

TD

Anneau des polynômes

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ □ □

Pour chacun des polynômes suivants, donner son coefficient dominant ainsi que son degré.

$$P_0 = 1 + \sqrt{3}X - 2X^2$$

$$P_1 = X^7 + 4X^8 + (1 - i)X^3$$

$$P_2 = 3X(1 + X^2) + 2X^3 - 1$$

$$P_3 = (i + X)(1 + 3X^2 - iX)$$

$$P_4 = \sum_{k=1}^4 (k! + 1)X^k$$

$$P_5 = (3X - 7X^2 + 4)'$$

$$P_6 = [X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)]' \quad P_7 = (1 - X^n)(1 + X)^2 + X^{n+2}, \quad n \geq 0$$

$$P_8 = \prod_{k=0}^n (2X - k), \quad n \geq 1$$

$$P_9 = \prod_{k=1}^n (X - 2)^k, \quad n \geq 1.$$

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 2 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Trouver les complexes $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 3 ■ (A) ■

Soit P et Q deux polynômes réels distincts de degré n . Montrer que $P^3 - Q^3$ est de degré supérieur ou égal à $2n$. ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 4 ■ □ □ Formule de Taylor

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $a \in \mathbb{R}$ vérifie

$$P(a) > 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P^{(k)}(a) \geq 0.$$

Montrer que le polynôme P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$. ▶ Indication

▶ Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 5 ■ ■ □

Justifier

$$\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3, 1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}.$$

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 6 ■ ■ □

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1.$$

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 7 ■ ■ □

Démontrer que

$$\textcircled{1} \quad X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos \theta + 1 \text{ est divisible par } X^2 - 2X \cos \theta + 1,$$

$$\textcircled{2} \quad nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \text{ est divisible par } (X-1)^2.$$

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 8 ■ □ □

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

$$\textcircled{1} \quad X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 \text{ par } X^2 + 3X - 1,$$

$$\textcircled{2} \quad X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 \text{ par } X^2 - X - 7,$$

$$\textcircled{3} \quad X^5 - X^2 + 2 \text{ par } X^2 + 1.$$

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □

Quel est le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par

① $X^2 - 3X + 2$, ② $X^2 + X + 1$, ③ $X^2 - 2X + 1$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $P(X) = \prod_{k=1}^n (\cos \theta_k + X \sin \theta_k)$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$.

① $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ ② $P'^2 = 4P$ ③ $P \circ P = P$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □

Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n - P'_n = X^n.$$

Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de factoriels.

► Indication

► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □ **Un système de congruence**

Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que

le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$ est $X - 1$ et

le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ est $-X + 2$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 14 ■ □ □

Factoriser $X^8 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ □

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ ■

Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(1) = 1, P(2) = 2, P'(1) = 3, P'(2) = 4, P''(1) = 5 \text{ et } P''(2) = 6.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ □

Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tels que :

① $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 1/x + 1/y + 1/z = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x(y + z) = 1 \\ y(z + x) = 1 \\ z(x + y) = 1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$

► Indication

► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □ **Polynômes de Laguerre**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$. Observer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

► Indication

► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 19 ■■■ Taylor et Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 20 ■■□

Montrer que, pour tout $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^4$, $X^3 + X^2 + X + 1$ divise $X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■■■

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■■■ Coefficients d'un polynôme complexe

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$. On pose $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$. Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}, |a_k| \leq M$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ■■■

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant dont les racines complexes sont de parties imaginaires positives ou nulles. Montrer que le polynôme $\operatorname{Re}(P)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ■■□

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$, (2) $\exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 25 ■■■

- (1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sin((2n+1)\alpha)$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

- (2) En déduire que les racines du polynôme $P(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$ sont de la forme $x_k = \cot^2 \beta_k$. Déterminer les β_k .

► Indication ► Correction

EXERCICE 26 ■□□

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0$.

- (1) Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi
(2) En déduire que $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

► Indication ► Correction

EXERCICE 27 ■■■

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et $n = \deg P$.

