MATEMÁTICA
12ª Classe

- Módulo
- Cálculo Combinatório
- Probabilidade
- Funções
- Sucessões Numéricas
- Limites
- Continuidades
- Derivada
- Integral
- Números Complexos

Manuel Mambuque Zimundo

Introdução ou Prefacio

Manuel Mambuque Zimundo
(MM – ZIM)
Licenciado em ensino de Matemática e Habilitações em ensino de Física

ÍNDICE

1 MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

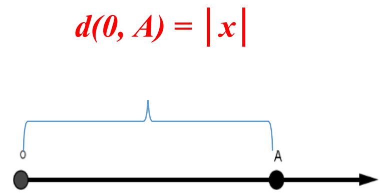
OBJECTIVOS:

No fim desta unidade, deverás ser capaz de:

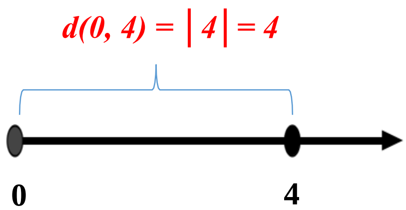
- Definir módulo de um número real;
- Verificar as propriedades do módulo de um número real;
- Interpretar geometricamente o módulo de um número real;
- Identificar funções modulares;
- Determinar domínio, contradomínio, zeros da função, monotonia e variação do sinal da função modular;
- Construir gráficos da função módulo;
- Resolver analiticamente as equações modulares;
- Resolver analiticamente as inequações modulares;

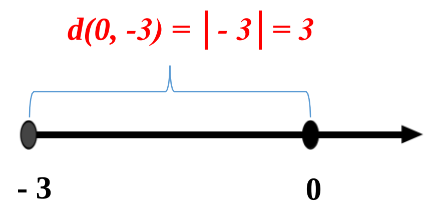
1.1. DEFINIÇÃO DO MÓDULO DE UM NÚMEROREAL

Para definir o módulo de um número real partiremos da figura ao lado, e seja x um número real que faz corresponder ao ponto ***A*** ao eixo real (uma recta que contêm números reais) com a origem no ponto ***O***, como se indica na figura:



A partir da figura, podemos dizer que: "*Chama-se módulo de um número real x, que designa por* $|x|$ *à distância entre o ponto O ao ponto A*". Assim temos os seguintes exemplos:





Portanto, módulo de um número real é o seu valor absoluto. Quer dizer que, se o número é positivo, o seu módulo é esse número, mas se for negativo, o seu módulo é o seu simétrico e é zero se ele é zero, e pode ser definida da seguinte forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Que são designadas expressões matemáticas do módulo de um número real

Sendo assim, podemos concluir que:

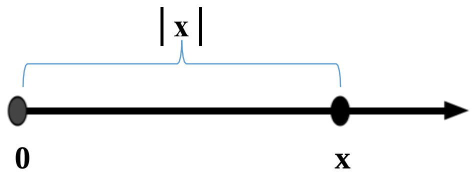
- $|7| = 7;$
- $|12| = 12;$
- $|0{,}25| = 0{,}25;$
- $\left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7};$
- $|-5| = -(-5) = 5;$
- $|-18| = -(-18) = 18;$
- $|-3{,}14| = -(-3{,}14) = 3{,}14;$
- $\left|-\frac{5}{3}\right| = -\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3};$

1.2. PROPRIEDADES DO MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Dados x e y dois números reais quaisquer, são validas as propriedades seguintes:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$
2. $|x - y| \geq |x| - |y|$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
5. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
6. $|x| = \sqrt{x^2}$

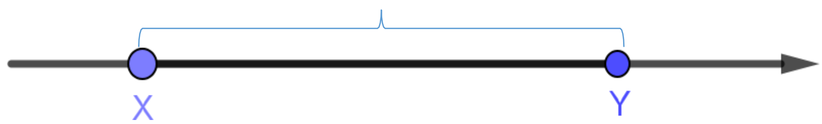
1.3. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DA DIFERENÇA DE DOIS NÚMEROS



Geometricamente o módulo de um número real x é igual à distancia de origem ao ponto no eixo numérico o número x.

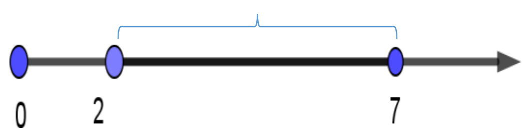
De igual modo, o módulo de diferença de dois números reais x e y, ou seja módulo entre dois números é igual a distância entre os números x e y no eixo numérico, como mostra a figura a seguir:

$$|y - x| = d(x, y) \quad \text{ou} \quad |x - y| = d(y,x)$$

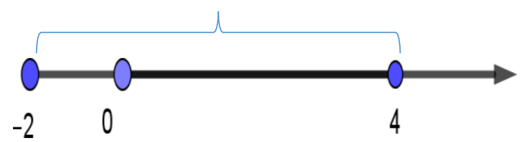


Exemplo: Observe a figura

(a) $|7 - 2| = d(2, 7) = 5$ ou $|2 - 7| = d(7, 2)=5$



(b) $|- 2 - 4| = d(4,-2) = 6$ ou $|2 + 4| = d(-4, 2) = 6$



Portanto podemos afirmar que:

- ***$|7 - 4| = d(4,7) = 3$unidades;***
- ***$|-2 - 3| = d(3,-2) = 5$unidades;***
- ***$|1 + 5| = |1 – (-5)| = d(-5,1) = 6$unidades;***
- ***$|-1 + 8| = |-1 – (-8)| = d(-8,-1) = 7$unidades;***

1.4. APLICAÇÃO DA PROPRIEDADE $\sqrt{x^2} = |x|$

Seja x e y dois números reias e verifica-se que $\sqrt{x^2} = |x|$ e válidas as seguintes propriedades de potências $\mathbf{x^{n \cdot m} = (x^n)^m}$ **e** $\mathbf{x^n \cdot x^m = x^{n+m}}$**,** tem-se:

(a) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$;

(b) $\sqrt{a^2b^6} = \sqrt{a^2(b^3)^2} = \sqrt{(ab^3)^2} = |ab^3|$;

(c) $\sqrt{x^4y^2z^6} = \sqrt{(x^2)^2y^2(z^3)^2} = \sqrt{(x^2yz^3)^2} = |x^2yz^3|$;

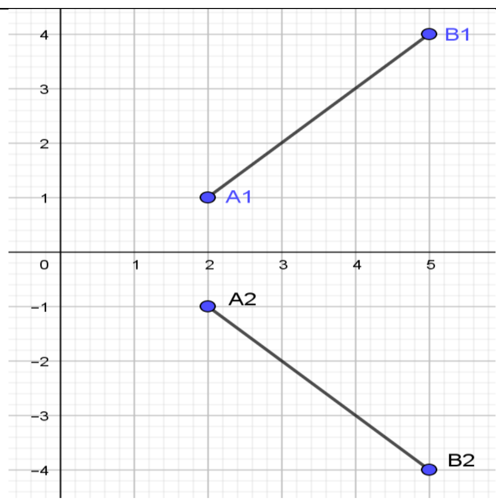
(d) $\sqrt{25x^2y^{12}} = \sqrt{5^2x^2(y^6)^2} = \sqrt{(5xy^6)^2} = |5xy^6|$;

1.5. FUNÇÃOMÓDULO

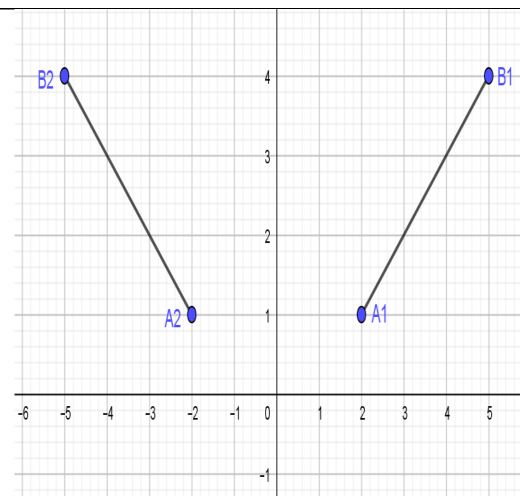
Definição: Uma função de IR em IR recebe o nome de função módulo ou modular quando a cada elemento x associa o elemento $|x|$, isto é, $f(x) = |x|$. De acordo com a definição do módulo de número real pode-se escrever $f(x) = \begin{cases} x; & \text{se } x \geq 0 \\ -x; & \text{se } x < 0 \end{cases}$. A função modular é uma função definida por sentença ou por troços ou por ramos ou por partições.

Nos itens a seguir vamos representar graficamente uma função modular apresentando passos de esboço e pela leitura do gráfico apresentar o estudo nos seguintes pontos: **Domínio, Contradomínio, Zeros, Variação da monotonia e Variação do sinal.** Para construir o gráfico da função modular requer conhecer dois métodos: **Pela definição e pela Simetria.** Porem neste manual vai apresentar a construção dos gráficos modulares pela simetria.

Para construir o gráfico da função pela simetria, veja a figura a seguir, onde os segmentos $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são simétricos em relação aos eixos das abcissas (ox) e ordenadas (oy).



$\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$são simétrico em relação ao eixo ox



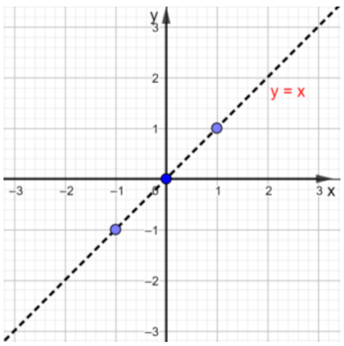
$\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são simétrico em relação ao eixo oy

1.5.1. FUNÇÃO MÓDULO DO TIPO: y = | f(x) |

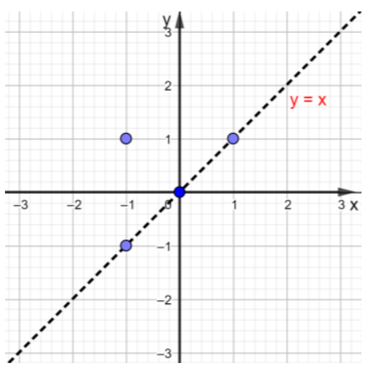
Exemplo 1: f(x) = | x |

1º Passo: Traçar o gráfico da função y = x;

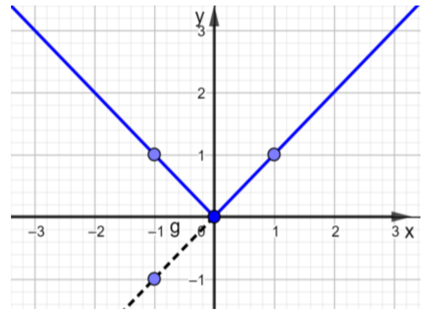
x	-1	0	1
y	1	0	1



2º Passo: Achar uma simetria em relação ao eixo dos ox para os pontos de ordenadas negativa, isto é: $(-1; -1) \rightarrow (-1; 1)$;



3º Passo: Constrói o gráfico de f(x) = | x | ;



Estudo do gráfico da função f(x) = | x |

1. **Domínio(Df):** x$]-\infty, +\infty[$ ou x∈IR;

2. **Contradomínio(D'f):** y [0, +∞[ou y ∈ IR_0^+;

3. **Zeros da função (y = 0):** x = 0;

4. **Ordenada na origem(x = 0):** y = 0;

5. **Variação da monotonia:**

x	]−∞; 0[	]0; +∞[
f(x)	↘	↗

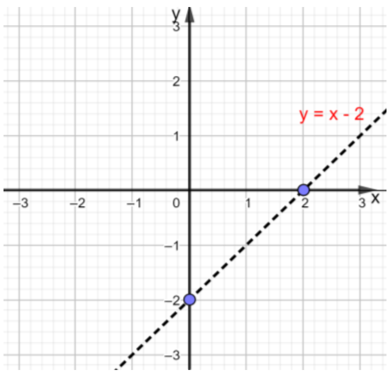
6. **Variação do sinal:**

x	]-∞; 0[	0	]0; +∞[
f(x)	+		+

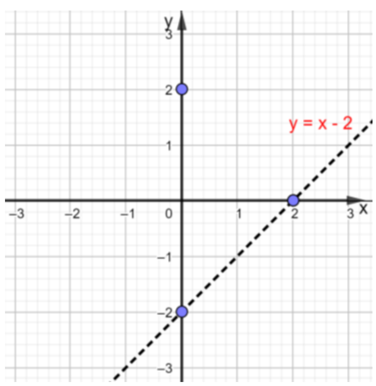
Exemplo 2: **f(x) = |x - 2|**

1º Passo: Traçar o gráfico da função y = x – 2;

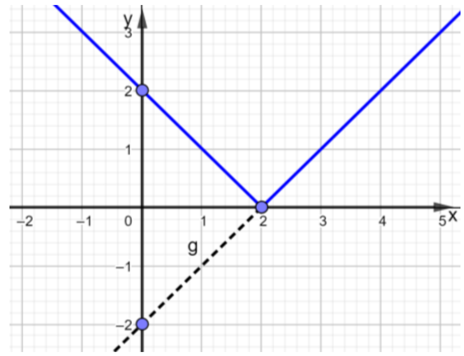
x	0	2
y	– 2	0



2º Passo: Achar uma simetria em relação ao eixo dos ox para os pontos de ordenadas negativa, isto é: $(0; -2) \rightarrow (0; 2)$;



3º Passo: Constrói o gráfico de f(x) = |x – 2|



Estudo do gráfico da função f(x) = |x – 2|

1. **Domínio(Df):** x$]-\infty, +\infty[$ ou x∈IR;

2. **Contradomínio(D'f):** y [0, +∞[ou y ∈ IR_0^+;

3. **Zeros da função (y = 0):** x = 2;

4. **Ordenada na origem(x = 0):** y = 2;

5.Variação da monotonia:

x	]−∞; 2[	]2; +∞[
f(x)	↘	↗

6. Variação do sinal:

x	]-∞; 2[	2	]2; +∞[
f(x)	+		+

Exemplo 3: f(x) = $|x^2 - 2x|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = x^2 - 2x$;

(Para traçar grafico da função quadratica é necessario conhecer: **Sentido da parábola, zeros da função se existirem, ordenada na origem coordenadas do vértice**)

(i) Sentido da parábola: Parábola virada para cima;

(ii) Zeros da função: $y = 0$: $x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0 \vee x - 2 = 0$

$x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

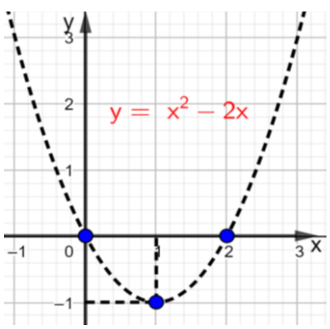
(iii) Ordenada na origem: $x = 0$: $y = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$;

(iv) Coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$:

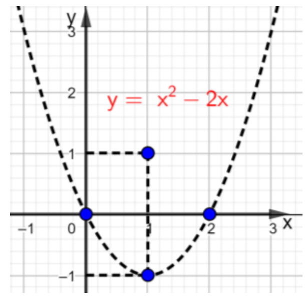
• $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$;

• $y_v = f(x_v) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$;

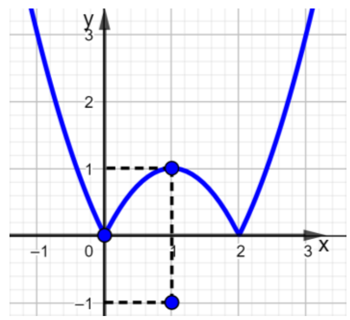
Logo temos, **$V(x_v, y_v) = V(1, -1)$;**



2º Passo: Achar uma simetria em relação ao eixo dos ox para os pontos de ordenadas negativa, isto é: $(1; -1) \rightarrow (1; 1)$;



3º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x^2 - 2x|$;



Estudo do gráfico da função f(x) = $|x^2 - 2x|$

1. **Domínio(Df):** $x]-\infty, +\infty[$ ou $x \in IR$;

2. **Contradomínio(D'f):** $y [0, +\infty[$ ou $y \in IR_0^+$;

3. **Zeros da função (y = 0): x = 0 e** $x = 2$;

4. **Ordenada na origem(x = 0):** $y = 0$;

5.Variação da monotonia:

x	]−∞; 0[	]0; 1[	]1; 2[	]2; +∞[
f(x)	↘	↗	↘	↗

6. Variação do sinal:

x	]-∞; 0[	0	]0; 2[	2	]2; +∞[
f(x)	+		+		+

Exemplo 4: $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função: $y = x^2 - 2x - 3$;

(i) Sentido da parábola: Parábola virada para cima;

(ii) Zeros da função: $y = 0$: $x^2 - 2x - 3 = 0$

a = 1; b = – 2; c = – 3

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-3)}}{2 \bullet 1} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2-4}{2} \lor x_2 = \frac{2+4}{2}$$

$$x_1 = -1 \lor x_2 = 3$$

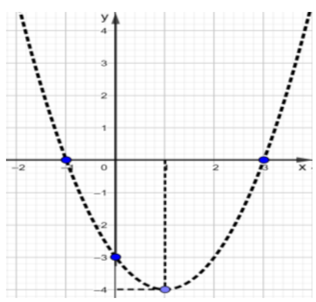
(iii) Ordenada na origem: $x = 0$: $y = 0^2 - 2 \bullet 0 - 3 = -3$;

(iv) Coordenadas do vértice $V\ (x_v, y_v)$:

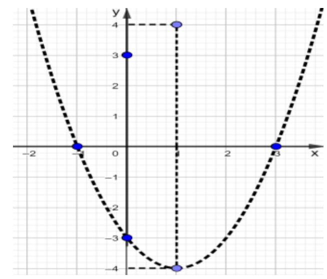
• $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$;

• $y_v = f(x_v) = f(1) = 1^2 - 2 \bullet 1 - 3 = -4$;

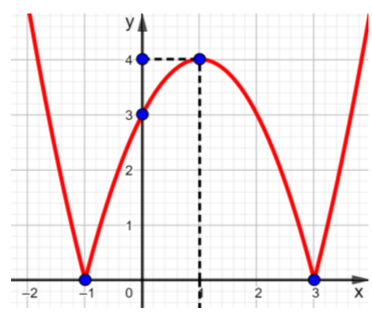
Logo temos, **$V\ (x_v, y_v) = V(1, -4)$;**



2º Passo: Achar uma simetria em relação ao eixo dos ox para os pontos de ordenadas negativa, isto é: $(0; -3) \rightarrow (0; 3)$ e $(1; -4) \rightarrow (1; 4)$;



3º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$;



Estudo do gráfico da função $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1. **Domínio(Df):** $x]-\infty, +\infty[$ ou $x \in IR$;
2. **Contradomínio(D'f):** $y\ [0, +\infty[$ ou $y \in IR_0^+$;
3. **Zeros da função (y = 0): x = – 1 e** $x = 3$;
4. **Ordenada na origem(x = 0):** $y = 3$;

5.Variação da monotonia:

x	$]-\infty; -1[$	$]-1; 1[$	$]1; 3[$	$]3; +\infty[$
f(x)	↘	↗	↘	↗

6. Variação do sinal:

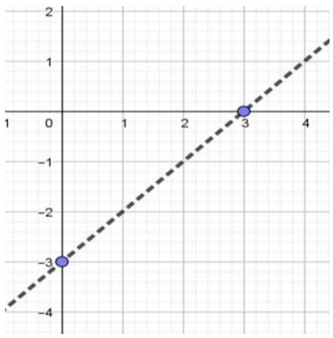
x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 3[$	3	$]3; +\infty[$
f(x)	+		+		+

1.5.2. FUNÇÃO MÓDULO DO TIPO: $y = f(|x|)$

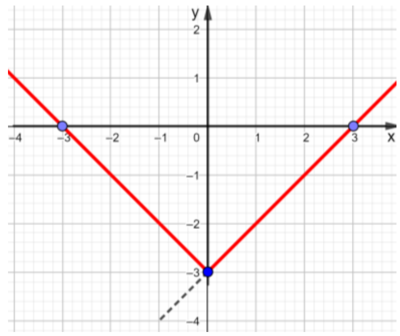
Exemplo 1: $f(x) = |x| - 3$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = x - 3$;

x	0	3
y	-3	0



2º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x| - 3$, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas(oy).



Estudo do gráfico da função f(x) = $f(x) = |x| - 3$

1. **Domínio(Df):** $x]-\infty, +\infty[$ ou $x \in IR$;

2. Contradomínio(D'f): $y [-3, +\infty[$;

3. Zeros da função (y = 0): x = -3 e $x = 3$;

4. Ordenada na origem(x = 0): $y = -3$;

5.Variação da monotonia:

x	**$]-\infty; 0[$**	**$]0; +\infty[$**
f(x)	↘	↗

6. Variação do sinal:

x	**$]-\infty; -3[$**	-3	**$]-3; 3[$**	**3**	**$]2; +\infty[$**
f(x)	+		$-$		+

Exemplo 2: $f(x) = -|x|^2 + 2|x|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = -x^2 + 2x$;

(i) Sentido da parábola: Parábola virada para baixo;

(ii) Zeros da função: $y = 0$: $-x^2 + 2x = 0$

$$-x(x + 2) = 0$$

$$-x = 0 \lor x + 2 = 0$$

$$x_1 = 0 \lor x_2 = -2$$

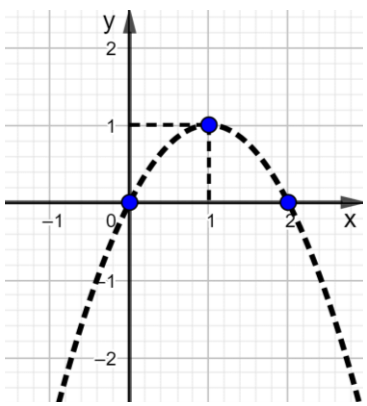
(iii) Ordenada na origem: $x = 0$: $y = -0^2 + 2 \cdot 0 = 0$;

(iv) Coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$:

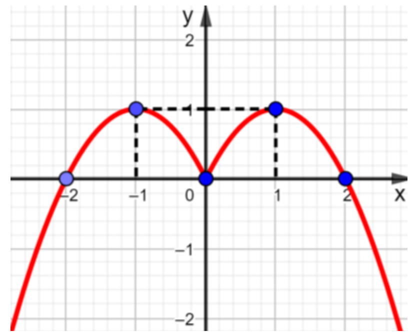
• $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0-2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$;

• $y_v = f(x_v) = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot 1 = 1$;

Logo temos, **$V(x_v, y_v) = V(-1, 1)$;**



2º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = -|x|^2 + 2|x|$, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas(oy).



Estudo do gráfico da função $f(x) = -|x|^2 + 2|x|$

1. **Domínio(Df):** x]$-\infty, +\infty$[ou x∈IR;
2. **Contradomínio(D'f):** y]$-\infty$, 1];
3. **Zeros da função (y = 0): x = − 2 e** x = 2;
4. **Ordenada na origem(x = 0):** y = 0;

5.Variação da monotonia:

x	]−∞; −1[	] −1; 0[	]0; 1[	]1; +∞[
f(x)	↗	↘	↗	↘

6. Variação do sinal:

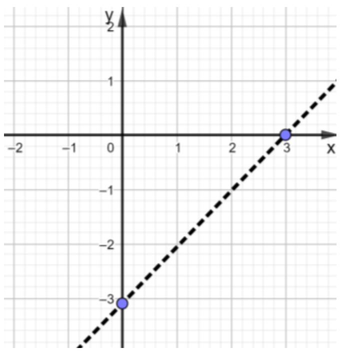
x	]-∞; −2 [	−2	] −2; 0[	0	]0; 2[	2	]2; +∞[
f(x)	+		+				+

1.5.3. FUNÇÃO MÓDULO DO TIPO: $y = |f(|x|)|$

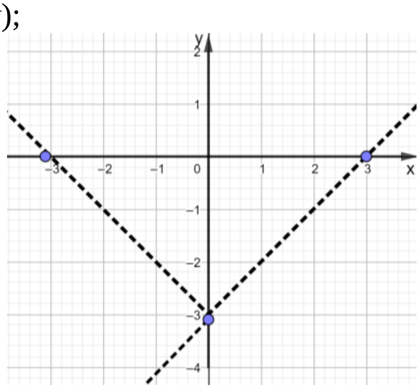
Exemplo: $f(x) = ||x| - 3|$

1º Passo: Traçar o gráfico da função $y = x - 3$;

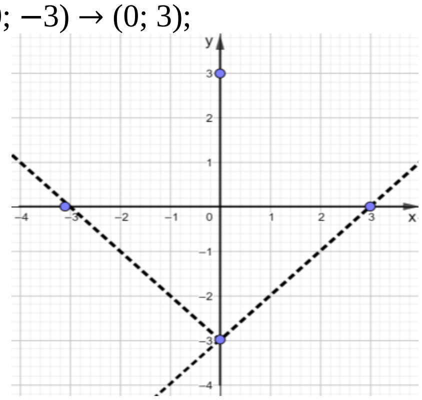
x	0	3
y	– 3	0



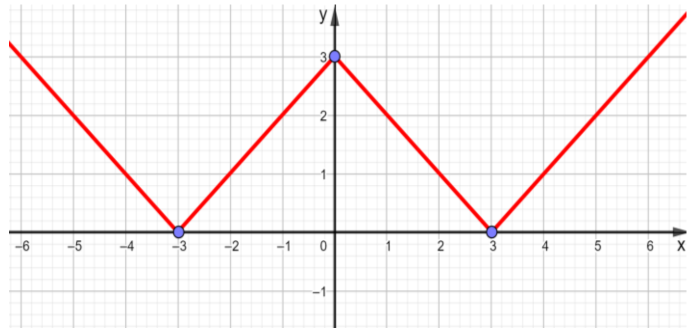
2º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = |x| - 3$, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas(oy);



3º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = ||x| - 3|$, através de uma simetria em relação ao eixo das abcissas (ox) para os pontos de ordenadas negativas, isto é: $(0; -3) \rightarrow (0; 3)$;



4º Passo: Constrói o gráfico de $f(x) = ||x| - 3|$;



Estudo do gráfico da função $f(x) = ||x| - 3|$

1. **Domínio(Df):** $x]-\infty, +\infty[$ ou $x \in IR$;

2. **Contradomínio(D'f):** $y [0, +\infty[$ ou $y \in IR_0^+$;

3. **Zeros da função (y = 0):** $x = -3$ e $x = 3$;

4. **Ordenada na origem(x = 0):** $y = 3$;

5. **Variação da monotonia:**

x	$]-\infty; -3[$	$]-3; 0[$	$]0; 3[$	$]3; +\infty[$
f(x)	↘	↗	↘	↗

6. **Variação do sinal:**

x	]-∞; -3[	-3	] -3; 3[	3	]0; +∞[
f(x)	+		+		+

NOTA SOBRE FUNÇÔES MODULARES:

- Para funções modulares do tipo $y = |f(x)|$, a função está dentro do módulo por essa razão a função é reflectida para parte positiva, através de uma simetria em relação ao eixo das abcissas (ox).
- Para funções modulares do tipo $y = f(|x|)$, só a variável x que está dentro do módulo, por essa razão a função é reflectida, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas (oy).
- Para funções modulares do tipo $y = |f(|x|)|$, a função e a variável x, estão dentro do módulo, por essa razão a função sofreu duas simetrias simultaneamente, primeira a função é reflectida, através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas (oy) e a segunda a função é reflectida para parte positiva, através de uma simetria em relação ao eixo das abcissas (ox).

1.6. EQUAÇÕES MODULARES

Equações modulares são equações nas quais a variável encontra-se dentro do símbolo do módulo. A sua resolução pode ser feita utilizando definição do módulo, as propriedades do módulo e princípio de equivalência (Elevação de ambos membros da equação ao quadrado). As equações modulares podem ser, $|f(x)| = a$, $|f(x)| = g(x)$, $|f(x)| = |g(x)|$ **e** $a|x|^2 + b|x| + c = 0$.

1.6.1. EQUAÇÕES MODULARES DO TIPO: $|f(x)| = a$, onde $a \geq 0$ (O valor de *a* não deve se negativo, se assim for a equação não terá soluções)

Procedimento:	$|f(x)| = a$ $f(x) = a \quad \vee \quad f(x) = -a$

Exemplo1: $|x + 3| = 4$

Resolução

$$|x + 3| = 4$$
$$x + 3 = 4 \ \vee \ x + 3 = -4$$
$$x = 4 - 3 \ \vee \ x = -4 - 3$$
$$x = 1 \vee x = -7$$

Verificação

$$|x + 3| = 4$$

■ **Para x = 1**

$$|1 + 3| = 4$$
$$|4| = 4$$
$$4 = 4$$
(Verdade)

■ **Para x = −7**

$$|-7 + 3| = 4$$
$$|4| = 4$$
$$4 = 4$$
(Verdade)

Sol:{−7; 1}

Exemplo 2: $|3x - 4| = 2$

Resolução

$$|3x - 4| = 2$$
$$3x - 4 = 2 \vee 3x - 4 = -2$$
$$3x = 2 + 4 \vee 3x = -2 + 4$$
$$3x = 6 \vee 3x = 2$$
$$x = \frac{6}{3} \vee x = \frac{2}{3}$$
$$x = 2 \vee x = \frac{2}{3}$$

Verificação

$$|3x - 4| = 2$$

■ **Para x = 1**

$$|3x - 4| = 2$$

(Verdade)

■ **Para x = −7**

$$|3x - 4| = 2$$

(Verdade)

Solução: $\{\frac{2}{3}; 2\}$

Exemplo3: $|3x - 4| = 2$

Resolução: Pelo Princípio de equivalência
(Elevação de ambos membros da equação ao quadrado)

$$|3x - 4| = 2$$
$$(3x - 4)^2 = 2^2$$
$$9x^2 - 24x + 16 = 4$$
$$9x^2 - 24x + 12 = 0$$
$$a = 9;\ b = -24;\ c = 12$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \bullet 9 \bullet 12}}{2 \bullet 9} = \frac{24 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{24 \pm 12}{18}$$
$$x_1 = \frac{24 + 12}{18} \vee x_2 = \frac{24 - 12}{18}$$
$$x_1 = \frac{36}{18} \vee x_2 = \frac{12}{18}$$
$$x_1 = 2 \vee x_2 = \frac{2}{3}$$

Solução: $\{\frac{2}{3}; 2\}$

Exemplo 4: $|x + 8| = -12$

Esta equação não existe pelo menos um número real que a satisfaz, mas ao resolver a equação caro leitor irás encontrar os números **x = - 20 e x = 4**, De seguida faça verificação e claramente não satisfaz a igualdade, visto que, o módulo de um número real não é negativo.

1.6.2. EQUAÇÕES MODULARES DO TIPO: $|f(x)| = g(x)$, onde $g(x) \geq 0$

Procedimento:	$|f(x)| = g(x)$ $f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$

Exemplo 1: $|x + 5| = 2x - 1$

Condição de existência

$2x - 1 \geq 0$

$2x \geq 1$

$x \leq \frac{1}{2}$

(Quer dizer que o valor de x deve ser superior ou igual á $\frac{1}{2}$)

Resolução

$|x + 5| = 2x - 1$

$x + 5 = 2x - 1 \vee x + 5 = -(2x - 1)$

$x - 2x = -1 - 5 \vee x + 5 = -2x + 1$

$-x = -6 \vee x + 2x = 1 - 5$

$x = 6 \vee 3x = -4$

$x = 6 \vee x = -\frac{4}{3}$

Verificação

$|x + 5| = 2x - 1$

■ **Para x = 6**

$|6 + 5| = 2 \cdot 6 - 1$

$|11| = 11$

$11 = 11$

(Verdade)

■ **Para x = $-\frac{4}{3}$**

$|-\frac{4}{3} + 5| = 2 \cdot (-\frac{4}{3}) - 1$

$\frac{11}{3} = -\frac{11}{3}$

(Falso)

Solução: {6}

Exemplo 2: $|3x - 2| = 3 - 2x$

Condição de existência

$3 - 2x \geq 0$

$-2x \geq 3$

$-2x \geq -3 \cdot (-1)$

$2x \leq 3$

$x \leq \frac{3}{2}$

Resolução

$|3x - 2| = 3 - 2x$

$3x - 2 = 3 - 2x \vee 3x - 2 = -(3 - 2x)$

$3x + 2x = 3 + 2 \vee 3x - 2 = -3 + 2x$

$5x = 5 \vee 3x - 2x = -3 + 2$

$x = \frac{5}{5} \vee x = -1$

$x = 1 \vee x = -1$

Verificação

■ **Para x = 1**

$|3 \cdot 1 - 2| = 3 - 2 \cdot 1$

$|3 - 2| = 3 - 2$

$|1| = 1$

$1 = 1$

(Verdade)

■ **Para x = – 1**

$|3 \cdot (-1) - 2| = 3 - 2 \cdot (-1)$

$|-3 - 2| = 3 + 2$

$|-5| = 5$

$5 = 5$

(Verdade)

Solução: {−1; 1}

1.6.3. EQUAÇÕES MODULARES DO TIPO: $|f(x)| = |g(x)|$

Procedimento:	$\|f(x)\| = \|g(x)\|$ $f(x) = g(x) \ \vee \ f(x) = -\ g(x)$

Exemplo 1: $|3x - 5| = |x + 1|$

Resolução

$$|3x - 5| = |x + 1|$$

$$3x - 5 = x + 1 \vee 3x - 5 = (x + 1)$$

$$3x - x = 1 + 5 \vee 3x - 5 = -x - 1$$

$$2x = 6 \vee 3x + x = -1 + 5$$

$$x = \frac{6}{2} \vee 4x = 4$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = \frac{4}{4}$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

Verificação

■ Para x = **3**

$$|3 \cdot 3 - 5| = |3 + 1|$$

$$|9 - 5| = |4|$$

$$|4| = |4|$$

$$4 = 4$$

(Verdade)

■ Para Se x = 1

$$|3 \cdot 1 - 5| = |\mathbf{1 + 1}|$$

$$|3 - 5| = |\mathbf{2}|$$

$$|-2| = 2$$

$$2 = 2$$

(Verdade)

Solução: {1; 3}

Exemplo 2: $|7 - 2x| = |5x + 19|$

Resolução

$$|7 - 2x| = |5x + 19|$$

$$7 - 2x = 5x + 19 \vee 7 - 2x = -(5x + 19)$$

$$-2x - 5x = 19 - 7 \vee 7 - 2x = -5x - 19$$

$$-7x = 12 \vee -2x + 5x = -19 - 7$$

$$x = -\frac{12}{7} \vee 3x = -26$$

$$x = -\frac{12}{7} \vee x = -\frac{26}{3}$$

Verificação

$$|7 - 2x| = |5x + 19|$$

■ **Para** $x = -\frac{12}{7}$

$$\left|7 - 2 \cdot \left(-\frac{12}{7}\right)\right| = \left|5 \cdot \left(-\frac{12}{7}\right) + 19\right|$$

$$\left|7 + \frac{24}{7}\right| = \left|-\frac{60}{7} + 19\right|$$

(7) (1) (1) (7)

$$\left|\frac{49 + 24}{7}\right| = \left|-\frac{60 + 133}{7}\right|$$

$$\left|\frac{73}{7}\right| = \left|-\frac{73}{7}\right|$$

$$\frac{73}{7} = \frac{73}{7}$$

(Verdade)

■ **Para** $x = -\frac{26}{3}$

$$\left|7 - 2 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right)\right| = \left|5 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right) + 19\right|$$

$$\left|7 + \frac{52}{3}\right| = \left|-\frac{130}{3} + 19\right|$$

(3) (1) (1) (3)

$$\left|\frac{21 + 52}{3}\right| = \left|-\frac{130 + 57}{3}\right|$$

$$\left|\frac{73}{3}\right| = \left|-\frac{73}{3}\right|$$

$$\frac{73}{3} = \frac{73}{3}$$

(Verdade)

Solução: $\{-\frac{26}{3}; -\frac{12}{7}\}$

1.7. INEQUAÇÕESMODULARES

Inequações modulares são inequações nas quais a variável encontra-se dentro do símbolo do módulo. A sua resolução pode ser feita utilizando definição do módulo, as propriedades do módulo e princípio de equivalência (Elevação de ambos membros da equação ao quadrado). Existem diferentes tipos de inequações modulares a saber: $\mathbf{|f(x)| < a}$, $\mathbf{|f(x)| \leq a}$, $\mathbf{|f(x)| > a}$, $\mathbf{|f(x)| \geq a}$, $\mathbf{|f(x)| < g(x)}$, $\mathbf{|f(x)| \leq g(x)}$, $\mathbf{|f(x)| > g(x)}$, $\mathbf{|f(x)| \geq g(x)}$, $\mathbf{|f(x)| < |g(x)|}$, $\mathbf{|f(x)| \leq |g(x)|}$, $\mathbf{|f(x)| > |g(x)|}$, $\mathbf{|f(x)| \geq |g(x)|}$, $\mathbf{a|x|^2 + b|x| + c < 0}$, $\mathbf{a|x|^2 + b|x| + c \leq 0}$, $\mathbf{a|x|^2 + b|x| + c > 0}$ e $\mathbf{a|x|^2 + b|x| + c \geq 0}$.

