

UNIVERSIDADE DE ÉVORA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA RURAL

# HIDRÁULICA GERAL

APONTAMENTOS DAS AULAS TEÓRICAS

ENGENHARIA AGRÍCOLA  
ENGENHARIA BIOFÍSICA  
ENGENHARIA GEOLÓGICA

Maria Madalena V. Moreira Vasconcelos

Évora, 2004

## Capítulo 1

### **FORÇAS EXTERIORES E PROPRIEDADES DOS FLUIDOS**

*Objectivo: Reconhecer as forças exteriores que actuam sobre um dado volume de fluido, as propriedades físicas dos fluidos e a sua importância para o estudo dos escoamentos.*

#### **1.1 Definição de fluido**

Denomina-se fluido a toda a matéria que se deforma indefinidamente quando sujeita à acção de uma força tangencial. Nos fluidos a resistência à deformação é finita e por isso não têm forma própria, tomando a forma do recipiente que ocupam.

Na definição anterior podem enquadrar-se os líquidos e os gases. No entanto, estes fluidos apresentam comportamentos muito diferentes.

#### **1.2 Forças exteriores**

Num dado volume de fluido podem actuar dois tipos de forças exteriores; as forças de massa ou volume e as forças de contacto ou de superfície.

As forças de massa ou volume são as forças que actuam directamente sobre cada uma das partículas que constituem o fluido, no âmbito deste estudo apenas é considerada a força relativa à acção da gravidade, denominada por peso próprio.

As forças de contacto ou superfície são as forças que actuam no volume de fluido através da sua superfície limítrofe. Estas forças podem decompor-se na componente normal e na componente tangencial à superfície. A componente normal da força de contacto, por unidade de superfície é designada por pressão. A componente tangencial da força de contacto, por unidade de superfície é designada por tensão tangencial e só se manifesta quando os fluidos estão em movimento.

### 1.3 Propriedades físicas dos fluidos

#### 1.3.1 Isotropia

Diz-se que um fluido goza da propriedade da isotropia se cada partícula que constitui o fluido, possuir as mesmas características independentemente da direcção da normal a cada um dos planos que passa nessa partícula.

#### 1.3.2 Massa, peso, massa volúmica, peso volúmico e densidade

Massa,  $m$ , é a quantidade de matéria que existe num dado volume de fluido e o peso,  $\vec{P}$  ou  $\vec{G}$ , é a acção da força atractiva exercida pela Terra (força da gravidade) sobre essa massa. Por definição, o peso é obtido pelo produto da massa pela aceleração da gravidade.

Estas grandezas não apresentam grande interesse na Mecânica dos Fluidos se não introduzirem uma referência relativa ao volume. Assim, define-se massa volúmica,  $\rho$ , como a massa que existe por unidade de volume do fluido e peso volúmico,  $\gamma$ , como o peso da unidade de volume do fluido. O peso volúmico é obtido pelo produto da massa volúmica pela aceleração da gravidade. Estas duas grandezas são características de cada fluido, podendo variar mais ou menos com a temperatura.

As unidades destas grandezas no sistema internacional são apresentadas no Quadro 1.1.

Quadro 1.1 Unidades das grandezas no SI

Grandeza	massa	peso	massa volúmica	peso volúmico
Unidade	kg	kg m s <sup>-2</sup> = N	kg m <sup>-3</sup>	kg m <sup>-2</sup> s <sup>-2</sup> = N m <sup>-3</sup>

No Quadro 1.2 são apresentados os valores da massa volúmica e do peso volúmico da água e do ar para diferentes temperaturas, à pressão atmosférica normal. Verifica-se que a água apresenta o valor máximo da massa volúmica para a temperatura de 4°C e que diminui cerca de 4,2% quando a temperatura varia entre os 4°C e os 100°C. No caso do ar, a massa volúmica diminui sempre com a temperatura e apresenta a diminuição de cerca de 26,8% quando a temperatura varia entre os 0°C e os 100°C.

De um modo geral os gases apresentam maior variação da massa ou peso volúmico com a temperatura do que os líquidos.

Quadro 1.2 Valores da massa volúmica e do peso volúmico para diferentes temperaturas, à pressão atmosférica normal

temperatura (°C)	massa volúmica (kg m <sup>-3</sup> )		peso volúmico (N m <sup>-3</sup> )	
	água	Ar	água	ar
0	999,9	1,293	9809,0	12,68
4	1000,0	1,274	9810,0	12,50
10	999,7		9807,1	
20	998,2	1,204	9792,3	11,81
30	995,7		9767,8	
40	992,2	1,129	9733,5	11,08
50	988,1		9693,3	
60	983,2	1,062	9645,2	10,42
80	971,8	1,009	9533,4	9,90
100	958,4	0,946	9401,9	9,28

Para simplificar esta caracterização física dos fluidos aplica-se uma grandeza adimensional que é a densidade, **d**. Esta grandeza relaciona a massa ou peso de um dado volume de fluido com a massa ou peso de igual volume de água à temperatura de 4°C e à pressão atmosférica normal. A densidade de um dado fluido pode ser determinada pela relação entre a massa volúmica ou peso volúmico desse fluido e a massa volúmica ou peso volúmico da água à temperatura de 4°C e à pressão atmosférica normal.

No Quadro 1.3 são apresentados os valores da densidade relativos a diferentes líquidos e gases à temperatura de 15,6°C e à pressão atmosférica normal.

Quadro 1.3 Densidade de alguns fluidos à temperatura de 15,6 °C e pressão atmosférica normal

<b>fluido</b>	gasolina	ácido etílico (100%)	azeite	ácido sulfúrico (100%)	mercúrio
<b>densidade</b>	0,68 a 0,74	0,79	0,912-0,918	1,83	13,6
<b>fluido</b>	ar	dióxido de carbono	oxigénio	hidrogénio	hélio
<b>densidade</b>	1,22 E-3	1,87 E-3	1,35 E-3	0,085 E-3	0,17 E-3

A comparação dos valores da densidade dos líquidos e dos gases permite identificar a primeira grande diferença entre estes fluidos, a quantidade de massa por unidade de volume nos gases é da ordem de grandeza de cerca de 1000 vezes inferior à quantidade de massa por unidade de volume nos líquidos.

### 1.3.3 Compressibilidade

A compressibilidade de um fluido manifesta-se na diminuição do volume de uma dada massa de fluido quando sujeita à acção de um aumento de pressão. Neste caso verifica-se o aumento da massa volúmica do fluido.

Esta propriedade pode ser representada através do coeficiente de compressibilidade,  $\alpha$ , definido como a relação entre a diminuição relativa do volume e o aumento de pressão que lhe deu origem.

$$\alpha = - \frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} \quad (1.1)$$

É ainda usado o inverso deste coeficiente, o módulo de elasticidade volumétrico,  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{1}{\alpha} \quad (1.2)$$

Tendo em conta a diferença entre a massa volúmica dos líquidos e dos gases será fácil perceber que nos gases existe mais espaço entre as moléculas, permitindo uma maior diminuição do volume para a mesma variação de pressão.

O valor do coeficiente de compressibilidade da água é de  $5,1 \text{ E-}10 \text{ m}^2\text{N}^{-1}$ .

### 1.3.4 Viscosidade. Líquidos perfeitos

A viscosidade é uma das propriedades mais importantes para o estudo dos fluidos, que se manifesta quando estes entram em movimento. Pode, de modo geral, definir-se como a resistência à deformação, ou seja, a maior ou menor capacidade do fluido tomar a forma do recipiente que ocupa. A comparação de duas situações práticas em que se despeja uma quantidade de mel ou água de um jarro para um copo permite-nos concluir que o mel tem uma viscosidade superior à viscosidade da água.

A quantificação da viscosidade é facilmente entendida através da análise do escoamento unidimensional de um fluido em que se define um conjunto de camadas que se deslocam na mesma direcção, mas com velocidades diferentes, figura 1.1. A camada com maior velocidade tende a exercer uma força de arrastamento sobre a camada com menor velocidade, que por sua vez exerce uma força resistente sobre a primeira. Estas duas forças têm o mesmo módulo, a mesma direcção e sentidos opostos. À força resistente por unidade de área chama-se tensão tangencial de atrito,  $\tau$ , apresentando sempre o sentido contrário ao sentido do escoamento.

Os fluidos estudados no âmbito desta disciplina (água, ar, óleos) pertencem aos chamados fluidos Newtonianos em que a relação entre a tensão tangencial de atrito e o gradiente da velocidade, na direção normal ao escoamento, é linear, figura 1.1:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.3)$$

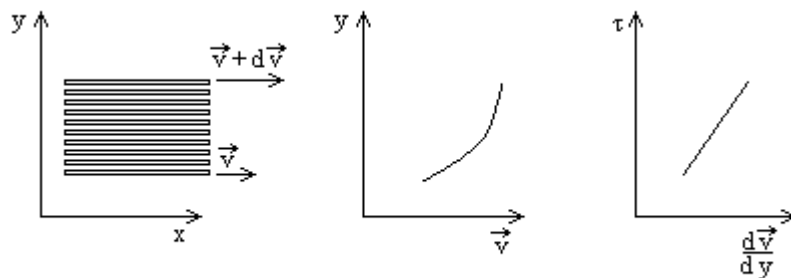


Figura 1.1 Movimento unidimensional de um fluido Newtoniano (escala deformada)

O coeficiente de proporcionalidade é a viscosidade dinâmica,  $\mu$ . Por simplificação, nos desenvolvimentos hidráulicos é normalmente usado um parâmetro, designado por viscosidade cinemática,  $\nu$ , relacionado com a viscosidade dinâmica através da equação:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.4)$$

No Quadro 1.4 são apresentados os valores da viscosidade cinemática para diferentes fluidos.

Quadro 1.4 Viscosidade cinemática para diferentes fluidos a 38°C

fluido	mercúrio	gasolina	azeite	mel bruto
viscosidade cinemática ( $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )	0,11	0,40 - 0,71	43	74

A viscosidade dos fluidos Newtonianos varia com a temperatura, no entanto de forma diferente nos líquidos e nos gases. A viscosidade nos líquidos diminui com o aumento da temperatura por diminuição das forças tangenciais de resistência. A viscosidade nos gases manifesta-se pelo movimento das partículas, aumentando com a temperatura.

No Quadro 1.5 e no Quadro 1.6 são apresentados os valores da viscosidade cinemática para diferentes temperaturas no caso da água e do ar, respectivamente. É possível identificar a diminuição da viscosidade na água e o aumento da viscosidade no ar, com o aumento da temperatura. Para variações de temperatura entre os 0°C e os 20°C a variação da viscosidade cinemática é de cerca de -43.3% e 8.5% para a água e para o ar, respectivamente. A variação da viscosidade cinemática com a temperatura na água é muito mais importante que a variação no ar.

Quadro 1.5 Viscosidade cinemática da água a diferentes temperaturas e à pressão atmosférica normal

temperatura (°C)	0	4	10	20	30	40	50	80	100
viscosidade cinemática ( $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )	1,78	1,57	1,31	1,01	0,80	0,66	0,56	0,37	0,30

Quadro 1.6 Viscosidade cinemática do ar a diferentes temperaturas e à pressão atmosférica normal

temperatura (°C)	0	20	40	60	80	100	120	150
viscosidade cinemática ( $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )	11,7	12,7	13,6	14,7	15,7	16,6	17,5	19,3

Sendo a viscosidade cinemática uma medida da resistência entre partículas do fluido em movimento, deve ser tomada em consideração a sua variação com a temperatura no estudo do escoamento da água. Na figura 1.2 representa-se a variação da viscosidade cinemática da água com a temperatura num sistema de eixos, permitindo visualizar a importante variação da viscosidade cinemática dentro da gama de temperaturas da água dos escoamentos em estudo no âmbito desta disciplina. É ainda apresentada a curva de ajustamento calculada pelo Método dos Mínimos Quadrados, correspondente a um coeficiente de determinação igual à unidade.

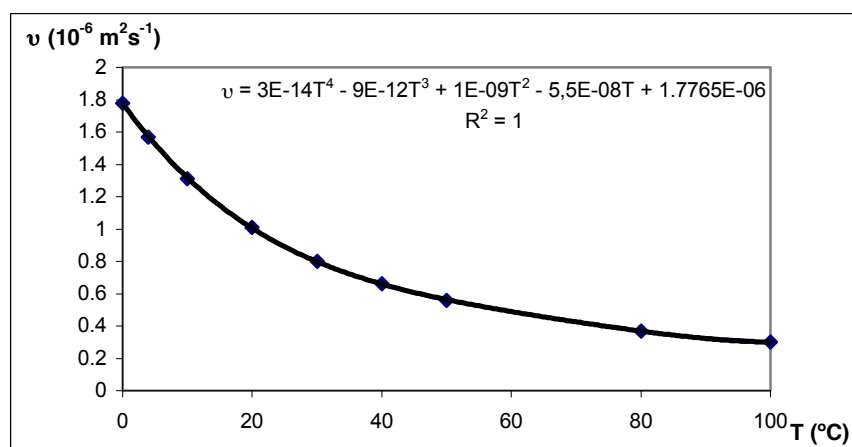


Figura 1.2 Variação da viscosidade cinemática da água com a temperatura

Designa-se por fluido perfeito ou ideal aquele que, sendo homogêneo e isotrópico, se apresenta sem viscosidade. Naturalmente que este fluido não existe na natureza, tornando-se um conceito teórico. Existem, no entanto fluidos que, em certas circunstâncias, se comportam como perfeitos, é o caso de fluidos com elevadas acelerações em que as forças entre as partículas que o constituem são desprezáveis. Para as mesmas condições geométricas, à medida que a velocidade de escoamento do fluido aumenta, menor é a influência da viscosidade.

### 1.3.5 Tensão de saturação do vapor de um líquido

Define-se como tensão de saturação do vapor de um líquido a pressão absoluta para a qual o líquido passa ao estado gasoso. Os líquidos, à pressão atmosférica local, apresentam gases dissolvidos. Quando a pressão toma valores abaixo da pressão atmosférica local ocorre a libertação parcial dos gases dissolvidos e se a pressão continuar a diminuir e atingir o valor da tensão de vaporização o líquido passa ao estado gasoso.

A tensão de saturação do vapor da água varia com a temperatura atingindo o valor da pressão atmosfera normal à temperatura de 100°C e ao nível médio da água do mar. No Quadro 1.9 são apresentados os valores desta grandeza para diferentes temperaturas.

Quadro 1.9 Tensão de saturação do vapor da água a diferentes temperaturas

Temperatura (°C)	0	4	10	20	30	40	50	80	100
Tensão de saturação do vapor da água (N/m <sup>2</sup> )	608	814	1226	2345	4248	7387	12341	47392	101367





## Capítulo 2

### HIDROSTÁTICA

*Objectivo: Perceber a dedução da Lei Hidrostática de Pressões, calcular a resultante das forças (módulo, direcção, sentido e ponto de aplicação) de um líquido em repouso sobre uma fronteira sólida.*

#### 2.1 Introdução

Hidrostática é o capítulo da Hidráulica que estuda os fluidos em repouso. Qualquer fenómeno hidráulico em que a temperatura é constante, o fluido incompressível e a velocidade das partículas nula, tem como incógnita a pressão. Para caracterizar o comportamento do fluido em repouso é necessário determinar a relação entre os valores da pressão nas diferentes partículas da massa fluida.

#### 2.2 Lei Hidrostática de Pressões

A Equação Fundamental da Dinâmica, equação 2.1, aplicada a um dado volume de fluido anula a resultante das forças que actuam sobre esse volume de fluido.

$$\vec{F}_e = m \cdot \vec{a} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_e - m \cdot \vec{a} = 0 \quad (2.1)$$

A resultante das forças exteriores que actuam sobre o volume de fluido é igual em módulo, tem a mesma direcção e sentido contrário à força de inércia desse volume ( $-m\vec{a}$ ).

No caso de um fluido em repouso a aceleração é nula, obtendo-se:

$$\vec{F}_e = \vec{0} \quad (2.2)$$

As forças exteriores que actuam sobre um dado volume de fluido em repouso e sujeito à acção da gravidade são, equação 2.3:

- a força de massa ou volume (peso próprio,  $\vec{G}$ ) e
- as forças de contacto ou de superfície (resultante da componente normal,  $\vec{\Pi}$ ).

A resultante da componente tangencial das forças de contacto ou de superfície não se manifesta porque o líquido está em repouso.

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = \vec{0} \quad (2.3)$$

Esta equação vectorial é aplicada a um dado volume de fluido e resolvida através das suas componentes num sistema de eixos cartesianos.

A componente segundo um eixo cartesiano permitirá determinar a variação da pressão a que estão sujeitas as partículas localizadas sobre esse eixo, devendo porém a pressão ser constante segundo as outras direcções do sistema de eixos. Assim, o volume de fluido a considerar é um cilíndrico com o eixo longitudinal coincidente com o eixo cartesiano da componente em estudo, altura igual à distância entre duas partículas localizadas nesse eixo e base com área elementar. A pressão na base é considerada constante e igual à pressão no seu centro de gravidade, coincidente com a pressão da partícula aí localizada. A equação resultante relaciona a pressão das partículas localizadas nas bases do cilindro. Não sendo imposta a altura do cilindro, a equação pode ser aplicada a quaisquer duas partículas sobre o eixo cartesiano em estudo.

#### Estudo da variação da pressão segundo o eixo oy:

Aplicando a componente segundo o eixo oy da equação 2.3 ao volume representado na figura 2.1, verifica-se que o peso próprio do cilindro e as componentes normais das forças de contacto que actuam sobre a parede lateral do cilindro não têm componente segundo o eixo oy. A força de contacto normal (com o sentido da superfície premida) sobre cada base do cilindro é igual ao produto da pressão na partícula localizada no centro de gravidade dessa base pela área da base, obtendo-se a seguinte equação simplificada:

$$p_1 dA - p_2 dA = 0 \quad (2.4)$$

Dividindo pela área elementar finita, dA, obtém-se:

$$p_1 = p_2 \quad (2.5)$$

Tendo sido as partículas 1 e 2 localizadas sobre o eixo oy sem restrições relativamente ao seu afastamento, é possível generalizar o resultado: a pressão é constante em todas as partículas localizadas sobre o eixo oy, equação 2.6.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

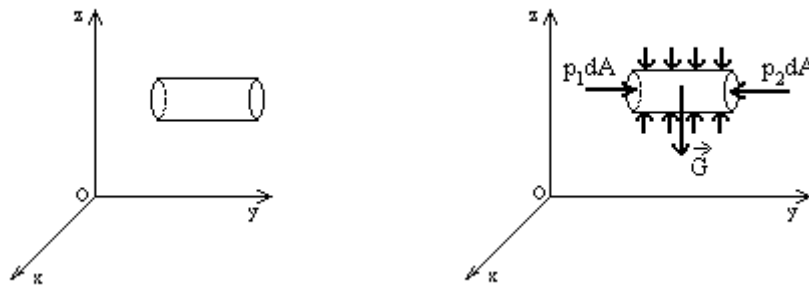


Figura 2.1 Aplicação da componente segundo o eixo oy, da equação fundamental da dinâmica

Estudo da variação da pressão segundo o eixo ox:

Este estudo, com as mesmas características do anterior, permite concluir que a variação da pressão segundo o eixo ox é igual a zero, ou seja a pressão é constante em todas as partículas localizadas sobre o eixo ox:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Tendo em conta que o eixo ox e o eixo oy definem um plano horizontal, que a pressão é constante nas partículas localizadas sobre o eixo ox e é constante nas partículas localizadas no eixo oy, então a pressão é constante em qualquer partícula localizada sobre um plano horizontal.

Estudo da variação da pressão segundo o eixo oz:

Aplicando a componente segundo o eixo oz da equação 2.3 ao volume apresentado na figura 2.2, verificamos que as forças de contacto normais que actuam sobre a parede lateral do cilindro não têm componente segundo o eixo oz. O peso próprio é determinado pelo produto do peso volúmico do fluido pelo volume do cilindro. A força de contacto normal (com o sentido da superfície premida) sobre cada base do cilindro é igual ao produto da pressão na partícula localizada no centro de gravidade dessa base pela área da base, obtendo-se a seguinte equação simplificada:

$$-\gamma(z_5 - z_6)dA - p_5 dA + p_6 dA = 0 \quad (2.8)$$

Dividindo a equação (2.8) pela área elementar finita dA, vem:

$$-\gamma(z_5 - z_6) - p_5 + p_6 = 0 \quad (2.9)$$

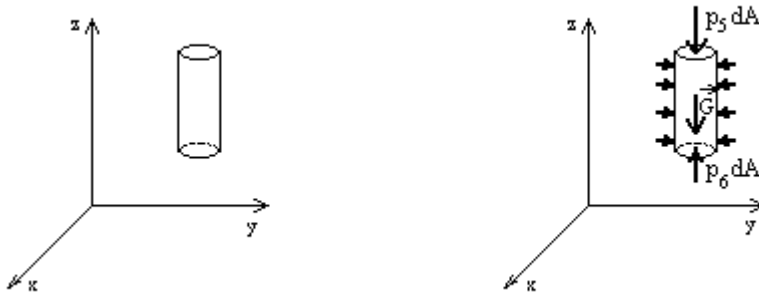


Figura 2.2 Aplicação da componente segundo oz, da equação fundamental da dinâmica

Isolando, em cada membro, os termos relativos a cada partícula, obtém-se:

$$z_5 + \frac{p_5}{\gamma} = z_6 + \frac{p_6}{\gamma} \quad (2.10)$$

em que  $z$  é a cota topográfica relativamente a um dado plano horizontal de referência, energia potencial de posição por unidade de peso do fluido, e  $p/\gamma$  é a altura piezométrica, energia potencial de pressão por unidade de peso do fluido. A soma  $Z+p/\gamma$  chama-se cota piezométrica.

Tendo em conta que a localização das partículas 5 e 6 foi definida sem restrições sobre o eixo oz, é possível generalizar o resultado:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Para os três eixos cartesianos, verificam-se as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{a pressão é constante para qualquer valor de } x; \\ \text{a pressão é constante para qualquer valor de } y; \\ \text{a cota piezométrica é constante para qualquer valor de } z. \end{array}$$

Sabendo que a dedução apresentada se aplica ao domínio de um fluido homogêneo com peso volúmico constante, que a cota topográfica das partículas localizadas sobre um dado plano horizontal é constante, que a pressão é constante para as partículas localizadas no plano

horizontal, conclui-se que a cota piezométrica também é constante para qualquer partícula localizada no plano horizontal.

Fica, assim deduzida a *Lei Hidrostática de Pressões* que se enuncia: a cota piezométrica é constante em qualquer partícula de um fluido em repouso, sujeito à acção da gravidade.

### 2.3 Aplicações da Lei Hidrostática de Pressões

- *Relação entre a pressão do ar e a pressão em partículas localizadas em diferentes posições de um domínio líquido*

Quando se estuda o comportamento de dois meios fluidos diferentes em repouso, um gasoso e um líquido pode concluir-se que, dada a relação entre pesos volúmicos do líquido e do gás ser da ordem de mil, se pode desprezar o peso volúmico do gás. Neste caso, a pressão em qualquer partícula do domínio fluido gasoso é constante. A pressão das partículas de um líquido localizadas na superfície livre estão sujeitas a uma pressão igual à pressão do gás. No caso particular da figura 2.3 a pressão da partícula localizada na posição E é igual à pressão do ar.

Conhecida a pressão de uma partícula contida num dado domínio fluido, é possível determinar a pressão em qualquer outra partícula do mesmo domínio fluido.

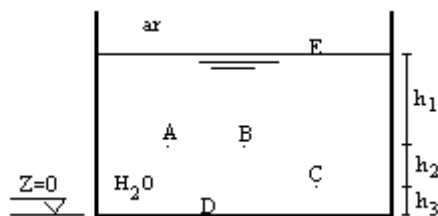


Figura 2.3 Reservatório que contém um líquido em repouso em contacto com a atmosfera

A aplicação da lei hidrostática de pressões entre partículas do mesmo domínio fluido, representado na figura 2.3, permite calcular a pressão nas partículas localizadas em A, B, C e D a partir do valor da pressão da partícula localizada em E, através das seguintes relações:

$$z_D + \frac{p_D}{\gamma_{H_2O}} = z_E + \frac{p_E}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow 0 + \frac{p_D}{\gamma_{H_2O}} = (h_1 + h_2 + h_3) + \frac{p_E}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow p_D = p_E + \gamma_{H_2O} (h_1 + h_2 + h_3)$$

$$z_C + \frac{P_C}{\gamma_{H_2O}} = z_D + \frac{P_D}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow h_3 + \frac{P_C}{\gamma_{H_2O}} = 0 + \frac{P_D}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow p_C = p_D - \gamma_{H_2O} h_3$$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma_{H_2O}} = z_C + \frac{P_C}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow (h_2 + h_3) + \frac{P_A}{\gamma_{H_2O}} = h_3 + \frac{P_C}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow p_A = p_C - \gamma_{H_2O} h_2$$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma_{H_2O}} = z_B + \frac{P_B}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow (h_2 + h_3) + \frac{P_A}{\gamma_{H_2O}} = (h_2 + h_3) + \frac{P_B}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow p_B = p_A$$

- *Diagrama de pressões sobre uma superfície sólida, fronteira de um domínio fluido*

Para determinar a resultante das forças que actuam sobre uma dada fronteira sólida do domínio fluido é necessário conhecer a variação de pressão das partículas que se encontram em contacto com essa fronteira sólida. Chama-se diagrama de pressões sobre a fronteira sólida à representação da variação de pressão dessas partículas.