Montrer que les sommes des zéros de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$ sont en progression arithmétique. Cela veut dire que la suite donnée par la somme des racines de $P^{(k)}$, est une suite arithmétique pour $k < n$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ■■□ Oral Centrale supelec

- (1) Déterminer trois éléments a, b, c de $\mathbb{C}$, non tous réels, tels que $a+b+c, a^2+b^2+c^2$ et $a^3+b^3+c^3$ soient trois réels.
(2) Montrer que, si a, b, c sont trois éléments de $\mathbb{C}$ de modules différents et si $a+b+c \in \mathbb{R}, a^2+b^2+c^2 \in \mathbb{R}$ et $a^3+b^3+c^3 \in \mathbb{R}$, alors a, b et c sont trois réels.

► Indication ► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

Pensez aux définitions ! Divise veut dire mêmes racines doubles, soit P et P' s'annulent !

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

Factorisez le polynôme et faire une disjonction de cas sur les coefficients dominants de P et Q .

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 **Formule de Taylor** _____

Ecrire la formule de Taylor pour P en a et en déduire que P ne peut pas être nul.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

Divise veut dire mêmes racines !

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 _____

Divise veut dire mêmes racines !

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 _____

Divise veut dire mêmes racines !

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

Ecrire la division euclidienne, en écrivant le reste directement au bon degré, puis évaluer en certains points pour trouver les coefficients du reste (en général les racines du diviseur pour éliminer le quotient).

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 _____

Ecrire la division euclidienne, en écrivant le reste directement au bon degré, puis évaluer en certains points pour trouver les coefficients du reste.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 _____

Toujours commencer par regarder le degré des deux côtés pour voir si on arrive à avoir de l'information. Poser ensuite le polynôme P et trouver les coefficients en remplaçant dans l'équation.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Toujours commencer par regarder le degré des deux côtés pour voir si on arrive à avoir de l'information. Poser ensuite le polynôme P et trouver les coefficients en remplaçant dans l'équation.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 13 Un système de congruence

Cela ressemble à un système de congruence que l'on avait résolu avec Bézout !

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 14

On peut passer par les complexes si besoin.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Trouver des particularités du pgcd de A et B

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 16

On utilise les polynômes de Lagrange, puis on dérive, puis on utilise les polynômes de Lagrange, puis on dérive, puis on utilise les polynômes de Lagrange.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 17

On utilise les relations coefficients racines.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 18 Polynômes de Laguerre

Que du calcul avec Leibniz.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 19 Taylor et Taylor

Ecrivez Taylor en 0 pour les polynômes $P(X)$ et $P(X+1)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 20

Regarder les congruence de X^4 .

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 21

Ecrire les polynômes explicitement

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 22 Coefficients d'un polynôme complexe

Utiliser les racines $(n+1)$ -ièmes de l'unité.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 23

Écrire P sous forme factorisée, puis montrer par l'absurde que la partie imaginaire d'une racine de $P + \bar{P}$ est nulle.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 24

Une implication est immédiate. Dans l'autre sens, on écrit P en facteurs irréductibles, que l'on factorise de la forme $\alpha^2 + \beta^2$, avec α et β 2 polynômes, et on calcule le produit.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 25 _____[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 26 _____

Pensez à la méthode pour montrer un "ou". On peut fonctionner par l'absurde.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 27 _____

Calculer la somme des 0, en fonction des coefficients de P

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 28 **Oral Centrale supelec** _____

Regarder les coefficients du polynôme $P(X) = (X - a)(X - b)(X - c)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1