1.7.1. INEQUAÇÕES MODULARES DO TIPO:

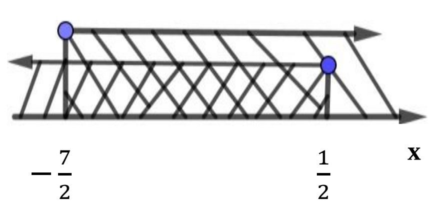
1. $|f(x)| < a$ **2.** $|f(x)| \leq a$ **3.** $|f(x)| > a$ **4.** $|f(x)| \geq a$

Procedimento:	**1.** $|f(x)| < a \Leftrightarrow f(x) < a \wedge f(x) > -a$ **2.** $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow f(x) \leq a \wedge f(x) \geq -a$	**Intersecção (∩)**
	3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) > a \vee f(x) < -a$ **4.** $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow f(x) \geq a \vee f(x) \leq -a$	**Reunião (∪)**

Exemplo 1: $|2x + 3| \leq 4$

Resolução

$$|2x + 3| \leq 4$$
$$2x + 3 \leq 4 \wedge 2x + 3 \geq -4$$
$$2x \leq 4 - 3 \wedge 2x \geq -4 - 3$$
$$2x \leq 1 \wedge 2x \geq -7$$
$$x \leq \ \wedge 2x \geq -7$$
$$x \leq \frac{1}{2} \wedge x \geq -\frac{7}{2}$$



Solução: $x \in [-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}]$

Exemplo 2: $|4-2x|>6$

<u>Resolução</u>

$$|4-2x|>6$$

$$4-2x>6 \lor 4-2x<-6$$

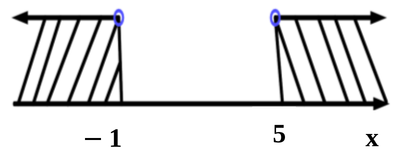
$$-2x>6-4 \lor -2x<-6-4$$

$$-2x>2 \;/\bullet(-1) \lor -2x<-10 \;/\bullet(-1)$$

$$2x<-2 \lor 2x>10$$

$$x<-\frac{2}{2} \lor 2x>\frac{10}{2}$$

$$x<-1 \lor x>5$$



Solução: $x \in \,]-\infty;\, -1[\,\cup\,]5;\, +\infty[$

Exemplo 3: $|6x-5|<-2$

Para inequações do género não se resolvem necessária, porque é absurdo, visto que, não existem nenhum número real que satisfaz essa desigualdade, isto é, **Solução:** $x \in \emptyset$.

Exemplo 4: $|3x+4| \geq -10$

Ao resolver esta inequação, irá encontrar intervalo muito estranho como solução, entretanto para qualquer número real a desigualdade é satisfeita, desse modo, a solução desta inequação é todo o conjunto dos números reais, isto é, **Solução:** $x \in IR$.

1.7.2. INEQUAÇÕES MODULARES DO TIPO:

1. $|f(x)|<g(x)$ **2.** $|f(x)| \leq g(x)$ **3.** $|f(x)|>g(x)$ **4.** $|f(x)| \geq g(x)$, com $g(x) \geq 0$

Procedimento:	**1.** $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow f(x)<g(x) \land f(x)>-g(x)$ **2.** $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \land f(x) \geq -g(x)$	**Intersecção** ($\cap$)
	3. $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x) \lor f(x)<-g(x)$ **4.** $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \lor f(x) \leq -g(x)$	**Reunião** ($\cup$)

Exemplo 1: $|x + 2| < 2x + 1$

<u>Condição de Existência</u>

$2x + 1 \geq 0$

$2x \geq -1$

$\boxed{x \geq -\frac{1}{2}}$

<u>Resolução</u>

$|x + 2| < 2x + 1$

$x + 2 < 2x + 1 \wedge x + 2 > -(2x + 1)$

$x - 2x < 1 - 2 \wedge x + 2 > -2x - 1$

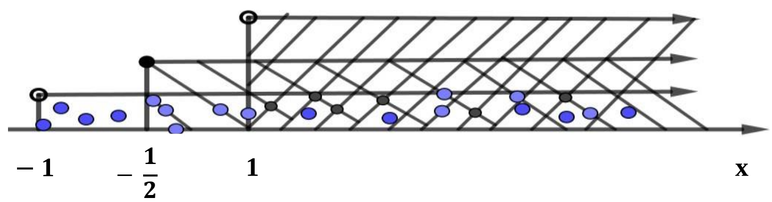
$-x < -1 \,/\, \bullet(-1) \wedge x + 2x > -1 - 2$

$x > 1 \wedge 3x > -3$

$x > 1 \wedge x > -\frac{3}{3}$

$\boxed{x > 1} \wedge \boxed{x > -1}$

(vamos representar as três (3) condições e buscamos intersecção dos três (3), que é a solução dessa inequação)



Solução: x∈]1, + ∞[

Exemplo 2: $|3x - 4| \leq -2x - 1$

<u>Condições de existência</u>

$-2x - 1 \geq 0$

$-2x \geq 1$

$-2x \geq 1 \,/\bullet(-1)$

$2x \leq -1$

$\boxed{x \leq -\frac{1}{2}}$

<u>Resoluçao</u>

$|3x - 4| \leq -2x - 1$

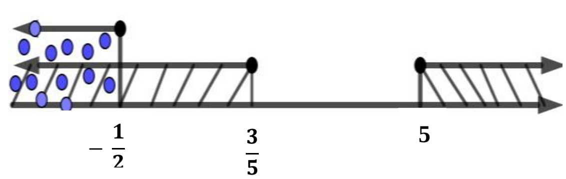
$3x - 4 \leq -2x - 1 \wedge 3x - 4 \geq 2x + 1$

$3x + 2x \leq -1 + 4 \wedge 3x - 2x \geq 1 + 4$

$5x \leq 3 \wedge x \geq 5$

$\boxed{x \leq \frac{3}{5}} \wedge \boxed{x \geq 5}$

(vamos representar as três (3) condições e buscamos intersecção dos três (3), que a soluçao)



Solução: x ∈ { }

Exenplo 3: $|3x + 2| \geq x + 5$

<u>Condições de existência</u>

$x + 5 \geq 0$

$\boxed{x \geq -5}$

<u>Resoluçao</u>

$|3x + 2| \geq x + 5$

$3x + 2 \geq x + 5 \vee 3x + 2 \leq -(x + 5)$

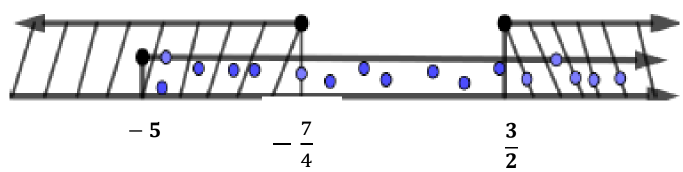
$3x - x \geq 5 - 2 \vee 3x + 2 \leq -x - 5$

$2x \geq 3 \vee 3x + x \leq -5 - 2$

$x \geq \frac{3}{2} \vee 4x \leq -7$

$\boxed{x \geq \frac{3}{2}} \wedge \boxed{x \leq -\frac{7}{4}}$

(vamos representar as três (3) condições e buscamos intersecção dos três (3), que a soluçao)



Solução: $x \in [-5, -\frac{7}{4}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

1.7.3. INEQUAÇÕES MODULARES DO TIPO:

1. $|f(x)| < |g(x)|$ **2.** $|f(x)| \leq |g(x)|$ **3.** $|f(x)| > |g(x)|$ **4.** $|f(x)| \geq |g(x)|$

Procedimento:	**1.** $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge f(x) > -g(x)$ **2.** $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \wedge f(x) \geq -g(x)$	**Intersecção (∩)**
	3. $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f(x) > g(x) \vee f(x) < -g(x)$ **4.** $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \vee f(x) \leq -g(x)$	**Reunião (∪)**

Exenplo 1: $|2x+5| \leq |x+1|$

<u>Resoluçao</u>

$$|2x+5| \leq |x+1|$$

$$2x+5 \leq x+1 \wedge 2x+5 \geq -(x+1)$$

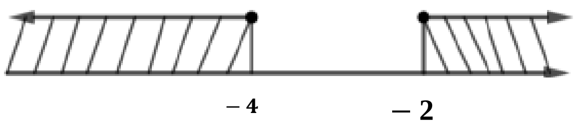
$$2x-x \leq 1-5 \wedge 2x+5 \geq -x-1$$

$$x \leq -4 \wedge 2x+x \geq -1-5$$

$$x \leq -4 \wedge 3x \geq -6$$

$$x \leq -4 \wedge x \geq -\frac{6}{3}$$

$$\boxed{x \leq -4} \wedge \boxed{x \geq -2}$$



Solução: x ∈ ∅

Exenplo 2: $|3x-11| > |x-7|$

<u>Resoluçao</u>

$$|3x-11| > |x-7|$$

$$3x-11 > x-7 \vee 3x-11 < -(x-7)$$

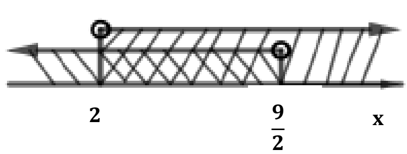
$$3x-x > -7+11 \vee 3x-11 < -x+7$$

$$2x > 4 \vee 3x+x < 7+11$$

$$x > \frac{4}{2} \vee 4x < 18$$

$$x > 2 \vee x < \frac{18}{4}$$

$$\boxed{x > 2} \vee \boxed{x < \frac{9}{2}}$$



Solução: $x \in \left]2, \frac{9}{2}\right[$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **Escreva em forma de módulo, as seguintes expressões:**

(a) $d(2x; 3) = 6$ (b) $d(x; -3) = 4$ (c) $d(5; -x) = 2$ (d) $3d(x; 9) = 12$

2. Traduz simbolicamente as seguintes afirmações:

(a) Conjunto de valores de x que se encontram a 4 unidades de 2;

(b) Conjunto de valores de x que se encontram a 2 unidades de -4;

(c) A distancia entre os pontos de abcissa –x e 4;

(d) A distancia entre os pontos da recta numérica cujas abcissas são x e -5.

3. Sabendo que $\sqrt{x^2} = |x|$, a que é igual as expressões seguintes?

(a) $\sqrt{a^6b^2}$ (c) $\sqrt{x^4(x+3)^2}$ (e) $\sqrt{100a^4c^2}$

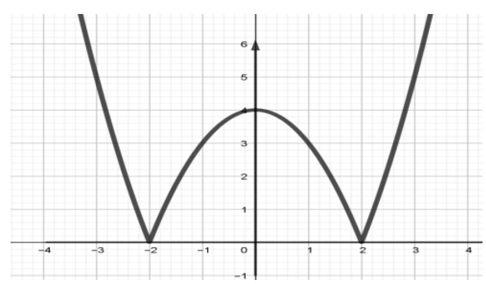
(b) $\sqrt{x^2(x-2)^4}$ (d) $\sqrt{p^2q^8r^{12}}$ (f) $\sqrt{16p^6q^4q^2}$

4. Constrói e faça o estudo do gráfico de cada função:

(a) $f(x) = |x+3|$ (c) $f(x) = ||x| - 2|$ (e) $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$

(b) $f(x) = |x| - 1$ (d) $f(x) = |x^2 - 4|$ (d) $f(x) = -x^2 - |x| + 2$

5. Dado o gráfico ao lado, faça o estudo dos seguintes gráficos das funções: **Domínio, Contradomínio, Zeros, Variação da monotonia e Variação do sinal;**



6. Resolver em IR as seguintes equações:

(a) $|x+5| = 9$ (i) $|x^2 - 4x + 5| = 2$ (q) $|2x - 3| - x = 2x + 1$

(b) $\left|\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{8}$ (j) $|1 - 3x| = 5$ (r) $|4{,}2x - 6{,}8| = 3{,}5 - 1{,}2x$

(c) $|-x + 50| = 50$ (k) $\left|\frac{7}{4}x + \frac{3}{2}\right| = -\frac{10}{8}$ (s) $|2x - 3| = |x + 7|$

(d) $|x + 7| = 14$ (l) $|3x - 6| = x - 2$ (t) $|x - 1| = |3x + 2|$

(e) $|2x - 1| = 3$ (m) $|2 + x| = 6 - 2x$ (u) $|x - 1| = 3|x + 2|$

(f) $|3x^2 + 2x + 8| = -10$ (n) $|x - 3| = -2x - 1$ (v) $|x^2 - x - 5| = |x - 2|$

(g) $|1{,}2 - 2{,}4x| = 5{,}8$ (o) $|x^2 - 2x - 2| = 2x - 8$ (x) $|3x + 2| = |x - 1|$

(h) $|x^2 - 3x - 1| = 3$ (p) $|x + 2| = 3x - 4$ (z) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$

7. Que valores, k pode tomar de modo que a equação $|3x - 2| = 4 - k$:

(a) a equação tenha solução

(b) a equação não tenha solução

8. Resolver em IR as seguintes equações:

(a) $|x + 1| \leq 13$

(b) $|3 - x| > 12$

(c) $|x + 2| < 3$

(d) $|x^2 + 3x + 2| > -10$

(e) $|-x + 50| > 50$

(f) $|3x - 10x^2| < -8$

(g) $|1{,}2 - 2{,}4x| > 5{,}8$

(h) $|7x - 4| < 5 - x$

(i) $|2 - x| \geq 3x + 5$

(j) $|x - 2| < |7x - 4|$

(k) $|3 + 2x| \geq |3x - 2|$

(l) $|10 - 5x| \leq |3x + 12|$

2 CÁLCULO COMBINATÓRIO E PROBABILIDADE

OBJECTIVOS:

No fim do ano, deverás ser capaz de:

- Efectuar o cálculo de factorial de um número natural;
- Simplificar as expressões que envolvem factorial;
- Resolver as equações que envolvem factorial;
- Distinguir Arranjos, Permutações e Combinações;
- Aplicar as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações para resolver problemas reais da vida:
- Desenvolver as linhas do triângulo de Pascal;
- Determinar a soma dos elementos das linhas do triângulo de Pascal;
- Aplicar a fórmula de Newton para efectuar o desenvolvimento do binómio $(x + y)^n$, sendo n natural;
- Reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios;
- Calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento, como cálculo de probabilidade;
- Calcular a probabilidade de um acontecimento pela lei de Laplace;
- Aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida;

2.1. DEFINIÇÃO

CÁLCULO COMBINATÓRIO OU ANÁLISE COMBINATÓRIA *é um ramo da matemática que se dedica ao estudo das técnicas de contagem de elementos e contagem dos subconjuntos de um dado conjunto*. Essas técnicas são: **Arranjos, Permutações** e **Combinações**.

2.2. FACTORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Factorial de um número natural é o produto de factores inteiros e sucessivos desde um certo número natural n, até a unidade representa-se abreviadamente pelo símbolo **n!** que lê-se **factorial de n** ou **n factorial**.

Em geral: $\boxed{n! = n\bullet(n-1)\bullet(n-2)\bullet(n-3)\bullet(n-4)\bullet(n-5)\bullet(n-6)\bullet(n-7)\bullet\ldots 3\bullet 2\bullet 1}$

Exemplos: Desenvolver o factorial dos números a seguir e achar seu valor correspondente

(a) $3! = 3\bullet2\bullet1 = 6$:

(b) $7! = 7\bullet6\bullet5\bullet4\bullet3\bullet2\bullet1 = 5040$;

(c) $\frac{8!}{6!} = \frac{8\bullet7\bullet6\bullet5\bullet4\bullet3\bullet2\bullet1}{6\bullet5\bullet4\bullet3\bullet2\bullet1} = \frac{40320}{720} = 56$

(d) $12! = 12\bullet11\bullet10\bullet9\bullet8\bullet7\bullet6\bullet5\bullet4\bullet3\bullet2\bullet1 = 479001600$;

(e) $4! + 5! = 4\bullet3\bullet2\bullet1 + 5\bullet4\bullet3\bullet2\bullet1 = 24 + 120 = 144$;

(f) $(3!)^4 = (3\bullet2\bullet1)^4 = 6^4 = 1296$;

(g) $(5!)\bullet(4!) = (5\bullet4\bullet3\bullet2\bullet1)\bullet(4\bullet3\bullet2\bullet1) = 120\bullet24 = 2880$;

Alguns Casos especiais (Por Convenção)

0! = 1 e 1! = 1

Podemos calcular factorial de qualquer número natural utilizando a maquina calculadora cientifica, através das teclas SHIFIT e X!. Vamos calcular factorial de alguns números:

(a) 3! Digita: 3 + SHIFIT + X! + =, a calculadora vai visualizar 3! = 6;

(b) 5! Digita: 5 + SHIFIT + X! + =, a calculadora vai visualizar 5! = 479001600;

(c) 7! Digita: 7 + SHIFIT + X! + =, a calculadora vai visualizar 7! = 5040;

(d) 12! Digita: 12 + SHIFIT + X! + =, a calculadora vai visualizar 12! = 479001600;

2.3. SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSOES QUE ENVOLVEM FACTORIAL

Observe atentamente:

- $6! = 6\bullet5! = 6\bullet5\bullet4! = 6\bullet5\bullet4\bullet3! = 6\bullet5\bullet4\bullet3\bullet2! = 6\bullet5\bullet4\bullet3\bullet2\bullet1$;
- $(n+2)! = (n+2)\bullet(n+1)! = (n+2)\bullet(n+1)\bullet n = (n+2)\bullet(n+1)\bullet n\,(n-1)\bullet \ldots 3\bullet2\bullet1$;
- $(n-3)! = (n-3)\bullet(n-4)! = (n-3)\bullet(n-4)\bullet(n-5)! = (n-3)\bullet(n-4)\bullet(n-5)\bullet \ldots 3\bullet2\bullet1$;

Para simplificar expressão com factorial, fixa-se o **n,** procuremos factores anteriores e depois de **n** e devemos ter conta a sequencia seguir: **… n + 4, n + 3, n + 2, n + 1, n, n – 1, n – 2, n – 3, n – 4,…** assim sendo vamos simplificar as seguintes expressões:

(a)$\frac{9!}{5!}$

Ora vejamos:

• 9! = 9•8•7•6•5!, substituindo na expressão temos:

$\frac{9!}{5!} = \frac{9\bullet8\bullet76\bullet\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 3024;$

(b)$\frac{7!+6!}{5!}$

Ora vejamos:

• **7! = 7•6•5! e 6! = 6•5!,** substituindo na expressão e colocar em evidencia o factor comum **5!**, temos:

$\frac{7!+6!}{5!} = \frac{7\bullet6\bullet5!+6\bullet5!}{5!} = \frac{\cancel{5!}(7\bullet6+6)}{\cancel{5!}} = 42 + 6 = 48;$

(c)$\frac{8!-4!}{7!+5!}$

Ora vejamos:

•8! = 8•7•6•5•4!, •7! = 7•6•5•4! e5! = 5•4!, substituindo na expressão e colocar em evidencia o factor comum **4!**, temos:

$\frac{8!-4!}{7!+5!} = \frac{8\bullet7\bullet6\bullet5\bullet4!-4!}{7\bullet6\bullet5\bullet4!+5\bullet4!} = \frac{\cancel{4!}(8\bullet7\bullet6\bullet5-1)}{\cancel{4!}(7\bullet6\bullet5+5)} = \frac{1680-1}{210+5} = \frac{1679}{215};$

(d) $\frac{n!}{(n-1)!}$

• n! = n•(n – 1)!

$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\bullet\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n;$

(e) $\frac{(n-2)!}{n!}$

• n! = n•(n – 1)•(n – 2)!

$\frac{\cancel{(n-2)!}}{n\bullet(n-1)\bullet\cancel{(n-2)!}} = \frac{1}{n\bullet(n-1)} = \frac{1}{n^2-n};$

(f) $\frac{(n+1)!}{n!+(n+1)!}$

• (n + 1)! = (n + 1)•n!

$\frac{(n+1)!}{n!+(n+1)!} = \frac{(n+1)\bullet\cancel{n!}}{n!+(n+1)\bullet\cancel{n!}} = \frac{(n+1)\bullet n!}{n!(1+n+1)} = \frac{n+1}{n+2};$

(e) $\frac{n!}{(n-2)!+(n-1)!}$

• n! = n•(n – 1)•(n – 2)! e (n – 1)! = (n – 1)•(n – 2)!

$\frac{n!}{(n-2)!+(n-1)!} = \frac{n\bullet(n-1)\bullet\cancel{(n-2)!}}{(n-2)!+(n-1)\bullet\cancel{(n-2)!}} = \frac{n\bullet(n-1)\bullet(n-2)!}{(n-2)!\bullet(1+n-1)} =$

$= \frac{\cancel{n}\bullet(n-1)}{\cancel{n}} = n - 1;$

2.4. EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM FACTORIAL

São equações que envolvem factorial, ou seja, a variável está sujeita a factorial. Para resolver estas equações, simplifica-se de modo a eliminar factorial e de seguida encontra – se o valor de **n**, para isso basta isolar o **n**.

Como mostram exemplos a seguir:

(a) $\frac{(\mathbf{n-1})!}{(\mathbf{n-2})!} = \mathbf{4}$

$\frac{(n-1)\bullet\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 4$

n – 1 = 4

n = 4 + 1

n = 5

5 ∈ IN

Solução: {5}

(b) $\frac{(\mathbf{n-2})!}{(\mathbf{n-1})!} = \mathbf{9}$

$\frac{\cancel{(n-2)!}}{(n-1)\bullet\cancel{(n-2)!}} = 9$

$\frac{1}{n-1} = 9$

n – 1 = $\frac{1}{9}$

n = $\frac{1}{9}$ + 1

n = $\frac{10}{9}$

$\frac{10}{9}$ ∉ IN

Solução: { }

(c) $\frac{(\mathbf{n-1})!}{(\mathbf{n-3})!} = \mathbf{56}$

$\frac{(n-1)\bullet(n-2)\bullet\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = 56$

$(n-1)\bullet(n-2) = 56$

$n^2 - 2n - n + 2 = 56$

$n^2 - 3n - 54 = 0$

a = 1; b = – 3; c = –54

$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4\bullet1\bullet(-54)}}{2\bullet1} =$

$= \frac{3 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{3 \pm 15}{2}$

$n_1 = \frac{3-15}{2} \vee n_2 = \frac{3+15}{2}$

$n_1 = \frac{-12}{2} \vee n_2 = \frac{18}{2}$

$n_1 = -6 \vee n_2 = 9$

−6 ∉ IN, e 9 ∈ IN

Solução: {9}

(d) $\frac{(\mathbf{n+1})!}{(\mathbf{n-1})!} = \mathbf{12}$

$\frac{(n+1)\bullet n\bullet\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 12$

$(n+1)\bullet n = 12$

$n^2 + n - 12 = 0$

a = 1; b = 1; c = – 12

$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\bullet1\bullet(-12)}}{2\bullet1} =$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$

$n_1 = \frac{-1-7}{2} \vee n_2 = \frac{-1+7}{2}$

$n_1 = \frac{-8}{2} \vee n_2 = \frac{6}{2}$

$n_1 = -4 \vee n_2 = 3$

−4 ∉ IN, e 3∈ IN

Solução: {3}

2.5. ARRANJOS SEM REPITIÇÃO

Definição: Chama-se, *arranjos sem repetição de n elementos agrupados (tomados) p a p, ao número de grupos que se pode formar com p dos n elementos dados, diferindo uns dos outros pela natureza, quer pela ordem, dos seus elementos.* **A sua notação pode ser: A_p^n, ^nA_p e $A_{n,\,p}$.**

• $A_2^4 \Rightarrow n = 4$ e $p = 2$ • $A_4^7 \Rightarrow n = 7$ e $p = 4$ • $A_8^8 \Rightarrow n = 8$ e $p = 8$ • $A_1^6 \Rightarrow n = 6$ e $p = 1$

Fórmula geral dos arranjos sem repetição

$$\boxed{A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{com } 0 < p \leq n, \quad p, n \in IN}$$

(Está é a formula para o cálculo de arranjos simples em expressões factoriais)

Observação:

Na definição de arranjos sem repetição falamos de grupos que se diferem pela natureza e grupos que se diferem pela ordem dos seus elementos. Para exemplificarmos os grupos (123), (132), (321) e (231) diferem apenas pela ordem (todos os elementos são os mesmos), visto que, o sentido ou a leitura do grupo é diferente quando há troca da posição dos elementos, enquanto os grupos (123), (124), (325) e (789) diferem pela natureza (pelo menos um dos elementos não o mesmo). Estas duas características são fundamentais para chamarmos um agrupamento de arranjos sem repetição.

2.5.1. Cálculo de arranjos sem repetição

(a) $A_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \bullet 5 \bullet \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30;$

(b) $A_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 2520;$

(c) $A_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336;$

(d) $A_4^9 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9 \bullet 8 \bullet 7 6 \bullet \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 3024;$

(e) $A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 120;$

Podemos calcular os arranjos sem repetição de n elementos agrupados p a p, utilizando a máquina calculadora científica, através das teclas **SHIFIT** e **nPr**. Vamos calcular os arranjos sem repetição dos exemplos anteriores:

(a) A_2^6 Digita: 6 + SHIFIT + nPr + 2 + =, a calculadora vai visualizar 6P2 = 30;

(b) A_5^7 Digita: 7 + SHIFIT + nPr + 5 + =, a calculadora vai visualizar 7P5 = 2520;

(c) A_3^8 Digita: 8 + SHIFIT + nPr + 3 + =, a calculadora vai visualizar 8P3 = 336;

(d) A_4^9 Digita: 9 + SHIFIT + nPr + 4 + =, a calculadora vai visualizar 9P4 = 3024;

(e) A_5^5 Digita: 5 + SHIFIT + nPr + 5 + =, a calculadora vai visualizar 5P5 = 120;

2.5.2. Resolução de problemas da vida real, aplicando arranjos sem repetição

Problema 1: Com os algarismos do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}. **Quantos números de 3 algarismos diferentes podemos escrever?**

Resolução:

Todas vezes que resolvermos questões de problemas, precisamos esquematizar a essência daquilo que entendemos, isso facilitará como resolvê-los. Neste problema podemos analisar assim, escolher alguns números possíveis, (123), (345), (324), (231), (542), (254), (543), …, nestes grupos de números podemos verificar a existência de duas características fundamentais de arranjos:

- Os grupos (123), (345), (324) e (542) diferem pela natureza, visto que, pelo menos um dos elementos é diferente;

- os grupos (123) e (231), (345) e (543), (542) e (254), …, diferem pela ordem, visto que, a interpretação do grupo é diferente mesmo haja troca da posição dos elementos;

Depois de analisar e esquematizar, podemos concluir que, trata-se de arranjos de 5 elementos agrupados 3 a 3, logo: $\mathbf{A_3^5 = 60}$**;**

Resposta: São 60 números de 3 algarismos diferentes que podemos escrever com conjunto A.

Problema 2: Numa prova de velocidade participaram 8 corredores. **Quantos são os resultados possíveis para 3 lugares?**

Resolução:

Para melhor interpretação, a sequência do grupo (EJM) representa respectivamente por, **E**liézer – 1ºlugar, **J**onas – 2ºlugar e **M**arta – 3ºlugar. Entretanto, verifica – se a existência de duas características fundamentais de arranjos, como podemos indicar:

- os grupos* (EJM), (IME), (TDA), (ASM), …, *diferem pela natureza, visto que, pelo menos um dos elementos é diferente;

- os grupos* (EJM) e (MJE), (TDA) e (DTA), (ASM) e (MSA) …, *diferem pela ordem, visto que, a interpretação do grupo é diferente mesmo haja troca da posição dos elementos;

Depois de analisar e esquematizar, podemos concluir que, trata-se de arranjos de 8 elementos agrupados 3 a 3, logo: $\mathbf{A_3^8 = 336}$**;**

Resposta: São 336 resultados possíveis para os três lugares;

Problema 3: Um eleitor deve eleger 7 candidatos, um presidente, um secretário, um tesoureiro e um assistente para autarquia local. **De quantas maneiras diferentes pode se fazer a escolha da comissão?**

Resolução:

Sejam os candidatos: Manuel, Rui, Amara, Júlia, Beth, Elton e Yuran, os nomes escolhidos têm letras iniciais diferentes, vejamos alguns resultados possíveis para os 4 lugares: (AMRB), (RBEJ), (BRAM), (YEJB), (JEBY), (MBRA), (EAMY), ... etc.

Para melhor interpretação, a sequência do grupo (AMRJ) representa respectivamente por, **A**mara – Presidente, **M**anuel – Secretário, **R**ui - Tesoureiro e **B**eth – Assistente. Entretanto, verifica – se a existência de duas características fundamentais de arranjos, como podemos indicar:

- os grupos* (AMRB), (RBEJ), (EAMY), …, *diferem pela natureza, visto que, pelo menos um dos elementos é diferente:

- os grupos* (AMRB) e (BRAM), (YEJB) e (JEBY), …, *diferem pela ordem, visto que, a interpretação do grupo é diferente mesmo haja troca da posição dos elementos;

Depois de analisar e esquematizar, podemos concluir que, trata-se de arranjos de 7 elementos agrupados 4 a 4, logo: $\mathbf{A_4^7 = 840}$.

Resposta: São 840 maneiras diferentes que se pode se fazer a escolha da comissão.

2.6. PERMUTAÇÕES DE n ELEMENTOS

Definição: Permutações de n elementos são arranjos de n elementos agrupados n a n, simbolicamente escreve – se P_n.

• $\mathbf{P_4 \Rightarrow n = 4}$ • $\mathbf{P_7 \Rightarrow n = 7}$ • $\mathbf{P_8 \Rightarrow n = 8}$ • $\mathbf{P_1 \Rightarrow n = 1}$

Fórmula geral dos das Permutações

$$\boxed{P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!} \quad \text{ou simplesmente} \quad \boxed{P_n = n!}$$

(Está é a formula para o cálculo de permutações em expressões factoriais)

2.6.1. Cálculo das Permutações

(a) $P_4 = 4! = 4•3•2•1 = 24$:

(b) $P_5 - P_3 = 5! - 3! = 5•4•3•2•1 - 3•2•1 = 120 - 6 = 114$;

(c) $3P_6 = 3•6•5•4•3•2•1 = 3•720 = 2160$;

(d) $\frac{P_7•P_2}{P_7 - P_2} = \frac{7!•2!}{7! - 2!} = \frac{7•6•5•4•3•2•1•2•1}{7•6•5•4•3•2•1 - 2•1} = \frac{10080}{5038} = \frac{5040}{2519}$;

2.6.2. Resolução de problemas da vida real, aplicando Permutações

Problema 1: De quantas maneiras diferentes 5 pessoas podem sentar num banco?

Resolução:

Representemos as 5 pessoas pelas letras ABCDE, assim temos algumas possibilidades: (ABCDE), (BACDE), (EDACB), (BDCEA), … vê-se que, há troca de posições de 5 elementos, então trata-se de permutações de 5 elementos.

$\mathbf{P_5 = 5! = 120;}$

Resposta: São 120 maneiras diferentes que 5 pessoas podem sentar num banco;

Problema 2: De quantas maneiras diferentes 4 pessoas podem posicionar para uma sessão fotográfica?

Resolução: Representemos as 5 pessoas pelas letras ABCD, assim temos algumas possibilidades: (ABCD), (BACD), (EDCB), (DCEA), …vê-se que, há troca de posições de 4 elementos, então trata-se de permutações de 4 elementos.

$\mathbf{P_4 = 4! = 24;}$

Resposta: São 24 maneiras diferentes que 4 pessoas podem posicionar para uma sessão fotográfica;

Problema 3: Com a palavra MAPUTO. Resolve as questões que se seguem:

(a) Quantos anagramas[1] podemos escrever?

Resolução:

Alguns anagramas possíveis (AMPUTO), (TOMAPU), (AMUOTP), (PMUATO), (MUOATP), …, vê-se que, há troca de posições de 6 elementos, então trata-se de permutações de 6 elementos;

$\mathbf{P_6 = 6! = 720;}$

Resposta: Podemos escrever 720 anagramas com a palavra MAPUTO;

(b) Quantos anagramas podemos escrever, que começam com a letra M?

Resolução:

Alguns anagramas possíveis (**M**PUTOA), (**M**TOAPU), (**M**AUOTP), (**M**PUATO), (**M**UOATP), …, vê-se que, há troca de posições de 5 elementos, então trata-se de permutações de 5 elementos.

$\mathbf{P_5 = 5! = 120;}$

Resposta: Podemos escrever 120 anagramas com a palavra MAPUTO, que começam com a letra M;

---

[1] Anagramas são palavras formadas pela transposição (troca ou mudança) das letras de uma palavra, com ou sem sentido:

(c) Quantos anagramas podemos escrever, que começam com a letra P e terminam com O?

