1{,}04643927)^{-3 \cdot 3{,}5}(1{,}04643927)$$

$$d/P'o^{(K)} = 7396{,}2047.$$

d=7 semestres

74) Hallar el valor actual de una renta diferida en 6 años, cuyos términos semestrales son de 5000€, el tanto de valoración del 8% y el tiempo de duración de 15 años.

d/Ao$^{(K)}$?

$$d/Ao^{(K)} = x\frac{1-(1+i_k)^{-p}}{i_k}(1+i_k)^{-d \cdot k}$$

$$d/Ao^{(K)} = 5000\frac{1-(1{,}039230485)^{-18}}{0{,}039230485}(1{,}039230485)^{-6 \cdot 2}$$

$$d/Ao^{(K)} = 40138{,}164$$

d=6

x=5000

k=2

i=8%

t=15

i_k =3,9230485%

p=(15-6)·2=18

75) Una renta de 20 términos se forma con un primer término de 350 € y los siguientes aumentados sucesivamente en 30 € respecto del anterior, sabiendo que se capitaliza al 6%. Hallar el valor actual.

n = 20 α = 30

C_1 = 350 i = 6 %

$$Ao_\alpha = C * an + (an - V^n n)$$

$$Ao_\alpha = 350\frac{1-(1'06)^{-20}}{0'06} + \frac{30}{0'06}\left[\frac{1-(1'06)^{-20}}{0'06} - 20(1'06)^{-20}\right]$$

$$Ao_\alpha = 4014'4724 + \frac{30}{0'06}[11'469921 - 6'2360945]$$

$$Ao_\alpha = 4014'4724 + \frac{30}{0'06}5'2338267$$

$$Ao_\alpha = 6631'3857$$

Calcular su valor final

$$Sn_w = Ao_\alpha (1+i)^n$$

$$Sn_w = 6631'3857(1'06)^{20}$$

$$Sn_w = 21267'752$$

76) Calcular el valor actual de una renta variable en progresión aritmética de 10 términos sabiendo que el valor del primero es de 40000€, y los siguientes aumentan en 5000€ semestrales. Siendo el tipo de interes del 10,25%anual. $Ao^{(K)}\alpha$?

P=10

$$Ao\alpha^{(K)} = x \cdot an^{(K)} + \frac{\alpha}{i}\left[an^{(k)} - p(1+i_k)^{-p}\right]$$

$$Ao\alpha^{(K)} = 40000 \cdot \frac{1-(1,05)^{-10}}{0,05} + \frac{5000}{0,05}\left[\frac{1-(1,05)^{-10}}{0,05} - 10(1,05)^{-10}\right]$$

$$Ao\alpha^{(K)} = 467129,64$$

$a_1 = 40000$

$\alpha = 5000$

$k = 2$

$i = 10{,}25\%$

$i_k = 5\%$

77) Calcular la cuantía del primer termino de una renta anual, variable en progresión aritmética de razón 700 que deberá imponerse al 8% para formar al cabo de 10 años un capital de 163581€.

$a_1 = ?$

$\alpha = 700$

$i = 8\%$

$n = 10$

$Sn\alpha = 763581$

$$Sn\alpha = a_1 \cdot sn + \frac{\alpha}{i}\left[sn - n\right]$$

$$763581 = a_1 \cdot \frac{(1{,}08)^{10} - 1}{0{,}08} + (\frac{700}{0{,}08} - 10)$$

$$763581 = a_1 \cdot 14{,}486562 + 39257{,}422$$

$$724323{,}58 = 14{,}486562 \cdot a_1$$

$$a_1 = 49999{,}688$$

78) Una renta cuyos términos forman una progresión aritmética decreciente, de razón igual 1/5 del 1ª termino que es de 2000€ es pagadera al final de cada uno de los cuatro años que dura la renta, hallar el valor actual al 6% de interes anual.

$Ao\alpha?$

$\alpha = 1/5 \cdot 2000 = -400$

$a_1 = 2000$

$i = 6\%$

$n = 4$

$$Ao\alpha = a_1 \cdot an + \frac{\alpha}{i}\left(an - n \cdot V^n\right)$$

$$Ao\alpha = 2000 \cdot \frac{1-(1{,}06)^{-4}}{0{,}06} + \frac{-400}{0{,}06}\left(\frac{1-(1{,}06)^{-4}}{0{,}06} - 4(1{,}06)^{-4}\right)$$

$$Ao\alpha = 6930{,}2112 - 1978{,}2064$$

$$Ao\alpha = 4952{,}0048$$

79) Cual hubiese sido el valor final de la renta del ejercicio anterior en caso de ser anticipada en dos años.

$Sn\alpha = Ao\alpha(1+i)^h$

$h/Sn\alpha = Sn\alpha(1+i)^h$

$Sn\alpha = 4952{,}0048(1{,}06)^4$

$Sn\alpha = 6251{,}792$

$h/Sn\alpha = 6251{,}792(1{,}06)^2$

$h/Sn\alpha = 7024{,}5135$

80) El último termino de una renta variable en progresión geómetrica es de 91729€ sabiendo que tiene 8 término, la razón 2,4 y el tanto de interes del 2%. Hallar el valor actual de la renta.

$n = 8$

$q = 2{,}4$

$i = 2\%$

$Aoq?$

$Cn = 91729$

$c = 199{,}99 = 200$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$91729 = a_1 \cdot 2{,}4^7$

$a_1 = 199{,}99$

$$Aoq = c \cdot \frac{1 - q^n \cdot V^n}{(1+i) - q}$$

$$Aoq = 200 \cdot \frac{1-(2{,}4)^8(1{,}02)^{-8}}{(1{,}02) - 2{,}4}$$

$$Aoq = 136011{,}91$$

81) Hallar el valor actual de una renta variable en progresión geométrica de 10 términos, sabiendo que el primero es de 5000 € y los siguientes aumentan de forma acumulativa en el 3% semestralmente. Siendo el tipo de interes del 10,25% anual.

$$i = 10{,}25\%$$
$$q = 1{,}03$$
$$n = 10$$
$$c = 5000$$
$$i_k = 5\%$$
$$(1+i) = (1+i_k)^k$$
$$(1{,}1025) = (1+i_k)^k$$
$$i_k = 0{,}05$$

$$Aoq^{(K)} = c \cdot \frac{1 - q^n \cdot V^n}{(1+i) - q}$$
$$Aoq^{(K)} = 5000 \cdot \frac{1 - (1{,}03)^{10}(1{,}1025)^{-10}}{(1{,}1025) - 1{,}03}$$
$$Aoq^{(K)} = 43737{,}98$$

82) De una renta temporal variable en progresión aritmética se conoce su primer, segundo y el último término que son de 50000, 535000, 147608 respectivamente. Hallar el valor actual de dicha renta siendo el tanto de valoración del 5%.

$$q = 1{,}07$$
$$C_1 = 50000$$
$$C_2 = 53500$$
$$C_n = 147608$$
$$i = 5\%$$
$$n\,?$$
$$Aoq\,?$$
$$n = 17$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$147608 = 50000 \cdot 1{,}07^{n-1}$$
$$2{,}95216 = 1{,}07^{n-1}$$
$$n = 17$$

$$Aoq = c \cdot \frac{1 - q^n \cdot V^n}{(1+i) - q}$$
$$Aoq = 50000 \cdot \frac{1 - (1{,}07)^{17}(1{,}05)^{-17}}{(1{,}05) - 1{,}07}$$
$$Aoq = 945451{,}53$$

83) Hallar el valor final de una renta variable en progresión geométrica de razón 1,05 de 15 años de duración, diferida en 3 años con términos trimestrales, sabiendo que el primer termino es de 400€, el tanto es del 12% nominal capitalizable trimestralmente.

$j_n = 12\%$

$c = 400$

$q = 1{,}05$

$d = 3$

$15 años$

$i_k = 3\%$

$$Snq = C \cdot \frac{1 - q^n V^n}{(1+i) - q} (1+i)^n$$

$$Snq = 400 \cdot \frac{1 - (1{,}05)^{48} (1{,}03)^{-48}}{(1{,}03 - 1{,}05)} \cdot (1{,}03)^{48}$$

$$Snq = 125380{,}36.$$

84) El cuarto término de una renta variable en progresión geométrica fue de 5647,152€ siendo su noveno termino 5104,5781. Hallar su valor actual sabiendo que consta de 20 términos, siendo el tanto de valoración del 10%.

$a_4 = 5647{,}152$

$a_9 = 5104{,}5781$

$n = 20$

$i = 10\%$

$Aoq?$

$q = 0{,}98$

$a_1 = 6000$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$5104{,}5781 = 5647{,}152 \cdot q^5$

$0{,}9039207 = q^5$

$q = 0{,}98$

$5104{,}5781 = a_1 \cdot 0{,}98^8$

$a_1 = 6000$

$$Aoq = c \cdot \frac{1 - q^n \cdot V^n}{(1+i) - q}$$

$$Aoq = 6000 \cdot \frac{1 - (0{,}98)^{20} (1{,}1)^{-20}}{(1{,}1) - 0{,}98}$$

$$Aoq = 45038{,}216$$

85) Que renta creciente en un 7% anual recibiremos a partir de 6 años y durante 15 años con cobros anuales vencidos si en el día de hoy entregamos en una institución financiera 20.000€ al 8% de interés.

$C_1 = 100$

$C_2 = 100 + 0{,}07(100) = 107$

$q = 1{,}07$

$d = 6$

$n = 15$

$d / Aoq = 20000$

$i = 8\%$

$$d / Aoq = c \cdot \frac{1 - q^n \cdot V^n}{(1+i) - q} \cdot (1+i)^{-d}$$

$$20000 = c \cdot [\ \frac{1 - (1{,}07)^{15}(1{,}08)^{-15}}{(1{,}08) - 1.07}\ ] \cdot (1{,}08)^{-6}$$

$$C = 2436{,}8819$$

86) Hallar el número de términos de una renta diferida en 5 años sabiendo que se trata de una renta fraccionada semestralmente al 14% anual. Su valor actual es de 2490,84 € y la diferencia entre sus valores final y actual es de 11189,9.

$n?$

$d = 5$

$i = 14\%$

$d / Ao = 2490{,}84$

$d / Sn - d / Ao = 11189{,}9$

$i_k = 6{,}77078\%$

$d / Sn = 13680{,}74$

$8 \cdot 2 = 16 termino$

$(1+i) = (1+i_k)^k$

$(1{,}14) = (1+i_k)^2 ; i_k = 0{,}0677078$

$d / Sn - d / Ao = 11189{,}9$

$d / Sn - 2490{,}84 = 11189{,}9$

$d 7 Sn = 13680{,}74$

$Sn = Ao(1+i)^n$

$d / Sn = d / Ao(1+i)^{(n+d)\cdot k}$

$13680{,}74 = 2490{,}84(1{,}0677078)^{2n+10}$

$5{,}4924202 = (1{,}0677078)^{2n+10}$

$2n + 10 = 26{,}000034$

$2n = 16{,}000034$

$n = 8$

87) El cociente entre el valor final y actual de una renta de 30 terminos es 5,74348256 si el valor final de la renta es 10277,56€. Calcular el valor de la renta al finalizar el noveno año.

Sn/Ao=5,74348256

Sn=10277,56

$$10277{,}56 / Ao = 5{,}74348256$$

$$Ao = 1789{,}43$$

$$Sn = Ao(1+i)^n$$

$$10277{,}56 = 1789{,}43(1+i)^{30}$$

$$i = 6\%$$

$$a_{n-p} = a\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^{n-1} - 1}$$

$$i = 6\%$$

$$a_{30-9} = 1789{,}43\frac{(1{,}06)^{30} - (1{,}06)^9}{(1{,}06)^{30} - 1}$$

$$a_{30-8} = 1529{,}3316$$

88) El valor final de una renta anual es de 50820, 54 €, si la renta fuese fraccionada semestralmente su valor final sería de 51939,37. Calcular el tanto anual al que se valoró la renta.

$$Sn^{(K)} = \frac{i}{J_k} Sn$$

$$Sn = 50820{,}54$$

$$Sn^{(K)} = 51939{,}37$$

$$k = 2$$

$$i?$$

$$j_k = i_k \cdot k$$

$$51939{,}37 = \frac{i}{(i_k)\cdot 2}\cdot 50820{,}54$$

$$2{,}0440306 = \frac{i}{i_k} = \frac{(1+i_k)^2 - 1}{i_k};$$

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$

$$(1+i_k)^2 = 1+i$$

$$i = (1+i_k)^2 - 1$$

$$2{,}0440306 i_k = 1 + i_k{}^2 + 2i_k - 1$$

$$i_k{}^2 - 0{,}0440306 i_k = 0$$

$$i_k(i_k - 0{,}0440306) = 0$$

$$i_k = 0{,}0440306$$

$$i = 0{,}0899998$$

89) Hallar el valor final de una renta variable en progresión geométrica de la que se conoce que el 1ª termino es de 3000€, el 3ª termino 3499,2, el total de pagos 56931,30. Y el tanto de valoración del 8%.

$$a_1 = 3000$$
$$a_3 = 3499{,}2$$
$$S = 5693{,}38$$
$$i = 8\%$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q^{n(n-1)} \Rightarrow 6994{,}917 = 3000 \cdot (1{,}08)^{n-1} \Rightarrow n = 12$$
$$3499{,}2 = 3000 \cdot q^2$$
$$q = 1{,}03$$

$$S = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$
$$56931{,}38 = (a_n \cdot 1{,}08) - 3000 / 1{,}08 - 1$$
$$a_n = 6994{,}917$$

$$Snq = C \cdot \frac{1 - q^n V^n}{(1+i) - q}$$
$$Snq = 3000 \cdot \frac{1 - (1{,}08)(1{,}08)}{(1{,}08 - 1{,}08)}$$

$$Aoq = C \cdot V \cdot N$$
$$Snq = C \cdot V \cdot N(1+i)^n$$
$$Snq = (3000 \cdot (1{,}08)^{-1} \cdot 12)(1{,}08)^{12}$$
$$Snq = 83939{,}004$$

90) Hallar el valor actual de una renta diferida, prepagable de termino 3000 trimestrales, siendo el periodo de diferimiento 2 años el tanto de valoración del 12% nominal capitalizable trimestralmente y el tiempo de duración 5 años.

$d/A'o?$

$a_1 = 3000$

$d = 2$

$J_k = 12\%$

$K = 4$

$n = 5 \rightarrow p = (5-2)\cdot 4$

$i_k = \frac{12}{4} = 3\%$

$$d/A'o = a_1 \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-p}}{i_k}(1+i_k)(1+i_k)^{-d\cdot k}$$

$$d/A'o = 3000\frac{1-(1{,}03)^{-12}}{0{,}03}(1{,}03)(1{,}03)^{-2\cdot 4}$$

$$d/A'o = 24280{,}548$$

91) Hallar el valor final de una renta diferida prepagable de 20 términos de 800€ cada uno pagaderos por trimestres, sabiendo que el periodo de diferimiento es de 5 años y el tanto de interes del 12%.

$d/S'n^{(K)}?$

$n = 20$

$x = 800$

$k = 4$

$d = 5$

$i = 12\%$

$i_k = 2{,}87373\%$

$$d/S'n^{(K)} = x \cdot \frac{(1+i_k)^p - 1}{i_k}(1+i_k)$$

$$d/S'n^{(K)} = 800 \cdot \frac{(1{,}0287373)^{20} - 1}{0{,}0287373}(1{,}0287373)$$

$$d/S'n^{(K)} = 21832{,}418$$

Calcular $d/A'o^{(K)}$

$$d/A'o^{(K)} d/S'n^{(K)}(1+i_k)^{k\cdot d+n}$$
$$d/A'o^{(K)} = 21832{,}418(1{,}0287373)^{-(4\cdot 5+20)}$$
$$d/A'o^{(K)} = 7029{,}4665$$

92)De una renta se conoce su valor actual, su valor final que son respectivamente 10462,12 € y 158800,68 €. A que tanto de interés se estipulo la operación sabiendo que el término es de 1344€. Número de terminos.

$$Sn = Ao(1+i)^n$$

$$Ao = 10462{,}12$$
$$Sn = 158800{,}68$$
$$i?$$
$$a = 1344$$
$$n?$$

$$Ao = a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$158800{,}68 = 10462{,}12(1+i)^4$$
$$15{,}178633 = (1+i)^4$$

$$10462{,}12 = 1344\cdot\frac{1-(15{,}173633)^{-1}}{i}$$
$$7{,}7843155 = \frac{0{,}9341179}{i} \Rightarrow i = 12\%$$

$$\frac{1}{an} - \frac{1}{sn} = i$$

$$Ao = a\cdot an$$
$$\frac{a}{Ao} - \frac{a}{Sn} = i$$

$$158800{,}68 = 10462\cdot(1{,}12)^4$$
$$15{,}178633 = (1{,}12)^4$$
$$n = 24$$

$$S'n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

$$168483 = 70000 \cdot \frac{(1+i)^2 - 1}{i}(1+i)$$

$$2{,}4069 = \frac{(1+i)^2 1}{i}(1+i)$$

$$2{,}4069 = \frac{1^2 + 2i + i^2 - 1}{i}(1+i)$$

$$2{,}4069 = \frac{i(2+i)}{i} \bullet (1+i)$$

$$2{,}4069 = (2+i)(1+i)$$

$$2{,}4069 = 2 + 2i + i + i^2$$

$$0{,}4069 = 3i + i^2$$

$S'n = 168403$

$a = 70000$

$i?$

$n?$

$$i = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1(-0{,}4069)}}{2 \cdot 1}$$

$$i = 13\%$$

93)Hallar el valor final de una renta diferida en 5 años de 20 años de duración al 9% siendo el valor del término 600 €. Halla también su valor actual.

$d / Sn?$

$d / Ao?$

$d = 5$

$n = 20$

$i = 9\%$

$a = 600$

$$d / Sn = Sn$$

$$Sn = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$Sn = 600\frac{(1{,}09)^{20 \cdot 5} - 1}{0{,}09}$$

$$Sn = 17616{,}55$$

$$d / Ao = d / Sn(1+i)^{-n-d}$$

$$d / Ao = 17616{,}55(1{,}09)^{-15 \cdot 5}$$

$$d / Ao = 3143{,}34$$

94)Hallar el valor al finalizar el octavo año de una renta de 40 terminos de 9000 € cada uno al 6%.

$n = 40$

$a = 9000$

$i = 6\%$

$p = 8$

$$A_{n-p} = a \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

$$A_{n-p} = 9000 \cdot \frac{1 - (1{,}06)^{-40+8}}{0{,}06}$$

$$A_{n-p} = 126756$$

95) Calcular el valor actual de una renta que se forma mediante cuota semestrales de 500€ cada uno. Siendo su duración de 5 años y 7%.

$Ao^{(K)}$?

$x = 500$

$n = 5$

$K = 2$

$5 \cdot 2 = 10 semestrales$

$i = 7\%$

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$

$$(1{,}07) = (1+i_k)^2$$

$$i_k = 0{,}034408$$

$$Ao^{(K)} = x \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-p}}{i_k}$$

$$Ao^{(K)} = 500 \cdot \frac{1-(1{,}034408)^{-10}}{0{,}034408}$$

$$Ao^{(K)} = 4170{,}74$$

96) Hallar el valor final de una renta de 70 términos trimestrales al tanto trimestral del 3% siendo la anualidad de 200 €.

$Sn^{(K)}$?

$p = 70$

$k = 4$

$i_k = 3\%$

$$x = \frac{200}{4} = 50$$

$$Sn^{(K)} = x \cdot \frac{(1+i_k)^p - 1}{i_k}$$

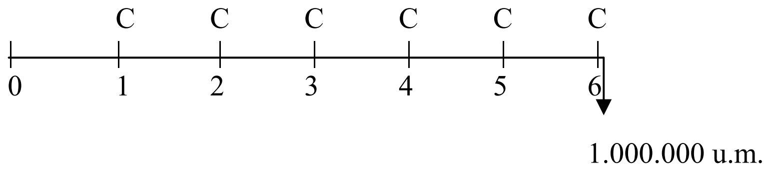
$$Sn^{(K)} = \frac{200}{4} \cdot \frac{(1{,}03)^{70} - 1}{0{,}03}$$

$$Sn^{(K)} = 11529{,}703$$

Relación de Ejercicios Universitarios: Rentas Constantes y Variables

1. Ingresando al final de cada año cierta cantidad de dinero, C, en un banco que abona intereses al 10% bienal, a finales del sexto año tenemos 1.000.000 u.m. ¿Cuánto obtendríamos si las imposiciones se realizarán a principios de año?

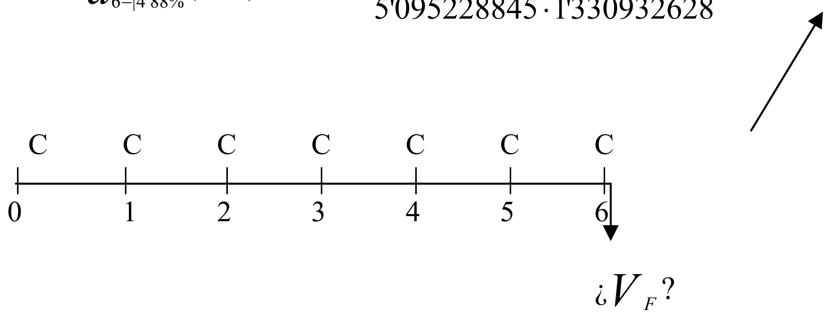
Sol. 1.048.809 u.m.



$i_{anual} = 10\%$

$(1+i_b) = (1+i)^2 \Rightarrow (1/0) = (1+i)^2 \Rightarrow i = 4'88\%$

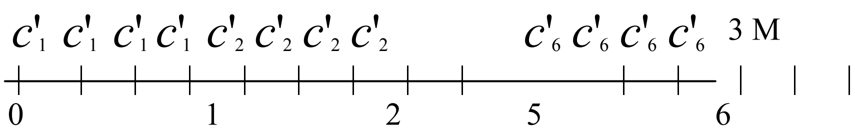
$1.000.000 = c \cdot a_{6-|4'88\%} (1+i)^6 \Rightarrow c = \dfrac{1.000.000}{5'095228845 \cdot 1'330932628} = 147.462'0386$ u.m.



$S_6 = V_F = c \cdot a_{6-|4'88\%} \cdot (1+i) \cdot (1+i)^6 = 1.000.000 \cdot (1+i) = 1.000.000 \cdot (1+0'0488) =$
$=1.048.800$ u.m.

2. Un señor quiere constituir un capital de 8.000.000 u.m. en seis años mediante imposiciones prepagables trimestrales decrecientes geométricamente y anualmente en un 3%. El banco aplica un 4% nominal capitalizable trimestralmente. ¿Cuál sería el importe de la última trimestralidad?

