Taller de Teoría Combinatoria

Joaquín Ortega y Adolfo Quiroz

CIMAT, A.C.

Marzo 2011

La Teoría Combinatoria se ocupa del estudio de los arreglos que se pueden formar con los objetos de un conjunto en patrones que satisfagan reglas específicas. Entre los principales problemas de interés están los siguientes:

- Existencia del arreglo.
- Enumeración o clasificación de los arreglos.
- Estudio de un arreglo específico.
- Construcción de un arreglo óptimo.

Aparte del interés que tiene en sí misma, la combinatoria tiene aplicaciones de gran importancia en otras áreas, y en particular a la Teoría de Probabilidades y en Computación. En estas notas nos ocuparemos principalmente del segundo problema mencionado en la lista anterior.

Para iniciar veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 (Tablero de Ajedrez)
Consideremos un tablero de ajedrez usual, que está dividido en 64 cuadros, con 8 columnas y 8 filas,

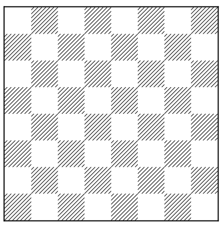
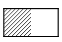


Figura 1

y supongamos que tenemos una cantidad grande de dominós que cubren exactamente dos cuadrados adyacentes del tablero: 

¿Es posible colocar 32 dominós sobre el tablero de modo que no haya superposiciones, cada dominó cubra 2 cuadros y todos los cuadros del tablero estén cubiertos?

Vamos a decir que un cubrimiento de este tipo es un *cubrimiento perfecto*. Es fácil ver que sí hay cubrimientos perfectos para un tablero de ajedrez. Es más difícil contar de cuántas maneras podemos hacer esto. M. E. Fisher demostró en 1961 que hay exactamente 12,988,816 maneras de hacerlo.

Consideremos ahora un tablero más general, con m filas y n columnas. Podemos ver ahora que no siempre existen cubrimientos perfectos, por ejemplo, un tablero 3×3 no tiene cubrimientos perfectos.

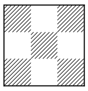


Figura 2

Es fácil ver que un tablero $m \times n$ tiene un cubrimiento perfecto si y sólo si al menos uno de los enteros m y n es par, o equivalentemente si el número de cuadros en el tablero es par.

Consideremos de nuevo un tablero de ajedrez típico y cortemos dos cuadros en esquinas diagonalmente opuestas, lo cual nos deja un total de 62 cuadros. ¿Existe un cubrimiento perfecto para este tablero?

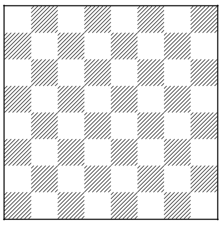


Figura 3

El siguiente argumento demuestra que no hay cubrimientos perfectos para esta configuración. Hay que tener en cuenta que por la configuración del tablero, cada dominó cubre un cuadro negro y otro blanco. Por lo tanto 31 dominós cubren 31 cuadros blancos y 31 negros. Pero al cortar cuadros diagonalmente opuestos hemos cortado dos cuadros del mismo color, en nuestra gráfica dos cuadros negros. Por lo tanto el nuevo tablero tiene 62 cuadros: 32 blancos y 30 negros y no es posible cubrirlos de manera perfecta con los 31 dominós.

Ejemplo 2 (Cortar un cubo)
Tenemos un cubo de 3×3 y queremos cortarlo en 27 cubos más pequeños de lado 1. ¿Cuál es el menor número de cortes necesarios para hacer esto? Una manera es hacer 2 cortes paralelos en cada dirección, como se muestra en la figura de la izquierda.

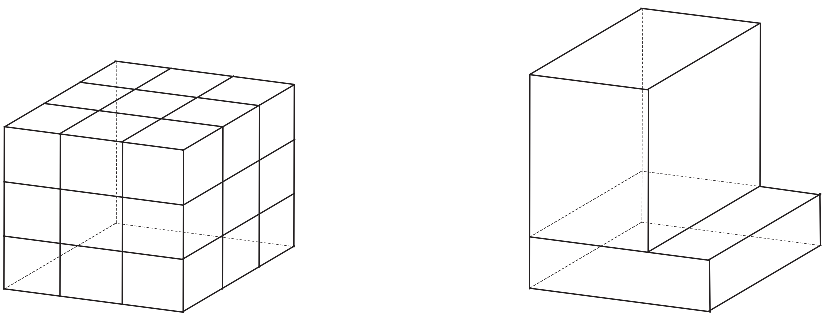


Figura 4

¿Es posible hacerlo con un número menor si podemos mover las piezas luego de cada corte? La figura de la derecha muestra un ejemplo, de modo que un corte vertical cortaría una parte del cubo original que no se incluiría si no hubiésemos movido las piezas. La posibilidad de mover las piezas después de cada corte dificulta el problema considerablemente pues ahora, en principio, deberíamos tener en cuenta todos los posibles desplazamientos de las piezas que obtenemos a cada paso, y como el número de piezas aumenta con cada corte, el número de desplazamientos también lo hará.

Sin embargo hay un argumento sencillo que permite dar una respuesta a la pregunta. De los 27 cubos que obtenemos al dividir el cubo inicial todos tienen al menos una cara que formaba parte de una de las caras del cubo inicial, salvo uno: el cubo del medio. Todas las caras de este cubo se forman a partir de un corte. Como el cubo tiene seis caras y no es posible crear dos caras con un solo corte, hacen falta seis cortes para crearlo. Por lo tanto siempre hacen falta al menos seis cortes.

Ejemplo 3
Un ejemplo que combina características de los ejemplos anteriores es el siguiente. Consideremos un tablero de ajedrez 4×4, que puede cubrirse de manera perfecta con 8 dominós. El problema es demostrar que siempre es posible cortar el tablero en dos piezas horizontales no vacías o en dos piezas verticales no vacías sin cortar ninguno de los ocho dominós. Llamaremos una recta que hace esto un *divisor*.

Supongamos que hay un cubrimiento perfecto de un tablero 4×4 tal que ninguna de las tres rectas horizontales ni las tres rectas verticales que cortan el tablero en dos partes es un divisor. Sean x_1, x_2 y x_3 respectivamente el número de dominós que cortan las rectas horizontales.

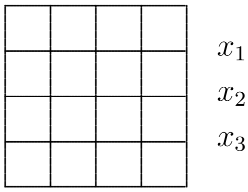


Figura 5

▲

Como no hay divisores, x_1, x_2 y x_3 son estrictamente positivas. Un dominó horizontal cubre dos cuadros en una fila, mientras que un dominó vertical cubre un cuadro en dos filas sucesivas. A partir de esto concluimos que x_1 es par, y de manera similar también lo son x_2 y x_3. Por lo tanto

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

de modo que hay al menos 6 dominós verticales en el cubrimiento perfecto. Un razonamiento similar muestra que hay al menos 6 dominós horizontales. Como $12 > 8$ tenemos una contradicción. Por lo tanto es imposible cubrir perfectamente un tablero 4×4 sin que haya un divisor.

1. Dos Principios Básicos.

Comencemos por considerar algunos problemas sencillos.

Problema 1. *En una tienda hay cinco modelos de camisa y tres de pantalón. ¿Cuántos conjuntos distintos de pantalón y camisa podemos comprar?*

► La camisa la podemos elegir de cinco maneras distintas. Para cada una de ellas podemos escoger el pantalón de tres maneras distintas. Por lo tanto hay $5 \times 3 = 15$ maneras de escoger un pantalón y una camisa. ▲

Problema 2. *Las ciudades A, B, y C están conectadas según lo muestra la figura 6: hay seis caminos de A a B y cuatro de B a C. ¿De cuántas maneras podemos ir de A a C?*

► Para cada camino que escojamos entre A y B podemos escoger cuatro para continuar hasta C. Como hay seis caminos entre A y B la respuesta es $6 \times 4 = 24$.

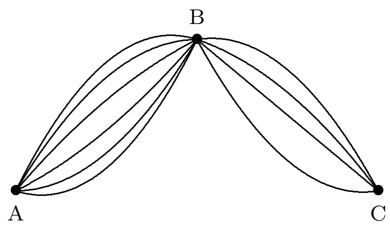


Figura 6

▲

Problema 3. *El conjunto* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *tiene* k *elementos mientras que* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *tiene* n. *¿Cuántos elementos tiene el producto cartesiano* $A \times B$*?*

▶ El producto cartesiano $A \times B$ está formado por todos los pares ordenados (a, b) donde el primer elemento, a, está en A y el segundo, b, está en B. Para cada uno de los k elementos de A que tomemos como primer miembro del par hay n posibilidades para escoger el segundo a partir de los elementos de B. Por lo tanto tendremos $k \times n$ pares ordenados. ▲

Los tres problemas anteriores tienen características similares: Se trata de escoger dos elementos, cada uno de un conjunto distinto y queremos contar el número de maneras de hacer esto. El resultado general puede enunciarse de la siguiente manera:

Principio de Multiplicación. *Si tenemos dos conjuntos de* k *y* n *elementos, respectivamente, y queremos escoger dos elementos de modo que uno sea del primero y el otro del segundo, esto lo podemos hacer de* $k \times n$ *maneras.*

El principio de multiplicación puede ser aplicado reiteradamente:
Problema 4. *En la tienda del problema 1 hay también cuatro modelos distintos de zapatos. ¿De cuántas maneras podemos escoger un conjunto de camisa, pantalón y zapatos?*

▶ Podemos ahora comenzar con cualquiera de los 15 conjuntos de camisa y pantalón del problema 1. Hay cuatro maneras de completarlo escogiendo un par de zapatos. Por lo tanto el número de posibles conjuntos de camisa, pantalón y zapatos es $15 \times 4 = 60$. ▲

Problema 5. *Una costurera tiene tres botones, cinco agujas y ocho tipos de hilo. ¿De cuántas maneras puede escoger un objeto de cada tipo?*

▶ $3 \times 5 \times 8 = 120$. ▲

Veamos ahora otro tipo de problema.
Problema 6. *Si además de las ciudades A, B y C del problema 2 tenemos una cuarta ciudad D conectada con las anteriores de la manera que indica la figura 7, ¿De cuántas maneras podemos ahora viajar de A a C?*

▶ Podemos ir de A a C pasando por B o por D. Sabemos por el problema 2 que hay 24 maneras de ir de A a C pasando por B. Por el Principio de Multiplicación hay $3 \times 2 = 6$ maneras de ir de A a C pasando por D. Por lo tanto, en total hay $24 + 6 = 30$ maneras de viajar de A a C. ▲

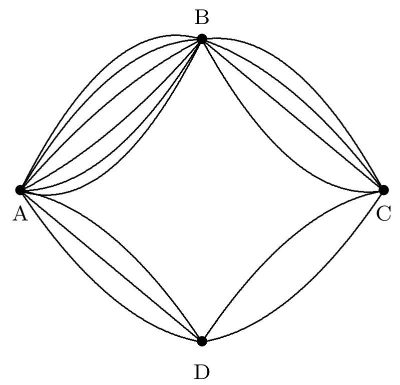


Figura 7

Problema 7. *Una persona visita dos tiendas con intención de comprar un pantalón. En la primera tienda hay seis modelos diferentes y para cada uno hay tres colores. En la segunda hay diez modelos y cuatro colores para cada modelo. ¿Entre cuantos pantalones tiene que escoger la persona?*

▶ En la primera tienda hay $6 \times 3 = 18$ mientras que en la segunda hay $10 \times 4 = 40$. Para hallar el total de pantalones tenemos que sumar estos dos números, y obtenemos $18 + 40 = 58$. ▲

Vemos que en ambos problemas hay dos situaciones que son excluyentes: Para ir de A a C pasamos por B o por D, pero no por ambos. El pantalón lo compramos en la primera tienda o en la segunda, pero no en ambas. Cuando se presenta una situación de este tipo, el número total de soluciones se obtiene sumando las soluciones bajo las distintas alternativas. Este resultado se puede enunciar de la siguiente manera:

Principio de Suma. *Si una situación puede ocurrir de k maneras distintas y una segunda situación excluyente de la primera puede ocurrir de n maneras, entonces existen $k+n$ maneras en las cuales puede ocurrir alguna de las dos situaciones.*

El principio de suma también puede ser aplicado reiteradamente.