O diagrama de pressões define-se no espaço, mas em alguns casos pode ser bem representado pelo seu corte, através de um figura geométrica plana. No caso de uma superfície premida rectangular com dois lados horizontais (exemplo da parede lateral de um reservatório paralelipédico) o diagrama de pressões terá uma forma prismática com base igual à figura geométrica plana (corte do diagrama de pressões) e com a altura igual à largura da superfície premida rectangular (na perpendicular à folha de papel).

Na figura 2.4 apresenta-se um exemplo do traçado do diagrama de pressões sobre a parede lateral esquerda do reservatório da figura 2.3, considerado como um reservatório apoiado. A face exterior da parede está sujeita à pressão do ar. Na face interior em contacto com a água, a pressão aumenta linearmente, sendo o coeficiente de proporcionalidade igual ao peso volúmico do líquido que é constante.

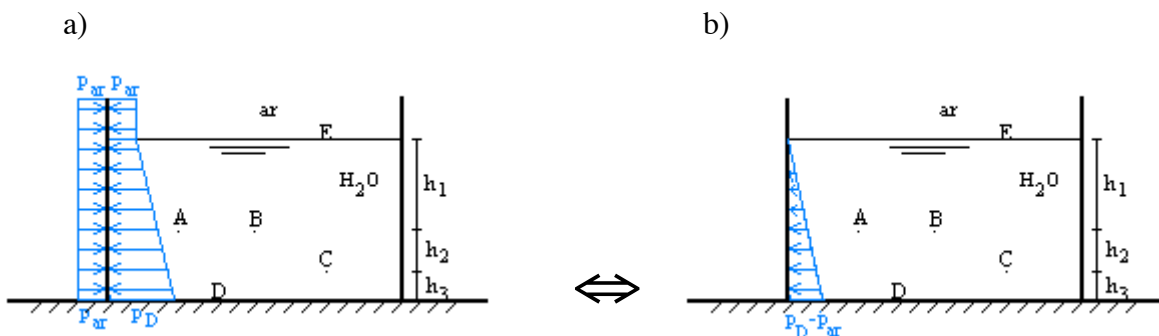


Figura 2.4 Diagrama de pressões sobre a parede lateral esquerda de um reservatório apoiado

- a) diagrama de pressões interior e exterior;      b) diagrama de pressões resultante

Se a largura da superfície premida, segundo a direção perpendicular ao papel, não for constante o diagrama de pressões não será prismático. Como exemplo refere-se o caso particular de uma superfície premida circular na posição horizontal, a pressão é constante na superfície premida e o diagrama de pressões é um cilindro; se a mesma superfície estiver num plano não horizontal o diagrama de pressões é um cilindro cortado por um plano oblíquo ao eixo desse cilindro. Neste caso a representação do diagrama de pressões através do seu corte não é suficiente.

- *Pressões absolutas e pressões relativas*

No diagrama de pressões traçado na figura 2.4 b), a pressão na superfície livre do líquido é representada como sendo nula e a variação da pressão com a profundidade é linear (coeficiente de proporcionalidade igual ao peso volúmico do líquido). Este diagrama de pressões é equivalente a uma representação relativa à pressão atmosférica local, considerada como nula. Definem-se, assim a escala de pressões absolutas que tem como origem o vácuo e a escala de pressões relativas que tem como origem a pressão atmosférica local, figura 2.5.

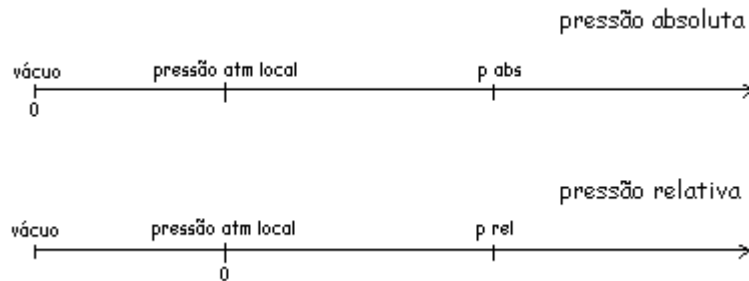


Figura 2.5 Escalas de pressões absolutas e pressões relativas

A relação entre a pressão absoluta e a pressão relativa pode ser representada pela seguinte equação:

$$P_{\text{absoluta}} = P_{\text{relativa}} + P_{\text{atm local}} \quad (2.12)$$

Em Hidráulica, identifica-se o termo pressão com a pressão relativa.

- *Manómetros de líquidos, medição de pressão*

A medição da pressão num ponto, relativamente à pressão atmosférica local é feita através da instalação de um manómetro simples.



O manómetro simples mais elementar é o tubo piezométrico, figura 2.6, que permite medir a pressão da partícula localizada no ponto onde foi instalado.

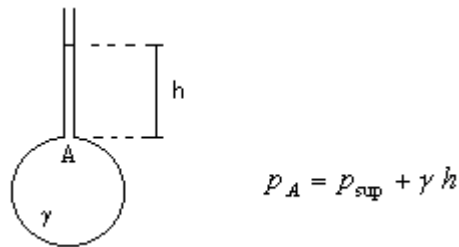


Figura 2.6 Tubo piezométrico

Em casos especiais podem ser aplicadas diferentes soluções de manómetros simples, como as representadas no Quadro 2.1.

Quadro 2.1. Exemplos de manómetros simples

medição de pressões com valores baixos:	medição de pressões negativas:	medição de pressões com valores elevados:
$p_A = p_{\text{sup}} + \gamma h$	$p_A = p_{\text{sup}} - \gamma h$	$p_A = p_{\text{sup}} + \gamma'(h_1 + h_2) - \gamma h_2$

A medição da diferença de pressões entre duas partículas pode ser feita com a instalação de dois manómetros simples, figura 2.7, ou pela aplicação de manómetros diferenciais, figura 2.8.

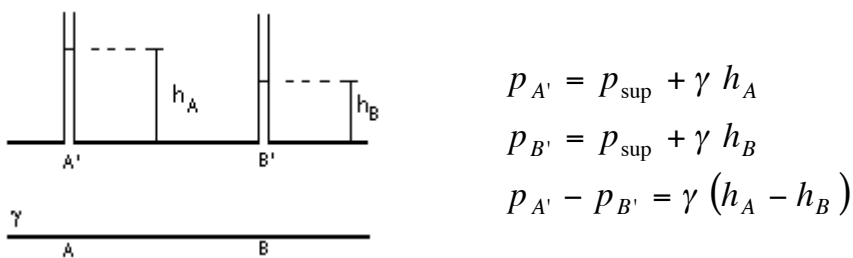
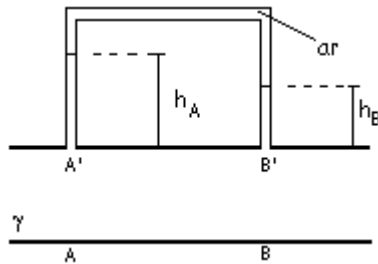


Figura 2.7 Manómetros simples aplicados na medição da diferença de pressões entre duas partículas

Os manómetros diferenciais permitem medir a diferença de pressões entre duas partículas. Na figura 2.8 a) é representada a solução para o caso de pressões muito elevadas em A' e B', através da introdução de ar comprimido e na figura 2.8 b) é representada a solução para o caso de diferença de pressões muito elevada entre A' e B', através da utilização de um líquido com maior densidade.

a)

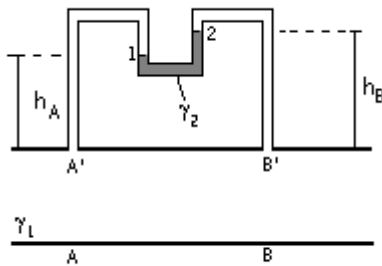


$$p_{A'} = p_{ar} + \gamma h_A$$

$$p_{B'} = p_{ar} + \gamma h_B$$

$$p_{A'} - p_{B'} = \gamma (h_A - h_B)$$

b)



$$p_{A'} = p_1 + \gamma_1 h_A$$

$$p_{B'} = p_2 + \gamma_1 h_B$$

$$p_1 = p_2 + \gamma_2 (h_B - h_A)$$

$$p_{A'} - p_{B'} = (p_1 + \gamma_1 h_A) - (p_2 + \gamma_1 h_B)$$

$$p_{A'} - p_{B'} = \gamma_2 (h_B - h_A) + \gamma_1 (h_A - h_B)$$

$$p_{A'} - p_{B'} = (\gamma_2 - \gamma_1)(h_B - h_A)$$

Figura 2.8 Manómetros diferenciais

## 2.4 Impulsão hidrostática

Conhecida a pressão de uma partícula que está em contacto com uma fronteira sólida é possível determinar a força de pressão que essa partícula exerce sobre a mesma fronteira sólida. A força de pressão é calculada pelo produto da pressão pela área elementar da superfície sólida centrada na partícula,  $dA$ , em que a pressão se considera constante. Chama-se impulsão hidrostática à resultante das forças de pressão que actuam sobre uma superfície (quando exista essa resultante). Designando por força elementar de pressão a força normal sobre a área elementar, as forças de pressão têm resultante única se as forças elementares são concorrentes ou paralelas, o que acontece no caso de superfícies planas ou superfícies curvas cilíndricas ou esféricas.

A impulsão hidrostática só pode ficar bem definida quando determinados: o módulo, a direcção, o sentido e o seu ponto de aplicação.

#### 2.4.1 Impulsão hidrostática sobre uma superfície plana qualquer

No caso mais geral de uma superfície plana qualquer, que faz um ângulo  $\alpha$  com o plano horizontal, a pressão  $\mathbf{p}$  num dado ponto da superfície premida pode identificar-se com a pressão numa área elementar,  $d\mathbf{A}$ , com centro no ponto referido. A força elementar de pressão que actua sobre essa área elementar é determinada por, figura 2.9:

$$dF = p \, dA \quad (2.13)$$

O valor de  $d\mathbf{F}$  representa fisicamente o volume de um prisma com base igual a  $d\mathbf{A}$  e altura igual ao valor da pressão na partícula que está em contacto com o ponto localizado no centro da área elementar, ou seja o volume do diagrama de pressões correspondente à área elementar.

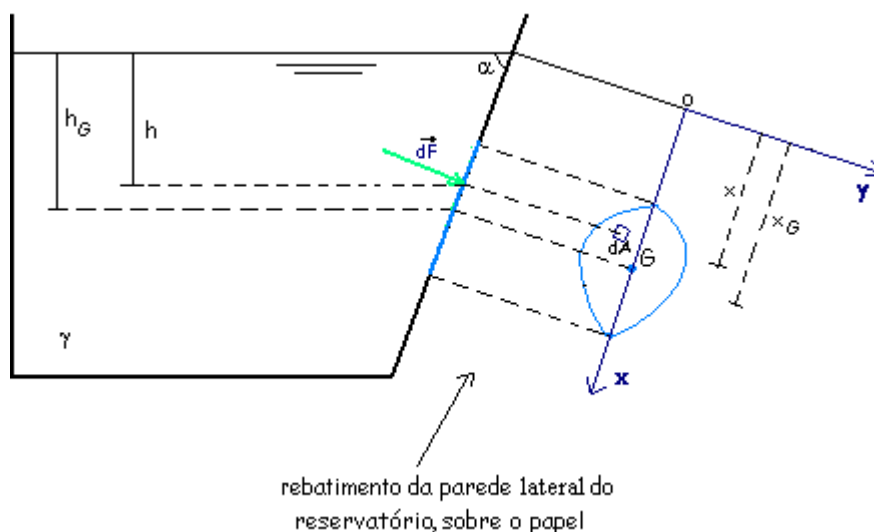


Figura 2.9 Impulsão hidrostática sobre uma superfície plana qualquer,  
força elementar de pressão

A integração desta equação à área total da superfície premida permite obter a impulsão total sobre a superfície premida:

$$\Pi = \int_A dF = \int_A p \, dA \quad (2.14)$$

que será representada fisicamente pelo volume total do diagrama de pressões, figura 2.10.

A impulsão hidrostática pode ser calculada com base no diagrama de pressões: o módulo é igual ao volume do diagrama de pressões, a direcção é normal à superfície premida plana, o sentido é de compressão e o ponto de aplicação, denominado centro de impulsão, é dado pela intercepção entre a linha de acção da impulsão que passa no centro de gravidade do diagrama de pressões e a superfície premida, figura 2.10.

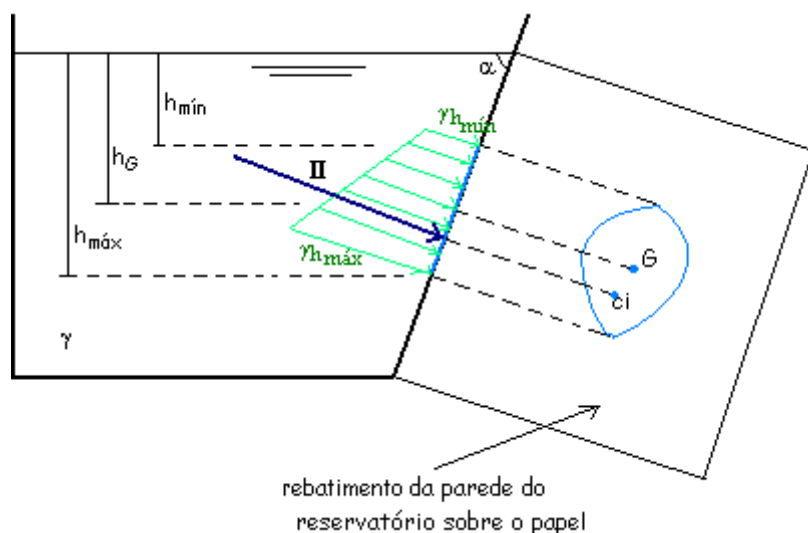


Figura 2.10 Impulsão hidrostática sobre uma superfície plana qualquer, corte do diagrama de pressões

No entanto, só é fácil determinar a impulsão hidrostática através do diagrama de pressões no caso de uma superfície premida rectangular com dois lados horizontais. Para os outros casos é aplicada a equação deduzida, analiticamente, de seguida.

A dedução analítica da equação que determina a impulsão hidrostática considera as seguintes hipóteses simplificativas: a superfície livre do reservatório está à pressão atmosférica local e dentro do reservatório o peso volúmico do fluido é constante, ou seja existe apenas um fluido que exerce forças normais sobre a fronteira sólida. Na representação gráfica foi considerado um sistema de eixos no plano da superfície premida, definido de modo a que o eixo  $ox$  coincida com a direcção de maior declive do plano da superfície premida, a passar no centro de gravidade da superfície premida e o eixo  $oy$  é normal ao eixo  $ox$  e coincide com o traço (intercepção) dos dois planos definidos pela superfície livre e pela superfície premida, figura 2.9.

O valor da pressão num ponto da superfície premida é determinado por:

$$p = \gamma h \quad (2.15)$$

e a força elementar de pressão que actua sobre a área elementar  $dA$  com centro de gravidade no ponto referido é determinada por:

$$dF = p \, dA = \gamma h \, dA \quad (2.16)$$

A resultante das forças de pressão sobre toda a superfície é obtida pela integração da equação anterior a toda a área:

$$\Pi = \int_A dF = \int_A \gamma h \, dA \quad (2.17)$$

se  $\gamma = \text{const}$ ,

$$\Pi = \gamma \int_A h \, dA \quad (2.18)$$

A relação entre a profundidade  $h$  e a abcissa  $x$  de uma dada posição da superfície premida, figura 2.9, é dada por:

$$h = x \, \text{sen} \alpha \quad (2.19)$$

que substituída na equação anterior, permite obter:

$$\Pi = \gamma \int_A h \, dA = \gamma \int_A x \, \text{sen} \alpha \, dA = \gamma \, \text{sen} \alpha \int_A x \, dA \quad (2.20)$$

Por definição de centro de gravidade de uma superfície plana, o momento da área total relativamente a um eixo qualquer é igual ao somatório dos momentos de todas as áreas elementares relativamente ao mesmo eixo. Tratando-se de um número infinito de áreas elementares a definição de centro de gravidade pode ser apresentada como a igualdade entre o momento da área total relativamente a um eixo qualquer e o integral do momento da área elementar a toda a secção relativamente ao mesmo eixo.

Matematicamente a definição de centro de gravidade pode ser representada pela equação 2.21 em que os momentos são determinados relativamente ao eixo  $oy$ .

$$\int_A x \, dA = X_G \, A \quad (2.21)$$

que, substituído na equação (2.20), permite obter:

$$\Pi = \gamma \, \text{sen} \alpha \int_A x \, dA = \gamma \, \text{sen} \alpha \, X_G \, A \quad (2.22)$$

Tendo em conta que  $X_G \, \text{sen} \alpha = h_G$

$$\Pi = \gamma \operatorname{sen} \alpha X_G A = \gamma h_G A \quad (2.23)$$

e sendo  $\gamma h_G = p_G$

$$\Pi = p_G A \quad (2.24)$$

A análise da equação 2.24 permite concluir que a impulsão hidrostática, sobre uma superfície plana qualquer, é igual ao produto do valor da pressão no centro de gravidade da superfície premida pela área da superfície premida. Do ponto de vista numérico este resultado é equivalente à situação em que a pressão é constante em toda a superfície premida, que só acontecerá se a superfície premida for horizontal; em todos os outros casos a pressão aumenta à medida que a profundidade aumenta. Fisicamente é possível verificar que se cortarmos um diagrama de pressões com um plano paralelo à superfície premida e a passar no valor da pressão no centro de gravidade, o volume destacado é igual ao volume necessário para completar o sólido definido pelo corte, figura 2.11.

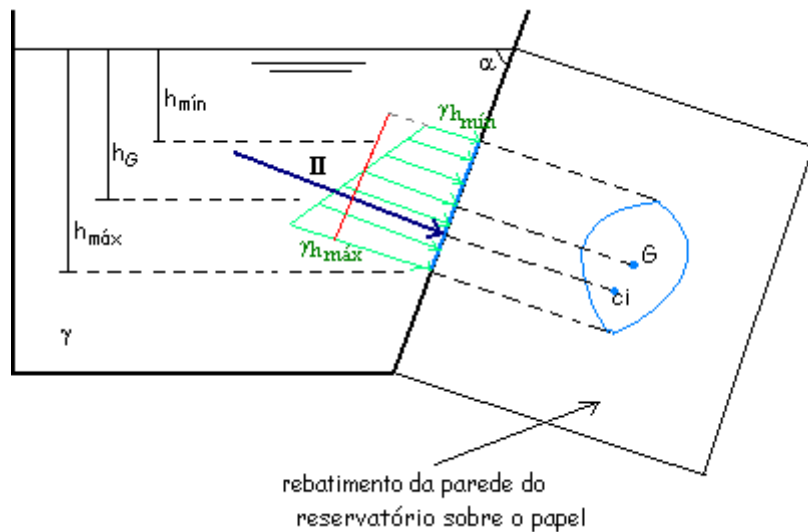


Figura 2.11 Impulsão hidrostática sobre uma superfície plana qualquer, equivalência do diagrama de pressões

Verificamos, assim que a única restrição que se mantém na dedução da equação da impulsão é a superfície premida estar em contacto, em toda a sua área, com o mesmo líquido.

A substituição de  $\gamma h_G$  por  $p_G$  (passagem da equação 2.23 para a equação 2.24) permite aplicar a equação 2.24 qualquer que sejam as condições de distribuição de pressão acima do ponto de maior cota da superfície premida, incluindo a pressão à superfície.

A direcção da impulsão é perpendicular à superfície premida.

O sentido da impulsão é de compressão, ou seja sempre no sentido da superfície premida.

O ponto de aplicação, chamado por centro de impulsão, fica bem definido se são conhecidas a sua abcissa e a sua ordenada relativamente ao sistema de eixos usado, figura 2.9. Estas coordenadas podem ser determinadas com base na definição de resultante de um sistema de forças, igualando o momento da resultante (impulsão hidrostática) relativamente a um dado eixo com o somatório dos momentos das forças elementares de pressão relativamente ao mesmo eixo. Por se tratar de um número infinito de forças elementares é necessário igualar o momento da resultante relativamente a um dado eixo com o momento da força elementar de pressão integrada a toda a superfície, relativamente ao mesmo eixo.

#### *Determinação da abcissa do centro de impulsão, $X_{ci}$*

Para determinar a abcissa do centro de impulsão igualamos o momento da impulsão relativamente ao eixo  $oy$  com o momento da força elementar de pressão integrado a toda a área relativamente ao mesmo eixo  $oy$ , figura 2.12.

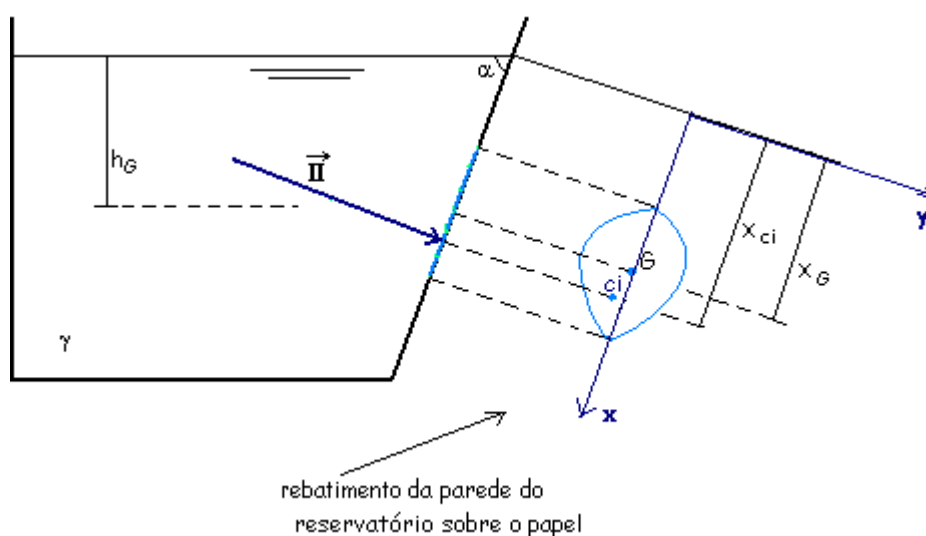


Figura 2.12 Centro de impulsão. Determinação da sua abcissa

O momento da força elementar relativamente ao eixo oy é:

$$x \, dF \quad (2.25)$$

e a igualdade de momentos é:

$$\int_A x \, dF = \Pi X_{ci} \quad (2.26)$$

Substituindo  $dF$  e  $\Pi$  na equação anterior, por:

$$\begin{cases} dF = \gamma x \, \text{sen}\alpha \, dA \\ \Pi = \gamma X_G \, \text{sen}\alpha \, A \end{cases}$$

e admitindo as hipóteses simplificativas:

$$\begin{cases} \text{sen}\alpha = \text{const.} \\ \gamma = \text{const.} \end{cases}$$

obtém-se:

$$\gamma \, \text{sen}\alpha \int_A x^2 \, dA = \gamma \, \text{sen}\alpha \, X_G \, A \, X_{ci} \quad (2.27)$$

$$X_{ci} = \frac{\int_A x^2 \, dA}{X_G \, A} = \frac{I_{oy}}{X_G \, A} \quad (2.28)$$

em que  $I_{oy} = \int_A x^2 \, dA$  é o momento de inércia da superfície plana premida relativamente ao eixo oy.

No Quadro 2.2 são apresentados os momentos de inércia de figuras geométricas planas relativamente a um eixo, paralelo a oy, que passa no centro de gravidade.

O momento de inércia da figura plana relativamente a um eixo qualquer oy relaciona-se com o momento de inércia da figura plana relativamente ao eixo paralelo a oy que passa no centro de gravidade, através da seguinte equação:

$$I_{oy} = I_{GG'} + A X_G^2 \quad (2.29)$$

permitindo obter a equação geral da abcissa do centro de impulsão:

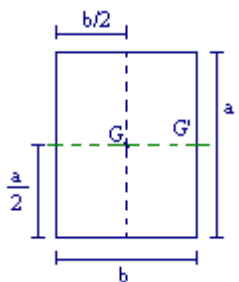
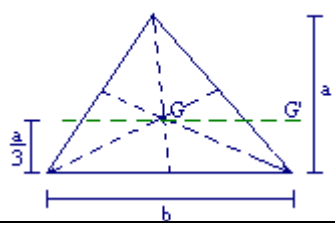
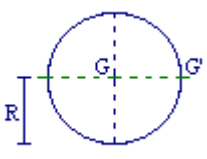
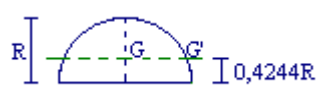
$$X_{ci} = X_G + \frac{I_{GG'}}{X_G \, A} \quad (2.30)$$

A aplicação da equação 2.30 ao caso particular de uma superfície premida horizontal, em que a abcissa do centro de gravidade é infinita, anula a segunda parcela do membro direito



e a abcissa do centro de impulsão coincide com a abcissa do centro de gravidade. No caso geral de uma superfície plana não horizontal, o centro de impulsão localiza-se sempre abaixo do centro de gravidade, já que o segundo termo do membro da direita é sempre positivo.

Quadro 2.2 Momento de inércia de figuras geométricas planas

Figura plana e posição do centro de gravidade	Momento de inércia relativamente ao eixo GG'
<p>rectângulo</p> 	$I_{GG'} = \frac{a^3 b}{12}$
<p>triângulo</p> 	$I_{GG'} = \frac{a^3 b}{36}$
<p>círculo</p> 	$I_{GG'} = \frac{\pi R^4}{4}$
<p>semicírculo</p> 	$I_{GG'} = 0,1098R^4$

*Determinação da ordenada do centro de impulsão,  $Y_{ci}$*

Para determinar a ordenada do centro de impulsão seguir-se-ia o mesmo procedimento, sendo os momentos determinados relativamente ao eixo ox. No entanto, normalmente as superfícies planas a estudar são simétricas relativamente ao eixo ox tornando-se a ordenada do centro de impulsão nula, ou seja o centro de impulsão encontra-se sobre o eixo ox .