Resolução:

Alguns anagramas possíveis (**P**UTAM**O**), (**P**MTAU**O**), (**P**MAUT**O**), (**P**MUAT**O**), …, vê-se que, há troca de posições de 4 elementos, então trata-se de permutações de 4 elementos;

$\mathbf{P_4 = 4! = 24;}$

Resposta: Podemos escrever 24 anagramas com a palavra MAPUTO, que começam com a letra P e terminam com O;

(d) Quantos anagramas podemos escrever, com M e A juntos?

Resolução:

Alguns anagramas possíveis (PUTO**MA**), (**AM**TOPU), (**MA**OUTP), (PU**MA**TO), (UO**AM**TP) …, vê-se que:

- Na ordem de **MA**, há permutações de 5 elementos, entao:$\mathbf{P_5 = 5! = 120;}$

- Na ordem de **MA**, também há permutações de 5 elementos, entao:$\mathbf{P_5 = 5! = 120;}$

Somando temos 240 anagramas;

ou

- **MA** ou **AM** há troca de duas letras, trata – se de permutações de 2 elementos: $\mathbf{P_2 = 2! = 2;}$

- **MA** ou **AM** juntou ficando uma letra só, neste caso, há permutações de 5 elementos, então: $\mathbf{P_5 = 5! = 120;}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{P_2 = 2! = 2} \\ \mathbf{P_5 = 5! = 120} \end{array}\right\} \quad \mathbf{P_2 \bullet P_5 = 2! \bullet 5! = 2 \bullet 120 = 240}$$

Resposta: Podemos escrever 240 anagramas com a palavra MAPUTO, com M e A juntos;

2.7. COMBINAÇÕES

Definição: Chama-se, *combinações de n elementos agrupados (tomados) p a p, ao número de grupos que se pode formar com p dos n elementos dados, diferindo uns dos outros pela natureza, dos seus elementos.* **A sua notação pode ser:**

$\mathbf{C_p^n}$, $\mathbf{{}^nC_p}$, $\mathbf{C_{n,\,p}}$ e $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p}}$.

$\bullet\ \mathbf{C_4^7 \Rightarrow n = 7 \text{ e } p = 4}$ $\quad \bullet\ \mathbf{C_3^{10} \Rightarrow n = 10 \text{ e } p = 3}$ $\quad \bullet\ \mathbf{C_6^{12} \Rightarrow n = 12 \text{ e } p = 6}$ $\quad \bullet\ \mathbf{C_1^5 \Rightarrow n = 5 \text{ e } p = 1}$

Fórmula geral das combinações

$$\boxed{\mathbf{C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \bullet p!} \text{com } 0 < p \leq n, \quad p, n \in IN}}$$

(Está é a formula para o cálculo de combinações em expressões factoriais)

Observação:

Na definição de *combinações* falamos de grupos que se diferem pela natureza e não grupos que se diferem pela ordem dos seus elementos. Para exemplificarmos imaginemos os seguintes nomes Eliézer, Domingos, Jonas, Marta e Isaque, queremos escolher 3 pessoas para organizar uma festa, afirmar que Jonas, Eliézer e Isaque irão organizar a festa, equivale afirmar, Eliézer, Isaque, Jonas, tanto Isaque, Eliézer e Jonas irão organizar a festa, isto quer dizer que, a diferença pela ordem não faz sentido quando se trata das combinações, os elementos só pode diferirem pela natureza pelo menos um dos elementos não é o mesmo, é a características são fundamentais para chamarmos um agrupamento de combinações.

2.7.1. Cálculo das combinações

(a) $C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!\bullet 2!} = \frac{6!}{4!\bullet 2!} = \frac{6\bullet 5\bullet \cancel{4!}}{\cancel{4!}\bullet 2\bullet 1} = \frac{30}{2} = 15;$

(b) $C_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!\bullet 5!} = \frac{7!}{2!\bullet 5!} = \frac{7\bullet 6\bullet \cancel{5!}}{2\bullet 1\bullet \cancel{5!}} = \frac{42}{2} = 21;$

(c) $C_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!\bullet 3!} = \frac{8!}{5!\bullet 3!} = \frac{8\bullet 7\bullet 6\bullet \cancel{5!}}{\cancel{5!}\bullet 3\bullet 2\bullet 1} = \frac{336}{6} = 56;$

(d) $C_1^9 = \frac{9!}{(9-1)!\bullet 1!} = \frac{9!}{8!\bullet 1!} = \frac{9\bullet \cancel{8!}}{\cancel{8!}\bullet 1} = \frac{9}{1} = 9;$

(e) $C_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!\bullet 5!} = \frac{\cancel{5!}}{0!\bullet \cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1;$

Podemos calcular as combinações de n elementos agrupados p a p, utilizando a máquina calculadora científica, através das teclas **nCr**. Vamos calcular as combinações dos exemplos anteriores:

(a) C_2^6 Digita: 6 + nCr + 2 + =, a calculadora vai visualizar 6C2 = 15;

(b) C_5^7 Digita: 7 + nCr + 5 + =, a calculadora vai visualizar 7C5 = 21;

(c) C_3^8 Digita: 8 + nCr + 3 + =, a calculadora vai visualizar 8C3 = 56;

(d) C_1^9 Digita: 9 + nCr + 1 + =, a calculadora vai visualizar 9C1 = 9;

(e) C_5^5 Digita: 5 + nCr + 5 + =, a calculadora vai visualizar 5C5 = 1;

2.7.2. Propriedades das combinações

1ª Propriedades

$$\mathbf{C_p^n = C_{n-p}^n, \forall_{n,p \in IN}}$$

ou

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n-p}}, \forall_{\mathbf{n,p \in IN}}$$

Verificação:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{6-4}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$$

15 = 15

(Verdade)

2ª Propriedades

$$\mathbf{C_p^n = C_{p-1}^n + C_{p-1}^{n-1} \forall_{n,p \in IN}}$$

ou

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p-1}} + \binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{p-1}}, \forall_{\mathbf{n,p \in IN}}$$

Verificação:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n-1}{p-1}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{4-1} + \binom{6-1}{4-1}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{3} + \binom{5}{3}$$

15 = 5 + 10

15 = 15

(Verdade)

2.7.3. Resolução de problemas da vida real, aplicando Combinações

Problema 1: De um de 30 alunos de uma turma da escola comunitária santos inocentes, porem vai ser feita uma lista de 3 alunos para representar a turma no workshop de negócios em Dubai. **Quantas listas são possíveis de criar?**

Resolução:

Sejam alguns nomes dos alunos (Rosa, Francisco, Miguel, Geovana, Andreia, Tomé, José, Victor, …). Supondo os alunos escolhidos: (RTJ), (VMG), (GMV), (TRF), (AVR), (JTR), (RAV), …, etc;

- Os grupos (RTJ), (VMG), (TRF) e (AVR), diferem pela natureza, visto que, pelo menos um elemento no é o mesmo. Mas os grupos (AVR) e (RAV), são os mesmos elementos, ou seja dizer que Andreia, Victor e Rosa irão representar a turma é o mesmo dizer que Rosa, Andreia e Victor irão representar a turma, a troca de posição não muda o sentido do grupo. Depois de analisar e esquematizar podemos concluir que, trata-se de combinações de 30 elementos agrupados 3 a 3, logo: $\mathbf{C_3^{30} = 4060}$**;**

Resposta: São 4060 listas que podem se fazer a escolha;

Problema 2: Uma turma da 12ª classe quer eleger entre 10 alunos uma comissão de 4 alunos para organizar excursão na praia de Njalane. **Quantas maneiras diferentes podem ser feita a escolha da comissão?**

Resolução:

Sejam nomes dos alunos (Rosa, Francisco, Miguel, Geovana, Andreia, Tomé, José, Victor, Quitéria, Sónia). Supondo os alunos escolhidos: (RTJV), (VMFG), (GMV), (TVRF), (AQVR), (JVTR), (RAVQ), …, etc;

- Os grupos (RTJV), (VMFG), (TGMV), (VTRF) e (AVRQ), diferem pela natureza, visto que, pelo menos um elemento no é o mesmo. Mas os grupos (AQVR) e (RAVQ), são os mesmos elementos, ou seja dizer que Andreia, Quitéria, Victor e Rosa irão representar a turma é o mesmo dizer que Rosa, Andreia, Victor e Quitéria, irão representar a turma, a troca de posição não muda o sentido do grupo. Depois de analisar e esquematizar podemos concluir que, trata-se de combinações de 10 elementos agrupados 4 a 4, logo: $\mathbf{C_4^{10} = 210}$**;**

Resposta: São 210 maneiras diferente que pode se fazer a escolha da comissão;

2.8. TRIÂNGULO DE PASCAL

Coloquemos os números $\mathbf{C_p^n}$ em sucessivas linhas formando um triângulo equilátero:

1ª linha: n = 0	1	C_0^0
2ª linha: n = 1	1 1	$C_0^1 \quad C_1^1$
3ª linha: n = 2	1 2 1	$C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2$
4ª linha: n = 3	1 3 3 1	$C_0^3 \quad C_1^3 \quad C_2^3 \quad C_3^3$
5ª linha: n = 4	1 4 6 4 1	$C_0^4 \quad C_1^4 \quad C_2^4 \quad C_3^4 \quad C_4^4$
6ª linha: n = 5	1 5 10 10 5 1	$C_0^5 \quad C_1^5 \quad C_2^5 \quad C_3^5 \quad C_4^5 \quad C_5^5$
…	… … … … … …	… … … … … … …. …

Observações importantes sobre triângulo de Pascal

1ª: Em cada linha do triângulo, o primeiro elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha o primeiro elemento é $\mathbf{C_0^n = 1, \forall_{n \in IN};}$

2ª: Em cada linha do triângulo, o ultimo elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha o ultimo elemento é $\mathbf{C_n^n = 1, \forall_{n \in IN};}$

3ª: A partir da 3ªlinha do triângulo cada elemento (com excepção do primeiro e ultimo elemento) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele ou seja: $\mathbf{C_p^n = C_{p-1}^n + C_{p-1}^{n-1}, \forall_{n,p \in IN};}$

4ª: Em cada linha do triângulo, os elementos equidistantes dos extremos são iguais, ou seja: $\mathbf{C_p^n = C_{n-p}^n, \forall_{n,p \in IN};}$

2.8.1. SOMA DOS ELEMENTOS DA LINHA DO TRIÂNGULO DE PASCAL

Observe:

1ª linha: n = 0	1	**1 ……………………………………..…..…1 = 2^0**
2ª linha: n = 1	1 1	**1 + 1 …………………………………….2 = 2^1**
3ª linha: n = 2	1 2 1	**1 + 2 + 1 ……………………………..…..4 = 2^2**
4ª linha: n = 3	1 3 3 1	**1 + 3 + 3 + 1 ……………….........8 = 2^3**
5ª linha: n = 4	1 4 6 4 1	**1 + 4 + 6 + 4 + 1 ……………....16 = 2^4**
6ª linha: n = 5	1 5 10 10 5 1	**1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1……….32 = 2^5**
…	… … … … … …	**… … …. … … … … … … …**

Podemos concluir que:

$$\mathbf{C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + C_4^n + C_5^n + \ldots + C_n^n = \sum_{p=0}^{n} C_p^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = = 2^n, \forall_{n,p \in IN}.}$$

2.9. BINÓMIO DE NEWTON

Observe o desenvolvimento destes binómios para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, mais conhecidos por casos notáveis:

- $(x + y)^0 = 1$;
- $(x + y)^1 = C_0^1 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 = 1 \bullet x + 1 \bullet y = x + y$;
- $(x + y)^2 = C_0^2 x^2 y^0 + C_1^2 x^1 y^1 + C_2^2 x^0 y^2 = 1 \bullet x^2 y^0 + 2 \bullet xy + 1 \bullet y^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
- $(x + y)^3 = C_0^3 x^3 y^0 + C_1^3 x^2 y^1 + C_2^3 x^1 y^2 + C_3^3 x^0 y^3 = 1 \bullet x^3 y^0 + 3 \bullet x^2 y^1 + 3 \bullet x^1 y^2 + 1 \bullet x^0 y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^n$ = como será o desenvolvimento?

Depois desta constatação e pelo triangulo de Pascal anterior, podemos escrever os coeficientes de cada desenvolvimentos de $(x + y)^n$. A fórmula geral do binómio de newton é:

$$\mathbf{(x + y)^n = C_0^n \bullet x^{n-0} \bullet y^0 + C_1^n \bullet x^{n-1} \bullet y^1 + C_2^n \bullet x^{n-2} \bullet y^2 + C_3^n \bullet x^{n-3} \bullet y^3 + \ldots + C_n^n \bullet x^{n-n} \bullet y^n}$$

ou

$$\mathbf{(x + y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p}$$

- $\sum$ - é o símbolo de somatório

<u>Observações importantes sobre binómio de Newton</u>

1ª: Os expoentes de x decrescem desde n até zero, simultaneamente os expoentes de y crescem desde zero ate n;

2ª: O desenvolvimento de $(x + y)^n$ tem um termo do que o grau de binómio, isto é, n + 1 termos;

3ª: Os coeficientes do desenvolvimento do binómio de Newton são números inteiros e designam – se por coeficientes binomiais;

4ª: Coeficientes binomiais dos termos equidistantes dos extremos são iguais, isto é, $\mathbf{C_p^n = C_{n-p}^n,\ \forall_{n,p \in IN}}$;

Exemplo 1: Desenvolver os seguintes binómios:

(a) $(3x + 2)^4$

$$(3x + 2)^4 = \sum_{p=0}^{4} C_p^4 \bullet (3x)^{4-p} \bullet 2^p$$

$= C_0^4 \bullet (3x)^{4-0} \bullet 2^0 + C_1^4 \bullet (3x)^{4-1} \bullet 2^1 + C_2^4 \bullet (3x)^{4-2} \bullet 2^2 + C_3^4 \bullet (3x)^{4-3} \bullet 2^3 + C_4^4 \bullet (3x)^{4-4} \bullet 2^4$

$= 1 \bullet (3x)^4 \bullet 1 + 4 \bullet (3x)^3 \bullet 2 + 6 \bullet (3x)^2 \bullet 4 + 4 \bullet (3x)^1 \bullet 8 + 1 \bullet (3x)^0 \bullet 16$

$\boxed{= 81x^4 + 216x^3 + 144x^2 + 96x + 16}$

(b) $(2x-4)^5$

$$(2x-4)^5 = \sum_{p=0}^{5} C_p^5 \bullet (2x)^{5-p} \bullet (-4)^p$$

$$= C_0^5 \bullet (2x)^{5-0} \bullet (-4)^0 + C_1^5 \bullet (2x)^{5-1} \bullet (-4)^1 + C_2^5 \bullet (2x)^{5-2} \bullet (-4)^2 + C_3^5 \bullet (2x)^{5-3} \bullet (-4)^3 + C_4^5 \bullet (2x)^{5-4} \bullet (-4)^4 + C_5^5 \bullet (2x)^{5-5} \bullet (-4)^5$$

$$= 1 \bullet (2x)^5 \bullet 1 + 5 \bullet (2x)^4 \bullet (-4) + 10 \bullet (2x)^3 \bullet 16 + 10 \bullet (2x)^2 \bullet (-64) + 5 \bullet 2x \bullet 256 + 1 \bullet 1 \bullet (-1024)$$

$$\boxed{= 32x^5 - 3200x^4 + 1280x^3 - 2560x^2 + 1280x - 1024}$$

(c) $(\frac{1}{x} - 2x)^3$

$$(\frac{1}{x} - 2x)^3 = \sum_{p=0}^{3} C_p^3 \bullet (\frac{1}{x})^{3-p} \bullet (-2x)^p$$

$$= C_0^3 \bullet (\frac{1}{x})^{3-0} \bullet (-2x)^0 + C_1^3 \bullet (\frac{1}{x})^{3-1} \bullet (-2x)^1 + C_2^3 \bullet (\frac{1}{x})^{3-2} \bullet (-2x)^2 + C_3^3 \bullet (\frac{1}{x})^{3-3} \bullet (-2x)^3$$

$$= 1 \bullet \left(\frac{1}{x}\right)^3 \bullet 1 + 3 \bullet \left(\frac{1}{x}\right)^2 \bullet (-2x) + 3 \bullet \frac{1}{x} \bullet 4x + 1 \bullet 1 \bullet (-8x^3)$$

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{6\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} + \frac{12\cancel{x}}{\cancel{x}} - 8x^3$$

$$= \boxed{\frac{1}{x^3} - \frac{6}{x} + 12 - 8x^3}$$

2.9.1. Termo geral do binómio de Newton

Termo geral do binómio: é uma expressão que nos permite determinar qualquer termo do binómio, sem recorrermos ao seu desenvolvimento. Em geral para qualquer termo p+1 será dado por:

$$\boxed{T_{p+1} = C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p}$$

A sequência dos coeficientes binomiais para um dado valor de n é crescente ate certa ordem e decresce depois dela. O valor máximo de **p** é atingido para: $\begin{cases} p = \frac{n-1}{2} \text{ ou } p = \frac{n+1}{2}, \text{se n é ímpar;} \\ p = \frac{n}{2}, \text{se n é par;} \end{cases}$

Exemplo 1: Dada a expressão $(2x-3)^5$. Determine:

(a) O quinto termo do binómio

$p + 1 = 5$

$p = 5 - 1$

$p = 4$

$T_{p+1} = C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p$

$T_5 = C_4^5 \bullet (2x)^{5-4} \bullet (-3)^4$

$T_5 = 5 \bullet 2x \bullet 81$

$T_5 = 810x$

(b) O segundo termo do binómio

$\mathbf{p + 1 = 2}$

$\mathbf{p = 2 - 1}$

$\mathbf{p = 1}$

$\mathbf{T_{p+1} = C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p}$

$\mathbf{T_2 = C_1^5 \bullet (2x)^{5-1} \bullet (-3)^1}$

$\mathbf{T_2 = 5 \bullet (2x)^4 \bullet (-3)}$

$\mathbf{T_2 = 5 \bullet 16 \bullet x^4 \bullet (-3)}$

$\mathbf{T_2 = -240x^4}$

(c) O termo de maior coeficiente

Sendo n ímpar, temos:

$$p = \frac{n - 1}{2} \text{ ou } p = \frac{n + 1}{2}$$

$$p = \frac{5 - 1}{2} \text{ ou } p = \frac{5 + 1}{2}$$

$$p = \frac{4}{2} \text{ ou } p = \frac{6}{2}$$

$$p = 2 \text{ ou } p = 3$$

(Quer dizer, são dois termos de maior coeficiente, que são: $\mathbf{T_3}$ e $\mathbf{T_4}$)

Somente vamos determinar o quarto termo

$\mathbf{T_{p+1} = C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p}$

$\mathbf{T_4 = C_3^5 \bullet (2x)^{5-3} \bullet (-3)^3}$

$\mathbf{T_4 = 10 \bullet (2x)^2 \bullet (-27)}$

$\mathbf{T_4 = 5 \bullet 4 \bullet x^2 \bullet (-27)}$

$\mathbf{T_4 = -1080x^2}$

(d) O termo central do binómio

R: Quando n é ímpar, o binómio não possui o termo central;

(e) O termo independente do binómio

- Podemos desenvolver todo o binómio e identificar o termo independente, mas podemos encontrar de uma maneira mais breve, basta escrever todo o termo geral e igualar a zero o expoente de x, ora vejamos:

$T_{p+1} = C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p$

$T_{p+1} = C_p^5 \bullet (2x)^{5-p} \bullet (-3)^p$

(igualando a zero o expoente de x)

$5 - p = 0$

$-p = -5$

$p = 5$

Vamos substituir **o p** por **5**, na expressão:

$T_{p+1} = C_p^5 \bullet (2x)^{5-p} \bullet (-3)^p$, assim temos:

$T_{p+1} = C_p^5 \bullet (2x)^{5-p} \bullet (-3)^p$

$T_{5+1} = C_5^5 \bullet (2x)^{5-5} \bullet (-3)^5$

$T_6 = 1 \bullet (2x)^0 \bullet (-243)$

$T_6 = 1 \bullet 1 \bullet (-243)$

$T_6 = -243$

Exemplo 2: Dada a expressão $(x + \frac{3}{x^2})^6$.

(a) Desenvolver o binómio

$$(x + \frac{3}{x^2})^6 = \sum_{p=0}^{6} C_p^6 \bullet x^{6-p} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^p$$

$$= C_0^6 \bullet x^{6-0} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^0 + C_1^6 \bullet x^{6-1} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^1 + C_2^6 \bullet x^{6-2} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 + C_3^6 \bullet x^{6-3} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^3 + C_4^6 \bullet x^{6-4} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^4 +$$

$$+ C_5^6 \bullet x^{6-5} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^5 + C_6^6 \bullet x^{6-6} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^6$$

$$= 1 \bullet x^6 \bullet 1 + 6 \bullet x^5 \bullet \frac{3}{x^2} + 15 \bullet x^4 \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 + 20 \bullet x^3 \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^3 + 15 \bullet x^2 \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^4 + 6 \bullet x \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^5 + 1 \bullet x^0 \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^6$$

$$= x^6 + \frac{18\cancel{x^5}}{\cancel{x^2}} + 15 \bullet \cancel{x^4} \bullet \frac{9}{\cancel{x^4}} + 20 \bullet \cancel{x^3} \bullet \frac{27}{\cancel{x^6}} + 15 \bullet \cancel{x^2} \bullet \frac{81}{\cancel{x^8}} + 6 \bullet \cancel{x} \bullet \frac{243}{\cancel{x^{10}}} + 1 \bullet 1 \bullet \frac{729}{x^{12}}$$

$$= \boxed{x^6 + 18x^3 + 135 + \frac{540}{x^3} + \frac{1215}{x^6} + \frac{1458}{x^9} + \frac{729}{x^{12}}}$$

(b) O quinto termo do binómio

$\mathbf{p + 1 = 5}$

$\mathbf{p = 5 - 1}$

$\mathbf{p = 4}$

$T_{p+1} = C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p$

$T_4 = C_4^6 \bullet x^{6-4} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^4$

$T_4 = 15 \bullet \cancel{x^2} \bullet \frac{81}{\cancel{x^8}}$

$T_4 = \frac{1215}{x^6}$

(c) O termo independente do binómio

- Podemos desenvolver todo o binómio e identificar o termo independente, mas podemos encontrar de uma maneira mais breve, basta escrever todo o termo geral e igualar a zero o expoente de x, ora vejamos:

$T_{p+1} = C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p$

$T_{p+1} = C_p^6 \bullet x^{6-p} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^p$

$T_{p+1} = C_p^6 \bullet x^{6-p} \bullet x^{-2p} \bullet 3^p$

$T_{p+1} = C_p^6 \bullet x^{6-3p} \bullet 3^p$

(igualando a zero o expoente de x)

$6 - 3p = 0$

$-3p = -6$

$p = \frac{-6}{-2}$

$p = 2$

Vamos substituir o p por 2, na expressão:

$T_{p+1} = C_p^6 \bullet x^{6-3p} \bullet 3^p$, assim temos:

$T_{p+1} = C_p^6 \bullet x^{6-3p} \bullet 3^p$

$T_3 = C_2^6 \bullet x^{6-3\bullet 2} \bullet 3^2$

$T_3 = 15 \bullet 1 \bullet 9$

$T_3 = 135$

(d) O termo central do binómio

colocando os termos em ordem, vê-se que se trata-se do quarto trmo:

$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad \boxed{T_4} \quad T_5, \quad T_6, \quad T_7$

$p + 1 = 4$

$p = 4 - 1$

$p = 3$

$$T_{p+1} = C_p^n \bullet x^{n-p} \bullet y^p$$

$$T_4 = C_3^6 \bullet x^{6-3} \bullet \left(\frac{3}{x^2}\right)^3$$

$$T_4 = 20 \bullet \cancel{x^3} \bullet \frac{27}{\cancel{x^6}}$$

$$T_4 = \frac{540}{x^3}$$

2.10. INTRODUÇÃO Á PROBABILIDADE

2.10. 1. BREVE HISTORIAL DA PROBABILIDADE

O interesse do homem em estudar os fenómenos que envolviam determinadas possibilidades fez surgir a Probabilidade. Alguns indícios alegam que o surgimento da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar disseminados na Idade Média. Esse tipo de jogo é comum praticado através de apostas, na ocasião também era utilizado no intuito de antecipar o futuro. O Ramo da Matemática que visa a formulação de modelos teóricos, abstractos, para o tratamento matemático da ocorrência (ou não ocorrência) de fenómenos aleatórios, pode caracterizar-se como a Matemática do acaso, da incerteza. O importante e fascinante assunto das probabilidades teve as suas origens no século XVII através de esforços de matemáticos como Fermat e Pascal. É certo que o italiano Jerónimo Cardano (1501-1576) escreveu um trabalho notável sobre probabilidades, "***Livros sobre jogos de azar***". Entretanto, no século XX que se desenvolveu uma teoria matemática rigorosa, baseada em axiomas, definições e teoremas. Kolmogorov propôs uma axiomática completa e consistente do cálculo de probabilidades. Os alicerces da teoria do cálculo das probabilidades e da análise combinatória foram estabelecidos por Pascal e Fermat, as situações relacionando apostas no jogo de dados levantaram diversas hipóteses envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades como ciências. Actualmente, os estudos relacionados às probabilidades são utilizados em diversas situações, pois possuem axiomas, teoremas e definições bem contundentes.

2.10.2. EXPERIMENTO OU FENOMENOS ALEATORIOS

Encontramos na natureza dois tipos de fenómenos: **fenómenos determinísticos** e **aleatórios**. Os fenómenos determinísticos são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de vezes de ocorrência verificadas. Nos fenómenos aleatórios, os resultados não são previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenómeno. Por exemplo, se considerarmos um pomar com centenas de laranjeiras, as produções de cada planta serão diferentes e não previsíveis, mesmo que as condições de temperatura, pressão, humidade, solo, etc. Sejam as mesmas para todas as árvores. Experimentos ou fenómenos aleatórios são aqueles que, mesmo repetido varia vezes sob condições semelhantes apresentam resultados imprevisíveis.

"*Chamam-se* ***experimentos ou fenómenos aleatórios*** *ao processo de observações ou de acção cujos resultados, embora podendo ser descrito no seu conjunto, não são determináveis a priori, antes de realização da experiencia e a sua realização dependente inteiramente do acaso*"

Um experimento aleatório tem as seguintes características:

- Possibilidade de repetição do experimento em condições similar;
- Não se pode dizer a partida qual o resultado do experimento a se realizar;
- A existência de regularidades quando o experimento é repetidos muitas vezes;

Exemplos de alguns fenómenos aleatórios:

(a) Lançar uma moeda, ao ar, e verificar a face voltada para cima quando a moeda já estiver no chão;

(b) Lançar duas moedas ao ar, e verificar a face de cima;

(c) Lançar um dado de seis faces e verificar a face voltada para cima;

(d) De uma caixa contendo três bolas vermelhas e duas brancas, seleccionar uma bola e observar a sua cor;

(e) De um baralho de 52 cartas, seleccionar uma carta, e observar o seu naipe[2] e grafe[3];

2.10.3. ESPAÇO DE ACONTCIMENTO OU ESPAÇO AMOSTRAL

"*Chama-se* ***espaço amostral*** *ao conjunto de todos os resultados possíveis de um certo experimento aleatório e representa-se por S ou Ω*".

Exemplo1: Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;

Seja: C – cara e K – Coroa, logo espaço amostral é: S = {C, K}

Exemplo2: Lançar uma moeda duas vezes e observar a sequencia de caras e coroas;

Seja: C – cara e K – Coroa, logo espaço amostral é: S = {(CC), (CK), (KC), (KK)}

Exemplo3: Lançar um dado de 6 face e observar o número da face de cima;

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

---

[2] Sinal gráfico pelo qual se destingue cada um dos quartos grupos de cartas de um baralho: Espada, Copas, Florinha e Ouro;
[3] Sinal gráfico pelo qual se destingue cada um dos quartos grupos de cartas de um baralho: Ás, Dois, Três, Quatro, ..., Rei;

Exemplo4: Lançar um dado de 6 face e observar o número par da face de cima;

S = {2, 4, 6}

2.10.4. ACONTECIMENTO OU EVENTO

Chamamos **acontecimento** ou **evento** a qualquer subconjunto de espaço amostral. Os acontecimentos ou eventos são geralmente representados pelas letras maiúsculas do nosso alfabeto, isto é, A, B, C, D, …, X e Z.

Exemplo 1: No lançamento de uma moeda. Apenas pode verificar-se dois resultados distintos, cara ou coroa.

Espaço amostral: S = {Cara, Coroa}

1. Sair cara no lançamento de moeda é um acontecimento, assim podemos representar esse acontecimento, assim: **A: Sair cara;**

2. 1. Sair coroa no lançamento de moeda é um acontecimento, assim podemos representar esse acontecimento, assim: A**: Sair coroa;**

Exemplo 2: Um dado de seis faces é lançado e observa-se o número da face de cima

Espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Assim temos alguns acontecimentos

1. A: Sair um número impar;

$A = \{1, 3, 5\} \Rightarrow \#A = 3;$

2. B: Sair um número primo;

$A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow \#B = 3;$

3. C: Sair um número menor que 4;

$A = \{1, 2, 3,\} \Rightarrow \#C = 3;$

4. D: Sair um número menor que 7;

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \#D = 6;$

5. E: Sair um número maior ou igual a 5;

$A = \{5, 6\} \Rightarrow \#E = 2;$

2.10.5. OPERAÇOES COM ACONTECIMENTOS

1. Acontecimento contrário: *"O acontecimento contrario de A é o acontecimento que consiste em não verificação de A. Isto é, é o conjunto complementar de A. O acontecimento contrário de A designa-se* $\bar{A}$ *ou* A^c*"*.

Exemplo: A: Sair cara no lançamento de uma moeda $\quad$ $\bar{\mathbf{A}}$: Sair coroa no lançamento de uma moeda

2. Acontecimento união: "*O acontecimento reunião de dois acontecimento de A e B é acontecimento que consiste na realização de pelo menos um dos acontecimentos*". O acontecimento união A e B é o conjunto união de A e B. Representa-se por A∪B ou A+B.

Exemplo: A: Lançamento de um dado de seis faces, sair um número par, é um acontecimento união dos acontecimentos sair 2, sair 4, sair 6, isto é, **B: Sair 2, Sair, 4 D: Sair 6**.

A = {B}∪{C}∪{D} = {2}∪{4}∪{6}= {2, 4, 6}

3. Acontecimento intersecção: "*O acontecimento* **intersecção** *de dois acontecimentos de A e B é acontecimento que consiste na realização simultânea dos dois acontecimentos*". O acontecimento intersecção A e B, representa-se po A•B ou A∩B.

Exemplo: Lançamento de um dado de seis faces sair um número par {2, 4, 6}

B: Lançamento de um dado de seis faces sair um número primo {2, 3, 5}

C: Lançamento de um dado de seis faces sair um número par e primo {2}

Logo: C = A∩B = {2, 4, 6}∩{2, 3, 5} = {2}

4. Acontecimento certo: "*O acontecimento certo relativo a uma prova é aquele que se verifica sempre que se realiza a prova*"

Exemplo: A: No lançamento de um dado de seis faces de 1 a 6, sair um número menor que 7;

B: No lançamento de uma moeda, sair coroa ou cara;

5. Acontecimento impossível: "*O acontecimento impossível relativo a uma prova é aquele que nunca se verifica-se sempre que se realiza a prova*"

Exemplo: A: No lançamento de um dado de seis faces de 1 a 6, sair um número 7;

B: No lançamento de uma moeda, sair coroa e cara;

6. Acontecimentos disjuntos ou independentes ou mutuamente exclusivo ou incompatíveis: "*Dois acontecimentos A e B dizem-se disjuntos ou independentes ou mutuamente exclusivo ou incompatíveis quando a sua intersecção é acontecimento impossível, ou quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do facto de outro ter ou não ocorrido. Isto é, A e B são disjuntos ou independentes ou mutuamente exclusivo ou incompatíveis se* $A \cap B = \emptyset$"

Exemplo: A: Lançamento de um dado de seis faces sair um número par {2, 4, 6}

B: Lançamento de um dado de seis faces sair um ímpar {1, 3, 5}

Logo: $\mathbf{A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset}$

2.10.6. DIFERENTES CONCEITOS DE PROBABILIDADES

1. Definição frequêntista da probabilidade

Uma das definições de probabilidades utiliza a frequência relativa, já que as frequências relativas são estimativas de probabilidades. Podemos então definir a probabilidade como proporção (ou frequência relativa) em uma sequência muito grande de experimentos.

Se em **N** realizações a experiencia, o acontecimento **A** se verificou $\mathbf{f_a}$ vezes, diz-se que a frequência relativa de **A** nas realizações é $\mathbf{f(A) = \frac{f_a}{N}}$. Logo a probabilidade do acontecimento **A** será dada por:

$$\mathbf{P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A) \approx \frac{f_a}{N}}$$

Onde:

N – Número de realizações de uma experiência

$\mathbf{f_a}$ – Número de vezes se verificou ou seja a frequência absoluta do acontecimento

P(A) – Probabilidade do acontecimento A

Exemplo: Vamos determinar a frequência relativa do "***aparecimento do número 5, no lançamento de um dado numerado de 1 a 6***". Observa a tabela dos resultados experimentais:

Número de lançamento (N)	Frequência absoluta (f_a)	Frequência relativa (f_r)
99	20	$\mathbf{f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{20}{99} = 0{,}2020\ldots}$
200	42	$\mathbf{f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{42}{200} = 0{,}2100\ldots}$
500	87	$\mathbf{f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{87}{500} = 0{,}1740\ldots}$
800	157	$\mathbf{f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{157}{800} = 0{,}1962\ldots}$
1000	184	$\mathbf{f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{184}{1000} = 0{,}1840\ldots}$
1500	250	$\mathbf{f_r = \frac{f_a}{N} = \frac{250}{1500} = 0{,}1666\ldots}$
…	…	$\mathbf{f_r \approx 0{,}1666\ldots}$

A experiência constata que a frequência relativa se aproxima a $\mathbf{0{,}1666\ldots = \frac{1}{6}}$ a medida que aumenta o número de lançamento, isto é, as frequências relativas tendem a estabilizar-se a um determinado valor. A esta constatação que retiramos do exemplo leva-nos a enunciarmos conceito da probabilidade do seguinte modo "***Num grande número de provas, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se em torno de um número que coincide com a sua probabilidade***".

2. Definição axiomática[4] da probabilidade num espaço finito

A noção empírica de probabilidade ligada ao conceito de frequências relativas é inaceitável do ponto de vista de rigor matemático. Todavia, foi baseando-se na noção frequêntista KOLMOGOROV, em 1933, estabeleceu rigorosamente a axiomática da probabilidade.