Problema 8. *En una tienda hay cinco modelos de pantalón, ocho de camisa y cuatro de zapatos. ¿Cuántas maneras hay de comprar dos objetos con nombres distintos?*

▶ Hay tres casos posibles: Compramos pantalón y camisa; pantalón y zapatos o camisa y zapatos. Es fácil calcular el número de maneras de cada caso: $5 \times 8 = 40$ para el primero, $5 \times 4 = 20$ para el segundo y $8 \times 4 = 32$ para el tercero. En total hay $40 + 20 + 32 = 92$ maneras de comprar dos objetos con nombres distintos. ▲

Problema 9. *¿Cuántos números de a lo sumo tres cifras se pueden formar con los dígitos 3, 4, 7 y 8?*

▶ Los números que vamos a formar pueden tener una, dos o tres cifras. Veamos por separado cuantos hay de cada tipo y luego sumamos los resultados, de acuerdo al principio de la suma. Es claro que de una cifra hay 4. En el caso de dos cifras la primera puede ser cualquiera de los cuatro dígitos, y la segunda también. Por lo tanto hay $4 \times 4 = 16$ números de dos cifras. De manera similar, hay $4 \times 4 \times 4 = 64$. En total tenemos $4 + 16 + 64 = 84$ números de tres o menos cifras formados con los dígitos 3, 4, 7 y 8. ▲

2. Número de subconjuntos de un conjunto finito.

Sea $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ un conjunto de n elementos. Denotaremos por $\mathcal{P}(C)$ la familia de todos los subconjuntos de C y lo llamaremos el *conjunto de partes* de C.

Por ejemplo, si $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, la familia $\mathcal{P}(C)$ consta de los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{rl} \emptyset & \text{(vacío es un subconjunto de } C\text{)} \\ \{c_1\}; \{c_2\}; \{c_3\} & \text{(subconjuntos con 1 elemento)} \\ \{c_1, c_2\}; \{c_1, c_3\}; \{c_2, c_3\} & \text{(subconjuntos con 2 elementos)} \\ \{c_1, c_2, c_3\} & \text{(subconjunto con 3 elementos)} \end{array}$$

Como vemos, en este ejemplo el número de subconjuntos en $\mathcal{P}(C)$ es igual a 8.

Es importante resaltar que al describir un conjunto no importa el orden en el cual se escriben los elementos que pertenecen a él. Así, por ejemplo, $\{c_1, c_2\}$ es el mismo conjunto que $\{c_2, c_1\}$, y no nos interesa el orden en el cual aparecen los elementos de cada subconjunto. Sin embargo, a los efectos del razonamiento posterior, supondremos que los elementos del conjunto C están ordenados de alguna manera arbitraria, que es aquélla en la cual los describimos inicialmente.

En el ejemplo anterior, como el conjunto inicial tenía sólo tres elementos, resultó fácil escribir explícitamente los subconjuntos y contarlos, pero en general esto no va a ser posible. Por lo tanto queremos un método que nos permita hallar este número de manera más sencilla. Una posibilidad que resulta práctica para calcular el número de conjuntos de la familia $\mathcal{P}(C)$, que denotaremos $\#\mathcal{P}(C)$, es la siguiente. Supongamos entonces que $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, vamos tomando uno a uno todos los elementos de C de manera ordenada y decidimos en cada caso si lo incluimos o no en el subconjunto que construimos.

Podemos pensar, entonces, que construir un subconjunto equivale a asignarle a cada elemento un número: le asignamos el 1 si lo incluimos en el subconjunto y el 0 si no lo incluimos. Es decir, que construir todos los subconjuntos de C es equivalente a construir todas las n-uplas de ceros y unos:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (a_i = 0 \text{ ó } 1)$$

donde $a_i = 0$ significa que **no** hemos incluido el elemento c_i en el subconjunto y $a_i = 1$ significa que **sí** lo hemos incluido. Por lo tanto tenemos una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{P}(C)$ y el conjunto de n-uplas

$$A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i = 0 \text{ ó } 1\} ,$$

correspondencia que asocia a cada subconjunto $M \subset C$ la n-upla que tiene un 1 en el lugar i sí, y sólo sí, $c_i \in M$.

Por ejemplo, en el caso del conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ de 3 elementos, si $M = \{c_1\}$ la terna que le corresponde es $(1, 0, 0)$; si en cambio $M = \{c_2, c_3\}$ la terna que le corresponde es $(0, 1, 1)$ mientras que a $M = \{c_1, c_3\}$ le corresponde $(1, 0, 1)$.

Por lo tanto, basta contar cuántas n-tuplas hay en A_n y esto es sencillo.

Para $n = 1$ es claro que A_n tiene 2 elementos:

$$(0); \ (1)$$

Para $n = 2$ tenemos 4:

$$(0, 0); \ (0, 1); \ (1, 0); \ (1, 1)$$

Para $n = 3$ tenemos 8:

$$(0, 0, 0); \ (0, 1, 0); \ (1, 0, 0); \ (1, 1, 0)$$

$$(0, 0, 1); \ (0, 1, 1); \ (1, 0, 1); \ (1, 1, 1)$$

y en general, si tenemos la familia A_{n-1}, por cada $(n-1)$-upla que ésta contiene podemos fabricar 2 n-uplas de A_n, según agreguemos un 0 ó un 1 como última coordenada, y de este modo fabricamos todas las n-uplas de A_n una sola vez. O sea que:

$$\#A_n = 2(\#A_{n-1}) \quad (n \geq 2) ,$$

donde $\#A_n$ representa el número de elementos del conjunto A_n. Un sencillo argumento de inducción nos dice que

$$\#A_n = 2^n$$

y por lo tanto

$$\#\mathcal{P}(C) = 2^n.$$

3. Variaciones con Repetición.

Problema 10. *Lanzamos una moneda tres veces. ¿Cuántas sucesiones distintas de 'águilas' y 'soles' podemos obtener?*

▶ Para cada lanzamiento hay dos resultados posibles. Para cada resultado posible del primer lanzamiento hay dos del segundo, lo cual da 2×2 combinaciones para los dos primeros. Para cada una de estas hay otros dos resultados posibles del tercero. En total hay $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ sucesiones distintas. ▲

Problema 11. *¿Cuántos números de exactamente cuatro cifras se pueden formar con los dígitos impares?*

▶ Tenemos cinco dígitos impares: 1, 3, 5, 7 y 9. La cifra que corresponde a las unidades puede ser cualquiera de estas cinco. Lo mismo para las decenas, las centenas y las unidades de mil. Por lo tanto hay $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$ números de cuatro cifras, todas impares. ▲

Problema 12. *¿Cuántas palabras de tres letras (con o sin sentido) pueden formarse con las letras de la palabra AZUL?*

▶ Para cada una de las letras de la palabra que queremos formar tenemos cuatro que podemos escoger. Por lo tanto hay $4^3 = 64$ palabras. ▲

Los tres problemas anteriores tienen características similares. Utilizando los m elementos de un conjunto C (los *cinco* dígitos impares, los *dos* resultados de lanzar una moneda, las *cuatro* letras de la palabra AZUL), queremos formar sucesiones de longitud n (*cuatro*, *tres* y *cuatro*, respectivamente) **permitiendo que los elementos se repitan** y queremos contar el número de maneras de hacer esto. El resultado es m^n. Veamos cómo se puede deducir esto en general.

Consideremos un conjunto de m elementos con la notación $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Veamos el conjunto de n-uplas o vectores de dimensión n que podemos formar con los elementos del conjunto C, permitiendo que los elementos se repitan, es decir,

$$X_n = \{(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}) : c_{i_j} \in C,\ j = 1, \dots, n\}$$

Por ejemplo, el conjunto A_n considerado en la sección 2 de las n-uplas de ceros y unos corresponde a tomar $C = \{0, 1\}$. Si en cambio $C = \{0, 1, 2\}$ y $n = 3$, entonces X_n consiste de las siguientes ternas:

$$\begin{array}{l}
(0,0,0);\ (0,0,1);\ (0,0,2);\ (0,1,0);\ (0,1,1);\ (0,1,2);\ (0,2,0);\ (0,2,1);\ (0,2,2)\\
(1,0,0);\ (1,0,1);\ (1,0,2);\ (1,1,0);\ (1,1,1);\ (1,1,2);\ (1,2,0);\ (1,2,1);\ (1,2,2)\\
(2,0,0);\ (2,0,1);\ (2,0,2);\ (2,1,0);\ (2,1,1);\ (2,1,2);\ (2,2,0);\ (2,2,1);\ (2,2,2)
\end{array}$$

Hay que tener en cuenta que, al contrario de lo que sucede en el caso de los subconjuntos, el orden en el cual aparecen las componentes es determinante para las n-uplas. Así, el par (c_1, c_2) es distinto a (c_2, c_1).

Para calcular el número de elementos de X_n, llamado *variaciones (o arreglos) con repetición de m elementos tomados de n en n*, procedemos exactamente igual que en la sección anterior, cuando contamos el número de n-uplas de ceros y unos, sólo que ahora, en lugar de ceros y unos, la n-upla está formada a partir de los elementos de C, que son m. Repitiendo el razonamiento anterior resulta que

$$\#X_n = m^n.$$

Problema 13. *Si lanzamos un dado cuatro veces, ¿cuántos resultados posibles hay?*

▶ Para cada lanzamiento hay seis resultados posibles. Como lanzamos el dado cuatro veces el resultado es $6^4 = 1,296$.