### 2.4.2 – Impulsão hidrostática sobre uma superfície curva

Sendo, neste caso, muito difícil a determinação da impulsão hidrostática através do volume do diagrama de pressões será estudado o método analítico mais expedito.

O sistema de forças de pressão elementares que actuam sobre uma superfície curva qualquer normalmente não admitem resultante, com excepção de formas regulares como superfícies cilíndricas ou esféricas. Em Hidráulica, as superfícies curvas aplicadas em comportas ou outras estruturas como paredes de reservatórios são de forma regular.

Para cálculo da impulsão hidrostática sobre uma superfície curva, as forças elementares de pressão são decompostas na componente vertical, e numa componente horizontal que será a resultante de todas as forças horizontais. A resultante das componentes horizontais é a impulsão hidrostática horizontal,  $\Pi_h$  e a resultante das componentes verticais é a impulsão hidrostática vertical,  $\Pi_v$ .

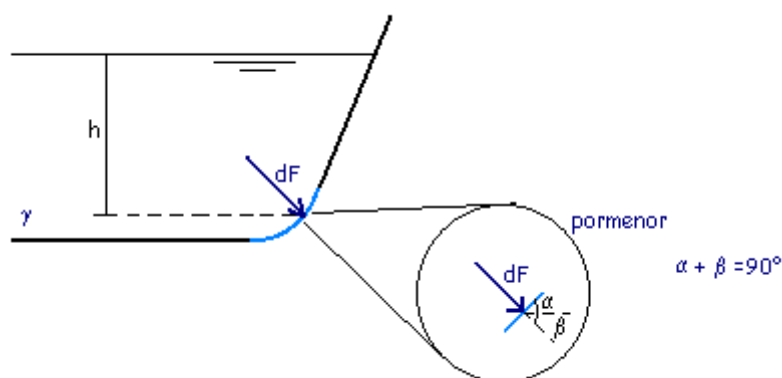


Figura 2.13 Impulsão hidrostática sobre uma superfície curva, força elementar de pressão

No caso mais geral de uma superfície curva, a pressão num dado ponto da superfície premida pode identificar-se com a pressão numa área elementar plana,  $dA$ , com o centro de gravidade coincidente com o ponto referido. A força elementar de pressão que actua sobre essa área elementar, figura 2.13, é determinada por:

$$dF = p \, dA \quad (2.31)$$

Considerando as hipóteses simplificativas de que a superfície livre do reservatório está à pressão atmosférica local e que dentro do reservatório o peso volúmico é constante, ou seja

existe apenas um fluido a comprimir a superfície sólida, o valor da pressão num ponto da superfície premida é determinada por:

$$p = \gamma h \quad (2.32)$$

e a força elementar de pressão que actua sobre a área elementar  $dA$  com centro no ponto referido é determinada por:

$$dF = p \, dA = \gamma h \, dA \quad (2.33)$$

*Determinação da componente vertical:*

A componente vertical da força elementar de pressão, figura 2.13, é dada por:

$$dF_V = dF \cos \alpha = \gamma h \, dA \cos \alpha \quad (2.34)$$

O factor  $dA \cos \alpha$  representa a projecção vertical da área elementar sobre um plano horizontal e designa-se por  $dA_V$ .

$$dF_V = \gamma h \, dA \cos \alpha = \gamma h \, dA_V \quad (2.35)$$

O factor  $h \, dA_V$  representa o produto de uma área horizontal por uma altura do líquido, ou seja o volume do líquido acima da projecção, sobre um plano horizontal, da área elementar. Considerando a área elementar plana (dimensões muito pequenas) o volume referido atrás coincide com o volume de líquido acima da área elementar premida.

A componente vertical da força elementar de pressão pode associar-se ao peso do volume do líquido limitado pela área elementar, a superfície livre do líquido e as projectantes verticais que passam no contorno da área elementar.

$$dF_V = \gamma h \, dA_V \quad (2.36)$$

A resultante da componente vertical das forças de pressão sobre toda a superfície é obtida pela integração da equação anterior a toda a área:

$$\Pi_V = \int_A dF_V = \int_A \gamma h \, dA_V \quad (2.37)$$

Considerando a hipótese simplificativa de que  $\gamma = \text{const}$ :

$$\Pi_V = \gamma \int_A h \, dA_V \quad (2.38)$$

O integral da equação (2.38) é igual ao volume do líquido limitado pela superfície premida, a superfície livre do líquido e as projectantes verticais que passam no contorno da superfície premida.

A componente vertical da impulsão sobre a superfície curva é igual ao peso do volume do líquido referido.

$$\Pi_v = \gamma \text{ Vol} \quad (2.39)$$

Na figura 2.14 é representada a componente vertical da impulsão sobre a superfície curva.

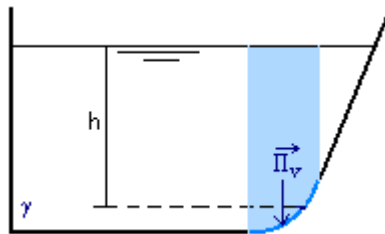


Figura 2.14 Componente vertical da impulsão hidrostática sobre uma superfície curva

*Determinação da componente horizontal:*

A componente horizontal da força elementar de pressão, figura 2.13, é dada por:

$$dF_h = dF \cos \beta = \gamma h dA \cos \beta \quad (2.40)$$

O factor  $dA \cos \beta$  representa a projecção horizontal da área elementar sobre um plano vertical designada por  $dA_h$ .

$$dF_h = \gamma h dA \cos \beta = \gamma h dA_h \quad (2.41)$$

O factor  $h dA_h$  representa o produto de uma área vertical (projecção da área elementar sobre um plano vertical) pela distância do centro de gravidade dessa área a um dado eixo.

A resultante da componente horizontal das forças de pressão sobre toda a superfície curva é obtida pela integração da equação anterior a toda a área, com  $\gamma = \text{const}$  :

$$\Pi_h = \int_A dF_h = \gamma \int_A h dA_h \quad (2.42)$$

A comparação desta equação com a equação da impulsão sobre uma superfície plana, equação 2.18, permite concluir que a componente horizontal da impulsão hidrostática sobre uma superfície curva é calculada do mesmo modo que a impulsão sobre uma superfície plana sendo essa superfície plana a projecção da superfície curva sobre um plano vertical. O integral da equação 2.42, aplicando o conceito de centro de gravidade, corresponde ao integral na área da superfície premida do momento da projecção horizontal da área elementar relativamente a um eixo que é a intercepção entre o plano vertical onde é feita a projecção da superfície premida e a superfície livre e é igual ao momento da área projectada sobre o plano vertical relativamente ao mesmo eixo.

$$\Pi_h = \gamma \int_A h dA_h = \gamma h_G A_h = p_G A_h \quad (2.43)$$

Na equação anterior  $h_G$  é a profundidade do centro de gravidade da projecção horizontal da superfície curva sobre um plano vertical e  $A_h$  é a área da projecção horizontal da superfície curva sobre um plano vertical.

A componente horizontal da impulsão sobre uma superfície curva é dada por:

$$\Pi_h = p_G A_h \quad (2.44)$$

Na figura 2.15 são representados os parâmetros envolvidos na determinação da componente horizontal da impulsão sobre a superfície curva.

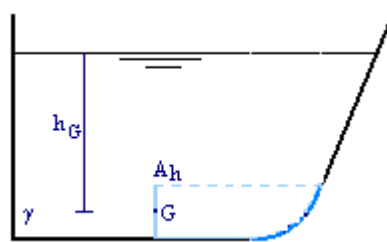


Figura 2.15 Determinação da componente horizontal da impulsão hidrostática sobre uma superfície curva

*Impulsão hidrostática sobre a superfície curva:*

Tratando-se de uma superfície curva cilíndrica ou esférica que admite resultante única, o módulo da impulsão hidrostática sobre a superfície curva é determinado por:

$$\Pi = \sqrt{\Pi_v^2 + \Pi_h^2}, \quad (2.45)$$

a direcção é determinada através do ângulo formado com o plano horizontal:

$$\alpha = \arctg \frac{\Pi_v}{\Pi_h}, \quad (2.46)$$

o sentido é de compressão e o ponto de aplicação é tal que a linha de acção da impulsão hidrostática passa no centro geométrico da superfície curva, já que a linha de acção de todas as forças elementares de pressão, por serem perpendiculares à superfície premida, passam no centro geométrico da superfície curva, figura 2.16.

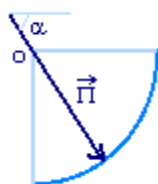


Figura 2.16 Impulsão hidrostática sobre uma superfície curva cilíndrica ou esférica

#### 2.4.3 – Impulsão sobre corpos imersos

No caso de um corpo estar totalmente imerso aplicam-se os conceitos estudados no subcapítulo anterior, sendo no entanto necessário dividir a superfície premida de modo a determinar as componentes verticais de cima para baixo e de baixo para cima e as componentes horizontais da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

Aplicados estes conceitos, a um corpo imerso num fluido, verifica-se o Teorema de Arquimedes que enuncia que todo o corpo mergulhado num fluido em repouso recebe da parte deste uma impulsão vertical, de baixo para cima, igual ao peso do volume do fluido deslocado.



## Capítulo 3

### HIDROCINEMÁTICA

*Objectivo: Identificar as variáveis envolvidas no estudo do movimento dos fluidos, classificar o movimento dos fluidos e perceber a dedução da Equação da Continuidade e a sua aplicação ao estudo do escoamento dos fluidos .*

#### 3.1 Introdução

Hidrocinemática é o capítulo da Hidráulica que estuda o movimento dos fluidos. No âmbito desta disciplina, o estudo é feito através da descrição do comportamento das partículas de fluido que ocupam as diferentes posições de um determinado domínio, em cada instante.

As hipóteses simplificativas a considerar são a temperatura constante e o fluido incompressível.

#### 3.2 Variáveis a considerar no estudo do fluido em movimento

Qualquer problema de dinâmica dos fluidos pode ser estudado se conhecidas as seguintes grandezas relativas às partículas que ocupam cada posição do domínio fluido, ao longo do tempo:

- pressão  $p = p(P,t)$
- massa volúmica  $\rho = \rho (P,t)$
- temperatura  $T = T(P,t)$
- as três componentes do vector velocidade  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

Na maioria dos problemas práticos de Engenharia Hidráulica, no entanto, os processos são considerados isotérmicos, ou seja em que a variação de temperatura é desprezável em termos de resultados obtidos.

O fluido mais estudado na Hidráulica é a água que, embora seja um fluido pouco compressível com coeficiente de compressibilidade igual a  $5,1 \text{ E-}10 \text{ m}^2\text{N}^{-1}$ , em certas



circunstâncias do escoamento manifesta a sua compressibilidade exigindo um estudo mais aprofundado. No âmbito desta disciplina, a água é considerada incompressível.

Neste caso o número de variáveis a estudar fica reduzido a quatro: a pressão e as três componentes da velocidade de escoamento em cada ponto do domínio fluido.

### 3.3 Noções e parâmetros de carácter hidrocinemático

#### 3.3.1 Representação do vector velocidade em Variáveis de Euler

O vector velocidade será representado através das Variáveis de Euler, ou seja são caracterizadas as velocidades das partículas que passam nas diferentes posições do domínio fluido, ao longo do tempo. Em cada instante, interessa determinar a velocidade das partículas que estão nas diferentes posições do domínio fluido.

A nomenclatura usada é, figura 3.1 :

- $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$  velocidade da partícula M que está na posição P no instante t;
- $\vec{v} = \vec{v}(P, t + \Delta t)$  velocidade da partícula N que está na posição P, no instante  $t + \Delta t$ .

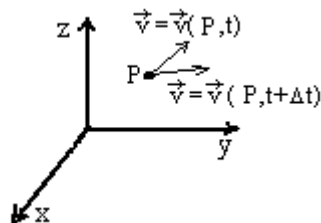


Figura 3.1 Representação da velocidade em Variáveis de Euler

#### 3.3.2 Trajectória de uma partícula. Linha de corrente num domínio fluido

Os conceitos de trajectória e linha de corrente têm grande importância no estudo analítico dos escoamentos.

Designa-se por trajectória de uma partícula o lugar geométrico das posições que essa partícula ocupa, ao longo do tempo. As trajectórias são representadas no tempo e no espaço, figura 3.2. A partícula M está na posição P no instante t e na posição Q no instante  $t + \Delta t$ . O vector velocidade da partícula em cada posição que ocupa é tangente à trajectória nesse ponto.

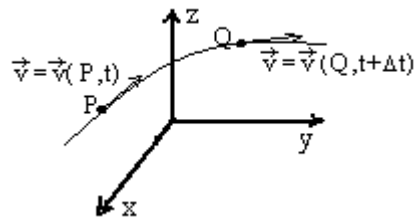


Figura 3.2 Traçado da trajetória da partícula M

As linhas de corrente definem-se no domínio fluido, para um dado instante. São as linhas que, em cada ponto, têm como tangente o vector velocidade da partícula localizada nesse ponto, figura 3.3. A partícula M está na posição P no instante  $t_1$  e a partícula N está na posição Q no mesmo instante  $t_1$ .

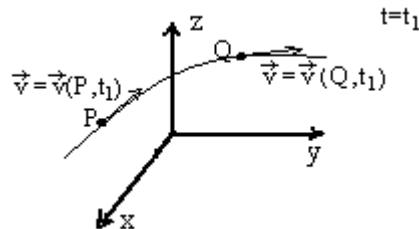


Figura 3.3 Traçado da linha de corrente relativa às posições P e Q do domínio fluido, para o instante  $t_1$

Com base na definição de trajetória de uma partícula e de linha de corrente no domínio fluido podem deduzir-se as seguintes propriedades:

1 - As linhas de corrente, para um dado instante, são tangentes às trajetórias das partículas no ponto onde estão as partículas nesse instante.

*explicação:* as linhas de corrente, definidas para um dado instante, cruzam em cada ponto a trajetória da partícula que ocupa essa posição, se o vector velocidade é tangente em cada ponto à trajetória e à linha de corrente, num dado instante e na posição que a partícula ocupa a linha de corrente é tangente à trajetória.

2 - No caso de escoamentos com velocidade constante no tempo, as trajetórias das partículas coincidem com as linhas de corrente.

*explicação:* se a velocidade das partículas que ocupam, ao longo do tempo, cada posição do domínio fluido é constante, as linhas de corrente também são constantes ao longo do tempo e as partículas que passam numa mesma posição do domínio terão a mesma trajetória.

### 3.3.3 Tubo de fluxo

Seja uma linha fechada não coincidente com uma linha de corrente, faça-se passar por cada posição dessa linha fechada uma linha de corrente. A superfície geométrica formada pelas linhas de corrente apoiadas no contorno fechado denomina-se por tubo de fluxo, figura 3.4.

A propriedade principal do tubo de fluxo é que as suas paredes não são atravessadas pelo fluido, já que a velocidade de todas as partículas de fluido localizadas na parede só têm componente tangencial.

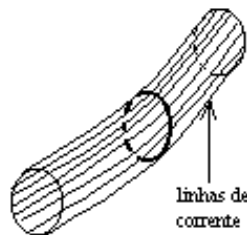


Figura 3.4 Tubo de fluxo, para um dado instante

A vantagem da utilização do tubo de fluxo está em que qualquer conduta impermeável de qualquer material se comporta, do ponto de vista hidráulico, como um tubo de fluxo, pois através das suas paredes também não se verifica o escoamento. Este conceito apresenta uma grande importância no estudo global dos escoamentos.

### 3.3.4 Caudal. Velocidade média de escoamento

Na caracterização do comportamento hidráulico de um tubo de fluxo define-se por caudal, representado por  $Q$ , o volume de fluido que atravessa a sua secção transversal por unidade de tempo. Seja  $S$  uma superfície em estudo e  $dS$  a superfície elementar onde a velocidade é considerada constante e igual à velocidade da partícula que ocupa a posição do centro de gravidade da superfície elementar,  $\vec{v}$ . Só a componente da velocidade normal à superfície contribui para o caudal através dessa superfície, figura 3.5.

As partículas que no instante inicial estão localizadas na superfície, percorrem durante o intervalo de tempo  $dt$  a distância  $v_n dt$  em que  $v_n = v \cos \alpha$  é a componente da velocidade segundo a direcção normal à superfície. O volume do fluido que atravessa a superfície  $dS$  com a velocidade  $\vec{v}$  no intervalo de tempo  $dt$ , figura 3.5, é:

$$dVol = v_n dt dS \quad (3.1)$$

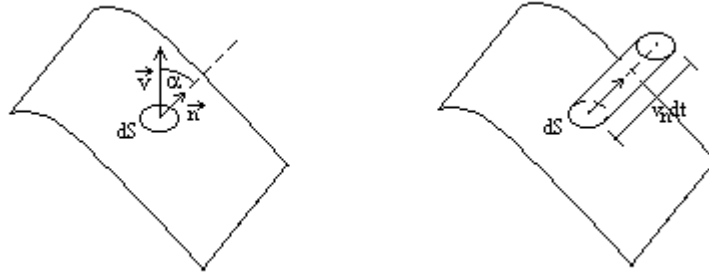


Figura 3.5 Caudal elementar

O caudal elementar, através da área elementar  $dS$ , é:

$$dQ = \frac{dVol}{dt} = \frac{v_n dt dS}{dt} = v_n dS \quad (3.2)$$

Aplicando o conceito de produto interno entre o vector velocidade e o versor normal à superfície, o caudal elementar pode ser representado por:

$$dQ = v_n dS = \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (3.3)$$

O caudal através da superfície  $S$  é igual ao integral do caudal elementar, a toda a superfície:

$$Q = \int_S dQ = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S v_n dS \quad (3.4)$$

Para calcular o caudal num tubo de fluxo é necessário conhecer a lei de variação da velocidade na sua secção transversal que, de modo geral, não está disponível tornando impossível o cálculo. Para ultrapassar esta dificuldade foi definida uma grandeza designada por velocidade média e que é a velocidade fictícia, constante na secção, que transporta o mesmo caudal num tubo com iguais características geométricas. A velocidade média é determinada pela equação:

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS}{S} \quad (3.5)$$

### 3.4 Classificação do movimento dos fluidos

#### 3.4.1 Nota introdutória

A classificação do escoamento dos fluidos pode ser feita de acordo com diferentes critérios, sendo cada uma delas independente das outras. Apresentam-se a classificação quanto à variação das grandezas no tempo; a classificação quanto à variação das grandezas no espaço e a classificação quanto ao comportamento relativo entre as partículas.

#### 3.4.2 Classificação quanto à variação das grandezas no tempo

Os escoamentos em que todas as grandezas envolvidas não variam com o tempo designam-se por escoamentos permanentes. Se alguma das grandezas é dependente do tempo o escoamento chama-se variável. No âmbito desta disciplina apenas serão estudados os escoamentos permanentes.

No caso de um escoamento permanente as grandezas envolvidas são apenas função da posição que ocupam, não variando de instante para instante. As derivadas parciais em ordem ao tempo anulam-se:

$$\partial/\partial t = 0$$

(3.6)

As linhas de correntes mantêm-se ao longo do tempo, coincidindo com as trajectórias das diferentes partículas, uma vez que a velocidade em cada posição se mantém qualquer que seja a partícula que a ocupa e qualquer que seja o instante.

Na prática, teremos um escoamento permanente no caso do abastecimento a partir de um reservatório de grandes dimensões. Diz-se que um reservatório se comporta como um reservatório de grandes dimensões quando o volume dentro do reservatório é muito grande relativamente ao volume que entra ou sai do reservatório, desprezando-se a variação do nível no reservatório. Mantendo-se constante o nível no reservatório o caudal e a velocidade de abastecimento são constantes ao longo do tempo.

Por outro lado, se o reservatório de abastecimento se comporta como um reservatório de pequenas dimensões, em que o abastecimento implica a diminuição do nível dentro do

reservatório, o caudal e a velocidade à saída variam com o tempo, classificando-se como um escoamento variável.

### 3.4.2 Classificação quanto à variação das grandezas no espaço

Relativamente à variação das grandezas no espaço os escoamentos classificam-se em uniformes ou variados.

Escoamento uniforme é aquele em que as grandezas tomam o mesmo valor qualquer que seja a posição que as partículas ocupam no meio fluido para um dado instante, ou seja, em cada instante a derivada parcial em ordem ao espaço é nula:

$$\partial/\partial s = 0 \quad (3.7)$$

No escoamento variado o valor das grandezas varia de acordo com a posição que as partículas ocupam, num dado instante.

Na prática, teremos um movimento uniforme se as características geométricas de uma dada conduta de transporte de um líquido se mantiverem constantes ao longo do seu comprimento. Caso contrário será variado.

### 3.4.4 Classificação quanto ao comportamento relativo das partículas

Distinguem-se dois tipos de escoamento no que diz respeito ao comportamento relativo das partículas: o escoamento laminar e o escoamento turbulento. Na passagem de regime laminar para regime turbulento define-se o regime de transição.

O movimento laminar caracteriza-se por um deslocamento regular de todas as partículas, mantendo estas uma posição relativa bem definida entre si. O movimento turbulento caracteriza-se por um deslocamento desordenado das partículas, em que as suas trajetórias se cruzam e em que a velocidade das partícula varia de modo muito irregular.

Nos movimentos turbulentos só faz sentido falar no valor médio das grandezas, dado que os valores instantâneos variam de instante para instante. A caracterização dos escoamentos turbulentos e as equações que os representam aplicam os valores médios das grandezas.

A Experiência de Reynolds permite visualizar os diferentes tipos de regime de escoamento. No escoamento de um dado fluido incolor, em estudo, é injectado um líquido colorido com a mesma densidade e não miscível. Para velocidades muito baixas o escoamento

do líquido corado faz-se segundo uma linha recta, bem definida, ocupando sempre a mesma posição relativa na secção transversal do escoamento, está-se perante um regime laminar. O aumento da velocidade de escoamento gera alguma perturbação na linha de escoamento do líquido corado apresentando uma ligeira curvatura, entrou-se no regime de transição. Aumentando ainda mais a velocidade a linha relativa ao escoamento do líquido corado rompe e as partículas coradas passam a misturar-se com as partículas do fluido em estudo, neste caso é difícil acompanhar o comportamento das partículas coradas, identifica-se o regime turbulento.

Tendo sido verificado que, em tubos de secção circular, a ocorrência dos diferentes regimes de escoamento eram função da velocidade de escoamento, do diâmetro do tubo e da viscosidade do líquido foi deduzido um parâmetro adimensional designado por número de Reynolds que permite classificar o regime de escoamento:

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} \quad (3.8)$$

No escoamento em pressão num tubo circular o regime laminar mantém-se para Re até aproximadamente 2000, entra em regime turbulento para o valor de Re de 3000 e estará em regime de transição para n° de Reynolds entre 2000 e 3000. Estes valores podem variar na diferente bibliografia disponível, pois são determinados experimentalmente e dependem das condições de ensaio.

É fácil verificar que, no caso do fluido ser água, o regime de escoamento é quase sempre turbulento pois a água tem uma viscosidade cinemática muito baixa (para a temperatura de 20°C a viscosidade cinemática é aproximadamente  $10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ). Apresentamos como excepção o início ou paragem do escoamento, em que a velocidade da água passa por valores muito perto do zero. Também em regime variável pode acontecer o regime laminar sempre que exista inversão do sentido de escoamento, através da anulação da velocidade.

Relativamente ao diagrama de velocidades, verifica-se que no caso dos regimes turbulentos existe uma menor variação da velocidade na secção transversal porque as partículas ocupam aleatoriamente posições diferentes na secção transversal, as partículas podem passar da posição perto da parede do tubo para uma posição perto do centro de gravidade da secção, existindo, por isso maior uniformidade no diagrama de velocidades. Em regime turbulento, o diagrama de velocidades caracteriza-se por um elevado gradiente perto as paredes do tubo e uma pequena variação no centro do tubo. Em regime laminar a variação em

toda a secção é superior. Na figura 3.6 são apresentados esquemas dos diagramas de velocidade em regime laminar e em regime turbulento.

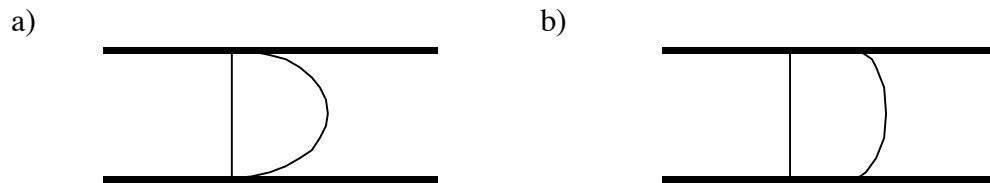


Figura 3.6 Diagrama de velocidades a) regime laminar; b) regime turbulento

### 3.5 Equações gerais da Mecânica dos Fluidos

As equações que representam o comportamento do fluido podem apresentar-se na forma local ou na forma global. As equações locais representam o que se passa com cada partícula que ocupa uma dada posição do domínio fluido; as equações globais representam o comportamento das partículas que ocupam regiões do domínio fluido.

