ANÁLISIS COMBINATORIO

Considerando los elementos de un conjunto, se trata de saber, cuales y cuántos son los distintos ordenamientos o agrupaciones que se pueden obtener con los elementos del conjunto, de manera tal que todos y cada uno de ellos (ordenamiento o agrupaciones) tenga el mismo número de componentes.

Interesa además, saber calcular su número sin necesidad de formarlos y contarlos.

Para resolver el problema fundamental del análisis combinatorio se prescinde de la naturaleza de los elementos, pero no de su ordenamiento, pues en algunos casos resulta imprescindible.

En combinatoria se utilizan y definen **"tres"** formas o métodos de obtener los distintos ordenamientos o agrupaciones; cada uno de los cuales posee características propias, que surgen de las condiciones impuestas en la definición.

Estos tres métodos o formas de agrupaciones son: "**variaciones", "permutaciones" y "combinaciones"**, las cuales a su vez cada una de ellas pueden ser: **"simples"** o **"con repetición"**.

ANÁLISIS COMBINATORIO SIMPLE

1. VARIACIONES, ARREGLOS O DISPOSICIONES

Dados "m" objetos a, b, c,……., h, k, l, llámese ***variaciones, arreglos o disposiciones*** de los "m" objetos tomándolos de a "n", o tomados de "n" en "n" o n-arios (siendo n=m), a los grupos de objetos que se pueden formar de modo que:

1) En cada grupo entran "n" de los "m" objetos.

2) Dos grupos se consideran distintos cuando difieren, o bien en alguno de los objetos, o bien en el orden que van colocados.

Si son "m" los elementos y "n" el número de orden (número de elementos de cada grupo) las variaciones las simbolizaremos: $V_{m,n}$ o V_m^n. (Otras notaciones utilizadas son $A_{m,n}$ o A_m^n o bien $D_{m,n}$ o D_m^n)

Por ejemplo, dados los elementos **a, b, c, d**, donde m = 4, se tienen:

Variaciones Monarias: grupos tomados de a 1 elemento, es decir $V_{4,1}$. Ellas son:

(1) a b c d 4 grupos distintos

Variaciones Binarias: grupos tomados de a 2 elementos, es decir $V_{4,2}$. Ellas son:

(2)	ab	ac	ad	12 grupos distintos
	ba	bc	bd	
	ca	cb	cd	
	da	db	dc	

Variaciones Ternarias: Si se toman los grupos de 3 en 3, es decir $V_{4,3}$. Ellas son:

(3)	abc	abd	acb	acd	adb	adc	24 grupos distintos
	bac	bad	bca	bcd	bda	bdc	
	cab	cad	cba	cbd	cda	cdb	
	dab	dac	dba	dbc	dca	dcb	

Finalmente, si se toman grupos de 4 en 4, tendremos

Variaciones Cuaternarias: es decir $V_{4,4}$. Ellas son:

(4) abcd abdc acbd…………
………………………………………
……………………………………… 24 grupos distintos
………………………………………

En cada uno de los cuatro cuadros, se observa que cada arreglo es distinto de los demás porque varía el orden o porque posee algún elemento diferente.

Formación de los arreglos o variaciones

Dados "m" objetos: a, b, c, d,……., k, l
En primer lugar, los arreglos de a uno, son los elementos mismos:

(1) a, b, c, d,……., k, l

Para formar los arreglos binarios de los "m" objetos, tomemos cada arreglo de a uno y coloquémosle después cada uno de los restantes objetos. Por el arreglo "a" que figura en (1) se obtiene: ab, ac, ad,……ah, ak, al, y así también de los demás. En consecuencia todos los arreglos binarios se pueden escribir en un cuadro:

ab, ac, …………...ak, al
ba, bc, …………...bk, bl
…………………………...
(2) …………………………...
ka, kb, …………...kh, kl
la, lb, …………......lh, lk

Para formar los arreglos de a tres, se usa el mismo procedimiento: a partir de cada uno de los arreglos de (2) se le agregan sucesivamente al la derecha todos los objetos que faltan, obteniéndose así todos los arreglos ternarios:

abc, abd, ………abk, abl
acb, acd,……....ack, acl
…………………………...
…………………………...
(3) alb, alc, …………alh, alk
bac, bad, ………bak, bal
…………………………...
…………………………...
lka, lkb, ……………., lkh

Y así sucesivamente. Se observa que el proceso es general y se podrán formar los arreglos n-arios.