Si usamos la notación anterior, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $m = 6$ y $n = 4$. ▲

Problema 14. *En una cuadra hay cinco casas. Hay tres colores para escoger la pintura de cada una de ellas. ¿De cuantas maneras puede pintarse el conjunto de las cinco?*

▶ $3^5 = 243$. ▲

4. Variaciones sin Repetición.

Veamos ahora otro tipo de problemas.

Problema 15. *Entre los once jugadores de un equipo de fútbol hay que escoger un capitán y su suplente. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?*

▶ Cualquiera de los once jugadores puede ser seleccionado capitán. Hecho esto, cualquiera de los diez que quedan puede ser su suplente. Por lo tanto hay 11×10 maneras de hacerlo. ▲

La diferencia en este caso está en que la selección del capitán modifica el conjunto a partir del cual podemos seleccionar su suplente, ya que el capitán no puede ser su propio suplente. Por lo tanto, la selección del capitán y su suplente no son independientes, como ocurría en la sección anterior.

Problema 16. *Se colocan veinte tarjetas numeradas de 1 a 20 en una bolsa para rifar tres premios. ¿De cuántas maneras se pueden repartir los premios?*

▶ El primer premio puede ser cualquiera de los veinte números. Seleccionado éste, el segundo puede ser cualquiera de los 19 restantes, y el tercero cualquiera de los 18 que quedan luego de seleccionar primero y segundo. En total hay $20 \times 19 \times 18 = 6840$. ▲

De nuevo, a medida que vamos seleccionando cada número premiado, el conjunto a partir del cual podemos escoger el siguiente cambia.

Veamos cómo podemos calcular este número en general. Consideremos de nuevo un conjunto de m elementos con la notación $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Veamos ahora el conjunto de n-uplas o vectores de dimensión n que podemos formar con los elementos del conjunto C, impidiendo que los elementos se repitan, es decir, cuando consideramos el conjunto

$$B_n = \{(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}) : c_{i_j} \in C,\ j = 1, \dots, n,\ c_{i_j} \text{ distintos 2 a 2}\}.$$

El número de elementos de B_n se llama las *variaciones (o arreglos) de m elementos tomados de n en n* y se denota V_n^m. Con frecuencia decimos arreglos sin repetición, o simplemente variaciones. Cuando sólo digamos variaciones se sobreentenderá que son sin repetición.

Por ejemplo, supongamos que $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ de modo que $m = 4$ y sea $n = 3$. Es fácil verificar que la lista siguiente contiene todos los elementos de Y_n sin que figuren repetidos:

$$\begin{array}{llllll}
(c_1,c_2,c_3); & (c_1,c_2,c_4); & (c_1,c_3,c_2); & (c_1,c_3,c_4); & (c_1,c_4,c_2); & (c_1,c_4,c_3) \\
(c_2,c_1,c_3); & (c_2,c_1,c_4); & (c_2,c_3,c_1); & (c_2,c_3,c_4); & (c_2,c_4,c_1); & (c_2,c_4,c_3) \\
(c_3,c_1,c_2); & (c_3,c_1,c_4); & (c_3,c_2,c_1); & (c_3,c_2,c_4); & (c_3,c_4,c_1); & (c_3,c_4,c_2) \\
(c_4,c_1,c_2); & (c_4,c_1,c_3); & (c_4,c_2,c_1); & (c_4,c_2,c_3); & (c_4,c_3,c_1); & (c_4,c_3,c_2)
\end{array}$$

En consecuencia se observa que $V_3^4 = 24$.

Para obtener una fórmula general para V_n^m procedemos inductivamente en n. Antes que nada observamos que necesariamente se tiene que $n \leq m$, ya que si $n > m$, cualquier n-upla de elementos de C tendrá elementos repetidos. Comencemos con $n = 1$. Es claro que tenemos m 1-uplas que son:

$$(c_1);\ (c_2);\ \dots\ (c_m)$$

y por lo tanto

$$V_1^m = m.$$

Supongamos ahora que $n = 2$. Tenemos:

$$\begin{array}{cccc}
(c_1,c_2); & (c_1,c_3); & \dots & (c_1,c_m) \\
(c_2,c_1); & (c_2,c_3); & \dots & (c_2,c_m) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(c_m,c_1); & (c_m,c_2); & \dots & (c_m,c_{m-1})
\end{array}$$

que son $m(m-1)$ pares que se obtienen agregando a cada uno de los m elementos de C colocados en primer término, uno de los $(m-1)$ elementos restantes (¡recordar que no hay repeticiones!). Por lo tanto

$$V_2^m = m(m-1).$$

Para tener una fórmula general para V_n^m, procedemos inductivamente en n, ya que el razonamiento anterior puede generalizarse sin dificultad como sigue:

Supongamos que tenemos todas las $(n-1)$-uplas (sin repetición). ¿Cómo fabricamos las n-uplas sin repetición? Tomamos una $(n-1)$-upla y le agregamos al final uno de los $(m-(n-1))$ elementos de C que no figuran en ella, de modo que, por cada $(n-1)$-upla podemos fabricar $(m-(n-1))$ n-uplas. De esta forma hemos fabricado todas las n-uplas de Y_n sin repetir ninguna. Por lo tanto

$$V_n^m = (m-n+1)V_{n-1}^m \quad (n \leq m). \tag{1}$$

Como ya vimos que $V_1^m = m$, deducimos de (1) que

$$V_n^m = m(m-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \tag{2}$$

donde $m! = m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ se conoce como m factorial. En la fórmula (2) utilizamos la convención $0! = 1$ (cuando $m = n$).

Problema 17. *En una carrera de fórmula 1 participan 26 corredores. Los diez primeros ganan puntos según la posición que ocupen (25 puntos al primero, 18 al segundo, etc.) ¿De cuántas maneras pueden repartirse los puntos?*

► $V_1^{26}0 = 1.9275522 \times 10^{13}$. ▲

5. Permutaciones.

Un caso particular de variaciones son las *permutaciones*, que corresponden a la situación $m = n$. En este caso $V_m^m = m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1$. Observamos que ahora las m-uplas contienen **todos** los elementos de C, sin repetición, dispuestos en todos los órdenes posibles.

Por ejemplo, si $m = n = 3$ las permutaciones son:

$$(c_1, c_2, c_3);\ (c_1, c_3, c_2);\ (c_2, c_1, c_3);\ (c_2, c_3, c_1);\ (c_3, c_1, c_2);\ (c_3, c_2, c_1).$$

Claramente $V_3^3 = 6$.

También se emplea con frecuencia para las permutaciones la notación

$$P_m = V_m^m = m!$$

Problema 18. *¿De cuántas maneras podemos colocar cuatro bolas de distintos colores en fila?*

► La primera puede ser cualquiera de las cuatro. La segunda, cualquiera de las tres restantes, etc. La respuesta es $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$. ▲

Problema 19. *¿Cuántas palabras, con o sin sentido, pueden obtenerse usando todas las letras de la palabra* PRENSA*?*

► Como la palabra no tiene letras repetidas, la respuesta es $6! = 720$. Más adelante nos encontraremos la situación de palabras con letras repetidas. ▲

6. Combinaciones.

Problema 20. *De un grupo de treinta estudiantes queremos escoger dos para participar en una competencia. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?*

► El primer estudiante del par puede ser cualquiera de los treinta y, una vez escogido éste, el segundo puede ser cualquiera de los veintinueve restantes. Pero de esta manera hemos contado cada pareja dos veces, cuando A es el primero y B el segundo, y cuando B es el primero y A el segundo. Por lo tanto tenemos que dividir este número entre dos. La respuesta es $\frac{30 \times 29}{2} = 435$. ▲

Problema 21. *De un grupo de veinticinco libros queremos escoger tres para leer durante las vacaciones. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto?*

► Hacemos un razonamiento similar al del problema anterior. Primero contamos cuantos tríos ordenados de libros podemos formar y luego dividimos entre el número de ordenamientos posibles de cada trío. El número de tríos ordenados son las variaciones de 25 elementos tomados de 3 en 3: $V_3^{25} = 25 \times 24 \times 23 = 13.800$. Cada trío lo podemos ordenar de $3! = 6$ maneras. Por lo tanto la respuesta es

$$\frac{V_5^{25}}{3!} = \frac{13,800}{6} = 2,300.$$

▲

Problema 22. *En un juego de dominó, ¿de cuántas maneras podemos escoger una mano?*

► Una mano consiste de siete piedras sin importar su orden. La primera puede ser cualquiera de las 28 que forman el juego. Escogida ésta, hay 27 para escoger la segunda, luego 26 para la tercera, y así sucesivamente hasta escoger las siete. En total: $V_7^{28} = 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 5,967,561,600$. Pero cada mano ha sido contada varias veces, dependiendo del orden en el cual la escogimos. Por lo tanto tenemos que dividir por el número de maneras de ordenar una mano, que es $7! = 5,040$, y la respuesta es

$$\frac{V_7^{28}}{7!} = \frac{5,967,561,600}{5,040} = 1,184,040$$

▲

Veamos cómo podemos resolver este tipo de problemas en general. Consideramos nuevamente un conjunto $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ con m elementos. Llamamos *combinaciones de m elementos tomados de n en n* al número de subconjuntos de C que constan de n elementos. Se entiende que $0 \leq n \leq m$ y se denota dicho número por

$$\binom{m}{n} \quad \text{o también} \quad C_n^m.$$

Ya sabemos calcular el número de n-uplas ordenadas V_n^m que se pueden formar con los elementos de C. Es claro que cada subconjunto de C con n elementos da lugar a $n!$ n-uplas ordenadas – tantas como maneras tenemos de ordenar los n elementos del subconjunto – y por lo tanto

$$V_n^m = \binom{m}{n} \times n! \tag{3}$$

Reemplazando V_n^m por su valor (fórmula (2)), resulta

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}. \tag{4}$$

Observamos que $\binom{m}{0} = 1$ para cualquier valor de m. Los números $\binom{m}{n}$ se conocen como *números combinatorios*. Estudiaremos algunas de sus propiedades más adelante. Veamos primero algunos problemas.

Problema 24. *En una práctica de Baloncesto el entrenador quiere escoger un equipo de cinco entre los treinta jugadores que están entrenando. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?*

► $\binom{30}{5} = \frac{30!}{25!\,5!} = \frac{17,100,720}{120} = 142,506$ ▲

Problema 25. *Un estudiante tiene seis libros y otro tiene nueve. ¿De cuántas maneras pueden intercambiar tres libros?*

► El primer estudiante puede escoger tres libros de $\binom{6}{3}$ maneras mientras que el segundo puede hacerlo de $\binom{9}{3}$. Por lo tanto, el número de intercambios posibles es $\binom{6}{3}\binom{9}{3} = 1,120$. ▲

Problema 26. *Hay dos niñas y siete niños en un grupo de nadadores. Se quiere escoger un equipo de cuatro de modo que al menos uno de los nadadores sea niña. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?*

► Tenemos dos posibilidades: puede haber una o dos niñas en el equipo. En este último caso los dos varones pueden escogerse de $\binom{7}{2}$. Si hay sólo una niña, la podemos escoger de dos maneras, mientras que a los tres niños restantes los podemos escoger de $\binom{7}{3}$. En total tenemos $\binom{7}{2} + 2\binom{7}{3} = 91$ equipos posibles. ▲

Problema 27. *En el juego de KINO cada cartón tiene 15 números escogidos del 1 al 25. ¿Cuántos cartones hay?*

► Como no nos importa el orden en el cual escogemos los 15 números la respuesta es el número combinatorio $\binom{25}{15} = \frac{25!}{15!\,10!} = 3,268,760$.