Nos problemas de Mecânica dos Fluidos, âmbito desta disciplina, é necessário determinar quatro variáveis, sendo, para tal, aplicadas quatro relações entre as variáveis:

- equação da continuidade que representa o princípio da conservação da massa;
- equação do equilíbrio dinâmico aplicada a um dado volume de fluido (como equação vectorial será representada pelas suas três componentes).

Na maioria das aplicações em Hidráulica, interessa a determinação de grandezas globais.

No estudo global do comportamento dos fluidos, resultado da aplicação a uma dada região do domínio fluido, são deduzidas as seguintes equações:

- Equação da continuidade na forma global que representa o princípio da conservação da massa;
- Teorema de Bernoulli generalizado para um tubo de fluxo que representa o princípio da conservação da energia;



- Teorema de Euler ou Teorema da Quantidade de Movimento que representa o equilíbrio de forças aplicado a uma dado volume de fluido.

No próximo sub-capítulo será deduzida a equação da continuidade por introduzir apenas conceitos da cinemática, já que não considera as causas do movimento dos fluidos. Nos capítulos quatro e cinco apresentam-se a dedução e aplicação do Teorema de Bernoulli e do Teorema da Quantidade de Movimento, respectivamente.

### 3.6 Equação da continuidade

#### 3.6.1 Nota introdutória

Esta equação representa o Princípio da Conservação da Massa aplicado a um dado volume do domínio fluido,  $V$ , dentro de um tubo de fluxo e limitado por duas secções transversais, figura 3.7. No caso mais geral, o volume de controle tem uma forma tronco-cónica em que se considera a variação da secção transversal ao longo do eixo do tubo.

A aplicação do princípio da conservação da massa ao volume definido anteriormente permite deduzir a Equação da Continuidade na sua forma global.

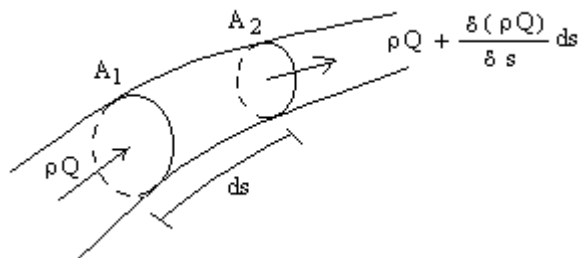


Figura 3.7 Volume de controlo a aplicar o princípio da conservação da massa

O fluxo de massa dá-se através das secções transversais do escoamento,  $A_1$  e  $A_2$ . A superfície lateral do tubo de fluxo por coincidir com um feixe de linhas de corrente não permite passagem de partículas fluidas através dela.

O princípio da conservação da massa pode, neste caso, ser escrita do seguinte modo:

$$m_{A_2} - m_{A_1} = \Delta m_{int} \quad (3.9)$$

A massa que sai do volume de controlo considerado pela secção A2, por unidade de tempo, menos a massa que entra no mesmo volume pela secção A1, por unidade de tempo é igual à variação de massa dentro do volume em estudo, por unidade de tempo.

Convencionou-se que a saída de massa através da superfície de controle terá o sinal positivo, sendo neste caso a variação de massa dentro da superfície de controle também positiva.

A massa que entra no volume de controle, por unidade de tempo é:

$$m_{A_1} = \rho Q_1 \quad (3.10)$$

e a massa que sai do mesmo volume de controle através da secção A2, por unidade de tempo:

$$m_{A_2} = \rho Q_2 \quad (3.11)$$

A massa que, no instante inicial, está dentro do volume considerado de forma tronco-cónica, é:

$$\rho V = \rho \frac{A_1 + A_2}{2} ds = \rho A ds \quad (3.12)$$

e a variação da massa que acontece dentro do volume na unidade de tempo, no caso de a conduta ser indeformável e o fluido incompressível, é igual a zero:

$$\Delta m_{int} = 0 \quad (3.13)$$

Substituindo as equações 3.10, 3.11 e 3.13 na equação do balanço, equação 3.9, obtém-se:

$$\rho Q_2 - \rho Q_1 = 0 \quad (3.14)$$

ou seja:  $\rho Q = \text{const}$

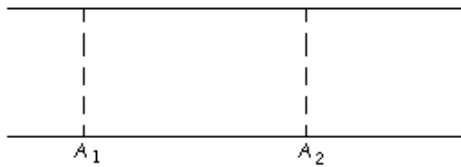
Se o fluido é incompressível, a massa volúmica é constante ao longo do eixo do tubo, a Equação da continuidade aplicada a um líquido incompressível representa-se por:

$$Q = \text{const} \Leftrightarrow UA = \text{const} \quad (3.15)$$

*Exemplos de aplicação:*

No escoamento permanente de um líquido incompressível, através de uma conduta com secção constante ou variada, é possível relacionar a velocidade média em duas secções dessa conduta, aplicando a equação da continuidade:

a)



$$Q = \text{const} \Leftrightarrow U_1 A_1 = U_2 A_2 \Leftrightarrow U_1 = U_2$$

b)



$$Q = \text{const} \Leftrightarrow U_1 A_1 = U_2 A_2 \Leftrightarrow U_1 = U_2 \frac{A_2}{A_1}$$

## Capítulo 4

### TEOREMA DE BERNOULLI E SUAS APLICAÇÕES

*Objectivo: Perceber a dedução do Teorema de Bernoulli e a sua aplicação ao estudo do escoamento dos fluidos.*

#### 4.1 Introdução

O Teorema de Bernoulli representa o Princípio da Conservação da Energia e relaciona as diferentes formas de energia mecânica ao longo de um escoamento: a energia de posição, a energia de pressão e a energia cinética. Permite calcular o caudal de um escoamento ou a variação de pressão ao longo do escoamento.

A Equação de Bernoulli pode ser deduzida através da aplicação da equação de equilíbrio dinâmico a um dado volume de controlo, por não serem consideradas as variações de temperatura.

Tendo em conta que a equação de equilíbrio dinâmico é vectorial serão estudadas as suas componentes. É escolhido um sistema de coordenadas cilíndricas permitindo o estudo da componente da equação da dinâmica segundo uma linha de corrente, que relaciona a variação das diferentes formas de energia mecânica ao longo da linha de corrente – *Teorema de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente*, e segundo a normal a essa linha de corrente, que estuda a variação na secção transversal do escoamento das grandezas envolvidas, permitindo obter – *Teorema de Bernoulli na forma global aplicado ao longo do tubo de fluxo*.

De modo simplificado aplicar-se-á a dedução para o caso particular de líquido perfeito, generalizando-se de seguida para os líquidos reais.

#### 4.2 Dedução do Teorema de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente, para o caso particular de líquido perfeito

Para o caso particular de líquidos perfeitos, aplica-se a Equação Fundamental da Dinâmica a um dado volume de líquido escolhido, criteriosamente, com base no interesse em

determinar a variação da energia mecânica total ao longo de uma linha de corrente. O volume tem a forma de um cilindro com altura  $d\mathbf{s}$ , eixo longitudinal segundo a direcção da linha de corrente e secção transversal elementar,  $d\mathbf{A}$ , de modo a que as grandezas envolvidas no escoamento possam considerar-se constantes nas bases do cilindro.

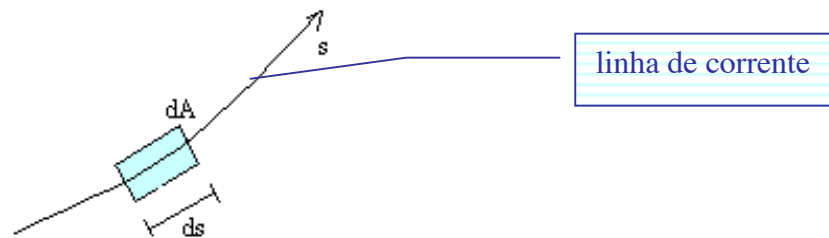


Figura 4.1 Domínio de líquido para aplicação da Equação Fundamental da Dinâmica, componente segundo a direcção da linha de corrente

A aplicação da Equação Fundamental da Dinâmica ao volume de líquido considerado, permite escrever:

$$\vec{F}_e = m\vec{a} \quad (4.1)$$

A resultante de todas as forças exteriores aplicadas sobre o volume e a força de inércia ( $-m\vec{a}$ ) é nula.

As forças exteriores que actuam sobre o volume considerado são (ver cap.1):

- força de massa ou volume: peso próprio,  $\vec{G}$
- forças de contacto ou superfície
 

}	normais, $\vec{\Pi}$
	tangenciais, $\vec{F}_t$

Substituindo as forças na equação 4.1, obtém-se:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{F}_t - m\vec{a} = 0 \quad (4.2)$$

O peso próprio tem a direcção vertical e sentido de cima para baixo, as forças de contacto normais (forças de pressão) actuam sobre toda a superfície fronteira do volume, de fluido, figura 4.2.

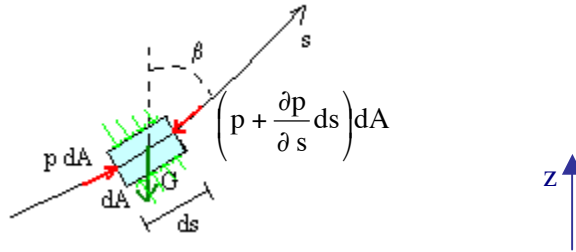


Figura 4.2 Sistema de forças exteriores aplicadas ao volume de fluido considerado.

Plano da folha de papel, definido por  $s$  e  $n$ , corresponde a um plano vertical

A pressão é considerada constante na área elementar, sendo a força normal sobre as bases do volume determinada pelo produto entre a pressão e a área. Considerou-se que a pressão na base de montante é  $p$  e que, ao longo da linha de corrente, se verifica uma variação de pressão dada por  $\partial p / \partial s$  sendo por isso o valor da pressão na base de jusante dada pelo soma entre a pressão a montante e a variação correspondente ao deslocamento  $ds$ :

$$p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \quad (4.3)$$

As forças de contacto tangenciais nas bases do cilindro não se manifestam por o vector velocidade não ter componente segundo a direcção tangente às bases. O vector velocidade como é tangente à linha de corrente só tem componente segundo a linha de corrente, Esta é a simplificação que justifica a dedução do Teorema de Bernoulli ao longo da linha de corrente.

Nas paredes laterais do volume em estudo as forças normais não têm componente sobre a direcção da linha de corrente, não sendo por isso consideradas, as forças tangenciais não têm componente segundo a direcção do eixo do cilindro por se considerar o líquido perfeito. No caso de um líquido perfeito não existem forças resistentes entre as partículas.

Relativamente à força de inércia, é necessário estudar o vector aceleração, derivada da velocidade em ordem ao tempo. A aceleração é igual à soma da aceleração local (variação da velocidade no tempo considerando uma dada posição no espaço) com a aceleração convectiva (variação da velocidade com o espaço, segundo a direcção da linha de corrente,  $s$ , a direcção

normal à linha de corrente,  $\mathbf{n}$ , e a direcção normal,  $\perp$ , ao plano definido pelas direcções  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{n}$ , aqui representado pelo plano da folha de papel e coincidente com um plano vertical):

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}}_{\text{aceleração local}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial n} \frac{dn}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \perp} \frac{d\perp}{dt}}_{\text{aceleração convectiva}} \quad (4.4)$$

A componente segundo a linha de corrente do vector aceleração é dada por:

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \frac{dn}{dt} + \frac{\partial v_s}{\partial \perp} \frac{d\perp}{dt} \quad (4.5)$$

ou seja:

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} v_s + \frac{\partial v_s}{\partial n} v_n + \frac{\partial v_s}{\partial \perp} v_\perp \quad (4.6)$$

como as componentes do vector velocidade segundo a direcção  $n$  e segundo a direcção  $\perp$  são nulas, tendo em conta a definição de linha de corrente, obtém-se:

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} v_s \Rightarrow \frac{dv_s}{dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{v_s^2}{2} \right)}{\partial s} \quad (4.7)$$

A componente da equação (4.2) segundo a direcção da linha de corrente é:

$$-\gamma dA ds \cos\beta + pdA - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA = \rho dA ds \frac{dv_s}{dt} \quad (4.8)$$

$$-\gamma dA ds \cos\beta - \frac{\partial p}{\partial s} ds dA = \rho dA ds \frac{dv_s}{dt} \quad (4.9)$$

Dividindo a equação anterior por  $\gamma dA ds$  e multiplicando por  $-1$ , vem:

$$\cos\beta + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{v_s^2}{2} \right)}{\partial s} \right) \quad (4.10)$$

Tendo em conta que:

**cos β** representa a variação da cota topográfica com a variação da distância segundo a direcção da linha de corrente, aumentando **z** à medida que **s** aumenta, pode ser substituído por:  $\cos \beta = \partial z / \partial s$  ;

**v<sub>s</sub>** é a componente da velocidade segundo a direcção da linha de corrente e pela definição de linha de corrente coincide com o vector velocidade, podendo ser substituída por:  $v_s = v$  ;

a substituição destes parâmetros na equação 4.10, permite obter:

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{g} \frac{\partial \left( \frac{v^2}{2} \right)}{\partial s} \quad (4.11)$$

A aceleração da gravidade e o peso volúmico (tendo em conta que se trata de um líquido incompressível) ao longo da linha de corrente são constantes:

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial \left( \frac{p}{\gamma} \right)}{\partial s} + \frac{\partial \left( \frac{v^2}{2g} \right)}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.12)$$

e como a soma das derivadas é igual à derivada da soma, obtém-se a equação seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.13)$$

Esta é a equação de Bernoulli, aplicada ao longo de um linha de corrente e para o caso particular de líquidos perfeitos.

*Significado físico dos parâmetros:*

$\partial / \partial s$  - variação ao longo da linha de corrente;

**z** - cota topográfica relativamente a um dado plano horizontal de referência, é a energia potencial de posição por unidade de peso do fluido;

**p/γ** - altura piezométrica, é a energia potencial de pressão por unidade de peso do fluido;

**v<sup>2</sup> / 2g** - altura cinética, é a energia cinética por unidade de peso do fluido;



$z + p/\gamma$  - cota piezométrica relativamente a um dado plano horizontal de referência;

$z + p/\gamma + v^2/2g$  - energia mecânica total por unidade de peso do fluido ou carga, relativamente a um dado plano horizontal de referência, representa-se por H;

$-1/g \partial v/\partial t$  - força de inércia local por unidade de peso do fluido, variação da quantidade de movimento por unidade de tempo.

Para um escoamento permanente, a variação no tempo anula-se e a equação de Bernoulli aplicada ao longo de uma linha de corrente e líquido perfeito, representa-se por:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0 \quad (4.13)$$

### 4.3 Linha piezométrica e linha de energia. Significado físico.

Definem-se como linha piezométrica a representação da cota piezométrica e como linha de energia a representação da energia mecânica total por unidade de peso do fluido.

Identificando o plano horizontal de referência, figura 4.3, a linha de corrente é obtida através da representação das cotas topográficas das diferentes posições, ao longo da linha de corrente, a partir do plano horizontal de referência. A linha piezométrica obtém-se somando a altura piezométrica à cota topográfica e a linha de energia pela soma da altura cinética à linha piezométrica.

No caso particular do escoamento permanente de um líquido perfeito, a linha de corrente coincide com a trajectória e como a carga total se mantém constante, a linha de energia é uma recta horizontal, figura 4.3.

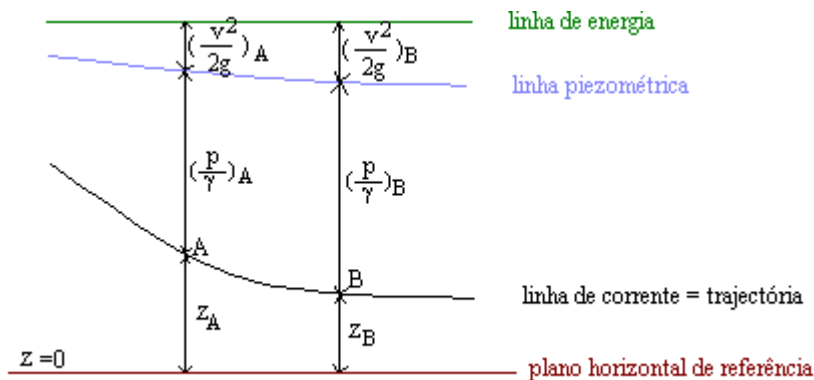


Figura 4.3 Escoamento permanente de um fluido perfeito, ao longo de uma linha de corrente  
Representação da linha de corrente, linha piezométrica e linha de energia.

### Significado físico da linha piezométrica e da linha de energia

A linha piezométrica pode ser representada fisicamente pela linha que une a superfície livre em tubos piezométricos instalados ao longo da linha de corrente, figura 4.4. O tubo piezométrico instalado perpendicularmente à linha de corrente, de modo a não alterar o comportamento do fluido, numa dada posição dessa linha de corrente permite medir, através da cota da superfície livre, a cota piezométrica da partícula localizada na base do tubo piezométrico. Dentro do tubo piezométrico o fluido está em repouso sendo a cota piezométrica constante em qualquer ponto do fluido dentro do tubo piezométrico (lei hidrostática de pressões). A cota piezométrica na base do tubo piezométrico é igual à cota piezométrica da posição da linha de corrente onde o tubo foi instalado e por outro lado igual à cota piezométrica à superfície do tubo que, por a pressão ser nula, coincide com a cota topográfica da superfície livre.

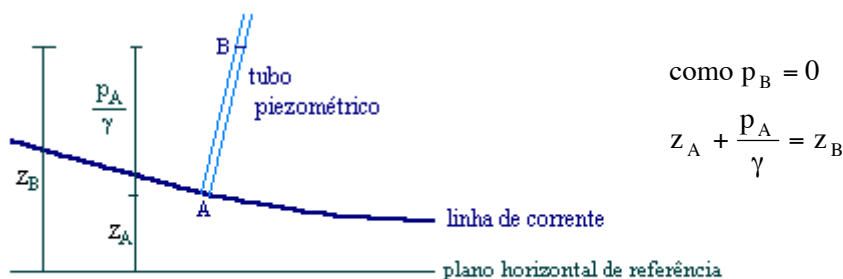


Figura 4.4 Tubo piezométrico. Transferência de energia.

Do ponto de vista de transferência de energia no domínio fluido dentro do tubo piezométrico verifica-se que na base do tubo piezométrico a energia potencial de posição e a energia potencial de pressão são iguais à energia potencial de posição e à energia potencial de pressão na posição da linha de corrente onde foi instalado o tubo piezométrico. À medida que a energia potencial de posição aumenta dentro do tubo piezométrico, a energia de pressão diminui até anular à superfície livre.

A representação física da linha de energia serve-se de um equipamento que ainda não foi apresentado e que se denomina por Tubo de Pitot, figura 4.5. A linha de energia é representada pela linha que une a superfície livre de Tubos de Pitot instalados ao longo da linha de corrente.

O Tubo de Pitot tem dimensões transversais semelhantes ao tubo piezométrico e apresenta a forma de L. Sendo instalado paralelamente à linha de corrente permite que a carga

à sua entrada seja igual à carga no ponto da linha de corrente onde foi instalado. O fluido está em repouso dentro do tubo, fazendo com que a energia cinética do fluido na linha de corrente se transforme em energia potencial de pressão, dentro do Tubo de Pitot, que por sua vez se transformará em energia potencial de posição na superfície livre do tubo de Pitot, com base na aplicação da Lei Hidrostática de Pressões entre a secção de entrada no Tubo de Pitot e a superfície livre no mesmo tubo.

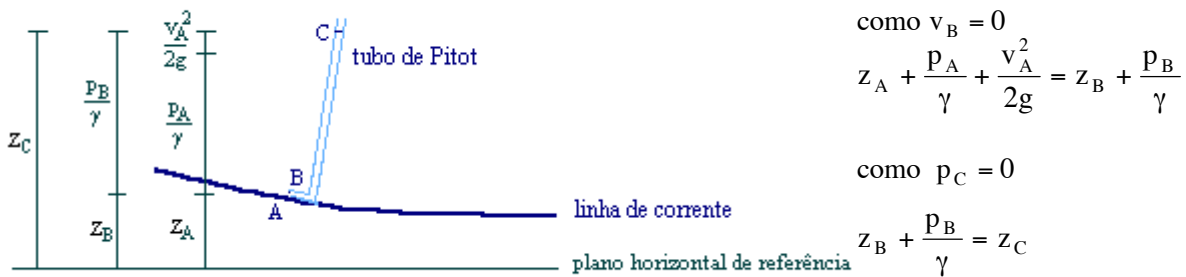


Figura 4.5 Tubo de Pitot. Transferência de energia.

A associação do Tubo Piezométrico com o Tubo de Pitot, instalados na mesma posição da linha de corrente, permite determinar a altura cinética da partícula do escoamento localizada nessa posição. Conhecida a altura cinética é possível determinar a velocidade de escoamento da mesma partícula.

#### 4.4 Dedução do Teorema de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente, para líquidos reais

Os líquidos perfeitos não existem na natureza. Os líquidos reais comportam-se como perfeitos quando fortemente acelerados, tornando-se desprezáveis as tensões tangenciais.

No caso de líquidos reais, fazem-se sentir as forças resistentes ao escoamento entre as partículas e é necessário acrescentar o trabalho realizado por essas forças ao longo da linha de corrente, por unidade de peso do fluido e por unidade de comprimento, designado por perda de carga unitária e representado por  $j$ .

A Equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente aplicada a líquidos reais e escoamentos variáveis, toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j \quad (4.14)$$

A perda de carga unitária é afectada pelo sinal negativo considerando que a carga diminui à medida que  $s$  aumenta ao longo da linha de corrente.

Para o caso particular de escoamento permanente, a variação da velocidade com o tempo anula-se e a Equação de Bernoulli aplicada a líquidos reais escreve-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -j \quad (4.15)$$

A integração entre dois pontos 1 (a montante) e 2 (a jusante) da linha de corrente, permite obter:

$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) ds = - \int_1^2 j ds \quad (4.16)$$

$$\left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right)_2 - \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right)_1 = - \int_1^2 j ds \quad (4.17)$$

O membro da direita da equação 4.17 representa a perda de carga total entre os pontos 1 e 2 da linha de corrente. Para o seu cálculo deve ser conhecida a variação da perda de carga unitária ao longo da linha de corrente.

A representação da linha de energia, no caso de líquidos reais deixa de ser uma recta horizontal e passa a ser uma recta descendente, se a perda de carga unitária é constante ou uma curva se a perda de carga unitária variar ao longo da linha de corrente, figura 4.6.

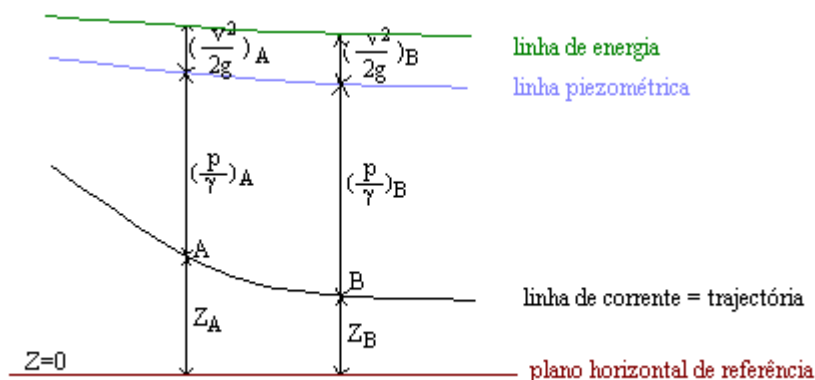


Figura 4.6 Linha piezométrica e linha de energia no caso particular do escoamento permanente de um fluido real, ao longo de uma linha de corrente

#### 4.5 Teorema de Bernoulli no aspecto global. Aplicação a um tubo de fluxo. Caso particular do escoamento permanente.

Para representação do Teorema de Bernoulli ao longo de um tubo de fluxo é necessário estudar a componente segundo a direcção normal à linha de corrente da equação fundamental da dinâmica aplicada a um dado volume de fluido criteriosamente escolhido. Sabendo que interessa o estudo da variação das grandezas ao longo da normal será considerado um volume cilíndrico com o eixo definido ao longo da direcção normal à linha de corrente, em que as bases são áreas elementares,  $dA$ , e a altura do cilindro é  $dn$ . As grandezas envolvidas no escoamento são consideradas constantes na base do cilindro, figura 4.7.

A aplicação da Equação Fundamental da Dinâmica ao volume de fluido considerado na figura 4.7 permite escrever, equação 4.2:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{F}_t - m\vec{a} = 0 \tag{4.2}$$

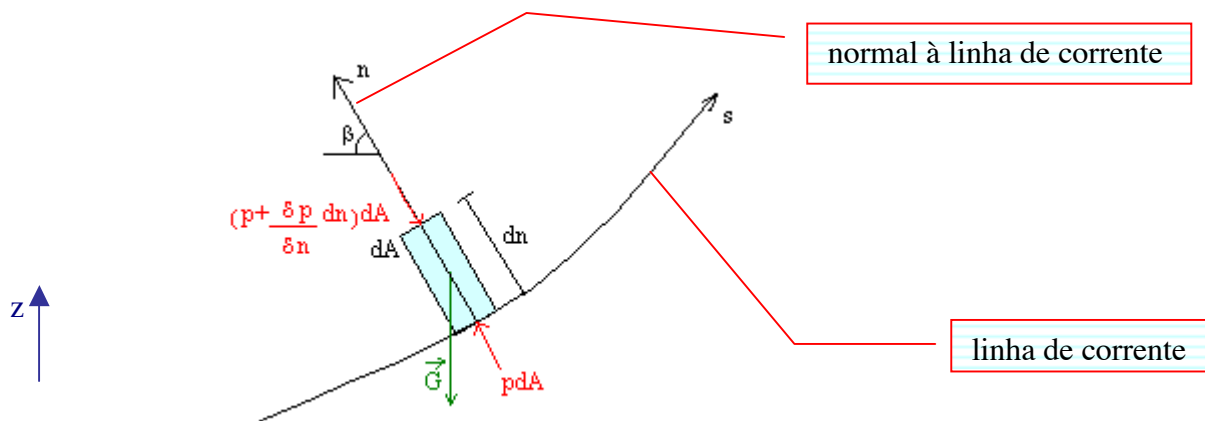


Figura 4.7 Domínio do fluido para estudo da componente segundo a direcção normal à linha de corrente da Equação Fundamental da Dinâmica

O peso próprio tem a direcção vertical e sentido de cima para baixo. As forças de contacto normais (forças de pressão) actuam sobre toda a superfície fronteira do volume, figura 4.7, no entanto só interessam as forças de pressão sobre as bases do volume definido, pois só estas têm componente segundo a direcção normal. As forças tangenciais nas bases do cilindro não têm componente segundo a direcção normal e a tensão tangencial na parede lateral do cilindro não existe por a velocidade não ter componente segundo a direcção normal à linha de corrente.