Sol. 270.796



$$c'_2 = c'_1 \cdot (1 - 0'03) = c'_1 \cdot 0'97 \Rightarrow q = 0'97$$

$$j_4 = 4\% \Rightarrow i_4 = 1\% \Rightarrow (1'01)^4 = (1+i) \Rightarrow i = 4'060401\%$$

¿c_6?

$$A_n`` = C_1 \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$A_6'' = \frac{8.000.000}{(1+0'04060401)^6} = 6.300.529'019 \text{ u.m.}$$

$$C_1 = C_1' \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i_4) \cdot (1+i) = C_1' \cdot 3'901965552 \cdot (1'01) \cdot (1'04060401) = C_1' \cdot 4'10100501 \cdot$$

$$\cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} = \frac{1 - 0'97^6 \cdot (1'04060401)^{-6}}{1 + 0'04060401 - 0'97} = 4'871953644$$

$$6.300.529'019 = C_1' \cdot 4'10100501 \cdot 4'871953644 \Rightarrow C_1' = 315.343'2716 \text{ u.m.}$$

$$C_6' = C_1' \cdot q^5 = 270.796 \text{ u.m.}$$

Otra alternativa para conseguir C_1'**:**

$$\left.\begin{array}{l} 8.000.000 = C_1 \cdot 4'571953644 \cdot (1'04060401) \\ C_1 = C_1' \cdot 4'10100501 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 8.000.000 = C_1 \cdot 25'369117931 \\ \Rightarrow C_1' = 315.343'2716 \end{array}$$

Otra alternativa de resolución del ejercicio:

$$6.300.529'019 = C_1 \cdot \frac{1 - 0'96^6 \cdot (1'040604)}{1'040604 - 0'97} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{6.300.529'019}{4'871953644} = 1.293.224'337 u.m$$

$$C_1 = C_1' \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i_4) \cdot (1+i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.293.224'337 = C_1' \cdot 3'901965552 \cdot 1'01 \cdot 1'040604 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1' = 3.15343'2747 \text{ u.m.}$$

$$C_6' = C_1' \cdot q^5 = 270.796 \text{ u.m.}$$

Otra alternativa de resolución:

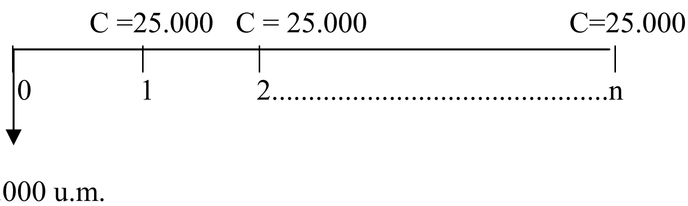
$$C_6 = C_1 \cdot q^5 = 1.293.224'337 \cdot 0'97^5 = 1.110.535'741 \text{ u.m.}$$

$$C_6 = C_6' \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i_4) \cdot (1+i) \Rightarrow$$
$$1.110.535'741 = C_6' \cdot 3'901965552 \cdot 1'01 \cdot 1.040604 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_6' = 270.795'9997 \text{ u.m.}$$

3. Se quiere cancelar una deuda de 380.000 u.m. mediante el abono de una renta anual pospagable de 25.000 u.m., si el tanto de valoración es el 5% anual. ¿Cuál será el número de pagos a realizar?. Calcúlese la cuantía del último pago si este vence en e año 30.

Sol. 29'25



i = 5%

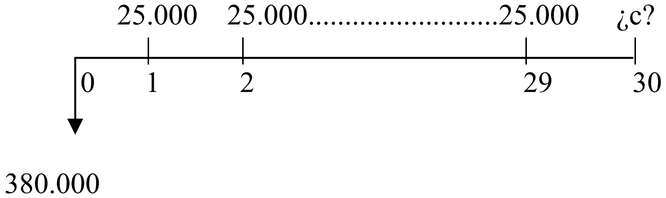
$$380.000 = 25.000 \cdot a_{n|5\%} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n|5\%} = \frac{380.000}{25.000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 15'2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-(1'05)^{-n} = 15'2 \cdot 0'05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1'05)^{-n} = 0'24 \Rightarrow n = -\frac{\log 0'24}{\log 1'05} = 29'25 \text{ años}$$



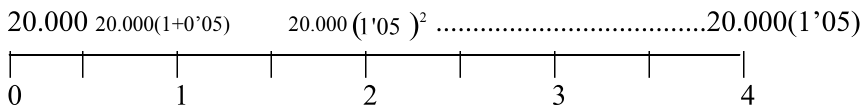
$$380.000 = 25.000 \cdot a_{29|5\%} + c \cdot (1'05)^{-30} \Rightarrow$$
$$380.000 = 25.000 \cdot 15'14107358 + c \cdot 0'231377448 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = 6.336'914808 \text{ u.m.}$$

$$380.000 = 25.000 \cdot a_{29|5\%} + c \cdot (1+0.05)^{-29'25}$$

$$1473'160545 = c \cdot 0'24 \Rightarrow c = 6.138'144 \text{ u.m.}$$

4. Determine el valor actual de una renta semestral pospagable de acuerdo con el siguiente esquema: primera semestralidad 20.000 u.m. , la segunda un 5% superior a la primera, la tercera un 5% superior a la segunda y así sucesivamente. Duración de la renta 4 años y el tanto de valoración de la operación es el 10'25 anual.

Sol. 152.380'95.



$$i = 10'25\% \Rightarrow \qquad (1'1025) = (1+i_2)^2 \Rightarrow i_2 = 5\%$$

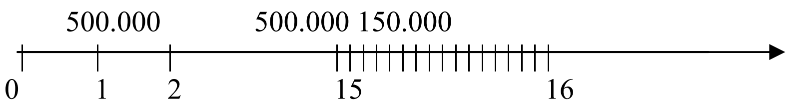
$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 20.000 \\ \\ C_2 = 20.000 \cdot (1'05) \end{array}\right\} C_2 = C_1 \cdot q \Rightarrow q = 1'05$$

$$q = 1 + i_2$$

$$A_4'' = C_1 \cdot \frac{n}{1+i_2} = 20.000 \cdot \frac{8}{1'05} = 152.380'9524 \text{ u.m.}$$

5. Cierto plan de pensiones asegura la percepción de 150.000 u.m. mensuales a partir de la jubilación (65 años) pagando durante al menos 15 años 500.000 u.m. anuales. Si un individuo con 50 años de edad decide adherirse a dicho plan y se supone un tanto de valoración de 10 %. ¿Cuántos años tendrá que sobrevivir como mínimo a la jubilación para que la inversión le resulte rentable?.

Sol. 19 años y 6 meses.



(50 años) (65 años)

$i = 10\%$

$$S_{15} = V_{F_{15}} = 500.000 \cdot a_{15|10\%} \cdot (1+0'10)^{15} = 15.886.240'85$$

$$A_{15} = V_{A_{15}} = 150.000 \cdot a_{n|0'797414\%}$$

$$(1'10) = (1+i_2)^2 \Rightarrow i_{12} = 0'797414042\%$$

$$\Downarrow$$

$$S_{15} = V_{F_{15}} = V_{A_{15}} = A_{15}$$

$$15.886.240'85 = 150.000 \cdot a_{n|0'797414\%} \Rightarrow$$

$$a_{n|0797414\%} = 105'9082723 \Rightarrow$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{n|i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-(1'00797414)^{-n}}{0'00797414} = 105'9082723 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1'00797414)^{-n} = 0'155472609 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = -\frac{\log(0'155472609)}{\log(1'00797414)} = 234'3446395 \text{ meses}$$

$$\frac{234'3446395}{12} = 19'52871996 \text{ años} \Rightarrow \text{ 19 años y 6 meses}$$

$$0'52871996 \cdot 12 \cong 6 \text{ meses}$$

Otra alternativa de resolución:

$$A_{15} = c \cdot a_{n|i} = 1.881.080'492 \cdot \frac{1-(1'10)^{-n}}{0'10}$$

$$c = 150.000 \cdot a_{12|i_{12}} \cdot (1+i_{12}) = 1.881.080'492$$

$$S_{15} = A_{15}$$

$$15.886.240'85 = 18.810.804'92 \cdot \left(1-(1'10)^{-n}\right)$$

$$0'155472563 = 1'10^{-n}$$

$n = 19'52872202$ años. $\Rightarrow$ 19 años y 6 meses

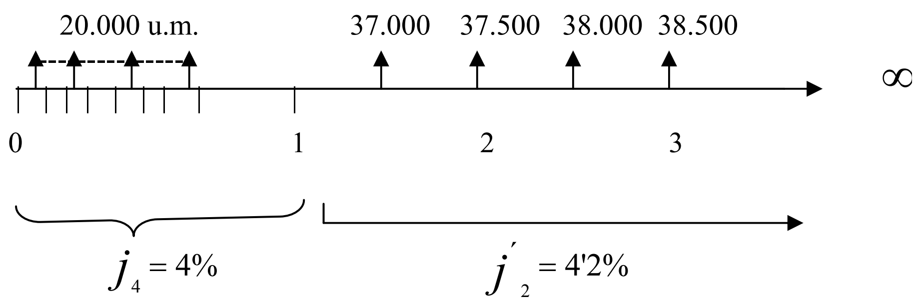
6. Determine el valor de cierta finca de la que se van a percibir:

- Rendimientos trimestrales constantes de 20.000 u.m. durante los 10 primeros meses, obteniendo el primero dentro de un mes, el segundo dentro de cuatro, etc.

- A partir del primer año rendimientos semestrales pospagables y crecientes en progresión aritmética, siendo la cuantía de la primera semestralidad de 37.000 u.m. y el incremento de la misma en 500 u.m.

Utilice para realizar la valoración un tanto de interés nominal anual capitalizable trimestralmente del 4 % para el primer año y un nominal anual capitalizable semestralmente del 4'2, % para el resto del período.

Sol. 2.861.261'43 u.m.



$$Valor\ de\ la\ finca = 20.000 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i_4)^{2/3} + \left[37.000 + \frac{d}{i'_2}\right] \cdot \frac{1}{i'_2}(1+i)^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$A'_\infty = \left[C_1 + \frac{d}{i}\right] \cdot \frac{1}{i}$$

$$j_4 = 4\% \Rightarrow i_4 = 1\% \Rightarrow (1+i) = (1'01)^4 \Rightarrow i = 4'060401$$

$$j'_2 = 4'2\% \Rightarrow i'_2 = 2'1\% \Rightarrow (1+i') = (1'021)^2 \Rightarrow i' = 4'2441$$

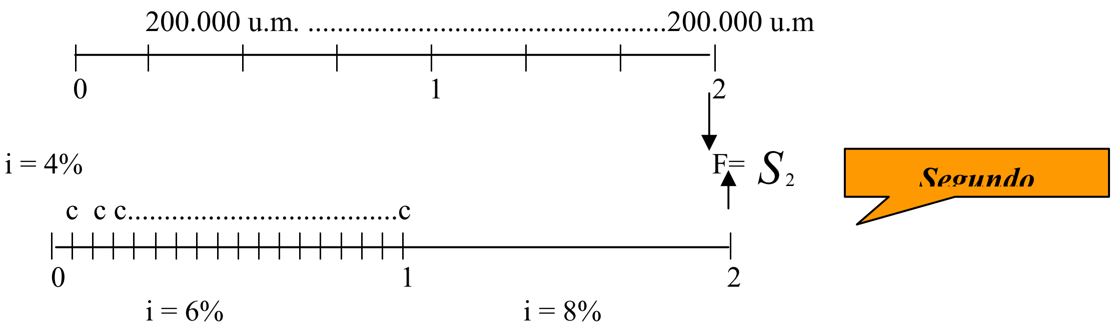
$$Valor\ de\ la\ finca = 20.000 \cdot a_{4|1\%} \cdot (1'01)^{2/3} + \left[\left(37.000 + \frac{500}{0'021}\right) \cdot \frac{1}{0'021}\right] \cdot (1'04060401)^{-1} =$$

$$= 78.558'70983 + 2.782.702'721 = 2.861.261'431$$

7. Un individuo deposita al final de cada trimestre y durante dos años 200.000 u.m. en un banco que abona el 4% anual. Otro individuo desea hacer depósito mensuales pospagables durante el primero de estos años y mantener el capital acumulado hasta el final del segundo año. Si este banco abona intereses al 6% anual durante el primer año y al 8% durante el segundo, ¿de qué cuantía deben ser tales depósitos para que ambos individuos tengan el mismo montante al finalizar el segundo año?

Sol. 124.413 u.m.

Primer



$$S_{2(1)} = V_{F1} = 200.000 \cdot a_{8|0,98534\%} \cdot (1{,}04)^{1_{8|i_4}} = 1.656.279{,}98 \text{ u.m.}$$

$$(1{,}04) = (1+i)^4 \Rightarrow i_4 = 0{,}985340654\%$$

$$1.656.279{,}98 = c \cdot a_{12|0,48675\%} \cdot (1{,}06) \cdot (1{,}08) \Rightarrow$$

$$\boxed{(1+0'0098534)^8}$$

$$(1{,}06) = (1+i_{12}) \Rightarrow i_{12} = 0{,}486755056\%$$

$$\Rightarrow 1.656.279{,}98 = c \cdot 11{,}62880034 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}08 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 124.413'9898 \text{ u.m.}$$

Otra alternativa de resolución:

$$S_{2(1)} = c \cdot a_{2|i} \cdot (1+i)^2 = 811.901{,}9515 \cdot 1{,}886094675 \cdot (1{,}04)^2 = 1.656.279{,}981 \text{ u.m.}$$

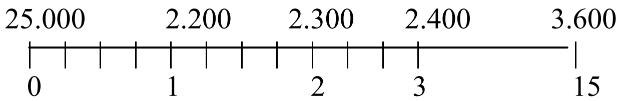
$$c = 200.000 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i_4)^4 = 811.901{,}9515 \text{ u.m.}$$

$$1.565.279{,}981 = c' \cdot (1+i) \Rightarrow c' = \frac{1.656279{,}981}{1{,}08} = 1.533.592{,}575 \text{ u.m.}$$

$$c' = c \cdot a_{12|i_{12}} \cdot (1+i)$$

$$1.533.592{,}575 = c \cdot 11{,}62880034 \cdot 1{,}06 \Rightarrow c = 124.413{,}99 \text{ u.m.}$$

8. La adquisición de una maquina puede hacerse abonando en el acto 25.000 u.m. y pagos trimestrales postpagables durante 15 años. Las trismestalidades del primer año son 2.200 u.m., las del segundo 2.300, las del tercero 2.400 u.m. y así sucesivamente. Determine el precio al contado si se toma para realizar la valoración un tanto de interés compuesto del 5%.
Sol. 143.821,2766 u.m.



$$c_{15} = 2.200 + 100 \cdot (15 - 1) = 3.600$$

i= 5%

Precio al contado = $25.000 + A'_{15}$

$$A'_n = c_1 \cdot a_{n|i} + \frac{d}{i} \cdot a_{n|i} - \frac{nd}{i} \cdot (1+i)^{-n}$$

$$c_1 = 2.200 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i) = 8.963{,}322915$$

$$(1{,}05) = (1 + i_4)^4 \Rightarrow i_4 = 1{,}227223442\%$$

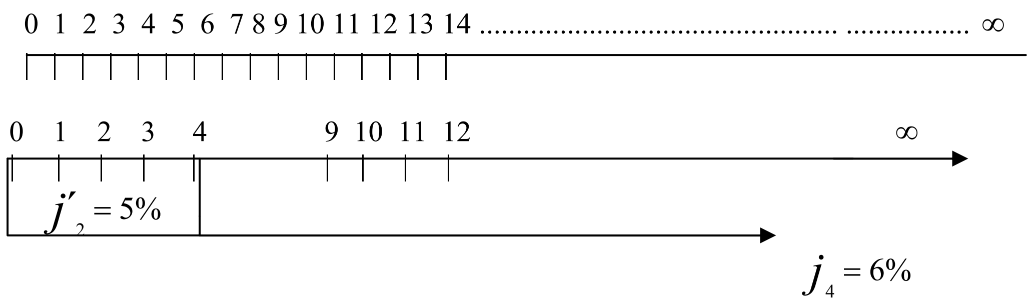
$$d = 100 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i) = 407{,}4237689$$

Precio al contado =

$$= 25.000 + 8.963{,}322915 \cdot a_{15|5\%} + \frac{407{,}4237689}{0{,}05} \cdot a_{15|5\%} - \frac{15.407{,}4237689}{0{,}05} \cdot (1{,}05)^{-15} =$$

$$= 25.000 + 93.036{,}22674 + 84.578{,}38796 - 58.793{,}3397 = 143.821{,}2766 \text{ u.m.}$$

9. Determine el valor actual de la renta que se representa en el siguiente dibujo.
Sol. 2.611.398,6 u.m.



$$A'_\infty = \left[c_1 + \frac{d}{i}\right] \cdot \frac{1}{i}$$

$$A'_\infty = \left[100.000 + \frac{10.000}{0{,}06136355062}\right] \cdot \frac{1}{0{,}06136355062} = 4.285.332{,}10$$

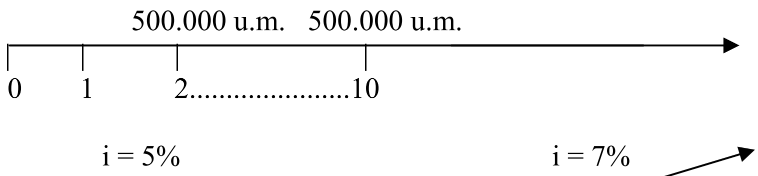
$$j_4 = 6\% \Rightarrow i_4 = 1{,}5\% \Rightarrow (1+i) = (1{,}015)^4 \Rightarrow i = 6{,}13635506\%$$

valor actual de la renta = $A'_\infty \cdot (1+i)^{-5} \cdot (1+i')^{-4} =$

$$j'_2 = 5\% \Rightarrow i'_2 = 2{,}5\% \Rightarrow (1+i') = (1{,}025)^2 \Rightarrow i' = 5{,}0625$$

$$= 4.285.332{,}101 \cdot 0{,}74247042 \cdot 0{,}82074657 = 2.611.395{,}895$$

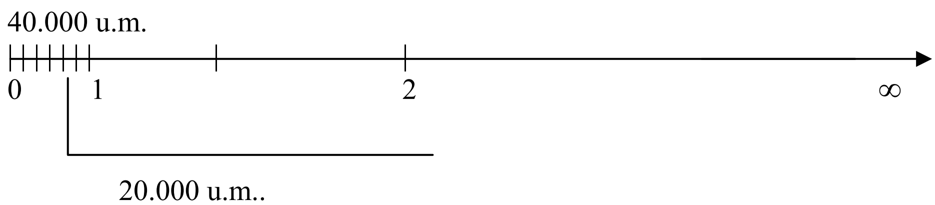
10. Si tenemos una renta perpetua, con término anuales de cuantía 500.000 u.m. percibiéndose el primero transcurridos dos años desde el momento actual. ¿Cuál es su valor actual tomando como réditos anuales de valoración el 5% durante los primeros 10 años y el 7% durante los restantes?
Sol.7.769.772 u.m.



$$\boxed{\frac{1-(1+0'05)^{-9}}{0'05}}$$

$$A_\infty = \left[V_A = 500.000 \cdot a_{9|5\%} \cdot (1{,}05)^{-1} + 500.000 \cdot \frac{1}{0{,}07} \cdot (1{,}05)\right] =$$
$$= 3.384.676{,}988 + 4.385.094{,}668 =$$
$$= 7.769.771{,}656 \text{ u.m.}$$

11. Un señor posee un inmueble cuyo alquiler le proporciona unos ingresos a principios de cada mes de 40.000 u.m. , incrementándose estos a razón del 1 % anual acumulativo. Los gastos de mantenimiento ascienden a 20.000 u.m. a finales de cada semestre, permaneciendo constantes siempre. ¿ Cuál es el valor del inmueble suponiendo un tanto de valoración del 8 %?
Sol. 6.640.790 u.m.



q = 1,01
i = 8%

Valor del inmueble = Ingresos – Gastos

Ingresos = A''_∞ (valor actual de una renta perpetua, geométrica y pospagable)

$$q \neq 1+i \Rightarrow A''_\infty = c_1 \cdot \frac{1}{1+i-q}$$

$$1{,}01 < 1{,}08$$

$$c_1 = 40.000 \cdot a_{12 i_{12}} \cdot (1+i_{12}) \cdot (1+i)$$

para variable perpetua

$$\underline{\textit{Ingresos}} = 40.000 \cdot a_{12 i_{12}} (1{,}00643403) \cdot (1{,}08) \cdot \frac{1}{1{,}08 - 1{,}01} =$$

$$(1{,}08) = (1 + i_{12})^{12} \Rightarrow i_{12} = 0{,}64340301\%$$

$= 7.150.792{,}274$ u.m.

$$\underline{\textit{Gastos}} = A_{\infty} = \frac{c}{i_2} = \frac{20.000}{0{,}0393048454} = 509.807{,}62$$

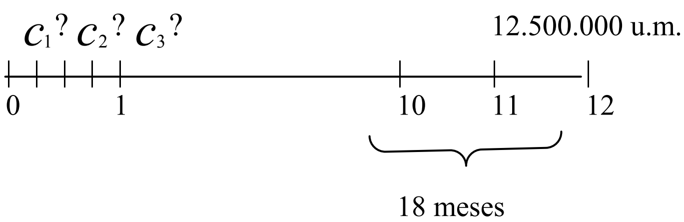
$$(1{,}08) = (1 + i_2)^2 \Rightarrow i^2 = 3{,}923048454\%$$

Valor del inmueble = 6.640.984,653 u.m.

12. Calcule la cuantía de los tres primeros términos de una renta, a ingresar en una entidad financiera, para que al cabo de 11 años y medio el capital constituido sea de 12.500.000 u.m. Considere que:

- Los ingresos son trimestrales
- Los términos son pospagables y sufren un aumento acumulativo del 3% trimestral
- En los últimos 18 meses no se abonan ningún término
- Se capitaliza a un tanto efectivo del 12 % anual en compuesta.