- ① P_0 a pour degré 2 et coefficient dominant -2 .
- ② $P_1 = 4X^8 + X^7 + (1-i)X^3$ et a pour degré 8 et coefficient dominant 4 .
- ③ $P_2 = 5X^3 + 3X - 1$ et a pour degré 3 et coefficient dominant 5 .
- ④ P_3 est le produit d'un polynôme de degré 1 à coefficient dominant 1 , avec un polynôme de degré 2 à coefficient dominant 3, P_3 est donc de degré 3 et à coefficient dominant 3 .
- ⑤ P_4 est de degré 4 et à coefficient dominant $(4! + 1)$, c'est-à-dire 25 .
- ⑥ $P_5 = -14X + 3$ est de degré 1 et à coefficient dominant -14 . C'est en fait le polynôme dérivé d'un polynôme de degré 2 à coefficient dominant -7 .
- ⑦ Le polynôme $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)$ est de degré 5 et unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) ; P_6 est son polynôme dérivé, il est donc de degré 4 , et de coefficient dominant 5.
- ⑧ $P_7 = (1 - X^n)(1 + X)^2 + X^{n+2} = 1 + 2X + X^2 - X^n - 2X^{n+1}$.
 - si $n = 0$, $P_7 = X^2$, donc $\deg P_7 = 2$, et $\text{cd}(P_7) = 1$.
 - si $n = 1$, $P_7 = 1 + X - X^2$, donc $\deg P_7 = 2$, et $\text{cd}(P_7) = -1$.
 - si $n \geq 2$, alors $n + 1 \geq 3$ donc $\deg P_7 = n + 1$, et $\text{cd}(P_7) = -2$.
- ⑨ P_8 est le produit de $n + 1$ polynômes de degré 1 : il est de degré $n + 1$. Son coefficient dominant est 2^{n+1} .
- ⑩ P_9 est le produit de polynômes de degré respectif 1, 2, 3, jusque n . Son degré est donc $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$. P_9 est le produit de polynômes unitaires : il est également unitaire et son coefficient dominant est 1.

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

On cherche ici $a, b \in \mathbb{C}$ tels que 1 soit racine double de $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$, donc tels que $P(1) = P'(1) = 0$, soit

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases}$$

L'unique solution est donnée par $a = n$ et $b = -1 - n$.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Écrivons $P^3 - Q^3 = (P - Q)(P - jQ)(P - j^2Q)$. En regardant les coefficients de X^n dans les trois facteurs, on trouve que deux au moins sont non nuls. Par conséquent, aucun des termes n'est nul et deux sont de degré n , le produit est donc de degré au moins $2n$.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4 Formule de Taylor

Par la formule de Taylor, on a pour tout $x \geq 0$

$$P(a+x) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k \geq P(a) > 0 .$$

↩ retour à l'EXERCICE 4

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 5

On peut factoriser

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2) .$$

On en déduit

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1 \iff j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } X^{2n} + X^n + 1$$

Puisque $X^{2n} + X^n + 1$ est un polynôme réel j en est racine si, et seulement si, j^2 l'est.

$$(X^{2n} + X^n + 1)(j) = j^{2n} + j^n + 1 = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1 \iff n \neq 0$$

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6

$$1 + X + X^2 = (X - j)(X - j^2)$$

j et j^2 sont racines de $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$ donc

$$1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

- ① Pour prouver que $X^2 - 2X \cos \theta + 1$ divise $X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos \theta + 1$, il suffit de prouver que ce dernier polynôme s'annule en les deux racines (complexes) de $X^2 - 2X \cos \theta + 1$, à savoir $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Il suffit de prouver le résultat pour $e^{i\theta}$ car, le polynôme étant réel, si z est racine, son conjugué $\bar{z}$ est racine. On trouve

$$\begin{aligned} e^{i(n+1)\theta} \cos((n-1)\theta) - e^{in\theta} \cos(n\theta) - e^{i\theta} \cos \theta + 1 &= \\ (\cos((n+1)\theta) \cos((n-1)\theta) - \cos^2(n\theta) - \cos^2 \theta + 1) + \\ i(\sin((n+1)\theta) \cos((n-1)\theta) - \sin(n\theta) \cos(n\theta) - \sin \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

Le reste n'est plus qu'une affaire de formules de trigonométrie

$$\cos((n+1)\theta) \cos((n-1)\theta) = \frac{1}{2}(\cos(2n\theta) + \cos(2\theta))$$

$$\cos^2(n\theta) = \frac{1}{2}(\cos(2n\theta) + 1)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1)$$

$$\sin((n+1)\theta) \cos((n-1)\theta) = \frac{1}{2}(\sin(2n\theta) + \sin(2\theta))$$

$$\sin(n\theta) \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \sin(2n\theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta).$$

En faisant les bonnes sommes et différences des relations précédentes, on trouve bien que

$$e^{i(n+1)\theta} \cos((n-1)\theta) - e^{in\theta} \cos(n\theta) - e^{i\theta} \cos \theta + 1 = 0$$