A componente, segundo a direcção normal à linha de corrente, da equação 4.2 pode escrever-se do seguinte modo:

$$-\gamma dA dn \operatorname{sen}\beta + p dA - \left( p + \frac{\partial p}{\partial n} dn \right) dA = \rho dA dn \frac{dv_n}{dt} \quad (4.18)$$

$$-\gamma dA dn \operatorname{sen}\beta - \frac{\partial p}{\partial n} dndA = \rho dA dn \frac{dv_n}{dt} \quad (4.19)$$

A componente segundo a direcção  $\mathbf{n}$  do vector aceleração (equação 4.3) é dada por:

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_n}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial n} \frac{dn}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial \perp} \frac{d\perp}{dt} \quad (4.20)$$

A aceleração local anula-se por se tratar de um escoamento permanente e a aceleração convectiva é representada apenas pela primeira parcela por as componentes da velocidade segundo a normal à linha de corrente,  $v_n = dn/dt$ , e segundo a direcção perpendicular,  $v_{\perp} = d\perp/dt$ , serem nulas.

Tendo em conta que na equação 4.19:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\partial z}{\partial n} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} = \frac{v_s}{r} \quad (4.22)$$

$$\frac{ds}{dt} = v_s \quad \text{e } v_s = v \quad (4.23)$$

obtém-se:

$$-\gamma dA dn \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n} dndA = \rho dA dn \frac{v_s^2}{r} \quad (4.24)$$

Dividindo a equação 4.24 pelo peso do fluido contido no volume,  $\gamma dA dn$ , vem:

$$\frac{\partial z}{\partial n} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{g} \frac{v^2}{r} \quad (4.25)$$

Tratando-se de um fluido incompressível e igualando a soma de derivadas à derivada da soma, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{v^2}{r} \quad (4.26)$$

A equação 4.26 representa a *variação da cota piezométrica segundo a normal às linhas de corrente, no caso de escoamento permanente.*

*Significado físico dos parâmetros:*

$\partial / \partial n$  - variação ao longo da normal à linha de corrente;

$z$  - cota topográfica relativamente a um dado plano horizontal de referência, é a energia potencial de posição por unidade de peso do fluido;

$p/\gamma$  - altura piezométrica, é a energia potencial de pressão por unidade de peso do fluido;

$z + p/\gamma$  - cota piezométrica relativamente a um dado plano horizontal de referência;

$r$  - raio de curvatura da linha de corrente

$-1/g \cdot v^2/r$  - componente segundo a direcção normal à linha de corrente da força de inércia convectiva por unidade de peso do fluido.

Casos particulares para aplicação da equação 4.26, para escoamento permanente. Tratando-se de escoamentos permanentes as linhas de corrente coincidem com as trajectórias:

Trajectórias rectilíneas, figura 4.8:

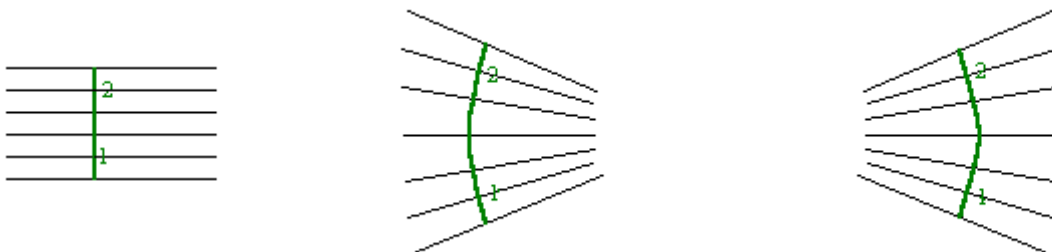


Figura 4.8 Trajectórias rectilíneas

No caso de trajectórias rectilíneas o raio de curvatura é infinito e o membro direito da equação 4.26 é nulo, ou seja a cota piezométrica é constante segundo a direcção normal a linhas de corrente rectilíneas, segundo a secção transversal do tubo de fluxo:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \quad (4.27)$$

Integrando entre os pontos 1 e 2 localizados na direcção normal à linha de corrente, figura 4.8, obtém-se:

$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial n} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) dn = 0 \quad (4.28)$$

$$\left( z + \frac{p}{\gamma} \right)_2 - \left( z + \frac{p}{\gamma} \right)_1 = 0 \quad (4.29)$$

No caso de trajectórias rectilíneas e paralelas entre si a cota piezométrica é constante na secção transversal. No caso de trajectórias convergentes ou divergentes a cota piezométrica é constante na superfície que, em cada posição, seja normal às trajectórias.

Trajectórias curvas (côncavas ou convexas), figura 4.9:

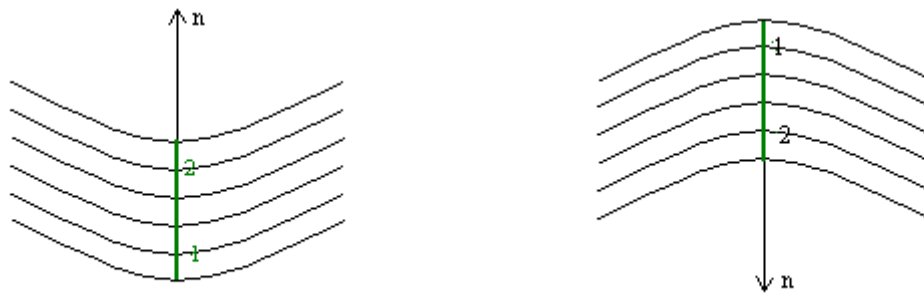


Figura 4.9 Trajectórias côncavas e trajectórias convexas

Neste caso, o raio de curvatura na equação 4.26 toma um valor finito. Integrando a equação 4.26 entre os pontos 1 e 2 de uma secção transversal, no sentido positivo da curvatura, obtém-se:



$$\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_2 - \left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_1 = -\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{v^2}{r} dn \quad (4.30)$$

O membro da direita é sempre negativo, dado que  $g$  é positivo, o quadrado da velocidade é sempre positivo e o raio de curvatura é sempre positivo :

$$\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_2 - \left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_1 < 0 \Rightarrow \left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_2 < \left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_1 \quad (4.31)$$

No caso de trajectórias curvas (côncavas ou convexas) a cota piezométrica diminui no sentido da curvatura, de 1 para 2.

A aplicação da componente segundo a normal à linha de corrente da Equação Fundamental da Dinâmica permitiu estudar a variação da cota piezométrica numa secção transversal do tubo de fluxo, no entanto, para dedução da Equação de Bernoulli aplicada ao longo de um tubo de fluxo é necessário conhecer a variação da carga total segundo a normal às linhas de corrente.

No caso de escoamento permanente, se o tubo de fluxo é de eixo rectilíneo, as linhas de corrente são rectilíneas e paralelas entre si, podendo concluir-se que a cota piezométrica é constante em cada secção transversal. Normalizou-se que a cota piezométrica na secção transversal de um tubo de fluxo seja calculada no centro de gravidade dessa secção. Existe uma linha piezométrica única para as diferentes linhas de corrente que constituem o tubo de fluxo, figura 4.10.

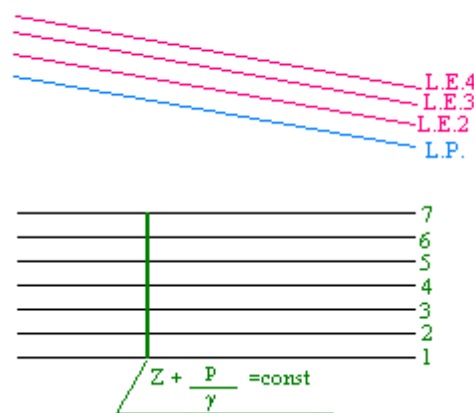


Figura 4.10 Tubo de fluxo. Linhas de energia e linha piezométrica

Na Equação de Bernoulli, aplicada ao longo do tubo de fluxo, os dois primeiros termos do membro da esquerda são a cota piezométrica no centro de gravidade da secção transversal que representam a cota piezométrica na secção transversal.

Como a velocidade varia de linha de corrente para linha de corrente existe uma linha de energia para cada linha de corrente, figura 4.10.

Não é, no entanto, possível representar as linhas de energia correspondentes a todas as linhas de corrente definidas no tubo de fluxo. É assim definida uma linha de energia, com base na velocidade média do escoamento no tubo de fluxo, tal que a energia cinética por unidade de tempo em cada secção transversal seja igual à energia cinética por unidade de tempo do escoamento real, na mesma secção.

A energia cinética por unidade de tempo (potência cinética) do escoamento, numa área elementar da secção transversal  $dA$ , em que existe uma partícula, localizada no centro de gravidade, com velocidade  $v$  é dada por:

$$\frac{1}{2}mv^2 \frac{1}{dt} = \frac{1}{2}\rho \text{Vol} v^2 \frac{1}{dt} = \frac{1}{2}\rho v dt dA v^2 \frac{1}{dt} = \frac{1}{2}\rho v^3 dA \quad (4.34)$$

A potência cinética na secção transversal do tubo de fluxo é determinada pela integração da equação anterior à área total da secção transversal, obtendo-se:

$$\int_A \frac{1}{2}\rho v^3 dA = \frac{1}{2}\rho \int_A v^3 dA \quad (4.35)$$

No escoamento fictício com velocidade média,  $U$ , a potência cinética na secção transversal do tubo de fluxo será:

$$\frac{1}{2}\rho \int_A U^3 dA = \frac{1}{2}\rho U^3 \int_A dA = \frac{1}{2}\rho U^3 A \quad (4.36)$$

Definiu-se Coeficiente de Coriolis, representado por  $\alpha$ , como a relação entre a potência cinética do escoamento real numa dada secção e a potência cinética do escoamento fictício na mesma secção:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\rho \int_A v^3 dA}{\frac{1}{2}\rho U^3 A} = \frac{\int_A v^3 dA}{U^3 A} \quad (4.38)$$

O valor do Coeficiente de Coriolis é função do diagrama de velocidades, sendo que quanto menor a variação de velocidade mais perto de um é o seu valor. Com base nos diagramas de velocidade em regime laminar e em regime turbulento, figura 3.6, conclui-se que o Coeficiente de Coriolis toma valores superiores em regime laminar do que em regime turbulento. Este coeficiente apresenta o valor de  $\alpha=2,0$  em regime laminar e  $\alpha \approx 1,15$  em regime turbulento.

Com a introdução do Coeficiente de Coriolis é possível substituir a potência cinética do escoamento real, através de um tubo de fluxo, pelo produto entre o coeficiente de Coriolis e a potência cinética do escoamento fictício.

$$\int_A \frac{1}{2} \rho v^3 dA = \alpha \frac{1}{2} \rho U^3 A \quad (4.39)$$

Na figura 4.10 as linhas de energia relativas às linhas de corrente representadas são substituídas por uma linha de energia única.

Na Equação de Bernoulli, aplicada ao longo de um tubo de fluxo, o terceiro termo do membro da esquerda é a energia cinética por unidade de peso que é função da potência cinética do escoamento real, tendo em conta que a energia cinética por unidade de peso é igual ao produto entre a potência cinética, o intervalo de tempo  $dt$  e o inverso do peso:

$$\left[ \left( \alpha \frac{1}{2} \rho U^3 A \right) dt \right] \frac{1}{G} = \left[ \left( \alpha \frac{1}{2} \rho U^3 A \right) dt \right] \frac{1}{\gamma \text{Vol}} = \alpha \frac{1}{2} \rho U^3 A \frac{1}{\gamma} \frac{dt}{\text{Vol}}$$

$$\alpha \frac{1}{2} \rho U^3 A \frac{1}{\gamma} \frac{dt}{\text{Vol}} = \alpha \frac{1}{2} \rho U^3 A \frac{1}{\gamma} \frac{1}{Q} = \alpha \frac{1}{2} U^3 A \frac{1}{g} \frac{1}{UA} = \alpha \frac{U^2}{2g}$$

concluindo que a energia cinética por unidade de peso do fluido numa dada secção do tubo de fluxo é dada por:

$$\alpha \frac{U^2}{2g} \quad (4.40)$$

O trabalho realizado pelas forças resistentes por unidade de peso do fluido e por unidade de comprimento do tubo de fluxo será representado por **J** e é calculado de acordo com a metodologia apresentada no Capítulo 6 deste curso.

A equação do Teorema de Bernoulli generalizado para um tubo de fluxo, em regime permanente, representa-se por:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = -J \quad (4.41)$$

*Significado físico dos parâmetros:*

$\partial / \partial s$  - variação ao longo do tubo de fluxo;

$z$  - cota topográfica do centro de gravidade da secção do tubo de fluxo, relativamente a um dado plano horizontal de referência, é a energia potencial de posição por unidade de peso do fluido;

$p/\gamma$  - altura piezométrica no centro de gravidade da secção do tubo de fluxo, é a energia potencial de pressão por unidade de peso do fluido;

$\alpha U^2 / 2g$  - altura cinética, é a energia cinética por unidade de peso do fluido na secção do tubo de fluxo;

$z + p/\gamma$  - cota piezométrica relativamente a um dado plano horizontal de referência na secção de um tubo de fluxo

$z + p/\gamma + \alpha U^2 / 2g$  - energia mecânica total por unidade de peso do fluido ou carga na secção transversal do tubo de fluxo, relativamente a um dado plano horizontal de referência, representa-se por H;

$J$  - perda de carga unitária ao longo do tubo de fluxo, trabalho realizado pelas forças resistentes por unidade de peso do fluido e por unidade de comprimento

A integração entre duas secções S1 (a montante) e S2 (a jusante) do tubo de fluxo, permite obter:

$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) ds = - \int_1^2 J ds \quad (4.42)$$

$$\left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right)_2 - \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right)_1 = - \int_1^2 J ds \quad (4.43)$$

O membro da direita da equação 4.43 representa a perda de carga total entre as secções S1 e S2 do tubo de fluxo. Para o seu cálculo deve ser conhecida a variação da perda de carga unitária ao longo do tubo de fluxo.

#### 4.6 Potência hidráulica. Bombas e turbinas

É interessante estudar o comportamento de um circuito hidráulico através da análise de transferência da potência hidráulica em substituição da análise de transferência da energia mecânica que se verifica na aplicação da Equação de Bernoulli.

Seja o circuito hidráulico constituído por dois reservatórios de grandes dimensões com uma conduta que liga os dois reservatórios e que permite o transporte de um caudal Q do reservatório a montante, R<sub>1</sub> para o reservatório a jusante, R<sub>2</sub>, representado na figura 4.11.

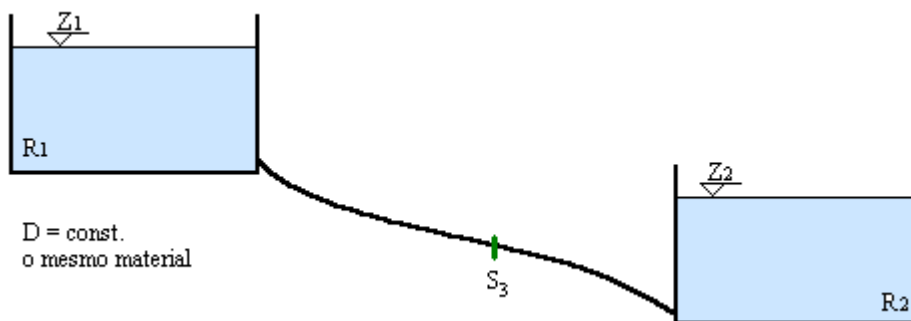


Figura 4.11 Circuito hidráulico. Potência hidráulica

A potência hidráulica do líquido no reservatório de montante (de grandes dimensões), é:

$$P_{esc1} = \gamma Q H_1 \quad (4.44)$$

em que a carga é igual à cota piezométrica da superfície livre por se admitir que a velocidade é nula dentro do reservatório, verificando-se a lei hidrostática de pressões:

$$H_1 = Z_1 \quad (4.45)$$

No reservatório de jusante (grandes dimensões), a potência hidráulica do líquido é:

$$P_{esc2} = \gamma Q H_2 \quad (4.46)$$

em que:

$$H_2 = Z_2 \quad (4.47)$$

A potência do líquido numa secção da conduta,  $S_3$  é:

$$P_{esc3} = \gamma Q H_3 \quad (4.48)$$

em que:

$$H_3 = Z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \alpha \frac{U_3^2}{2g} \quad (4.49)$$

A potência hidráulica necessária para o transporte do caudal  $Q$  entre os dois reservatórios é:

$$P_{esc\Delta H} = \gamma Q \Delta H \quad (4.50)$$

em que  $\Delta H$  é a perda de carga ao longo do percurso, entre o reservatório de montante e o reservatório de jusante.

Na análise de transferência de potência hidráulica, podem ocorrer dois casos:

1º caso - Se  $\Delta H > H_1 - H_2 \Rightarrow$  é necessário instalar uma bomba que transmite ao escoamento uma carga igual a (designa-se por altura total de elevação da bomba), figura 4.12:

$$H_t = \Delta H - (H_1 - H_2) \quad (4.51)$$

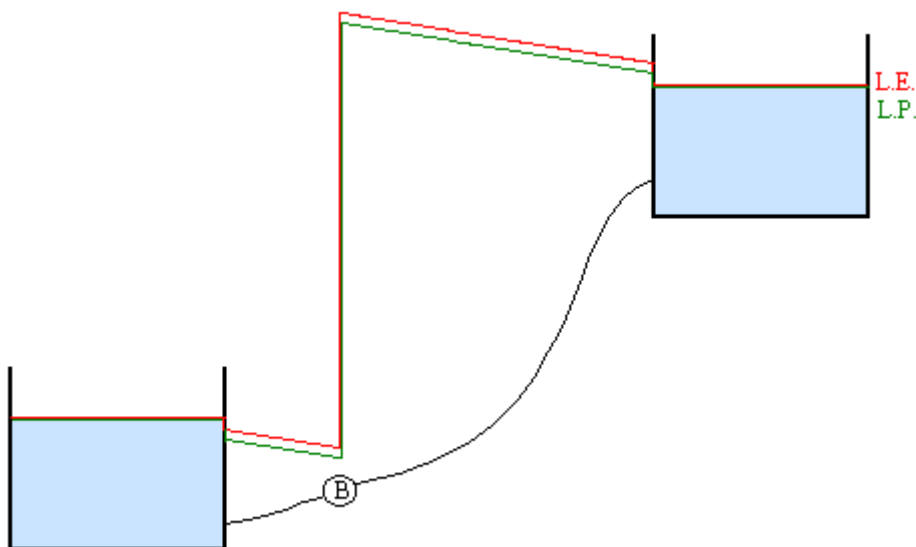


Figura 4.12 Linha de energia e linha piezométrica no circuito hidráulico-conduta elevatória

A potência transmitida pela bomba ao escoamento é:

$$P_{B-esc} = \gamma Q H_t \quad (4.52)$$

e a potência da bomba é um pouco superior tendo em atenção as perdas na bomba:

$$P_B = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_B} \quad (4.53)$$

a potência necessária no motor da bomba é:

$$P_m = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_m \eta_B} \quad (4.54)$$

2º caso - Se  $\Delta H < H_1 - H_2 \Rightarrow$  pode ser instalada uma turbina que recebe do escoamento uma carga igual a (designa-se por queda útil), figura 4.13:

$$H_u = (H_1 - H_2) - \Delta H \quad (4.55)$$

A potência recebida pela turbina a partir do escoamento é:

$$P_{esc-T} = \gamma Q H_u \quad (4.56)$$

e a potência da turbina é um pouco inferior, tendo em atenção às perdas na transformação (na turbina):

$$P_T = \eta_T \gamma Q H_u \quad (4.57)$$

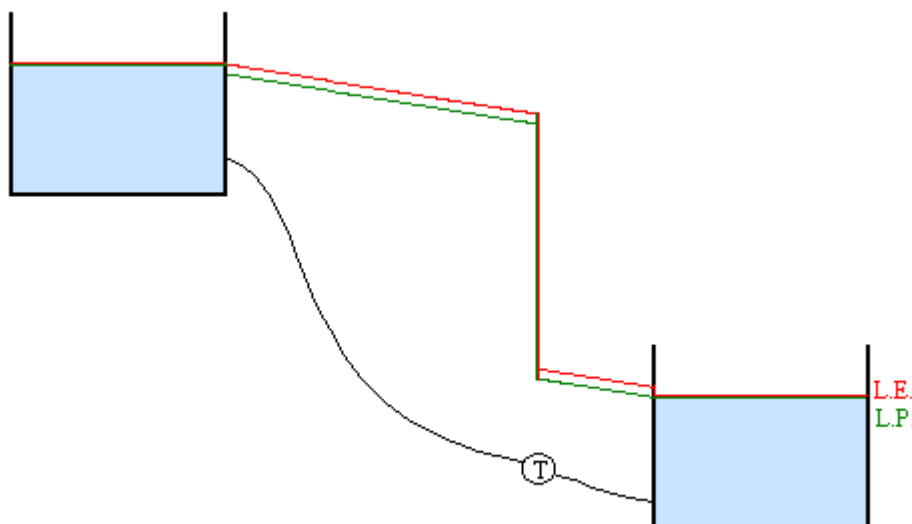


Figura 4.13 Linha de energia e linha piezométrica no circuito hidráulico-conduta gravítica com turbina

## 4.7 Alguns exemplos de aplicação do Teorema de Bernoulli

### 4.7.1 Tubo de Pitot

O funcionamento do Tubo de Pitot do ponto de vista energético é uma das aplicações tradicionais do Teorema de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente. A associação do Tubo de Pitot com o tubo piezométrico permite a determinação experimental da altura cinética e indirectamente da velocidade de escoamento, no ponto da linha de corrente em que os dois tubos foram instalados.

É possível com a instalação de um tubo piezométrico numa dada secção de um tubo de fluxo com eixo rectilíneo, em que as linhas de corrente são rectilíneas e paralelas entre si, e a instalação de um Tubo de Pitot em diferentes posições da secção transversal determinar o diagrama de velocidades nessa secção, figura 4.14.

À medida que a posição do Tubo de Pitot se aproxima do centro de gravidade da secção transversal do tubo de fluxo a diferença entre as cotas topográficas da superfície livre entre os dois tubos aumenta porque, a velocidade também aumenta.

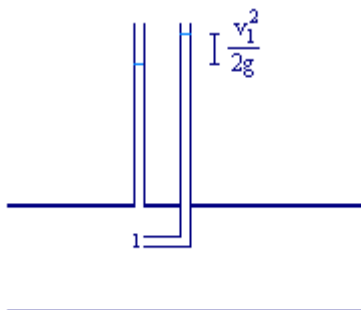


Figura 4.14 Associação do Tubo piezométrico com o Tubo de Pitot para determinação do diagrama de velocidades numa secção transversal de um tubo de fluxo

### 4.7.2 Tubo de Venturi

O Tubo de Venturi é usado para calcular o caudal num troço de um tubo de fluxo. É constituído por um tubo de secção menor e um manómetro diferencial que permite determinar a diferença entre a cota piezométrica na secção do tubo de fluxo em estudo, S1 e a cota piezométrica numa secção do tubo de menor área, S2, figura 4.15.



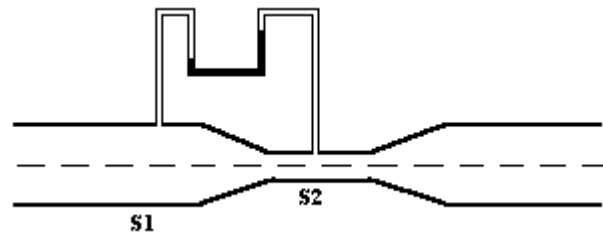


Figura 4.15 Tubo de Venturi

Determinada a diferença de cotas piezométricas entre as secções S1 e S2, a aplicação do Teorema de Bernoulli ao longo do tubo de fluxo permite determinar uma relação entre as velocidades médias nas duas secções que, em conjunto com a equação da continuidade, as permite calcular (resolução de um sistema de duas equações a duas incógnitas). Calculada a velocidade média numa das secções é possível calcular o caudal escoado.

## Capítulo 5

### TEOREMA DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO E SUAS APLICAÇÕES

*Objectivo: Calculo da força de um líquido em movimento sobre a fronteira sólida .*

#### 5.1 Introdução

As Equações da Continuidade e de Bernoulli representam o Princípio da Conservação da Massa e o Princípio da Conservação da Energia, respectivamente. São por isso equações escalares, não permitindo a determinação da força que o escoamento exerce sobre as fronteiras sólidas.