Número de arreglos o variaciones

En la generalidad de los casos, más que saber cuales son los grupos posibles, interesa saber cuántos son. Para ello se sigue un procedimiento inductivo:

Según (1), el número de arreglos monarios es: $V_m^1 = m$

En el cuadro (2) se observa que cada arreglo de un elemento se ha combinado con los $(m-1)$ elementos restantes en consecuencia:

$$V_m^2 = V_m^1 \cdot (m-1)$$
$$V_m^2 = m \cdot (m-1)$$

En el cuadro (3) se observa que cada uno de los arreglos binarios se ha combinado con los $(m-2)$ elementos restantes, o sea:

$$V_m^3 = V_m^2 \cdot (m-2)$$
$$V_m^3 = m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$$

Si se hubiesen formado los arreglos cuaternarios de igual forma, se vería que:

$$V_m^4 = V_m^3 \cdot (m-3)$$
$$V_m^4 = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$$

Y así sucesivamente, hasta llegar a:

$$V_m^n = V_m^{n-1} \cdot [m-(n-1)]$$
$$V_m^n = V_m^{n-1} \cdot (m-n+1)$$

Se conviene que $V_m^o = 1$

Ordenando las variaciones de los sucesivos órdenes y multiplicando miembro a miembro se obtiene:

$$\begin{aligned}
V_m^1 &= m \\
V_m^2 &= V_m^1 \cdot (m-1) \\
V_m^3 &= V_m^2 \cdot (m-2) \\
V_m^4 &= V_m^3 \cdot (m-3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
V_m^{n-1} &= V_m^{n-2} \cdot (m-n+2) \\
V_m^n &= V_m^{n-1} \cdot (m-n+1) \\
\hline
\end{aligned}$$

$$V_m^n = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots\ldots (m-n+1)}_{\text{n factores}}$$

O sea que el número de arreglos de "m" elementos de orden "n" es igual al producto de n factores decrecientes a partir de "m".

2. PERMUTACIONES

Formación de las permutaciones

Se llaman ***permutaciones de m objetos*** a las variaciones de orden m de esos mismos objetos. Como en cada permutación intervienen los m objetos, dos permutaciones solo pueden diferir en el orden en que están agrupados sus elementos.

Por ejemplo:

Las permutaciones de las letras A, B, C son: ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA

Donde se observa que en todas figuran las tres letras dispuestas en distinto orden.

Número de permutaciones

Designando como P_m al número de permutaciones de m objetos; por definición se tiene que:

$$P_m = V_m^m$$

Basta hacer n = m en la fórmula de los arreglos, en consecuencia el último factor es:

$$m - m + 1 = 1$$

y como los factores van disminuyendo en una unidad, el penúltimo será 2, el antepenúltimo 3, etc.

En consecuencia:

$$P_m = V_m^m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots\ldots. \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Formas usuales para expresar el número de permutaciones

El producto de los m primeros números naturales distintos de cero se llama **"factorial de m"** y se lo representa por **m!**. En consecuencia, la fórmula que da el número de permutaciones de **m** objetos se puede escribir así:

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots\ldots. \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

3. COMBINACIONES

Se llaman ***combinaciones "n"- arias*** (monarias, binarias, ternarias, etc.) de **"m"** objetos (con m, n∈? y n = m), o ***combinaciones de m objetos tomados de a n por vez***, a los distintos grupos que se pueden formar de manera tal que:

1) En cada grupo entran n de los m objetos.
2) Dos grupos se consideran distintos cuando difieren en alguno de los elementos que lo forman.

En las combinaciones solo se tienen en cuenta los objetos que intervienen en ellas y no en el orden en que estén agrupados en las mismas.