Seja **S** um espaço amostral de acontecimento e **P(S)** o conjunto das suas partes, denomina-se probabilidade de uma aplicação de **P** de **P(S)** no conjunto [0, 1] de um números reais que obedecem aos seguintes axiomas:

1. $P(A) \in [0, 1]$ ou $0 \leq P(A) \leq 1$, isto é, a probabilidade de um acontecimento varia 0 á 1;

2. Sendo A e B acontecimentos disjuntos ou independentes ou mutuamente exclusivo ou incompatíveis, definido em S, tem-se:

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

• $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$

3. Dado um acontecimento A com probabilidade P(A), a probabilidade do seu complementar (acontecimento contrário) obtêm-se subtraindo a unidade a probabilidade de A, isto é:

• $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ **ou** • $P(\overline{A}) + P(A) = 1$

4. A probabilidade de um acontecimento certo é um (1), isto é:

• $P(S) = 1$

5. A probabilidade de um acontecimento impossível é zero (0), isto é:

• $P(\emptyset) = 0$

[4]Axiomas são verdades inquestionáveis universalmente válidas;

3. Definição clássica da probabilidade – Lei de Laplace

Quando lançarmos uma moeda equilibrada, aceitamos que qualquer uma das faces tem exactamente a mesma chance de aparecer que a outra, isso é, a probabilidade do acontecimento $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n}$. Dizemos então, que os acontecimentos são **equiprováveis**. Dado um experimento aleatório, sendo **S** o seu espaço amostral, vamos admitir que todos os elementos de S tenham a mesma chance de acontecer, ou seja, **S** é um conjunto equiprovável. Definimos a probabilidade de um acontecimento **A** ao número real **P(A)**, tal que:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à } A}{\text{Número de resultados possivêis à } S} = \frac{\#(A)}{\#(S)}}$$

2.10.7. DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DOS ACONTECIMENTOS

Vamos determinar a probabilidades pela definição clássica de probabilidade – Lei de Laplace, para alguns acontecimentos. Ora vejamos:

Exemplo 1: Para o experimento que consiste em lançar um dado de 6 faces. Determinar:

Antes porém de determinar a probabilidade de qualquer acontecimento, devemos determinar o espaço amostral do experimento: **S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**;

(a)A probabilidade de sair um número par;

Resolução:

Seja acontecimento **A: Sair um número par**

- O número do resultado favorável do acontecimento A é 3, porque há 3 números pares que são {2, 4, 6};

- o número do resultado possível à S é 6, porque há no total 6 números no espaço amostral que são: **S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**.

- P(A) lê-se probabilidade do acontecimento A, com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis à } A}{\text{Número de resultados possivêis à } S} = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

(b) A probabilidade de sair um número maior que 4;

Resolução:

Seja acontecimento **B: Sair um número maior que 4;**

- O número do resultado favorável do acontecimento B é 2, porque há 2 números maiores que 4, são {5, 6};

- o número do resultado possível à S é 6, porque há no total 6 números no espaço amostral que são: **S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$\mathbf{P(B)} = \frac{\text{Númeroderesultadosfavoráveis à B}}{\text{Númeroderesultadospossivêis à S}} = \frac{\#(B)}{\#(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

(c) A probabilidade de sair um número menor que 7;

Resolução:

Seja o acontecimento **C: Sair um número menor que 7;**

- O número do resultado favorável do acontecimento C é 6, porque há 6 números menores que 7, são {1, 2, 3, 4, 5, 6};

- o número do resultado possível à S é 6, porque há no total 6 números no espaço amostral que são: **S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$\mathbf{P(C)} = \frac{\text{Númeroderesultadosfavoráveis à C}}{\text{Númeroderesultadospossivêis à S}} = \frac{\#(C)}{\#(S)} = \frac{6}{6} = 1;$$

(Visto que, trata-se uma probabilidade de um acontecimento certo)

(d) A probabilidade de sair um número maior que 6;

Resolução:

Seja o acontecimento **D: Sair um número maior que 6;**

- O número do resultado favorável do acontecimento D é 0, porque não há nenhum numero maiores que 6;

- o número do resultado possível à S é 6, porque há no total 6 números no espaço amostral que são: **S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$\mathbf{P(D)} = \frac{\textbf{Númeroderesultadosfavoráveis à C}}{\textbf{Númeroderesultadospossivêis à S}} = \frac{\#(\mathbf{D})}{\#(\mathbf{S})} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{6}} = \mathbf{0};$$

(Visto que, trata-se uma probabilidade de um acontecimento impossível)

Exemplo 2: Selecciona-se aleatoriamente a uma carta de um baralho contendo 52 cartas.

Espaço amostral: Num baralho de 52 cartas tem:

S = {13 Espadas, 13 Copas, 13 Florinhas, 13 Ouros} = {4, Áses, 4 Dois, 4 Três, 4 Quatros, 4 Cincos, 4 Seis, 4 Setes, 4 Oitos, 4 Noves, 4 Dez, 4 Valetes - J, 4 Damas - Q, 4 Reis - K}

(a) Qual é a probabilidade de sair um rei na extracção aleatória de uma carta?

Resolução: Seja acontecimento **A: Sair uma carta rei**

- O número do resultado favorável do acontecimento A é 4, porque há reis num baralho. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Númeroderesultadosfavoráveis à A}}{\textbf{Númeroderesultadospossivêis à S}} = \frac{\#(\mathbf{A})}{\#(\mathbf{S})} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{52}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}$$

(b) Qual é a probabilidade de que a carta seja espada?

Resolução: Seja acontecimento **B: Sair uma carta espada**

- O número do resultado favorável do acontecimento A é 13, porque há 13 espadas num baralho. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$\mathbf{P(B)} = \frac{\textbf{Númeroderesultadosfavoráveis à B}}{\textbf{Númeroderesultadospossivêis à S}} = \frac{\#(\mathbf{B})}{\#(\mathbf{S})} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{52}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

(c) Qual é a probabilidade de que a carta escolhida ser uma figura?

Resolução: Seja acontecimento **C: Sair uma carta figura**

- O número do resultado favorável do acontecimento C é 12, porque há 12 figuras (**4 Valetes - J, 4 Damas - Q, 4 Reis - K**) num baralho. Com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$\mathbf{P(C)} = \frac{\textbf{Númeroderesultadosfavoráveis à C}}{\textbf{Númeroderesultadospossivêis à S}} = \frac{\#(\mathbf{C})}{\#(\mathbf{S})} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{52}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}$$

Exemplo 3: Numa caixa há 5 bolas brancas, 6 azuis e 4 vermelhas.

Espaço amostral: Nesta caixa tem num total 15 bolas, **S = {5 Brancas, 6 Azuis e 4 Vermelhas}**

(a) Qual é a probabilidade de sair uma bola de cor vermelha?

Resolução: Seja acontecimento **V: Sair uma bola vermelha**

- O número do resultado favorável do acontecimento V é 4, com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$\mathbf{P(V)} = \frac{\text{Númeroderesultadosfavoráveis à V}}{\text{Númeroderesultadospossivêis à } S} = \frac{\#(V)}{\#(S)} = \frac{4}{15}$$

(b) Qual é a probabilidade da bola extraída não seja da cor azul?

Resolução: Trata-se da probabilidade do acontecimento contrário e seja acontecimento **A: Sair uma bola de cor azul;**

- O número do resultado favorável do acontecimento A é 6, com todos dados disponíveis podemos achar a probabilidade do acontecimento sendo:

$$\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1} - \frac{\text{Númeroderesultadosfavoráveis à V}}{\text{Númeroderesultadospossivêis à } S} = 1 - \frac{\#(A)}{\#(S)} = \underset{(15)}{1} - \underset{(1)}{\frac{6}{15}} = \frac{15-6}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

(c) Qual é a probabilidade de sair duas bolas, uma azul e a outra vermelha sem reposição?

Resolução: Sejamos acontecimentos **A: Sair uma bola azul e V: Sair uma bola vermelha;**

Análise: Ora pretendemos achar a probabilidade de extracção de duas bolas, uma de cor azul e a outra vermelha, a probabilidade de sair uma bola de cor azul é $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, tendo em conta que, saiu uma bola restaram 14 bolas. Sendo assim, a probabilidade de sair uma bola de cor vermelha é $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$, de seguida multiplicamos as probabilidades $\frac{2}{5} \bullet \frac{2}{7} = \frac{4}{35}$ que é a probabilidade de sair duas bolas, uma de cor azul e a outra vermelha.

ou

A saída da bola de cor azul não depende a bola da cor vermelha e vice-versa, logo estes acontecimentos são disjuntos ou independentes e mutuamente exclusivos ou incompatíveis, daí podemos aplicar o segundo o axioma que diz:

$$\mathbf{P(A \cap V) = P(A) \bullet P(V)} = \frac{6}{15} \bullet \frac{2}{14} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

(d) Qual é a probabilidade de sair duas bolas brancas sem reposição?

Resolução: Seja o acontecimento **B: Sair uma bola branca**

Análise: Ora pretendemos achar a probabilidade de extracção de duas bolas brancas, a probabilidade de sair uma bola branca é $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, tendo em conta que, saiu uma bola branca, restaram 4 bolas no total de 14 bolas. Sendo assim, a probabilidade de sair mais a bola branca é $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$, de seguida multiplica-se as probabilidades $\frac{1}{3} \bullet \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$ que é a probabilidade de sair duas bolas brancas.

ou

Quando pretendemos determinar a probabilidade de sair duas bolas ou mais bolas da mesma cor, deve mos pensar em combinações, o número de resultados favoráveis será combinação de número total das bolas da cor que pretendemos achar a probabilidade, agrupados ao número de bolas que pretendemos extrair, no nosso caso, existem 5 bolas branca se pretendemos extrair 2 bolas brancas, logo o número de resultado favorável é dado por: $\mathbf{C_2^5 = 10}$. Enquanto, o número de resultados possíveis será combinação do número total de bolas existentes na caixa, agrupado ao número de bolas que pretendemos extrair, no nosso caso, existem no total de 15 bolas e queremos extrair duas, logo o número de resultados possível é dado por: $\mathbf{C_2^{15} = 105}$. Então temos a probabilidade:

$$P(2\bullet B) = \frac{\text{Númeroderesultadosfavoráveis à } B}{\text{Númeroderesultadospossivêis à } S} = \frac{\#(B)}{\#(S)} = \frac{C_2^5}{C_2^{15}} = \frac{10}{105} = \frac{2}{21}$$

Exemplo 4: Em grupo de 500 estudantes, 80 estudam Engenharia, 150 estudam Medicina e 10 estudam Engenharia e Medicina. Se um estudante é escolhido ao acaso. **Qual é a probabilidade de que:**

(a) ele estude Medicina e Engenharia?

(b) ele estude somente Engenharia?

(c) ele estude somente Medicina?

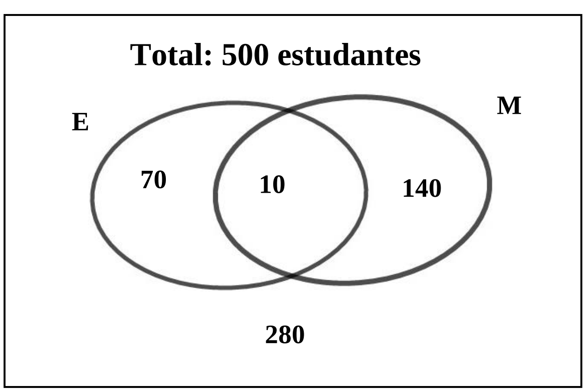
(d) ele não estude Medicina, nem Engenharia?

(e) ele estude Medicina ou Engenharia?

Resolução: Sejam os acontecimentos:

M: O aluno escolhido estude Medicina e E: O aluno escolhido estude Engenharia

Representemos os dados no diagrama de Venn, ao lado apresenta-se a resolução:



(a) $P(M\cap E) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possivêis}} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$;

(b) $P(E) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possivêis}} = \frac{70}{500} = \frac{7}{50}$;

(c) $P(M) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possivêis}} = \frac{140}{500} = \frac{7}{25}$;

(d) $P(\overline{M} \cap \overline{E}) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possivêis}} = \frac{280}{500} = \frac{14}{25}$;

(e) $P(M\cup E) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis}}{\text{Número de resultados possivêis}} = \frac{220}{500} = \frac{11}{25}$;

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule

(a) $7!$
(b) $(3!)\bullet(4!)$
(c) $(8!)^2$
(d) $8! + 4!$
(e) $2\bullet(4! - 5!)$
(f) $(4!)^2\bullet(5!)^2$
(g) $\frac{10!}{12!}$
(h) $\frac{5! - 4!}{4!}$
(i) $\frac{12!}{9!\bullet 3!}$
(j) A_2^6
(k) C_5^{11}
(l) $\frac{8! - 7!}{6! - 5!}$
(m) $P_4\bullet A_3^6$
(n) $P_8 - C_2^7$
(o) $\frac{P_5 - C_2^8}{C_2^3}$
(p) $\frac{P_8 + P_6 + P_4}{P_7 - P_5 - P_3}$

2. Simplifique as seguintes expressões:

(a) $\frac{20! - 18!}{19!}$
(b) $\frac{2020!}{2018! + 2019!}$
(c) $\frac{(n-3)!}{(n-2)! + (n-1)!}$
(d) $\frac{n!}{(n-2)! + (n-1)!}$
(e) $\frac{(n+1)!}{n! + (n-1)!}$
(f) $\frac{n!\bullet(n+2)!}{(n-1)!\bullet(n+1)!}$
(g) $\frac{(n-1)! - 2n!}{(n-2)! + (n-1)!}$
(h) $\frac{(n-1)! - (n-2)!}{n!}$
(i) $\frac{n!}{(n-1)! + (n+1)!}$

3. Resolve

(a) $\frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 4$
(b) $\frac{(n+1)!}{n!} = 67$
(c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$
(d) $\frac{(n-5)!}{(n-3)!} = \frac{1}{56}$
(e) $(n - 1)!n = 24$
(f) $A_2^n = 20$
(g) $C_2^n = 10$
(h) $C_2^{n-3} = 28$
(i) $\frac{1}{8}A_6^n = 9A_2^{n-2}$

4. Qual é a linha em que a soma dos elementos de uma determinada linha do triangulo de Pascal?

5. A soma dos três últimos de uma linha do triângulo de Pascal é 172. Determine o terceiro elemento da linha seguinte.

6. Determine:

(a) $\binom{11}{8} + \binom{11}{7} =$
(b) $\binom{12}{3} + \binom{12}{4} =$
(c) $\binom{100}{20} - \binom{99}{19} =$
(d) $\binom{20}{5} - \binom{20}{4} =$

7. Determine o valo de x, tal que $\binom{20}{6} + x = \binom{21}{7}$.

8. Desenvolve os seguintes binómio:

(a) $(x + 2)^4$
(b) $(x - 3)^6$
(c) $(a + 2b)^5$
(d) $(2a - b)^7$

9. Sabendo que o desenvolvimento do binómio $(4 - 3x)^n$ tem 6 termos, determine o valor de n.

10. Dada expressão $(4 + \frac{2}{x})^8$. Determine:

(a) O número de termos do binómio;

(b) O quarto termo do binómio;

(c) O termo central do binómio;

(d) O termo independente do binómio;

11. Dada expressão $(\sqrt{x} + \frac{2}{x})^8$. Determine:

(a) O termo médio do binómio;

(b) O termo médio do binómio;

(c) O termo de maior coeficiente do binómio;

(d) O termo independente do binómio;

12. Indique o acontecimento e determinar o espaço amostral para cada acontecimento abaixo:

(a) Uma letra é escolhida entre as letras da palavra PROBABILIDADE;

(b) Lançar três vezes uma moeda e observar a sequência de caras e coroas;

(c) Entre 5 pessoas A, B, C, D e E duas são escolhidas para formarem uma comissão;

(d) Um dado de seis faces é lançado, verificar o número de face de cima os números primos;

13. Quantos números de 4 algarismos diferentes podem se escrever com os algarismos do conjunto M = {1, 2, 3, 4, 5, 6. 7}?

14. Num campeonato de futebol participam 20 equipas, **quantos resultados possíveis para os 3 primeiros lugares?**

15. Dispomo de 8 core e queremos pintar uma bandeira de 5 listras. **Quantas listras isso pode ser feito?**

16. As 5 finalistas do concurso para Miss Beira são: Miss Manga, Miss Inhamizua, Miss Ponta-Gêa, Miss Matacuene e Miss Munhava. **De quantas formas o juiz pode escolher 1º, 2º e 3º lugares?**

17. Numa empresa há 7 trabalhadores e pretende criar turnos de 3 trabalhadores cada. **Quantos turnos são possiveis de criar?**

18. Três homens e quatros mulheres decidiram acampar, para garantir a vigia nocturna, organizaram comissões de 3 elementos, tendo sempre um homem. **Quantas comissões foram possíveis de formar?**

19. Várias pessoas encontraram-se numa festa, tendo uma cumprimentado outra pessoa com aperto de mão. Alguém contou apertos que terá havido exactamente 78 apertos de mão. **Quantas eram as pessoas na festa?**

20. Para acompanhar a selecção nacional na copa de África de Sul. É preciso formar-se uma equipa médica que integre dois médicos e três massagistas. Sabendo que estão disponíveis quatros médicos e cincos massagistas, **de quantas maneiras diferentes pode escolher-se a constituição da equipa médica?**

21. Considere os pontos A, B, C, … de uma circunferência. **Quantos triângulos distintos são determinados pelos 10 pontos?**

22. Determine o número de palavras diferentes que se podem escrever com as letras da palavra **VOTAR**.

23. Com a palavra ESCOLA. Resolve as questões que se seguem:

(a) Quantos anagramas podemos escrever, com a palavra ESCOLA?

(b) Quantos anagramas podemos escrever, que começam com a letra O?

(c) Quantos anagramas podemos escrever, que terminal com a letra S?

(d) Quantos anagramas podemos escrever, que começam coma letra L e terminal com C?

(e) Quantos anagramas podemos escrever, com COL juntos?

(f) Quantos anagramas podemos escrever, que sempre haja a sequencia COL, nesta ordem?

24. Para um debate numa escola que lecciona de 8ª a 12ª classe, foram escolhidos 50 estudantes (dez alunos de cada classe). Findo o debate, um aluno é escolhido ao acaso para fazer comentários sobre o debate. **Qual é a probabilidade de que o escolhido seja aluno da 12ª classe?**

25. Efectua-se duas jogadas com uma moeda equilibrada de cinco meticais. **Qual é a probabilidade de sair, pelo menos, uma face com emblema de república?**

26. O António abre aleatoriamente uma revista com 40 páginas enumeradas de 1 a 40. **Qual é a probabilidade de abrir uma pagina cujo o número é múltiplo de 3?**

27. Uma caixa contém dez camisas das quais quatros são de mangas compridas. Extrai-se duas ao acaso. **Qual é a probabilidade de que nenhuma das camisas extraídas seja de mangas compridas?**

28. Se retirarmos aleatoriamente uma carta com 52 cartas, **qual é a probabilidade de ser um6 ou um Rei?**

29. Numa caixa tem 3 bolas azuis, 4 bolas brancas e 7 bolas pretas. **Qual é a probabilidade de, ao retiramos uma bola ser:**

(a) Branca (b) Preta (c) Azul

30. Na cantina de uma escola, há 10 bolos, dos quais, 3 de massa folhada e 7 de arroz, se alguém compra 2 bolos escolhendo-os aleatoriamente, achar a probabilidade de se escolher:

(a) Arroz (b) Massa folhada (c) de cada tipo

3 FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

OBJECTIVOS:

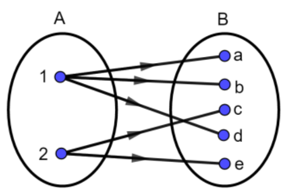
No fim desta unidade, deverás ser capaz de:

- Definir uma função;
- Representar uma função;
- Classificar as funções quanto à Injectividade, Paridade e Monotonia;
- Determinar o Domínio, Contradomínio, Zeros da Função, Monotonia e Variação do Sinal, a partir da sua da sua representação gráfica da função;
- Identificar Determinar o Domínio, Contradomínio, Zeros da Função, Monotonia e Variação do Sinal, a partir da sua expressão Algébrica;
- Determinar o Contradomínio e Período de funções trigonométricas;
- Determinar o Domínio, Contradomínio e Equações de assintótas de funções homográficas;
- Determinar a expressão analítica de uma função composta de duas ou mais funções;
- Determinar a expressão analítica de uma função Inversa para funções injectivas;

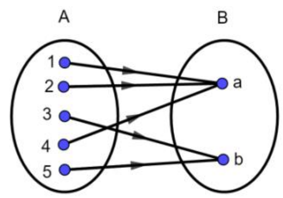
<u>Definição:</u> *uma função f de A para B (f: A→B), consiste* em *dois conjuntos não vazios, de partida A, para o conjunto de chegada B, é uma correspondência que associa a cada elemento x (objecto) de A um e um só elemento y (imagem) de B.* simbolicamente escreve-se: $\boxed{\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \to y = f(x) \end{array}}$

Consideremos as seguintes relações, queremos encontrar a que representa uma função de A para B.

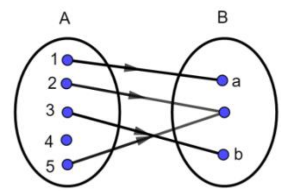
Relação 1



Relação 2



Relação 3



A relação 2 define a função porque nela cada elemento do conjunto de partida (domínio) corresponde um só elemento do conjunto de chegada (contradomínio).

● ***Chama-se domínio da função ao conjunto de valores de x (objecto) para os quais dada a função é determinada;***

● ***Chama-se domínio da função ao conjunto {f(x)} das imagens dos elementos de x em y;***

3.2. Formas de representar uma função

Uma função pode ser definida por: **um diagrama, uma expressão verbal, uma expressão analítica, uma tabela e uma representação gráfica**

3.3. Classificação das funções

1. Quanto à injectividade

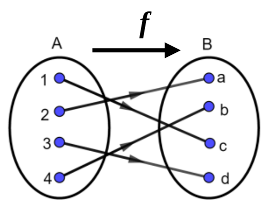
● **Função Injectiva:** *Uma função f é injectiva num intervalo do seu domínio se* $\forall_{x_1, x_2 \in Df}$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. *Isto quer dizer objectos diferentes também possuem imagens diferentes. Graficamente vê-se que uma função é injectiva, imaginando rectas horizontais paralelas ao eixo dos x, e verificamos que nenhuma intercepta o gráfico da função em mais do que um ponto.*

● **Função Sobrejectiva:** *Uma função f é sobrejectiva no seu domínio se todos elementos de contradomínio possuem objecto. Em geral uma função é sobrejectiva quando o contradomínio coincide com o conjunto de chegada. Todas funções de contradomínio o conjuntos dos números reais, são sobrejectivas.*

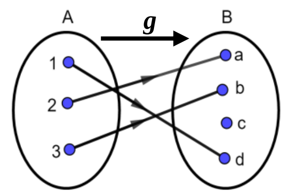
● **Função Bijectiva:** *Uma função f é bijectiva no seu domínio se for simultaneamente injectica e sobrejectiva.*

Exemplo 1: Estude a injectividade de cada função representada por diagramas seguintes:

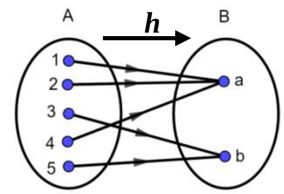
(a)



(b)



(c)



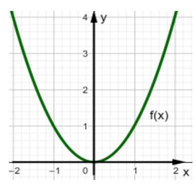
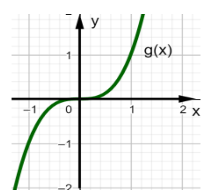
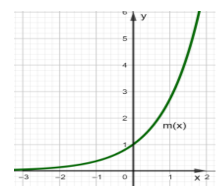
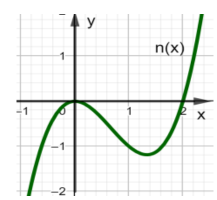
Resolução:

(a) A função f: é injectiva, é sobrejectiva e é bijectiva;

(b) A função g: é injectiva, não é sobrejectiva e não é bijectiva;

(c) A função h: não é injectiva, é sobrejectiva e não é bijectiva;

Exemplo 2: Estude a injectividade de cada função representada pelos gráficos seguintes:

(a)	(b)	(c)	(d)
			

Resolução:

(a) A função f: não é injectiva, não é sobrejectiva e nem bijectiva;

(b) A função g: é injectiva, sobrejectiva e bijectiva;

(c) A função m: é injectiva, não é sobrejectiva e nem bijectiva;

(d) A função n: não é injectiva, é sobrejectiva e não é bijectiva;

Exemplo 3: Estude a injectividade de cada função representada pelas expressões analíticas seguintes:

(a) $f(x) = 2x + 3$ (b) $g(x) = x^2 - 7$ (c) $h(x) = 2^x$

Resolução:

(a) $f(x) = 2x + 3$

• Supondo que a função seja injectiva, então:

$$\forall_{x_1,\, x_2 \in Df}: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Para $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

$$f(2) \neq f(3)$$

$$2 \bullet 2 + 3 \neq 2 \bullet 3 + 3$$

$$7 \neq 9$$

Verdade, a função é injectiva

• A função é sobrejectiva, porque, todos objectos possuem imagens, ou seja o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, isto é, **f: IR → IR e** $\mathbf{D'_f}$**: y∈IR.**

∴ **A função f: é injectiva, sobrejectiva e bijectiva;**

(b) $g(x) = x^2 - 7$

• Supondo que a função seja injectiva, então:

$$\forall_{x_1, x_2 \in Df}: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\textbf{Para } x_1 = -3 \text{ e } x_2 = 3$$

$$g(-3) \neq g(3)$$

$$(-3)^2 - 7 \neq (3)^2 - 7$$

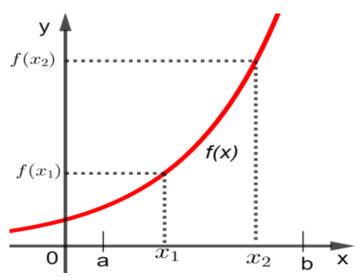
$$2 \neq 2$$

Falsa, a função não é injectiva

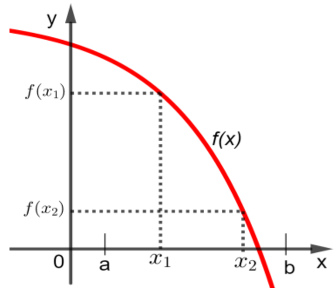
• A função não é sobrejectiva, porque, nem todos objectos possuem imagens, ou seja o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada, isto é, **g: IR → IR e** $\mathbf{D'_g}$**: y∈[-7, + ∞[.**

2. Quanto á monotonia

● **Função Crescente:** Uma função f diz-se crescente num intervalo I =]a, b[se, $\forall_{x_1,x_2 \in I}: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, como mostra a figura:



● **Função Decrescente:** Uma função f diz-se decrescente num intervalo I =]a, b[se, $\forall_{x_1,x_2 \in I}: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, como mostra a figura:

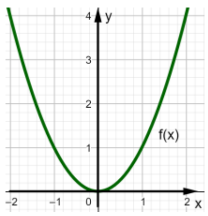


3. Quanto à paridade

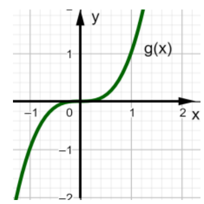
● **Função Par:** Uma função f de domínio D, diz-se par se, $\forall_{x \in Df}$: ***f(−x) = f(x),*** isto quer dizer, objectos simétricos possuem a mesma imagem.

● **Função Ímpar:** Uma função f de domínio D, diz-se ímpar se, $\forall_{x \in Df}$: ***f(−x) = −f(x),*** isto quer dizer, objectos simétricos possuem também imagens simétricas.

NOTA IMPORTANTE: Geometricamente podemos verificar a paridade das funções, isto é, o gráfico da função par é simétrico em relação ao eixo dos y, enquanto, o gráfico da função ímpar é simétrico em relação à origem. Como mostram as figuras a seguir:



A função f(x) é par, é simétrica em relação ao eixo oy



A função f(x) é par, é simétrica em relação à origem

Exemplo: Dadas as funções estude paridade

(a) $f(x) = x^2 + 5$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = 2x + 3$

Resolução:

(a) $f(x) = x^2 + 5$

Supondo que a função seja par, então:

Para x = 4; f(−4) = f(4)

$$(-4)^2 + 5 = (4)^2 + 5$$
$$16 + 5 = 16 + 5$$
$$21 = 21$$

Verdade, a função é par

(b) $g(x) = x^3$

Supondo que a função seja ímpar, então:

Para x = 3, g(−3) = − g(3)

$$(-3)^3 = -(3)^3$$
$$-27 = -(27)$$
$$-27 = -27$$

Verdade, a função é ímpar

(c) $h(x) = 2x + 3$

Supondo que a função seja par, então:

Para x = 2; h(−2) = h(2)

$$2 \cdot (-2) + 3 = 2 \cdot 2 + 3$$
$$-4 + 3 = 4 + 3$$
$$-1 = 7$$

Falso, a função não é par

Supondo que a função seja ímpar, então:

Para x = 2; h(−2) = −h(2)

$$2 \cdot (-2) + 3 = -(2 \cdot 2 + 3)$$
$$-4 + 3 = -(4 + 3)$$
$$-1 = -7$$

Falso, a função não é ímpar

Logo a função h(x) não é par nem ímpar

3.4. REVISÃO DAS FUNÇÕES

1. FUNÇÃO DO 1º GRAU OU FUNÇÃO LINEAR

Definição: Uma função do 1º grau ou função linear é uma função do tipo f(x) = ax + b onde a e b são coeficientes reais.

Exemplos:

(a) f(x) = 4x + 5
a = 4 e b = 5

(b) f(x) = − 2x + 1
a = − 2 e b = 1

(c) f(x) = 3x
a = 3 e b = 0

(c) $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$
$a = \frac{3}{2}$ **e** $b = -\frac{5}{4}$

(c) f(x) = 2
a = 0 e b = 2

■ ***a*** chama-se coeficiente angular ou declive, enquanto que, ***b*** chama-se coeficiente linear ou ordenada na origem;

■ O gráfico de uma função do 1º grau ou função linear é uma linha recta;

■ Para construir o gráfico de uma função do 1º grau ou função linear é necessário e suficiente conhecer os seus dois pontos onde a recta passa:

■ Para determinar a expressão analítica de uma função do 1º grau ou função linear ***f(x) = ax + b***, basta encontrar os valores de ***a*** e ***b***;

■ Se a recta passa pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, então o declive será dado por: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

■ Se dada a recta é conhecida a sua inclinação ao eixo dos x, então, o declive será dado por $a = tg(\alpha)$;

■ Dadas as funções das rectas, **r:f(x) =** $a_1x + b_1$ e **s:g(x) =** $a_2x + b_2$ $\begin{cases} \text{► São paralelas: se } a_1 = a_2 \\ \text{► São perpendiculares: se } a_1 \cdot a_2 = -1 \end{cases}$

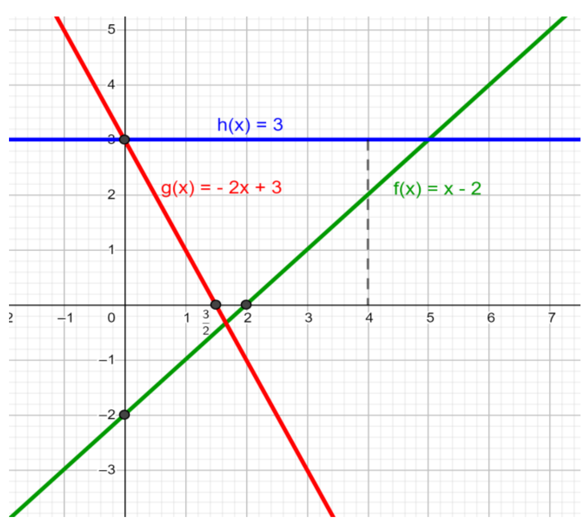
Representação gráfica do 1º grau ou função linear

Vamos representar as funções f(x) = x – 2, g(x) = −2x + 3 e h(x) = 3, no mesmo sistema cartesiano ortogonal (SCO).

f(x) = x – 2		
x	0	2
y	– 2	0

g(x) = −2x + 3		
x	0	$\frac{3}{2}$
y	3	0

h(x) = 3		
x	0	4
y	3	3



Exemplo: Dada a recta r pela função f(x) = 2x + 4. Determine:

(a) Uma recta t que passa pelo ponto (1, 3) e paralela a dada;

r: f(x) = 2x + 4 e t:g(x) = ax + b, a recta t deve ser paralela a recta r, então os declives devem ser iguais, isto é a = 2, portanto a recta t será dada por **t:g(x) = 2x + b**. Para Determinar o valor b, basta substituir o valor de x na função da recta t, isto é, fazendo g(1) = 3;

$g(1) = 3 \Rightarrow 2 \bullet 1 + b = 3 \Rightarrow b = 1$, portanto a recta t será dada pela função g(x) = 2x + 1, que é paralela a dada.

(b) Uma recta s que passa pelo ponto (1, 3) e perpendicular a dada;

r: f(x) = 2x + 4 e s:h(x) = ax + b, a recta t deve ser perpendicular a recta r, então o produto dos declives devem ser igual à -1, isto é, $\mathbf{a_1 \bullet a_2 = -1 \Rightarrow 2 \bullet a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}}$, portanto a recta **s** será dada por $\mathbf{s{:}h(x) = -\frac{1}{2}x + b}$. Para Determinar o valor b, basta substituir o valor de x na função da recta s, isto é, fazendo h(1) = 3;

$h(1) = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} \bullet 1 + b = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} + b = 3 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$, portanto a recta t será dada pela função $\mathbf{h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$, que é perpendicular a dada.