No caso do líquido em repouso, a força do líquido sobre a fronteira sólida é a resultante das forças de pressão, ou seja a impulsão hidrostática, estudada no capítulo 2. Se o líquido está em movimento, além da resultante das forças de pressão é necessário considerar a resultante das forças tangenciais e a resultante das forças de inércia. Será assim, aplicada a Equação Fundamental da Dinâmica a um dado volume de fluido em movimento e analisada de um ponto de vista vectorial.

#### 5.2 Aplicação da Equação Fundamental da Dinâmica a um dado volume de fluido

A equação fundamental da dinâmica representa-se por:

$$\vec{F}_e - m\vec{a} = 0 \quad (5.1)$$

em que  $\vec{F}_e$  representa a resultante das forças exteriores que actuam sobre um dado volume de fluido dentro do domínio fluido.

As forças exteriores são:

- o peso próprio, representado por  $\vec{G}$  ;

- a resultante das forças de contacto ou superfície, resultante das forças normais e das forças tangenciais que actuam no volume de fluido considerado, através da sua fronteira, representada por  $\vec{F}_C$ ;

A força de inércia é representada por:

$$- m\vec{a} = -m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5.2)$$

e se a massa do volume de fluido em estudo é constante no tempo, porque a fronteira do volume do volume se mantém constante e o fluido é incompressível, pode escrever-se:

$$- m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{dm\vec{v}}{dt} . \quad (5.3)$$

Aplicando a definição de aceleração e assumindo um sistema de eixos cartesianos  $oxyz$ , vem:

$$- \frac{dm\vec{v}}{dt} = - \frac{\partial m\vec{v}}{\partial t} - \left( \frac{\partial m\vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial m\vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial m\vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \quad (5.4)$$

em que a primeira parcela corresponde à força de inércia local, representada por  $\vec{I}$  e a segunda parcela corresponde à variação da quantidade de movimento,  $m\vec{v}$  no volume de fluido em estudo, por unidade de tempo, representada por  $\vec{M}_s - \vec{M}_e$ , ou seja:

$$- \frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{I} - (\vec{M}_s - \vec{M}_e) \quad (5.5)$$

A equação 5.1 transforma-se em:

$$\vec{G} + \vec{F}_C + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_s = 0 \quad (5.6)$$

Esta equação representa o Teorema da Quantidade de Movimento ou Teorema de Euler que se descreve do seguinte modo: Para um dado volume no interior de um fluido é nula, em cada instante, a resultante das seguintes forças:

- peso próprio do fluido contido no volume em estudo;
- resultante das forças de contacto que actuam no fluido através da fronteira do volume em estudo;
- a força de inércia local; e

- a variação da quantidade de movimento através da fronteira do volume em estudo, por unidade de tempo.

No caso particular de escoamento permanente, a força de inércia local anula-se e a equação do Teorema de Euler reduz-se a:

$$\vec{G} + \vec{F}_C + \vec{M}_e - \vec{M}_s = 0 \quad (5.7)$$

Esta equação é aplicada para determinar a força de um fluido em movimento sobre uma fronteira sólida. A incógnita está representada nesta equação através do termo da resultante das forças de contacto. Estas forças de contacto incluem a força da fronteira sólida sobre o domínio fluido em estudo que é a reacção (força igual e simétrica) da força do fluido sobre a fronteira sólida.

#### *Cálculo das forças envolvidas na equação 5.7*

O peso próprio pode ser determinado pelo produto do peso volúmico do fluido pelo volume da região em estudo.

A resultante das forças de contacto têm a componente normal que é a impulsão e é determinada pelo produto entre a pressão e a área em que está a actuar e a componente tangencial que na maior parte das vezes se anula porque se está a considerar a direcção normal à direcção principal do escoamento ou coincide com a simétrica da força do fluido sobre a fronteira sólida ou seja a força simétrica à força incógnita.

A quantidade de movimento por unidade de tempo que passa numa secção elementar  $dA$  é determinada através da seguinte equação:

$$|d\vec{M}| = \frac{mv}{dt} = \frac{\rho Vol v}{dt} = \rho v dQ = \rho v^2 dA \quad (5.8)$$

que integrada na área  $A$  permite obter, admitindo  $\rho = \text{const}$ :

$$M = \int_A dM = \int_A \rho v^2 dA = \rho \int_A v^2 dA \quad (5.9)$$

O integral na área  $A$  da velocidade ao quadrado só será possível resolver se conhecido o diagrama de velocidades. Normalmente o diagrama de velocidades não é conhecido e por isso é definido um parâmetro designado por Coeficiente de Quantidade de Movimento representado por  $\alpha'$  e que é igual à relação entre a quantidade de movimento por unidade de

tempo do escoamento real e a quantidade de movimento por unidade de tempo do escoamento fictício em que a velocidade é constante e igual à velocidade média:

$$\alpha' = \frac{\rho \int_A v^2 dA}{\rho U^2 A} \quad (5.10)$$

Introduzindo o coeficiente de quantidade de movimento na equação 5.9, obtém-se a equação que permite determinar a quantidade de movimento por unidade de tempo numa área  $A$  aplicando a velocidade média do escoamento:

$$M = \alpha' \rho U^2 A \quad (5.11)$$

### 5.3 Aplicações do Teorema da Quantidade de Movimento

O Teorema da Quantidade de Movimento na forma da equação 5.7 é de fácil aplicação porque os parâmetros com excepção do peso próprio são determinados com base no estudo sobre a fronteira do volume em estudo.

Este teorema é aplicado para determinar a força que o fluido exerce sobre uma fronteira sólida, estando assim a força simétrica da incógnita incluída no termo da resultante das forças de contacto. São exemplos:

- a determinação da força que um fluido exerce sobre as paredes da conduta onde se dá o seu escoamento;
- a determinação da força que um fluido exerce sobre as paredes de uma curva, singularidade do sistema de condutas onde se dá o escoamento;
- a determinação da força que um fluido exerce sobre as paredes de um estreitamento ou alargamento, singularidade do sistema de condutas onde se dá o escoamento;
- a determinação da força que um fluido exerce sobre as paredes de um reservatório onde se encontra;
- a determinação da força de um jacto de água sobre uma parede.

Na aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento devem ser seguidos os seguintes passos:

1º *Definir o volume a aplicar a equação*: este volume deve ser limitado pela superfície sólida onde se pretende determinar a força actuante e depois por superfícies que formem uma fronteira fechada e que sejam fáceis de estudar como superfície sujeitas a pressões nulas, a

tensões tangenciais nulas ou com velocidade nula. Como exemplo referem-se a superfície livre de um reservatório e a secção transversal de um escoamento em pressão.

*2º Definir o sistema de eixos a considerar.*

*3º Verificar quais as forças da equação 5.7 que estão presentes e marcá-las no desenho.* Deve ser percorrida toda a fronteira do volume de modo a serem identificadas as forças de contacto.

*4º Escrever a equação vectorial.*

*5º Resolver a equação através das componentes segundo os eixos coordenados.*



## Capítulo 6

### **LEIS DE RESISTÊNCIA DOS ESCOAMENTOS PERMANENTES E UNIFORMES EM PRESSÃO**

*Objectivo: Cálculo da perda de carga unitária  
ao longo de uma conduta em pressão.*

#### **6.1 Conceitos fundamentais**

Os escoamentos permanentes em pressão acontecem em condutas com condições de fronteira, a montante e jusante, constantes ao longo do tempo. Os escoamentos uniformes em pressão acontecem em condutas de eixo rectilíneo com secção transversal e caudal constantes, em que as características do escoamento se mantêm constantes ao longo do escoamento.

As leis de resistência são relações físicas que permitem relacionar a perda de carga unitária com o diâmetro da conduta,  $D$ , a natureza do material da conduta e o caudal transportado de um dado fluido. As leis de resistência apresentadas neste capítulo são aplicáveis a escoamentos permanentes e uniformes.

A perda de carga unitária,  $J$ , perda de carga por metro linear de conduta, é representada pela unidade mc.a./m. Esta unidade é adimensional do ponto de vista formal, mas do ponto de vista físico é uma unidade de energia por unidade de peso do fluido sobre uma unidade de comprimento, assim é normalmente usado o factor de resistência,  $f$ , que representa a sua forma adimensional obtida pela divisão de  $J$  pela altura cinética e a multiplicação pelo diâmetro da conduta:

$$f = \frac{JD}{\frac{U^2}{2g}} \quad (6.1)$$

Em cálculo hidráulico o diâmetro da conduta refere-se ao diâmetro interno, que em regime uniforme é constante.



A natureza do material da conduta é representada pela sua rugosidade, caracterizada pelo parâmetro denominado rugosidade absoluta equivalente,  $k$ , cujo significado será explicado à frente. Em regime uniforme este parâmetro é constante na conduta.

O fluido é representado pelas características físicas: peso volúmico,  $\gamma$  e viscosidade cinemática,  $\nu$ , ou viscosidade dinâmica,  $\mu$ . No âmbito do nosso estudo o fluido é a água.

O caudal transportado pela conduta é constante no tempo e ao longo da conduta. Se o diâmetro é constante também a secção molhada e o módulo da velocidade média são constantes. No regime uniforme a direcção da velocidade também tem de ser constante, ou seja, a conduta tem obrigatoriamente eixo rectilíneo. As linhas de corrente, coincidentes com as trajectórias, são rectilíneas e paralelas entre si, sendo por isso a distribuição de pressões hidrostática, na secção transversal do escoamento.

Para o caudal (ou velocidade), a natureza do material da conduta e o diâmetro da conduta constantes no espaço e no tempo, a perda de carga unitária, no transporte de um dado fluido, também é constante ao longo do percurso e ao longo do tempo. A linha de energia, que representa a carga total em cada secção da conduta, é uma recta e o seno do ângulo formado pela recta com a horizontal,  $\beta$ , é a perda de carga unitária, figura 6.1. A linha piezométrica que representa a cota piezométrica das secções transversais ao longo da conduta, é paralela à linha de energia. Se o diagrama de velocidades é constante ao longo da conduta, a velocidade média e o coeficiente de Coriolis também são constantes, Figura 6.1.

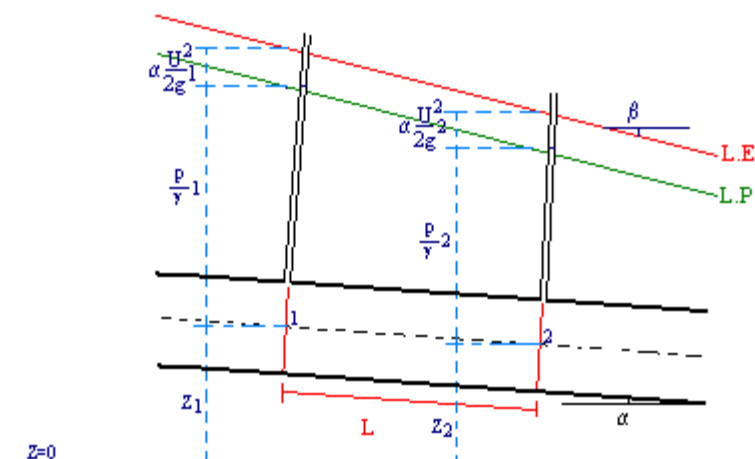


Figura 6.1 Representação esquemática da linha de energia e da linha piezométrica de um escoamento permanente e uniforme em pressão

Ao longo de um escoamento permanente e uniforme numa conduta em pressão, a perda de carga unitária é determinada pela equação seguinte:

$$J = \frac{H_1 - H_2}{L} \quad (6.2)$$

em que, substituindo a carga em cada secção pela soma das três formas de energia mecânica, permite obter:

$$J = \frac{\left( Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left( Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \right)}{L} \quad (6.3)$$

Para o caso particular de regime uniforme, em que a velocidade média e o Coeficiente de Coriolis são constantes ao longo da conduta, é possível simplificar a equação anterior do seguinte modo:

$$J = \frac{\left( Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)}{L} \quad (6.4)$$

podendo concluir-se que, em escoamentos uniformes, a perda de carga unitária também pode ser determinada a partir da linha piezométrica.

Em laboratório e no caso de escoamentos permanentes e uniformes em pressão, a perda de carga unitária pode ser determinada instalando dois tubos piezométricos em duas secções da conduta afastadas de um dado comprimento. A diferença entre as cotas topográficas da superfície livre nos dois tubos piezométricos é igual à perda de carga contínua entre as duas secções; esta diferença a dividir pelo comprimento da conduta entre as duas secções referidas permite obter a perda de carga unitária.

O cálculo analítico da perda de carga unitária obriga a uma análise da causa imediata da sua ocorrência: o gradiente de velocidade na secção transversal. A velocidade varia na secção transversal do escoamento porque a conduta apresenta rugosidade e porque o fluido transportado tem viscosidade. Se não existisse rugosidade, o fluido deslocava-se como um sólido deslizando sobre as paredes do tubo sem atrito, a rugosidade da parede obriga a que as partículas de fluido em contacto com a parede fiquem retidas e, como existe resistência ao deslocamento entre as partículas, atrasam as partículas que lhe estão junto. Acontece assim a variação da velocidade na secção transversal, desde a velocidade nula junto às paredes do

tubo até à velocidade máxima no eixo do tubo. O gradiente de velocidades na secção transversal dá origem à tensão tangencial de arrastamento que realiza trabalho. O trabalho realizado pelas forças resistentes por unidade de peso do fluido e por unidade de comprimento é a perda de carga unitária.

Os diagramas de velocidade na secção transversal de um escoamento variam com o regime de escoamento: laminar ou turbulento, figura 3.6, dando por isso origem a leis de resistência diferentes.

## 6.2 Escoamento laminar

No regime laminar as partículas mantêm a sua posição relativa, não existindo transferência de informação entre as lâminas de fluido que se deslocam ao longo da conduta. As partículas que estão encostadas à parede têm velocidade igual à velocidade do tubo, influenciando as partículas vizinhas através do efeito da viscosidade.

Em regime laminar a perda de carga unitária é função da velocidade média, do diâmetro da conduta e das características físicas do fluido, não se manifesta a influência da rugosidade do tubo. Esta relação é representada pela Fórmula de Hagen-Poiseuille que, para o caso particular das secções circulares, se representa através da equação seguinte:

$$J = 32 \frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2} \quad (6.5)$$

No escoamento laminar de um fluido com viscosidade e peso volúmico constantes, num dado tubo de secção constante, a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência um da velocidade.

No caso de escoamentos laminares em tubos de secção não circular a equação 6.5 é diferente no valor da constante.

A equação de Hagen-Poiseuille pode ser apresentada de um modo adimensional através da introdução do factor de resistência, equação 6.1, e do nº de Reynolds, equação 6.6, obtendo-se a equação de Hagen-Poiseuille adimensionalizada, equação 6.7.

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} \quad (6.6)$$

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (6.7)$$

## 6.3 Escoamento turbulento em tubos circulares comerciais

### 6.3.1 Nota introdutória

A maioria dos escoamentos de água em circuitos hidráulicos fazem-se em escoamento turbulento. Se a viscosidade cinemática da água tem o valor de  $\nu=1,01 \text{ E-6 m}^2\text{s}^{-1}$  para  $T=20^\circ\text{C}$ , é necessário que as velocidades de escoamento tomem valores muito baixos para que o regime de escoamento seja laminar, tendo em conta que para condutas circulares o regime turbulento acontece para  $N^\circ$  de Reynolds superiores a 3000-4000.

Os primeiros trabalhos experimentais e analíticos desenvolvidos para o cálculo das perdas de carga unitárias em escoamentos turbulentos foram realizados em tubos de rugosidade uniforme.

Na realidade, os tubos comerciais não apresentam rugosidade uniforme e por isso foi necessário adaptar as equações desenvolvidas para tubos de rugosidade uniforme. Para tal, foi introduzido o parâmetro rugosidade absoluta equivalente,  $k$ .

### 6.3.2 Equação de Colebrook-White

Com base nos estudos realizados por Nikuradse em tubos de rugosidade uniforme, nas equações de Karman-Prandtl para tubos lisos, equação 6.8, e para tubos rugosos, equação 6.9, e em trabalho experimental com tubos comerciais, Colebrook e White deduziram uma equação que permitiu relacionar a perda de carga unitária com o caudal ou velocidade, o diâmetro e a rugosidade absoluta equivalente dos tubos, equação 6.10, designada por Equação de Colebrook-White. Esta equação é implícita, relativamente à perda de carga unitária, obrigando à aplicação de um método numérico para a sua resolução (ex: Método das Substituições Sucessivas).

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re\sqrt{f}}{2,51} \quad (6.8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,7 D}{k} \quad (6.9)$$

$$J = \frac{U^2}{8gD} \log^{-2} \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{2,51\nu}{D\sqrt{2gDJ}} \right) \quad (6.10)$$

A equação de Colebrook-White pode ser apresentada na forma adimensional através da introdução de três parâmetros adimensionais: o factor de resistência, o n° de Reynolds e a rugosidade relativa, equação 6.11.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{3,7 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (6.11)$$

O factor de resistência e o n° de Reynolds já foram apresentados, a rugosidade relativa é a rugosidade absoluta equivalente adimensionalizada com o diâmetro interior do tubo, k/D.

Define-se rugosidade absoluta equivalente como a rugosidade uniforme fictícia, calculada pela equação de Karman-Prandtl para tubos rugosos, que dê origem à mesma perda de carga quando transporta o mesmo caudal através de um tubo com o mesmo diâmetro.

O valor da rugosidade absoluta equivalente de cada material comercial está disponível no catálogo do fabricante. No Quadro 6.1 são apresentados valores da rugosidade absoluta equivalente de diferentes materiais.

Quadro 6.1 Rugosidade absoluta equivalente de diferentes materiais (Novais Barbosa, 1985)

<b>Natureza do tubo</b>	<b>Rugosidade absoluta equivalente (mm)</b>
Vidro	0,001 a 0,003
Cobre	0,01 a 0,04
PVC	0,01 a 0,04
Fibrocimento	0,03 a 0,1
Ferro fundido novo	0,25 a 1,0
Ferro galvanizado	0,1 a 0,3
Betão liso	0,3 a 2
Betão rugoso	2 a 10

### 6.3.3 Ábaco de Moody

Na época em que foi deduzida a equação de Colebrook-White não existiam meios de cálculo compatíveis para a sua aplicação. Foram traçados vários ábacos com a representação da Equação de Colebrook-White que permitiam a aplicação directa no cálculo da perda de carga unitária. O mais conhecido é o Ábaco de Moody, figura 6.2, que permite o cálculo

rápido de um valor aproximado da perda de carga unitária e a identificação das características dos diferentes tipos de escoamento que se verificam no transporte de um fluido através de um tubo.

O Ábaco de Moody tem os eixos graduados em escala logarítmica e representa a variação do factor de resistência em função da variação do nº de Reynolds para tubos com diferente rugosidade relativa. É um Ábaco universal porque também representa a equação de Hagen-Poiseuille para escoamentos laminares e tubos circulares que, em escala logarítmica, é uma recta.

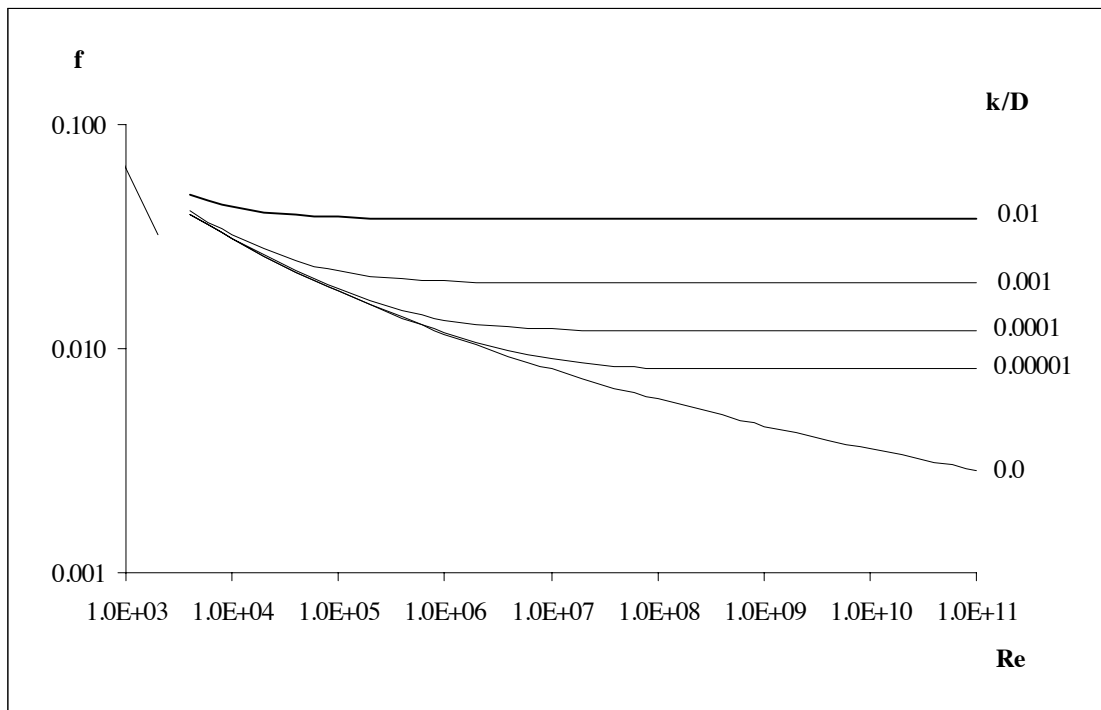


Figura 6.2 Ábaco de Moody

Numa análise cuidada do Ábaco de Moody verifica-se que os tubos com um dado diâmetro e uma dada rugosidade comportam-se com se fossem lisos para pequenos valores de  $Re$  (velocidades baixas). No caso de um tubo com rugosidade relativa igual a  $k=0,00001$ , a curva que representa a variação do factor de resistência com o nº de Reynolds coincide com a curva relativa à rugosidade nula (tubo liso) até ao valor de  $Re$  de aproximadamente  $5,0E05$ . Este fenómeno verifica-se para valores tão mais pequenos da velocidade quanto maior for a rugosidade absoluta equivalente do material. Pode assim concluir-se que para uma dada rugosidade relativa existe um intervalo de  $Re$  em que o tubo se comporta como liso, o factor

de resistência apenas depende do  $n^\circ$  de Reynolds e o regime turbulento é designado por regime turbulento liso. Existem algumas excepções como por exemplo no caso de tubos com rugosidade relativa  $k=0,01$  em que o escoamento nunca é turbulento liso.

No mesmo tubo, quando o caudal aumenta, aumenta a velocidade e o  $n^\circ$  de Reynolds e a partir de um dado valor o factor de resistência mantém-se constante. No Ábaco de Moody a curva de variação do factor de resistência com o  $n^\circ$  de Reynolds transforma-se numa recta horizontal, o que acontece para valores do Re tanto maiores quanto menor for a rugosidade relativa. Pode assim concluir-se que neste caso o factor de resistência apenas depende da rugosidade relativa e o regime turbulento é designado por regime turbulento rugoso. Se o factor de resistência se mantém constante com o Re, a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência dois da velocidade média, equação 6.1. No caso do tubo com rugosidade relativa igual a  $k=0,00001$ , o escoamento turbulento rugoso acontece para valores do  $n^\circ$  de Reynolds superiores a aproximadamente  $9,0E07$ . Em tubos lisos não é possível acontecer um escoamento turbulento rugoso.

Entre o regime turbulento liso e o regime turbulento rugoso o escoamento turbulento designa-se por turbulento de transição e caracteriza-se por o factor de resistência variar com o  $n^\circ$  de Reynolds e com a rugosidade relativa.

Pode assim concluir-se que em escoamentos turbulentos, para uma dada rugosidade relativa :

- até um dado valor de Re, a perda de carga unitária em tubos rugosos coincide com a perda de carga em tubos lisos e apenas depende do Re – *regime turbulento liso*
- a partir de um dado valor de Re, a perda de carga unitária em tubos rugosos apenas depende da rugosidade – *regime turbulento rugoso*
- entre os dois valores de Re anteriores a perda de carga unitária depende da rugosidade e do Re – *regime turbulento de transição*

### 6.3.3 Equações empíricas

Existem ainda equações empíricas para determinação da perda de carga unitária. Estas equações são de utilização simples e devem ser cuidadosamente aplicadas por terem sido deduzidas para condições específicas. As equações empíricas só podem ser aplicadas nas condições para que foram deduzidas.

São apresentados alguns exemplos:

Equação de Blasius:

$$f = 0,3164 Re^{-0,25} \quad \text{para } 3000 < Re < 10^5 \quad (6.12)$$

O factor de resistência é apenas função do Re, o que só será admissível em regime turbulento liso. A sobreposição desta equação com o Ábaco de Moody, figura 6.3 permite concluir que a equação de Blasius representa bem o factor de resistência para valores do nº de Re até  $10^5$ .