Formación de las combinaciones

Consideremos, por ejemplo, cuatro elementos A, B, C, D, en el orden en que las escribimos. Cada una de esas letras constituye una combinación de primer orden o monaria de los mismos. $\left(C_4^1\right)$

Las combinaciones de segundo orden o binarias se pueden obtener agregando a la derecha de cada una de las de primer orden, cada uno de los objetos que le siguen:

$$AB;\ AC;\ AD;\ BC;\ BD;\ CD\quad \left(C_4^2\right)$$

Las combinaciones de tercer orden se obtienen agregando a la derecha de cada una de las de segundo orden cada uno de los objetos dados que siguen al último de los que figuran en ella, entonces:

$$ABC;\ ABD;\ ACD;\ BCD\ \left(C_4^3\right)$$

Y finalmente las de cuarto orden:

$$ABCD\ \left(C_4^4\right)$$

Número de combinaciones

Si consideramos, por ejemplo, las combinaciones de tercer orden de las letras A, B, C, D y debajo de cada una de ellas expresamos todas las permutaciones que pueden hacerse con sus elementos, obtenemos todos los arreglos de tercer orden de dichas letras:

$$\overbrace{\left.\begin{array}{cccc} ABC & ABD & ACD & BCD \\ ACB & ADB & ADC & BDC \\ BAC & BAD & CAD & CBD \\ BCA & BDA & CDA & CDB \\ CAB & DAB & DAC & DBC \\ CBA & DBA & DCA & DCB \end{array}\right\} P_3}^{C_4^3}$$

Observando el cuadro anterior, se deduce que: $V_4^3 = C_4^3 \cdot P_3 = 4 \cdot 6 = 24$

Razonando en forma análoga para el caso de C_m^n, o sea que formamos todas las C_m^n y con cada una de ellas formamos todas las permutaciones posibles, o sea P_n se obtiene en total:

$$C_m^n \cdot P_n = V_m^n$$

de donde resulta:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_m} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (m-n+1)}{n!}$$

NÚMERO COMBINATORIO

El número de combinaciones de “m” objetos tomados de a “n” en “n” se denomina también número combinatorio y se lo simboliza de la siguiente manera:

$$\binom{m}{n} = C_m^n = \frac{V_m^n}{n!}$$

Por ejemplo:

$$\binom{8}{3} = C_8^3 = \frac{V_8^3}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Otra forma de expresarlo es:

$$\binom{m}{n} = \frac{V_m^n}{n!} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (m-n+1)}{n!}$$

y multiplicando numerador y denominador por $(m-n)!$ se tiene:

$$\binom{m}{n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (m-n+1) \cdot (m-n) \cdot (m-n-1) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n! \cdot (m-n)!}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

<u>Propiedades de los números combinatorios</u>

1)

$$\binom{m}{0} = 1$$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = 1$$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!} = 1 \cdot 0!$$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!} = 0! \qquad \Rightarrow \qquad 0! = 1$$

2)

$$\binom{m}{m} = 1$$

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m! \cdot (m-m)!} = 1$$

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m! \cdot 0!} = 1$$

3) Números combinatorios complementarios

<u>Definición</u>: Dos combinaciones del mismo número de objetos son complementarias cuando la suma de sus órdenes es igual al número de objetos:

$$\binom{m}{n} \text{ y } \binom{m}{m-n} \text{ son complementarios ya que } n + m - n = m$$

<u>Propiedad</u>: los números combinatorios complementarios son iguales.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot [m-(m-n)]!}$$

$$\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

4) La suma de dos números combinatorios de igual base (número de objetos), y de órdenes consecutivas $(n-1 \text{ y } n)$ da por resultado el número combinatorio de orden n y base inmediatamente superior.