Sol. 85.254,18 u.m. 87.811,81 u.m. 90.446,16 u.m.



q (trimestral) = 1,03

$$i = 12\% \Rightarrow (1{,}12) = (1 + i_4)^4 \Rightarrow i_4 = 2{,}873734472$$

$$12.500.000 = S''_{40} \cdot (1+i)^{18/12} \qquad \Downarrow$$

$$S''_{40} = A''_{40} \cdot (1+i)^{10} \qquad q = 1{,}03$$

$$1 + i_4 = 1{,}02873734472$$

$$\Downarrow$$

$$A''_{40} = c_1 \cdot \frac{1 - q^n (1 + i_4)^{-n}}{1 + i_4 - q} \Leftarrow \qquad q > (1 + i_4)$$

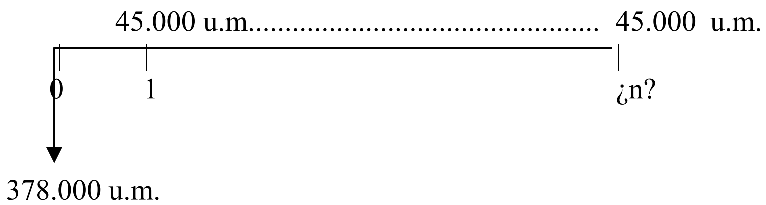
$$S''_{40} = c_1 \cdot \frac{1 - 1{,}03 \cdot (1 + 0{,}02873734472)^{-40}}{1 + 0{,}02873374472 - 1{,}03} \cdot (1 + 0{,}12)^{10} =$$

$$= c_1 \cdot \frac{-0{,}050288895}{-0{,}001262656} \cdot 3{,}105848208 = c_1 \cdot 123{,}6993088$$

$$12.500.000 = 123{,}6993088 \cdot c_1 \cdot (1{,}12)^{18/12}$$

$$c_1 = 85.254{,}18483 \text{ u.m.}$$
$$c_2 = c_1 \cdot q = 87.811{,}81038 \text{ u.m.}$$
$$c_3 = c_2 \cdot q = 90.446{,}16469 \text{ u.m.}$$

13. En una cuenta bancaria que abona un interés efectivo anual del 8% el Sr. F.G.S. deposita la cantidad de 378.000 u.m. al objetos de ir retirando cada año la cantidad de 45.000 u.m. La primera retirada de fondos tiene lugar justo al año siguiente de realizando el depósito. ¿Durante cuántos años el Sr. F.G.S. puede retirar la cantidad completa de 45.000 u.m.?
Sol. 14 años.



i =8%

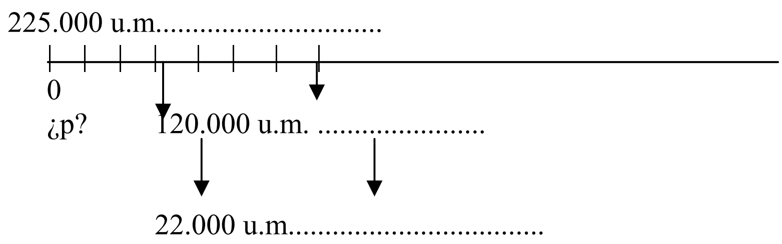
$$378.000 = 45.000 \cdot a_{n|8\%}$$

$$8{,}4 = \frac{1-1{,}08^{-n}}{0{,}08} \Rightarrow 0{,}672 = 1-1{,}08^{-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}08^{-n} = 0{,}328 \Rightarrow n = \frac{\log 0{,}328}{\log 1{,}08} = 14{,}48 \Rightarrow\Rightarrow 14$$ **años, pero no llega**

14. Calcúlese, sobre la base del 5,5% de interés semestral, el precio al que debe venderse un inmueble cuyos ingresos y gastos son los siguientes:
Alquileres: 225.000 u.m. mensuales prepagables.
Gastos generales: 120.000 u.m. al final de cada trimestre.
Contribuciones: 22.000 u.m. semestrales pospagables.
Sol. 20.504.276,52 u.m.

$i_2 = 5{,}5\%$



$$P = 225.000 \cdot \frac{1}{i_{12}} \cdot (1+i_{12})^6 - 120.000 \cdot \frac{1}{i_4} - 22.000 \cdot \frac{1}{i_2} =$$

MENSUAL

$$(1{,}005) = (1+i_a)^6 \Rightarrow i_{12} = 0{,}896339392\%$$

TRIMESTRAL

$$(1{,}005) = (1+i_4)^2 \Rightarrow i_4 = 2{,}71319292\%$$

ANUAL

$$(1{,}005) = (1+i) \Rightarrow i = 11{,}3025\%$$

$$= 25.327.101{,}43 - 4.422.833{,}334 - 400.000 = 20.504.268{,}1 u.m.$$

$$\text{Cobros} = \frac{225.000 \cdot a_{12|i_{12}} (1+i_{12}) \cdot (1+i)}{i} = 25.327.098{,}81$$

15. Dos almacenes A y B venden el mismo modelo de lavadora y al mismo precio: 125.000 u.m. A la vende mediante 12 pagos mensuales pospagables de 12.000 u.m. cada uno. B mediante un pago de 150.000 u.m. dentro de un año. ¿Cuál es la oferta más ventajosa para el cliente?
Sol. B.

B. $125.000 = 150.000 \cdot (1 + i_{12})^{-12} \Rightarrow i_{12} = 1{,}530947049\%$

i = 20%

A. $c_0 = 12.000 \cdot a_{12|1{,}53\%} = 130.638{,}091 > 125.000$

Punto de vista del cliente:

Pago menos intereses globales aplicando el 20% = i_B.

Como en nuestro caso 130.638,091>125.000, significa que en realidad los intereses a pagar en el almacén A serían mayores (es decir, $i_A > 20\%$*). Elijo el almacén B.*

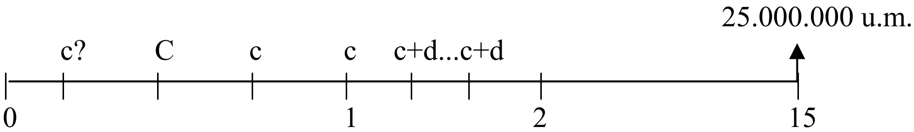
$$\left.\begin{array}{l} \text{B. } c_n = 150.000 \\ \\ \text{A. } c_n = 12.000 \cdot a_{12|1{,}53\%} \cdot (1{,}20) = 156.765{,}7092 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 156.765{,}7092 > 150.000 \Rightarrow$ *En A pago más intereses* $\Rightarrow$ *Elijo opción B.*

16. En una cuenta que abona intereses al 10% nominal anual capitalizable trimestralmente, se realizan imposiciones al final de cada trimestre, constantes dentro de cada año y crecientes en 10.000 u.m. en cada uno de los años siguientes. Al final de 15 años, mediante estas imposiciones trimestrales se ha formado un capital de 25 millones de u.m.. Dígase el importe de la primera imposición trimestral y la última.

Sol.:131.626'61 u.m. 271.626'61 u.m.

$j_4 = 10\% \Rightarrow i_4 = 2{,}5\% \Rightarrow (1{,}025)^4 = (1 + i) \Rightarrow i = 10{,}381289$



d = 10.000 (anual)

$$25.000.000 = A'_{15} \cdot (1+i)^{15}$$

$$A'_{15} = c_1 \cdot a_{n|i} + \frac{d}{i} \cdot a_{n|i} - \frac{nd}{i}(1+i)^{-n}$$

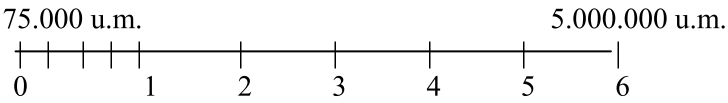
$$c_1 = c \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i) = c \cdot 4{,}152515622$$
$$d = 10.000 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i)$$

$$25.000.000 = \left[c \cdot 4{,}152515622 \cdot a_{15|i} + \frac{10.000 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i)}{i} \cdot a_{15|i} - \frac{1.510.000 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i)}{i} \cdot (1+i)^{-15} \right] \cdot (1+i)^{15}$$

$$6.582.089{,}745 = c \cdot 30{,}90760867 + 2.977.342{,}84 - 1.363.701{,}54$$
$$c = 131.632{,}5852 \text{ u.m.}$$

$$c_{15} = 131.632{,}5852 \cdot (1 + 1410000) = 271.632{,}5852 \text{ u.m.}$$

16. Un señor ha realizado imposiciones trimestrales prepagables y crecientes en progresión aritmética durante seis años. El montante acumulado al final del sexto año es de 5.000.000 u.m. Sabiendo que la primera imposición fue de 75.000 u.m. y que el tipo de interés aplicado fue de 5% nominal capitalizable trimestralmente. ¿En que cuantía se incremento cada trimestralidad?.
Sol. 9.418,24 u.m.



$$j_4 = 5\% \Rightarrow i_4 = 1{,}25\% \Rightarrow (1{,}0125)^4 = (1+i) \Rightarrow i = 5{,}0945336\%$$
¿d? (trimestral)

$$5.000.000 = A'_{24} \cdot (1+i_4) \cdot (1+i)^6$$

$$A'_n = c_1 \cdot a_{n|i} + \frac{d}{i} \cdot a_{n|i} - \frac{nd}{i} \cdot (1+i)^{-n}$$

$$A'_{24} = (75.000 \cdot a_{24|i_4} + \frac{d}{i_4} \cdot a_{24|i_4} - \frac{24d}{i_4} \cdot (1+i)^{-24})$$
$$A'_{24} = 1.546.817{,}588 + d \cdot 1.649{,}938761 - d \cdot 1425{,}018372 = 1.546.817{,}588 + 224{,}9203893 \cdot d$$

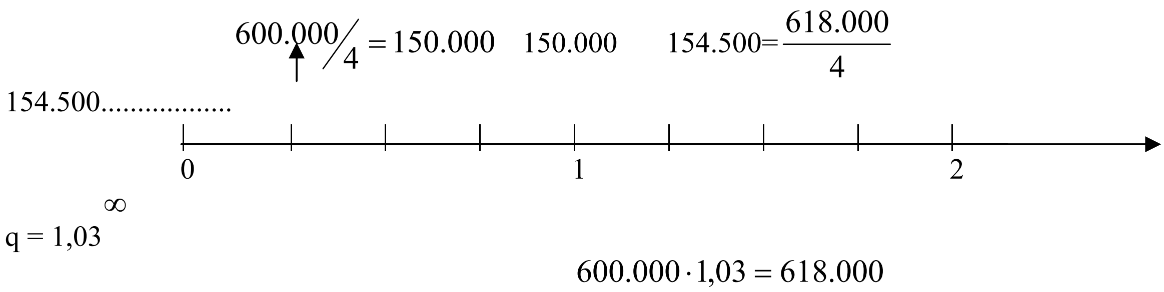
$$5.000.000 = [1.546.817{,}588 + 224{,}9203893 \cdot d] \cdot (1{,}0125) \cdot (1{,}05094533691)^6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = 9.418{,}235256 \text{ u.m.}$$

17. La Universidad de Granada concederá 10 becas a partir del próximo año. El importe de cada una de ellas será de 600.000

ptas. Para el primer año, que se cobrará en pagos fraccionados trimestrales postpagables. Para mantener el poder adquisitivo se incrementarán geométricamente en un 3% anual.

a)¿Puede financiarlas a perpetuidad mediante una imposición única realizada en estos momentos en un banco que pagará intereses siempre al 4% de interés efectivo anual? Justifica la respuesta y en caso afirmativo determina la cuantía.

b)¿Puede financiarlas a perpetuidad mediante una imposición única realizada en estos momentos en un banco que pagará intereses siempre al 2% de interés efectivo anual? Justifica la respuesta y en caso afirmativo determina la cuantía.



10 becas.

a) $i = 4\% \Rightarrow (1{,}04) = (1 + i_4)^4 \Rightarrow i_4 = 0{,}985340654\%$

si es posible porque $\left\{ \begin{array}{l} q = 1{,}03 \\ 1 + i = 1{,}04 \end{array} \right\} q < (1+i)$

$$\Downarrow$$

$$A''_{\infty} = \frac{c_1}{1 + i - q}$$

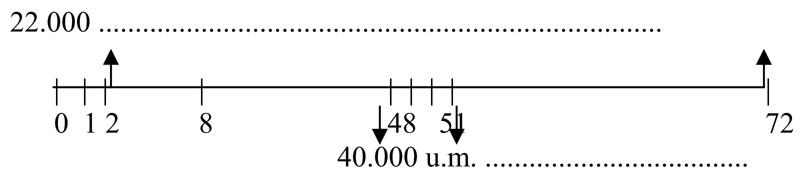
$$A''_{\infty} = \frac{150.000 \cdot a_{4|i_4}}{1+0{,}04-1{,}03} = \frac{150.000 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i)}{0{,}01} = 59.127.544{,}56$$

591.275445,6 u.m.

b) i = 2%

$$\text{No es posible porque} \left\{ \begin{array}{l} q = 1{,}03 \\ \\ 1+i = 1{,}02 \end{array} \right\} \quad q > (1+i)$$

18. Planeamos realizar los siguientes movimientos en una cuenta abierta en cierta entidad financiera:
-12 ingresos semestrales constantes de 22.000 u.m., el primer ingreso lo haremos dentro de dos meses.
-4 reintegros trimestrales de 40.000 u.m., el primer reintegro lo haremos a finales del cuarto año.
Si nos pagan intereses al 6% anual compuesto. ¿Cuál será nuestro saldo dentro de 6 años?
Sol.: 141.645'37 u.m.



i = 6%

Saldo=

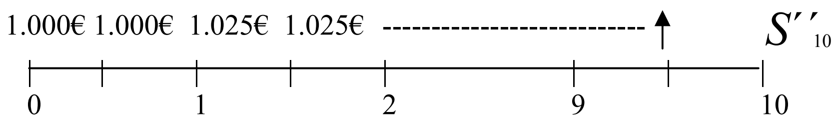
$$22.000 \cdot a_{12|2{,}9563\%} \cdot (1+0{,}0048675)^4 \cdot (1{,}06)^6 - 40.000 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+0.01467384616) \cdot (1{,}06)^2 =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+0{,}06) = (1+i_2)^2 \Rightarrow i_2 = 2{,}9563\% \\ (1+0{,}06) = (1+i_{12})^{12} \Rightarrow i_{12} = 0{,}486755\% \\ (1+0{,}06) = (1+i_4)^4 \Rightarrow i_4 = 1{,}467384616\% \end{array} \right.$$

$$= 22.000 \cdot 9{,}980020421 \cdot 1{,}019612617 \cdot 1{,}418519112 - 40{,}000 \cdot 3{,}85745993 \cdot (1{,}01467384616) \cdot 1{,}1236 =$$

$$= 317.559{,}0567 - 175.913{,}6791 = 141645{,}3776$$

19. Una persona contrata un plan de pensiones en las siguientes condiciones:
-Primas semestrales prepagables con crecimiento anual geométrico del 2'5%, las correspondientes al primer año serán de 1.000 euros.
-Duración de 10 años.
Si el tipo de interés previsto es del 4'5% nominal capitalizable semestralmente calcula el capital final previsto.
Sol.:28.280'20



q = 1,025

$$j_2 = 4{,}5\% \Rightarrow i_2 = 2{,}25\% \Rightarrow (1+i) = (1{,}0225)^2 \Rightarrow i = 4{,}550625\%$$

$$S''_{10} = A''_{10} \cdot (1+i)^{10} = c_1 \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} \cdot (1+i)^{10} =$$

$$= 1.000 \cdot a_{2|i_2} \cdot (1+i_2)^3 \cdot \frac{1 - 1{,}025^{10} \cdot (1{,}04550625)^{-10}}{1{,}04550625 - 1{,}025} \cdot (1{,}04550625)^{10} =$$

$$= 1.000 \cdot 1{,}934469545 \cdot 1{,}069030141 \cdot \frac{0{,}179700738}{0{,}02050625} \cdot 1{,}56050921 =$$

$$= 28.280{,}15554€$$

BIBLIOGRAFÍA

MATEMÁTICAS FINANCIERAS I: UNED http://info.uned.es/dpto-economia-empresa-y-contabilidad/asignaturas/423025/portada.htm

PABLO LÓPEZ, Andrés de: *Matemática de las Operaciones Financieras I* (Unidades Didácticas). Ed. UNED. 3ª Edición. Madrid. 1998.

PABLO LÓPEZ, Andrés de: *Manual Práctico de Matemática Comercial y Financiera*. Volumen I. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. 2ª Edición. Madrid. 2000.

FUENTE SÁNCHEZ, D.: *Manual Práctico de Valoración Financiera*. Ed. CEURA. Madrid. 2002.

GIL PELÁEZ, L.: *Matemática de las Operaciones Financieras.* Ed. AC. Madrid. 1987.

GIL PELÁEZ, L y otros.: *Matemática de las Operaciones Financieras. Problemas Resueltos.* Ed. AC. Madrid. 1991.

GONZÁLEZ CATALÁ, V.T.: *Enfoque Práctico de las Operaciones de la Matemática Financiera.* Ed. Ciencias Sociales. Madrid. 1991.

GONZÁLEZ CATALÁ, V.T.: *Análisis de las Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles.* Ed. Ciencias Sociales. Madrid. 1992.

LEVI, E.: *Curso de Matemática Financiera y Actuarial.* Ed. Bosh. Barcelona. 1973.

MENEU FERRER, V. y otros.: *Operaciones Financieras en el Mercado Español.* Ed. Ariel. Barcelona. 1994.

PABLO LÓPEZ, Andrés de.: *Valoración Financiera*. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. 2ª Edición. Madrid. 1998.

RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, A.: *Matemática de la Financiación.* Ed. Universidad de Barcelona. 1994.

RUIZ AMESTOY, J.M.: *Matemática Financiera.* Ed. Centro de Formación del Banco de España. Madrid. 1993

RUIZ AMESTOY, J.M.: *Matemática Comercial.* Ed. Centro de Formación del Banco de España. Madrid. 1992.

Enlaces de interés

En esta página podrá encontrar una relación de sitios y páginas web correspondientes a instituciones, organismos o empresas con algún tipo de relación con los contenidos de la materia desarrollada.

Comisión Nacional del Mercado de Valores

http://www.cnmv.es

Banco de España

http://www.bde.es

Bolsa de Madrid

http://www.bolsamadrid.es

Sociedad de bolsas

http://www.sbolsas.es

Difusores oficiales de bolsa

http://www.agmercados.com

http://www.infobolsa.es

http://www.r4.com

http://invertia.com

Mercado AIAF de renta fija

http://www.aiaf-ecn.com/index.html

Banca electrónica

http://www.bbva.es

http://www.bsch.es

http://www.bancopopular.es

http://www.bankinter.es

http://www.cajamadrid.es

http://www.lacaixa.es

Ministerio de Economía

http://www.mineco.es

Ministerio de Hacienda

http://www.minhac.es

ANEXO:

- Otra visión simplificada de Capitalización y Rentas
- Alguna propuesta de Exámenes de la materia
- Material de presentación de la materia (solo se realiza a partir del tema 6)
- Referencias y direcciones relacionadas con el autor (RGL)

ANEXO I: OTRA VISIÓN SIMPLIFICADA DE LAS MATEMATICAS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

TEMA 1: FUNDAMENTOS DE VALORACIÓN FINANCIERA

1.1 Introducción.

"*A igualdad de cantidad y calidad las personas prefieren bienes presentes a los futuros*".

Es por ello que el tiempo es un bien económico, ya que influye en la apreciación de los bienes económicos al preferir los presentes. También podemos afirmar que es un bien económico negativo porque el alejamiento en la disponibilidad del bien tendrá que ser compensado por un aumento en la cuantía para que sea equivalente.

Todo intercambio de bienes económicos en el cual interviene el tiempo se conoce como fenómeno financiero. Todo bien económico lo vamos a identificar con un número de unidades monetarias.

La valoración de un bien económico es incompleta si no hacemos referencia, además del precio del bien, la fecha a la que está hecha dicha valoración.

Todos los bienes económicos, los identificaremos con los valores siguientes:

$$(C, t)$$

- C: precio en unidades monetarias.
- t: momento en el que se realiza dicha valoración.

1.2. Capital financiero.

Podemos definir capital financiero como medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad (vencimiento o entrega). Los capitales financieros son magnitudes bidimensionales (C, t).

Los dos números que representan a la cuantía y al vencimiento son números reales, por lo que pueden tomar valores positivos y negativos. La cuantía de los capitales podrá ser negativa si consideramos que es una deuda para el agente económico. En cuanto al vencimiento, también podría ser negativo si consideramos un instante de tiempo anterior al origen.

Sin embargo, si tienes en cuenta el capital en si mismo, sin tener en cuenta la persona que lo posee, un capital siempre es positivo. Por otro lado, si partimos del día de hoy al que asignamos el valor 0, el vencimiento de cualquier capital siempre es positivo ya que será en el futuro.

En cualquier caso, podemos determinar que el espacio financiero pertenece a R^2.

1.3. Comparación de capitales: equivalencia financiera.

De acuerdo con el principio de subestimación de recursos, C_1 será preferido a C_2 en los siguientes casos:

- con $t_2 = t_1$ si $C_1 > C_2$
- con $C_1 = C_2$ si $t_1 < t_2$
- con $C_1 < C_2$ si $t_1 < t_2$
- con $C_1 > C_2$ si $t_1 > t_2$

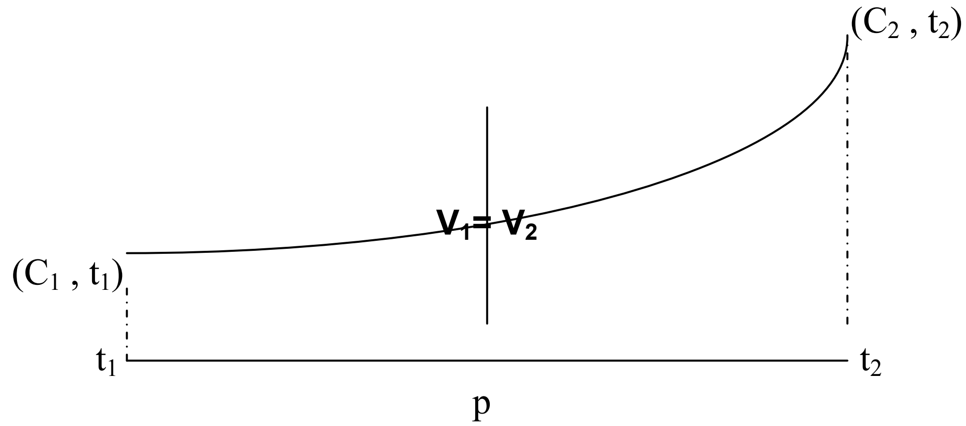
Para los dos últimos casos será necesario usar el principio de proyección financiera:

"El sujeto económico es capaz de establecer un criterio de comparación de capitales de una forma indirecta, a través de la proyección o valoración en un punto de referencia p (punto de referencia en el tiempo)."

V_1: es C_1 en p.
V_2: es C_2 en p.

- si $V_1 > V_2$: preferiremos la cuantía C_1.
- si $V_1 < V_2$: preferiremos la cuantía C_2.