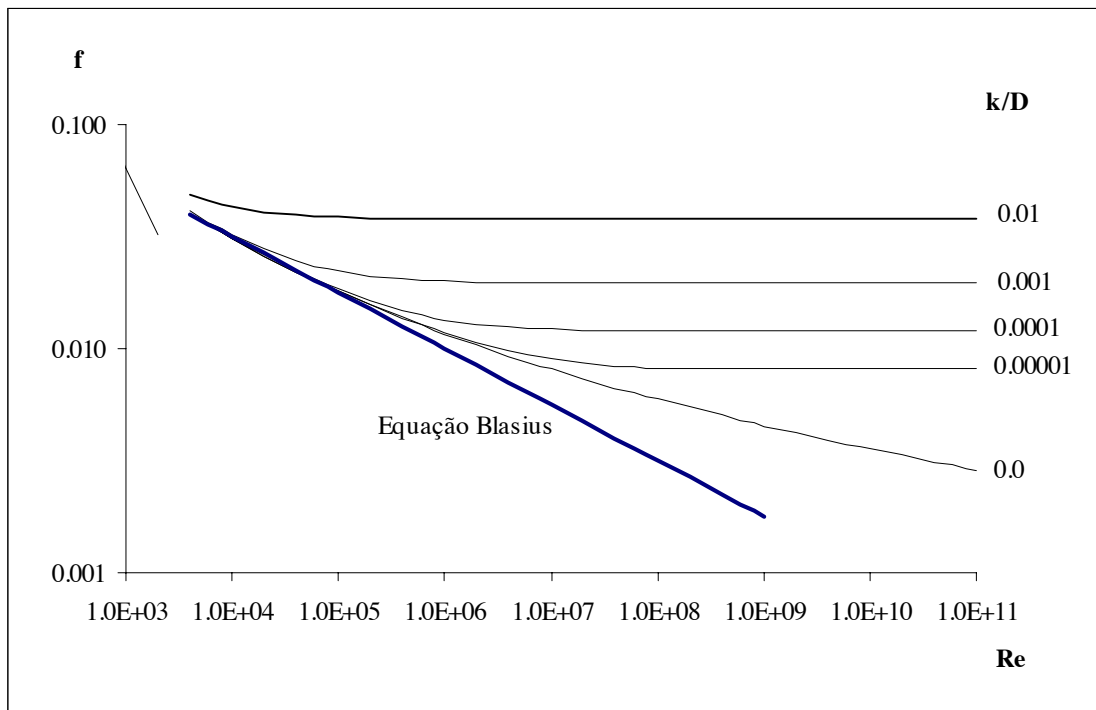


Figura 6.3 Sobreposição da Equação de Blasius ao Ábaco de Moody

A substituição da Equação de Blasius na equação 6.1 permite obter:

$$\frac{JD}{U^2} = 0,3164 \left( \frac{UD}{\nu} \right)^{-0,25} \quad (6.13)$$

$$J = 0,3164 \frac{\nu^{0,25}}{2gD^{1,25}} U^{1,75} \quad (6.14)$$



Esta equação permite concluir que, tendo em conta que a viscosidade cinemática e o diâmetro não dependem da velocidade média, a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência 1,75 da velocidade média, em regime turbulento liso.

Equação de Manning-Strickler:

$$Q = K_s A R_h^{2/3} J^{1/2} \tag{6.15}$$

em que:

$R_h$  – raio hidráulico que é a relação entre a área molhada e o perímetro molhado, no caso do tubo circular é determinado por  $R_h=D/4$ ;

$K_s$  – coeficiente de Manning-Strickler, depende da natureza do tubo e do diâmetro;

Esta equação foi deduzida para escoamentos em superfície livre, devendo por isso ser evitada a sua aplicação a escoamentos em pressão. Tendo em conta que os parâmetros  $K_s$  e  $R_h$  não dependem da velocidade média, conclui-se que a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência dois da velocidade média, ou seja esta equação pode dar bons resultados em escoamentos turbulentos rugosos.

No Quadro 6.2 são apresentados os valores do parâmetro  $K_s$  para diferentes materiais do tubo.

Quadro 6.2 Coeficiente de Manning-Strickler para diferentes materiais  
(Novais Barbosa, 1985)

Natureza do tubo	Coeficiente de Manning-Strickler ( $m^{1/3}s^{-1}$ )
Betão	70
Ferro fundido novo	80
Betão muito liso	85
Fibrocimento	95 a 105
Cobre, PVC	115 a 125

Para estudar o campo de aplicação desta equação foi substituído, na Equação de Manning-Strickler, o parâmetro J pela relação com o factor de resistência, equação 6.1, obtendo-se:

$$f = \frac{2^{11/3} g}{K_s^2 D^{1/3}} \quad (6.16)$$

A equação 6.16 mostra que o factor de resistência não depende da velocidade. Para um dado tubo de um dado material o factor de resistência é constante.

Na figura 6.4 é sobreposta a Equação de Manning-Strickler para tubos de ferro fundido novo e três diâmetros diferentes, em que o Coeficiente de Manning-Strickler foi considerado  $K_s = 80 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$  e a rugosidade absoluta equivalente  $k = 0,25 \text{ mm}$ , com Ábaco de Moody. Nesta representação apenas foi considerada a gama de  $n^\circ$  de Reynolds correspondente a velocidades possíveis nos circuitos hidráulicos.

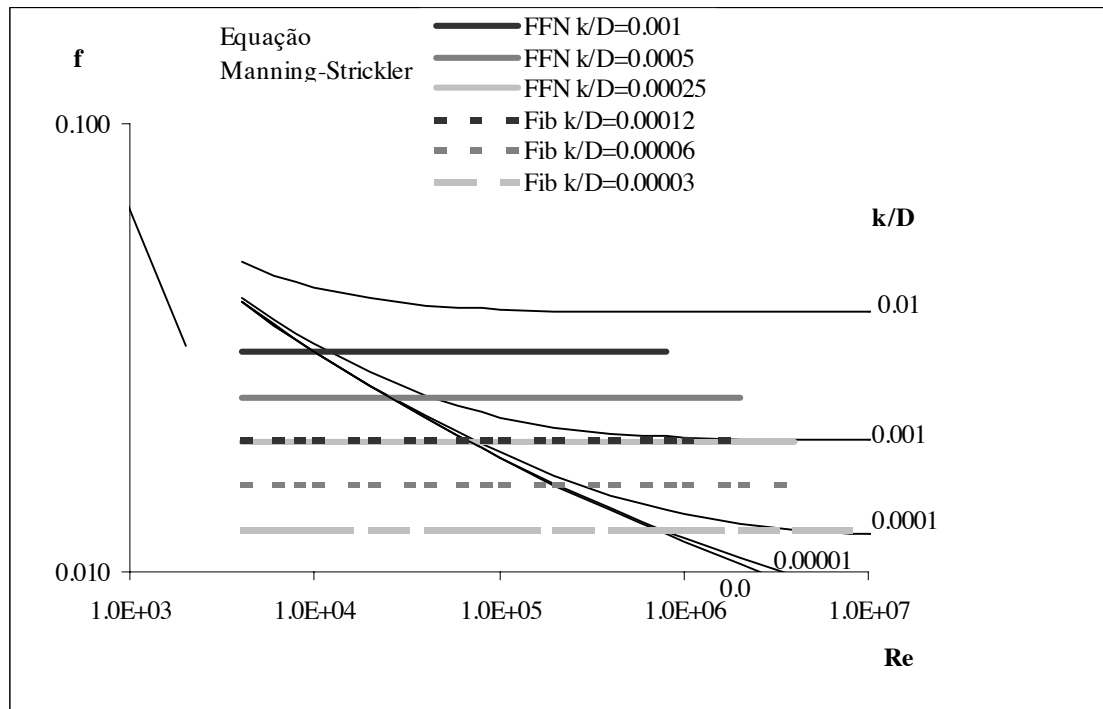


Figura 6.4 Sobreposição da Equação de Manning-Strickler ao Ábaco de Moody

Conclui-se que para tubos de ferro fundido novo a Equação de Manning-Strickler calcula valores do factor de resistência superiores ao valor obtido pela aplicação do Ábaco de Moody.

Equações de Scimemi (aplicadas a tubos de secção circular e escoamento de água):

$$Q = K_1 D^\alpha J^\beta \quad [Q] = m^3 s^{-1} \quad [D] = m \quad [J] = mc.a.m^{-1} \quad (6.17)$$

Estas são equações empíricas específicas do material e aplicadas ao escoamento da água. No Quadro 6.3 são apresentados os valores destes parâmetros para diferentes tubos.

Quadro 6.3 Valores dos parâmetros das Equações de Scimemi para diferentes tubos (Quintela, 1981)

Natureza do tubo	$K_1$	$\alpha$	$\beta$
Fibrocimento	48,3	2,68	0,56
Ferro fundido novo	35	2,625	0,535
Betão liso novo	38,77	2,67	0,53
Aço sem soldadura	36,4	2,59	0,55

A perda de carga unitária é directamente proporcional à potência  $1/\beta$  da velocidade média, que toma o valor de aproximadamente 1,8.

Estas equações permitem obter bons resultados quando aplicadas em regimes turbulentos de transição, como se pode verificar na figura 6.5 (para  $v=1,01E-06$ , correspondente à temperatura de 20°C) em que é apresentada a sobreposição das equações de Scimemi, para tubos de ferro fundido novo ( $k=0,25\text{mm}$ ) com três diâmetros diferentes, equação 6.18, e para tubos de fibrocimento (0,03mm) em que a relação entre o factor de resistência e o nº de Reynolds não depende do diâmetro, equação 6.19, e o Ábaco de Moody.

Para representação sobre o Ábaco de Moody foi deduzida a equação de Scimemi específica do ferro fundido novo com introdução dos parâmetros adimensionais factor de resistência e nº de Reynolds:

$$f = \left( \frac{\pi}{140} \right)^{\frac{1}{0,535}} \frac{2g}{v^{\frac{0,07}{0,535}} \text{Re}^{\frac{0,07}{0,535}} D^{\frac{0,02}{0,535}}} \quad (6.18)$$

e a equação de Scimemi específica do fibrocimento é:

$$f = \left( \frac{\pi}{193,2} \right)^{\frac{1}{0,56}} \frac{2g}{v^{\frac{0,12}{0,56}} \text{Re}^{\frac{0,12}{0,56}}} \quad (6.19)$$

A análise das equações 6.18 e 6.19 permite concluir que o valor do factor de resistência varia ligeiramente com o diâmetro do tubo para o material ferro fundido novo e que não varia no caso de tubos de fibrocimento.

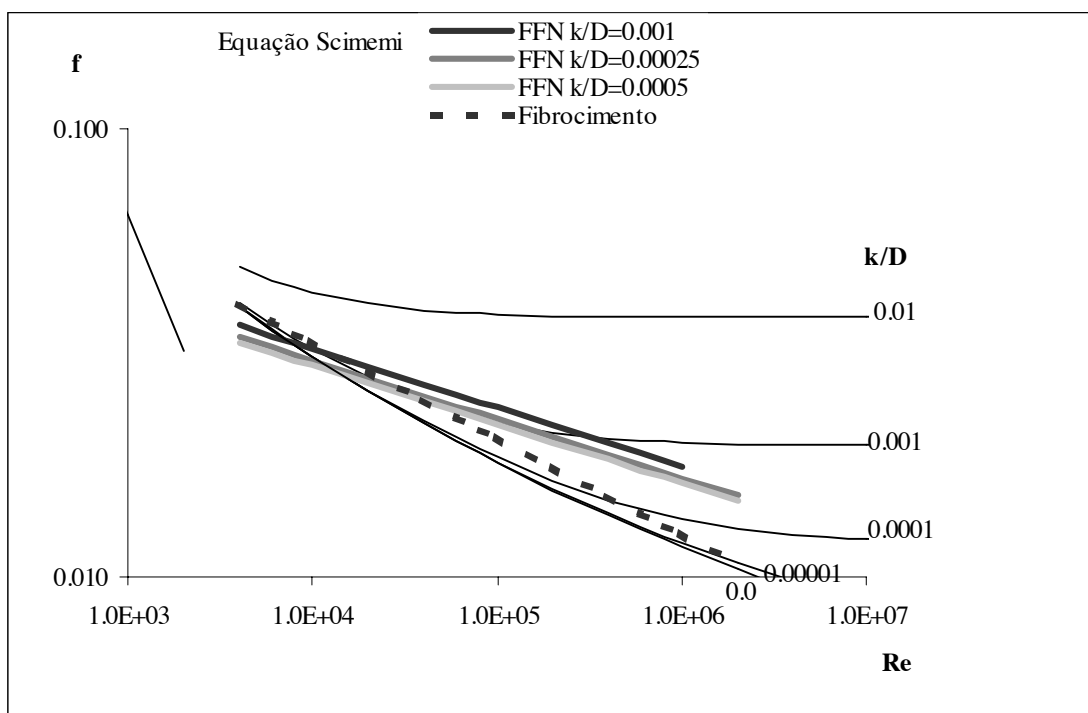


Figura 6.5 Sobreposição das Equações de Scimemi com o Ábaco de Moody

A relação entre a perda de carga unitária e a velocidade média do escoamento pode ser um indicador do regime de escoamento a que se aplicam as equações empíricas disponíveis na bibliografia:

- Em regime laminar a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência 1 da velocidade média;
- Em regime turbulento liso a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência 1,75 da velocidade média;
- Em regime turbulento rugoso a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência 2 da velocidade média;
- Em regime turbulento de transição a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência entre 1,75 e 2 da velocidade média.

#### 6.4 Notas conclusivas

Com base no estudo desenvolvido neste capítulo podemos concluir que:

- o escoamento da água dá-se em regime turbulento com excepção de algumas situações de início de escoamento, paragem ou escoamento variável;

- a avaliação rigorosa da perda de carga unitária em regime permanente e uniforme deve basear-se na aplicação da Equação de Colebrook-White;
- uma avaliação aproximada da perda de carga pode ser feita através da aplicação de equações empíricas escolhidas de acordo com as suas condições de aplicação;
- em qualquer caso de dúvida na escolha da equação empírica a aplicar deve ser aplicada a Equação de Colebrook-White;
- O Ábaco de Moody pode permitir averiguar uma primeira aproximação do valor do factor de resistência num dado escoamento;
- O coeficiente de rugosidade equivalente, ou uma equação empírica para aplicação no cálculo de um dado tubo deve ser fornecido pelo fabricante do mesmo.

## Capítulo 7

### **PERDAS DE CARGA LOCALIZADAS EM ESCOAMENTOS PERMANENTES SOB PRESSÃO**

*Objectivo: Cálculo das perdas de carga em singularidades.*

#### **7.1 Introdução**

Neste capítulo pretende-se estudar o método de cálculo das perdas de carga que ocorrem nas singularidades, de um sistema de condutas em pressão, que se encontram entre trechos de condutas de eixo rectilíneo como sejam alargamentos, estreitamentos, juntas, curvas, bifurcações, válvulas, entre outros.

Quando acontece uma variação da direcção de escoamento, ou seja a curvatura das linhas de corrente estabelece-se um regime permanente variado. A variação não está localizada no acessório instalado, mas a um dado comprimento antes e depois da singularidade. Isto pode ser verificado, em laboratório, através da determinação da linha piezométrica com a instalação de uma banda de piezómetros.

Num sistema de duas condutas de eixo rectilíneo, unidas por um estreitamento brusco, figura 7.1, a instalação de uma série de tubos piezométricos permite concluir que a linha piezométrica definida pela superfície livre dentro dos tubos piezométricos toma uma forma linear ao longo do tubo enquanto não se manifesta a influência da singularidade, nos primeiros cinco tubos da esquerda. O tubo 1 é de diâmetro constante, caudal constante e natureza do material constante, logo a perda de carga unitária também é constante. Como a velocidade é constante a linha de energia é paralela à linha piezométrica e são rectas. O mesmo raciocínio se aplica ao tubo 2 relativamente aos três tubos da direita que definem a linha piezométrica do tubo 2 correspondente a perda de carga unitária superior. Quando o escoamento se aproxima da singularidade começa a sentir a influência da variação da direcção

das linhas de corrente e a linha piezométrica desce, sofrendo uma variação superior à correspondente às perdas de carga contínuas.

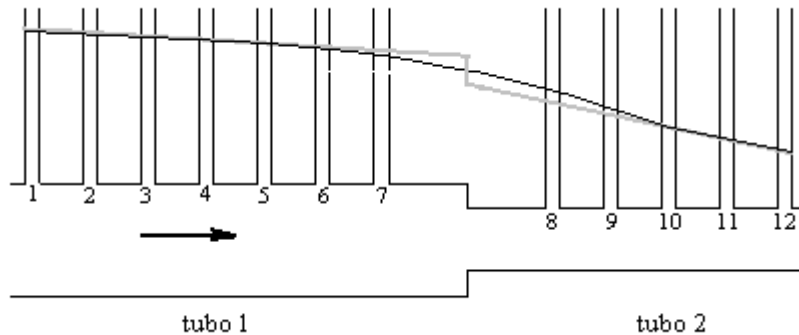


Figura 7.1 Representação da linha piezométrica num sistemas de duas condutas em série com diferentes diâmetros

No entanto, é mais fácil do ponto de vista de cálculo concentrar a perda de carga localizada na secção da singularidade, dessa maneira a perda de carga localizada é calculada pela seguinte equação, a partir dos valores experimentais:

$$\Delta H_{loc} = \Delta \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \quad (7.1)$$

A perda de cota piezométrica está representada pela descida brusca da Se a velocidade de escoamento for da ordem de  $1\text{ms}^{-1}$  a altura cinética toma valores muito pequenos e a linha de energia p unirmos dois tubos rectilíneos As perdas de carga que ocorrem numa singularidade não se manifestam, na realidade, numa secção. O escoamento quando se aproxima da singularidade começa a perder energia, depois de atravessar a secção da singularidade ainda está a perder energia.

De um modo geral a linha de energia em troços prismáticos representa-se através de uma recta sendo essa recta tanto mais inclinada quanto maior a perda de carga unitária, figura 7.4.

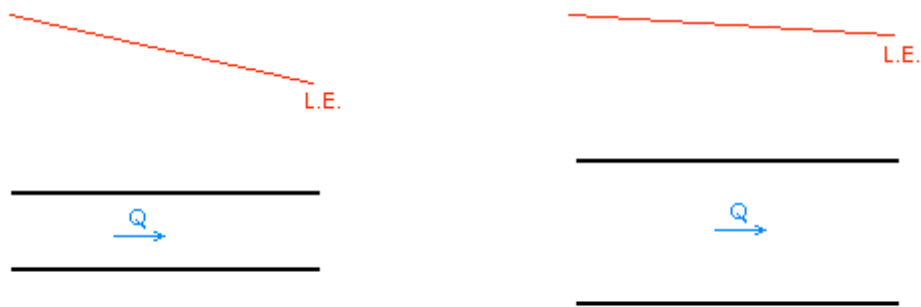


Figura 7.4 Linha de energia em troços de conduta prismáticos

Se os dois troços representados na figura 7.4 forem ligados através de uma singularidade – alargamento brusco, a linha de energia será representada como se mostra na figura 7.5. Na figura estão representadas a linha de energia real e a linha de energia fictícia em que se considera que a perda de carga localizada acontece apenas na secção da singularidade.

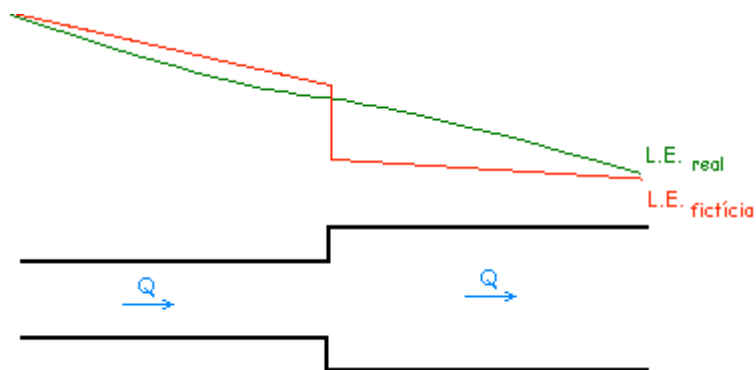


Figura 7.5 Linha de energia em troços de conduta prismáticos com singularidade

A perda de carga localizada é expressa através da equação geral:

$$\Delta H = K \frac{U^2}{2g} \quad (7.1)$$

em que:

$\Delta H$  é a perda de carga localizada

$K$  é o coeficiente de perda de carga localizada (depende da geometria da singularidade, das condições de escoamento e do n.º Reynolds)

$U^2/2g$  é a altura cinética de referência (normalmente o maior valor envolvido)



Os valores do coeficiente de perda de carga localizada são determinados experimentalmente, tendo alguns autores tabelado esses coeficientes para diferentes singularidades. À exceção das válvulas as perdas de carga localizadas tomam valores da ordem da altura cinética.

Em casos excepcionais, K é calculado analiticamente:

- Alargamento brusco (Equação de Borda), figura 7.6.

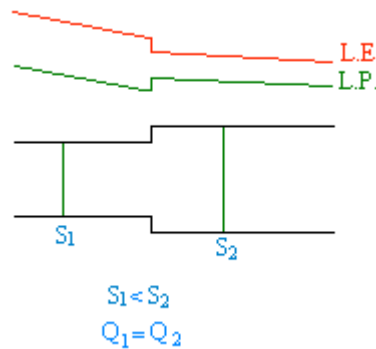


Figura 7.6 Alargamento brusco

Neste caso o investigador deduziu analiticamente a equação que permite determinar a perda de carga localizada, obtendo:

$$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \quad (7.2)$$

Esta equação também pode ser apresentada na forma da equação 7.1:

$$\Delta H = K \frac{U_1^2}{2g} \quad (7.3)$$

com:

$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (7.4)$$

A comparação da perda de carga de Borda com a Diferença entre as alturas cinéticas nas condutas a montante e jusante da singularidade permite concluir que a linha piezométrica sobe na passagem da singularidade. À perda de carga localizada na singularidade está associada a transferência de energia cinética em energia potencial de pressão.

Para o caso particular de passagem de uma conduta para um reservatório o alargamento brusco com secção de jusante muito superior à secção de montante, corresponde a um valor do coeficiente de perda de carga localizada igual a um, figura 7.7.

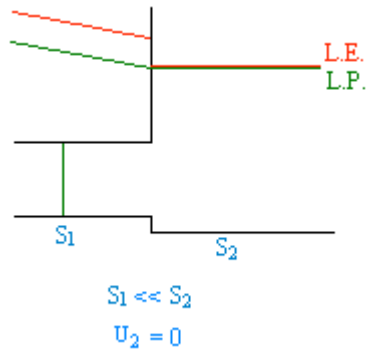


Figura 7.7 Alargamento brusco – passagem de uma conduta para reservatório

## Capítulo 8

### ESCOAMENTOS PERMANENTES SOB PRESSÃO

#### 8.1 Introdução

Neste capítulo serão estudados os passos que permitem dimensionar ou verificar o funcionamento de um circuito hidráulico.

#### 8.2 Tipos de escoamentos permanentes

Num circuito hidráulico com escoamento em pressão, o regime permanente pode ser uniforme ou variado. O regime permanente uniforme acontece em condutas de secção constante (tubo prismático) em que o caudal se mantém ao longo da conduta, figura 8.1.

No caso de variação gradual da secção ou variação gradual do caudal escoado, o regime de escoamento é dito permanente gradualmente variado, figura 8.2.

No caso de variação brusca da secção ou variação brusca de caudal numa dada secção da conduta, o regime de escoamento é designado por regime permanente rapidamente variado.

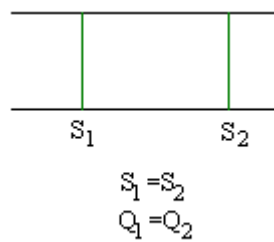


Figura 8.1 Escoamento permanente e uniforme

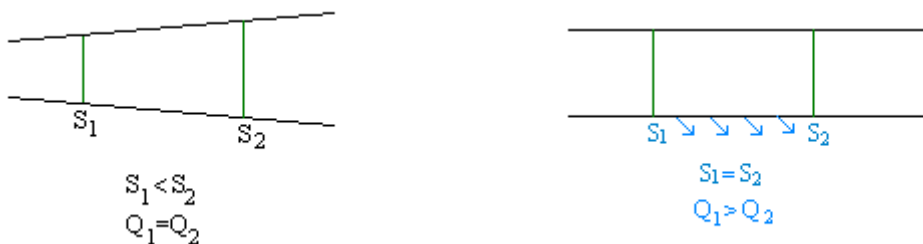


Figura 8.2 Escoamento permanente gradualmente variado

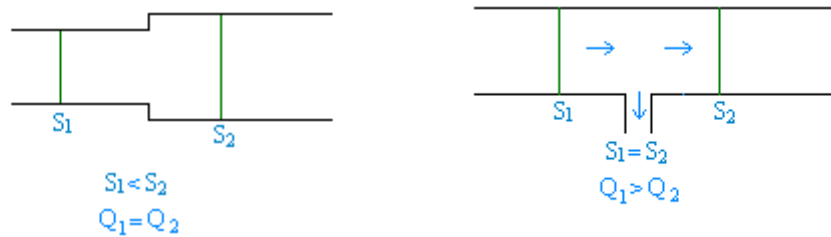


Figura 8.3 Escoamento permanente rapidamente variado

### 8.3 Perdas de carga contínuas

No capítulo anterior foram apresentadas as leis de resistência que permitem determinar a perda de carga unitária em regime permanente e uniforme, ou seja no caso de escoamento em condutas prismáticas.

Se o regime de escoamento for gradualmente variado, as leis de resistência apresentadas no capítulo anterior são aplicadas para determinar a perda de carga unitária, considerando-se que em cada secção a perda de carga unitária é igual à perda de carga unitária que se verificaria se fosse prismática e com a secção igual à da secção em estudo. Este é o chamado regime uniforme tangente.

No caso de regime permanente rapidamente variado não é possível calcular uma perda de carga contínua, mas sim uma perda de carga localizada na secção em que ocorre a variação brusca. No próximo sub-capítulo são calculadas as perdas de carga localizadas para diferentes singularidades.