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$$

$$\frac{(m-1)!}{(n-1)! \cdot [(m-1)-(n-1)]!} + \frac{(m-1)!}{n! \cdot (m-1-n)!} = \frac{(m-1)!}{(n-1)! \cdot (m-n)!} + \frac{(m-1)! \cdot (m-n)}{n \cdot (n-1)! \cdot (m-n)!} =$$

$$\frac{(m-1)! \cdot (n+m-n)}{n \cdot (n-1)! \cdot (m-n)!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = \binom{m}{n}$$

$$m! = m \cdot (m-1)! \Rightarrow (m-n)! = (m-n-1)! \cdot (m-n)$$

$$(m-n-1)! = \frac{(m-n)!}{m-n}$$

Triángulo de Tartaglia

Considerando que $C_m^1 = m$ y $C_m^0 = 1$ y que 0! = 1, para un valor dado de m, dicho triángulo permite calcular con facilidad todas las C_m^n. Procedemos así:

En una primera fila se colocan: $C_1^0 = C_1^1 = 1$, en una segunda fila C_2^0, C_2^1, C_2^2, en una tercer fila $C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3$, hasta que en una enésima fila se colocan $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_n^n$. Se obtiene un triángulo aritmético llamado triángulo de Tartaglia, en el que cada término es la suma de los dos más cercanos de la fila anterior:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………

Generalización de los números combinatorios

La máxima generalización conveniente la constituye el símbolo $\binom{V}{m}$, definido por:

$$(I)\quad \begin{cases} \binom{V}{n} = \dfrac{V(V-1)\cdot(V-2)\cdot\ldots\ldots\cdot(V-n+1)}{n!} & (n = 1, 2, 3\ldots\ldots) \\ \binom{V}{0} = 1 & \end{cases}$$

siendo $V \in$?

Por ejemplo:

$$\binom{2/5}{4} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-2\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-3\right)}{4!} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(-\frac{13}{5}\right)}{24} = -\frac{624}{625}\cdot\frac{1}{24} = -\frac{26}{625}$$

$$\binom{\pi}{3} = \frac{\pi\cdot(\pi-1)\cdot(\pi-2)}{3!} \cong \frac{3{,}14\cdot 2{,}14\cdot 1{,}14}{6} \cong 1{,}276724$$

$$\binom{-\pi}{3} \cong \frac{(-3{,}14)\cdot(-4{,}14)\cdot(-5{,}14)}{6} \cong -11{,}136324$$

El símbolo $\binom{V}{n}$ se lee "V sobre n" como si fuera una fracción, y el conjunto de los $\binom{V}{n}$ se llaman coeficientes binomiales. Para V = m entero y positivo, $\binom{m}{n}$ coincide con el número combinatorio C_m^n.

De las propiedades anteriormente expresadas, la tercera (números combinatorios complementarios), deja de tener sentido para $\binom{V}{m}$, pero las otras valen con toda generalidad.

Obsérvese que también la (I) define $\binom{m}{n}$, siendo **m** y **n** naturales tales que n > m, pero en tal caso, $\binom{m}{n} = 0$ pues en el numerador aparece el factor $(m-m) = 0$.

Por ejemplo:

$$\binom{3}{6} = \frac{3\cdot(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-3)\cdot(3-4)\cdot(3-5)}{6!} = 0$$

ANÁLISIS COMBINATORIO CON REPETICIÓN

Hasta ahora hemos supuesto que en cada variación (arreglo), permutación o combinación, los objetos que intervienen son todos distintos entre si. Si se omite esa suposición, se tendrán las variaciones, permutaciones o combinaciones con repetición.

1. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Las variaciones o arreglos de m objetos, n-arios (monarios, binarios, etc.), concuerda con la definición dada anteriormente para los arreglos simples sin más que agregar a la condición la cláusula: "no necesariamente distintos" (los objetos).

Formación y número de variaciones o arreglos con repetición

Por ejemplo: los arreglos binarios con repetición de cinco objetos a, b, c, d, e son:

aa	ab	ac	ad	ae	
ba	bb	bc	bd	be	
ca	cb	cc	cd	ce	$V'_{5,2}$
da	db	dc	dd	de	
ea	eb	ec	ed	ee	

En este ejemplo se aprecia como se forman los arreglos binarios a partir de los monarios (que no son sino los objetos mismos a, b, c, d, e), agregando a continuación de cada uno de estos, sucesivamente todos los objetos.