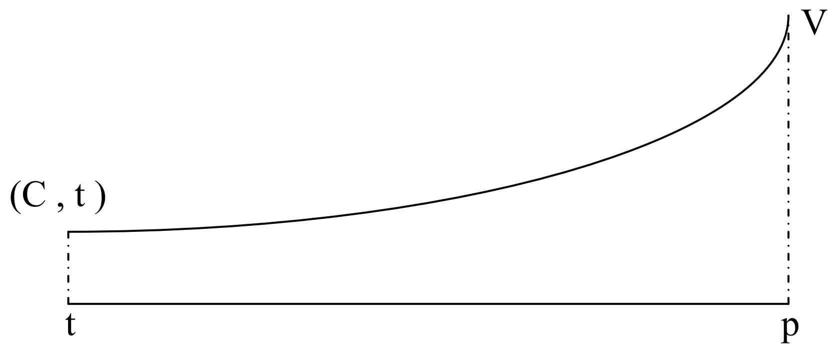
- si $V_1 = V_2$: son indiferentes los capitales.



1.4. Leyes financieras: capitalización y descuento. Suma financiera de capitales.

La expresión analítica que permite conocer V, conocido el capital C y el punto p, recibe el nombre de ley financiera de valoración en p.

<u>V = Proy. p (C, t)</u>



$V = F (C, t, p)$:

- Si $t < p$ $\longrightarrow$ ley financiera de capitalización: $V = L(C, t, p)$
- Si $t > p$ $\longrightarrow$ ley financiera de actualización: $V = A(C, t, p)$

CONDICIONES PARA $F(C, t, p)$

1ª) $F(C, t, p) > 0$

- $L(C, t, p) > C$
- $A(C, t, p) < C$

2ª) Deberá ser homogénea de grado 1 con respecto al capital.

$$F(C, t, p) = C\, F(1, t, p) = C\, F(t, p)$$

3ª) Es reflexiva.

$F(C, t = p) = 1$

4ª) Deberá ser decreciente con respecto "t" y creciente con "p".

5ª) Estacionariedad, esto significa que se va a poder sustituir la variable "p" y "t" por una unica:

- Capitalización: $n = p - t$
- Descuento: $n = t - p$

1.5. Operación financiera: concepto, elementos y clasificación.

Una operación financiera es un intercambio no simultáneo de capitales financieros entre las partes intervinientes de manera que sus componentes sean equivalentes, esto es, que exige que exista una ley financiera que valora los capitales de la prestación y de la contraprestación, aceptada por ambas partes. La suma financiera de los capitales de la prestación debe ser igual a la suma de los capitales de la contraprestación.

CLASIFICACION DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

- En función de la clase de capitales:
  - Cierta: todos los capitales se conocen con certeza.
  - Aleatoria: una de las variables no la conocemos con certeza, ya sea C o t.

- Dada la naturaleza de los compromisos:
  - Simple: tanto el capital de la prestación como el de la contraprestación son uno solo.
  - Compuesto: cuando ambos capitales están formados por varios capitales.

- En función de la duración:
  - C/p: duración inferior al año (leyes financieras lineales).

- L/p: se aplican leyes financieras exponenciales.

- De acuerdo a la ley:
    - Capitalización: L(C, t, p).
    - Descuento: A(C, t, p).
    - Mixta: se combinan ambas leyes.

- En relación al sentido de la operación:
    - De crédito unilateral: se mantiene el papel deudor y acreedor.
    - De crédito bilateral: se cambia el sentido crediticio.

TEMA 2: LEYES FINANCIERAS CLÁSICAS

1.1. Introducción.

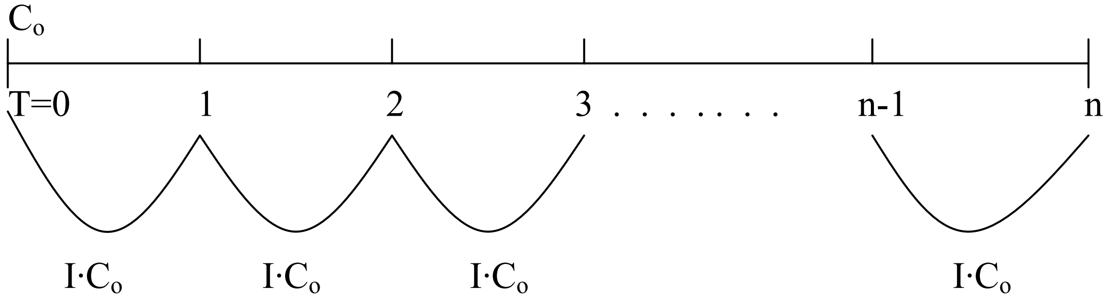
Básicamente se utilizan cinco leyes financieras. Las dos primeras son leyes de capitalización, distinguiendo entre la ley de capitalización simple y la de capitalización compuesta. Las tres restantes son leyes de descuento entre las que se encuentran la ley de descuento simple comercial, la ley de descuento simple comercial y la ley de descuento compuesto.

2.2. Ley de capitalización simple. Tantos equivalentes. El descuento racional o matemático como conjugado de la capitalización simple.

La ley financiera de interés simple o de capitalización simple es aquella que es proporcional al capital invertido y a la duración.

$$I_{(0,n)} = Co\ n\ i$$

- Co: es el capital inicial.
- n: mide el tiempo durante el cual se está capitalizando la unidad monetaria o la cuantía C.
- i: es un factor de proporción que indica la cantidad que produce una unidad monetaria en una unidad de tiempo. Para ello se exige que el tiempo y el tanto estén en la misma unidad de medida.



La característica fundamental de esta ley es que los intereses no son productivos, esto es, los intereses que se generen en un periodo no se suman al capital inicial para que esa suma genere nuevos intereses, sólo se considera capital para generar interés el capital inicial.

Según esta característica fundamental:

- $I_1 = Co\ i$
- $I_2 = Co\ i$
- …
- $I_n = Co\ i$

Es por ello, por lo que llegamos a la expresión:

$$I_{(0,n)} = Co\ n\ i$$

Si queremos saber el montante alcanzado por el Co, en el periodo n al tanto i:

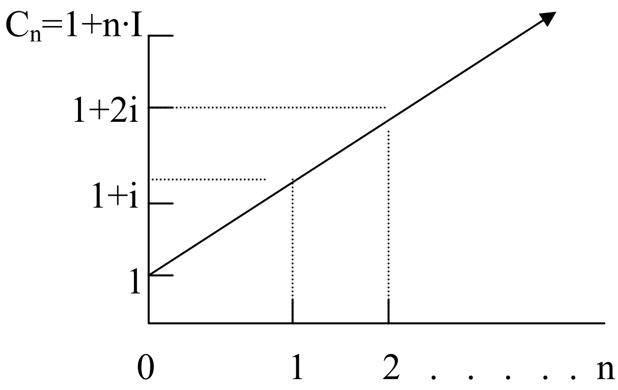
$$Cn = Co + I_{(0,n)} = Co + Co\ n\ i = Co\ (1 + ni)$$

Factor de capitalización simple $\longrightarrow$ (1 + ni): es la expresión matemática (función lineal) que me permite desplazar capitales al futuro (hallar el montante en n).

Deducción del montante en capitalización simple.

Año	Capital	Intereses	Montante
1	Co	Co.i	Co+Co.i = Co(1+i)
2	Co(1+i)	Co.i	Co(1+I)Co.i = Co + Co.i + Co.i = Co(1+I+I) = Co(1+2i)
3	Co(1+2i)	Co.i	Co(1+2i) + Co.i = Co + Co2i + Coi = Co(1+2i+I) = Co(1+3i)
n	Co(1+(n-1)I)	Co.i	Co(1+(n-1)I) + Co.i = Co + Co(n-1)I + Coi = Co (1+(n-1)I) = Co (1+ni)

$$\boxed{Cn = Co(1+n.i)}$$



TANTOS EQUIVALENTES

Dos tantos son equivalentes cuando aplicados sobre el mismo capital y durante el mismo tiempo el montante al que se llega el mismo.

- i: tanto de un periodo (tanto anual).
- m: número de subperiodos en que se divide un periodo.
- n: número de periodos (años).
- i_m: tanto del subperiodo m (tanto fraccionado).

Dos tantos son equivalentes si y sólo si:

$$(1 + in) = (1 + i_m\, m\, n)$$

$$i = I_m\, m \qquad\qquad I_m = i / m$$

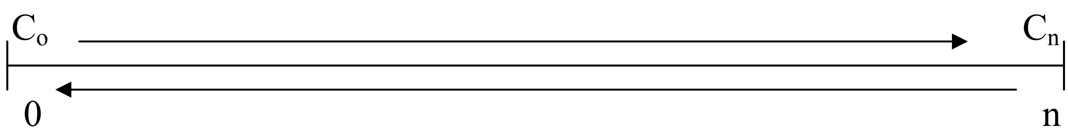
LEY DE DESCUENTO RACIONAL

Es la conjugada de la ley de capitalización simple.

$$A\,(t, p) = 1 / (1 + i(t - p)) \longrightarrow t - p = n \longrightarrow A(0,n) = 1/(1 + ni)$$

$$Co = Cn / (1 + in)$$

Ley de capitalización simple



Ley de descuento simple racional

2.3. Capitalización compuesta.

Es aquella en la que los intereses producidos en cada periodo se acumulan al capital, para que la suma de ambos produzcan intereses en el periodo siguiente. Es decir, tiene lugar la capitalización periódica de los intereses.

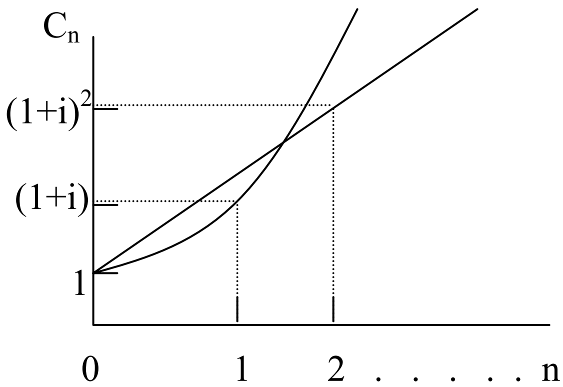
La expresión matemática que define la ley de capitalización compuesta es:

$$L(n) = (1 + i)^n$$

Para aplicarla a un capital cualquiera solo habrá que multiplicarse por dicho capital, de manera que la expresión quedará de la manera que sigue:

$$Cn = Co\ (1 + i)^n$$

En periodos inferiores al año es más conveniente aplicar capitalización simple, y en periodos superiores al año es más conveniente aplicar capitalización compuesta, cuando el periodo da igual al año la ley financiera que se aplique.



DEDUCCIÓN DEL MONTANTE EN CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

$$C_2 = C_1 + i \cdot C_1 = C_o + i \cdot C_o + i \cdot (C_o + i \cdot C_o) = C_o + i \cdot C_o + i \cdot C_o + i^2 \cdot C_o$$

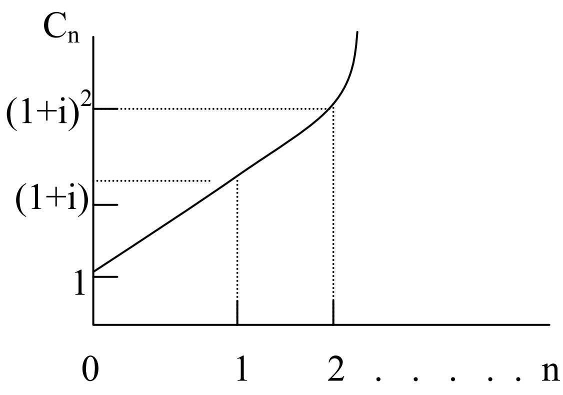
$$C_0 \cdot (i^2 + 2 \cdot i + 1) = C_o \cdot (1 + i)^2$$

$$C_n = C_{n-1} \cdot i = C_{n-1} \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^{n-1} \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + i)^n \rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$$

REPRESENTACIÓN



2.4. Tantos equivalentes. Tanto nominal y tanto efectivo. El descuento compuesto como conjugado de la capitalización compuesta.

Tantos equivalentes en capitalización compuesta: dos tantos son equivalentes cuando aplicados sobre el mismo capital y durante el mismo tiempo el montante al que se llega el mismo.

- i: tanto de un periodo (tanto anual).
- m: número de subperiodos en que se divide un periodo.
- n: número de periodos (años).
- i_m: tanto del subperiodo m (tanto fraccionado).

De acuerdo con la definición, dos tantos serán equivalentes:

$$(1 + i)^n = (1 + i_m)^{n\,m}$$

$$\underbrace{i = (1 + i_m)^m - 1}_{\text{tanto efectivo}} \qquad\qquad I_m = (1 + I)^{1/m} - 1$$

Tanto nominal: $J_m = i_m\, m = m\,[(1 + i)^{1/m} - 1]$

$$i = (1 + (J_m/m))^m - 1$$

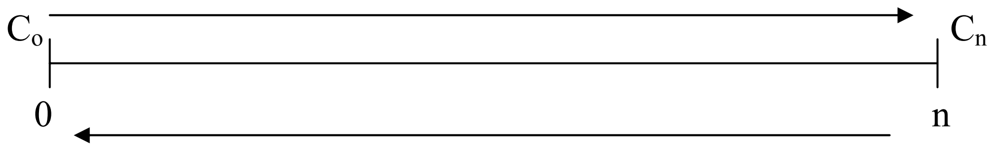
El tanto nominal nos da una información incompleta, debe incluirnos el periodo al que se refiere para asi obtenerse un tanto fraccionado.

LEY DE DESCUENTO COMPUESTO

La expresión matemática que define la ley de descuento compuesto, es la inversa de la ley de capitalización compuesta:

$$A(n) = 1/ (1 + i)^{n} = (1 + i)^{-n}$$

cap. compuesta



dto. Compuesto

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \rightarrow \left[C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n \cdot (1+i)^{-n} \right]$$

2.5. El descuento comercial simple. Suma financiera y capital unificado en descuento comercial: vencimiento común y vencimiento medio.

La ley de descuento simple comercial es aquella en la que los descuentos son proporcionales a la duración del periodo y al capital descontado o actualizado.

$$Co = Cn - n\,Cn\,d = Cn\,(1 - nd)$$

$$A(t, p) = 1 - Dc\,(t, p) = 1 - d\,(t - p) \longrightarrow t - p = n$$
$$\longrightarrow A(0, n) = 1 - dn \longrightarrow \text{para un capital unitario}$$

En lo que respecta a los tantos equivalentes, la problemática es igual que en la capitalización.

$$d_m = d / m \qquad\qquad d = d_m\, m$$

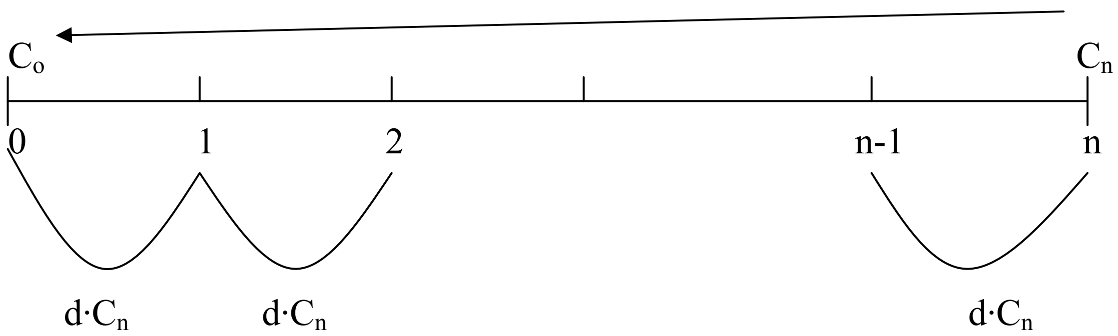
Deducción del descuento comercial en función del Efectivo.

$$D = N - E$$

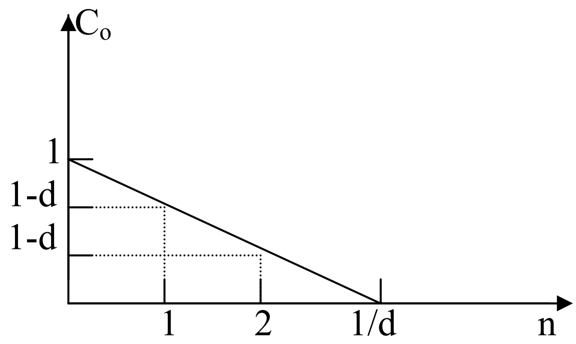
$$Dc = \frac{E}{1-dt} - E$$

$$Dc = \frac{E - E(1-dt)}{1-dt} = Dc = \frac{E - E + Edt}{1-dt} =$$

$$\boxed{Dc = \frac{Edt}{1-dt}}$$



Representación: Suponemos $C_n = 1 \rightarrow \quad f(n) = (1 - n \cdot d)$



TEMA 3: TEORIA DE RENTAS

3.1. Concepto y clasificación de las rentas

Se entiende por renta a un conjunto de capitales financieros, disponibles en instantes de tiempo diferentes. En la mayoría de los casos, dichos vencimientos son equidistantes, es decir, el tiempo que media entre un vencimiento y otro consecutivo siempre es el mismo. En todo renta financiera podemos diferenciar una serie de elementos que la caracterizan:

- Cuantía de los capitales que componen la renta, se denotará como C.
- Periodicidad de los capitales que componen la renta, es decir, la amplitud de los intervalos de tiempo en que se divide la renta.
- El origen de la renta o instante inicial de la misma, que coincide con el límite inferior del primer intervalo temporal que la compone.
- El final de la renta que será el límite superior del último intervalo temporal que constituye la renta.
- La duración de la misma, que no es mas que el tiempo que transcurre desde que se inicia y hasta que finaliza la misma.

Dos conceptos importantes

Valor actual: nos vendrá dado por la suma de los valores de cada uno de sus términos en el momento de su constitución.

Vo = Valor inicial $\qquad V = (1 + i)^{-1}$

$$Vo = C_1 (1 + i)^{-1} + C_2 (1 + i)^{-2} + C_3 (1 + i)^{-3} + \dots + C_{n.-1} (1 + i)^{-n+1} + Cn (1 + i)^{-n}$$

$$Vo = C_1 V + C_2 V^2 + C_3 V^3 + ... + C_{n-1} V^{n-1} + C_n V^n$$

Valor final: nos vendrá dado por la suma de los valores de cada uno de sus términos en el momento de efectividad del último término.

$$Vn = C_1 (1 + i)^{n-1} + C_2 (1 + i)^{n-2} + C_3 (1 + i)^{n-3} + \dots + C_{n.-1} (1 + i) + Cn$$

Multiplicamos valor inicial y final por $(1 + i)^n$:

$$Vo (1 + i)^n = [C_1 (1 + i)^{-1} + C_2 (1 + i)^{-2} + C_3 (1 + i)^{-3} + \dots + C_{n.-1} (1 + i)^{-n+1} + Cn (1 + i)^{-n}] (1 + i)^n$$

$Vo\,(1 + i)^{n} = C_1\,(1 + i)^{n-1} + C_2\,(1 + i)^{n-2} + C_3\,(1 + i)^{n-3} + \ldots + C_{n.-1}\,(1 + i) + Cn$

$$\mathbf{Vo\,(1 + i)^{n} = Vn}$$

CLASIFICACION

Las rentas se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios. Estos criterios son:

- Amplitud de los intervalos:
  - discretas: cuando la amplitud de los intervalos es finita. Estas además las podemos subdividir en:
- periódicas, cuando la amplitud de los intervalos es constante.
- No periódicas, cuando no se cumple dicha característica.
  - Continua, cuando la amplitud de los intervalos es infinitesimal.

- Aleatoriedad de los capitales:
  - ciertas, cuando todos los capitales que la componen son ciertos, es decir, se conocen de forma cierta tanto las cuantías como los vencimientos de todos los capitales de la renta.
  - Aleatorias, cuando exista algún capital, ya sea por su cuantía o por su vencimiento, que se desconoce.

- Cuantía de los capitales:
  - constantes, son aquellas rentas que están compuestas por la misma cuantía.
  - variables, son aquellas compuestas por capitales de cuantías variables, ya sean de forma irregular o bien siguiendo algún criterio de variación.

- Duración de la renta:
  - temporales, cuando la duración de la renta es finita.
  - Perpetuas, cuando la duración es infinita, es decir, sabemos cuando empieza la renta (instante 0), pero no tiene final.

- Vencimiento del capital en el intervalo:
  - prepagables, cuando el instante coincida con el límite inferior del intervalo.
  - pospagable, son aquellas rentas cuyos capitales vencen en el límite superior del intervalo.

- Instante de la valoración:

- inmediatas, si son valoradas en cualquier instante perteneciente a su duración.
- dferidas, si las valoramos en un instante anterior al origen.
- anticipadas, si las valoramos en un momento posterior al final de la misma.

- Periodicidad del vencimiento:
  - anuales, cuando los capitales vencen cada año.
  - fraccionadas, si vencen con periodicidad inferior al año.
  - Superanuales, cuando la periodicidad del vencimiento es superior al año.

- Ley financiera que las valora:
  - rentas valoradas con leyes simples.
  - rentas valoradas con leyes compuestas.

3.2. Rentas constantes.

La renta constante es aquella que está compuesta por n capitales de igual cuantia, disponibles en periodos de tiempo consecutivos.