### 8.4 Perdas de carga localizadas

As perdas de carga que ocorrem numa singularidade não se manifestam, na realidade, numa secção. O escoamento quando se aproxima da singularidade começa a perder energia, depois de atravessar a secção da singularidade ainda está a perder energia.

De um modo geral a linha de energia em troços prismáticos representa-se através de uma recta sendo essa recta tanto mais inclinada quanto maior a perda de carga unitária, figura 8.4.

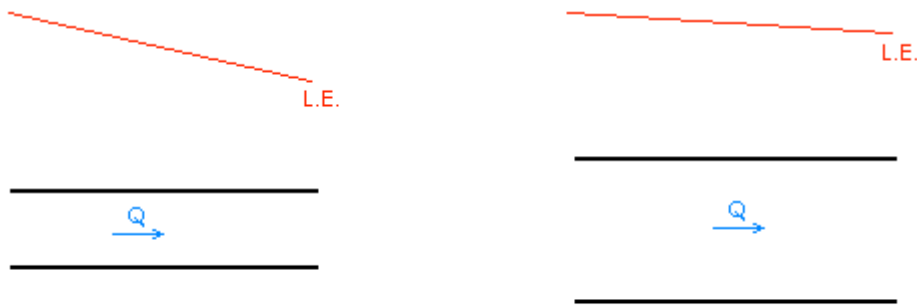


Figura 8.4 Linha de energia em troços de conduta prismáticos

Se os dois troços representados na figura 8.4 forem ligados através de uma singularidade – alargamento brusco, a linha de energia será representada como se mostra na figura 8.5. Na figura estão representadas a linha de energia real e a linha de energia fictícia em que se considera que a perda de carga localizada acontece apenas na secção da singularidade.

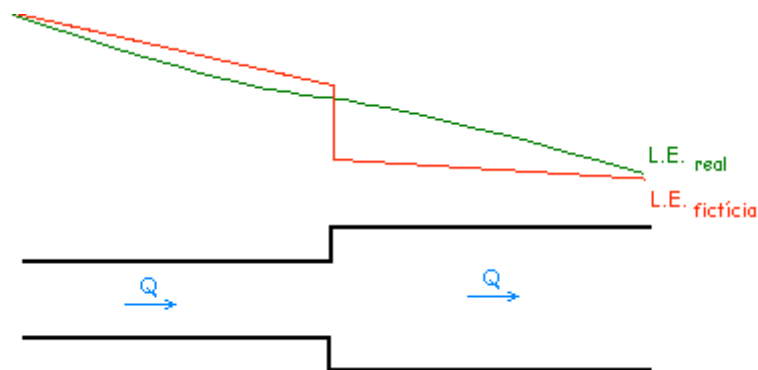


Figura 8.5 Linha de energia em troços de conduta prismáticos com singularidade

A perda de carga localizada é expressa através da equação geral:

$$\Delta H = K \frac{U^2}{2g} \quad (8.1)$$

em que:

$\Delta H$  é a perda de carga localizada

$K$  é o coeficiente de perda de carga localizada (depende da geometria da singularidade, das condições de escoamento e do n.º Reynolds)

$U^2/2g$  é a altura cinética de referência (normalmente o maior valor envolvido)

Os valores do coeficiente de perda de carga localizada são determinados experimentalmente, tendo alguns autores tabelado esses coeficientes para diferentes singularidades. À exceção das válvulas as perdas de carga localizadas tomam valores da ordem da altura cinética.

Em casos excepcionais, K é calculado analiticamente:

- Alargamento brusco (Equação de Borda), figura 8.6.

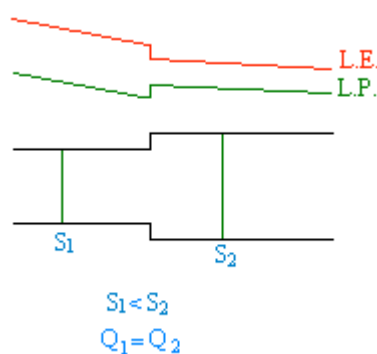


Figura 8.6 Alargamento brusco

Neste caso o investigador deduziu analiticamente a equação que permite determinar a perda de carga localizada, obtendo:

$$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \quad (8.2)$$

Esta equação também pode ser apresentada na forma da equação 7.1:

$$\Delta H = K \frac{U_1^2}{2g} \quad (8.3)$$

com:

$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (8.4)$$

A comparação da perda de carga de Borda com a Diferença entre as alturas cinéticas nas condutas a montante e jusante da singularidade permite concluir que a linha piezométrica sobe na passagem da singularidade. À perda de carga localizada na singularidade está associada a transferência de energia cinética em energia potencial de pressão.

Para o caso particular de passagem de uma conduta para um reservatório o alargamento brusco com secção de jusante muito superior à secção de montante, corresponde a um valor do coeficiente de perda de carga localizada igual a um, figura 8.7.

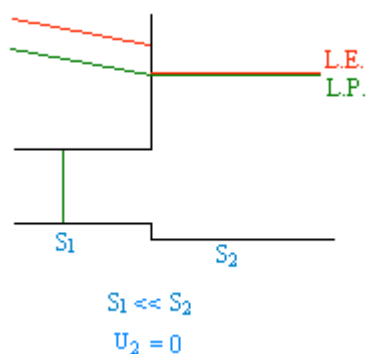


Figura 8.7 Alargamento brusco – passagem de uma conduta para reservatório

## 8.5 Cálculo de instalações

No estudo de um circuito hidráulico em pressão, exemplo da figura 8.8, podem existir dois objectivos no cálculo:

- *dimensionar:*

Conhecido o caudal a transportar, de acordo com as necessidades, a carga disponível, de acordo com a topografia e a implantação dos elementos a montante e jusante da conduta adutora, escolhido o material a aplicar, de que se conhece a rugosidade absoluta equivalente ou a lei de resistência específica do material, é possível determinar o diâmetro da conduta.

Além de ser garantido que no escoamento não existe um consumo de energia superior à carga disponível também é necessário verificar a restrição relativa à velocidade máxima de escoamento. No final, é necessário verificar ainda as pressões máximas e mínimas no circuito hidráulico.

- *verificar:*

Caso 1: pretende-se determinar o caudal escoado numa conduta, conhecidos; a carga disponível, a natureza do tubo e o diâmetro do tubo. Com o caudal é possível calcular a velocidade e as variações de pressão ao longo da conduta.

Caso 2: pretende-se determinar a perda de carga provocada pelo escoamento de um fluido ao longo de uma conduta, conhecidos; o caudal transportado, a natureza do tubo e o diâmetro do tubo. É possível calcular a velocidade e as variações de pressão ao longo da conduta.

Caso 3: pretende-se determinar a rugosidade absoluta equivalente das paredes do tubo, conhecidos; o caudal transportado, a carga disponível e o diâmetro do tubo. É possível calcular a velocidade e as variações de pressão ao longo da conduta.

Para um circuito hidráulico constituído por dois reservatórios e uma conduta com várias singularidades, figura 8.8, a aplicação do Teorema de Bernoulli, da lei de resistência conveniente e da equação da perda de carga localizada permite resolver os problemas de dimensionamento e verificação referidos.

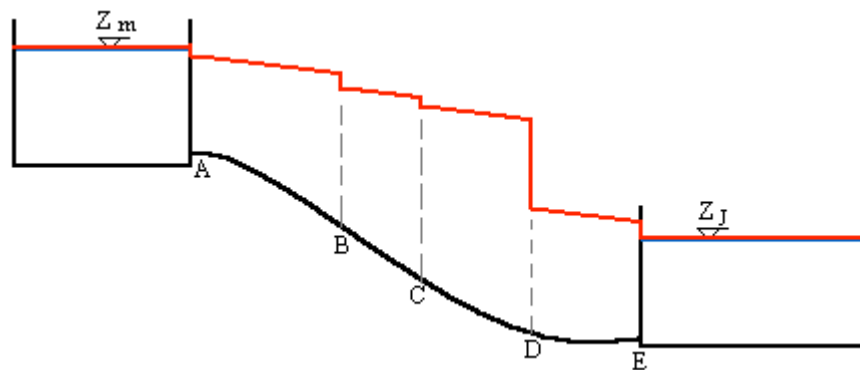


Figura 8.8 Circuito hidráulico

$$Z_m - Z_J = \Delta H_A + \Delta H_{A-B} + \Delta H_B + \Delta H_{B-C} + \Delta H_C + \Delta H_{C-D} + \Delta H_D + \Delta H_{D-E} + \Delta H_E \quad (8.5)$$

$$Z_m - Z_J = \Delta H_A + \Delta H_B + \Delta H_C + \Delta H_D + \Delta H_E + \Delta H_{A-B} + \Delta H_{B-C} + \Delta H_{C-D} + \Delta H_{D-E} \quad (8.6)$$

As primeiras cinco parcelas do membro da direita correspondem a perdas de carga localizadas. Na prática, com um elevado número de singularidades torna-se impossível quantificar cada uma e por isso é assumido que o total das perdas de carga localizadas, com excepção de válvulas pois podem apresentar perdas de carga localizadas com elevados valores, é uma percentagem das perdas de carga contínuas. A percentagem deve ser definida de acordo com a complexidade do traçado do sistema de condutas.

## 8.6 Influência do traçado da conduta

No projecto de uma conduta adutora é muito importante a sua implantação. O funcionamento de uma conduta pode ser influenciado pelo seu traçado.



O conceito de linha de energia e linha piezométrica, na prática, confundem-se, ou seja, considera-se desprezável a altura cinética. Se as velocidades de dimensionamento são baixas até 1m/s ou 1,5m/s, a altura cinética toma valores da ordem de uma décima sendo por isso desprezável.

Seja o caso de uma conduta adutora entre dois reservatórios em que a perda de carga unitária é constante e se considera a linha piezométrica como uma recta que une a superfície livre dos dois reservatórios, figura 8.9.

Em igualdade dos parâmetros; caudal, energia disponível, diâmetro da conduta, comprimento da conduta e natureza da conduta é estudado o efeito do traçado da conduta:

Traçado 1 – a conduta está sempre abaixo da L.P., figura 8.9

A perda de carga unitária é determinada com base na perda de carga total e no comprimento da conduta.

O caudal é calculado através da aplicação da lei de resistência com base nos valores da perda de carga unitária, do diâmetro e da natureza do tubo.

A velocidade média é determinada a partir do caudal e do diâmetro do tubo.

A pressão é sempre superior a zero e é calculada com base no afastamento, medido na vertical, entre a linha piezométrica e a cota topográfica das secções transversais da conduta.

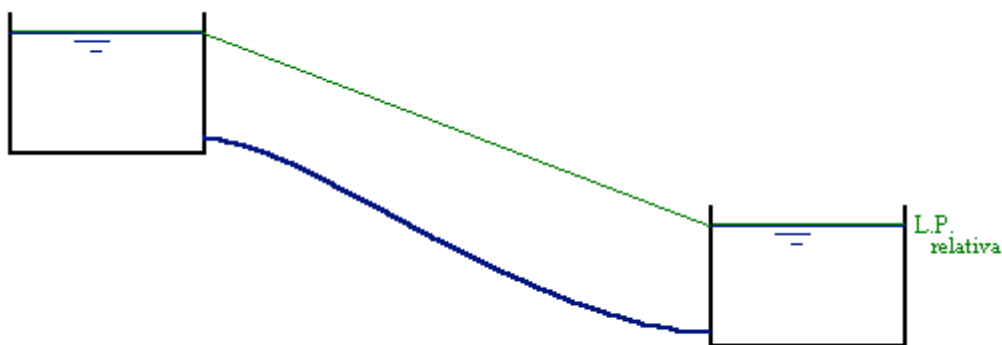


Figura 8.9 Traçado 1 da conduta

Traçado 2 – a conduta tem um troço (AB) que passa acima da L.P. com pressões relativas negativas, não atingindo, no entanto a tensão de vaporização, figura 8.10

A perda de carga unitária é determinada com base na perda de carga total e no comprimento da conduta.

O caudal é calculado através da aplicação da lei de resistência com base nos valores da perda de carga unitária, do diâmetro e da natureza do tubo.

A velocidade média é determinada a partir do caudal e do diâmetro do tubo.

A pressão é superior a zero à exceção do troço AB e é calculada com base no afastamento, medido na vertical, entre a linha piezométrica e a cota topográfica das secções transversais da conduta.

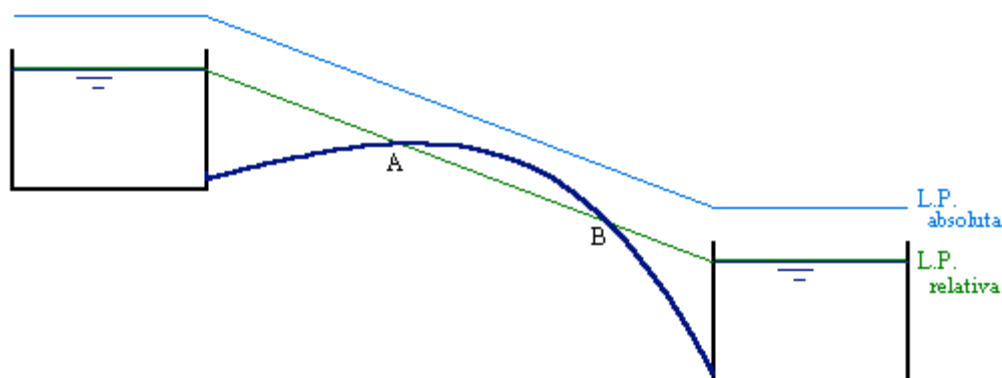


Figura 8.10 Traçado 2 da conduta

Traçado 3 – a conduta tem um troço com cota topográfica superior à  $LP_{relativa}$  e superior à cota topográfica da superfície livre no reservatório de montante, figura 8.11.

A perda de carga unitária é determinada com base na perda de carga total e no comprimento da conduta.

O caudal é calculado através da aplicação da lei de resistência com base nos valores da perda de carga unitária, do diâmetro e da natureza do tubo.

A velocidade média é determinada a partir do caudal e do diâmetro do tubo.

A pressão é superior a zero à exceção do troço AB e é calculada com base no afastamento, medido na vertical, entre a linha piezométrica e a cota topográfica das secções transversais da conduta.

Por existir um troço da conduta em que a cota topográfica está acima da cota topográfica do reservatório de montante, diz-se que o funcionamento é em sifão e para estabelecer as condições de escoamento descritas é necessário criar uma depressão na conduta de modo a induzir o escoamento na conduta, a este passo chama-se escorvamento ou ferragem do sifão. Após o que o escoamento se dá normalmente. No troço AB existem pressões relativas negativas.

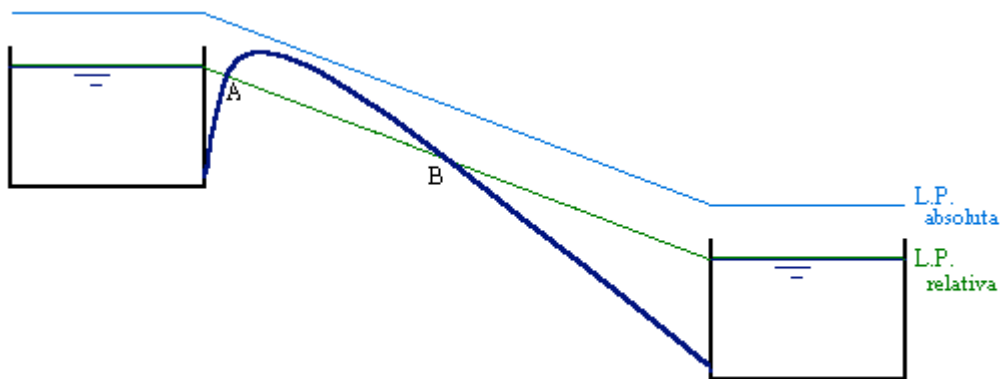


Figura 8.11 Traçado 3 da conduta

Traçado 4 – a conduta tem um troço com cota topográfica superior à  $LP_{absoluta}$ , figura 8.12.

Não é possível que o traçado da conduta passe acima da LP absoluta, pois não existem pressões absolutas negativas. A perda de carga unitária diminui de modo a que a LP passe ligeiramente acima (o correspondente à tensão de vaporização) do traçado da conduta.

O caudal é calculado através da aplicação da lei de resistência com base nos valores da perda de carga unitária anterior, do diâmetro e da natureza do tubo. Este caudal foi reduzido relativamente às condições de escoamento referidas nos outros traçados.

A velocidade média é determinada a partir do caudal e do diâmetro do tubo.

A pressão é superior a zero até à secção A, entre A e C a pressão é inferior a zero, em C a pressão atinge a tensão de vaporização, dá-se a passagem do estado líquido ao estado gasoso do fluido, entre C e D o escoamento dá-se em superfície livre, entre as secções D e B a pressão é negativa e a jusante da secção B a pressão volta a atingir pressões positivas.

O escoamento apresenta um funcionamento com carácter pulsatório.

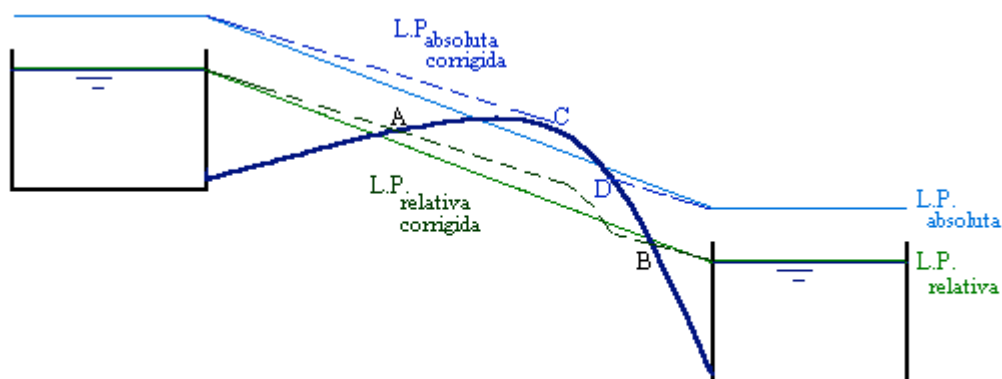


Figura 8.12 Traçado 4 da conduta

Traçado 5 – a conduta está sempre abaixo da L.P., figura 8.13

A perda de carga unitária é determinada com base na perda de carga total e no comprimento da conduta.

O caudal é calculado através da aplicação da lei de resistência com base nos valores da perda de carga unitária, do diâmetro e da natureza do tubo.

A velocidade média é determinada a partir do caudal e do diâmetro do tubo.

A pressão é sempre superior a zero e é calculada com base no afastamento, medido na vertical, entre a linha piezométrica e a cota topográfica das secções transversais da conduta. Existem secções transversais que, por terem uma cota topográfica muito baixa, podem apresentar valores de pressão muito elevados.

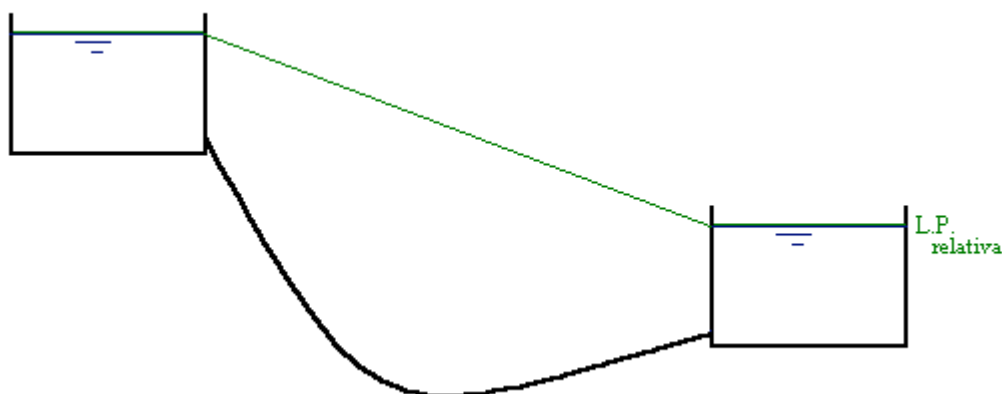


Figura 8.13 Traçado 5 da conduta

Os problemas detectados no traçado das condutas resumem-se a:

- pressões negativas: podem provocar a contaminação do fluido escoado no caso de existir alguma pequena fissura na conduta ou deficiência numa junta;
- pressões muito elevadas: podem provocar o rebentamento da conduta;
- funcionamento em sifão: além do problema correspondente a pressões negativas, obriga a intervenção para início de funcionamento;
- pressões atingem a tensão de vaporização: existe redução de caudal e os problemas resultantes da ocorrência de cavitação.

### 8.7 Conduitas com consumo uniforme de percurso

Este é o caso típico de conduitas em que se faz distribuição ou o caso de drenagem. Neste caso o escoamento classifica-se como gradualmente variado, figura 8.14.

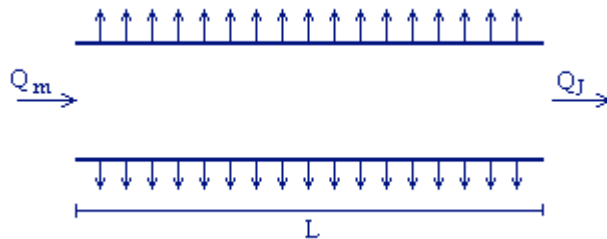


Figura 8.14 Conduita com consumo uniforme de percurso

Considera-se que existe uma saída contínua e uniforme de caudal. O caudal de percurso total no trecho é determinado por:

$$P = Q_m - Q_J \quad (8.7)$$

e o consumo unitário de percurso é:

$$p = \frac{P}{L} = \frac{Q_m - Q_J}{L} \quad (8.8)$$

Relativamente à perda de carga unitária, esta varia ao longo da conduita de acordo com a variação do caudal. É definida uma perda de carga unitária equivalente,  $J_{eq}$ , que é calculada através da aplicação das leis de resistência estudadas para o regime permanente uniforme com um caudal constante ao longo da conduita e igual ao valor do caudal equivalente,  $Q_{eq}$ . O caudal equivalente é determinado de modo a que a perda de carga contínua no escoamento gradualmente variado em regime turbulento rugoso seja igual à perda de carga contínua do escoamento uniforme com caudal igual ao caudal equivalente em regime turbulento rugoso e na mesma conduita (diâmetro e rugosidade absoluta equivalente).

A condição anterior é aproximadamente verificada para o caudal equivalente determinado pela equação seguinte:

$$Q_{eq} = Q_J + 0,55 P \quad (8.9)$$

Do ponto de vista de trabalho realizado pelas forças resistentes, ao longo de um trecho de conduta, são equivalentes as duas situações representadas na figura 8.15.

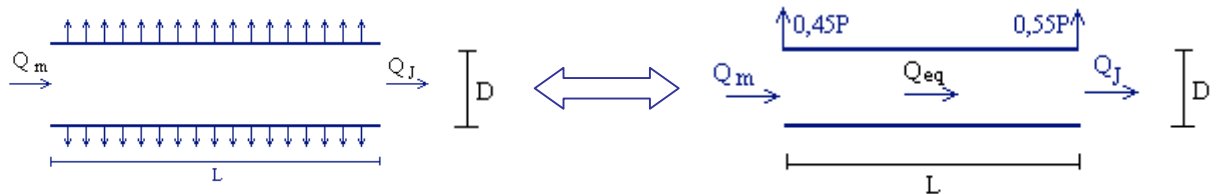


Figura 8.15 Definição de caudal equivalente

### 8.8 Redes de condutas

As redes de condutas são constituídas por trechos de conduta que se unem formando uma rede ramificada, figura 8.16, ou rede malhada, figura 8.17.

Nas redes ramificadas o dimensionamento baseia-se na aplicação das seguintes relações: equação da continuidade em cada nó; equação de Bernoulli e leis de resistência aplicadas ao longo dos trechos. Deve, ainda ser verificada a velocidade máxima e as pressões máxima e mínima na rede.

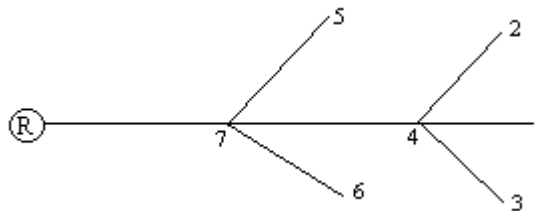


Figura 8.16 Rede de condutas ramificada

Nas redes malhadas o dimensionamento baseia-se na aplicação das seguintes relações: equação da continuidade nos nós; equação de Bernoulli e lei de resistência ao longo de cada malha. Deve, ainda ser verificada a velocidade máxima e as pressões máxima e mínima na rede.

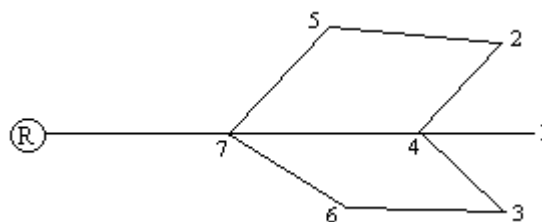


Figura 8.17 Rede de condutas malhadas

## **Bibliografia**

Lencastre, A. *Hidráulica Geral* Ed. Hidroprojecto, Lisboa, 1983

Manzanares, A. *Abecasis Hidráulica Geral Vol I e Vol II* Técnica, A.E.I.S.T., Lisboa, 1979

Novais-Barbosa, J. *Mecânica dos Fluidos e Hidráulica Geral Vol I e II* Porto Editora, Porto, 1985

Quintela, A. de Carvalho *Hidráulica* Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1981