O sea que si llamamos:

$$V'_{m,n}$$

$$V'_{m,1} = m$$

$$V'_{m,2} = V'_{m,1} \cdot m$$

De igual manera, a partir de los arreglos binarios se forman los ternarios agregando sucesivamente todos los objetos a continuación de cada uno de los binarios. En consecuencia, el número de arreglos binarios se ve multiplicado por m. Este es un procedimiento general que nos permite concluir diciendo que los arreglos n-arios de m objetos con repetición, es igual al de orden $(n-1)$ multiplicado por m.

O sea:

$$V'_{m,n} = V'_{m,n-1} \cdot m$$

y si se conviene que $V'_{m,0} = 1$

Podemos deducir que $V'_{m,1} = m$

$$V'_{m,2} = V'_{m,1} \cdot m = m \cdot m = m^2$$

$$V'_{m,3} = V'_{m,2} \cdot m = m^2 \cdot m = m^3$$

………………

………………

$$V'_{m,n} = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots\ldots\cdot m}_{n\text{veces}} = m^n$$

Como se observa, no hay inconveniente en que n>m.

2. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Son las variaciones o arreglos m-arios de los m objetos. En consecuencia:

$$P'_m = V'_{m,m}$$

Por ejemplo:
Si permutamos los objetos 1, 2, 3:

111	112	113	121	122	123	131	132	133
211	212	213	221	222	223	231	232	233
311	312	313	321	322	323	331	332	333

Permutaciones con grupos de elementos iguales

Estos grupos presentan similitud con las permutaciones con repetición, pero no deben confundirse.

Sean dados un grupo **"p"** de elementos iguales; otro grupo **"q"** de elementos iguales entre sí, pero distinto de los anteriores; otro grupo **"r"** de elementos iguales entre sí y distinto de los anteriores; etc. Y, finalmente, otro grupo de **"t"** de elementos iguales entre sí y distinto de todos los demás grupos.

El número total de elementos u objetos es $n = p + q + r + \ldots\ldots + t$.

Se llaman *permutaciones de los n elementos, de clase (p, q, r, …….t)* a las agrupaciones de los n objetos que difieran en la colocación u orden en que van dispuestos.

Su número será:

$$\begin{cases} P_n^{p,q,r,\ldots.t} = \dfrac{n!}{p!\cdot q!\cdot r!\cdot \ldots\ldots \cdot t!} \\ p + q + r + \ldots\ldots\ldots t = n \end{cases}$$

3. COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Las *combinaciones con repetición de m objetos tomándolos de "n" en "n"*, o sea, n-arias, se definen como las combinaciones simples, sin más que agregar a la definición la cláusula de que los n objetos que forman cada combinación no son necesariamente distintos.

Dados m objetos, si deseamos formar combinaciones simples, éstas solamente pueden ser de órdenes 1, 2, 3, …….., m. En cambio, si formamos combinaciones con repetición, éstas podrán ser de cualquier orden, por grande que sea.

Por ejemplo:

Con los objetos **a, b, c** se pueden formar *binarias*: aa ab ac bb bc cc $\quad C'_{3,2} = C^2_{3+2-1} = C^2_4$.

Ternarias: aaa aab aac abb abc acc bbb bbc bcc ccc $\quad C'_{3,3} = C^3_{3+3-1} = C^3_5$

Cuaternarias: aaaa aabb aacc abbb abcc accc bbbb bbcc bccc cccc aaab aabc abbc bbbc aaac $C'_{3,4} = C^4_{3+4-1} = C^4_6$

En general: $$C'_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

PRODUCTO DE FACTORES BINOMIALES CON UN TÉRMINO COMÚN

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$(x + a)(x + b)(x + c) = [x^2 + (a+b)x + ab](x + c)$
$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = [x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc](x + d) =$
$= x^4 + x^3 d + (a + b + c)x^3 + x^2(a + b + c)d + x^2(ab + ac + bc) + x(ab + ac + bc)d + x\,abc + abcd =$
$x^4 + x^3(a + b + c + d) + x^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd$
....
....