Rentas inmediatas y temporales:

- Renta temporal, pospagable, inmediata y unitaria:
-
-

C C C . . . . C C

0 1 2 k . . . . . .n-1 n

- Vo (valor actual) = $a_{n,i} = (1 – (1 + i)^{-n}) / i$

- Vn (valor final) = $s_{n,i} = ((1 + i)^{n} – 1) / i$

- Renta temporal prepagable, inmediata y unitaria:

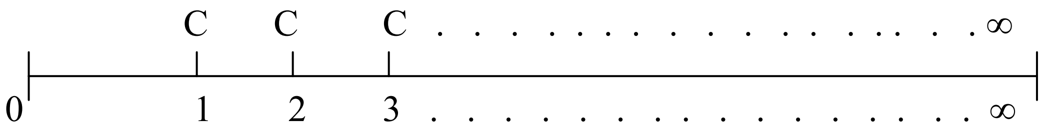
C C C C C

0 1 2 k . . . . . .n-1 n

- Vo (valor actual) = $\ddot{a}_{n,i} = (1 + i)\ a_{n,i}$
- Vn (valor final) = $\ddot{s}_{n,i} = (1 + i)\ s_{n,i}$

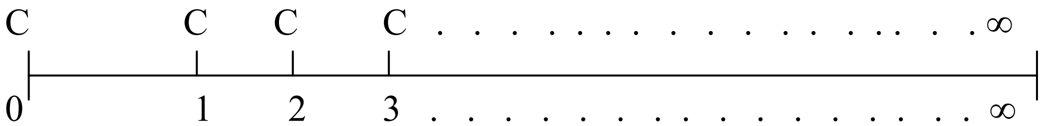
Rentas inmediatas y perpetuas:

- Renta perpetua, pospagable, inmediata y unitaria:



- Vo (valor actual) = $a_{\text{infinito},i} = 1 / i$
- Vn (valor final) = no tiene sentido

- Renta perpetua, prepagable, inmediata y unitaria:



- Vo (valor actual) = $\ddot{a}_{\text{infinito},i} = 1 / i$
- Vn (valor final) = no tiene sentido

Rentas temporales diferidas:

- Renta temporal, pospagable, diferida y unitaria:

- Vo (valor actual) = $h / a_{n,i} = (1 + i)^{-h}\ a_{n,i}$
- Vn (valor final) = igual que inmediatas

- Renta temporal, prepagable, diferida y unitaria:

- Vo (valor actual) = $h / a_{n,i} = (1 + i)^{-h}\ \ddot{a}_{n,i}$
- Vn (valor final) = igual que inmediatas

Rentas perpetuas diferidas:

- Renta perpetua, pospagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual)=-h / $a_{infinito,i} = (1 + i)^{-h}$ (1 /i)
  - Vn (valor final) = no tiene sentido
- Renta perpetua, prepagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual)=-h/$\ddot{a}_{infinito,i}=(1+i)^{-h}$ (1+(1/i))
  - Vn (valor final) = no tiene sentido

Rentas temporales anticipadas:

- Renta temporal, pospagable, anticipada y unitaria:
  - Vo (valor actual) = igual que inmediatas
  - Vn (valor final) = h / $S_{n,i} = (1 + i)^h S_{n,i}$
- Renta temporal, prepagable, anticipada y unitaria:
  - Vo (valor actual) = igual que inmediatas
  - Vn (valor final) = h / $\ddot{S}_{n,i} = (1 + i)^{-h} \ddot{S}_{n,i}$

Rentas perpetuas anticipadas:

No tienen sentido

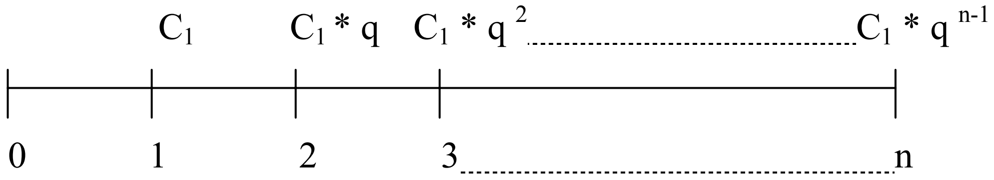
3.3. Rentas variables.

Las rentas variables son aquellas rentas cuyos capitales financieros son variables en su cuantía y / o en su tiempo de disponibilidad.

RENTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA:

Rentas inmediatas y temporales:

- Renta temporal, pospagable, inmediata y unitaria:



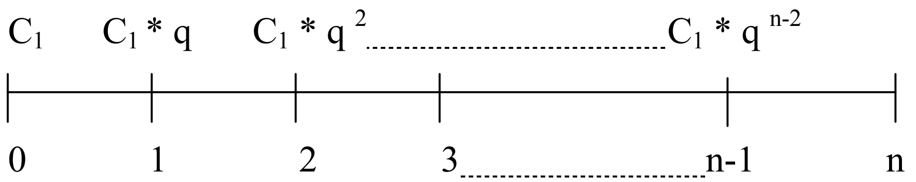
Si $q \neq 1 + i$:

- Vo(valor actual)=$a(C,q)_{n,i} = (1-q^n(1+i)^{-n})/(1+i-q)$
- Vn (valor final) = $S(C,q)_{n,i} = ((1+i)^n - q^n) / (1+i-q)$

Si $q = 1 + i$:

- Vo(valor actual)=$a(C,1+i)_{n,i} = Cn\ (1+i)^{-1}$
- Vn (valor final) = $S(C,1+i)_{n,i} = Cn\ (1+i)^{n-1}$

- Renta temporal prepagable, inmediata y unitaria:



Si $q \neq 1 + i$:

- Vo (valor actual) = $\ddot{a}(C,q)_{n,i} = (1 + i)\ a_{n,i}$
- Vn (valor final) = $\ddot{S}(C,q)_{n,i} = (1 + i)\ S_{n,i}$

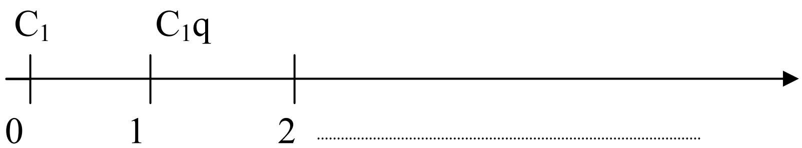
Si $q = 1 + i$:

- Vo(valor actual)=$a(C,1+i)_{n,i} = Cn$

- Vn (valor final) = $S(C,1+i)_{n,i} = Cn\ (1+i)^n$

Rentas inmediatas y perpetuas:

- Renta perpetua, pospagable, inmediata y unitaria:



Si q < 1+i:

- Vo (valor actual) = $a(C,q)_{infinito,i} = 1 / (1+i-q)$
- Vn (valor final) = no tiene sentido

Si q > 1+i:

- Vo (valor actual) = $a(C,q)_{infinito,i}$ = infinito
- Vn (valor final) = no tiene sentido

Si q = 1+i:

- Vo (valor actual) = $a(C,q)_{infinito,i}$ = infinito
- Vn (valor final) = no tiene sentido

- Renta perpetua, prepagable, inmediata y unitaria:

Si q < 1+i:

- Vo (valor actual)= $\ddot{a}(C,q)_{infinito,i} = (1+i)\ a(C,q)_{infinito,i}$
- Vn (valor final) = no tiene sentido

Para q > (1+i) y q = (1+i) el resultado es igual que en las pospagables.

Rentas temporales diferidas:

- Renta temporal, pospagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual) = $h\ /\ a(C,q)_{n,i} = (1+i)^{-h}\ a(C,q)_{n,i}$
  - Vn (valor final) = igual que inmediatas
- Renta temporal, prepagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual) = $h\ /\ \ddot{a}(C,q)_{n,i} = (1+i)^{-h}\ \ddot{a}(C,q)_{n,i}$
  - Vn (valor final) = igual que inmediatas

Rentas perpetuas diferidas:

- Renta perpetua, pospagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual)=$-h\ /\ a(C,q)_{infinito,i} = (1+i)^{-h}\ a(C,q)_{infinito,i}$
  - Vn (valor final) = no tiene sentido
- Renta perpetua, prepagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual)=$-h/\ddot{a}(C,q)_{infinito,i} = (1+i)^{-h}\ \ddot{a}(C,q)_{infinito,i}$
  - Vn (valor final) = no tiene sentido

Rentas temporales anticipadas:

- Renta temporal, pospagable, anticipada y unitaria:

  - Vo (valor actual) = igual que inmediatas
  - Vn (valor final) = h / $S(C,q)_{n,i} = (1 + i)^{h}\, S(C,q)_{n,i}$

- Renta temporal, prepagable, anticipada y unitaria:

  - Vo (valor actual) = igual que inmediatas
  - Vn (valor final) = h / $\ddot{S}(C,q)_{n,i} = (1 + i)^{-h}\, \ddot{S}(C,q)_{n,i}$

Rentas perpetuas anticipadas:

No tienen sentido

RENTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA:

Rentas inmediatas y temporales:

- Renta temporal, pospagable, inmediata:

C_1 $C_1 + d$ $C_1 + 2\,d$ .... $C_1 + (n-1)$

0 1 2 3 .... n

- Vo(valor actual)= $a(C,d)_{n,i}$= (C + d/i + dn) $a_{n,i}$ – dn / i
- Vn (valor final) = $S(C,d)_{n,i}$ = (C + d/i) $S_{n,i}$ – dn / i

- Renta temporal prepagable, inmediata:
  - Vo (valor actual)= $\ddot{a}(C,d)_{n,i}$= (1 + i) $a(C,d)_{n,i}$
  - Vn (valor final) = $\ddot{s}(C,d)_{n,i}$=(1+ i) $s(C,d)_{n,i}$

Rentas inmediatas y perpetuas:

- Renta perpetua, pospagable, inmediata:
  - Vo (valor actual) = $a(C,d)_{\text{infinito},i}$ = (C + d/i) 1/i
  - Vn (valor final) = no tiene sentido

- Renta perpetua, prepagable, inmediata:
  - Vo(valor actual) = $\ddot{a}(C,d)_{\text{infinito},i}$ = (1+i) $a(C,d)_{\text{infinito},i}$
  - Vn (valor final) = no tiene sentido

Rentas temporales diferidas:

- Renta temporal, pospagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual) = h / $a(C,d)_{n,i}$ = $(1 + i)^{-h}$ $a(C,d)_{n,i}$
  - Vn (valor final) = igual que inmediatas
- Renta temporal, prepagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual) = h / $\ddot{a}(C,d)_{n,i}$ = $(1 + i)^{-h}$ $\ddot{a}(C,d)_{n,i}$
  - Vn (valor final) = igual que inmediatas

Rentas perpetuas diferidas:

- Renta perpetua, pospagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual)=-h / $a_{(C,d)\text{infinito},i} = (1 + i)^{-h}$ $a_{(C,q)\text{infinito},i}$
  - Vn (valor final) = no tiene sentido
- Renta perpetua, prepagable, diferida y unitaria:
  - Vo (valor actual)=-h/$\ddot{a}_{(C,d)\text{infinito},i} = (1+i)^{-h}$ $\ddot{a}_{(C,q)\text{infinito},i}$
  - Vn (valor final) = no tiene sentido

Rentas temporales anticipadas:

- Renta temporal, pospagable, anticipada y unitaria:
  - Vo (valor actual) = igual que inmediatas
  - Vn (valor final) = h / $S_{(C,d)n,i} = (1 + i)^{h}$ $S_{(C,d)n,i}$
- Renta temporal, prepagable, anticipada y unitaria:
  - Vo (valor actual) = igual que inmediatas
  - Vn (valor final) = h / $\ddot{S}_{(C,d)n,i} = (1 + i)^{-h}$ $\ddot{S}_{(C,d)n,i}$

Rentas perpetuas anticipadas:

No tienen sentido.

3.4. Rentas fraccionadas.

Las rentas fraccionandas son aquellas rentas en las que las variables que las caracteriazan no están expresadas en la misma unidad de tiempo. En los anteriores casos la unidad de tiempo ha sido siempre la misma para todas las variables.

En el caso de las rentas constantes fraccionadas siempre hasy tres variables que tener en cuenta:

- C: cuantía del capital.
- n: número de periodos.
- i: tipo de interés.

RENTAS CONSTANTES

Rentas constantes y pospagables:

$$C / i = C_m / i_m = C^m = i^m$$

Rentas constantes y prepagables:

$$C (1 + i) / i = C_m (1 + i) / i_m = C^m (1 + i) = i^m$$

RENTAS VARIABLES

Rentas variables en progresión aritmética:
(pospagable):

$$q = Q \text{ ; y en general: } a_j / i = a_{jm} / i_m$$

(prepagable):

$$q = Q \text{ ; y en general: } a_j (1 + i) / i = a_{jm} (1 + i) / i_m$$

Rentas variables en progresión geométrica:
(pospagable):

$$H/i = h/i_m \text{ ; y en general: } a_j / i = a_{jm} / i_m$$

(prepagable):

$$H(1 + i)/i = h (1 + i)/i_m \text{ ; y en general: } a_j (1 + i)/i = a_{jm}(1+ i) / i_m$$

ANEXO II: PROPUESTA DE EJERCICIOS DE EXÁMEN

- Hace 5 años el Sr. Gómez solicitó un préstamo de 200.000 euros a la entidad financiera Boncaja. Dicho préstamo debía ser reembolsado en 14 años mediante cuotas constantes trimestrales a un tipo de interés nominal capitalizable trimestralmente del 7%. Por motivos personales, no podrá hacer frente a los pagos trimestrales correspondientes al sexto año. Calcule:

a) Cuantía de cada uno de los pagos trimestrales realizados durante los cinco primeros años.

$$i_4 = \frac{7\%}{4} = 1{,}75\%$$

$200.000 = C \cdot a_{60}1{,}75\%$ $\boxed{C = 5{,}410{,}672037}$

b) Capital pendiente de amortización al principio del sexto año.

$S_{20} = C \cdot a_{40}1{,}75\% = 5.410{,}672037 \cdot 28{,}594229 = \boxed{154.713{,}9953\ €}$

c) Capital pendiente de amortización al principio del séptimo año.

$S_{24} = S_{20} \cdot (1 + i_4)^4 = 154.713{,}9953 \cdot (1 + 0{,}0175)^4 = 154.713{,}9953 \cdot$

$1{,}071859 = \boxed{165.831{,}5883\ €}$

d) El importe de las trimestralidades que tendrá que pagar a partir del próximo año para amortizar el préstamo al tipo de interés y en el tiempo inicialmente previsto.

$S_{24} = C' \cdot a_{36}1{,}75\%$ $165.831{,}5883 = C' \cdot 26{,}542753$

$\boxed{C' = 6.247{,}716215}$

.- El Sr. Rodríguez ha descontado un efecto comercial de nominal 5.000 euros y con vencimientos dentro de 60 días. La entidad financiera, tras aplicarle un descuento comercial, le ha entregado 4.950 euros. ¿Cuál ha sido el tipo de interés por vencido aplicado?

$N \cdot (1 - nd) = E$

$$5.000 \cdot \left(1 - \frac{60}{360} \cdot d\right) = 4.950$$

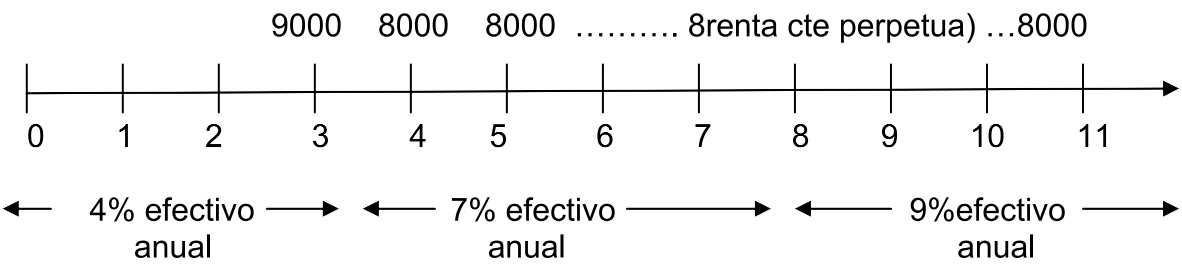
$$1-\frac{60}{360}\cdot d=0{,}99$$

$$0{,}01=\frac{60}{360}\cdot d$$ d =6%

$$N(1-nd)=\frac{N}{1+n\cdot i}$$
$$1-nd=\frac{1}{1+ni}$$
$$\frac{1}{1-nd}=1+ni$$
$$\frac{1}{1-nd}-1=ni$$
$$\frac{1-1+nd}{1-nd}=ni$$
$$i=\frac{0{,}06}{1-\frac{60}{360}\cdot 0{,}06}=6{,}06\% \qquad i=\frac{d}{1-nd}$$

$\boxed{\text{i= 6,06\%}}$

.- Determine el valor de esta renta en el punto CUATRO:



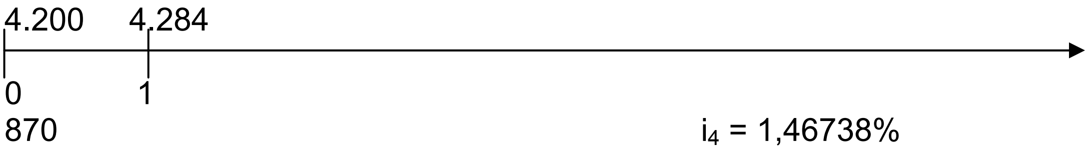
$$\frac{1}{4}=9.000\cdot(1{,}07)+8.000+8.000\cdot a_3 7\%+\frac{8.000}{0{,}09}\cdot(1{,}07)_{-3}$$

= 9.630 + 8.000 + 20.994,52836 + 88.888,88889 · $(1{,}07)^{-3}$ =

= 9.630 + 8.000 + 20.994,52836 + 72.559,81128 =

= $\boxed{\text{111.184,3396 €}}$

.- Se estima que una finca rústica va a generar las siguientes corrientes de cobros y pagos:
a) Cobros trimestrales prepagables crecientes geométrica y anualmente en un 2%, siendo el primero de cuantía 4.200 euros.
b) Pagos mensuales constantes pospagables de 870 euros.
Determine el valor de la finca utilizando un tipo de interés del 6% efectivo anual.

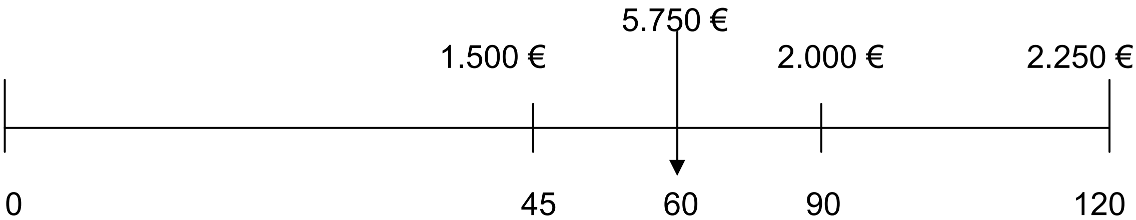


i_4 = 1,46738%
i_{12} = 0,486755%

$$V_o = \frac{4.200 \cdot a_4 i_4 \cdot (1+i)(1+i_4)}{1{,}06 - 1{,}02} - \frac{870}{i_{12}} = \frac{17.425{,}41277}{0.04} - \frac{870}{0{,}004867} =$$

$$= 435.635{,}3193 - 178.754{,}8798 = \boxed{256.880{,}4395\ €}$$

.- Un cliente tiene pendientes de pago con nuestra empresa tres efectos comerciales de 1.500, 2.000 y 2.250 euros que vencen dentro de 45, 90 y 120 días respectivamente. El cliente nos propone sustituir todos esos efectos por uno sólo de 5.750 euros y vencimiento 60 días. Sabiendo que el tanto de descuento comercial es del 6% anual, ¿debería la empresa aceptar la sustitución?.



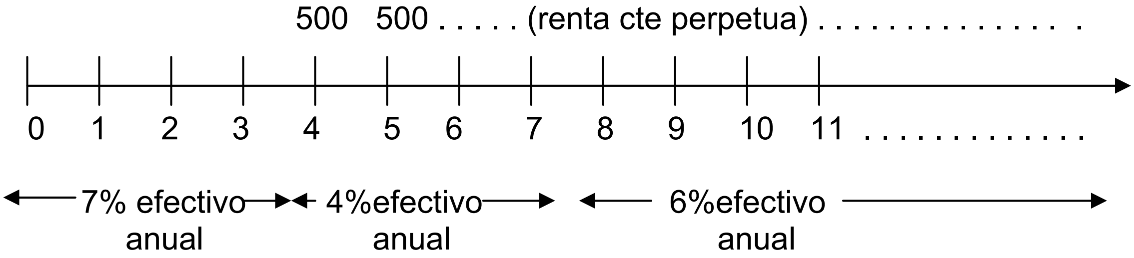
d = 6%

$$V_o = 1.500\left(1 - \frac{45}{360} \cdot 0{,}06\right) + 2.000\left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0{,}06\right) + 2.250\left(1 - \frac{120}{360} \cdot 0{,}06\right) = 1.488{,}75 + 1.970 + 2.205 =$$

= 5.663,75 €

$$V_ó = 5.750 \cdot \left(1 - \frac{60}{360} \cdot 0{,}06\right) = 5.692{,}5€$$

3.- Determine el valor de esta renta en el año DOS.



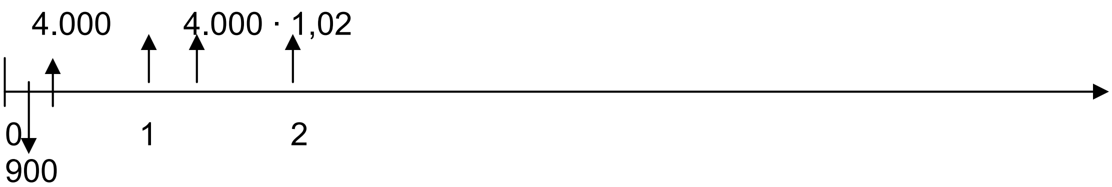
$$V_2 = 5.000 \cdot a_4 4\% \cdot (1{,}07)^{-1} + \frac{5.000}{0{,}06} \cdot (1{,}04)^{-4} (1{,}07)^{-1} =$$

= 5.000 · 3,629895 · 0,934579 + 83.333,33333 · 0,854804 · 0,934579 =

= 16.962,1182 + 66.573,48896 = $\boxed{83.535{,}60716 \text{ €}}$

- Se estima que una finca va a generar las siguientes corrientes de cobros y pagos:
- Cobros trimestrales pospagables crecientes geométrica y anualmente en un 2% el primero de cuantía 4.000 euros.
- Pagos mensuales constantes de 900 euros.

Determine el valor de la finca utilizando un tipo de interés del 6% efectivo anual.



V = cobros – pagos = 223.971,9188 €

$(1{,}06) = (1 + i_4)^4$ $\quad i_4 = 1{,}467385$ %

$$cobros = 4.000 \cdot a_4 i_4 \cdot (1+i) \cdot \frac{1}{1+i-q} =$$

$$= 4.000 \cdot a_4 1{,}467385\% \cdot (1{,}06) \cdot \frac{1}{1{,}06 - 1{,}02}$$

= 4.000 · 3,857450 · (1,06) · 25 = 408.890,76 €

$$pagos = \frac{900}{i_{12}} = \frac{900}{0{,}004867} = 184.918{,}8412 \text{€}$$

$(1,06) = (1 + i_{12})^{12}$ $\qquad$ $i_{12} = 0,486755\%$

$\boxed{223.971,9188\ €}$

.- Cierta empresa tiene contratada un línea de descuento con límite de 180.000 euros, y con las siguientes condiciones:

Tanto de descuento	
Días	% Anual
Hasta 180	8%
Resto	9%

Comisiones		Mínimo
Aceptado + Domiciliado	0,4%	10
No Aceptado + Domiciliado	0,5%	10
No Aceptado + No Domiciliado	0,6%	10

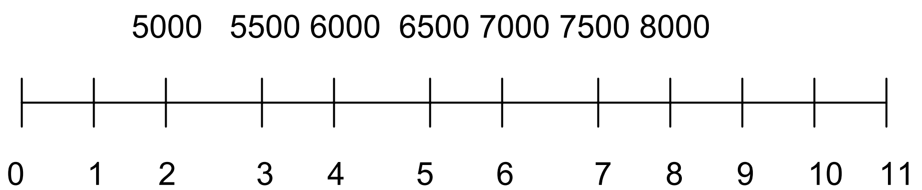
Hoy manda la siguiente remesa de efectos comerciales para que se la descuenten:

	Nominal	Días	Timbre	Características
E1	2.000	30	10	Aceptado + Domiciliado
E2	3.000	270	20	Aceptado + Domiciliado
E3	1.000	90	10	No Aceptado + Domiciliado

(a) Calcule la cuantía líquida que recibirá la empresa.