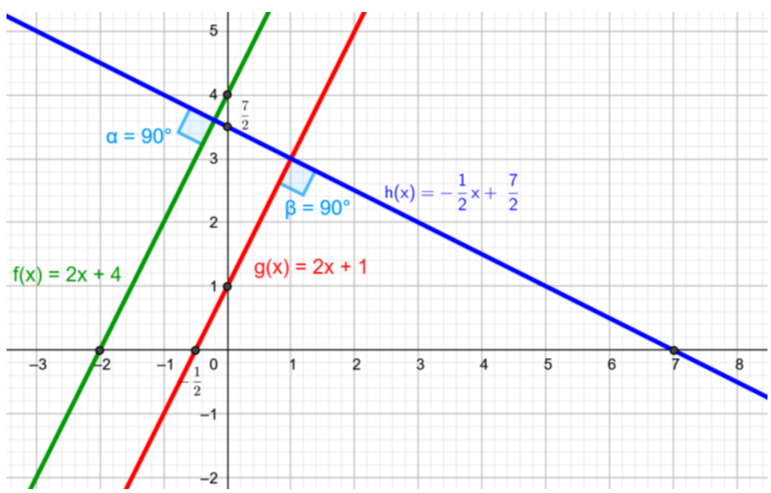
(c) Representa-as no mesmo sistema cartesiano ortogonal

Vamos representar as três rectas, r, s e t no mesmo SCO.

r:f(x) = 2x + 4		
x	**0**	**- 2**
y	**4**	**0**

t:g(x) = 2x + 1		
x	**0**	$\mathbf{-\frac{1}{2}}$
y	**1**	**0**

$\mathbf{s{:}h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$		
x	**0**	**7**
y	$\mathbf{\frac{7}{2}}$	**0**



<u>**Conclusão**</u>: Sobre as do 1º grau ou função linear podemos construir que:

1. O gráfico de uma função linear é uma linha recta;

2. O domínio das funções lineares é o conjunto dos números reais, isto é: D_f: x∈IR;

3. O contradomínio das funções lineares é o conjunto dos números reais, isto é: D'_f: y∈IR;

4. As funções lineares são injectivas, sobrejectivas e bijectivas;

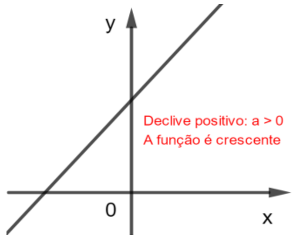
5. As funções lineares do tipo y = ax, são ímpares, caso contrário não são pares nem ímpares;

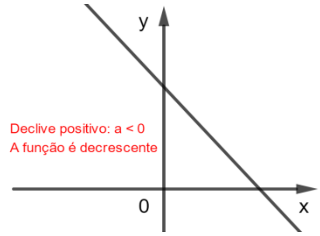
6. Quanto a monotonia, f(x) = ax + b:

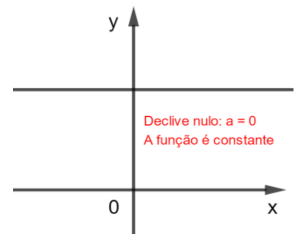
• Se a < 0, a função linear é decrescente;

• Se a > 0, a função linear é crescente;

• Se a = 0, a função linear é constante;







2. FUNÇÃO DO 2º GRAU OU FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição: Uma função do 2º grau ou função quadrática é uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde ***a***, ***b*** e ***c*** são coeficientes reais mas $a \neq 0$.

■ O gráfico de uma quadrática é uma parábola, com $\boxed{x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac}$

■ Para encontrar as raízes ou zeros da função quadrática, acha-se pela fórmula $\boxed{x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ ou simplesmente por $\boxed{x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$ que são chamadas de fórmulas resolventes;

■ A soma das raízes da função quadrática é dada por: $\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$

■ O produtos das raízes da função quadrática é dado por: $\boxed{S = x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}}$

■ A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode ser escrita na forma: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ e $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

■ Quanto ao valor de *a* pode – se afirmar:

• Se a > 0, a parábola da função está virada para cima;

• Se a < 0, a parábola da função está virada para cima;

■ Quanto ao valor de Δ pode – se afirmar:

• Se Δ > 0, a função tem duas raízes diferentes, isto é: $x_1 \neq x_2$;

• Se Δ = 0, a função tem duas raízes iguais, isto é: $x_1 = x_2$;

• Se Δ < 0, a função não tem raízes reais;

<u>Representação gráfica do 2º grau ou função quadrática</u>

Representemos graficamente as funções $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = -x^2 - x + 2$. Para tal devemos achar o sentido concavidade da parábola, Ordenada na origem, zeros da função se existirem e coordenadas do vértice, assim vamos:

Exemplo$_1$: Representemos graficamente a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$\mathbf{a = 1,\ \ b = -4,\ \ c = 3}$$

• Sentido concavidade da parábola

- O valor de ***a*** é positivo, daí a concavidade da parábola da função, está virada para cima;

• Ordenada na origem

Se $x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 - 4\bullet 0 + 3 = 3$, daí tem-se o ponto de ordenada na origem (0, 3);

• Zeros da função

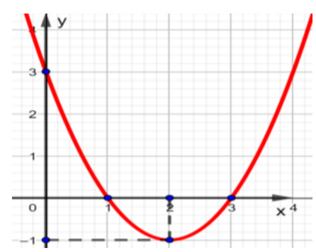
$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1,\,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\bullet 1\bullet 3}}{2\bullet 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1; \\ x_2 = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3; \end{cases}$$

• Coordenadas do vértice (x_v, y_v)

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2\bullet 1} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{4}{4\bullet 1} = -\dfrac{4}{4} = -1 \end{array}\right\} (x_v, y_v) = (2, -1)$$

• O gráfico da função



Exemplo$_2$: Representemos graficamente a função $f(x) = -x^2 - x + 2$

$$\mathbf{a = -1,\ \ b = -1,\ \ c = 2}$$

• Sentido concavidade da parábola

- O valor de ***a*** é negativo, daí a concavidade da parábola da função, está virada para baixo;

• Ordenada na origem

Se $x = 0 \rightarrow f(0) = -0^2 - 0 + 2 = 2$, daí tem-se o ponto de ordenada na origem (0, 2);

• **Zeros da função**

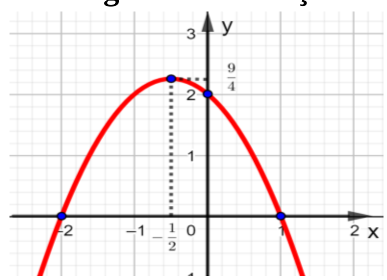
f(x) = 0 → $-x^2 - x + 2 = 0$;

$$x_{1,\,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\bullet(-1)\bullet 2}}{2\bullet(-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1; \\ x_2 = \frac{1+3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2; \end{cases}$$

• **Coordenadas do vértice (x_v, y_v)**

$$\left.\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2\bullet(-1)} = -\frac{1}{2}; \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4\bullet(-1)} = -\frac{9}{-4} = \frac{9}{4} \end{aligned}\right\} (x_v, y_v) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

• **O gráfico da função**



<u>Conclusão</u>: Sobre as do 2º grau ou função quadrática podemos construir que:

1. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola;

2. O domínio da função quadrática é o conjunto dos números reais, isto é: D_f: x∈IR;

3. As funções quadráticas não são: injectivas, sobrejectivas e bijectivas;

4. As funções quadrática do tipo f(x) = $ax^2 + c$ são pares, caso contrário não são pares nem ímpares;

3. FUNÇÃO EXPONENCIAL

<u>Definição</u>: Chama-se função exponencial a uma função do tipo $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos: Algumas funções exponenciais

$f(x) = 2^x$ $\quad g(x) = (\frac{1}{2})^{2x+1}$ $\quad h(x) = (\sqrt{5})^{2-x}$ $\quad m(x) = 3^{x^2+2}$ $\quad n(x) = 0{,}7^{6-2x}$ $\quad t(x) = e^{1-2x}$

■ O valor de a, deve ser positivo e diferente de um, isto é: a > 0 e a ≠ 1;

■ Se o valor de a, for maior que um a função exponencial é crescente s se estiver entre 0 á 1, a função exponencial é decrescente;

■ O gráfico de uma função exponencial é uma curva;

<u>Representação gráfica da função Exponencial</u>

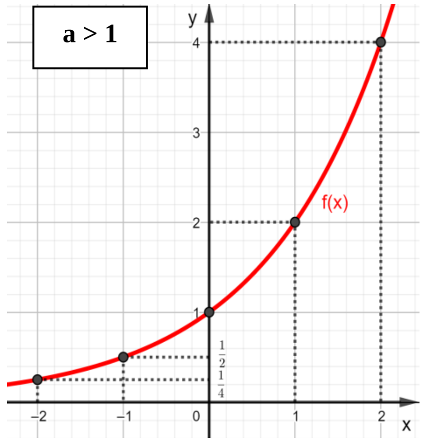
Representemos graficamente as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (\frac{1}{2})^x$, para tal devemos achar os valores para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, organizados numa tabela de valores, assim vamos:

Exemplo 1: representemos graficamente a função $f(x) = 2^x$

Tabela de valores

x	$y = 2^x$
-2	$\mathbf{y} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$\mathbf{y} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$\mathbf{y} = 2^{0} = 1$
1	$\mathbf{y} = 2^{1} = 2$
2	$\mathbf{y} = 2^{2} = 4$

Gráfico



Estudo da função

1. Domínio (D_f): D_f: $x \in IR$;

2. Contradomínio (D'_f): $y \in]0, +\infty[$ ou $y \in IR^+$;

3. Injectividade: A função é injectiva, não é sobrejectiva nem sobrejectiva;

4. Paridade: A função não par nem ímpar;

5. Variação da monotonia:

A função é crescente em todo seu domínio;

6. Variação do sinal:

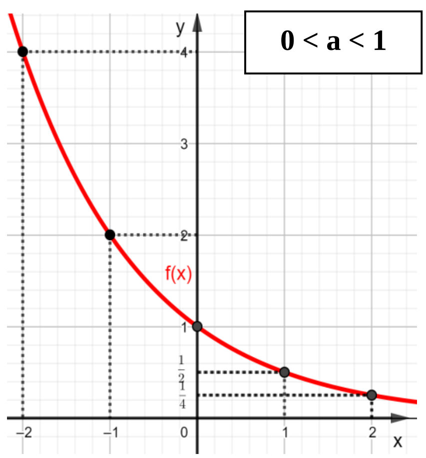
A função é positiva em todo seu domínio;

Exemplo 2: representemos graficamente a função $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Tabela de valores

x	$y = 2^x$
-2	$\mathbf{y} = (\frac{1}{2})^{-2} = 4$
-1	$\mathbf{y} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$
0	$\mathbf{y} = (\frac{1}{2})^{0} = 1$
1	$\mathbf{y} = (\frac{1}{2})^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\mathbf{y} = (\frac{1}{2})^{2} = \frac{1}{4}$

Gráfico



Estudo da função

1. Domínio (D_f): D_f: $x \in IR$;

2. Contradomínio (D'_f): $y \in]0, +\infty[$ ou $y \in IR^+$;

3. Injectividade: A função é injectiva, não é sobrejectiva nem sobrejectiva;

4. Paridade: A função não par nem ímpar;

5. Variação da monotonia:

A função é decrescente em todo seu domínio;

6. Variação do sinal:

A função é positiva em todo seu domínio;

Conclusão: Sobre as funções exponenciais podemos construir que:

1. O gráfico de uma função exponencial é uma curva;
2. O domínio da função exponencial é o conjunto dos números reais, isto é: D_f: $x \in IR$;
3. As funções exponenciais são injectivas, não são sobrejectivas nem bijectivas;
4. As funções exponenciais não são pares nem ímpares;
5. Quanto a monotonia, $f(x) = a^x$ pode-se afirmar:

- Se $a > 1$, a função exponencial é crescente;
- Se $0 < a < 1$, a função exponencial é crescente;

4. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição: Chama-se função logarítmica a uma função do tipo $f(x) = \log_a x$, onde x > 0, *a > 0 e a ≠ 1.*

Exemplos: Algumas funções exponenciais

$f(x) = \log_2 x$ $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $h(x) = \log_{0,9}(3x + 5)$ $n(x) = \lg(9 - x^2)$ $t(x) = \ln(x - 2)$

■ O valor de ***x*** é designado de logaritmando e valor de ***a*** é designado de base;
■ O valor de ***a***, deve ser positivo e diferente de um, isto é: a > 0 e a ≠ 1;
■ Se o valor de a, for maior que um a função logarítmica é crescente s se estiver entre 0 á 1, a função logarítmica é decrescente;
■ O gráfico de uma função logarítmica é uma curva;

Representação gráfica da função Logarítmica

Representemos graficamente as funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ para tal devemos achar os valores para $y = -2$, $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ e $y = 2$, organizados numa tabela de valores, assim vamos:

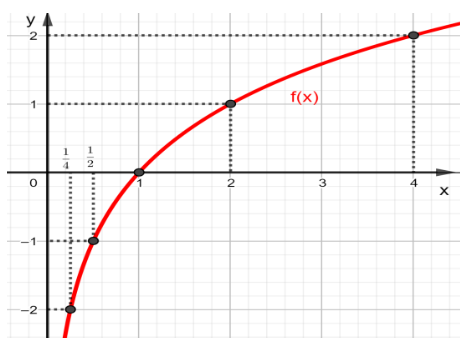
Exemplo1: representemos graficamente a função $f(x) = \log_2 x$

Tabela de valores

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$y = \log_2 \frac{1}{4} = -2$
$\frac{1}{2}$	$y = \log_2 \frac{1}{2} = -1$
1	$y = \log_2 1 = 0$
2	$y = \log_2 2 = 1$
4	$y = \log_2 4 = 2$

Gráfico

a > 1



Estudo da função

1. Domínio (D_f): D_f: x∈]0, +∞[ou x∈IR^+;
2. Contradomínio (D'_f): y∈IR;
3. Injectividade: A função é injectiva, sobrejectiva e sobrejectiva;
4. Paridade: A função não par nem ímpar;
5. Variação da monotonia:
A função é crescente em todo seu domínio;
6. Variação do sinal:
A função é positiva em todo seu domínio;
•]0, 1[a função é negativa;
•]1, +∞[a função é positiva;

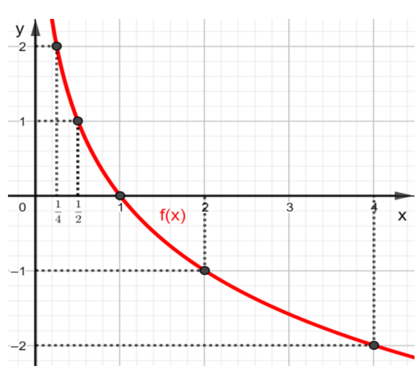
Exemplo 2: representemos graficamente a função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Tabela de valores

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{4}$	$y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$
$\frac{1}{2}$	$y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$
1	$y = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
2	$y = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
4	$y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

Gráfico

0 < a < 1



Estudo da função

1. Domínio (D_f): D_f: x∈]0, +∞[ou x∈IR^+;
2. Contradomínio (D'_f): y∈IR;
3. Injectividade: A função é injectiva, sobrejectiva e sobrejectiva;
4. Paridade: A função não par nem ímpar;
5. Variação da monotonia:
A função é crescente em todo seu domínio;
6. Variação do sinal:
A função é positiva em todo seu domínio;
•]0, 1[a função é positiva;
•]1, +∞[a função é negativa;

Conclusão: Sobre a logarítmica podemos construir que:

1. O gráfico de uma função logarítmica é uma curva;
2. O contradomínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais, isto é: D'_f: y∈IR;
3. As funções logarítmicas são injectivas, sobrejectivas e bijectivas;
4. As funções logarítmicas não são pares nem ímpares;
5. Quanto a monotonia, $f(x) = \log_a x$ pode-se afirmar:

• Se a > 1, a função logarítmica é crescente;

• Se 0 < a < 1, a função logarítmica é crescente;

5. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

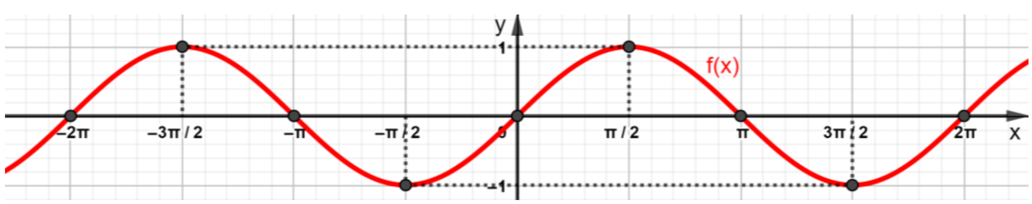
Chamam-se funções trigonométricas à funções que envolvem razões trigonométricas: Seno, Cosseno, Tangente e Cotangente.

5.1. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA SENO

Chama-se função seno à aplicação que cada número rel x, faz corresponder o seno de um ângulo cuja medida em radiano, isto é, f(x) = senx.

Representação gráfica da função seno

x(Graus)	**− 360º**	**− 270º**	**− 180º**	**− 90º**	**0º**	**90º**	**180º**	**270º**	**360º**
x(Radiano)	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = senx	**0**	**1**	**0**	**−1**	**0**	**1**	**0**	**−1**	**0**



Conclusão: Sobre função seno: f(x) = senx, podemos construir que:

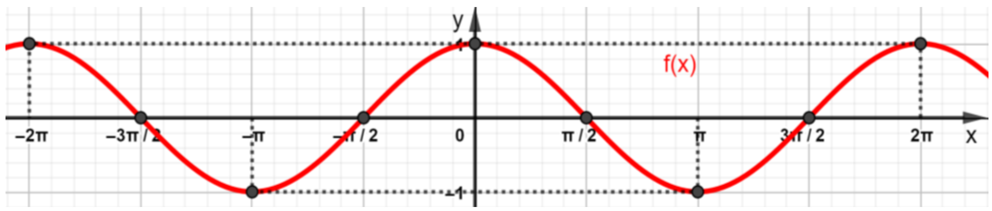
1. O gráfico de uma funcão seno é sinusóide;
2. O domínio da função seno é o conjunto dos números reais, isto é: D'_f: y∈IR;
3. O contradomínio da função seno é $[-1, 1]$ isto é: $-1 \leq \text{senx} \leq 1$;
4. A função seno é períodica no seu domínio (completa as voltas em cada 2π), daí T = 2π;
5. A função seno não é injectiva, não é sobrejectivas nem bijectivas;
6. A função seno é ímpar;

5.2. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA COSSENO

Chama-se função cosseno à aplicação que cada número rel x, faz corresponder o seno de um ângulo cuja medida em radiano, isto é, f(x) = cosx.

<u>Representação gráfica da função cosseno</u>

x(Graus)	**− 360º**	**− 270º**	**− 180º**	**− 90º**	**0º**	**90º**	**180º**	**270º**	**360º**
x(Radiano)	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	**0**	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = cosx	**1**	**0**	**−1**	**0**	**1**	**0**	**−1**	**0**	**1**



<u>Conclusão</u>: Sobre função seno: f(x) = cosx, podemos construir que:

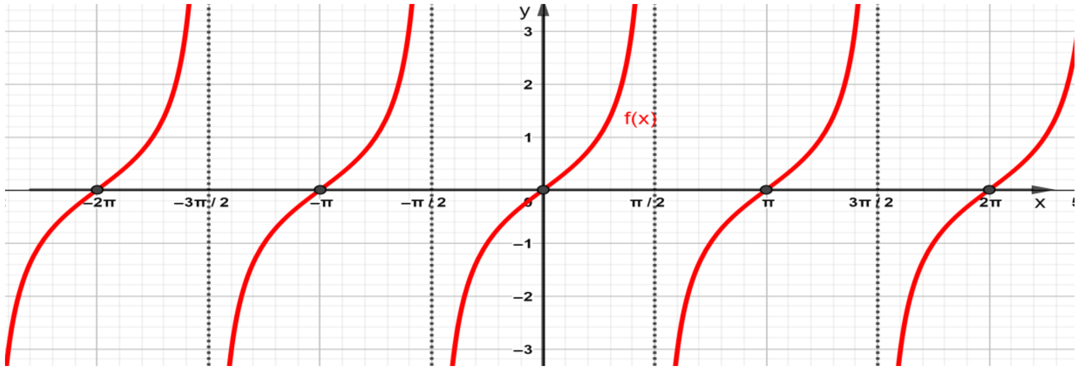
1. O gráfico de uma função cosseno é co-sinusóde;
2. O domínio da função seno é o conjunto dos números reais, isto é: D_f: y∈IR;
3. O contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$ isto é: $-1 \leq$ senx ≤ 1;
4. A função cosseno é períodica no seu domínio (completa as voltas em cada 2π), daí T = 2π;
5. A função cosseno não é injectiva, não é sobrejectivas nem bijectivas;
6. A função cosseno é par;

5.3. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA TANGENTE

Chama-se função tangente à aplicação que cada número real x, faz corresponder o seno de um ângulo cuja medida em radiano, isto é, f(x) = tgx.

<u>Representação gráfica da função tangente</u>

x(Graus)	**− 360º**	**− 270º**	**− 180º**	**− 90º**	**0º**	**90º**	**180º**	**270º**	**360º**
x(Radiano)	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	**0**	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = tgx	**0**	$\nexists$	**0**	$\nexists$	**0**	$\nexists$	**0**	$\nexists$	**0**



Conclusão: Sobre função tangente: f(x) = tgx, podemos construir que:

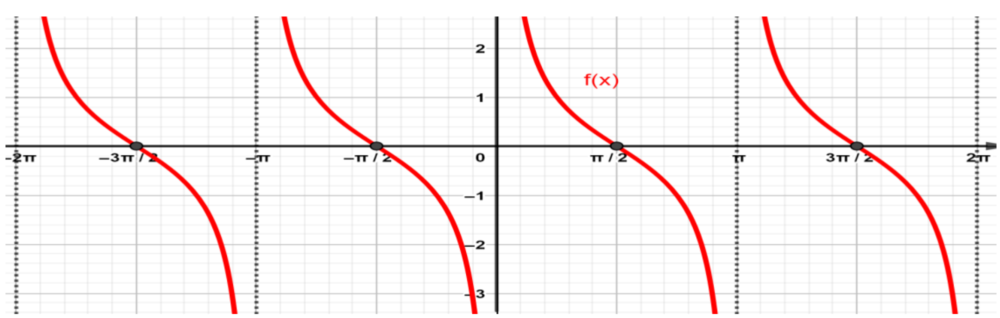
1. O gráfico de uma função tangente é tangetóide;
2. O contradomínio da função tangente é x∈IR\{ $\frac{\pi}{2}$ + kπ};
3. O contradomínio da função tangente é o conjunto dos números reais, isto é: D'_f: y∈IR;
4. A função tangente é periódica no seu domínio (completa as voltas em cada π), daí T = π;
5. A função tangente não é injectiva, é sobrejectivas não é bijectivas;
6. A função tangente é ímpar;

5.4. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA COTANGENTE

Chama-se função cotangente à aplicação que cada número real x, faz corresponder o seno de um ângulo cuja medida em radiano, isto é, f(x) = cotgx.

Representação gráfica da função cotangente

x(Graus)	**− 360º**	**− 270º**	**− 180º**	**− 90º**	**0º**	**90º**	**180º**	**270º**	**360º**
x(Radiano)	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	**0**	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = cotgx	**0**	∄	**0**	∄	**0**	∄	**0**	∄	**0**



Conclusão: Sobre função cotangente: f(x) = cotgx, podemos construir que:

1. O gráfico de uma funcão cotangente é co-tangetóide;
2. O contradomínio da função cotangente é $x \in IR \backslash \{k\pi\}$;
3. O contradomínio da função cotangente é o conjunto dos números reais, isto é: D'_f: $y \in IR$;
4. A função cotangente é períodica no seu domínio (completa as voltas em cada π), daí T = π;
5. A função cotangente não é injectiva, é sobrejectivas não é bijectivas;
6. A função cotangente é par;

5.5. DETERMINAÇÃO DO CONTRADÓMIO E PERÍODO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTICAS

■ Determinação do contradomínio de funções trigonométricas

O contradomínio da função seno e funções cosseno é $[-1, 1]$ ou seja $-1 \leq \text{senx} \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$, enquanto, o contradomínio da função tangente cotangente é o conjunto dos números reais, assim sendo, só determinaremos o contradomínio para funções seno e cosseno completos, isto é para funções desta natureza: **f(x) = Asen(ax + b) + B** e **g(x) = Acos(ax + b) + B**.

Exemplos: Determinar o contradomínio de seguintes funções:

(a) f(x) = 5senx **(b) g(x) = 7 + senx** **(a) $h(x) = 3\cos(2x + \frac{3\pi}{2}) - 5$**

Resolução:

(a) f(x) = 5senx

$y \in [-1, 1]$

$y \in [-1, 1]$ /•**(5)**

$y \in [-5, 5]$

ou

$-1 \leq \text{senx} \leq 1$

$-1 \leq \text{senx} \leq 1$ /•**(5)**

$-5 \leq \text{senx} \leq 5$

Daí:

D'_f: $y \in [-5, 5]$

(b) g(x) = 7 + senx

$y \in [-1, 1]$

$y \in [-1, 1]$ /+**(7)**

$y \in [-1 + 7, 1 + 7]$

$y \in [6, 8]$

ou

$-1 \leq \text{senx} \leq 1$

$-1 \leq \text{senx} \leq 1$ /+**(7)**

$-1 + 7 \leq \text{senx} \leq 1 + 7$

$6 \leq \text{senx} \leq 8$

Daí:

D'_f: $y \in [6, 8]$

(a) $h(x) = 3\cos(2x + \frac{3\pi}{2}) - 5$

$y \in [-1, 1]$

$y \in [-1, 1]$ /•**(3)**

$y \in [-3, 3]$ /**(− 5)**

$y \in [-3-5, 3-5]$

$y \in [-8, -2]$

ou

$-1 \leq \cos x \leq 1$ /•**(3)**

$-3 \leq \cos x \leq 3$ /**(− 5)**

$-3 - 5 \leq \cos x \leq 3 - 5$

$-8 \leq \cos x \leq -2$

Daí:

D'_f: $y \in [-8, -2]$

■ Determinação do período de funções trigonométricas

► **O período para funções $f(x) = A\text{sen}(ax + b) + B$ e $g(x) = A\cos(ax + b) + B$ é dado por:**

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{|a|}}$$

► **O período para funções $f(x) = A\text{tg}(ax + b) + B$ e $g(x) = A\text{cotg}(ax + b) + B$ é dado por:**

$$\boxed{T = \frac{\pi}{|a|}}$$

Exemplo 1: Determinar o período de funções:

(a) $f(x) = \text{sen}(4x - \frac{\pi}{2})$ (b) $f(x) = 2\cos(-2x + \frac{\pi}{3})$ (c) $f(x) = 3\text{tg}(2x - \frac{\pi}{5})$ (d) $f(x) = -4\cos(\frac{x}{3})$

Resolução:

(a) $f(x) = \text{sen}(4x - \frac{\pi}{2})$

$\mathbf{a = 4}$

$T = \frac{2\pi}{|a|}$

$T = \frac{2\pi}{|4|}$

$T = \frac{2\pi}{4}$

$T = \frac{\pi}{2}$

(b) $f(x) = 2\cos(-2x + \frac{\pi}{3})$

$\mathbf{a = -2}$

$T = \frac{2\pi}{|a|}$

$T = \frac{2\pi}{|-2|}$

$T = \frac{2\pi}{2}$

$T = \pi$

(c) $f(x) = 3\text{tg}(2x - \frac{\pi}{5})$

$\mathbf{a = 2}$

$T = \frac{\pi}{|a|}$

$T = \frac{\pi}{|2|}$

$T = \frac{\pi}{2}$

(d) $f(x) = -4\text{cotg}(\frac{x}{3})$

$\mathbf{a = \frac{1}{3}}$

$T = \frac{\pi}{|a|}$

$T = \frac{\pi}{|\frac{1}{3}|}$

$T = \frac{\pi}{\frac{1}{3}}$

$T = 3\pi$

Exemplo 2: Determinar o valor de m, sendo dado período função:

(a) $f(x) = 4\cos(mx + \frac{\pi}{10})$ e $T = 4\pi$ (b) $f(x) = 2\text{tg}(\frac{5\pi}{2} - \frac{2x}{m})$ e $T = 3\pi$

Resolução:

$\mathbf{a = m}$

$T = \frac{2\pi}{|a|}$

$\frac{2\pi}{|m|} = 4\pi$

$\frac{2\pi}{m} = 4\pi$

$m = \frac{2\pi}{4\pi}$

$m = \frac{1}{2}$

Solução: $\{\frac{1}{2}\}$

Resolução:

$\mathbf{a = -\frac{2}{m}}$

$T = \frac{2\pi}{|a|}$

$\frac{2\pi}{|-\frac{2}{m}|} = 3\pi$

$\frac{2\pi}{\frac{2}{m}} = 3\pi$

$\pi = \frac{6\pi}{m}$

$m = \frac{6\pi}{\pi}$

$m = 6$

Solução: { 6 }

3.5. FUNÇÃO HOMOGRÁFICA OU HOMÓGRAFA

Uma função é uma função do tipo $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ sendo a, b, c e d coeficientes reais, mas $a \neq 0$ e $c \neq 0$.

Exemplos das funções homográficas:

(a) $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 4}$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ e $d = -4$ (b) $f(x) = \frac{-3x - 6}{2x + 5}$, $a = -3$, $b = -6$, $c = 2$ e $d = 5$

As características da função homográfica são:

■ **A função tem duas assintótas: Assintótas Vertical (A.V.) e Assintótas Horizontal (A.H);**

$$\boxed{\textbf{A.V: } x = -\frac{d}{c} \quad \text{e} \quad \textbf{A.H: } y = \frac{a}{c}}$$

■ **O domínio das funções é o conjuntos dos números reais diferente da assintóta vertical, isto é, Df: x∈ IR\{A.V} ou seja Df: x∈ IR\{$-\frac{d}{c}$};**

■ **O contradomínio das funções é o conjuntos dos números reais diferente da assintóta vertical, isto é, Df: y∈ IR\{A.H} ou seja Df:yx∈ IR\{$\frac{a}{c}$};**

Exemplo 1: Considere a função $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$. Determinar:

Os valores dos coeficientes são: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 1$

(a) As equações das assintótas

• A.V: $x = -\frac{d}{c} = -\frac{1}{1} = -1$; e • A.H: $y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1$;

(b) O domínio da função

D_f: x∈ IR\{A.V} ⇔ Df: x∈ IR\{-1};

(c) O contradomínio da função

D'_f: x∈ IR\{A.H} ⇔ Df: x∈ IR\{1};

(d) Os pontos de intersecção com os eixos ordenados

• Com eixo das abcissas: Zeros da função:

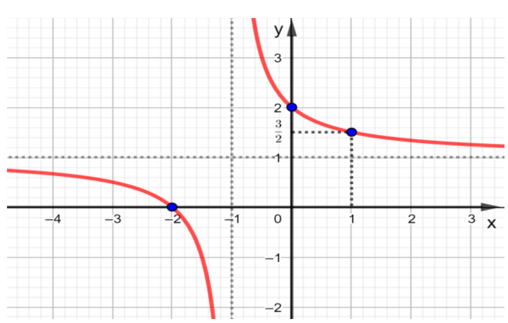
$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x + 2}{x + 1} = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$; tem-se **$(-2, 0)$;**

• Com eixo das ordenadas: Ordenada na origem: x = 0

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{0 + 2}{0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$, tem-se **(0, 2);**

(e) Esboço do gráfico da função

• Ponto auxiliar: $x = 1 \Rightarrow y = f(1) = \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ tem-se: $(1, \frac{3}{2})$;



As funções homográficas $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ pode ser transformada na forma $f(x) = \frac{r}{cx + d} + q$, para tal basta dividir o numerador por denominador, onde r é o resto da divisão e q é o quociente. Vejamos um exemplo, vamos transformar a função $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$ em $f(x) = \frac{r}{cx + d} + q$, vamos determinar o r e q desta fracção $\frac{x + 2}{x + 1}$ **ora vejamos:**

$$\begin{array}{r|l} x + 2 & x + 1 \\ \cline{2-2} -(x + 1) & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{r = 1 \text{ e } q = 1, \text{ então: } f(x) = \frac{x + 2}{x + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x + 1} + 1}$$

Exemplo 2: Considere a função $f(x) = \frac{2x - 2}{2x + 3}$. Determinar:

Os valores dos coeficientes são: $a = 2$, $b = -2$, $c = 2$ e $d = 3$

(a) As equações das assintótas

• A.V: $x = -\frac{d}{c} = -\frac{3}{2}$; e • A.H: $y = \frac{a}{c} = \frac{2}{2} = 1$;

(b) O domínio da função

D_f: $x \in IR \backslash \{A.V\} \Leftrightarrow D_f$: $x \in IR \backslash \{-\frac{3}{2}\}$;

(c) O contradomínio da função

D'_f: $x \in IR \backslash \{A.H\} \Leftrightarrow D_f$: $x \in IR \backslash \{1\}$;

(d) Os pontos de intersecção com os eixos ordenados

• Com eixo das abcissas: Zeros da função:

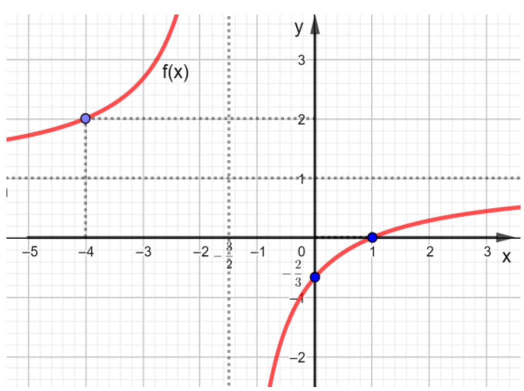
$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - 2}{2x + 3} = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$; tem-se (1, 0);

• Com eixo das ordenadas: Ordenada na origem: $x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 2}{2 \cdot 0 + 3} = -\frac{2}{3}$, tem-se $(0, -\frac{2}{3})$;

(e) Esboço do gráfico da função

• **Ponto auxiliar:** $x = -4 \Rightarrow y = f(1) = \frac{2 \cdot (-4) - 2}{2 \cdot (-4) + 3} = \frac{-10}{-5} = 2$; tem-se: $(-4, 2)$;



(f) Escrever a função na forma $f(x) = \frac{r}{cx + d} + q$

$$\begin{array}{r|l} 2x - 2 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} -(2x + 3) & \quad 1 \\ \cline{1-1} -5 & \end{array}$$

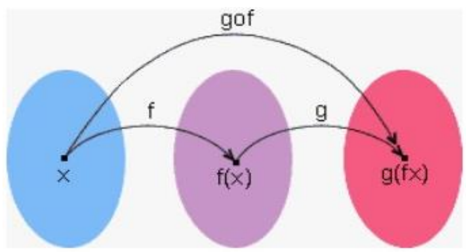
$$\mathbf{r = -5 \text{ e } q = 1, \text{ então: } f(x) = \frac{2x - 2}{2x + 3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-5}{2x + 3} + 1}$$

3.6. COMPOSIÇÃO DAS FUNÇÕES – FUNÇÃO COMPOSTA

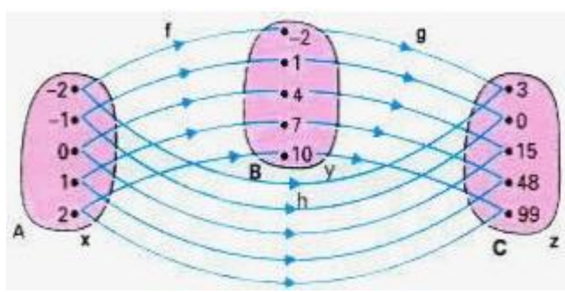
Conceito: *A função composta, também chamada de função de função é duas ou mais funções. Dada duas funções, f e g a composta de f com g escreve-se gof (lê-se: g após f ou composta de f com g) cujo o domínio da função g coincide ou tenha parte com o contradomínio da função f e é definida por:*

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g[f(x)]}$$

3.6.1. Ilustração gráfica da composição entre as funções f e g



Consideremos as aplicações f:A→B, g:B→C e h:A→C sendo dadas as funções: $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 9x^2 + 24x + 15$.