Una observación importante es que seleccionar los 15 números que están en el cartón es equivalente a seleccionar los 10 que **no** están. Por lo tanto la respuesta también es el número combinatorio $\binom{25}{10} = \frac{25!}{10!\,15!} = 3,268,760$. Esta es una propiedad general que enunciamos un poco más adelante. ▲

Problema 28. *Tenemos tres bolas indistinguibles y 20 cajas. ¿De cuántas maneras podemos colocar las bolas en las cajas de modo que no haya más de una bola en cada caja?*

► Podemos enumerar las cajas del 1 al 20 y ahora el problema se reduce a seleccionar subconjuntos de tres elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, 20\}$, que representan las cajas que van a estar ocupadas. Ya sabemos que esto lo podemos hacer de

$$\binom{20}{3} = 1,140$$

maneras distintas. ▲

El problema anterior muestra que si tenemos objetos de dos tipos y queremos colocar k objetos de tipo 1 y $n-k$ de tipo 2 en fila, tenemos $\binom{n}{k}$ maneras de hacerlo, pues podemos pensar que los lugares de la fila están numerados y que el problema consiste en contar el número de subconjuntos de k elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

6.1. Propiedades.

Propiedad 1. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.
Demostración. A partir de la definición tenemos

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}.$$

Como ejercicio, dé una demostración sin calcular, utilizando solamente la definición de combinación.

Propiedad 2. (Relación de Pascal)

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \quad (1 \le n \le m-1). \tag{5}$$

Demostración. Tenemos un conjunto C de m elementos y queremos contar el número de subconjuntos de n elementos que tiene. Ya sabemos que este número es $\binom{m}{n}$ pero vamos a calcularlo de otra manera. Sea $c_1 \in C$ un elemento de C, contamos en primer lugar los subconjuntos de C de n elementos que **tienen** a c_1. Esto es equivalente a contar los subconjuntos de $n-1$ elementos del conjunto $C \setminus \{c_1\}$, que son $\binom{m-1}{n-1}$. En segundo lugar contamos los subconjuntos de C de n elementos que **no tienen** al elemento c_1. Como c_1 no puede estar en el subconjunto, tenemos que elegir a partir de los $m-1$ elementos restantes de C. Esto da $\binom{m-1}{n}$ subconjuntos. Aplicando ahora el Principio de Suma tenemos

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}.$$

7. El Triángulo de Pascal.

La propiedad 2 sirve para construir un arreglo de números con propiedades útiles e interesantes, que se conoce como el Triángulo de Pascal. Supongamos que para un cierto valor de m conocemos los valores de todos los números combinatorios de la forma $\binom{m}{n}$, $0 \le n \le m$, entonces la relación (5) nos permite calcular los valores de los números combinatorios $\binom{m+1}{n}$, $0 \le n \le m+1$:

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n}.$$

Por lo tanto, de manera recursiva podemos obtener todos los números combinatorios. Comenzamos con $\binom{0}{0} = 1$, al cual colocamos en el centro de la página. Los siguientes dos son $\binom{1}{0} = 1$ y $\binom{1}{1} = 1$, que colocamos debajo, a ambos lados del 1 que habíamos colocado inicialmente, de modo que éste quede en el centro del espacio que separa los dos números nuevos, como se ve en la figura 8.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Figura 8

Para $m = 2$ tenemos en primer lugar los dos números combinatorios de los extremos, que corresponden a $n = 0$ y $n = 2$, esto es $\binom{2}{0} = 1$ y $\binom{2}{2} = 1$, que colocamos debajo de los anteriores, como se ve en la figura 9. Aún cuando es fácil calcular el número combinatorio $\binom{2}{1}$ directamente, vamos a hacerlo usando la fórmula (5): $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$. Si colocamos este número en el centro de la tercera fila observamos que su valor es la suma de los dos números que se encuentran sobre él:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Figura 9

Veamos como se construye la fila que corresponde a $m = 3$. Los extremos ambos valen 1: $\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$. El resto de los espacios los llenamos sumando en cada caso los dos valores que se encuentran por encima del espacio en cuestión: $\binom{3}{1} = 1 + 2 = 3$, $\binom{3}{2} = 2 + 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Figura 10

Si continuamos este proceso inductivamente obtenemos el triángulo que se presenta en la figura 11, conocido como triángulo de Pascal.

m = 0	1
m = 1	1 1
m = 2	1 2 1
m = 3	1 3 3 1
m = 4	1 4 6 4 1
m = 5	1 5 10 10 5 1
m = 6	1 6 15 20 15 6 1
m = 7	1 7 21 35 35 21 7 1
m = 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
m = 9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
.	. . . .
.	. . . .

Figura 11 El Triángulo de Pascal.

La fila m tiene $m+1$ números, que corresponden a los números combinatorios $\binom{m}{i}$, para $0 \leq i \leq m$, es decir que cada fila comienza por el número combinatorio $\binom{m}{0}$. Observamos, en consecuencia, que el número que aparece en el lugar $i+1$ de la fila m, es el número combinatorio $\binom{m}{i}$; por ejemplo, para hallar $\binom{7}{4}$ buscamos el lugar 5 de la fila 7 obtenemos $\binom{7}{4} = 35$.

Otra manera de construir el triángulo es la siguiente. Cambiamos los números por puntos o nodos, como se indica en la figura 12.

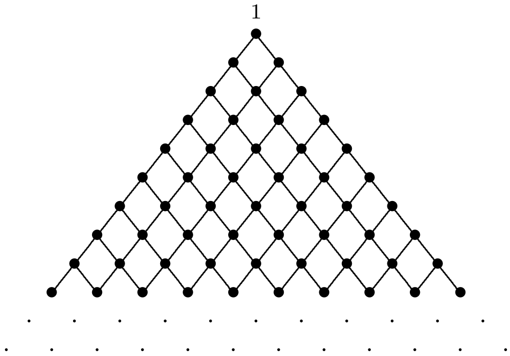


Figura 12

Escribimos un 1 sobre el vértice superior, y luego, sobre cada nodo, el número de maneras que hay para llegar a este punto a partir del vértice superior, moviéndonos únicamente hacia abajo. El resultado es el triángulo de Pascal.

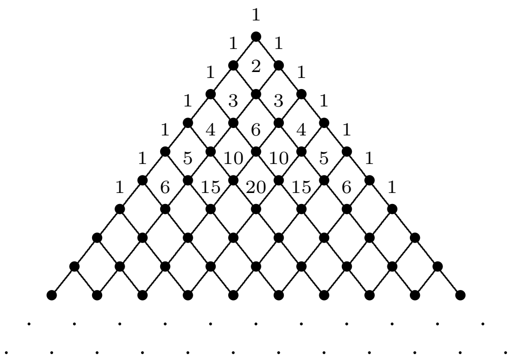


Figura 13

Veamos una propiedad interesante del triángulo de Pascal. Si evaluamos la suma de los números en cada fila obtenemos 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc. Parece natural la conclusión de que la suma de la n-ésima fila es 2^n. Esto es cierto y podemos probarlo por inducción. Sabemos que es cierto para las primeras filas. Para probar el paso inductivo observamos que cada número de la n-ésima fila es sumando para formar *dos* números de la siguiente fila: los que están por debajo de él, a ambos lados. Por lo tanto la suma de los números de la fila $n+1$ es dos veces la suma de los números de la fila anterior. Esto completa el paso inductivo.

Si escribimos esta relación explícitamente obtenemos la siguiente identidad:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 2^m. \tag{6}$$

En realidad, ya hemos visto una demostración combinatoria de esta identidad. El lado derecho representa el número de subconjuntos de un conjunto con m elementos. Por otro lado, el número combinatorio $\binom{m}{n}$ representa el número de subconjuntos de n elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de

m elementos. La identidad anterior dice que el número total de subconjuntos es igual a la suma de los subconjuntos de 0 elementos más el número de subconjuntos de 1 elemento más ... más el número de subconjuntos de m elementos.

8. El Binomio de Newton.

Queremos encontrar ahora una fórmula para la expresión $(a+b)^m$ para valores generales de m. Aún cuando éste no es un problema de combinatoria, tiene una solución que está estrechamente ligada a los números combinatorios y al triángulo de Pascal.

Escribamos los valores de esta expresión para los primeros valores de m:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1, \\
(a+b)^1 &= a+b, \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.
\end{aligned}$$

Observamos que los coeficientes de las expresiones que están del lado derecho corresponden a los valores del triángulo de Pascal. Esto sugiere la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
(a+b)^m &= \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \cdots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m. \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k}.
\end{aligned}$$

Haremos la demostración de esta fórmula por inducción completa en m. Observe que el segundo miembro contiene $m+1$ sumandos. Para $m=1$, queda

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b,$$

que es obviamente correcto.
Supongamos entonces que la fórmula es correcta para m, e intentemos probar que también lo es para $m+1$. Tenemos

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= (a+b)(a+b)^m = (a+b)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k+1} \\
&= a^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k+1}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio en el índice de la suma $j=k+1$ obtenemos que el segundo sumando en la expresión anterior se puede escribir

$$\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k} = \sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j-1}a^j b^{m-j+1}.$$

Vamos a reemplazar esta expresión en (7), pero para mantener la uniformidad en la expresión y simplificarla más fácilmente, usaremos el índice k en lugar de j. Obtenemos

$$\begin{aligned}(2.7) &= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^k b^{m-k+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k+1} \\ &= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] a^k b^{m-k+1} + b^{m+1}.\end{aligned}$$

Aplicando ahora la propiedad 2 de los números combinatorios:

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}$$

y reemplazando resulta

$$(a+b)^m = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^k b^{m-k+1} + b^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} a^k b^{m-k+1}$$

que muestra que la fórmula es correcta cuando el exponente es $m+1$. Por el principio de inducción sabemos entonces que la fórmula es válida para todo m.

Como caso particular de la fórmula del binomio de Newton podemos obtener de nuevo la identidad (6). Basta tomar $a = b = 1$ para obtener

$$2^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}.$$

9. Problemas Resueltos.

1. *¿Cuántas palabras (con o sin sentido) pueden formarse usando todas las letras de la palabra "REMAR"?*

► Esta palabra contiene dos veces la letra R y todas las demás son diferentes. Supongamos por un momento que estas dos letras son distinguibles: R_1 y R_2. En este caso hay $5! = 120$ palabras diferentes, pero en realidad dos palabras que puedan obtenerse intercambiando R_1 y R_2 son idénticas. Por lo tanto las 120 palabras se dividen en pares de palabras idénticas, de modo que la respuesta es $120/2 = 60$.