2.- El Sr. Francisco deposita 6.000 euros en una cuenta bancaria que abona un interés nominal capitalizable semestralmente del 6%. Cada semestre este Sr. Irá retirando 200 euros y la primera retirada de fondos tendrá lugar transcurridos 18 meses desde el depósito. ¿Durante cuántos semestres el Sr. Francisco podrá retirar la cantidad de 200 euros?

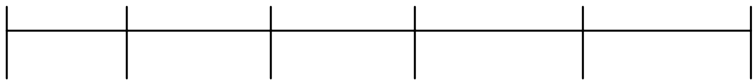
3.- Determine el valor en el momento 11 de esta renta temporal de 7 anualidades:



← 5% efectivo anual →← 9% efectivo anual →

.-Se invierten 6.000 euros durante 5 años, en una entidad que liquida intereses continuamente. Los tantos nominales anuales aplicados han sido del 4% durante el primer año, del 4,25% para el segundo y del 4,75% para el resto. Calcule el montante que se retirará al final de esta operación.

1)



0 1 2 3 4 5

6.000 €

j_∞ = 4% j'_∞ = 4,25% j''_∞ = 4,75 %

C_n = 6.000 · (1 + i) · (1 + i´) · (1 + i´´)^3 =

= 6.000 · (1,04081) · (1,043416) · (1,048646)^3 =

= $\boxed{7.513{,}925979 \text{ €}}$

i = e^{0,04} – 1 = 4,081 %
i´= e^{0,0425} – 1 = 4,3416 %
i´´ = e^{0,0475} – 1 = 4,8646 %

.- Para el mismo precio d = i, y el mismo plazo n, compara los valores descontados y los descuentos financieros que se obtien3n al aplicar las leyes simples redescuento comercial y descuento racional en una operación simple.

2)
d = i
n

$$C_{oc} = C_n \cdot (1 - nd)$$
$$C_{oR} = \frac{C_n}{(1 + ni)}$$

$$D_c = C_n \cdot n \cdot d$$
$$D_r = C_o \cdot n \cdot i$$

$$C_{oc} = C_n \cdot (1 - n \cdot i)$$
$$C_{oR} = C_n \cdot \frac{1 + ni - ni}{1 + ni}$$

$$D_c = C_n \cdot n \cdot i$$
$$D_r = \frac{C_n}{(1 + ni)} \cdot n \cdot i$$

$$\left.\begin{aligned} C_{oc} &= C_n \cdot (1-ni) \\ C_{oR} &= C_n \cdot \left(\frac{1-ni+ni}{1+ni}\right) \end{aligned}\right\rangle \qquad D_R = \frac{D_c}{(1+ni)}$$

$D_c > D_R$

$C_{oc} = C_n \cdot (1 - ni)$

$$C_{oR} = \frac{C_{oc}}{1+ni} + C_n \frac{ni}{(1+ni)}$$

$C_{oc} < C_{oR}$

Para descontar un efecto de nominal 6.000 euros y vencimiento dentro de 6 meses se está aplicando un tanto de interés anticipado del 6% anual. ¿Cuál sériale precio anual que tendrían que establecer si los intereses se corasen por vencido para obtener el mismo resultado?

3)

$$\left.\begin{aligned} A &= 6\% \\ ¿i&? \end{aligned}\right\rangle = C_o$$

$$\left.\begin{aligned} C_o &= C_n(1-nd) = 6.000\left(1-\frac{6}{12}\cdot 0{,}06\right) \\ C_o &= C_n \cdot (1+ni)^{-1} = 6.000 \cdot \left(1+\frac{6}{12}\cdot i\right)^{-1} \end{aligned}\right\rangle$$

$6.000\ (1 – 0{,}03) = 6.000 \cdot (\ 1+ 0{,}5 \cdot i)^{-1}$

$$0{,}97 = \frac{1}{1+0{,}5\cdot i}$$

$0{,}97 + 0{,}485 \cdot i = 1$ $\boxed{i = 6{,}185567\ \%}$

- Se establece una operación financiera mediante el siguiente intercambio de capitales:
- Prestación: (600, 0), (1.200, 3), (2.100, 5)
- Contraprestación: (1.860, 2), (1.200, 6), (C, 8)

Las dos partes han acordado aplicar la ley financiera compuesta con un tanto de interés por vencido del 5% para la unidad de tiempo en laque se han expresado los vencimientos de los capitales anteriores.

a) Calcula la cuantía C.

b) Determina e interpreta la reserva matemática calculada en el tiempo 4.

4)

0	1	2	3	4	5	6	7	8
prestamos								
600		1.860	1.200		2.100	1.200		C

i = 5%

a)

$$600+\frac{1.200}{(1{,}05)^{3}}+\frac{2.100}{(1{,}05)^{5}}=\frac{1.860}{(1{,}05)^{2}}+\frac{1.200}{(1{,}05)^{6}}+\frac{C}{(1{,}05)^{8}}$$

$$3.282{,}01=2.582{,}53+\frac{C}{(1{,}05)^{8}}$$

$$\boxed{C = 1.033{,}446\ €}$$

b)

$R_4 = 600\ (1{,}05)^4 + 1.200 \cdot (1{,}05) - 1.860 \cdot (1{,}05)^2 =$

$= -61{,}34625$ € Prestación < contraprestación

La operación se salda y el préstamo da al prestatario 61,34625 €

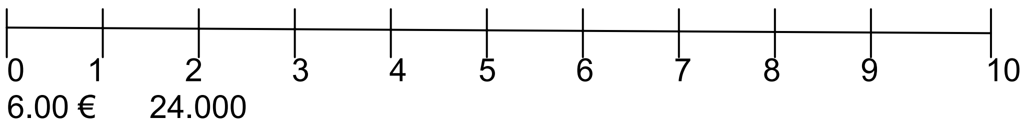
$R_4 = 2.100\ (1{,}05)^{-1} - 1.200\ (1{,}05)^{-2} - 1.033{,}446\ (1{,}05) = 61{,}346$ €

.- Una inmobiliaria tiene establecidas las siguientes condiciones de pago para la adquisición de una vivienda:

- Una pago al contado de 6.000 euros.
- 600 euros a finales de cada trimestre, desde la firma del contrato hasta la entrega de llaves que se efectuará dentro de dos años.
- En el momento de la entrega de llaves, además de la trimestralidad correspondiente, se exige un pago de 24.000 euros.
- Desde la entrega de llaves, y durante 8 años, se entregarán mensualidades pospagables de cuantía 500 euros.

Un comprador plantea a la constructora cambiar la forma de pago establecida por pagos mensuales inmediatos y pospagables, sin cambiar la duración de la operación. Este comprador quiere que las mensualidades sean constantes durante el año y se incrementen anual y geométricamente en un 3%. ¿Cuál sería el importe de cada mensualidad correspondiente al primer año si la constructora acepta el cambio valorando al 6% efectivo anual?

5)



i = 6%

Total a pagar = 6.000 + 600 · $a_{8}i_{4}$ + 24.000 · $(1 + i)^{-2}$ + 500 · $a_{96}i_{12}$ · $(1 + i)^{-2}$ =

= 6.000 + 4.497,943841 + 21.359,91456 + 34.062,47835 = $\boxed{65.920,33675\text{ €}}$

$(1 + i_4)^4 = 1,06$ $\quad i_4 = 1,46738\%$

$(1 + i_{12})^{12} = 1,06$ $\quad i_{12} = 0,486755\%$

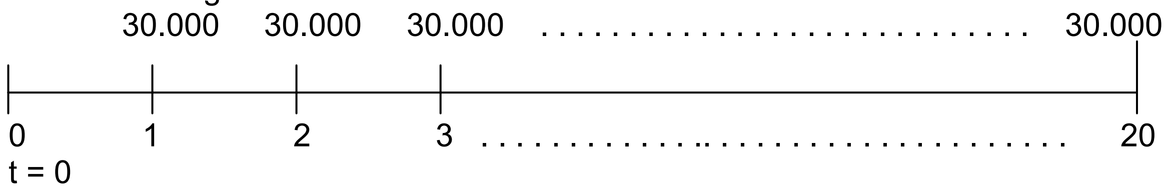
$$A_{10}^{4} = C_1 \cdot a_{12}i_{12} \cdot (1+i) \cdot \frac{1-q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$= C_1 \cdot 11,6288 \cdot 1,06 \cdot \frac{1-1,03^{10}(1,06)^{-10}}{1+i-q} =$$

=102,5419676 · C´$_1$

65.920,33675 = C´$_1$ · 102,5419675 $\quad \boxed{C´_1 = 642,862\text{ €/mes}}$

.- Dada la siguiente renta:



Señala las afirmaciones correctas:

a) $V_{t=0}$ = (30.000/i) – (30.000/i) $(1 + i)^{-20}$
b) $V_{t=0}$ = 30.000 $a_{20/i}$ $(1 + i)^{20}$
c) $V_{t=0}$ = 30.000 $a_{20/i}$
d) $V_{t=0}$ = 50.000 $a_{20/i}$ – 20.000 $a_{20/i}$
e) $V_{t=0}$ = 30.000 $a_{20/i}$
f) Ninguna de las anteriores

6)

a) verdadera
b) verdadera
c) falsa
d) verdadera
e) falsa

i = 3%

V = 30.000 · a no se ve = 446.324,25

$$V = \frac{30.000}{0,03} - \frac{noseve}{0,03}(1,03)^{-20} =$$

= 1.000.000 – 553 no se ve

a)

$$Vt = 0 = \frac{30.000}{i} - \frac{30.000}{i}(1+i)^{-20} = \frac{30.000}{i}\left(1-(1+i)^{-20}\right) =$$

$$= 30.000\frac{1-(1+i)^{-20}}{i} = 30.000 \cdot a_{20} i$$

.- Una entidad financiera ofrece a sus clientes depósitos a plazo fijo por 1 o 2 años sobre los que pagarán intereses continuamente. Los tipos de interés nominales que ofreció hace un año para esta clase de operaciones fueron del 3% para los depósitos a 1 año y de 3,25% para los depósitos a 2 años. Un inversor, que disponía hace un año de 6.000 € , contrató un depósito a 1 año. Hoy, decide reinvertir la cuantía obtenida con el depósito anterior junto con 3.000 € más en una operación del mismo tipo pero a plazo de 2 años. Actualmente los tipos de interés nominales ofrecidos por el banco son el 3,25% para los depósitos a 1 año, y el 3,5% para los depósitos a 2 años. ¿Qué cuantía retirará cuando termine su inversión?

6.000 3.000

t = 0 1 2 3 (años)

$j_\infty = 3\%$ $j_\infty = 3{,}5\%$

$$S_3 = \left[\frac{6.000 \cdot e^{0{,}03 \cdot 1}}{0{,}25} + 3.000 \right] e^{0{,}035 \cdot 2} = 9.842{,}55\ €$$

.- Determine en el punto Dos el valor de la siguiente renta:

9000 8000 8000.....................(renta constante).......................8000.....

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11........

← 4% efectivo anual ↔ 7% efectivo anual → ← 9%efectivo anual →

$$V_{t=2} = \left[9000 + 8000 \cdot a_{4|7\%} + \frac{8000}{0{,}09} \cdot (1{,}07)^{-4} \right] \cdot (1{,}04)^{-1} =$$

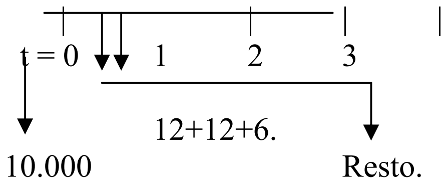
$$= [9000 + 27.097{,}69 + 67.812{,}90774] \cdot 0{,}961538461 =$$

$$= 99.914{,}03623$$

Un Sr. posee un terreno en el cual desea constituir una casa. Las condiciones que establece son dos: por un lado, quiere que el coste ascienda a 120.00 € ; por otro, que la construcción dure 3 años. Esta tarde firmara el contrato con una empresa constructora que está dispuesta a aceptar esas condiciones y que le exigirá los siguientes pagos:

- En el momento de la contratación le exige 10.000 €
- Transcurridos seis meses, tendrá que abonar 300€ mensuales que irán aumentando geométricamente al 0,75% mensual.
- Al finalizar la obra el resto.

Determine la cantidad que tendrá que entregar cuando finalice la construcción de la casa si se utiliza un tipo de interés del 9% anual efectivo.

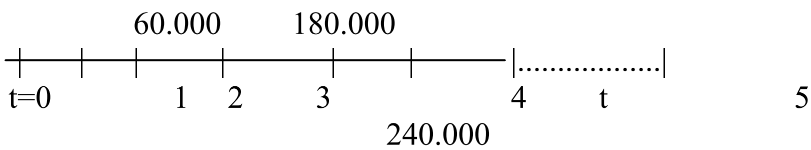


$i = 9\%$
$\Downarrow$
$V_{12} = 0{,}7207323\%$

$$12.000 = 10.000 + 300 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1{,}0075}{1{,}007207323}\right)^{30}}{1{,}007207323 - 1{,}0075} \cdot (1{,}007207323)^{-6}$$
$$+ \operatorname{Resto}(1{,}007207323)^{-36} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 110.000 = 8594{,}910546 + R \cdot 0{,}772183488 \Rightarrow R = 131.322{,}5302$$

.- Una empresa tiene las siguientes deudas con un banco: 60.000 € con vencimiento a 2 años y 180.000 € con vencimiento a 5 años. Hoy, cuando la tasa de interés en el mercado para este tipo de operaciones es del 6% nominal convertible mensualmente, decide liquidarlas mediante un pago único de 240.000 € ¿ En que tiempo deberá entregar esta cuantía?

Simple : 0,5



$j_{12} = 6\%$
$i_{12} = 0{,}5\%$
$\Downarrow$
$i = 6{,}2677812\%$

$$60.000 \cdot (1{,}061677812)^{-2} + 180.000(1{,}061677812)^{-5} = 186.678{,}14$$

$$240.000(1{,}061677812)^{-t} = 186.678{,}14$$
$$\log(0{,}777825583) = -t \log(1{,}06677812)$$
$$t = 4{,}198 \text{ años}$$

.- Una empresa tiene contratada una póliza de crédito con liquidaciones trimestrales, y en las siguientes condiciones.

- Límite: 60.000€
- Tipo de interés deudor: 6% (360)
- Tipo de interés excedido: 15%(360)
- Tipo de interés acreedor: 0,1% (365)
- Retención : 18%
- Comisión de excedido: 1% (sobre el mayor excedido contable)
- Comisión de disponibilidad: 0,5% (sobre el saldo medio no dispuesto)
- Comisión de apertura: 1%

El saldo deudor a 31/03/03, fecha en la que se realizó la última liquidación, ascendía a 40.000€. Los movimientos realizados durante el trimestre abril- junio han sido los siguientes:

15/04/03...15.000(D)
20/04/03...10.000(D)
26/05/03...25.000(H)
15/06/03...5.000(D)

Calcula el saldo de la póliza a 31/06/03.

	Saldo	Movimiento
31/03/03	40.000 (D)	
15/5/03	55.000(D)	15.000 (D)
20/4/03	65.000 (E)	10.000 (D)
15/5/03	40.000 (D)	25.000 (H)
15/6/03	45.000 (D)	5.000 (D)

Fecha	Saldo	Días	NCSD	NCSE
31/3/03	40.000 (D)	15	6.00	
15/4/03	55.000 (D)	5	2.750	
20/4/03	65.000 (E)	25	15.000	1.250
15/5/03	40.000 (D)	31	12.400	
15/6/03	45.000 (D)	15	6.750	
30/6/03		91	42.900	1.250

SMD= $42.900 \cdot {}^{100}\!/_{91} = 47.142,85714$

SMND=60.00-SMD=12.857,14286

$$S_{30/06/03} = 45.000 + 42.900 \cdot 100 \cdot \frac{0,06}{360} + 1.250 \cdot 100 \cdot \frac{0,15}{360} + 0,01 \cdot 5.000 + 64,2857 =$$
$$= 45.881,369 \text{ €}$$

Durante los últimos 5 años hemos venido imponiendo mensualmente el 20% de nuestro sueldo en la cuenta de ahorro de cierta entidad bancaria que capitaliza los intereses mensualmente a un 3% de interés nominal. Si suponemos que el sueldo ha aumentado anualmente en progresión geométrica a un 0,5% calcule el sueldo mensual durante el primer año en caso de haber ingresado también las pagas extras (extras: 31- junio y 31-diciembre) y sabiendo que el capital constituido ha ascendido a 40.000 €.

t = 0 1 2 3 4 5

40.000 €

$$j_{12} = 3\% \Rightarrow \begin{cases} i_{12} = 0{,}25\% \\ i_2 = 1{,}509406\% \end{cases}$$

q =1,005 (anual)

i = 3,0415957%

$$0{,}2 \cdot S_1 \cdot s_{12|i_{12}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1{,}005}{1+i}\right)^5}{1+i-1{,}005} + S_1 \cdot s_{2|i_{12}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1{,}005}{1+i}\right)^5}{1+i-1{,}005} = 40.000 \cdot (1+i)^{-5}$$

$\Downarrow$ 12,166383 $\quad\Downarrow$ 2,015094 $\quad\Downarrow$ 0,86086

$$20{,}546423 \cdot S_1 = 34.434{,}76$$

$$S_1 = 1.675{,}95\ €$$

Determine en el punto SIETE el valor de la siguiente renta:

9000 5000 5000................................ (valor constante perpetua)..........................5000.........

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11.........

4%efectivo anual 6%efectivo anual 8%efectivo anual

$$V_{t=7} = 9000(1{,}04)^3(1{,}06)^4 + 5000(1{,}04)(1{,}06)^4 + 5000 \cdot S_{5|6\%} + \frac{5000}{0{,}08} = 110.031{,}37\,€$$

Una empresa tiene contratada una póliza de crédito con liquidaciones semestrales, y en las siguientes condiciones.

- Límite: 30.000€
- Tipos de interés: Deudor:5% (360), Excedido :10% (360), Acreedor; 0,1% (365)
- Retención: 18%

- Comisión de excedido. 1,5%(sobre el mayor excedido contable)
- Comisión de disponibilidad: 1% (sobre el saldo medio no dispuesto)
- Comisión de apertura: 1,5%

El saldo deudor a 31/12/02, fecha en la que se realizó la última liquidación, ascendía a 5.000€. los movimientos realizados durante el primer semestre del año 2003 han sido los siguientes:

10/03/03......................................4.500(D)
15/04/03......................................10.000(H)
5/05/03..25.000(D)
20/06/03.......................................10.000(D)

calcule el saldo de la póliza a 30/06/03.

Fecha	Movimiento	Saldo	Días	NCSD	NCSE	NCSA
31/12/02		5.000 (D)	69	345.000		
10/03/03	4.500 (D)	9.500 (D)	36	342.000		
15/04/03	10.000 (H)	500 (H)	20			10.000
5/05/03	25.000 (D)	24.500 (D)	46	1.127.000		
20/06/03	10.000 (D)	34.500 (E)	10	300.000	45.000	
30/06/03 LIQUID.			181	2.114.000	45.000	10.000

$$I_a = 10.000 \cdot \frac{0{,}001}{365} = 0{,}03(H) \rightarrow \mathrm{Re}t = 0{,}18 \cdot 0{,}03 = 0{,}005 \text{€ (D)}$$

$$I_d = 2.114.000 \cdot \frac{0{,}05}{360} = 293{,}61(D)$$

$$I_e = 45.000 \cdot \frac{0{,}1}{360} = 12{,}5(D) \qquad C_{exced} = 0{,}015 \cdot 4.500 = 67.5(D)$$

$$SMD = \frac{2.114.000}{181} = 11.679{,}56 \Rightarrow SMND = 18.320{,}44$$

$$C_{dispon} = 0{,}01 \cdot 18.320{,}44(D)$$

34.500-0,03+0,005+293,6+12,5+67,5+183,20=35.056,78 € (E)

.- Determine el tipo de interés nominal convertible trimestralmente que produce un rendimiento efectivo anual del 5%.¿Qué tasa nominal continua se debería aplicar para obtener los mismos resultados?

$$1{,}05 = (1 + i_4)^4 \Rightarrow i_4 = 1{,}2272234\% \Rightarrow j_4 = 4 \cdot i_4 = 4{,}9088937\%$$

$$1{,}05 = e^{j\infty} \Rightarrow j_\infty = L_n(1{,}05) \Rightarrow j_\infty = 4{,}8790164\%$$

(2 puntos)

1. Se contrata un préstamo en las siguientes condiciones:

- Nominal: 100.000 €
- Amortización mediante semestralidades constantes al 5% de interés efectivo anual y en 10 años.
- Comisiones: apertura = 1% sobre el nominal ; Estudio = 250€
- Gastos iniciales de notaria =500€
- Comisión por cancelación anticipada: 1 %

Determine:

a) Cuantía de la semestralidad que amortiza el préstamo.

b) Deuda pendiente pasados 3 años desde el momento de la contratación .

c) Si usted considera que los pagos semestrales son muy altos, ¿cuánto dinero debería entregar a finales del quinto año (adicional al pago de ese período) para reducir la cuantía semestral de los últimos 5 años en 500 €?

d) Coste efectivo de la operación conjunta.