Constatações:

• A função h(x) é função composta de g após f, ou seja h(x) = g[f(x)];

- h(x) = g[f(x)] = g(y) = z;
- h(-2) = g[f(-2)] = g(-2) = 3;
- h(-1) = g[f(-1)] = g(1) = 0;
- h(0) = g[f(0)] = g(4) = 15;
- h(1) = g[f(1)] = g(7) = 48;
- h(2) = g[f(2)] = g(10) = 99;

■ O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os números reais que pertencem ao domínio de f tais que f(x) pertencente ao domínio de g. Simbolicamente: $\mathbf{D_{gof} = \{ x \in IR: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \}}$.

3.6.2. Propriedades sobre composição de funções

Propriedade 1: Se f: A → B e g: B → C são funções injectivas, então **g◦f** é injectiva;

Propriedade 2: Se f: A → B e g: B → C são funções sobrejectivas, então **g◦f** é sobrejectivas

Propriedade 3: Se f: A → B e g: B → C são funções bijectivas, então **g◦f** é bijectiva;

Propriedade 4: A composição de duas funções não é comutativa, isto é: **f◦g ≠ g◦f**

Propriedade 5: A composição de três ou mais funções é associativa, isto é: **(f◦g)◦h = (f◦g)◦h**

Exemplo 1: Considere as seguintes funções f(x) = 2x + 4 e g(x) = 3x – 5. Determinemos:

(a) fog(x) **(b) gof(x)** **(c) fof(x)** **(d) gog(x)**

Resolução:

Para achar a função composta, substitui-se a variável x por uma função.

(a) fog(x) = f[g(x)] = 2•g(x) + 4 = 2•(3x – 5) + 4 = 6x – 10 + 4 = 6x – 6;

(b) gof(x) = g[f(x)] = 3•f(x) – 5 = 3•(2x + 4) – 5 = 6x + 12 – 5 = 6x + 7;

(c) fof(x) = f[f(x)] = 2•f(x) + 4 = 2•(2x + 4) + 4 = 4x + 8 + 4 = 4x + 12;

(d) gog(x) = g[g(x)] = 3•(3x – 5) – 5 = 9x – 15 – 5 = 9x – 20;

Exemplo 2: Considere as seguintes funções f(x) = $\frac{3}{2x-5}$ e g(x) = 5x + 3. **Determinar:**

(a) fog(x) **(b) fof(x)** **(c) gof(x)** **(d) gog(x)**

Resolução:

(a) fog(x) = f[g(x)] = $\frac{3}{2•g(x)-5} = \frac{3}{2•(5x+3)-5} = \frac{3}{10x+6-5} = \frac{3}{10x-1}$;

(b) fof(x) = f[f(x)] = $\frac{3}{2•f(x)-5} = \frac{3}{2•\frac{3}{2x-5}-5} = \frac{3}{\frac{6}{2x-5}-5} = \frac{3}{\frac{6-10x+25}{2x-5}} = \frac{3}{\frac{-10x+31}{2x-5}} = \frac{3(2x-5)}{-10x+31} = \frac{6x-15}{-10x+31}$;

(1) (2x – 5)

(c) gof(x) = g[f(x)] = 5•f(x) + 3 = 5•$\frac{3}{2x-5}$ + 3 = $\frac{15}{2x-5} + 3 = \frac{15+6x-15}{2x-5} = \frac{6x}{2x-5}$;

(1) (2x – 5)

(d) gog(3) - **Pode-se resolver de duas maneiras:**

1ª maneira: Consiste primeiro encontrar a função gog(x) e de seguida substituir-se a variável x por 3;

• gog(x) = g[g(x)] = 5•g(x) + 3 = 5•(5x + 3) + 3 = 25x + 15 + 3 = 25x + 18, substituindo x por 3, tem-se:
• gog(x) = 25•3 + 18 = 93;

2ª maneira: Consiste em substituir-se a variável x por 3, na função g(x) = 5x + 3, de seguida o resultado obtido, novamente substituir-se a variável x, o resultado é do gog(3);
• gog(3) = g(5•3 + 3) = g(18) = 5•18 + 3 = 93;

(e) fog(−1) = f[g(−1)] = f[5•(−1) + 3] = f(−2) = $\frac{3}{2•(-2)-5} = \frac{3}{-4-5} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$;

Exemplo 3: Considere a seguinte função f definida pela tabela seguinte:

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	5	6	1	3	2	4

Determinar:

(a) f(3) = 1;

(b) f(1) = 5;

(c) fof(5) = f(2) = 6;

(d) fofof(4) = fof(3) = f(1) = 5;

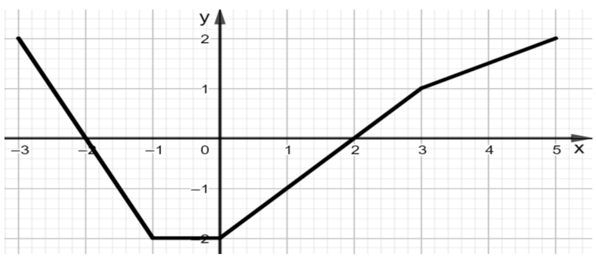
(e) fofofofof(6) = fofofof(4) = fofof(3) = fof(1) = f(5) = 2;

(f) fofof(2) – fof(3) + f(2) = fof(6) – f(1) + 6 = f(4) – 5 + 6 = 3 + 1 = 4;

(g) f(1) – fof(3) – fofof(5) = 5 – f(1) – fof(2) = 5 – 5 – f(6) = – 4;

(h) $[fofofofof(2)]^4 = [fofofof(6)]^4 = [fofof(4)]^4 = [fof(3)]^4 = [f(1)]^4 = 5^4 = 625$;

Exemplo 4: Dada a função g definida pelo gráfico



Determine:

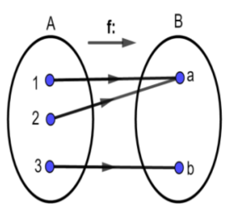
(a) gog(0) = g(−2) = 0;

(b) gogog(3) = gog(1) = g(−1) = − 1;

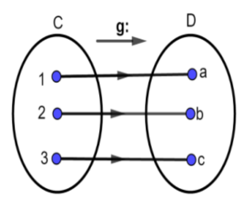
(c) gogogog(5) = gogog(2) = gog(0) = g(−2) = 0;

3.7. FUNÇÕES INVERSAS

Conceito: Consideremos as funções f e g representadas por um diagrama de setas:

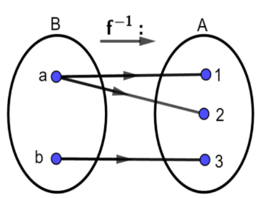


f não é injectiva

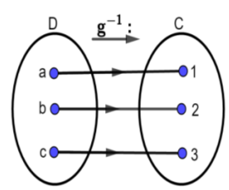


g é injectiva

Invertendo o sentido das setas, considerando agora correspondências inversas de B para A e de D para C, como os diagramas a seguir:



f^{-1} não é função de B para A, porque o objecto *"a"* tem duas imagens (a, 1) e (a, 2).



g^{-1} é correspondência inversa de g é uma função de D para C.

■ Pode-se concluir que, só as funções injectivas têm inversa, o símbolo $\boldsymbol{f^{-1}}$ representa a função inversa de ***f***;

3.7.1. Propriedades sobre funções inversas

1. Seja $f^{-1}(x)$ a função inversa de f(x), domínio da função inversa é o contradomínio f(x) e o seu domínio é o domínio da função f(x);

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_{f^{-1}} = D'_f \\ \bullet\ D'_f = D_{f^{-1}} \end{array}\right\} \quad \mathbf{f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

2. Se a função f(x) é uma função monótona crescente, então a sua inversa é monótona crescente. Se a função f(x) é uma função monótona crescente, então a sua inversa é monótona crescente.

3. Seja f uma função real de variável real que possui inversa f^{-1}, é válido $f^{-1}[f(x)] = x$, $\forall_{x \in D_f}$ ou também válido $f[f^{-1}(x)] = x$, $\forall_{x \in D_{f^{-1}}}$;

4. Os gráficos $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são simétricos em relação a recta $y = x$;

3.7.3. Determinação da expressão analítica da função inversa

Sendo dada a expressão analítica y = f(x) para determinar a sua inversa fazemos o seguinte:

1º: Resolvermos a igualdade ou seja a equação a ordem de x (isolar o x);

2º: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

Exemplo 1: Dada a função $f(x) = 3x - 2$;

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x;

$$y = 3x - 2$$

$$3x - 2 = y$$

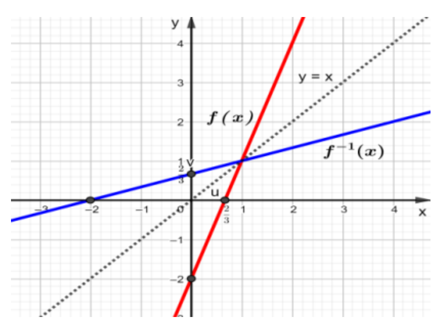
$$3x = y + 2$$

$$x = \frac{y+2}{3}$$

2º Passo: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}}$$

Representemos graficamente os gráficos dessas funções $f(x) = 3x - 2$ e $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ no mesmo SCO.



Exemplo 2: Dada a função $f(x) = 4^{x-2}$;

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x;

$$4^{x-2} = y$$

$$x - 2 = \log_4 y$$

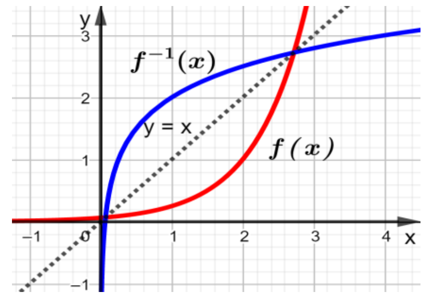
$$x = \log_4 y + 2$$

2º Passo: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

$$\boxed{f^{-1}(x) = \log_4 x + 2}$$

Representemos graficamente os gráficos dessas funções

$f(x) = 4^{x-2}$ e $f^{-1}(x) = \log_4 x + 2$ no mesmo SCO.



Exemplo 3: Dada a função $f(x) = \log_{0,7}(x - 1) + 2$;

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x;

$$\log_{0,7}(x - 1) + 2 = y$$

$$\log_{0,7}(x - 1) = y - 2$$

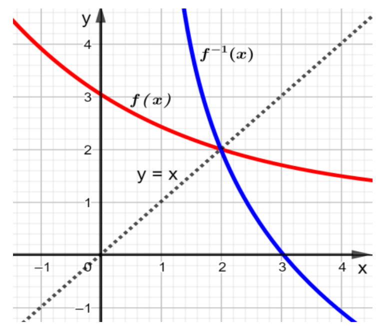
$$x - 1 = 0{,}7^{y-2}$$

$$x = 0{,}7^{y-2} + 1$$

2º Passo: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

$$\boxed{f^{-1}(x) = 0{,}7^{x-2} + 1}$$

Representemos graficamente os gráficos dessas funções $f(x) = \log_{0,7}(x - 1) + 2$ e $f^{-1}(x) = 0{,}7^{x-2} + 1$ no mesmo SCO.



Exemplo 4: Dada a função $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$;

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x;

$$\frac{2x-3}{x+1} = y$$

$$2x - 3 = y(x + 1)$$

$$2x - 3 = xy + y$$

$$2x - xy = y + 3$$

$$x(2 - y) = y + 3$$

$$x = \frac{y+3}{2-y}$$

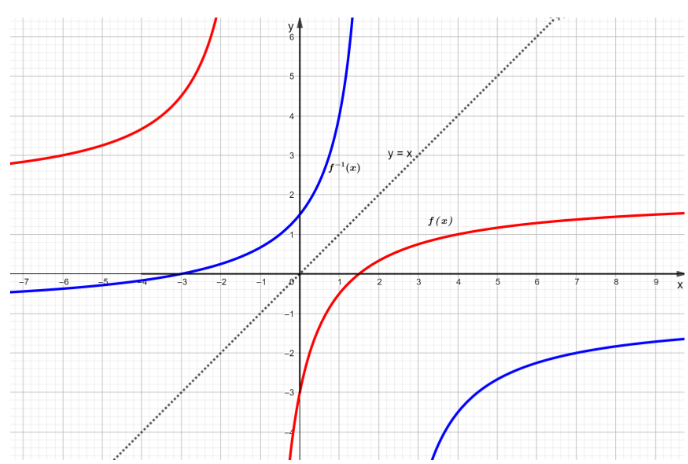
$$x = \frac{y+3}{-y+2}$$

2º Passo: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+3}{-x+2}}$$

Representemos graficamente os gráficos dessas funções

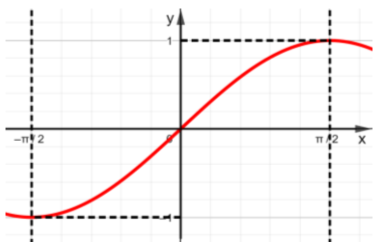
$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ e $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{-x+2}$ no mesmo SCO.



3.7.4. Funções inversas Trigonométricas

1. Função arcseno

A função seno, isto é, f: IR → IR tal que f(x) = sen x evidentemente não é injectiva nem sobrejectiva. Se considerarmos a função seno restrita ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e com contradomínio $[-1; 1]$, isto é, f: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ tal que f(x) = senx, notamos que:



1º: No intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, f é injentiva pois a função seno é crescente, então: $\mathbf{x_1 \neq x_2 \Rightarrow sen(x_1) \neq sen(x_2)}$**;**

2º: f é sobrejectiva pois para todo y∈ [-1, 1] existe x ∈ $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tal que sen x= y;

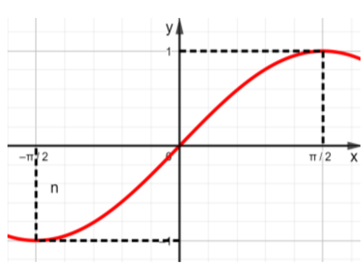
Assim sendo, a função f admite inversa e f^{-1} é denominado função arco-seno. Notemos que f^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e associa a cada x∈ $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que y é um arco cujo seno é x e ecreve-se:

y = arc sen x temos que:

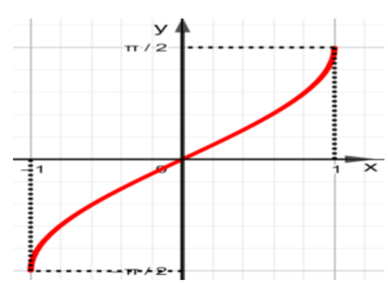
$$\boxed{\mathbf{y = arc\ sen\ x \Leftrightarrow sen\ y = x\ e\ -\frac{\pi}{2} \leq y \geq \frac{\pi}{2}}}$$

Já vimos que os gráfico de duas funções inversa entre si são simétricas em relação á recta y = x, então a partir do gráfico de f obtemos o gráfico de f^{-1}:

f(x) = senx



$\mathbf{f^{-1}(x) = arcsenx}$



Exemplo: Determinar a inversa da função sendo dada por $f(x) = 3sen(x - \frac{\pi}{3}) + 2$.

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x;

$$3sen(x - \frac{\pi}{3}) + 2 = y$$

$$3sen(x - \frac{\pi}{3}) = y - 2$$

$$sen(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{y-2}{3}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = arc\ sen(\frac{y-2}{3})$$

$$x = arc\ sen(\frac{y-2}{3}) + \frac{\pi}{3}$$

2º Passo: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

$$\boxed{f^{-1}(x) = arc\ sen(\frac{x-2}{3}) + \frac{\pi}{3}}$$

2. Função arccosseno

A função cosseno, isto é, f: IR → IR tal que f(x) = cos x evidentemente não é injectiva nem sobrejectiva. Se considerarmos a função cosseno restrita ao intervalo $[0; \pi]$ e com contradomínio $[-1, 1]$, isto é, f: $[0; \pi] \rightarrow [-1, 1]$ tal que f(x) = cosx, notamos que:

1º: No intervalo [0, π], f é injentiva pois a função cosseno é decrescente, então: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \cos(x_1) \neq \cos(x_2)$;

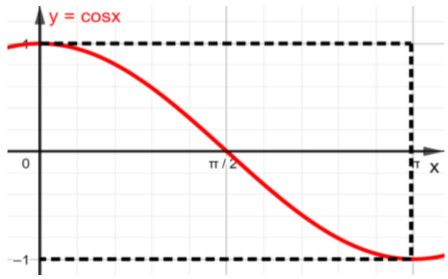
2º: f é sobrejectiva pois para todo y∈ [-1, 1] existe x ∈ [0, π], tal que cos x = y;

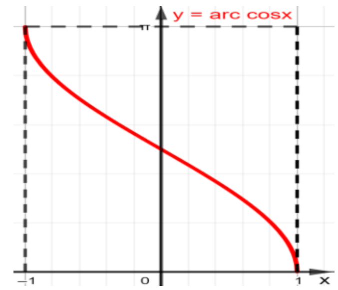
Assim sendo, a função f admite inversa e f^{-1} é denominado função arco-cosseno. Notemos que f^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio [0, π], e associa a cada x∈ [0, π], tal que y é um arco cujo cosseno é x e ecreve-se: **y = arc cos x** temos:

$$\boxed{y = arc\cos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi}$$

Como os gráfico de f e f^{-1} são simétricos em relação á recta y = x, podemos construir o gráfico de f^{-1} a partir de f.

f(x) = cosx **$f^{-1}(x)$ = arccosx**





Exemplo: Determinar a função sendo dada por f(x) = cos(2x + $\frac{\pi}{2}$) – 4.

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x;

$$\cos(2x + \frac{\pi}{2}) - 4 = y$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = y + 4$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = \text{arc}\cos(y + 4)$$

$$2x = \text{arc}\cos(y + 4) - \frac{\pi}{2}$$

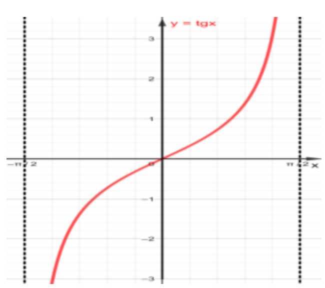
$$x = \frac{\text{arc}\cos(y+4)}{2} - \frac{\pi}{4}$$

2º Passo: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{\text{arc}\cos(x+4)}{2} - \frac{\pi}{4}}$$

3. Função arctangente

A função tangente, isto é, **f:**{ **x** | **x** ≠ $\frac{\pi}{2}$ + **kπ** } → **IR** tal que f(x) = tgx é sobrejectiva. Se considerarmos a função tangente restrita ao intervalo aberto **] -** $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ [e com contradomínio IR, isto é, **f:]** $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ [→ **IR**, tal que f(x) = tgx, notamos que:



1º: No intervalo [$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$], f é injentiva pois a função tangente é crescente, então: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ **tg(x_1) ≠ tg(x_2);**

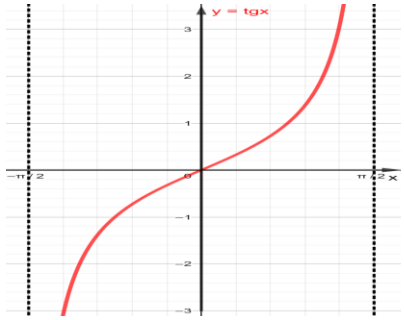
2º: f é sobrejectiva pois para todo y∈ [-1, 1] existe x ∈ [$-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] tal que sen x= y;

Deste modo a função f admite inversa e f^{-1} é denominado função arco cotangente. Notemos que f^{-1} tem domínio IR, contradomínio]$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$[e associa a cada x∈ IR um y∈]$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$[tal que y é um arco cuja tangente é x e ecreve-se: **y = arc tg x** temos:

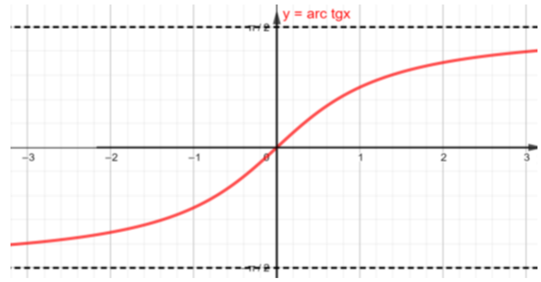
$$\boxed{y = \text{arc tg } x \Leftrightarrow \text{tg } y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

Como de hábito vamos construir o gráfico de f^{-1} a partir f.

f(x) = tgx



f^{-1}(x) = arc tgx



Exemplo: Determinar a função sendo dada por $f(x) = tg(x + \frac{3\pi}{5}) - 2$.

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x;

$$tg(x + \frac{3\pi}{5}) - 2 = y$$

$$tg(x + \frac{3\pi}{5}) = y + 2$$

$$x + \frac{3\pi}{5} = \text{arc } tg(y + 2)$$

$$x = \text{arc } tg(y + 2) - \frac{3\pi}{5}$$

2º Passo: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

$$\boxed{f^{-1}(x) = \text{arc } tg(x + 2) - \frac{3\pi}{5}}$$

4. Função arccotangente

A função cotangente, isto é, **f:**$\{ x \mid x \neq \pi + k\pi \} \rightarrow$ **IR** tal que f(x) = tgx é sobrejectiva. Se considerarmos a função tangente restrita ao intervalo aberto **] 0, π** [e com contradomínio IR, isto é, **f:] 0, π** [→ **IR**, tal que f(x) = cotgx, notamos que:

f(x) = cotgx

1º: No intervalo]0, π[, f é injentiva pois a função cosseno é decrescente, então: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow cotg(x_1) \neq cotg(x_2)$;

2º: f é sobrejectiva pois para todo y∈IR existe x ∈]0, π[, tal que cotg x = y;

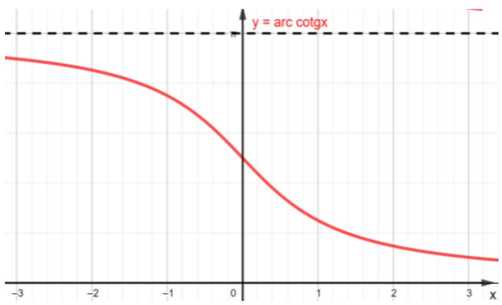
Deste modo a função f admite inversa e f^{-1} é denominado função arco tangente . Notemos que f^{-1} tem domínio IR, contradomínio $]0, \pi[$, e associa a cada x∈IR um y∈$]0, \pi[$, tal que y é um arco cuja cotangente é x e ecreve-se: **y = arc cotgx** temos:

$$\boxed{\mathbf{y = arc\ cotg\ x \Leftrightarrow cotg\ y = x\ e\ 0 < y < \pi}}$$

Como de hábito vamos construir o gráfico de f^{-1} a partir f.

f(x) = cotgx

$\mathbf{f^{-1}(x)}$ **= arc cotgx**



Exemplo: Determinar a função sendo dada por f(x) = 4cotg(x – $\frac{\pi}{10}$).

1º Passo: Resolvermos a equação a ordem de x;

$$4\text{cotg}(x - \frac{\pi}{10}) = y$$

$$\text{cotg}(x - \frac{\pi}{10}) = \frac{y}{4}$$

$$x - \frac{\pi}{10} = \text{arc cot}(\frac{y}{4})$$

$$x = \text{arc cot}(\frac{y}{4}) + \frac{\pi}{10}$$

2º Passo: Trocarmos as variáveis y por x e x por y;

$$\boxed{f^{-1}(x) = \text{arc cot}(\frac{x}{4}) + \frac{\pi}{10}}$$

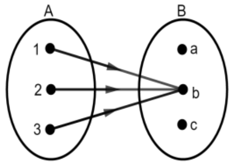
3.8. QUADRO DE RESUMO SOBRE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

FUNÇÃO	Características									
	Domínio	Contradomínio	Injectiva	Sobrejectiva	Bijectiva	Par	Ímpar	Periódica	Função Inversa	Monotonia
LINEAR $f(x) = ax + b$	$x \in IR$	$y \in IR$	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Função Linear	•a > 0; é crescente •a < 0; é decrescente
QUADRÁTICA $f(x) = ax^2 + bx + c$	$x \in IR$	Depende de cada função	Não	Não	Não	Sim (Nem todas)	Não	Não	Não tem inversa	Depende de cada função
EXPONENCIAL $f(x) = a^x$	$x \in IR$	Depende de cada função	Sim	Não	Não	Não	Não	Não	Função Logarítmica	•a >1; é crescente •0 <a < 1; é decrescente
LOGARÍTMICA $f(x)= \log_a x$	Depende de cada função	$y \in IR$	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Função Exponencial	•a >1; é crescente •0 <a < 1; é decrescente
HOMOGRÁFICA $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$x \in IR \backslash \{A.V\}$	$y \in IR \backslash \{A.H\}$	Sim	Não	Nãoa	Não	Não	Não	Funçao Homográfica	Depende de cada função
SENO $f(x) = A sen(ax + b) + B$	$x \in IR$	Depende de cada função	Não	Não	Não	Não	Sim	Sim	Função arcseno	Oscilante
CO - SENO $f(x) = A cos(ax + b) + B$	$x \in IR$	Depende de cada função	Não	Não	Não	Sim	Não	Sim	Função arccosseno	Oscilante
TANGENTE $f(x) = A tg(ax + b) + B$	$x \in IR \backslash \{A.V\}$	$y \in IR$	Não	Sim	Não	Não	Sim	Sim	Funçao arctangante	Crescente
CO - TANGENTE $f(x) = A cotg(ax + b) + B$	$x \in IR \backslash \{A.V\}$	$y \in IR$	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Função arccotangante	Decrescente

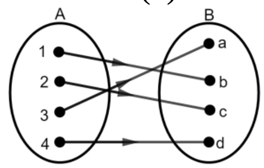
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Quais dos diagramas representam uma função de A para B?

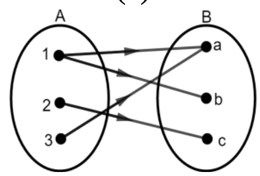
(a)



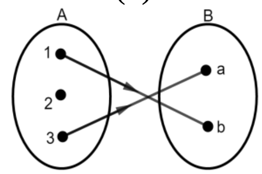
(b)



(c)

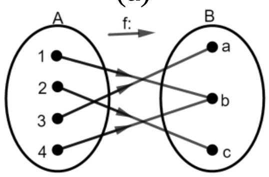


(d)

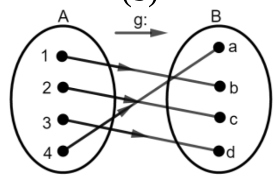


2. Dos diagramas abaixo, estude a injectividade de cada função (injectiva, sobrejectiva e bijectiva)

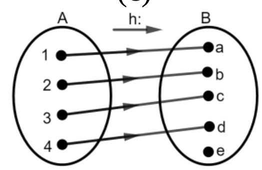
(a)



(b)

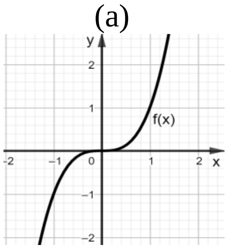


(c)

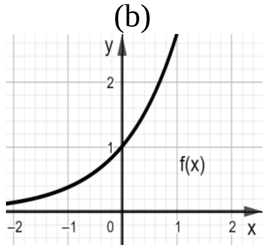


3. Dos gráficos abaixo, estude a injectividade de cada função;

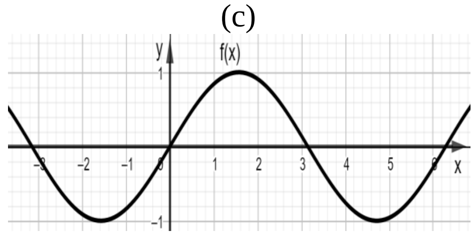
(a)



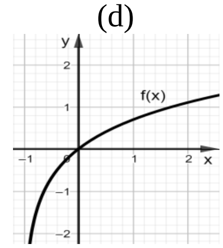
(b)



(c)



(d)



4. Dadas as funções estude analiticamente a paridade de cada função (par ou ímpar):

(a) $f(x) = x^2 + 3$ (b) $f(x) = 2x^3 + 2$ (c) $f(x) = -3x - 7$ (d) $f(x) = x^3 - 4$

5. Determine o valor de m de modo que as funções abaixo sejam lineares:

(a) $y = (m^2 - 1)x$ (b) $y = (m-2)x + m - 3$ (c) $y = (-\frac{2m}{3})x + \frac{1}{2}$

6. Dada a função $f(x) = -2x + 3$. **Determine:**

(a) $f(0)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(x) = 7$ (d) $f(x) = -5$

7. Determine os zeros das funções a seguir:

(a) $f(x) = 5x + 2$ (b) $f(x) = -2x$ (c) $f(x) = 5x - 3$ (d) $f(x) = 14 - 7x$

8. Determine o valor **k,** de modo que a função $f(x) = (3 - 2k)x + 5$ seja decrescente.

9. Dmnada a função $f(x) = (3 - m^2)x + 7$. Determine o valor de m de modo que a função seja:

(a) Constante (b) Crescente (c) Decrescente

10. Determine a expressão analítica de uma função linear f, sabendo que a recta passa pelos pontos (1, 2) e (3, 4).

11. O gráfico de f(x) = ax + b passa pelos pontos A(2, -5) e tem coeficiente angular de $\frac{1}{2}$. **Determine a expressão analítica da função.**

12. O gráfico de uma função linear passa por A(2, 4) e forma um ângulo de 30º com o eixo dos ox. **Determine o valor de a e b.**

13. Dada a função da recta f(x) = x – 2. **Determine:**

(a) A função da recta paralela a dada que passa pelo ponto (2, 5);

(b) A função da recta perpendicular a dada que passa pelo ponto (2, $-$ 4);

(c) Represente essas rectas no mesmo sistema cartesiano ortogonal;

14. Dadas as funções **f(x) = 3x – 7**, **g(x) = ax + 4** e **h(x) = bx – 2**. **Determine:**

(a) O valor de **a** sabendo que f(x) e g(x) são paralelas;

(b) O valor de **b** sabendo que h(x) e g(x) são perpendiculares;

15. Dois móveis A e B se deslocam com movimento rectilíneo uniforme, de acordo com as seguinte equações:

Móvel A: y = 4x – 1 **Móvel B: y = x + 5**

Representa num mesmo SCO os gráfico de A e B. determine o ponto de encontro dos dois móveis.

16. Na produção de peças numa indústria tem custo fixo de 8Mts mais custo variável de 0,50Mts por unidades produzidas.

(a) Escreva a lei da função; (b) Calcule o custo para 100 peças;

17. Num determinado parque de estacionamento, lê-se o seguinte: 20,00 mt entrada e 15,00 mt por hora de permanência do veiculo. **Determine:**

(a) A fórmula que estabelece o preço apagar por cada viatura.

(b) Quando vai pagar a viatura que ficar estacionada durante 4 horas?

18. Seja a função quadrática f(x) = $3x^2$ – 5x + 4. **Calcule f(-1), f(-2), f(10) e f(2).**

19. Dada a função quadrática a f(x) = x^2 – 8x + 12. Encontre os pontos que intercecão com os eixos x e y.

20. Assinale com V as verdadeiras e F as falsas as afirmações seguintes:

(a) O gráfico da função $y = x^2 + 2x$ não intercepta o eixo y;

(b) O gráfico da função $y = x^2 + 3x + 5$ possui concavidade para baixo;

(c) O gráfico da função $y = 5x - 7$ é decrescente;

(d) A equação $x^2 + 25 = 0$ possui duas raízes reais e diferentes;

(e) A soma das raízes da função $y = x^2 - 3x - 10$ é igual a 3;

21. Dada a função $f(x) = (m - 2)x^2 + 3x - 12$. **Determine o valor de m de modo que:**

(a) A função seja quadrática ou de 2º grau;
(b) A função seja linear ou de 1º grau;
(c) A parábola da função esteja virada para cima;
(d) A parábola da função esteja virada para baixo;

22. Dada a função $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$. **Determine:**

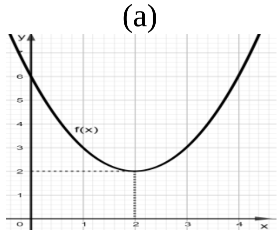
(a) Ordenada na origem;
(b) Zeros da função;
(c) As coordenadas do vértice;
(d) Soma das raízes;
(e) Produto das raízes;
(f) Esboce o seu gráfico;

23. Dada a função $f(x) = 2x^2 + 8x + 11$. **Determine:**

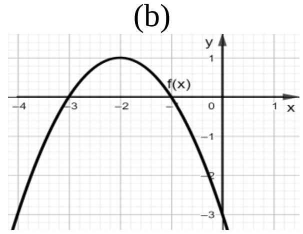
(a) Ordenada na origem;
(b) Zeros da função;
(c) As coordenadas do vértice;
(d) Soma das raízes;
(e) Produto das raízes;
(f) Esboce o seu gráfico;

24. Determine a expressão analítica de cada função representada pelos gráficos a seguir:

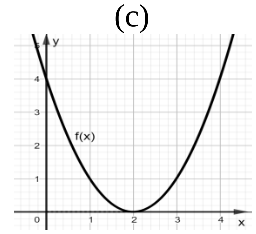
(a)



(b)



(c)



25. As raízes da equação $2x^2 + bx + c = 0$ são 3 e − 4. **Determine o valor de b – c?**

26. A função $y = x^2 + kx + m$ passa pelo pontos (1, 2) e (3, 12). **Apresente a expressão analítica da função.**

27. A diferenca entre dois números é 8. **Qual deve ser um deles para que o produto seja mínimo?**

28. A respeito das funções trigonométricas. **Assinale com V as verdadeiras e F as falsas as afirmações seguintes:**

(a) $f(x) = \cos(x + \pi)$ é equivalente à função $g(x) = -\cos(x)$ para todo $x \in IR$;

(b) $f(x) = \cos(x)$ é uma função par;

(c) $f(x) = \text{sen}(x)$ é uma função ímpar;

(d) $f(x) = \text{sen}(x + \pi)$ é equivalente à função $g(x) = -\text{sen}(x)$ para todo $x \in IR$;

29. Determine o período e esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = \text{sen}(4x) - 5$ (b) $y = 5\cos(2x + \frac{2\pi}{3})$ (c) $y = -\text{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) - 1$ (d) $y = \text{cotg}(-2x + \frac{\pi}{8}) - 3$

30. Determine o k nos seguintes casos:

(a) $f(x) = \text{cotg}(\frac{2x}{m} + \frac{\pi}{3})$, $T = 5\pi$;

(b) $h(x) = \cos(-8mx)$, $T = \frac{4\pi}{3}$;

(c) $m(x) = \text{tg}(\frac{mx}{7} - \frac{\pi}{5})$, $T = \frac{5\pi}{9}$;

(d) $g(x) = \text{sen}(2\pi - \frac{m}{3}x)$, $T = \frac{7\pi}{6}$;

31. Sejam f e g funções reais tais que $f(x) = 10 - 13x$ e $g(x) = 2x - 4$. **Determine.**

(a) $f[g(x)]$ (b) $g[f(x)]$ (c) $f[f(x)]$ (d) $g[g(x)]$.