▲

2. *¿Cuántas palabras (con o sin sentido) pueden formarse usando todas las letras de la palabra "SABANA"?*

► Esta palabra contiene tres veces la letra A. Supongamos de nuevo que estas letras son distinguibles: A_1 A_2 y A_3. En este caso hay $6! = 720$ palabras diferentes, pero en realidad dos palabras que puedan obtenerse intercambiando las letras A_i son idénticas y esto podemos hacerlo de $3! = 6$ maneras diferentes. Por lo tanto las 720 palabras se dividen en grupos de 6 palabras idénticas, de modo que la respuesta es $720/6 = 120$.

▲

3. *¿Cuántas palabras (con o sin sentido) pueden formarse usando todas las letras de la palabra "INTENCION"?*

► Esta palabra contiene tres veces la letra N, dos veces la letra I y las otras son distintas. Si pensamos de nuevo que estas letras son distinguibles, tenemos 9! palabras. Como en realidad las letras I son idénticas, el número de palabras se reduce a $9!/2!$, y ahora si recordamos que las N también son distinguibles nos quedan $9!/(2! \times 3!) = 30,240$ palabras.

▲

4. *¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco personas en cinco sillas?*

► En este caso nos interesa el número de permutaciones de cinco elementos, ya que podemos pensar que las sillas están numeradas y el problema es equivalente a ordenar el conjunto de personas. Por lo tanto la respuesta es $5! = 120$.

▲

5. *¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco personas en cinco sillas alrededor de una mesa circular, si consideramos que todas las rotaciones de un arreglo son equivalentes?*

► Obsérvese que se puede elegir arbitrariamente la silla para la primera persona (a menos de rotar simultáneamente a todo el mundo, hasta que esta primera persona quede sentada en esa silla). Es fácil ver, entonces, que el número de disposiciones posibles es el número de maneras de sentarse las 4 personas restantes en las 4 sillas que quedan, es decir $4! = 24$.

El mismo razonamiento dice que, si en lugar de 5 personas y 5 sillas, son n, el resultado es $(n-1)!$.

▲

6. *¿Cuántos números de seis cifras tienen al menos una cifra par?*

► Los números que tienen al menos una cifra par son aquellos que tienen una, dos, tres, ..., seis cifras pares. Por lo tanto tendríamos que contar el número de elementos de cada uno de estos conjuntos y luego sumarlos. Resulta más sencillo en esta situación, contar cuantos números no satisfacen la condición (es decir, cuantos no tienen ninguna cifra par) y restar éste del total de los números de seis cifras. Hay $9 \times 10^5 = 900,000$ números de seis cifras (la primera cifra no puede ser 0, por eso la respuesta no es 10^6) de los cuales $5^6 = 15.625$ no tienen ninguna cifra par. Entonces hay $900,000 - 15,625 = 884,375$ números de seis cifras con al menos una de ellas par.

▲

7. *Supongamos que tenemos 3 cajas numeradas y 4 bolas indistinguibles. ¿De cuántas maneras podemos colocar las 4 bolas en las tres cajas?*

► Procedamos gráficamente, representando cada caja como la parte limitada por dos barras verticales. Por ejemplo, en la configuración de la figura tenemos 3 bolas en la primera caja, 0 bolas en la segunda y 1 bola en la tercera.

$$\underset{1}{|\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc|}\quad \underset{2}{}\quad \underset{3}{|\bigcirc|}$$

Un instante de reflexión muestra que tenemos la situación siguiente: hay 4 bolas y 4 barras, que se disponen una a continuación de la otra en 8 lugares y cada configuración queda determinada por el lugar que asignamos a las dos barras centrales entre los 6 lugares que podemos elegir para ellas, teniendo en cuenta que las barras de los extremos están obligadas a quedar allí. Es decir, el problema se reduce a decidir de cuántas maneras se pueden colocar dos barras en seis espacios, y esto es $\binom{6}{2}$.

▲

8. *Generalizar el ejemplo anterior al caso en que tenemos b bolas y n cajas.*

► El resultado que se obtiene aplicando el mismo razonamiento es:

$$\binom{n+b-1}{n-1} = \binom{n+b-1}{b}$$

▲

9. *¿De cuántas maneras podemos escoger las cuatro manos en un juego de dominó?*

► Por el resultado del problema 22 en la sección 6 sabemos que hay 1,184,040 maneras de escoger una mano de siete piedras. Veamos de cuantas maneras podemos escoger las cuatro manos que forman el punto de inicio de una partida de dominó. Una vez escogida la primera mano, nos quedan 21 piedras para escoger la segunda, y por lo tanto hay $\binom{21}{7} = 116,280$. Para la tercera tenemos $\binom{14}{7} = 3,432$ y la última está formada por las siete piedras que quedan. Por el principio de multiplicación la respuesta es el producto de estos números:

$$1,184,040 \times 116,280 \times 3,432 \times 1 = 472,518,347,558,400$$

▲

10. *Un cartón de 'BINGO' esta formado por cinco columnas de números, una para cada letra de la palabra BINGO. Cada columna tiene cinco números, excepto la central, correspondiente a la letra N, que tiene sólo cuatro ya que el lugar central no participa en el juego. Los cinco números de la primera columna se escogen entre los primeros 15 enteros:* $1, 2, \ldots, 15$, *los de la segunda entre los enteros* $16, 17, \ldots, 30$ *y así sucesivamente hasta la última columna, para la cual escogemos los cinco números entre* $61, 62, \ldots, 75$. *¿Cuántos cartones distintos de BINGO hay, suponiendo que el orden en el cual aparecen los números en cada columna no es importante?*

► Veamos en primer lugar, de cuantas maneras podemos escoger los cinco números de la primera columna, suponiendo que el orden de los números que aparecen en ella no importa. En este caso tenemos que escoger un subconjunto de 5 números a partir de un conjunto que tiene 15, de modo que la respuesta es el número combinatorio $\binom{15}{5} = 3,003$. Los resultados para las columnas correspondientes a las letras I, G y O son iguales, la única diferencia está en la columna central, correspondiente a la letra N. En este caso sólo escogemos cuatro números a partir de los 15 disponibles, de modo que la respuesta es $\binom{15}{4} = 1,365$

Ahora, por el principio de multiplicación, debemos multiplicar estos resultados para obtener la respuesta:

$$(3,003)^4 \times 1,365 = 111,007,923,832,370,565$$

▲

11. *En el problema anterior consideramos que el orden de los números en el cartón de BINGO no importaba. Esto es cierto si estamos jugando a cartón lleno, pero en muchos otros juegos, como las cuatro esquinas, la 'X', etc. sí importa el lugar en el cual aparece cada número. Si tomamos en cuenta el orden, ¿cuántos cartones distintos de BINGO hay?*

► Podemos aprovechar el cálculo que realizamos en el problema anterior si observamos que tenemos que multiplicar el resultado anterior por el número de maneras de ordenar los números que aparecen en cada cartón. Este ordenamiento debemos hacerlo respetando las restricciones de cada columna, es decir, en la primera sólo pueden aparecer números comprendidos entre 1 y 15, en la segunda entre 16 y 30, etc. Por lo tanto, para cada una de las columnas correspondientes a las letras B, I, G, y O tenemos cinco números y $5! = 120$ órdenes posibles. En la columna central hay sólo cuatro números y por lo tanto $4! = 24$ maneras de ordenarlos. En conclusión debemos multiplicar el resultado del problema anterior por $120^4 \times 24 = 4,976,640,000$:

$$111,007,923,832,370,565 \times 4,976,640,000 = 5.52446474061129 \times 10^{26}$$

▲

12. *Demostrar la identidad*

$$\binom{m}{n} = \sum_{k=n-1}^{m-1} \binom{k}{n-1} \tag{8}$$

e interpretar en base al triángulo de Pascal.

► Comenzamos a partir de la propiedad 2 de los números combinatorios:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \tag{9}$$

que forma la base del triángulo de Pascal. Usamos esta propiedad para escribir el segundo sumando del lado derecho como

$$\binom{m-1}{n} = \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-2}{n}.$$

Si sustituimos esta expresión en (9) y repetimos este procedimiento obtenemos

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} &= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}\\ &= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-2}{n}\\ &= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \binom{m-3}{n}\end{aligned}$$

Continuando inductivamente el resultado final es

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

y teniendo en cuenta que $\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1}$ obtenemos la expresión (8). Para ver qué interpretación tiene esta fórmula en relación al triángulo de Pascal veamos un caso particular: $m = 7, n = 4$. La relación anterior nos dice que

$$35 = \binom{7}{4} = \binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 20 + 10 + 4 + 1.$$

En la figura 14 observamos la ubicación de estos números en el triángulo.

m = 0	1
m = 1	1 1
m = 2	1 2 1
m = 3	1 3 3 1
m = 4	1 4 6 4 1
m = 5	1 5 10 10 5 1
m = 6	1 6 15 20 15 6 1
m = 7	1 7 21 35 35 21 7 1
m = 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
m = 9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Figura 14

▲

13. *Dos cajas contienen $2n$ bolas cada una, numeradas de 1 hasta $2n$. Se selecciona un conjunto de n bolas de cada caja. Calcular el número de maneras de hacer esto de modo que ambos conjuntos tengan, a lo sumo, una bola con el mismo número.*

▶ Utilicemos la siguiente notación:

$I = \{i_1, \dots, i_n\}$ es el conjunto de bolas extraídas de la primera caja.

$J = \{j_1, \dots, j_n\}$ es el conjunto de bolas extraídas de la segunda caja.

Es claro que los elementos de $\{i_1, \dots, i_n\}$ son 2 a 2 distintos, y lo mismo sucede para $\{j_1, \dots, j_n\}$. Observamos, aunque no forma parte de la pregunta, que el total de extracciones posibles de la primera caja es $\binom{2n}{n}$ y que, por cada una de éstas, podemos tener $\binom{2n}{n}$ extracciones de la segunda caja, de modo que el total de extracciones de parejas de los conjuntos I, J es

$$\binom{2n}{n}^2.$$

Veamos ahora la respuesta a la pregunta formulada. El número de maneras de que ambos conjuntos contengan, a lo sumo, una bola con el mismo número, es la suma del número de maneras de que no contengan ningún número en común más el número de maneras de que contengan en común exactamente un número.

¿Cuántas extracciones podemos efectuar, de tal modo que I y J no contengan ningún número en común?