$c_0 = 100.000 \qquad n = 10 \qquad i = 5\% \Rightarrow i_2 = 2,4695077\%$

a) $100.000 = \propto \cdot a_{20|i_2} \Rightarrow \propto = 6.396,25$

b) $D_6 = 6.396,25 \cdot a_{14|i_2} = 74.936,17$

c) $D_{10} = 6.396,25 \cdot a_{10|i_2} = 56.068,70$

$56.068,70 - c = 5.896,25 \cdot a_{10|i_{12}} = 51.685,76 \Rightarrow c = 4.382,94$

d) 100.00

t = 0 6.396,25 10 5.896,25 20

(semestres)

$\Downarrow$

1000

+

250

+

500

4.382,94+43,83

$$100.000 - 1000 - 250 - 500 = 6.396,25 \cdot a_{10|ie_2} + 4.382,64 \cdot (1 + ie_2)^{-10} + 43,83 \cdot (1 + ie_2)^{-10} +$$
$$+ 5.896,25 \cdot a_{10|ie_2} \cdot (1 + ie_2)^{-10}$$

El propietario de un terreno decide ponerlo a la venta por un valor de 45.000€. Este propietario ofrece dos modalidades de pago teniendo todas ellas en común el tipo de interés anual efectivo del 6% y la duración de la financiación de 6 años. La primera oferta consiste en 48 pagos mensuales pospagables que aumentan en progresión aritmética anualmente en 70 € y un pago al final del año 6, siendo la primera mensualidad de 500€. La segunda oferta consiste en 14 pagos trimestrales pospagables de 2.000 € y una cantidad al término de la operación. Calcule la cantidad que cancela la operación en cada una de las ofertas.

$$i_6 = 6\% \Rightarrow i_4 = 1{,}4673846\% \Rightarrow i_{12} = 0{,}4867551\%$$

(1ª) $$45.000 = 6.163{,}26 \cdot a_{4|6\%} + \frac{862{,}86}{0{,}06} \cdot a_{4|6\%} - \frac{4 \cdot 862{,}86}{0{,}06} \cdot (1{,}06)^{-4} + c_1$$

$$s_{12|i_{12}} = 12{,}326528 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 500 \cdot s_{12|i_{12}} = 6.163{,}26 \\ d = 70 \cdot s_{12|i_{12}} = 862{,}86 \end{cases}$$

$$a_{4|6\%} = 3{,}465106$$

$$19.376{,}36 = o_1 (1{,}06)^{-6} \Rightarrow o_1 = 27.485{,}74$$

(2ª) $$45.000 = 2000 \cdot a_{14|i_4} + o_2 (1{,}06)^{-6} \Rightarrow o_2 = 28.164{,}17$$

.- El 01-04-02 el Sr. Prestice impuso un capital de 10.000€ en una entidad que le devolverá 12.317,52€ al final de la operación. Si se sabe que los intereses generados en el último trimestre ascienden a 182,03€, determine:

- **a)** El tanto nominal anual capitalizable trimestralmente.
- **b)** La duración de la operación.

a)

$$c_n = c_{n-1} + I_n \Rightarrow 12.317{,}52 = c_{n-1} + 182{,}03 \Rightarrow c_{n-1} = 12.135{,}49\,€$$

$$c_n = c_{n-1}(1 + i_4) \Rightarrow 12.317{,}52 = 12.135{,}49(1 + i_4) \Rightarrow i_4 = 1{,}5\%$$

$$j_4 = 4 \cdot i_4 \Rightarrow j_4 = 4{,}15\% = 6\%$$

b) $$C_n = c_0 (1 + i_4)^n \Rightarrow 12.317{,}52 = 10.000(1{,}015)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}231752 = 1{,}015^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 1{,}231752}{\log 1{,}015} = 14 trimestres$$

n = 3 años y 2 trimestres.

.- La entidad financiera Dorada nos va a descontar un efecto de nominal 6.000€, cuyo vencimiento es a 180 días, a un tanto de descuento anual simple del 9%. ¿Deberíamos proponerle a esta entidad que nos aplique un 9,03% de interés simple anual?. Razone la respuesta.

N = 6.000€

0 180 días

d = 9%
i = 9,03%

$$c_{0d} = c_n \cdot (1 - nd) \Rightarrow c_{0d} = 6.000\left(1 - \frac{180}{360} \cdot 0{,}09\right) = 5.730\,€$$

$$c_{oi} = \frac{c_n}{(1+ni)} = \frac{6.000}{\left(1 + \frac{180}{360} \cdot 0{,}0903\right)} = 5.740{,}80$$

Sí, porque de esa manera el efectivo que no tendría que entregar sería mayor.

.- Desde el día en que el Sr. Aquarium cumplió 55 años comenzó a ingresar 300€ trimestrales en una cuenta. El día que cumplió 70 años decidió que no ingresaría los 300€, sino que gastaría parte del dinero acumulado celebrando una fiesta con sus amigos. Lo pasaron tan bien ese día, que decidió repetir la fiesta cada mes. Si dicho Sr. murió el día en que debía haber celebrado su 75 cumpleaños y en ese momento el saldo de su cuenta ascendía a 1.000€, ¿cuánto dinero retiró para celebrar cada fiesta si suponemos que en todas se gastó lo mismo? Considere un 10% de interés anual.

300€
1.000€

55 años 56 57 59 70 71
74 75

i =10%

$$S_{70} = 300 \cdot a_{60|i_4} \cdot (1+i_4) \cdot (1+i)^{15} = 40.493{,}75\,€$$

$$(1{,}10) = (1+i_4)^4 \Rightarrow i_4 = 2{,}41\%$$

$$A_{70} = c \cdot a_{60|i_{12}} \cdot (1+i_{12}) = c \cdot 74{,}88$$

$$(1{,}10) = (1+i_{12})^{12} \Rightarrow i_{12} = 0{,}8\%$$

$$S_{70} = A_{70} + 1000(1{,}10)^{-5} \Rightarrow 40.493{,}75 = c \cdot 47{,}88 + 620{,}92 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = 832{,}77\,€$$

.- El Sr. Blas es propietario de una finca que genera la siguiente corriente de tesorería:

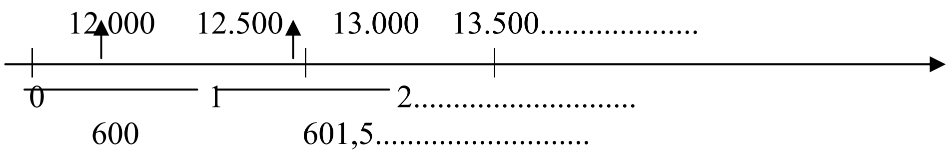
a) Cobros semestrales pospagables crecientes aritméticamente en 500€ (cada semestre), siendo el primero de cuantía 12.000€
b) Pagos mensuales prepagables crecientes geométricamente en un 0,25% anual, siendo el primero de cuantía 600€

El Sr. Blas y el Sr. Lucio han decidido celebrar un contrato de compraventa que presenta las siguientes notas:

a) El Sr. Blas es el vendedor y el Sr. Lucio es el comprador.
b) El objeto de este contrato es una finca.
c) El precio vendrá determinado por:
   - Un conjunto de capitales con vencimiento trimestral y variables geométricamente en un 2% anual.

   La cuantía del primer capital ascenderá a 5.000€ y tendrá lugar transcurridos los dos primeros meses desde la firma del contrato, mientras que el último capital tendrá que desembolsarse transcurridos 8 años y 11 meses de la firma.
   - Un capital en el momento de la firma que Usted debe determinar para que las partes estén dispuestas a celebrar el contrato.

   Considere un tipo de interés del 6% efectivo anual.



i = 6%

valor actual de la finca = cobros – pagos =

$$= \left[c_1 + \frac{d}{i_2} \right] \cdot \frac{1}{i_2} - c_1 \cdot a_{12|i_{12}} \cdot (1+i_{12}) \cdot (1+i) \cdot \frac{1}{1+i-q} =$$

$$= \left[12.000 + \frac{500}{0{,}0296} \right] \cdot \frac{1}{0{,}0296} - 600 \cdot a_{12|0{,}49\%} \cdot (1{,}0049) \cdot (1{,}06) \cdot \frac{1}{1{,}06 - 1{,}0025} =$$

$$(1{,}06) = (1+i_2)^2 \Rightarrow i_2 = 2{,}96\%$$

$$(1{,}06) = (1+i_{12})^{12} \Rightarrow i_{12} = 0{,}49\%$$

=976.077,43 – 7.027,25 =969.050,18€

5.000 5.100...
5.858,3

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$A''_q = c_1 \cdot a_{4|i_4} \cdot (1+i_4)^{1/3} \cdot (1+i) \cdot \frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} =$$

$$= 5000 \cdot a_{4|1,47\%}(1{,}0147)^{1/3}(1{,}06) \cdot \frac{1-1{,}02^9 \cdot (1{,}06)^{-9}}{1{,}06-1{,}02} =$$

$$= 20.542{,}91 \cdot 7{,}32 = 150.374{,}10\,€$$

$$(1{,}06) = (1+i_4)^4 \Rightarrow i_4 = 1{,}47\%$$

969.050,18 =150.374,10 + C $\Rightarrow$ C = <u>818.676,08€</u>

.- El 01-07-02 el Sr. Prestice colocó en una cuenta bancaria un capital durante 5 años al 7% de interés nominal anual capitalizable bimestralmente. Si se sabe que el interés producido en el último bimestre será de 1.200€, determine el capital invertido.

01/07/02 01/05/07 01/07/07

C_0 1.200€

$$j_6 = 7\% \Rightarrow i_6 = 1{,}167\%$$

$$I_{30} = C_{29} \cdot i_6 \Rightarrow 1.200 = C_{29} \cdot 0{,}01167 \Rightarrow C_{29} = 102.857{,}14\,€$$

$$C_{29} = C_0 \cdot (1+i_6)^{29} \Rightarrow 102.857{,}14 = C_0 \cdot (1{,}01167)^{29} \Rightarrow C_0 = 73.469{,}51€$$

.- La Sr. Dorada está dispuesta a prestarnos 5.000€ a un 8% por anticipado. Nosotros le hemos propuesto pagarle un 8,2% por vencido. Si la operación dura 10 meses, ¿debería la Sra. Dorada aceptar nuestra oferta?. Razone la respuesta.

$d = 8\%$

$C_0 = 5.000$

$i = 8{,}2\%$

$n = 10 meses$

$$c_n = c_0 + nd \cdot c_n \Rightarrow c_n - nd \cdot c_n = c_0 \Rightarrow c_n \cdot (1 - nd) = c_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{c_0}{(1 - nd)} \Rightarrow c_n = \frac{5000}{1 - \frac{10}{12} \cdot 0{,}08} = 5.357{,}14$$

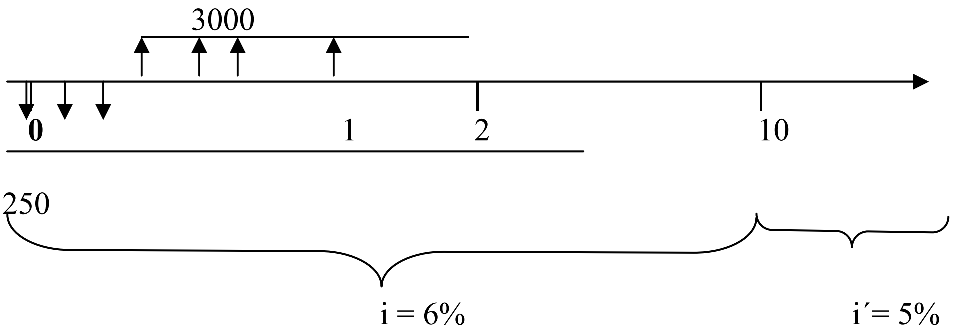
$$c_n = c_0 + ni \cdot c_0 \Rightarrow c_n = c_0 \cdot (1 + ni) \Rightarrow c_n = 5000 \cdot \left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}082\right) = 5.341{,}67$$

No, porque recibiría menos cantidad.

.- El Sr. Blas es propietario de una finca que genera la siguiente corriente de tesorería:

- Cobros trimestrales pospagables de 3000€
- Pagos mensuales prepagables de 250€

Si dicho Sr. ha decidido ponerla en venta, determine cuánto debería pedir por ella. Considere un tipo de interés efectivo anual del 6% para los 10 primeros años y de un 5% para los restantes.



Valor de la finca =

$$P_v = 3000 \cdot a_{40|i_4} - 250 \cdot \ddot{a}_{120|i_{12}} + \frac{3000}{i'_4} \cdot (1+i)^{-10} - \frac{250}{i'_{12}} \cdot (1 + i'_{12})(1+i)^{-10} =$$

$$= 90.290{,}50 - 22.681{,}76 + 136.504{,}59 - 34.405{,}36 = 169.707{,}97$$

$$(1{,}06) = (1 + i_4)^4 \Rightarrow i_4 = 1{,}467\%$$

$$(1{,}06) = (1 + i_{12})^{12} \Rightarrow i_{12} = 0{,}4867\%$$

$$(1{,}05) = (1 + i'_4)^4 \Rightarrow i'_4 = 1{,}2272\%$$

$$(1{,}05) = (1 + i'_{12})^{12} \Rightarrow i'_{12} = 0{,}4074\%$$

ANEXO III: PRESENTACIÓN DESDE EL TEMA 6

Programa sintético

Tema 1. - Conceptos básicos

Tema 2. - Leyes financieras simples de capitalización y descuento

Tema 3. - Leyes financieras compuestas de capitalización y descuento

Tema 4. - Introducción al estudio de rentas

Tema 5. - Rentas constantes en capitalización compuestas

Tema 6. - Rentas variables en capitalización compuesta

Tema 7. - Rentas continuas

1

Programa analítico

Tema 1. - Conceptos básicos

1.1. Capital financiero
1.2. Operaciones financieras
1.3. Leyes financieras: propiedades
1.4. Sistema financieros
1.5. Equivalencia entre capitales financieros
1.6. Operaciones con capitales financieros
1.7. Factores financieros, réditos y tantos.
1.8. Reserva matemática en una operación financiera
1.9. Características comerciales, tanto efectivos y TAE en una operación financiera

1

Tema 2. - Leyes financieras simples de capitalización y descuento

2.1. Capitalización simple o tanto vencido

2.2. Descuento simple racional

2.3. Descuento simple comercial

2.4. Capitalización simple a tanto anticipado

2.5. Comparación entre las distintas leyes

2.6. Cambio en las unidades de medida: tantos equivalentes

2.7. Operaciones que se suelen realizar utilizando las leyes simples

1

Tema 3. - Leyes financieras compuestas de capitalización y descuento

3.1. Capitalización compuesta a tanto vencido

3.2. Descuento compuesto a tanto por vencido

3.3. Capitalización y descuento compuesto a tanto anticipado

3.4. Comparación entre las leyes simples y las leyes compuestas

3.5. Cambio en las unidades de medida: tantos equivalentes

3.6. Tanto nominal y tanto efectivo

3.7. Capitalización y descuento continuos

3.8. Operaciones que se suelen realizar utilizando las leyes compuestas

Tema 4. - Introducción al estudio de rentas

4.1. Definición y clasificación de rentas

4.2. Valoración de rentas con las leyes simples

4.3. Valoración de rentas con las leyes compuestas

1

1

TEMA 6 : RENTAS VARIABLES VALORADAS CON CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

6.1. Rentas geométricas temporales

6.2. Rentas geométricas perpetuas

6.3. Rentas geométricas fraccionadas

Se caracterizan porque sus términos varían en progresión geométrica, esto es:

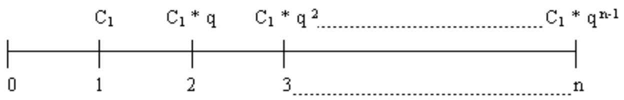
C_1
$C_2 = C_1 * q$
$C_3 = C_2 * q = C_1 * q^2$

$C_n = C_{n-1} * q = C_1 * q^{n-1}$

, donde **q>0** y representa la razón dela progresión geométrica.

1

Renta temporal, inmediata y postpagable:



$$A_n'' = VA = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + C_1 \cdot q \cdot (1+i)^{-2} + C_1 \cdot q^2 \cdot (1+i)^{-3} + \ldots + C_1 \cdot q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n} =$$

$$= C_1 \cdot [\underbrace{q^0 \cdot (1+i)^{-1} + q \cdot (1+i)^{-2} + q^2 \cdot (1+i)^{-3} + \ldots + q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}}]$$

Suma de los términos de una progresión geométrica de razón $\mathbf{r = q\,(1+i)^{-1}}$

Siendo, $S = \dfrac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$

Observaciones
$a_1 = q^0 \cdot (1+i)^{-1}$
$a_n = q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}$
$r = q \cdot (1+i)^{-1}$

1

$$S = \frac{q^0 \cdot (1+i)^{-1} - q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n} \cdot q \cdot (1+i)^{-1}}{1-q \cdot (1+i)^{-1}} = \frac{(1+i)^{-1} \cdot [1 - q^n (1+i)^{-n}]}{1-q \cdot (1+i)^{-1}} = \quad *1$$

$$*1 \longrightarrow 1 - q \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-q}{1+i}$$

$$= \frac{\cancel{(1+i)^{-1}} \cdot [1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}]}{(1+i-q) \cdot \cancel{(1+i)^{-1}}} = \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

Casos posibles

A) $q \neq 1+i$

$$A_n'' = \boxed{VA = C_1 \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}, \text{ siempre que } q \neq 1+i}$$

B) Si $q = 1+i$

1

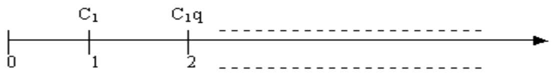
$A_n'' = VA = C_1 \cdot [q^0 \cdot (1+i)^{-1} + q \cdot (1+i)^{-2} + ... + q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}] =$

$= C_1 \cdot [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-1} + ... + (1+i)^{-1}] = C_1 \cdot n \cdot (1+i)^{-1} = C_1 \cdot \frac{n}{1+i}$

$C_1 \cdot \frac{n}{1+i}$	, siempre que $q = 1+i$

$S_n'' = \boxed{VF = VA \cdot (1+i)^n} = A_n'' \cdot (1+i)^n$

Renta perpetua, inmediata y postpagable



1

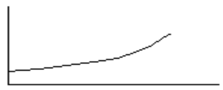
$\boxed{q \neq 1+i}$

$A_\infty'' = VA = \lim_{n \to \infty} C_1 \cdot \frac{1+q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} = \lim_{n \to \infty} C_1 \frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)}{1+i-q}$

Casos posibles

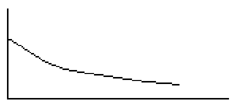
A) Si $q > 1+i$, la función es divergente

$\left(\frac{q}{(1+i)}\right)^n$



B) Si $q < 1+i$, la función convergente a cero

$\left(\frac{q}{(1+i)}\right)^n$



1

✳ Sólo es posible determinar el VA si $q < 1+i$

$$A_\alpha\text{''} = \boxed{VA = C_1 \cdot \frac{1}{1+i-q} \text{ , siempre que } q < 1+i}$$

Único caso en el que existe VA para la renta perpetua.

$\boxed{q = 1+i}$

$$A_\alpha\text{''} = VA = \lim_{n\to\alpha} C_1 \frac{n}{1+i} =$$

La función es divergente, luego tampoco es posible determinar el VA.

6.4. Rentas aritméticas temporales
6.5. Rentas aritméticas perpetuas
6.6. Rentas aritméticas fraccionadas

1

Se caracterizan porque la cuantía de sus términos varían en progresión aritmética, esto es:

C_1
$C_2 = C_1 + d$
$C_3 = C_2 + d = C_1 + 2\,d$

$C_n = C_{n-1} + d = C_1 + (n-1)\cdot d$

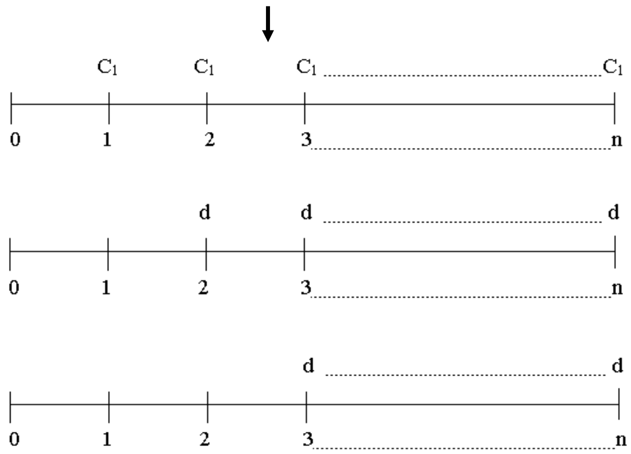
✳Donde d puede ser + ó – pero siempre, $C_1 + (n-1) \cdot d > 0$ ➔
C_1n-1 ➔ $d > -\frac{C_1}{n-1}$

Renta temporal, inmediata y postpagable

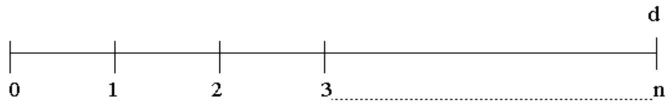
	C_1	$C_1 + d$	$C_1 + 2\,d$	....	$C_1 + (n-1)$
0	1	2	3	....	n

1

✳Desarrollado en varias gráficas es: (desarrollo de la renta en una gráfica temporal)



1



Analíticamente lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$A_n' = C1 \cdot a_{n\rceil i} + d\cdot a_{n-1\rceil i}\,(1+i)^{-1} + d \cdot a_{n-2\rceil}\,(1+i)^{-2} + d\cdot a_{1\rceil i}\,(1+i)^{-(n-1)}$$

$$= C1\, a_{n\rceil i} + d \cdot \sum_{K=1}^{n-1} a_{n-k\rceil i} \cdot (1+i)^{-1} \longrightarrow \ast 2$$

✳2 ⟶ Desarrollo de la expresión:

$$a_{n-k\rceil i} \cdot (1+i)^{-k} = \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} \cdot (1+i)^{k} = \frac{(1+i)^{-k} - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{-k}}{i} - \frac{(1+i)^{-n}}{i}$$

2

1

$$= A_n' = C_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + d \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{(1+i)^{-k}}{i} - \frac{(1+i)^{-n}}{i} \right] =$$

$$= C_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left[(1+i)^{-k}\right] \frac{d}{i} \cdot (1+i)^{-n} \cdot (n-1) =$$

$$= C1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left[(1+i)^{-k}\right] - \frac{d}{i} \cdot (1+i)^{-n} \cdot n + \frac{d}{i} \cdot (1+i)^{-n} =$$

$$= C_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (1+i)^{-k} - \frac{d \cdot n}{i} \cdot (1+i)^{-n} =$$

$$= \boxed{C_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{n \cdot d}{i} \cdot (1+i)^{-n}}$$

1

$$A_n' = C_1 \cdot a_{\overline{n}|i} - \underbrace{\frac{n \cdot d}{i} \cdot (1+i)^{-n} + \frac{n \cdot d}{i}}_{n \cdot d \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = n \cdot d \cdot a_{\overline{n}|i}} - \frac{n \cdot d}{i}$$

$$\boxed{A_n' = \left(C_1 + \frac{d}{i} + n \cdot d\right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{n \cdot d}{i}}$$

$$\boxed{S_n' = A_n' \cdot (1+i)^n}$$

Renta temporal aritmética:

$$A_n = \left[C_1 + \frac{d}{i} + n \cdot d \right] a_{\overline{n}|i} - \frac{n \cdot d}{i}$$

1

Renta aritmética perpetua, inmediata y postpagable

$$A_\alpha' = \lim_{n \to \alpha} A_n' = \lim_{n \to \alpha} = \left[C_1\, a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{n \cdot d}{i} (1+i)^{-n} \right] =$$

$$= C_1 \cdot \frac{1}{i} + \frac{d}{i} \cdot \frac{1}{i} = \boxed{\left[C_1 + \frac{d}{i} \right] \cdot \frac{1}{i}}$$

Aclaraciones Analíticas

A) Rentas Perpetuas

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \ C_1 \cdot a_{\overline{n}|i} \to C_1\, \frac{1}{i} \\ \lim_{n \to \alpha} \\ \\ 2.\ \ \frac{d}{i}\, a_{\overline{n}|i} \to \cdot\, \frac{d}{i} \cdot \frac{1}{i} = \frac{d}{i^2} \\ \lim_{n \to \alpha} \end{array}\right\} \quad C_1 \cdot \frac{1}{i} + \frac{d}{i^2} = \left[C_1 + \frac{d}{i} \right] \cdot \frac{1}{i}$$

1

3. $\frac{n \cdot d}{i} \cdot [1+i]^{-n}$ → tiende a " 0 "

$\lim_{n \to \alpha}$ $\qquad (1+i)\text{-}n \to 0 \to \frac{n \cdot d}{i} \cdot 0 = 0$

TEMA 7: RENTAS CONTINUAS

7.1. Definición de renta continua

Una renta es continua si sus infinitos términos son de cuantía infinitesimal y vencen en cada instante del tiempo.