- ② Cette fois, on a affaire à une racine d'ordre 2, et il suffit de prouver que 1 est racine de $P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et de $P'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$, ce qui est évident... Pour justifier cela, on peut faire appel à la partie du cours consacrée aux racines, ou partir de la division euclidienne

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = Q(X)(X-1)^2 + aX + b$$

Faire $X = 1$ dans la relation précédente donne $a + b = 0$. De plus, si on dérive la relation précédente et qu'on fait à nouveau $X = 1$, on obtient $a = 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

- ① Le quotient est $X^2 + 2X + 7$, le reste est nul;
 ② Le quotient est $X^2 - 3X - 5$, le reste est $X + 3$;
 ③ Le quotient est $X^3 - X - 1$, le reste est $X + 3$.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

① On pose

$$(X+1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + aX + b$$

où a et b sont deux réels. On évalue en 1 et 2, et on a

$$\begin{cases} 2^n - 2 = a + b \\ 3^n - 2^n - 1 = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ b = -3^n + 2^{n+1} + 2^n - 3 \end{cases}$$

② On pose

$$(X+1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 + X + 1) + aX + b$$

où a et b sont deux réels. On évalue en j , et on a

$$(1+j)^n - j^n - 1 = Q(j) \times 0 + aj + b$$

On distingue ensuite suivant la valeur de n modulo 3, utilisant la relation

$$(1+j)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1.$$

- Si $n \equiv 0[3]$, alors $j^{2n} = j^n = 1$, donc $(-1)^n - 2 = aj + b$.
On identifie alors les coefficients et on trouve $a = 0$ et $b = (-1)^n - 2$.
Donc le reste est $(-1)^n - 2$.
- Si $n \equiv 1[3]$, alors $j^n = j$ et donc $j^{2n} = j^2 = -1 - j$, $j^n = j$, ce qui donne $((-1)^{n+1} - 1)j + ((-1)^{n+1} - 1) = aj + b$.
On identifie les coefficients et on trouve $a = b = (-1)^{n+1} - 1$.
Le reste est donc $((-1)^{n+1} - 1)(X + 1)$.
- Si $n \equiv 2[3]$, alors $j^{2n} = j$ et $j^n = j^2 = -1 - j$, d'où $((-1)^n + 1)j = aj + b$.
On identifie alors les coefficients et on trouve $a = (-1)^n + 1$ et $b = 0$.
Le reste est alors $((-1)^n + 1)X$.

③ On pose

$$(X+1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 - 2X + 1) + aX + b$$

où a et b sont deux réels. On évalue en 1, et on a une seule relation

$$2^n - 2 = a + b$$

Pour obtenir une seconde relation, il faut dériver la relation issue de la division euclidienne et l'évaluer à nouveau en 1 (c'est toujours cette méthode qui fonctionne pour une racine double). On trouve

$$n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1} = Q'(X)(X^2 - 2X + 1) + 2Q(X)(X - 1) + a$$

ce qui donne $n2^{n-1} - n = a$ et donc $b = (2 - n)2^{n-1} + n - 2$.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

Notons la division euclidienne $P = Q \cdot (X^2 + 1) + aX + b$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$. En évaluant en i , on obtient $b + ai = P(i) = \exp(i \sum_{k=1}^n \theta_k)$. Le reste recherché est donc

$$\cos\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right)X + \sin\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

① Le polynôme nul est évidemment solution. Sinon, si P est solution, alors on a

$$2 \deg(P) = \deg(P) + 2$$

ce qui prouve que $\deg(P)$ doit être égal à 2. Maintenant, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

$$P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$$

$$(X^2 + 1)P(X) = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$$

On en déduit que $b = 0$, puis que $a + c = 0$. Les solutions sont donc les polynômes qui s'écrivent $P(X) = a(X^2 - 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

② Là encore, le polynôme nul est solution, et c'est la seule solution constante. Par ailleurs, si P est une solution non constante, alors son degré vérifie l'équation

$$2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$$

ce qui entraîne que $\deg(P) = 2$. Maintenant, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

$$P'^2 = (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$$

$$4P = 4aX^2 + 4bX + 4c$$

Ceci entraîne $a^2 = a$, donc $a = 1$ (le polynôme est de degré 2, $a \neq 0$), puis $c = b^2/4$. Les polynômes solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes $P(X) = X^2 + bX + b^2/4$, avec $b \in \mathbb{R}$.

