

# SEMAINE DU 30/3 AU 5/4

## INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

- ① **Rappels.** Les étudiants doivent s'entraîner sur les techniques de calculs d'intégrales de début d'année : Reconnaissance de primitives, IPP, Changement de variables, Décomposition en éléments simples.
- ② **Fonctions en escaliers.** Subdivision d'un segment, finesse de la subdivision, définition d'une fonction en escaliers. Propriétés des subdivisions, l'espace vectoriel  $\mathcal{E}([a, b])$  des fonctions en escaliers. Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier. Linéarité, Positivité et Croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire, Relation de Chasles, Partie réelle et partie imaginaire.
- ③ **Fonctions continues par morceaux,  $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ .** Définitions, Norme infinie d'une fonction continue par morceaux, Structure d'espace vectoriel et de sous-anneau (pour la multiplication) de  $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ . Définition d'une fonction uniformément continue, lien avec les fonctions lipschitziennes, Théorème de Heine. Approximation d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier (Cas des fonctions à valeurs réelles, la preuve pour les fonctions à valeurs complexes n'a pas été faite). Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. Toute fonction continue par morceaux est intégrable. Inégalité de Cauchy-Schwartz.
- ④ **Formules de Taylor-Lagrange.** Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, Inégalité de Taylor-Lagrange. *L'égalité de Taylor-Lagrange a été vue en cours, mais n'est pas au programme de MPSI.*
- ⑤ **Sommes de Riemann.** Formule de la somme de Riemann. Vitesse de convergence en  $O(\frac{1}{n})$  si  $f$  est une fonction  $C^1$ . Explication de la méthode de des trapèze (hors programme en MPSI)

## PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Preuve des Formules de Taylor-Lagrange (théorème 7 puis explication rapide pour l'obtention de l'inégalité).
- ② Preuve de la formule de la somme de Riemann dans le cas d'une fonction  $K$ -lipschitzienne et preuve que la vitesse de convergence est en  $O(\frac{1}{n})$ .
- ③ Donner à calculer une des intégrales suivantes (Exemples 15, 16, 17 et 18)

- a)  $\int_0^1 3x\sqrt{1+x^2} dx$  ou  $\lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^3 \frac{1}{x \ln x} dx$
- b)  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$  ou  $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx$  (difficile, pour les bons élèves)
- c)  $\int \frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} dx$  ou  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{4x^2}{x^4 - 1} dx$

Les étudiants doivent expliciter les méthodes d'obtention des décomposition en éléments simples.

- d)  $\int^t \frac{e^x}{(3 + e^x)\sqrt{e^x - 1}} dx$  ou  $\int^t \cos(\sqrt{x}) dx$