7.2. Valoración de rentas continuas en capitalización compuesta

1

Valor actual de una renta continua =

$$= \lim_{k \to \alpha} V_A^{\text{fraccionada}} = \lim_{k \to \alpha} C \cdot a_{n\rceil i} \cdot \frac{i}{j_k} = C\, a_{n\rceil i} \cdot i \, \frac{1}{\lim_{k \to \alpha} j_k} =$$

$$\boxed{\frac{J_k}{K} = \frac{1}{k/J_k}}$$

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$

$$(1+i) = \left(1+\frac{J_k}{k}\right)^k$$

$$(1+i) = \boxed{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{j_k}}\right)^{k/j_k}\right]}^{j_k} \xrightarrow{e} e^{j_k}$$

$$(1+i) = e^{j_k} \rightarrow \underset{k \to \alpha}{j_k} = \ln(1+i)$$

1

Rentas Continuas Como Límite de la Fraccionadas

1. Renta Continua (Constante)

Valor actual

$$V_o = \text{limit}_{n \to \alpha} \; C \cdot \frac{i}{J_k} \cdot a_{n\rceil i} = \boxed{C \cdot \frac{i}{P} \, a_{n\rceil i}} = C \cdot a_{n\rceil i}$$

$$J_k = K \cdot i_k$$

$$\text{Limit}_{k \to \alpha} Jk = \text{limit}_{k \to \alpha} K[1+i]^{1/k} - 1 = \underset{\downarrow}{\overset{\text{Ln}}{\text{Log}}}\, e\,(1+i) = \int \qquad \boxed{\text{Ln}\,(1+i) = \int}$$

Observación Analítica

$$\cancel{C_o} \cdot (1+i_k)^{n \cdot k} = (1+i)^{n} \cdot \cancel{C_o}$$

$$(1+i_k)^k = (1+i) \rightarrow 1+i_k = (1+i)^{1/k}$$

$$(1+i_k)^k - 1 = i \rightarrow i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

1

Valor final

$$\bar{V}_n = C\,(1+i)^n\ \bar{a}_{n\rceil i} = C \cdot \bar{S}_{n\rceil i} = \boxed{C \cdot \frac{i}{\int} S_{n\rceil i}}$$

2. Renta Continua en Progresión Geométrica

Valor actual

$$\bar{V} = \bar{A}_{(c,q)\,n\rceil i} = \text{limit}_{k\to\alpha} A^{(k)}_{(c,q)\,n\rceil i} = \text{limit}_{k\to\alpha} \frac{i}{j_k} A_{(c,q)\,n\rceil i} =$$

Casos:

$$= \frac{i}{\int} A_{(c,q)\,n\rceil i}$$

- $q \neq 1+i$

$$\rightarrow \frac{i}{\int} \cdot C_1 \cdot \frac{1-q^n (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

- $q = 1+i$

$$\rightarrow \frac{i}{\int} \cdot C_1 \cdot \frac{n}{(1+i)}$$

1

Valor final

$$\bar{V}_n = \bar{S}_{(c,q)\,n\rceil i} = (1+i)\ \bar{A}_{(c,q)\,n\rceil i} = \frac{i}{\int} \boxed{S(c,q)\ n\rceil i} \rightarrow \frac{i}{\int} (1+i)^n \cdot A_{(c,q)\,n\rceil i}$$

3. Datos: Rentas Continuas en Progresión Aritmética

Valor actual

$$\bar{V}_o = \bar{A}_{(c,d)n\rceil i} = \text{limit}_{k\to\alpha} A^{(k)}_{(c,d)\,n\rceil i} = \text{limit}_{k\to\alpha} \frac{i}{j_k} A_{(c,d)\,n\rceil i} =$$

$$= \frac{i}{\int} A_{(c,d)n\rceil i}$$

Valor final

$$\bar{V}n = \bar{S}_{(c,d)\,n\rceil i} = (1+i)^n \cdot \bar{A}_{(c,d)n\rceil i} = \frac{i}{\int} \cdot S_{(c,d)n\rceil i}$$

$$= \frac{i}{\int} \cdot (1+i)^n \cdot A_{(c,d)n\rceil i}$$

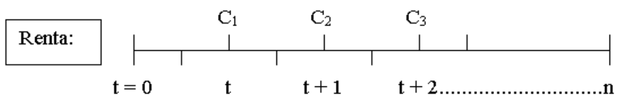
1

$$= \frac{i}{\rho} \cdot (1+i)^n \left[C_1 \cdot a_{\overline{n|}\, i} + \frac{d}{i}\, a_{\overline{n|}\, i} - \frac{n \cdot d}{i} \quad (1+i)^{-n} \right]$$

Tema 7: Rentas Continuas

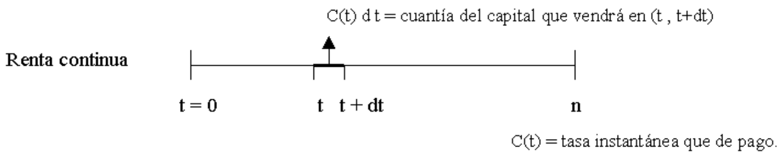
1. Definición de renta continua.
2. Valoración de rentas continuas en capitalización compuesta.
3. Rentas continuas como límite de rentas fraccionadas.

1.Definición



La renta se dice continua cuando los periodos de maduración son infinitesimales. La renta continua tendrá infinitos términos exigibles en cada instante del tiempo.

1



Algunas veces es razonable suponer flujos de tesorería que se distribuyen uniformemente a lo largo del año (para el presupuesto de capital) como aprovisionamiento para cuando hay pagos, muy frecuentes, así se pueden simplificar los cálculos.

→ Por tanto [documento adjunto]

2.Valoración de rentas continuas en capitalización compuesta

Si supongo la fórmula de interés constante. $\rho = L_n\,(1+i)$

$$V_{actual} = \int_0^n C(t)\,(1+i)^{-t}\, d\cdot t = \int_0^n C(t)\, e^{-\rho t}\, d\cdot t$$

1

Para una renta unitaria: C (t) = 1:

$$V_{actual} = {}^{n}\!\int_{o} (1+i)^{-t}\, d\cdot t = \left[-\frac{(1+i)^{-t}}{Ln\,(1+i)} \right]_{o}^{n} = \frac{1}{L_n\,(1+i)} \left[1-(1+i)^{-n} \right] =$$

$$= \frac{i}{Ln\,(1+i)} \cdot a_{n\rceil i}$$

$L_n\,(1+i)$ = Tanto aplicable en capitalización continua, equivalente a un determinado tanto efectivo. i .

P

$$V_{actual} = {}^{n}\!\int_{o} c\, e^{-pt}\, d\cdot t = C \left[-\frac{1}{P} e^{-pt} \right]_{o}^{n} = \frac{C}{P} (1-e^{-np})$$

$$= \frac{C}{Ln\,(1+i)} \left(1-(1+i)^{-n}\right) = C \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right) i \cdot \frac{1}{L_n\,(1+i)}$$

Recordamos
$L_n\,(1+i) = P$
$(1+i) = e^{Ln(1+i)}$

1

Para una renta cualquiera que se distribuye uniformemente al año:

C (t) =C (a partir de la renta unitaria)

$$V_{actual} = C\, a_{n\rceil i} \cdot \frac{i}{L_n(1+i)} = c \cdot a_{n\rceil i} \cdot \frac{i}{|} = \frac{C}{L_n\,(1+i)} (1-(1+i)^{-n}) =$$

$$= \frac{C}{L_n\,(1+i)} (1-e^{-Ln(1+i)n}) =$$

Por tanto también será:

$$V_{actual} = \frac{C}{P} (1-e^{-nP}) = C_1 \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} \cdot \frac{i}{L_n(1+i)}$$

Nota
$(1+i) = e^{P}$

Las rentas aritméticas y geométricas se pueden tratar integrando el cero:

$C(t) = C_1 + C_2 t + C_3 q^t$

1

¡¡Formulación!!

Arit: $C(t) = C + d\cdot t \rightarrow C_1 + (n-1)\,d$

Geom: $C(t) = Cq^t \rightarrow C_n = C_1 \cdot q^{n-1}$

Otra manera (Folio adjunto) Limites.

3. Rentas continuas como límite de las rentas fraccionadas

a) caso constante:

Rentas Básicas: n, C, i.

Sacarlo a partir del caso perpetuo.

$V_{actual} = C\, a_{\overline{n|}\, i}$

$\frac{C}{2} = C \cdot 1/K \quad K = 2$

$V_{actual} = C\, a_{\overline{n|}\, i} \quad \frac{i}{J_2}$

2

4

1

$\frac{C}{4} = C \cdot 1/k \quad K = 4$

$V_{actual} = C\, a_{\overline{n|}\, i} \quad \frac{i}{J_4}$

Continua

$C\cdot d\cdot t \qquad K \rightarrow \alpha$

$V_{actual} = C\, a_{\overline{n|}\, i} \quad \frac{i}{\lim J_k}$

$e^{j\alpha} = 1+i \Leftrightarrow j_k = k\, i_k = k\,[(1+i)^{1/k} - 1] = \frac{(1+i)^{1/k} - 1}{1/k} = f(x) = (1+i)x \rightarrow \lim_{k \to \alpha} J_k =$

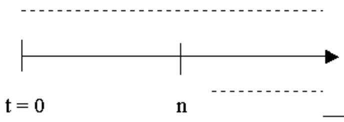
$= f\,'(0) = L_n\,(1+i) = P$

Continua

$$\boxed{V_{actual} = C\cdot a_{\overline{n|}\, i} \cdot \frac{i}{L_n\,(1+i)} = \frac{C}{P}\,(1 - e^{-n\cdot p})}$$

1

- Obtenemos a partir de la fórmula de rentas perpetuas; fraccionadas:



Cont. Perp. $V_{acual} = \frac{C}{P} = \ln_{k \to \alpha} \frac{C/k}{i_k}$

Cont. Perp. $V_{acual} = \frac{C}{P} = e^{-np}$

Renta continua temporal $V_{actual} = \frac{C}{P} (1-e^{-np})$

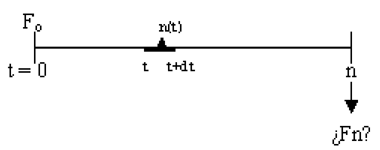
C = Tasa instantánea anual de pago

P = Ln (1+i)

i = Tanto efectivo anual

- Ecuación de un fondo en general con pagos continuos.

1



$t = 0$ F_o = valor del fondo.

n (t) → pago (imposición) continua

Tasa instan anual de pago.

Fuerza de interés: δ (t) para la capitalización continua.

La cantidad depositada en el fondo durante un intervalo de tiempo infinitesimal (t, t+d·t) es P (t) d·t.

$$d\,F(t) = F(t)\,\delta(t)\,d\cdot t + n(t)\,d\cdot t$$

$$F'(t) = F(t)\,\delta(t) + n(t)$$

- $\frac{d}{dt} [e^{-\int^t \delta(s)ds} F(t)] =$

1

$= e^{-\int t\delta(s)ds} (-\delta (t)) F(t) + e^{-\int t\delta(s)ds} [F (t) \delta (t) + n (t)] =$

$= e^{-\int t\delta(s)ds} P (t)$

Así:

$$\int_0^h \left[\frac{d}{dt} \left(e^{-\int \delta(s)ds} F(t)\right) \right] = \underbrace{\int_0^h e^{-\int \delta(s)ds} P(t)\, d\cdot t}_{\text{Valor actual de los pagos}}$$

$$\underbrace{e^{-\int t\delta(s)ds}{}'' F(h) - F_o}_{\text{Valor actual del fondo.}}$$

Valoración de rentas con las leyes simples

- Caso inmediato, postpagable, temporal y constante.

$$\text{temporal} \downarrow n \qquad \text{constante} \downarrow C$$

1

$$\begin{array}{ccccc} & C & C \text{----} & C \text{-------------} & C \\ t=0 & 1 & 2 \text{----} & K \text{-------------} & n \end{array}$$

- Ley capitalización simple $p = n : i \longrightarrow$ precio para

$$V_{final} = \Sigma^n_{K=1} C (1+ (n-k) i)$$

Verificación:

$$V_{actual} (1+i) = V \text{ final} \leftarrow V_{actual} = \Sigma^n_{K=1} C \frac{(1+ (n-k) i)}{1+ n i}$$

- Ley de descuento comercial $p = 0 : d$

$$V_{actual} = \Sigma^n_{K=1} C (1- k \cdot d)$$

$$V_{final} = \Sigma^n_{K=1} C \frac{(1-k \cdot d)}{1- n \cdot d}$$

Lo normal es que se tome p = n.

1

Suma de progresiones aritméticas:

$a_1,\ a_2 = a_1 + d,\ \ldots\ a_k = a_1 + (k-1)\,d,\ \ldots a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$\Sigma_n = a_1 + \ldots + a_n = a_1\ (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots$

$$\frac{a_1+(n-1)d}{2a_1+(n-1)d} + \frac{a_1+(n-2)d}{2a_1+(n-1)d} + \frac{a_1+(n-3)d}{2a_1+(n-1)d}$$

$$\Sigma_n = (\,a_1 + a_n\,)\ \frac{n}{2}$$

Ej.:

$$V_{final} = \Sigma^n{}_{K=1}\ C\,(1+(n-k)\,i) = \Sigma^n{}_{K=1}\ C + \Sigma^n{}_{K=1}\ n\cdot i\cdot C - \Sigma^n{}_{K=1}\ k\cdot i\cdot C =$$

$$= n\cdot c + n^2 i\cdot c - i\cdot c\ (1+2+\ldots+n) = n\cdot c + n^2 i\cdot c - i\cdot c\ (n+1)\frac{n}{2} =$$

$$= n\cdot c + n^2 i\cdot c - i\cdot c\,\frac{n^2}{2} - i\cdot c\,\frac{n}{2} =$$

$$= n\cdot c\,(\,1+\frac{in}{2} - \frac{i}{2}\,) = n\cdot c\,(\,1+i\,\frac{n-1}{2}\,)$$

1

Características comerciales

En las operaciones financieras, en la práctica cotidiana, surgen ciertas características complementarias o adicionales a la operación en sí, que modifican sustancialmente el conjunto de capitales a entregar o recibir, alterando el equilibrio de la operación, dado por la ecuación:

Prestación ⇔ Contraprestación

A estas condiciones o características complementarias se las denomina características comerciales y al conjunto de capitales de la prestación y de la contraprestación una vez incorporadas dichas características se las denomina prestación real y contraprestación real.

Hablaremos de operaciones pura como aquella en la que no se consideran las características complementarias, esto prácticamente sólo ocurre en la teoría, y operación con características comerciales cuando éstas de incorporan a la operación.

Las características comerciales se pueden clasificar en dos grupos:

- Características bilaterales o recíprocas.
- Características unilaterales.

1

Características comerciales bilaterales

Son aquellas que afectan por igual tanto al sujeto de la prestación como al de la contraprestación. Así pues, si el sujeto de la prestación tiene un gasto inicial, este repercutirá directamente sobre el sujeto de la contraprestación. Esto es, la prestación real entrega por el prestamista coincide con la recibida por el prestatario u viceversa.

Por tanto, a mayores gastos para el sujeto de la prestación, mayores ingresos para el de la contraprestación. Se puede decir que es un juego de suma nula: todo lo que el primero gana lo pierde el segundo.

Entre las características comerciales bilaterales se pueden destacar las que modifican la cuantía de los capitales como bonificaciones, primeras, lotes, recargos, etc.

1

Características comerciales unilaterales

Estas características afectan a uno de los dos sujetos que intervienen en la operación modificando las cuantías o vencimientos. Estos gastos complementarios o suplidos surgen generalmente por la aparición de una tercera persona en la operación, ajena, en un principio, ésta (por ejemplo: gastos notariales, impuestos surgido de la operación, etc.).

Dado que el aumento de pagos que realiza un sujeto no se traduce en un incremento de cuantía a recibir por el segundo sujeto, surge la necesidad de distinguir entre prestación real y contraprestación real tanto para el prestamista (acreedor) como para el prestatario (deudor).

Entre los gastos suplidos, los más habituales son:

- Gastos iniciales, o gastos que surgen en el momento en el que se pacta la operación, o sea, en le origen. Así pues, están los impuestos por transmisiones patrimoniales y actos jurídicos documentados (timbre), gastos notariales, gastos administrativos, etc. Por G^a_i y G^d_i representamos los gastos iniciales del acreedor y deudor, representativamente.

1

- Gastos intermedios o periodos, que son los que aparecen durante la operación como, por ejemplo, gastos de administración, correo, etc. Éstos los representaremos por G^a_{Pj} y G^d_{Pj}, según sean a cargo del acreedor o del deudor en el momento t_j.

Características Comerciales: Tantos Efectivos y TAE

- **Unilaterales:** afecta a una sola de las partes y tercera persona.
- **Bilateral:** afecta a las dos partes.

Características comerciales en los prestamos:

1. Gastos a cargo del prestatario:
   - Comisión de apertura.
   - Comisión de estudio
2. Suplidos:
   - Corretaje (o notario) → (registro) → (Seguros) → (Tasaciones)
   - Impuestos (Impuesto sobre transmisiones patrimoniales y actos jurídicos documentados)
   - Otros gastos iniciales (Gestoría...)
   - Subvenciones.

1

3. Fiscalidad:
   - Gastos e intereses, son deducibles para la empresa → ahorro fiscal.
   - Gastos no suplidos e intereses los considera como ingreso gravable fiscalmente la entidad.
   - Hipotecarios para adquisición de viviendas.
     - → Conste para el prestatario: (i_p). coste, pasivo.
     - → Rentabilidad para el prestamista. (i_a), Rendimiento, Actividad.
     - → TAE → normas del Banco de España: sólo se deben incluir las comisiones que, por diferentes conceptos, pueda percibir la entidad (no los gastos suplidos).

- No las subvenciones recibida por la entidad
  - Variables

4. Las características comerciales, lo mismo que las restantes condiciones, pueden ser libremente acordadas por las partes, existen ciertas normas establecidas en la Circular del Banco de España (CBE)[4] nº 8/1990, 7 Sep.

1

ANEXO IV:

(RGL) DIRECCIONES DE INTERNET EN DONDE SE COLABORA O PARTICIPA

1.-DIRECCIÓN DEL CVITAE EN INTERNET:

Web:

http://www.ugr.es/local/rgomezl
http://www.robertogomez.netfirms.com

Documento: http://www.eumed.net/cursecon/colaboraciones/cv-rgl.PDF

2.-UNIVERSIDAD DE GRANADA

http://www.ugr.es

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad

http://www.ugr.es/%7Eefinanci/
http://www.ugr.es/%7Eefinanci/vesp/profesoradosg.htm

3.-CENTROS ASOCIADOS DE LA UNED:

http://www.uned.es

MALAGA - 043000 (www.uned.es/ca-malaga)
DIRECTOR: ANDRÉS MARTÍNEZ LORCA
SECRETARIO: FRANCISCO R. ALIJO HIDALGO
CALLE SHERLOCK HOLMES, 4 - 29006 MALAGA
TELÉFONO: 952363295 952363297
FAX: 952362380
EMAIL: info@malaga.uned.es secretaria@malaga.uned.es director@malaga.uned.es

MALAGA-RONDA - 043006
CALLE DOLORES IBARRURI, S/N - 29400 RONDA
TELÉFONO: 952 161106
FAX: 952 161106
EMAIL: unedronda@hotmail.com

4.-CENTRO DE ENSEÑANZA SAN JOSÉ DE MALAGA (CES SJ)

http://www.fundacionloyola.org

5.- UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

http://www.uma.es

6.-PUBLICACIONES DE LIBROS O MANUALES ECONÓMICOS Y CONTABLES

TESIS DOCTORAL:

http://www.eumed.net/tesis/index.htm

LIBROS

http://www.eumed.net/cursecon/libreria

ARTÍCULOS

http://www.eumed.net/cursecon/colaboraciones/index.htm#financiera

7.-GRUPOS DE INVESTIGACIÓN

Universitarios

http://www.eumed.net/
http://www.eumed.net/emn2001/miembros.htm

Europeos

Programa de acción comunitario en materia de educación «Sócrates» y otras acciones en el ámbito de la educación
http://europa.eu.int/comm/education/call/expertsoc/list en.html

La Comisión mantiene al día la lista de expertos seleccionados dentro de esta Convocatoria, lista que se encuentra disponible al público en la página web

No Universitarios (Privados)

AECA -*Asociación Española de Contabilidad y Administración de Empresas-*
http://www.aeca.es

7.-ACTIVIDAD PROFESIONAL

EMPRESA TURÍSTICA: ROVYTUR
http://www.iespana.es/rovytur

CLUB DEPORTIVO EBG MÁLAGA
(Escuela de Unicaja -Los Guindos-)
http://www.supercable.es/~jacar/

8.-OTRAS DIRECCIONES A VISITAR

Cursos de Verano de la UMA, Diputación de Málaga y Centro Asociado de la UNED: http://www.cursosdeverano.org