③ Si P est une solution qui n'est pas le polynôme nul, alors le degré de $P \circ P$ vaut $\deg(P)^2$, et donc on a l'équation

$$\deg(P)^2 = \deg(P)$$

et donc $\deg(P) = 1$ ou $\deg(P) = 0$. Maintenant, si $P(X) = aX + b$, alors

$$\begin{aligned} P \circ P(X) &= a(aX + b) + b = a^2X + (ab + b) \\ P(X) &= aX + b \end{aligned}$$

On doit donc avoir $a^2 = a$, soit $a = 1$ ou $a = 0$, et $ab = 0$. Si $a = 1$, alors $b = 0$ et si $a = 0$, alors b peut être quelconque dans $\mathbb{R}$. Finalement, on trouve que les solutions sont les polynômes constants et le polynôme $P(X) = X$.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

Les polynômes solutions de $P_n - P'_n = X^n$ sont nécessairement de degré n . Cherchons ceux-ci de la forme

$$P_n = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$P_n - P'_n = X^n$ équivaut à

$$a_n = 1, a_{n-1} = na_n, a_{n-2} = (n-1)a_{n-1}, \dots, a_0 = 1 \cdot a_1$$

Par suite l'équation $P_n - P'_n = X^n$ possède une et une seule solution qui est :

$$P = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \dots + n! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} X^k$$

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13 Un système de congruence

L'algorithme d'Euclide étendu nous donne

$$-\frac{1}{3}(X-2)A(X) + \frac{1}{3}(X+1)B(X) = 1.$$

Une solution du système initial est donc

$$\begin{aligned} P_0(X) &= -\frac{1}{3}(X-2)A(X)(-X+2) + \frac{1}{3}(X+1)B(X)(X-1) \\ &= \frac{1}{3}(2X^4 - 5X^3 + X^2 + 2X + 3) \end{aligned}$$

Un polynôme P est une solution du système si, et seulement si,

$$\begin{cases} P(X) = P_0(X) & [X^2 + X + 1] \\ P(X) = P_0(X) & [(X-1)^2] \end{cases}$$

c'est-à-dire si $P - P_0$ est divisible par $X^2 + X + 1$ et par $(X-1)^2$ donc par $(X^2 + X + 1)(X-1)^2$.

Donc l'ensemble des solutions du système initial est

$$\{P_0(X) + R(X)(X^2 + X + 1)(X-1)^2 \mid R \in \mathbb{R}[X]\}.$$

On nous demande le polynôme de degré minimal vérifiant le système correspond à $R(X) = -\frac{2}{3}$ et on obtient

$$P(X) = -X^3 + \frac{1}{3}X^2 + \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

$$\begin{aligned} X^8 - 1 &= (X^4 - 1)(X^4 + 1) \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1) \\ &= (X-1)(X+1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1), \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

Posons $D = \text{pgcd}(A, B)$. On a $D^2 = \text{pgcd}(A^2, B^2)$ associé à A^2 donc $\deg D^2 = \deg A^2$ puis $\deg D = \deg A$. Or $D \mid A$ donc D et A sont associés. Puisque $D \mid B$, on obtient $A \mid B$.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

Dans un premier temps cherchons P vérifiant $P(0) = 1, P(1) = 2, P'(0) = 3, P'(1) = 4, P''(0) = 5$ et $P''(1) = 6$ puis on considèrera $P(X-1)$ au terme des calculs. Un polynôme vérifiant $P(0) = 1$ et $P(1) = 2$ est de la forme

$$P(X) = X + 1 + X(X-1)Q(X)$$

Pour que le polynôme P vérifie $P'(0) = 3, P'(1) = 4, P''(0) = 5$ et $P''(1) = 6$ on veut que Q vérifie $Q(0) = -2, Q(1) = 3, Q'(0) = -9/2$ et $Q'(1) = 0$. Le polynôme $Q(X) = 5X - 2 + X(X-1)R(X)$ vérifie les deux premières conditions et vérifie les

deux suivantes si $R(0) = 19/2$ et $R(1) = -5$. Le polynôme $R = -\frac{29}{2}X + \frac{19}{2}$ convient. Finalement

$$P(X) = X + 1 + X(X-1) \left(5X - 2 + X(X-1) \left(-\frac{29}{2}X + \frac{19}{2} \right) \right)$$

est solution du problème transformé et

$$P(X) = -\frac{29}{2}X^5 + 111X^4 - \frac{655}{2}X^3 + 464X^2 - 314X + 82$$

est solution du problème initial.