32. Suponha a função real $g(x) = x + 1$ e $f(x) = x^4$. **Encontre:**

(a) $f[g(x)]$ (b) $g[f(x)]$ (c) $f[f(x)]$ (d) $g[g(x)]$.

33. Sejam f e g funções reais tais que $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x^2$. **Determine.**

(a) $f[g(0)]$ (b) $g[f(1)]$ (c) $f[f(2)]$ (d) $g[g(-2)]$.

34. Considere $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ e $g(x) = x - 1$. **Calcule f[g(4)].**

35. Seja $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = -2x - 1$. D**etermine:**

(a) $f[g(x)]$ (b) $g[f(x)]$ (c) $f[g(x)] - g[f(x)]$ (d) $f[f(0)] + g[g(0)]$.

36. As funções $f(x) = 3 - 4x$ e $g(x) = 3x + m$ são tais que $f[g(x)] = g[f(x)]$, qualquer que seja x real. **Determine valor de m.**

37. Sejam f e g funções reais, sendo que $f(x) = 4x - 2$ e $f[g(x)] = 2x + 10$. **Determine a lei de formação da função g(x).**

38. Sejam f e g funções reais tais que $f[g(x)] = -10x - 13$ e $g(x) = 2x + 3$. **Determine f(x).**

39. Dadas as funções reais $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = ax + b$, se $f[g(x)] = 12x + 8$, **Determine o valor de a + b.**

40. **Considere a seguinte função f definida pela tabela seguinte:**

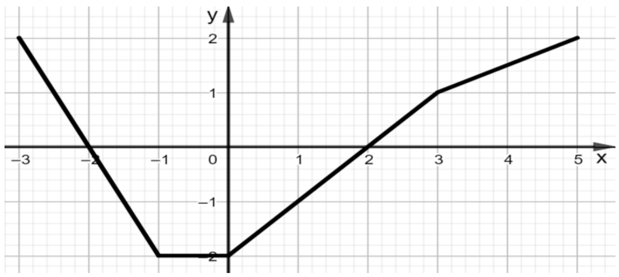
x	1	2	3	4	5	6
f(x)	4	5	6	3	2	1

Determinar:

(a) fofof(6)   (c) f(1) – fof(3) – fofof(5)   (e) $[\text{fofofofof}(2)]^3$

(b) fof(1)   (d) 4fofof(4) + 3fof(3) – 5fofof(5)   (f) – fofofof(1) + 2fofof(2) – 10fofof(3)

41. Dada a função g(x) definida pelo gráfico



Determine:

(a) gog(-0,5) – gogog(2);

(b) gogog(0) – gog(1) + gogog(−1);

(c) gogog(5) + gogog(-2) – gog(-3);

(d) -2gog(-2) - gog(-1) - 3gog(5);

(e) gogog(0) + gog(0) – gog(0);

42. Determine a função inversa das seguintes funções:

(a) $y = 4x + 3$ (b) $y = 7x$ (c) $y = 6x – 2$ (d) $y = 9x - 3$ (e) $y = -x + 7$

43. Determine a função inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = 10^{2x-5}$ (c) $h(x) = \log_{3,7}(8 - 5x)$ (e) $n(x) = 7^{\frac{5}{2x+3}}$ (g) $l(x) = \log_3(x - 3) + 2$

(b) $g(x) = \frac{3x-7}{4-5x}$ (d) $m(x) = e^{1-\frac{4}{3}x}$ (f) $t(x) = \ln(x + 3) – 2$ (h) $q(x) = \frac{3x+2}{3-2x} + 1$

44. Determine a função inversa das seguintes funções:

(a) $y = \text{sen}(4x) – 5$ (b) $y = 5\cos(x + \frac{2\pi}{3})$ (c) $y = -\text{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) - 1$ (d) $y = \text{cotg}(-2x + \frac{\pi}{8}) - 3$

45. Determine a função inversa das seguintes funções:

(a) $y = \text{arc sen}\,(3x + 2)$ (b) $y = -2\text{arc tg}(x - \frac{2\pi}{3})$ (c) $y = \text{arc cos}\,(5x + 3) - \frac{\pi}{6}$ (d) $y = \text{arc cotg}(10x + 2)$

46. Seja a função f: IR→ IR, definida por $f(x) = \frac{2x-1}{3}$. **Calcule $f^{-1}(2)$.**

47. Dada a funcao f(x) = 11 – 5x. Determine sem achar a inversa as seguintes alineas:

(a) $f^{-1}(-3)$ (b) $f^{-1}(-1)$.   (c) $f^{-1}(0)$ (d) $f^{-1}(4)$ (e) $f^{-1}(10)$

48. A água é essencial para a vida e está presente na constituição de todos os alimentos. Em regiões com escassez de água, é comum a utilização de cisternas para a captação e armazenamento da água da chuva. Ao esvaziar um tanque contendo água da chuva, a expressão $V(t) = -\frac{1}{43200}t^2 + 3$ representa o volume (em m^3) de água presente no tanque no instante t em minutos. Qual é o tempo, em horas, necessário para que o tanque seja esvaziado?m

49. Um certo reservatório, contendo 72 m^3 de água, deve ser drenado para limpeza. Decorridas t horas após o início da drenagem, o volume de água que saiu do reservatório, em m^3, é dado por $v(t) = 24t – 2t^2$. **Sabendo-se que a drenagem teve início às 10 horas, o reservatório estará completamente vazio às:**

50. O lucro de uma microempresa, em função do número de funcionários que nela trabalham, é dado, em milhares de reais, pela fórmula $L(n) = 36n – 3n^2$. Com base nessas informações, **Qual é o lucro máximo dessa microempresa?**

51. Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = – 2t^2 + 8t$ $(t \geq 0)$, onde t é o tempo medido em segundo e h(t) é a altura em metros da bola no instante t. **Determine, apos o chute:**

a) o instante em que a bola retornará ao solo.

b) a altura atingida pela bola.

52. O número de ocorrências registradas das 12 às 18 horas em um dia do mês de janeiro, em uma delegacia do interior de Minas Gerais, é dado por $f(t) = – t^2 + 30t – 216$, em que $12 \leq t \leq 18$ é a hora desse dia. **Qual é o número máximo de ocorrências nesse período do dia foi?**

53. Uma empresa criou o modelo matemático $L(x) = -100x^2+1000x -1900$ para representar o lucro diário obtido pela venda de certo produto, na qual x representa as unidades vendidas. **O lucro máximo diário obtido por essa empresa é igual a:**

54. No estudo de uma população de bactérias, identificou-se que o número N de bactérias, t horas após o início do estudo, é dado por $N(t) = 20 \cdot 2^{1,5t}$. **Nessas condições, em quanto tempo a população de mosquitos duplicou?**

55. Um grupo de biólogos está estudando o desenvolvimento de uma determinada colônia de bactérias e descobriu que sob condições ideais, o número de bactérias pode ser encontrado através da expressão $N(t) = 2000 \bullet 2^{0,5t}$, sendo t em horas. **Considerando essas condições, quanto tempo após o início da observação, o número de bactérias será igual a 8192000?**

56. O lucro L (em contos) obtido na venda de uma peça depende do número x de unidade produzidas medalmente, de acordo com a fórmula $L(x) = \lg(10 + \frac{x}{4})$.

(a) Se a fábrica tiver a capacidade de produzir 500 e 800 unidades por mês, entre que valores variará o lucro obtido emcada peça?

(b) Qual deve ser o número de unidade produzidas num mês para que o lucro unitário seja 5 contos?

4

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL NATURAL (SUCESSÕES NUMÉRICAS)

OBJECTIVOS:

No fim do ano, deverás ser capaz de:

- Identificar as sucessões numéricas;
- Escrever os termos que constituem uma sucessão;
- Determine o termo geral de uma sucessão;
- Representar gráficamente uma sucessão;
- Estudar a monotonia da sucessão;
- Verificar se uma sucessão é uma progressão aritmética ou é uma progressão geométrica;
- Resolver problemas práticos da vida que são conducentes a progressão aritmética é ou geométrica;

4.1. NOÇÃO DE SUCESSÃO NUMÉRICA

Definição: Chama – se sucessão numérica a toda colecção de números depostos ou colocados numa certa ordem (um após outro), crescente ou decrescente tornando a sua enumeração. Uma sucessão é uma aplicação (função) de IN em IR, isto quer dizer, é uma função cujo o domínio da variável é conjunto dos números naturais ($n \in IN$) e o contradomínio das imagem é o conjunto dos números reais ($a_n \in IR$).

Uma sucessão pode ser representada pela qualquer letra minúscula ou maiúscula do alfabeto latino, ou seja (A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, … U_n, V_n,Y_n, X_n, Z_n) ou por (a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, … u_n, v_n,y_n, x_n, z_n). Vamos representar as sucessões pela letra minúscula, deste modo, a sucessão fica escrita na forma $a_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$.

Os valores a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, …a_n, dizem – se termos da sucessão, enquanto que, os valores 1, 2, 3, ... n, são números naturais denominado por índice ou ordem. Assim o valor a_1 designa – se por primeiro termo ou termo de ordem um.

Exemplos: Escrever os termos das seguintes sucessões:

(a) Sucessão dos números pares: $a_n = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots)$;

(b) Sucessão dos números ímpares: $b_n = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots)$;

Existem sucessões finitas ou infinitas, conforme o número de termos finitos ou infinitos respectivamente.

Exemplos: Escrever os termos das seguintes sucessões, e de seguida diga se a sucessão é finita ou infinita

(a) Sucessão composta por todos divisores de 24, escrita em ordem crescente;

$a_n = (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)$, a sucessão é finita;

(b) Sucessão composta por todos múltiplos de 3, escrita em ordem crescente;

$b_n = (3, 6, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \ldots)$, a sucessão é infinita;

4.2. TERMO GERAL DE UMA SUCESSÃO OU TERMO DE ORDEM n

Termo geral de uma sucessão ou termo de ordem n é uma expressão matemática, em que se encontra a letra n, (a ordem do termo considerado) e de modo que, se pode obter todos os seus termos, ao atribuir a variável n, pelos valores, 1, 2, 3, 4, …, obteremos os termos da sucessão, um após um.

Exemplos: Algumas sucessões dadas por termos geral

$a_n = 2n$; $b_n = -3n + 5$; $c_n = \frac{3}{n}$; $d_n = n^2 + 3$; $x_n = 0{,}3 \cdot 3^{n+1}$

Exemplo 1: Calcular os 5 primeiros termos da sucessão definida por:

(a) $\mathbf{a_n = 2n}$ (b) $b_n = 2n - 1$ (c) $c_n = \frac{n+2}{n+1}$ (d) $d_n = \frac{1}{2^n}$

Para calcular os 5 primeiros termos da sucessão definida pelo termo geral, basta atribuir a variável n, pelos valores, 1, 2, 3, 4 e 5, assim temos:

(a) $a_n = 2n$

Para n = 1; $a_1 = 2 \bullet 1 = 2$;

Para n = 2; $a_2 = 2 \bullet 2 = 4$;

Para n = 3; $a_3 = 2 \bullet 3 = 6$;

Para n = 4; $a_4 = 2 \bullet 4 = 8$;

Para n = 5; $a_5 = 2 \bullet 5 = 10$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$a_n = (2, 5, 8, 11, 14, \ldots)$

(b) $b_n = 2n - 1$

Para n = 1; $b_1 = 2 \bullet 1 - 1 = 2 - 1 = 1$;

Para n = 2; $b_2 = 2 \bullet 2 - 1 = 4 - 1 = 3$;

Para n = 3; $b_3 = 2 \bullet 3 - 1 = 6 - 1 = 5$;

Para n = 4; $b_4 = 2 \bullet 4 - 1 = 8 - 1 = 7$;

Para n = 5; $b_5 = 2 \bullet 5 - 1 = 10 - 1 = 9$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$b_n = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$

(c) $c_n = \frac{n+2}{n+1}$

Para n = 1; $c_1 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$;

Para n = 2; $c_2 = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$;

Para n = 3; $c_3 = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}$;

Para n = 4; $c_4 = \frac{4+2}{4+1} = \frac{6}{5}$;

Para n = 5; $c_5 = \frac{5+2}{5+1} = \frac{7}{6}$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$\mathbf{c_n = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots\right)}$

(d) $d_n = \frac{1}{2^n}$

Para n = 1; $d_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$;

Para n = 2; $d_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$;

Para n = 3; $d_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

Para n = 4; $d_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;

Para n = 5; $d_5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$\mathbf{c_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)}$

■ Uma sucessão pode ser definida por recorrência através de um processo do qual, para determinar os termos da sucessão, recorre – se ao termo anterior.

Exemplos: Algumas sucessões definida por recorrência, dadas por termos geral

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$, $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 3 \bullet u_n - 5 \end{cases}$, … etc;

Exemplo 2: Calcular os 5 primeiros termos da sucessão definida por:

(a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$

Para n = 1; $a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$;
Para n = 2; $a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$;
Para n = 3; $a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$;
Para n = 4; $a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:
$a_n = (2, 5, 8, 11, 14, \ldots)$

(b) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 3 \bullet u_n - 5 \end{cases}$

Para n = 1; $u_2 = 3 \bullet u_1 - 5 = 3 \bullet 4 - 5 = 12 - 5 = 7$;
Para n = 2; $u_3 = 3 \bullet u_2 - 5 = 3 \bullet 7 - 5 = 21 - 5 = 16$;
Para n = 3; $u_4 = 3 \bullet u_3 - 5 = 3 \bullet 16 - 5 = 48 - 5 = 43$;
Para n = 3; $u_5 = 3 \bullet u_4 - 5 = 3 \bullet 43 - 5 = 129 - 5 = 124$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:
$u_n = (4, 7, 16, 43, 124, \ldots)$

Exemplos 3: Dada a sucessão $u_n = 2n + 7$. **Determinar:**

(a) Os 5 primeiros termos;

Para n = 1; $u_1 = 2 \bullet 1 + 7 = 2 + 7 = 9$;

Para n = 2; $u_2 = 2 \bullet 2 + 7 = 4 + 7 = 11$;

Para n = 3; $u_3 = 2 \bullet 3 + 7 = 6 + 7 = 13$;

Para n = 4; $u_4 = 2 \bullet 4 + 7 = 8 + 7 = 15$;

Para n = 5; $u_5 = 2 \bullet 5 + 7 = 10 + 7 = 17$;

Os 5 primeiros termos desta sucessão são:

$u_n = (9, 11, 13, 15, 17, \ldots)$

(b) O décimo quinto termo;

Neste caso o valor de n é 15, queremos determinar u_{15}

n = 15; $u_{15} = 2 \bullet 15 + 7 = 30 + 7 = 37$;

(c) O termo de ordem 20;

Neste caso o valor de é n 20, queremos determinar u_{20}

n = 20; $u_{20} = 2 \bullet 20 + 7 = 40 + 7 = 47$;

(d) verifique se o número 54 é termos da sucessão, pretende – se o valor de n, tal que $u_n = 54$;

$$u_n = 54$$
$$2n + 7 = 54$$
$$2n = 54 - 7$$
$$2n = 47$$
$$n = \frac{47}{2}$$
$$n = 23{,}5$$
$$23{,}5 \notin IN$$

Logo o número 54 não é termo da sucessão u_n

(e) verifique se o número 107 é termos da sucessão Pretende – se o valor de n, tal que $u_n = 107$

$$u_n = 107$$
$$2n + 7 = 107$$
$$2n = 107 - 7$$
$$2n = 100$$
$$n = \frac{100}{2}$$
$$n = 50$$
$$50 \in IN$$

Logo o número 107 é termo da sucessão u_n

4.3. REPRESENTAÇÃO GRÁFICAS DE UMASUCESSÃO

A sucessão sendo de variável natural pode ser representada graficamente, representemos graficamente a sucessão de termo geral $a_n = 2n - 1$, sendo assim, devemos achar alguns primeiros termos, neste caso, determinemos 4 primeiros termos.

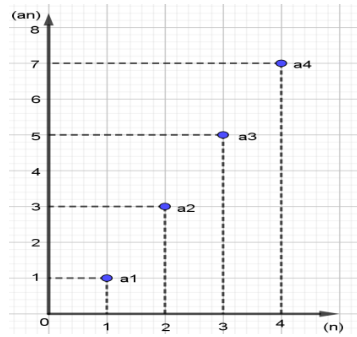
$a_n = 2n - 1$

$n = 1;\ a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1;$

$n = 2;\ a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3;$

$n = 3;\ a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5;$

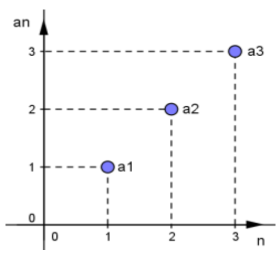
$n = 4;\ a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7;$



► **Vê – se que, o gráfico de uma sucessão são pontos isolados.**

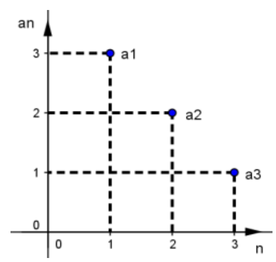
4.4. SUCESSÕESMONÓTONAS

Sucessão a_n é crescente



$a_2 > a_1$
$a_3 > a_2$
$\dots$
$a_{n+1} > a_n$

Sucessão a_n é decrescente



$a_2 < a_1$
$a_3 < a_2$
$\dots$
$a_{n+1} < a_n$

Geralmente podemos afirmar que:

Uma sucessão na é crescente se e só se: $\forall_{n \in IN}$: $a_{n+1}\ a_n > 0$;

Uma sucessão a_né decrescente se e só se: $\forall_{n \in IN}$: $a_{n+1}\ a_n < 0$;

Exemplos: Verifique monotonia de seguintes Sucessões

(a) $a_n = 2n + 7$ **(b) $b_n = -3n + 5$** **(c) $c_n = \frac{n}{n+1}$** **(d) $d_n = \frac{2n+1}{n+2}$**

Resolução:

(a) $a_n = 2n + 7$

• A sucessão $a_{n+1} = 2(n + 1) + 7 = 2n + 2 + 7 = 2n + 9$;

► Suponhamos que a sucessão $\mathbf{a_n}$ seja crescente

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

$$2n + 9 - (2n + 7) > 0$$

$$\cancel{2n} + 9 - \cancel{2n} - 7 > 0$$

$$2 > 0$$

A Suposição é verdadeira, daí a sucessão a_n é crescente;

(b) $b_n = -3n + 5$

• A sucessão $b_{n+1} = -3(n+1) + 5 = -3n - 3 + 5 = -3n + 2$;

► Suponhamos que a sucessão $\mathbf{b_n}$ seja crescente

$$b_{n+1} - b_n > 0$$

$$-3n + 5 - (-3n + 2) > 0$$

$$-\cancel{3n} + 5 + \cancel{3n} - 2 > 0$$

$$-2 > 0$$

A Suposição é falsa, daí a sucessão b_n é decrescente;

(c) $\mathbf{c_n} = \frac{n}{n+1}$

• A sucessão $c_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$

► Suponhamos que a sucessão $\mathbf{c_n}$ seja decrescente;

$$c_{n+1} - c_n < 0$$

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} < 0$$

$$(n+1) \quad (n+2)$$

$$\frac{(n+1)\bullet(n+1) - n\bullet(n+2)}{(n+2)\bullet(n+1)} < 0$$

$$\frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+2)\bullet(n+1)} < 0$$

$$\frac{1}{(n+2)\bullet(n+1)} < 0$$

A Suposição é falsa, daí a sucessão c_n é crescente;

(d) $\mathbf{d_n} = \frac{2n+1}{n+2}$

• A sucessão $\mathbf{d_{n+1}} = \frac{2(n+1)+1}{n+1+2} = \frac{2n+2+1}{n+3} = \frac{2n+3}{n+3}$;

► Suponhamos que a sucessão $\mathbf{d_n}$ seja crescente;

$$d_{n+1} - d_n > 0$$

$$\frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} > 0$$

$$(n+2) \quad (n+3)$$

$$\frac{(2n+3)\bullet(n+2) - (2n+1)\bullet(n+3)}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$\frac{2n^2 + 4n + 3n + 6 - 2n^2 - 6n - n - 3}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$\frac{\cancel{2n^2} + \cancel{7n} + 6 - \cancel{2n^2} - \cancel{7n} - 3}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$\frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0$$

A Suposição é verdadeira, daí a sucessão d_n é crescente;

4.5. SUCESSÕES LIMITADAS

Esbocemos os gráficos das sucessões: $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ e $b_n = n + 1$, para tal, determinemos 4 primeiros termos de cada sucessão.

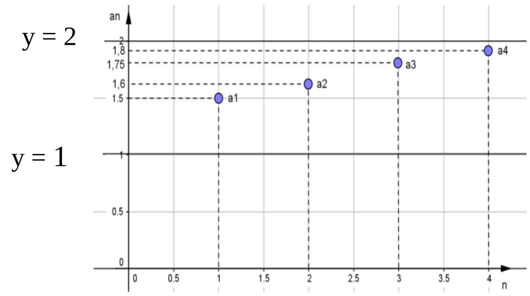
$$\mathbf{a_n = \frac{2n+1}{n+2}}$$

Para n = 1; $a_1 = \frac{2\bullet 1+1}{1+1} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$;

Para n = 2; $a_2 = \frac{2\bullet 2+1}{2+1} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$;

Para n = 3; $a_3 = \frac{2\bullet 3+1}{3+1} = \frac{6+1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$;

Para n = 4; $a_4 = \frac{2\bullet 4+1}{4+1} = \frac{8+1}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8$;



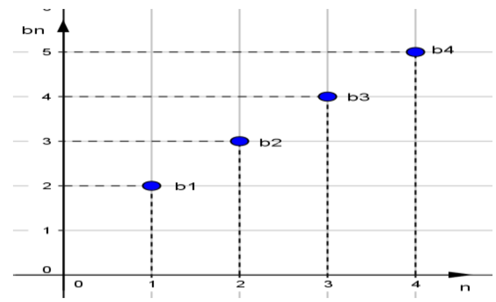
$$\mathbf{b_n = n + 1}$$

Para n = 1; $b_1 = 1 + 1 = 2$;

Para n = 2; $b_2 = 2 + 1 = 3$;

Para n = 3; $b_3 = 3 + 1 = 4$;

Para n = 4; $b_4 = 4 + 1 = 5$;



Uma sucessão diz-se limitada, se as imagens de todos os seus termos pertencem ao interior da faixa definida. No exemplo anterior a sucessão $\mathbf{a_n = \frac{2n+1}{n+2}}$ é limitada porque os seus termos pertencem numa faixa definida de y = 1e y = 2, isto é, $1 < a_n < 2$. Para a sucessão $\mathbf{b_n = n + 1}$ não é limitada, porque não é possível considerar a existência de uma faixa limitada por rectas paralelas para o eixo dos x que contenha no seu interior o gráfico da sucessão.

4. 6. LIMITE DE UMASUCESSÃO

Diz-se que uma sucessão a_n tem um limite o numero L, se e só se para todo número positivo tal pequeno seja, existe um número positivo n tal que $|a_n - L| < \boldsymbol{\varepsilon}$, quando $n > N(\boldsymbol{\varepsilon})$ (N dependente de $\boldsymbol{\varepsilon}$) e escreve-se:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = L}$$

Exemplo: Demonstrar que a sucessão do termo geral $a_n = \frac{n}{n+1}$ tem como limite igual a 1.

Demonstração

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

A condição é:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Substituindo $\mathbf{a_n}$ e **L**, para encontrar a ordem a partir dela todos termos da sucessão pertencem num determinado intervalo temos:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

(1) (n + 1)

$$\left|\frac{n - n - 1}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n + 1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\boxed{N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

(N dependente de ε)

A sucessão é limitada porque todos termos devem pertencem numa faixa definida, deste modo vamos encontrá–la, de tal modo para **$\varepsilon = 0{,}1$, daí $N(0{,}1) = \frac{1}{0{,}1} - 1 = 9$**;

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0{,}1$$

(vamos resolver essa inequação modular)

$$-0{,}1 < \frac{n}{n+1} - 1 < 0{,}1$$

$$-0{,}1 + 1 < \frac{n}{n+1} < 0{,}1 + 1$$

$$0{,}9 < \frac{n}{n+1} < 1{,}1$$

Finalmente, temos o intervalo]0,9; 1,1[

Isso significa que a partir da ordem 10, todos os termos da sucessão $a_n = \frac{n}{n+1}$ pertencerão ao intervalo de 0,9 à1,1, vendo o 1 pertence a esse intervalo, isto prova que $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$;

4.7. SUCESSÃO INFINITAMENTE PEQUENA E INFINITAMENTEGRANDE

■ **Sucessão Infinitamente Pequena:** Uma sucessão a_n diz-se infinitamente pequena ou infinitésimo se e só se o limite é nulo, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

■ **Sucessão Infinitamente Grande:** Uma sucessão a_n diz-se infinitamente grande se e só se o limite é mais infinitos ou menos infinito, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

■ **Sucessão Infinitamente Grande Negativo:** Uma sucessão an diz – se infinitamente grande se e só se o limite é menos infinito, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$;

■ **Sucessão Infinitamente Grande Positivo:** Uma sucessão an diz – se infinitamente grande se e só se o limite é mais infinitos, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

4.8. SUCESSÃO CONVERGENTE E SUCESSÃO DIVERGENTE

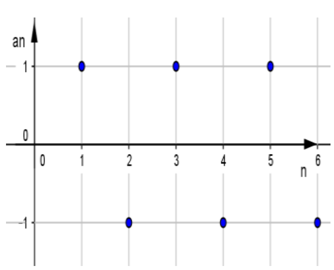
■ **Sucessão Convergente:** Uma sucessão a_n diz – se convergente cujo o limite é um numero real;

■ **Sucessão Divergente:** Uma sucessão a_n diz – se divergente cujo o limite é mais infinitos ou menos infinito ( ), ou seja diverge para menos ou para mais infinito;

- Se a sucessão a_n é convergente, então o seu limite é único;

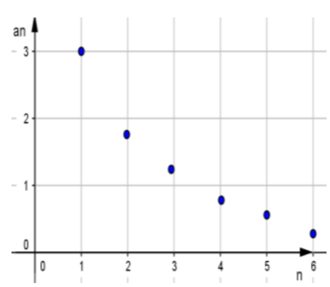
- Se a sucessão a_n é convergente, então é limitada;

- Uma sucessão pode ser limitada, mas não ser convergente;



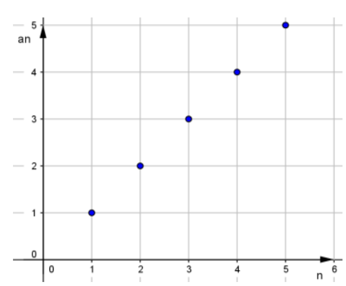
A sucessão a_n é limitada;

A sucessão a_n não é convergente;



A sucessão a_n é limitada;

A sucessão a_n é convergente;



A sucessão a_n não é limitada;

A sucessão a_n é divergente;

4.9. PROPRIEDADES DA SUCESSÃO CONVERGENTE (PROPRIEDADES OPERATORAS DELIMITES)

A expressão $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ lê-se limite da sucessão a_n, quando n tende para infinito. Para o cálculo de limites, devemos notar que escrever é igual a lim a_n porque n tende sempre para ∞.

1ª Propriedade: Limite de uma sucessão caso exista é único;

2ª Propriedade: Limite de uma sucessão constante k é igual a própria constante k;

Sendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, k - é constante real e n - é índice do radical, então:

3ª Propriedade: Limite de uma sucessão multiplicada por uma constante k;

$$\lim_{n\to\infty} k \bullet a_n = k \bullet \lim_{n\to\infty} a_n = k \bullet a$$

4ª Propriedade: Limite de uma soma é igual a soma dos limites, isto é:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

5ª Propriedade: Limite de uma diferença é igual a diferença dos limites, isto é:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

6ª Propriedade: Limite de um produto é igual ao produto dos limites, isto é:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \bullet b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \bullet \lim_{n\to\infty} b_n = a \bullet b$$

7ª Propriedade: Limite de um quociente é igual ao quociente dos limites, isto é:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

8ª Propriedade: Limite de uma potência Sendo e p é uma potencia natural, então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = a^p$$

9ª Propriedade: Limite de um radical Sendo e p é índice do radical, então:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[n]{a}$$

4.10. CÁLCULO DE LIMITE DAS SUCESSÕES

Para o cálculo de limites adoptaremos as convenções seguintes:

1. $a \bullet \infty = \infty;\ a \neq 0$
2. $a + \infty = \infty;$
3. $a - \infty = \infty;\ ;\ a \neq \infty;$
4. $\frac{a}{0} = \infty;\ a \neq 0 \wedge a \neq \infty;$
5. $\infty - a = \infty;\ a \neq \infty;$
6. $\frac{a}{\infty} = 0;\ a \neq 0 \wedge a \neq \infty;$
7. $\frac{\infty}{a} = \infty;\ a \neq 0 \wedge a \neq \infty;$
8. $\infty \bullet \infty = \infty;$
9. $\infty + \infty = \infty;$
10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty;$
11. $\infty^a = \infty;\ a \neq 0$
12. $\sqrt[n]{\infty} = \infty;$

Exemplos de cálculo de Limites:

Para calcular limites de qualquer sucessão, devemos substituir o n pelo valor que tende, no caso das sucessões o n pode tender para , ou , e de seguida aplicar as convenções para obter o resultado, que é o limite da sucessão, ao processo de substituição a operação do limite não pode ser escrito, porque o que leva-nos a substituir é por causa do limite, então não devemos mais escrever, sendo assim vamos calcular os limites e classificaremos cada sucessão se é limitada ou não limitada, convergente ou divergente, ou ainda infinitamente grande ou infinitamente pequena, assim temos exemplos a seguir:

Exmplo 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 7}{4}$

Resolução: Substituir o n por infinito (∞), temos;

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 7}{4} = \frac{3\bullet\infty^2 - 7}{4} = \frac{3\bullet\infty - 7}{4} = \frac{\infty - 7}{4} = \frac{\infty}{4} = \infty$; daí pode-se afirmar que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 7}{4} = +\infty$;

Como classificação podemos concluir que, a sucessao $a_n = \frac{3n^2 - 7}{4}$: **Não é limitada, é divergente e é infinitamente grande positivo;**

Exmplo 2: $\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \frac{5}{n+1}$

Resolução: Substituir o n por infinito (∞), temos;

$\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \frac{5}{n+1} = 2 + \frac{5}{\infty + 1} = 2 + \frac{5}{\infty} = 2 + 0 = 2$; daí pode-se afirmar que: $\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \frac{5}{n+1} = 2$;

Como classificação podemos concluir que, a sucessao $a_n = 2 + \frac{5}{n+1}$: **É limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;**

Exmplo 3: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^3 - 4}$

Resolução: Substituir o n por infinito (∞), temos;

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^3 - 4} = \frac{7}{\infty^3 - 4} = \frac{7}{\infty - 4} = \frac{7}{\infty} = 0$; daí pode-se afirmar que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^3 - 4} = 0$;

Como classificação podemos concluir que, a sucessao $a_n = \frac{7}{n^3 - 4}$: **É limitada, é convergente e é infinitamente pequena;**

Exmplo 4: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{9 + \frac{3}{2 - n}}$

Resolução: Substituir o n por infinito (∞), temos;

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{9 + \frac{3}{2 - n}} = \sqrt{9 + \frac{3}{2 - \infty}} = \sqrt{9 + \frac{3}{-\infty}} = \sqrt{9 + 0} = \sqrt{9} = 3$; daí pode-se afirmar que: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{9 + \frac{3}{2 - n}} = 3$;

Como classificação podemos concluir que, a sucessao $a_n = \frac{7}{n^3 - 4}$: **É limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;**

4.11. LEVAMENTO DAS INDETERMINAÇÕES

Ao substituir o n pelo valor de $+\infty$ podemos encontrar situações em que as convenções acima mencionadas não se aplicam, nas situações que se seguem $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, $|\infty - \infty|$, $|1^{\infty}|$, $|0\bullet\infty|$, $|0^0|$, $|\infty^0|$, $\left|\frac{0}{0}\right|$ a que se dá nome de indeterminações. Para cada caso é necessário simplificar a expressão dada a maneira mais adequada que permite calcular o limite dado, esse processo chama – se levantamento da indeterminação.

1. INDETERMINAÇÃO DO TIPO $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$

Para levantar indeterminação deste tipo começa por pôr em evidência no numerador e no denominador a potência de maior expoente de n, ou seja, dividir no numerador tanto no denominador pela potência de maior expoente de n.

Exemplo 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2n-5}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2n-5} = \frac{4\bullet\infty+1}{2\bullet\infty-5} = \frac{\infty+1}{\infty-5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ - é uma indeterminação, portanto vamos levantar – lá;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+1}{n}}{\frac{2n-5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{1}{n}}{2-\frac{5}{n}} = \frac{4+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{5}{\infty}} = \frac{4+0}{2-0} = \frac{4}{2} = 2;$$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Exemplo 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+7}{5n+10}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+7}{5n+10} = \frac{3\bullet\infty^2+4\bullet\infty+7}{5\bullet\infty+10} = \frac{3\bullet\infty+\infty+7}{\infty+10} = \frac{\infty+\infty}{\infty} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ - é uma indeterminação;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+7}{5n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+4n+7}{n^2}}{\frac{5n+10}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{7}{n^2}}{\frac{5n}{n^2}+\frac{10}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}} = \frac{3+\frac{4}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}}{\frac{5}{\infty}+\frac{10}{\infty^2}} = \frac{3+0+0}{0+0} = \frac{3}{0} = +\infty;$$

Logo: A sucessão não é limitada, é divergente e é infinitamente grande positivo;

Exemplo 3: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+4n-5}{n^3+4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+4n-5}{n^3+4} = \frac{5\bullet\infty^2+4\bullet\infty-5}{\infty^3+4} = \frac{\infty+\infty-5}{\infty+4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ - é uma indeterminação;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+4n-3}{n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^2+4n-3}{n^3}}{\frac{n^3+4}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^2}{n^3}+\frac{4n}{n^3}-\frac{3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{4}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1+\frac{4}{n^3}} = \frac{0+0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0;$$

0

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e é infinitamente pequena;

Exemplo 4: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^4+4}{2n^4-3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^4+4}{2n^4-3}=\frac{8\bullet\infty^4+4}{2\bullet\infty^4-3}=\frac{8\bullet\infty+4}{2\bullet\infty-3}=\frac{\infty+4}{\infty-3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ - é uma indeterminação;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^4+4}{2n^4-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4(8+\frac{4}{n^4})}{n^4(2-\frac{3}{n^4})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8+\frac{4}{n^4}}{2-\frac{3}{n^4}}=\frac{8+0}{2-0}=\frac{8}{2}=4;$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Corolário[5]: No processo de levantamento desta indeterminação vê-se que há três resultados possíveis, pode ser zero, mais ou menos infinito e quociente dos coeficientes de maior potência de n, podemos concluir que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+a_2n^{m-2}+a_3n^{m-3}+a_4n^{m-4}+a_5n^{m-5}+\ldots}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+b_2n^{k-2}+b_3n^{k-3}+b_4n^{k-4}+b_5n^{k-5}+\ldots}=\begin{cases}0;\ m<k;\\ \frac{a_0}{b_0};\ m=k;\\ \infty;\ m>k;\end{cases}}$$

__Interpretação:__ Se o grau do numerador for menor a do denominador o limite da sucessão é igual a zero, se o grau do numerador for maior a do denominador o limite da sucessão é igual a infinito e se o grau do numerador for igual a do denominador o limite da sucessão é igual ao quociente (divisão) dos coeficientes de maior potência de n. Esta expressão ajudará determinar limite de qualquer sucessão de indeterminação $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, sem passar pelo processo de levantamento da mesma, ora vejamos os exemplos a seguir:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n-2}{3n^4+4n-7}=0;$

Porque, o grau do numerador (2) é menor a do denominador (4), logo o limite da sucessão é igual a zero;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+6}{2n+10}=+\infty;$

Porque, o grau do numerador (3) é maior a do denominador (1), logo o limite da sucessão é igual a infinito;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^5+3}{2n^5-7}=5;$

Vê – se que, o grau do numerador (5) é igual a do denominador (5), logo o limite da sucessão é igual ao quociente dos coeficientes de maior potência de n, isto é: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^5+3}{2n^5-7}=\frac{10}{2}=5;$

[5] **Uma afirmação deduzida de uma verdade já demonstrada;**

2. INDETERMINAÇAO DO TIPO $|\infty - \infty|$ PARA EXPRESSÕES POLINOMIAIS

Para levantar este tipo de indeterminação para expressões polinomiais coloca – se em evidência a potência de maior expoente de n.