Tenemos libertad en la selección de $\{i_1, \dots, i_n\}$, que puede ser hecha de $\binom{2n}{n}$ maneras. Por cada elección de $\{i_1, \dots, i_n\}$ en cambio, hay una sola elección de $\{j_1, \dots, j_n\}$ que produce el efecto deseado de que ambos conjuntos no contengan ningún número en común, que es la elección de los n números del conjunto total $\{1, 2, \dots, 2n\}$ que no figuran en $\{i_1, \dots, i_n\}$. En consecuencia tenemos

$$\binom{2n}{n} \tag{10}$$

maneras de elegir los subconjuntos $\{i_1, \dots, i_n\}$ (de la primera caja) y $\{j_1, \dots, j_n\}$ (de la segunda) de modo que no tengan ningún elemento en común

¿Cuántas extracciones podemos efectuar, de tal modo que $\{i_1, \dots, i_n\}$ y $\{j_1, \dots, j_n\}$ contengan exactamente un número en común?

Nuevamente, hay $\binom{2n}{n}$ maneras de elegir la extracción $\{i_1, \dots, i_n\}$ de la primera caja. Hecha ésta, debemos contar cuántas formas tenemos de extraer $\{j_1, \dots, j_n\}$ de modo que en este último conjunto figure uno y solo un elemento de $\{i_1, \dots, i_n\}$. Para ello procedemos así: elegimos el elemento de $\{i_1, \dots, i_n\}$ que debe figurar, para lo cual tenemos n alternativas. Luego elegimos los $(n-1)$ elementos restantes de $\{j_1, \dots, j_n\}$ entre los n elementos que quedan en la segunda caja cuando excluimos los de $\{i_1, \dots, i_n\}$, y esto lo podemos hacer de

$$\binom{n}{n-1} = n$$

maneras.

Resumiendo, por cada extracción de la primera caja tenemos n^2 maneras de hacer una extracción de la segunda que tenga exactamente un elemento en común con la hecha en la primera. Recordando que hay $\binom{2n}{n}$ maneras de extraer de la primera, resulta que la respuesta a nuestra segunda interrogante es que hay

$$\binom{2n}{n} n^2 \tag{11}$$

maneras de extraer $\{i_1, \dots, i_n\}$ y $\{j_1, \dots, j_n\}$ de modo que tengan un elemento común. Sumando (10) y (11) tenemos el resultado final

$$\binom{2n}{n}(1+n^2).$$

▲

10. Resumen.

Cuando escogemos elementos que pertenecen a un conjunto decimos que realizamos *un muestreo* y podemos hacerlo de acuerdo a diversos criterios: Con reposición de los elementos al conjunto antes de hacer la siguiente selección, o sin reposición. Podemos también tener en cuenta el orden en el cual hacemos la selección o no. Esto nos da cuatro posibilidades:

- **Muestreo con orden y con reposición:** Variaciones con repetición. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, con reposición y en orden, lo podemos hacer de n^k maneras.
- **Muestreo con orden y sin reposición:** Variaciones (sin repetición). Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, sin reposición y en orden, es necesario que $k \leq n$ y lo podemos hacer de $V_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ maneras. El caso particular $k = n$ se reduce a contar los posibles órdenes de los n elementos del conjunto, se conoce como las permutaciones de n y $V_n^n = n!$.
- **Muestreo sin orden y sin reposición:** Combinaciones. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, sin reposición y sin orden, es necesario que $k \leq n$ y lo podemos hacer de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$ maneras.
- **Muestreo sin orden y con reposición:** Este caso no tiene un nombre particular y es el más complicado de los cuatro, pero ya lo hemos encontrado anteriormente, en los problemas 7 y 8 de la sección 9. Si queremos seleccionar k elementos de un conjunto de tamaño n, con reposición y sin orden, esto lo podemos hacer de $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ maneras. Veamos: podemos pensar que a cada elemento del conjunto le asignamos una caja, de modo que en total tenemos n cajas. Tomamos ahora k bolas y las repartimos en las cajas, sin importar si hay cajas vacías o cajas con más de una bola. El número de bolas que hay en una caja representa el número de veces que hemos seleccionado ese elemento en la muestra. Como vimos en el problema 8 de la sección 9, esto efectivamente se puede hacer de $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ maneras.

11. Gráficas, árboles y el algoritmo de Prüfer

11.1. Introducción

Una gráfica (conocidas como *grafos* en otros países latinoamericanos), desde el punto de vista de su interpretación práctica, es una red que consta de puntos (llamados vértices o nodos) y líneas que interconectan pares de puntos (llamadas aristas o lados, ver la figura 15).

Las gráficas se utilizan en distintos contextos de Matemáticas Aplicadas. Veamos algunos ejemplos: En un estudio de un sistema de telefonía, los vértices pudieran representar clientes de una compañía telefónica, y colocaríamos una arista entre dos clientes en caso de que ellos se llamen mutuamente con alta frecuencia. Un estudio como este puede llevar a elaborar recomendaciones que ayuden a los clientes a contratar el plan de pago más conveniente según su patrón de consumo. Para otro ejemplo, podemos considerar los centros computacionales de importancia en la República Mexicana como nuestros vértices, y tendríamos un arco entre dos centros cuando estos se encuentran conectados vía microondas. Este estudio pudiera resultar en recomendaciones sobre como hacer más robusta la red de computación, de manera de minimizar la probabilidad de que un centro importante quede aislado en algún momento. Otra posible aplicación de las gráficas sería la siguiente: Para tratar de identificar grupos de individuos dentro de una red social, similares en cuanto a sus preferencias en algún tema, partimos de una gráfica en la que los vértices son los individuos y tenemos un arco entre dos individuos cuando sus respuestas a una encuesta sobre el tema en cuestión coinciden por encima de un umbral determinado. Como se ve, son diversos los contextos de aplicación en los que el empleo de gráficas puede ser de utilidad.

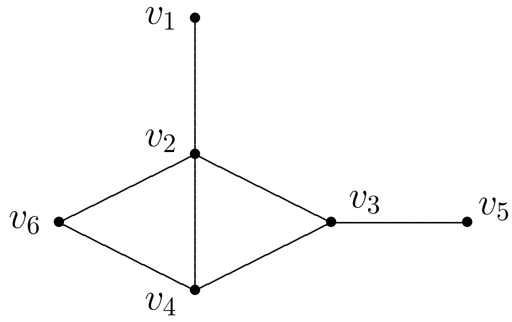


Figura 15. Una gráfica

Desde el punto de vista matemático, una gráfica es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito, llamado el conjunto de vértices, y E es un conjunto de pares no ordenados de dos elementos de V. Es decir, cada elemento e de E es de la forma $\{v_1, v_2\}$, con v_1 y v_2 elementos distintos de V. Por lo tanto, si $\#V = n$, entonces tendremos, de las secciones anteriores, que $\#E \le \binom{n}{2}$. Cuando $\#E = 0$ (no hay arcos) decimos que tenemos una gráfica totalmente disconexa, mientras que si $\#E = \binom{n}{2}$ decimos que G es la gráfica completa en n vértices, que se denota K_n.

11.2. Definiciones básicas

Vamos a introducir ahora varios conceptos necesarios para el estudio de las gráficas. Si $e = \{u, v\} \in E$ es un arco de G, diremos que u y v son *adyacentes* (el uno al otro) y ambos son *incidentes* a e. Dos arcos e_1 y e_2 son adyacentes si tienen un vértice en común. En la gráfica de la Fig. 15, v_1 es adyacente a v_2, el cual también es adyacente a v_3, v_4 y v_6. Como vemos en la Fig. 15, en la red que asociamos a una gráfica, típicamente existen individuos mas populares que otros. En la figura vemos que el vértice v_2 es adyacente a otros 4, mientras que el vértice v_5 solo es adyacente al v_3. El grado del vértice v, $\delta(v)$ es el número de vértices adyacentes a él (o el número de arcos que lo contienen). El Primer Teorema de Teoría de Gráficas (de Euler) dice que $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\#E$. Este teorema se demuestra usando inducción matemática en la cardinalidad de E. La idea es que cada vez que agregamos un arco al grafo, la suma total de los grados aumenta en 2.

Dada una gráfica $G = (V_G, E_G)$, una *subgráfica inducida* de G es la gráfica que se obtiene cuando elegimos algunos de los vértices de G y nos quedamos con estos vértices elegidos y todos los arcos entre ellos en G. Más formalmente, una subgráfica inducida de G es una gráfica $H = (V_H, E_H)$ tal que $V_H \subset V_G$ y para cada par $e = \{u, v\}$ de vértices en V_H, $e \in E_H$ si, y sólo si $e \in E_G$. H es inducido por los vértices en V_H. La Figura 16 muestra una subgráfica inducida de la gráfica de la Fig. 15.

Una *caminata* de longitud r en $G = (V, E)$ es una lista o sucesión finita $v_0, v_1, \ldots, v_r$ de vértices, no necesariamente distintos, de V, tal que para $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. La idea es que los vértices de una caminata podemos visitarlos uno a uno "saltando" por arcos existentes en la gráfica. Una caminata en la que todos los v_i son distintos, es un *camino* de v_0 a v_r. En una gráfica, podemos tener distintos caminos entre dos vértices. La distancia entre dos vértices u y v es la mínima longitud de un camino de u a v (digamos que la distancia es infinita cuando tal camino no existe). La gráfica G es *conexa* cuando existen caminos entre cualesquiera dos vértices de V. Una gráfica de un sólo vértice se considera conexa, por definición.

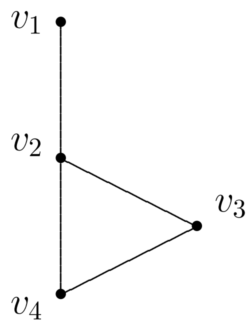


Figura 16. Subgráfica inducida por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Cuando los vértices de una caminata $v_0, v_1, \ldots, v_r$ son todos distintos salvo por $v_0 = v_r$, la caminata es un *ciclo* de longitud r. Un *árbol* es un gráfica $T = (V_T, E_T)$ conexa y sin ciclos. En un árbol, los vértices de grado 1 se denominan *hojas*, mientras que los vértices con grado ≥ 2, se llaman *nodos internos*.

11.3. Propiedades de los árboles

Puede también definirse un árbol como una gráfica conexa en la que para cada par de vértices $u, v \in V_T$, existe un único camino de u a v. Esto, porque de haber dos caminos distintos entre dos vértices, sería posible construir un ciclo. Vamos a probar ahora algunos resultados útiles sobre los árboles.