En general: $(x + a).(x + b).(x + c)\ldots\ldots\ldots\ldots(x + i).(x + j).(x + k) =$
$x^n + x^{n-1}(a + b + c + \ldots\ldots\ldots + i + j + k) + x^{n-2}(ab + ac + \ldots\ldots\ldots + jk) + x^{n-3}(abc + \ldots\ldots\ldots\ldots + ijk) +$
$+ x(abc\ldots\ldots\ldots ij + \ldots\ldots . + bc\ldots\ldots\ldots jk) + abc\ldots\ldots\ldots ijk$

BINOMIO DE NEWTON

$$(x+a)^n = \overbrace{(x+a)\cdot(x+a)\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot(x+a)}^{n}$$

$$(x+a)^n = x^n + x^{n-1}(a+a+\ldots+a) + x^{n-2}(aa+aa+\ldots+aa) +$$
$$+ x^{n-3}(aaa+aaa+\ldots+aaa) + \ldots\ldots + x\left(\underbrace{aa\ldots a}_{n-1} + \ldots\ldots + \underbrace{aa\ldots a}_{n-1}\right) + \underbrace{aaa\ldots a}_{n}$$

A continuación se calcula cada uno de los coeficientes de las "x":

El coeficiente de x^{n-1} es $(a+a+\ldots+a) = n\cdot a$

El coeficiente de x^{n-2} es $(aa+aa+\ldots+aa) = (a^2 + a^2 + \ldots + a^2)$

Cada término es a^2 y el número de esos términos es el número de combinaciones de n elementos "a" tomados de dos en dos, es decir $\binom{n}{2}$ términos iguales a a^2, o sea:

$$(aa+aa+\ldots+aa) = \underbrace{(a^2 + a^2 + \ldots + a^2)}_{\binom{n}{2}} = \binom{n}{2}\cdot a^2$$

El coeficiente de x^{n-3} es $(aaa+aaa+\ldots+aaa) = (a^3 + a^3 + \ldots + a^3)$, cada término es a^3 y el número de esos términos es el número de combinaciones de los n elementos "a" tomados de 3 en 3, es decir $\binom{n}{3}$ términos iguales a a^3, o sea:

$$(aaa+aaa+\ldots+aaa) = \underbrace{(a^3 + a^3 + \ldots + a^3)}_{\binom{n}{3}} = \binom{n}{3}\cdot a^3$$

Análogamente,

El coeficiente de x es $\left(\underbrace{aa\ldots a}_{n-1}+\ldots\ldots+\underbrace{aa\ldots a}_{n-1}\right)$, donde cada término es igual a a^{n-1}. El número de esos términos es el número de combinaciones de n elementos "a" tomados de $(n-1)$ en $(n-1)$, es decir $\binom{n}{n-1}$ términos iguales a a^{n-1}, o sea:

$$\left(\underbrace{aa\ldots a}_{n-1}+\ldots\ldots+\underbrace{aa\ldots a}_{n-1}\right)=\underbrace{a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots\ldots+a^{n-1}}_{\binom{n}{n-1}}=\binom{n}{n-1}\cdot a^{n-1}$$

El último término es $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{n}=a^n$

Luego, reemplazando los coeficientes por los valores calculados, se obtiene:

$$(x+a)^n = x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot a+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot a^2+\binom{n}{3}\cdot x^{n-3}\cdot a^3+\ldots\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot x\cdot a^{n-1}+a^n$$

que es la expresión de la llamada **regla de Newton**, la cual también puede escribirse así:

$$(x+a)^n =$$
$$=\binom{n}{0}\cdot x^n+\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot a+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot a^2+\ldots\ldots+\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot a^k+\ldots\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot x\cdot a^{n-1}+\binom{n}{n}a^n$$

O también, en general: $\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k}$

Algunas observaciones

1) El desarrollo de la potencia n-sima de un binomio tiene **n+1** términos, según lo indica la variación de **k**, desde **0** hasta **n**.
2) Se puede demostrar que el término de lugar **h** en el desarrollo es:

$$\boxed{T_h=\binom{n}{h-1}\cdot a^{n-(h-1)}\cdot b^{h-1}}$$