Les autres solutions s'en déduisent en observant que la différence de deux solutions possède 1 et 2 comme racine triple. Finalement, la solution générale est

$$-\frac{29}{2}X^5 + 111X^4 - \frac{655}{2}X^3 + 464X^2 - 314X + 82 + (X-1)^3(X-2)^3Q(X)$$

avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

① Soit (x, y, z) un triplet solution. On a $\sigma_1 = x + y + z = 1$, $\sigma_3 = xyz = -4$ et

$$\sigma_2 = xy + yz + zx = xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = -4$$

Par suite x, y, z sont les racines de:

$$X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2)$$

Donc $\{x, y, z\} = \{1, -2, 2\}$. Inversement de tels triplets sont solutions.

② Soit (x, y, z) un triplet solution de

$$\begin{cases} x(y+z) = 1 \\ y(z+x) = 1 \\ z(x+y) = 1 \end{cases}$$

(1) - (2) donne $xz = yz$, (3) donne $z \neq 0$ donc $x = y$. De même on obtient $x = z$. Ainsi $x = y = z = 1/\sqrt{2}$ ou $-1/\sqrt{2}$. Inversement de tels triplets sont solutions.

③ Soit (x, y, z) un triplet solution.

Posons $S_1 = x + y + z = 2$, $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 14$ et $S_3 = x^3 + y^3 + z^3$. Déterminons $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ et $\sigma_3 = xyz$. On a $\sigma_1 = 2$. $S_1^2 - S_2 = 2\sigma_2$. Par suite $\sigma_2 = -5$. Posons $t = x^2y + yx^2 + y^2z + zy^2 + z^2x + xz^2$. On a $S_1S_2 = S_3 + t$ d'où $t = S_1S_2 - S_3 = 8$. On a $S_1^3 = S_3 + 3t + 6\sigma_3$ d'où $\sigma_3 = \frac{1}{6}(S_1^3 - S_3 - 3t) = -6$. Par suite x, y, z sont les racines de

$$X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X-1)(X+2)(X-3)$$

Donc $\{x, y, z\} = \{1, -2, 3\}$. Inversement de tels triplets sont solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18 Polynômes de Laguerre

Par la formule de dérivation de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(n-k)} (e^{-x})^{(k)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{k!} x^k e^{-x}$$

donc

$$L_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} X^k$$

est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 19 Taylor et Taylor

Par la formule de Taylor

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

donc

$$P(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

et plus généralement

$$P^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!}$$

Par la formule de Taylor

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k$$

puis en permutant les sommes (qui se limitent à un nombre fini de termes non nuls)

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X).$$

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20

On remarque tout d'abord que $X^4 - 1 = (X - 1)(X^3 + X^2 + X + 1)$, donc $X^4 = 1[X^3 + X^2 + X + 1]$.

Avec les règles de manipulations des congruences, on obtient, pour $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^4$,

$$\begin{aligned} X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q} &= X^3 + X^2 + X + 1[X^3 + X^2 + X + 1] \\ &= 0[X^3 + X^2 + X + 1] \end{aligned}$$

ce qui signifie que $X^3 + X^2 + X + 1$ divise tous les polynômes de la forme $X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

D'après l'égalité $P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X$, il suffit de montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a alors

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k (P(X)^k - X^k) = \sum_{k=1}^n a_k (P(X)^k - X^k).$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $P(X)^k - X^k = (P(X) - X) \sum_{j=0}^{k-1} X^j P(X)^{k-1-j}$, ce qui montre que ce polynôme est multiple de $P(X) - X$. Ainsi, $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Correction de l'EXERCICE 22 Coefficients d'un polynôme complexe