Proposición 3.1 *Si $T = (V_T, E_T)$ es un árbol y v es una hoja, y eliminamos del árbol el vértice v y su arco incidente e, lo que nos queda es un árbol en los vértices $V_T \setminus \{v\}$.*

Para demostrar esta propiedad, usaremos reducción al absurdo y probaremos que el resultado es cierto a partir de $n = 2$ (para $n = 1$ la única gráfica posible es un punto aislado, que tiene grado 0 y no hay ninguna hoja que quitar). Para $n = 2$, y $V_T = \{u, v\}$, el único árbol posible tiene un único arco, que es justamente $e = \{u, v\}$. Ambos vértices son hojas. Si eliminamos uno de ellos, por ejemplo v y el arco incidente e, solo nos queda el vértice u, sin arcos, y esta es, por definición una gráfica conexa que, además, no tiene ningún ciclo, y por lo tanto es un árbol. Sea ahora $T = (V_T, E_T)$ un árbol con n vértices y $v \in V_T$ una hoja de T. Sea u el único vértice adyacente a v y $e = \{u, v\}$ el arco que los une. Al eliminar v del árbol, e es el único arco que se elimina. Sea $S = (V_T \setminus \{v\}, E_T \setminus \{e\})$ la gráfica resultante. Si S tuviese algún ciclo, ese mismo ciclo estaría en T, lo que no puede ser pues T es un árbol. Veamos ahora si entre dos vértices, w y z de S tenemos un camino en S. Obsérvese primero que ninguno de estos dos vértices es v. Entre estos vértices se tiene un camino $C = (w = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k = z)$ en T. Si este camino no existe en S es porque usa el vértice eliminado v. Supongamos que esto es cierto. Para que el camino pase por v tiene que llegar a él a través del único arco posible, que es $\{u, v\}$. Por tanto, existe un índice j tal que, en el camino C, $v_j = u$ y $v_{j+1} = v$. Como v no puede ser el final del camino entre w y z, después de $v_{j+1} = v$ sigue otro vértice v_{j+2} en el camino. Pero como los caminos no repiten vértices, $v_{j+2} \neq u$, por lo que concluimos que v tiene dos vértices adyacentes en T, lo cual contradice el hecho de que v es una hoja. Llegamos a esta contradicción por suponer que el camino entre w y z pasaba por v, por lo tanto, el camino entre w y z en T no pasa por v, por lo que también existe en S y concluimos que S es conexo. Ya habíamos observado que S no contiene ciclos, así que concluímos que S es un árbol.

Asimismo, tenemos la siguiente:

Proposición 3.2 *Si $T = (V_T, E_T)$ es un árbol y $\#V_T \geq 2$, entonces T tiene por lo menos dos hojas.*

Para probar esta proposición utilizaremos la Prop. 3.1 y el principio de inducción matemática en $n = \#V_T$. En la demostración anterior, ya verificamos que el único árbol con $n = 2$, tiene dos hojas. Supongamos ahora que la proposición es cierta para árboles de hasta $n - 1$ vértices, y sea $T = (V_T, E_T)$ un árbol con n vértices. Supongamos que T no tiene ninguna hoja. En ese caso, todos los vértices de T

tienen $\delta(v) \geq 2$. Bajo esta premisa, vamos a verificar que T contiene un ciclo, lo cual es absurdo, pues T es un árbol. Sea v_0 un vértice de T. Tomamos v_0 como el primer vértice de un camino. Como v_0 tiene grado ≥ 2, podemos encontrar un vértice v_1 adyacente a v_0, que será el segundo en nuestro camino. Como v_1 tiene grado ≥ 2, tiene un vértice adyacente, v_2, distinto de v_0. Hasta ahora nuestro camino es v_0, v_1, v_2. Como v_2 tiene grado ≥ 2, es adyacente a algún vértice distinto a v_1. Si este es v_0, ya tenemos un ciclo. En caso contrario, v_2 es adyacente a un nuevo vértice, v_3, que añadimos a nuestro camino. Otra vez, como v_3 tiene grado ≥ 2, es adyacente a algún vértice distinto a v_2. Si es adyacente a v_0 o v_1, ya tenemos un ciclo. En caso contrario, tenemos un nuevo vértice, v_4, adyacente a v_3, que agregamos a nuestro camino. Seguimos de la misma manera hasta que, en algún paso, el último vértice agregado, v_k, sea adyacente a alguno de los vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{k-2}$, con lo que tendremos un ciclo. Esto tiene que ocurrir, para algún valor de k, porque el número de vértices es finito. Concluimos que T no puede tener cero hojas. Supongamos ahora que T tiene exactamente una hoja. Procedemos a eliminar esa hoja, v y su arco incidente, $e = \{u, v\}$. Por la Proposición anterior, lo que nos queda, $S = (V_T \setminus \{v\}, E_T \setminus \{e\})$ es un árbol en $n-1$ vértices. Entonces, por la hipótesis inductiva, S tiene al menos dos hojas. Al agregar nuevamente el arco e y el vértice v a S, puede que se pierda una hoja (si el vértice al que v se conecta era una hoja en S), pero seguro se gana otra, que es v. Por lo tanto, el número de hojas en T es ≥ 2, lo que contradice la suposición de que T tenía solo una hoja. Conclúimos que T tiene al menos, dos hojas.

11.4. La Enumeración de Prüfer

El Teorema de Cayley dice que en n vértices existen n^{n-2} árboles distintos. Existen varias demostraciones de este resultado. La demostración dada por Prüfer, consiste en dar un procedimiento para asociar a cada árbol con vértices en $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, que pueden ordenarse de menor a mayor, una lista $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ de vértices en V, con repetición permitida. Sabemos, por el principio de multiplicación que existen n^{n-2} posibles listas de longitud $n-2$ de n objetos, con repetición. Por lo tanto la demostración consiste en verificar que el procedimiento que produce la lista es una biyección, es decir, para cada árbol hay una y una sola lista, y para cada lista hay uno y sólo un árbol. Comenzamos viendo como producir la lista de Prüfer, en un ejemplo. Sea T el árbol de la Figura 17. El procedimiento de Prüfer indica lo siguiente: Sea b_1 la hoja de menor índice en el árbol $T_0 = T$. Borramos esta hoja de T_0 y su arco incidente, quedándonos el árbol T_1, y escribimos en la lista, como primer elemento, el vértice adyacente a b_1, a_1. En nuestro caso, b_1 es 2 y $a_1 = 1$. Repetimos el procedimiento en el árbol T_1. Ahora la hoja de menor índice es $b_2 = 4$ que está conectada a $a_2 = 3$. Al borrar b_2 y su arco incidente, nos queda el árbol T_2, en el cual la hoja de menor índice es $b_3 = 5$ adyacente a $a_3 = 6$. Hasta ahora, nuestra lista de Prüfer es $1, 3, 6$. En la Figura 18 se indican los arcos que fueron borrados de T en estos tres primeros pasos. Continuando de la misma manera hasta completar una lista de longitud $n-2 = 7$, obtenemos,

$$\tilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_7) = (1, 3, 6, 6, 6, 1, 3).$$

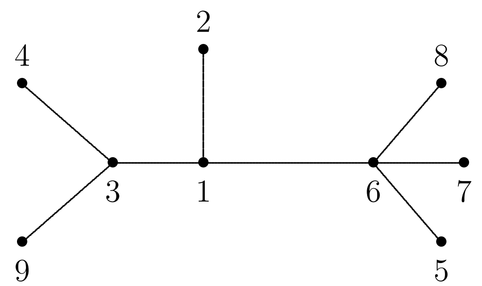


Figura 17. Arbol para el algoritmo de Prüfer.

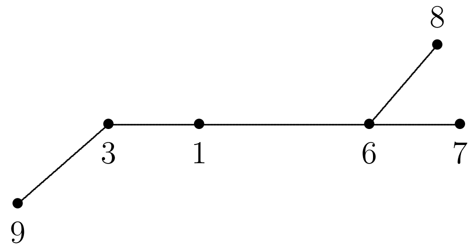


Figura 18. Algoritmo de Prüfer después de tres pasos.

Veamos ahora el procedimiento inverso, para recuperar el árbol a partir de la lista de Prüfer. Lo aplicaremos a la lista que acabamos de obtener. Escribimos la lista auxiliar con todos los vértices de T:

$$\tilde{b} = (1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 9).$$

Como la lista $\tilde{b}$ es más larga que la $\tilde{a}$, existen elementos de $\tilde{b}$ que no están en $\tilde{a}$. Sea b_1 el menor elemento de $\tilde{b}$ que no está en $\tilde{a}$. Procedemos a crear un arco entre b_1 y el primer elemento de $\tilde{a}$, que es a_1. En este caso $b_1 = 2$ y creamos el arco $e_1 = \{2, 1\}$. Borramos a_1 de la lista $\tilde{a}$ y b_1 de la $\tilde{b}$. Repetimos con las listas que quedan. Ahora el menor elemento de $\tilde{b}$ que no está en $\tilde{a}$ es $b_2 = 4$ y lo conectamos con $a_2 = 3$, para obtener el arco $e_2 = \{4, 3\}$. Continuamos de esta manera, uniendo siempre el menor elemento de $\tilde{b}$ que no está en $\tilde{a}$ con el siguiente elemento de $\tilde{a}$. Esto nos produce la lista de arcos siguientes:

$$\{2, 1\}, \{4, 3\}, \{5, 6\}, \{7, 6\}, \{8, 6\}, \{6, 1\} \text{ y } \{1, 3\}.$$

Luego de todos estos pasos, la lista $\tilde{a}$ está vacía, mientras que en $\tilde{b}$ quedan dos elementos: 3 y 9. Los juntamos también en un arco, el $\{3, 9\}$ y vemos que el conjunto de arcos resultantes reproduce exactamente el árbol original.

La demostración de que el procedimiento de Prüfer proporciona una biyección entre los árboles en n vértices y las listas de $n - 2$ elementos tomados de n con repetición se puede hacer por inducción matemática en el número de vértices del árbol. La lista de Prüfer tiene algunas propiedades interesantes. Por ejemplo, de la construcción puede verse que las hojas nunca aparecen en la lista asociada a un árbol. Para aparecer en la lista, el vértice debe ser un nodo interno. De hecho, el número de veces que un vértice aparece en la lista es igual a su grado en el árbol, menos uno. Esta relación permite estudiar propiedades de los árboles a través de las propiedades de las listas de Prüfer correspondientes. Por ejemplo, puede verse que, cuando el número de vértices, n, tiende a ∞, el número de hojas promedio en un árbol es, aproximadamente, $\frac{n}{e}$.

Terminamos esta sección con un conjunto de problemas sobre árboles y gráficas.

1. Verifique que el número de gráficas que tienen conjunto de vértices V, con $n = \#V$, es $2^{\binom{n}{2}}$. Ayuda: Cada arco posible puede estar o no estar en la gráfica.

2. Demostrar el Teorema de Euler (Primer Teorema de Teoría de Gráficas) enunciado en la Sección (11.2).

3. Decimos que una gráfica $G = (V, E)$ es bipartita cuando el conjunto de vértices puede partirse en dos partes V_1 y V_2 disjuntas ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) con $V_1 \cup V_2 = V$, de tal manera que todos los arcos de E unen un vértice de V_1 con uno de V_2.

   (a) Pruebe que todo árbol con dos o más vértices es bipartito.

   (b) Suponga que una gráfica es simplemente un ciclo: $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_0$. ¿En que caso es una gráfica asó bipartita?

4. Pruebe que si en una gráfica G existen dos caminos distintos entre los vértices u y v, entonces G contiene un ciclo.

5. Pruebe que si $T = (V, E)$ es un árbol y eliminamos un arco de E, la gráfica resultante no puede ser conexa.

6. Pruebe que si T es un árbol con n vértices, entonces T tiene $n - 1$ arcos.

7. Sea $T = (V, E)$ un árbol. Sea $e = \{u, v\}$ un arco entre dos vértices de V, tal que $e \notin E$. Pruebe que si al árbol T se le agrega el arco e, entonces la gráfica resultante contiene un ciclo.

12. Ejercicios

1. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados?

2. a) ¿De cuántas maneras podemos escoger un comité de tres personas en un grupo de 20?

   b) ¿De cuántas maneras podemos escoger un presidente, un secretario y un tesorero?

3. Hay N niñas y N niños en una fiesta.

   a) ¿Cuántas parejas de baile de sexos distintos pueden formarse?

   b) ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una fila de modo que los sexos se alternen?

4. Un examen tiene 12 preguntas que pueden ser respondidas *cierto* o $falso$. Si un estudiante decide responder *cierto* a seis de ellas, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

5. Con las letras de la palabra LIBRO, ¿Cuántas palabras de cinco letras o menos (con o sin sentido) pueden formarse? ¿Cuántas de ellas no tienen letras repetidas?

6. Calcule cuántas palabras con o sin sentido pueden formarse con las letras de las siguientes palabras.

   CUAUTITLAN, CUERAMARO, TLALNEPLANTLA TLACOQUEMECATL.

7. Se disponen 5 bolas blancas y 5 negras en 3 cajas numeradas. ¿Cuántas maneras hay de hacerlo?

8. ¿Cuántos números se pueden formar usando todos los dígitos 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

9. En una mesa de un restaurant seis personas ordenan arrachera, tres piden enchiladas, dos piden pollo y uno pide pasta.

   a) ¿De cuántas maneras pueden servirse los 12 platillos de modo que todos reciban lo que ordenaron?

   b) ¿De cuántas maneras pueden servirse de modo que nadie reciba lo que ordenó?

10. Una mano de POKER consiste de cinco cartas tomadas de un juego de barajas. ¿De cuántas maneras se puede obtener

    a) una escalera (cinco cartas en orden, sin importar la pinta; el As puede terminar la escalera pero no comenzarla)?

    b) un trío?

    c) un par?

    d) dos pares?

    e) un par y un trio (full house)?

    f) Halle la probabilidad de los eventos anteriores.

11. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro personas seleccionadas al azar hayan nacido en diferentes dias de la semana?

12. Se disponen en fila 2 bolas blancas y 6 bolas negras de modo que no haya dos bolas blancas consecutivas (la figura indica una manera posible). ¿Cuántas maneras hay de hacerlo?

   ● ● ○ ● ○ ● ●●

13. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco hombres y cinco mujeres en una mesa redonda de modo que no haya dos hombres sentados uno al lado del otro?

14. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco hombres y ocho mujeres en una mesa redonda si los hombres se sientan todos juntos?

15. Seleccionamos cuatro niños al azar y sin reposición de una familia que tiene exactamentes dos varones. La probabilidad de no escoger ningún varón es la mitad de seleccionar ambos ¿Cuántos niños en total hay en la familia?

16. ¿Cuántos números de cinco cifras tienen todas sus cifras de igual paridad (todas pares o todas impares)?

17. En una mesa rectangular los anfitriones se sientan en los extremos. ¿De cuántas maneras se pueden sentar

   a) seis invitados, tres a cada lado?

   b) cuatro mujeres y cuatro hombres, sentados cuatro a cada lado de modo que no haya dos personas del mismo sexo juntas?

   c) ocho invitados, cuatro a cada lado de la mesa, de modo que dos invitados específicos se sienten juntos?

18. ¿De cuántas maneras podemos escoger cuatro cartas de distintas pintas y distintos valores a partir de un juego de 52 cartas?

19. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de bridge (13 cartas) tenga los cuatro aces?

20. ¿Cuántas biyecciones hay de A a B, si ambos conjuntos tienen n elementos?

21. Determine los enteros n tales que $n! > 2^n$.

22. Un restaurante ofrece un menú con las siguientes posibilidades: cuatro sopas para escoger una, dos platillos principales, para escoger uno, dos acompañantes a escoger entre tres tipos de papas, tres tipos de vegetales y una ensalada, Cuatro postres para escoger uno y una bebida de tres.

   a) ¿Cuántas comidas diferentes se pueden ordenar?

   b) ¿Cuántas comidas diferentes se pueden ordenar si sólo hay un tipo de papa en cada orden, suponiendo que no se omite ningún tiempo?

   c) ¿Cuántas comidas diferentes se pueden ordenar si sólo hay un tipo de papa en cada orden, y se omite un tiempo distinto del plato principal?

23. En un grupo de 12 personas hay dos de apellido Pérez. Si no importa el orden, ¿de cuántas maneras se pueden escoger siete personas a) sin restricciones? b) si se deben incluir los dos Pérez? c) sin incluir ningún Pérez? d) si sólo un Pérez se incluye? e) si al menos un Pérez se incluye? f) si a lo sumo un Pérez se incluye?

24. Veintidos caballos de madera distintos se van a colocar en un carrusel en dos círculos concéntricos. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si cada círculo debe tener 11 caballos y cada uno de ellos debe estar al lado de otro caballo?

25. Demuestre que a partir de un conjunto de n elementos se pueden formar 2^{n-1} subconjuntos con un número par de elementos.

26. Sea $\mathcal{A}$ la colección de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que tienen tamaño par (por convención $\emptyset$ tiene tamaño par), y sea $\mathcal{B}$ la colección de los subconjuntos de tamaño impar. Establezca una biyección de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, lo cual demuestra que ambos tienen la misma cardinalidad.

27. Demuestre que $\binom{n}{k}$ y $\binom{2n}{2k}$ tienen la misma paridad, es decir, ambos son pares o ambos son impares.

28. Sea a un número del Triángulo de Pascal. Demuestre que la suma de los números del triángulo que se encuentran dentro del paralelogramo limitado por los lados del triángulo y las diagonales que pasan por a (ver figura 15) es igual a $a - 1$

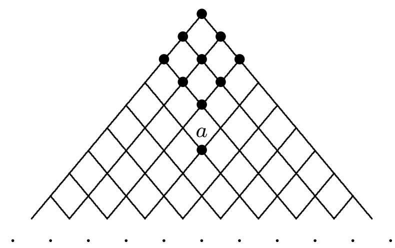


Figura 19

29. Demuestre que hay infinitas filas del triángulo de Pascal que consisten únicamente de números impares.

30. Demuestre las siguientes identidades

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \qquad \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

31. Sea x un elemento de un conjunto A de tamaño $2n$. Cuente los subconjuntos de A de n elementos que incluyen a x y los que lo excluyen. Use esto para demostrar que $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$.

32. Sea $m = \binom{n}{2}$, demuestre que $\binom{m}{2} = 3\binom{n+1}{4}$.

33. Demuestre las siguientes identidades

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1, \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n-1} k = \binom{n}{2}, \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \binom{n}{3}.$$

34. **Fórmula de Van der Monde.** Demuestre que para m, n enteros y $r \leq m \wedge n$,

$$\sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

35. Demuestre que $\binom{n}{k} = \sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1}$.

36. Considere todas las poligonales $(n, S_n), n \geq 0$ que parten del origen – es decir, que $S_0 = 0$ – y que, en cada paso, saltan una unidad hacia arriba o hacia abajo. Dicho de otra manera, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, donde cada X_i vale 1 ó -1.

   a) ¿Cuántas poligonales podemos construir en el intervalo de tiempo $[0, n]$?

   b) ¿Cuántas poligonales satisfacen $S_n = 0$?

   c) Usamos la notación $N_{n,h} = \#\{$ poligonales tales que $S_n = h\}$. Sea k un entero positivo y ℓ un entero no-negativo. Probar que

$$N_{n,k+\ell} = \#\{ \text{ poligonales tales que } S_n = k - \ell, \text{ y para algún } m \leq n \text{ se tiene } S_m = k\}$$

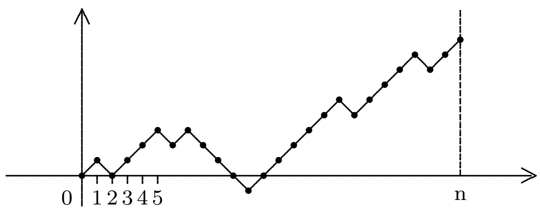


Figura 20

d) Sea k un entero positivo, probar que

$$\#\{\text{poligonales tales que } S_n = 0, \max_{1\leq m\leq n} S_n \geq k\} = N_{n,2k}.$$

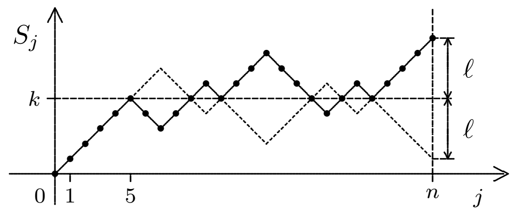


Figura 21

37. Agrupando un conjunto de n^2 puntos de dos maneras distintas, de una prueba combinatoria de $n^2 = 2\binom{n}{2} + n$.

38. Demuestre que $\binom{k}{j}\binom{n}{k} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$ contando los elementos de un conjunto de dos maneras distintas.

39. Consideremos un tablero cuadriculado como el de la figura 22, con las columnas numeradas y las filas indicadas por letras. Supongamos que un punto se mueve sobre los nodos de modo que en cada movimiento se puede dirigir hacia abajo, a la izquierda o a la derecha, pero nunca se devuelve hacia arriba. El punto comienza en la intersección $J12$ viniendo de la calle I. ¿Cuántas rutas distintas hay para

a) llegar a la intersección $L8$ después de 6 movimientos?

b) regresar a $J12$ después de cuatro movimientos?

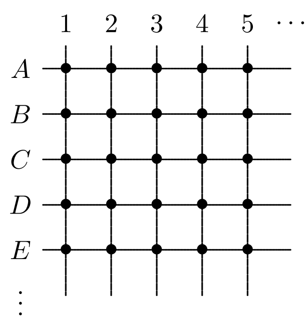


Figura 22

40. En el tablero del problema anterior queremos ir de $B2$ a $J10$ en el menor número posible de movimientos ¿Cuántas rutas posibles hay?

41. ¿Cuántos rectángulos (de cualquier tamaño se pueden formar usando los segmentos de una retícula con m rectas horizontales y n verticales. En la figura 23, $m = 4, n = 6$.

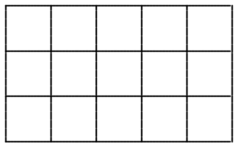


Figura 23