Soit $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$ une racine $(n+1)$ -ième de l'unité. On a

$$P(1) + P(\omega) + \dots + P(\omega^n) = (n+1)a_0$$

car

$$\sum_{k=0}^n \omega^{k\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [n+1]$$

On en déduit $(n+1)|a_0| \leq (n+1)M$ puis $|a_0| \leq M$. De façon plus générale, on a

$$P(1) + \omega^{-k}P(\omega) + \dots + \omega^{-nk}P(\omega^n) = (n+1)a_k$$

et on en déduit $|a_k| \leq M$.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

Correction de l'EXERCICE 23

On peut écrire P sous forme factorisée $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$, avec $n = \deg P \in \mathbb{N}^*$

et $z_k \in \mathbb{C}$ vérifiant $\text{Im } z_k \geq 0$.

Un complexe z est racine du polynôme $P + \bar{P}$ si, et seulement si,

$$\lambda \prod_{k=1}^n (z - z_k) = -\bar{\lambda} \prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_k)$$

Si $\text{Im } z \neq 0$ alors $\exists k \in \{1, \dots, n\}$, $|z - z_k| < |z - \bar{z}_k|$, sauf si tous les z_k sont réels, ce qui voudrait dire que P est réel. Ce cas est trivial.

Donc, si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\left| \lambda \prod_{k=1}^n (z - z_k) \right| < \left| \bar{\lambda} \prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_k) \right|$, Absurde, donc $z \in \mathbb{R}$.

Ainsi le polynôme $\operatorname{Re} P$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et, par une argumentation analogue, il en est de même de $\operatorname{Im} P$.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Correction de l'EXERCICE 24

L'implication $(2) \Rightarrow (1)$ est immédiate. Supposons (1) . Puisque P est de signe constant, la décomposition en facteurs irréductibles de P s'écrit avec des facteurs de la forme

$$(X - \lambda)^2 = (X - \lambda)^2 + 0^2 \quad \text{et} \quad X^2 + 2pX + q = (X + p)^2 + \left(\sqrt{q - p^2}\right)^2.$$

Or

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$$

montre le résultat par récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25

$$(1) \text{ Après calculs } \sin((2n+1)\alpha) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} \cos^{2(n-p)} \alpha \cdot \sin^{2p+1} \alpha.$$

$$(2) \text{ On observe } \sin((2n+1)\alpha) = \sin^{2n+1} \alpha P(\cot^2 \alpha).$$

Posons $\beta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$. Les $x_k = \cot^2 \beta_k$ sont n racines distinctes de P , or $\deg P = n$, ce sont donc exactement les racines de P .

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

$$(1) \text{ Si } P(a) = 0 \text{ alors } P(a^2) = -P(a)P(a+1) = 0 \text{ donc } a^2 \text{ est racine de } P.$$

$$(2) \text{ Si } a \neq 0 \text{ et } a \text{ non racine de l'unité alors la suite des } a^{2^n} \text{ est une suite de complexe deux à deux distincts (à expliquer), et racines de } P, \text{ donc } P = 0. \text{ Absurde.}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27

Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Notons α_k la somme des zéros de $P^{(k)}$. Par les relations coefficients racines d'un polynôme scindé

$$\alpha_0 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \alpha_1 = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}, \alpha_2 = -\frac{(n-2)a_{n-1}}{na_n}, \dots$$

$$\alpha_k = -\frac{(n-k)a_{n-1}}{na_n}, \dots, \alpha_{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

Les $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont donc en progression arithmétique de raison a_{n-1}/na_n .

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28 Oral Centrale supelec

$$(1) \text{ } 1, j, j^2 \text{ conviennent.}$$

$$(2) \text{ Introduisons le polynôme } P(X) = (X - a)(X - b)(X - c).$$

Les coefficients de ce polynôme s'expriment à partir de $S_1 = a + b + c, S_2 = a^2 + b^2 + c^2$ et $S_3 = a^3 + b^3 + c^3$.

Le polynôme P est donc à coefficients réels. S'il n'admet pas trois racines réelles, il possède deux racines complexes conjuguées. Celles-ci sont alors de même module ce qui est exclu.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)