Exemplo 1: $\lim\limits_{n \to -\infty} 4n^3 - 5n + 7$

$\lim\limits_{n \to -\infty} 4n^3 - 5n + 7 = 4 \bullet (-\infty)^3 - 5 \bullet (-\infty) + 7 = -\infty + \infty + 7 = |\infty - \infty|$ - É uma indeterminação;

$\lim\limits_{n \to -\infty} 4n^3 - 5n + 7 \ \lim\limits_{n \to -\infty} 4n^3 - 5n + 7 = \lim\limits_{n \to -\infty} n^3(4n^3 - 5n + 7) = \lim\limits_{n \to -\infty} n^3(\frac{4n^3}{n^3} - \frac{5n}{n^3} + \frac{7}{n^3}) =$

$= \lim\limits_{n \to -\infty} n^3(4 - 0 + 0) = \lim\limits_{n \to -\infty} 4n^3 = 4 \bullet (-\infty^3) = 4 \bullet (-\infty) = -\infty;$

Logo: A sucessão não é limitada, é divergente e é infinitamente grande negativa;

Exemplo 2: $\lim\limits_{n \to \infty} (3n^4 - 2n + 4)$

$\lim\limits_{n \to \infty} (3n^4 - 2n + 4) = 3 \bullet (\infty)^4 - 2 \bullet \infty + 4) = \infty - \infty + 4 = |\infty - \infty|$ - É uma indeterminação;

$\lim\limits_{n \to \infty} (3n^4 - 2n + 4) = \lim\limits_{n \to \infty} n^4(\frac{3n^4}{n^4} - \frac{2n}{n^4} + \frac{4}{n^4}) = \lim\limits_{n \to \infty} n^4(\frac{3n^4}{n^4} - \frac{2n}{n^4} + \frac{4}{n^4}) = \lim\limits_{n \to \infty} n^4(3 - \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^4}) =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} n^4(3 - 0 + 0) = \lim\limits_{n \to \infty} 3n^4 = 3(\infty)^4 = 3 \bullet \infty = +\infty;$

Logo: A sucessão não é limitada, é divergente e é infinitamente grande positiva;

3. INDETERMINAÇAO DO TIPO $|\infty - \infty|$ PARA EXPRESSÕES IRRACIONAIS (RADICAIS)

Para levantar este tipo de indeterminação para expressões irracionais multiplica – se e divide-se pelo seu simétrico, para eliminar os radicais.

LEMBRAR QUE: $\boxed{(a - b) \bullet (a + b) = a^2 - b^2}$

Exemplo 1: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-4}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-4} = \sqrt{2 \bullet (\infty) - 1} - \sqrt{2 \bullet (\infty) - 4} = \sqrt{\infty - 1} - \sqrt{\infty - 4} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = |\infty - \infty|$ - É uma indeterminação;

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-4} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-4}) \bullet (\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4})}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{2n-1})^2 - (\sqrt{2n-4})^2}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n - 1 - (2n-4)}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n - 1 - 2n + 4}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n-4}} = \frac{3}{\sqrt{2 \bullet \infty - 1} + \sqrt{2 \bullet \infty - 4}} = \frac{3}{\sqrt{\infty} + \sqrt{\infty}} = \frac{3}{\infty + \infty} = \frac{3}{\infty} = 0;$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e é infinitamente pequena;

Exemplo 2: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + 5} - n$

$\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - n) = \sqrt{\infty^2 + 5} - \infty = \sqrt{\infty + 5} - \infty = \left| \infty - \infty \right|$ - É uma indeterminação;

$\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n^2+5} - n)\bullet(\sqrt{n^2+5} + n)}{\sqrt{n^2+5} + n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n^2+5})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+5} + n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2+5-n^2}{\sqrt{n^2+5} + n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{5}{\sqrt{n^2+5} + n} =$

$\frac{5}{\sqrt{\infty^2+5} + \infty} = \frac{5}{\infty + \infty} = \frac{5}{\infty} = 0;$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e é infinitamente pequena;

Exemplo 3: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 4}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 4} = \sqrt{\infty^2 + \infty} - \sqrt{\infty^2 - 4} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \left| \infty - \infty \right|$ - É uma indeterminação;

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 4} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-4})\bullet(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-4})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-4}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n})^2 - (\sqrt{n^2-4})^2}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-4}} =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2+n-(n^2-4)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-4}} = = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2+n-n^2+4}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-4}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+4}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-4}}$ (substituindo n por ∞, obteremos uma nova indeterminação , vamos levantar esta indeterminação);

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+4}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-4}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{n+4}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-4}}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{4}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} + \frac{\sqrt{n^2-4}}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{4}{n^2}}} =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};$

• A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande

4. INDETERMINAÇÃO DO TIPO $|1^\infty|$ LIMITE NOTÁVEL EXPONENCIAL

Ao encontrar o limite do tipo $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n)^{b_n}$, caso, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ e $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$, então teremos uma indeterminação do tipo $|1^\infty|$ que pode ser levantada da seguinte maneira:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - 1)\bullet b_n}$$

Onde: e ≈ 2,7182818284 chamado número de Nepper

Exemplo 1: $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{3}{n})^n$

$\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{3}{n})^n = (1 + \frac{3}{\infty})^\infty = (1 + 0)^\infty = |1^\infty|$ - É uma indeterminação: Neste caso $a_n = 1 + \frac{3}{n}$ e $b_n = n$;

$\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{3}{n})^n = e^{\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{3}{n} - 1)\bullet n} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{3}{n})\bullet n} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} 3} = e^3;$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Exemplo 2: $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{5}{n})^{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{5}{n})^{n}=(1-\frac{5}{\infty})^{\infty}=(1-0)^{\infty}=|1^{\infty}|$ - É uma indeterminação: $a_n = 1-\frac{5}{n}$ e $b_n = n$;

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{5}{n})^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{5}{n}-1)\bullet n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{5}{n})\bullet n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-5}=e^{-5}=\frac{1}{e^{5}};$

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Exemplo 3: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-4})^{n}=(\frac{\infty}{\infty-4})^{\infty}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|^{\infty}$

■ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-4}=\frac{1}{1}=1$, daí podemos afirmar que: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-4})^{n}=|1^{\infty}|$ - É uma indeterminação: $a_n=\frac{n}{n-4}$ e $b_n = n$;

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-4})^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-4}-1)\bullet n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-n+4}{n-4})\bullet n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{n-4})\bullet n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n-4}}=e^{\frac{4}{1}}=e^{4};$

Substituindo n por ∞, obteremos a indeterminação $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, vamos levantar esta indeterminação

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

Exemplo 4: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n-4}{3n+5})^{2n+8}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n-4}{3n+5})^{2n+8}=(\frac{3\bullet\infty-4}{3\bullet\infty+5})^{2\bullet\infty+8}=(\frac{\infty-4}{\infty+5})^{\infty+8}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|^{\infty}$

■ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-4}{3n+5}=\frac{3}{3}=1$, dai podemos afirmar que: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n-4}{3n+5})^{2n+8}=|1^{\infty}|$ - É uma indeterminação: $a_n=\frac{3n-4}{3n+5}$ e $b_n = 2n+8$;

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n-4}{3n+5})^{2n+8}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n-4}{3n+5}-1)\bullet(2n+8)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n-4-(3n+5)}{3n+5})\bullet(2n+8)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3n-4-3n-5)}{3n+5})\bullet(2n+8)}=$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-9)}{3n+5})\bullet(2n+8)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-18n-72}{3n+5}}=e^{-\frac{18}{3}}=e^{-6}=\frac{1}{e^{6}};$

Substituindo n por ∞, obteremos a indeterminação $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, vamos levantar esta indeterminação

Logo: A sucessão é limitada, é convergente e não é infinitamente pequena nem infinitamente grande;

4.12. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

1. Definição:

Uma sucessão chama – se Progressão Aritmética (P.A), se cada termo a partir do segundo termo é somado por um número **d** fixo para dada a sucessão com o termo anterior, este número fixo chama – se diferença da Progressão Aritmética.

Exemplos das sucessões que são Progressão Aritmética

(a) $a_n = (3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots)$; $d = 2$

(b) $b_n = (5, 1, -3, -7, -14, \ldots)$; $d = 4$

(c) $c_n = (6, 6, 6, 6, 6, 6, \ldots)$; $d = 0$

Da definição da Progressão Aritmética $\mathbf{a_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)}$ é uma Progressão Aritmética então:

$$\boxed{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d}$$

Como vimos nos exemplos anteriores, as progressões aritméticas pode ser: **Crescente, Decrescente e Constante:**

Se d > 0; a PA é crescente
Se d < 0; a PA é decrescente
Se d = 0; a PA é constante

2. Fórmula do termo geral da Progressão Aritmética

De acordo com a definição, temos: $\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_2 + d \\ a_4 = a_3 + d \\ a_5 = a_4 + d \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\ a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases}$

Podemos concluir que a fórmula do termo geral da Progressão Aritmética é dada por:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \bullet d}$$

Onde:

$\mathbf{a_1}$ – é primeiro termo da progressão; **n** – a ordem o termo;

d – é a diferença da progressão; $\mathbf{a_n}$ – o termo geral da Progressão;

<u>**NOTA IMPORTANTE**</u>**:** Para escrever o termo geral da Progressão Aritmética é suficiente saber o primeiro termo e a diferença da progressão.

Exemplo 1: Encontre o termo geral de cada sucessão a seguir:

(a) $a_n = (3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$

$a_1 = 9$ $\quad a_n = a_1 + (n-1) \bullet d$

$d = 3$ $\quad a_n = 9 + (n-1) \bullet 3$

$a_n = ?$ $\quad a_n = 9 + 3n - 3$

$$\boxed{a_n = 3n + 6}$$

(b) $b_n = (15, 13, 11, 9, 7, \ldots)$

$b_1 = 15$ $\quad b_n = b_1 + (n-1) \bullet d$

$d = -2$ $\quad b_n = 15 + (n-1) \bullet (-2)$

$bn = ?$ $\quad b_n = 15 - 2n + 2$

$$\boxed{b_n = 17 - 2n}$$

Exemplo 2: Numa organização aritmética sabe-se $a_5 = 55$ e $a_{21} = -25$. Determinar o termo geral da progressão.

Para determinar o termo geral da progressão precisamos determinar o primeiro termo (a1) e a diferença (d).

$$\begin{cases} a_5 = 55 \\ a_{21} = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 55 \\ a_1 + 20d = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 55 \ / \bullet (-1) \\ a_1 + 20d = -25 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} -a_1 - 4d = -55 \\ a_1 + 20d = -25 \end{cases}$$

$16d = -80$

$d = -\frac{80}{16}$

$d = -5$

$\mathbf{a_1 + 4d = 55}$

$\mathbf{a_1 = 55 - 4d} = 55 - \mathbf{4 \bullet (-5)} = 55 + \mathbf{20} = 75;$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a_n} &= \mathbf{a_1 + (n-1) \bullet d} \\ \mathbf{a_n} &= \mathbf{75 + (n-1) \bullet (-5)} \\ \mathbf{a_n} &= \mathbf{75 - 5n + 5} \\ \mathbf{a_n} &= \mathbf{80 - 5n} \end{aligned}}$$

Exemplo 3: Determine o valor x de modo que a sucessão (5, 2x + 4, 6x + 2) seja Progressão aritmé-tica;

Resolução: $a_1 = 5$, $a_2 = 2x + 4$ e $a_3 = 6x + 2$, pela definição tem – se:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$2x + 4 - 5 = 6x + 2 - (2x + 4)$$

$$2x + 4 - 5 = 6x + 2 - 2x - 4$$

$$-2x = 3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Solução: $\{-\frac{3}{2}\}$

2. Propriedades da Progressão Aritmética

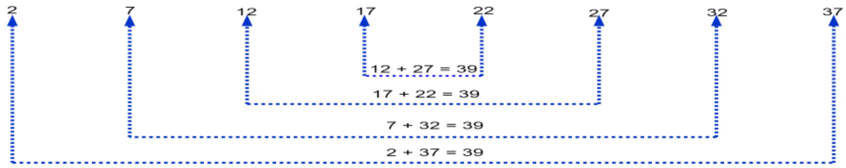
1ª Propriedade: Cada termo da Progressão Aritmética é igual a média aritmética dos termos adjacentes, isto é, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Exemplo: Dada a sucessão $a_n = (\overset{a_1}{2},\ \overset{a_2}{7},\ \overset{a_3}{12},\ \overset{a_4}{17},\ \overset{a_5}{22},\ \overset{a_6}{27}, \ldots)$

• $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{2+12}{2} = \frac{14}{2} = 7$;   • $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{7+17}{2} = \frac{24}{2} = 12$;   • $a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{17+27}{2} = \frac{44}{2} = 22$;

2ª Propriedade: A soma dos termos equidistantes dos extremos da Progressão Aritmética finita é igual á soma dos extremos.

Exemplo: Dada a sucessão $a_n = (2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37)$



3. Soma dos n primeiro de Progressão Aritmética

Usemos a propriedade 2 para obter a fórmula soma dos n primeiro de progressão aritmética:

Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ dos n primeiro de progressão aritmética de diferença d. A soma S_n pode ser definida assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Aplicando a propriedade 1, voltemos a escrever os termos S_n, a começarmos do último termo.

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \quad (2)$$

Somando membro a membro as igualdades (1) e (2).

$$\begin{array}{c|l} & S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ + & S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \\ \hline = & 2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_1 + a_n)} \end{array}$$

A soma dos termos equidistantes dos extremos da P.A finita é igual;
ou seja: $(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = \ldots = (a_{n-1} + a_2) = (a_1 + a_n)$
Daí são n parcelas iguais à $(a_1 + a_n)$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

(Fórmula que permite calcular a soma dos n primeiro de P.A.)

Mas $a_n = a_1 + (n-1) \bullet d$, a formula também se pode escrever:

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1) \bullet d\,]n}{2}$$

$$\boxed{S_n = \frac{[2a_1 + (n-1) \bullet d\,]n}{2}}$$

(Fórmula que permite calcular a soma dos n primeiro de P.A. de diferença d)

Exemplo 1: Dada a Progressão Aritmética (4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, …). Determine:

(a) A soma dos 6 primeiros termos;

• $S_6 = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 69$;

Podemos aplicar as fórmulas da soma dos n primeiros termos;

<u>Dados</u>:

$S_6 = ?$

$a_1 = 4$

$a_6 = 19$

$n = 6$

<u>Resolução</u>

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \bullet n}{2}$$

$$S_6 = \frac{(4 + 19) \bullet 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{23 \bullet 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{138}{2}$$

$$S_6 = 69;$$

ou

<u>Dados</u>:

$S_6 = ?$

$a_1 = 4$

$d = 3$

$n = 6$

<u>Resolução</u>

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1) \bullet d\,]n}{2}$$

$$S_6 = \frac{[2 \bullet 4 + (6-1) \bullet 3\,] \bullet 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{(8 + 5 \bullet 3\,) \bullet 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{(8 + 15\,) \bullet 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{23 \bullet 6}{2}$$

$$S_6 = \frac{138}{2}$$

$$S_6 = 69;$$

(b) A soma dos 20 primeiros termos;

<u>Dados</u>:

$S_{20} = ?$

$a_1 = 4$

$d = 3$

$n = 20$

<u>Resolução</u>

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1) \bullet d\,]n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{[2 \bullet 4 + (20-1) \bullet 3\,] \bullet 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(8 + 19 \bullet 3\,) \bullet 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(8 + 57\,) \bullet 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{65 \bullet 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{1300}{2}$$

$$S_{20} = 650;$$

Exemplo 2: Determine o valor de x em que: 3 + 10 + 17 + …+ x = 498.

<u>Dados</u>:

$S_n = 498$

$n = ?$

$a_1 = 3$

$d = 7$

$\mathbf{a_n = x}$

<u>Resolução</u>

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1) \bullet d\,]n}{2}$$

$$498 = \frac{[2 \bullet 3 + (n-1) \bullet 7] \bullet n}{2}$$

$$\frac{(6 + 7n - 7) \bullet n}{2} = 498$$

$$\frac{(7n-1)\bullet n}{2} = 498$$

$$7n^2 - n = 996$$

$$7n^2 - n - 996 = 0$$

$$a = 7;\ b = -1;\ c = -996$$

$$n_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\bullet7\bullet(-996)}}{2\bullet7} = \frac{1\pm\sqrt{1+27888}}{14} = \frac{1+\sqrt{27889}}{14} = \frac{1\pm167}{14}$$

$$=$$

$$n_1 = \frac{1-167}{14} \vee n_2 = \frac{1+167}{14}$$

$$n_1 = \frac{-166}{14} \vee n_2 = \frac{168}{14}$$

$$n_1 = -11{,}8 \vee n_2 = 12$$

$$-11{,}8 \notin IN \vee 12 \in IN$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\bullet d} \\ &\mathbf{x = 3 + (12-1)\bullet 7} \\ &\mathbf{x = 3 + 11\bullet 7} \\ &\mathbf{x = 3 + 77} \\ &\mathbf{x = 80} \end{aligned}}$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

1. Definição

Uma sucessão chama – se Progressão Geométrica (P.G), se cada termo a partir do segundo termo é multiplicado por um numero **q** fixo para dada a sucessão com o termo anterior, este número fixo chama – se razão da Progressão Geométrica.

Exemplos das sucessões que são Progressão Geométrica

(a) $a_n = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$; $q = 2$

(b) $b_n = (4, 20, 100, 500, \ldots)$; $q = 5$

(c) $c_n = (3, -6, 12, -24, 48, \ldots)$; $q = -2$;

(d) $d_n = (3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \ldots)$: $q = \frac{1}{3}$,

(e) $e_n = (256, 128, 64, 32, 16, \ldots)$; $q = \frac{1}{2}$;

Da definição da Progressão Geométrica $\mathbf{a_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)}$ é uma Progressão Geométrica então:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_2} = \frac{a_5}{a_4} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q}$$

2. Fórmula do termo geral da Progressão Geométrica

De acordo com a definição, temos: $\begin{cases} \mathbf{a_1 = a_1} \\ \mathbf{a_2 = a_1 \bullet q} \\ \mathbf{a_3 = a_2 \bullet q} \\ \mathbf{a_4 = a_3 \bullet q} \\ \mathbf{a_5 = a_4 \bullet q} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a_n = a_{n-1} \bullet q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a_1 = a_1} \\ \mathbf{a_2 = a_1 \bullet q} \\ \mathbf{a_3 = a_1 \bullet q \bullet q = a_1 \bullet q^2} \\ \mathbf{a_4 = a_1 \bullet q^2 \bullet q = a_1 \bullet q^3} \\ \mathbf{a_5 = a_1 \bullet q^3 \bullet q = a_1 \bullet q^4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a_n = a_1 \bullet q^{n-1}} \end{cases}$

Podemos concluir que a fórmula do termo geral da Progressão Geométrica é dada por:

$$\boxed{a_n = a_1 \bullet q^{n-1}}$$

Onde:

a_1 – é primeiro termo da progressão; **n** – a ordem o termo;

q – é a razão da progressão; **a_n** – o termo geral da Progressão

<u>NOTA IMPORTANTE:</u> Para escrever o termo geral da Progressão Geométrica é suficiente saber o primeiro termo e a diferença da progressão.

Exemplo 1: Encontre o termo geral de cada sucessão a seguir:

(a) $a_n = (3, 6, 12, 24, 48, \dots)$

$a_1 = 3$; $q = 2$; $a_n = ?$

$a_n = a_1 \bullet q^{n-1}$

$a_n = 3 \bullet 2^{n-1}$

(b) $b_n = (4, 20, 100, 500, \dots)$;

$b_1 = 4$; $q = 5$; $b_n = ?$

$b_n = b_1 \bullet q^{n-1}$

$b_n = 4 \bullet 5^{n-1}$

(c) $c_n = (256, 128, 64, 32, 16, \dots)$;

$c_1 = 256$; $q = \frac{1}{2}$; $c_n = ?$

$c_n = c_1 \bullet q^{n-1}$

$c_n = 256 \bullet (\frac{1}{2})^{n-1}$

$c_n = \frac{256}{2^{n-1}}$

Exemplo 2: Numa organização geométrica sabe – se o segundo termo é 6 e o sétimo termo é 192. Determine o termo geral da progressão.

Para determinar o termo geral da progressão precisamos determinar o primeiro termo a_1 e a razão q.

$\begin{cases} a_2 = 6 \\ a_7 = 192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \bullet q = 6 \\ a_1 \bullet q^6 = 192 \end{cases}$ Dividindo as equações membro á membro ou seja primeiro com o primeiro e segundo com o segundo, e de seguida simplificar para encontrar primeiro termo ou a razão;

$\begin{cases} a_1 \bullet q = 6 \\ a_1 \bullet q^6 = 192 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 \bullet q^6}{a_1 \bullet q} = \frac{192}{6}$

$q^5 = 32$

$q = \sqrt[5]{32}$

$q = 2$

$a_1 \bullet q = 6$

$a_1 \bullet 2 = 6$

$a_1 = \frac{6}{2}$

$a_1 = 3$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= a_1 \bullet q^{n-1} \\ a_n &= 3 \bullet 2^{n-1} \end{aligned}}$$

Exemplo 3: Numa organização geométrica sabe – se a soma do primeiro termo com o quarto termo é 252 e a soma do segundo termo com o quinto termo é 84. Determine o termo geral da progressão;

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 252 \\ a_2 + a_5 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 \bullet q^3 = 252 \\ a_1 \bullet q + a_1 \bullet q^4 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + q^3) = 252 \\ a_1q(1 + q^3) = 84 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1(1 + q^3)}{a_1q(1+ q^3)} = \frac{252}{84}$$

$$\frac{1}{q} = 3$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$a_1(1 + q^3) = 252$$

$$a_1 = \frac{252}{1 + q^3} = \frac{252}{1 + (\frac{1}{3})^3} = \frac{252}{1 + \frac{1}{27}} = \frac{252}{\frac{28}{27}} = \frac{27 \bullet 252}{28} = 243;$$

$$\boxed{\begin{gathered} a_n = a_1 \bullet q^{n-1} \\ a_n = 243 \bullet (\frac{1}{3})^{n-1} \end{gathered}}$$

Exemplo 4: Determine o valor x de modo que a sucessão (5, 2x + 4, 6x + 2) seja Progressão geométrica;

Resolução: a_1 = 5, a_2 = 2x + 4 e a_3 = 6x + 2, pela definição tem – se:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{2x + 4}{5} = \frac{6x + 2}{2x + 4}$$

$$(2x + 4)\bullet(2x + 4) = 5\bullet(6x + 2)$$

$$4x2 + 8x + 8x + 16 = 30x + 10$$

$$4x^2 + 8x + 8x - 30x + 16 - 10 = 0$$

$$4x^2 - 14x + 6 = 0$$

$$a = 4;\ b = -14;\ c = 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\bullet4\bullet6}}{2\bullet4} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{8} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{14 \pm 10}{8} =$$

$$x_1 = \frac{14 - 10}{8} \vee x_2 = \frac{14 + 10}{8}$$

$$x_1 = \frac{4}{8} \vee x_2 = \frac{24}{8}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = 3$$

■ **Para x = $\frac{1}{2}$: a_n = (5; 5; 5) – É progressão geométrica de razão 1;**

■ **Para x = 3: a_n = (5; 10; 20) – É progressão geométrica de razão**

3. Propriedades da Progressão Geométrica

1ª Propriedade: Numa Progressão Gométrica com número ímpar de termos, o quadradro do termo médio (central) é igual ao produto dos extermos.

Exemplo:

Na P.G. (3, 6, 12, 24, 48), os termos extremos são 3 e 48, o termo médio é 12, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{12^2 = 3 \bullet 48} \\ \mathbf{144 = 144} \\ \textbf{(Verdade)} \end{array}}$$

2ª Propriedade: O produto dos termos equidistantes dos extremos de uma Progressão Gométrica é igual.

Exemplo:

Na P.G. (3, 6, 12, 24, 48, 96), os termos equidistantes dos extremos são: 3 e 96, 6 e 48, 12 e 24 temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{3 \bullet 96 = 6 \bullet 48 = 12 \bullet 24} \\ \mathbf{288 = 288 = 288} \\ \\ \textbf{(Verdade)} \end{array}}$$

4. Soma dos n primeiro de Progressão Geométrica

Seja a_n uma Progressão geométrica de razão q, a soma dos n primeiro termos consecutivos calcula – se pela formula:

Consideremos a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, de razão q temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \qquad (1)$$

Multiplicando a ambos membros da equação por $q \neq 0$, tem-se:

$$q \bullet S_n = q \bullet (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \quad (2)$$

Subtraindo ordenadamente a 2ª equação da 1ª, ou seja subtraindo membro a membro, tem-se:

$$S_n - q \bullet S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n - q \bullet (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$$

$$S_n - q \bullet S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n - a_2 - a_3 - \ldots - a_n - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1 - q} \quad \textbf{mas } \mathbf{a_{n+1} = a_1 \bullet q^n}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}} \quad \text{ou} \quad \boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

(Fórmula que permite achar a soma dos n primeiro de P.G. de razão q)

Onde:

a_1 – é primeiro termo da progressão;

q – é a razão da progressão;

n – o numero que pretende-se somar;

S_n – soma dos n primeiro da Progressão

Exemplo: Dada a Progressão Geométrica (3, 6, 12, 24, 48, …). **Determine:**

(a) A soma dos 7 primeiros termos;

$S_7 = ?$
$a_1 = 3$
$n = 7$
$q = 2$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_7 = \frac{3 \bullet (2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_7 = \frac{3 \bullet 127}{1}$$

$$S_7 = 381$$

(b) A soma dos 15 primeiros termos;

$S_{15} = ?$
$a_1 = 3$
$n = 15$
$q = 2$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_7 = \frac{3 \bullet (2^{15} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_7 = \frac{3 \bullet 32767}{1}$$

$$S_7 = 98301$$

5. Progressão geométrica infinita

Seja a_n uma progressão Geométrica de razão q, sendo $|q| < 1$ e $a_1 \neq 0$;

Sabe-se que: $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}$ introduzindo o limite tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1 - q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - 0 = \frac{a_1}{1 - q};$$

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

(Fórmula que permite somar todos os termos consecutivos de uma P.G. infinitamente decrescente)

Exemplo: Calcule a soma de todos termos da P.G. $a_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots)$;

Como trata – se de uma progressão geométrica infinitamente decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$. a soma de todos os termos consecutivos será dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escreve os termos e da sucessão e diga se é finita ou infinita composto por:

(a) Números pares até 24 (c) Múltiplo de 5 (e) Potência de $\frac{1}{2}$

(b) Divisores de 28 (d) Potência de 6 (f) Numeros primos inferior que 41

2. Determine 5 primeiros termos da sucessão definida por:

(a) $a_n = 3n - 7$ (b) $b_n = 4 - n$ (c) $c_n = \frac{2n+1}{2n}$ (d) $d_n = -4n + 8$ (e) $e_n = 2^n$

4. Determine 4 primeiro termos da sucessão definida por:

(a) $a_n = (-1)^n + 3n$ (b) $b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ (c) $c_n = \frac{1-(-1)^n}{3^n}$ (d) $d_n = 2^n - \frac{2}{3n}$ (e) $e_n = (-1)^n \bullet (n^2 - 1)$

5. Determine 7 primeiros termos da sucessão definida por:

(a) $\begin{cases} \frac{1}{n}; \textbf{ se n é ímpar}; \\ \frac{2}{n}; \textbf{ se n é par}; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \mathbf{u_1 = 3} \\ \mathbf{u_n = nu_{n-1}} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \mathbf{x_1 = 3} \\ \mathbf{x_{n+1} = 4x_n + 2} \end{cases}$

6. Dada a sucessão $u_n = 3n + 2$.Determine:

(a) a ordem do termo298 (c) $u_1 + u_3 + u_5$ (e) 394 é termo da sucessão?

(b) Os termos de ordem 10, 15 e 99 (d) $u_1 + u_2 + u_4$ (f) A soma dos cinco primeiros termos

7. Considera a sucessão $a_n = \frac{n^2-1}{n}$

(a) Determine a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_{n+1} e a_{k+2}

(b) Verifica se 9,9 é termo da sucessão e indica a sua ordem

(c) Será que 6 é termo da sucessão? Justifica a sua resposta.

8. Esboce o gráfico de cada sucessão:

(a) $a_n = n^2 - 1$ (b) $u_n = \frac{2}{n+1}$ (c) $v_n = (-1)^n$ (d) $x_n = 2^{n-1}$

9. Estude a monotonia de cada sucessão a seguir:

(a) $a_n = \frac{2n}{2n+1}$ (c) $c_n = -3n + 2$ (e) $en = \frac{2n-5}{2}$ (g) $g = \frac{n^2+1}{n}$

(b) $b_n = \frac{1}{n}$ (d) $dn = \frac{n+1}{n-1}$ (f) $f_n = 2 + \frac{1}{n}$ (h) $h_n = 5 - n^2$

10. Quais das sucessões seguintes são limitadas, para as limitadas indique a faixa que limita a sucessão:

(a) $a_n = \frac{n+1}{n}$ (c) $c_n = n^2$ (e) $e_n = (0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots)$ (g) $g_n = n$

(b) $bn = \frac{3n-2}{2n+5}$ (d) $d_n = \frac{1}{2^n}$ (f) $f_n = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$ (h) $h_n = 5 - 2n$

11. Aplicando a definição de limite de uma secessão, prove que:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{5n+2} = \frac{2}{5}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{2n-5} = 2$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2$

12. Calcule os limites das sucessões que se seguem e classifica – as em: Convergente, Divergente, Infinitamente pequena, infinitamente grande negativo e infinitamente grande positivo.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n)$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{6n-5}{2n+4})$ (i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1+2n}{3n-2})$ (m) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+8} - \sqrt{n})$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2 - n)$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n^2-1}{n^4-1})$ (j) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2n+3}{n2-1})^6$ (n) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{5-n^2} - \sqrt{2-n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n2})$ (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+5}{n+2}\right)$ (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n+4}{8n+2}}$ (p) $\lim\limits_{n\to-\infty} (5n^3 - 2n - 7)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{3n})$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n^3-2}\right)$ (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{15n^2+5n-7}}{2n-5}$ (q) $\lim\limits_{n\to\infty} (6n^4 + 3n^4 - 2n)$

13. Calcule:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{3}{n})^n$ (d) $)\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n^2+1})^{3n^2-3}$ (g) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3n+5}{3n+1})$ (j) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{3}{n})^{\sqrt{n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{2}{n})^n$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+5}{n+2})^n$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2n+1}{n+4})^{2n}$ (l) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{5n-7}{5n+2})^n$

(c)) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{3n+2}\right)^{n+8}$ (i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2n+3}{2n+1})$ (m) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n-2})^n$

14. Quais das sucessões são progressão aritmética, para as que são, indique a diferença d:

(a) $a_n = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ (c) $c_n = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots)$ (e) $e_n = (12, 9, 7, 4, 2, -1, \ldots)$

(b) $b_n = (100, 103, 106, 108, 111, \ldots)$ (d) $d_n = (4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \ldots)$ (f) $f_n = (5, 3, 1, -1, -3, \ldots)$

15. Quais das sucessões são progressão geométrica, para as que são, indique a razão q:

(a) $a_n = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ (c) $c_n = (-54. -18, -6, -2, \ldots)$ (e) $e_n = (4, 16, 64, 1024, \ldots)$

(b) $b_n = (7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$ (d) $d_n = (5, 10, 20, 30, 40, \ldots)$ (f) $f_n = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots)$

16. Nas sucessões seguintes, escreve o termo geral, de cada sucessão:

(a) $a_n = (-1, -4, -9, -16, -25, \ldots)$ (c) $a_n = (-54. -18, -6, -2, \ldots)$ (e) $a_n = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$

(b) $a_n = (-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \ldots)$ (d) $a_n = (2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$ (f) $a_n = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$

17. Dada a sucessão $a_n = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$, calcula a soma dos n primeiros termos:

(a) n = 10 (b) n = 12 (c) n = 15 (d) n = 20 (e) n = 25 (f) n = 100

18. Dada a sucessão a_n = (1, 3, 9, 27, 81, …), calcula a soma dos n primeiros termos:
(a) n = 5 (b) n = 10 (c) n = 12 (d) n = 15 (e) n = 20 (f) n = 25

19. Numa P.A. de diferença 3, o sexto termo é 7 e o ultimo é 247. **Quantos termos tem a progressão?**

20. Quantos termos devem ser somados na P.A. $(-5, -1, 3, \ldots)$ a partir do 1º termo, **para que a soma seja 1590?**

21. De uma P.A. sabe-se $a_2 + a_5 = 62$ e $a_4 + a_6 = 82$. **Determine o termo geral da progressão.**

22. Determina a soma dos dez primeiros termos de uma PA, sabendo que a soma do 3º e 5º termos é 14 e a soma do 3º e 7º termos é 8.

23. Determine o valor de x:
(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + x = 325$
(b) $1 + 3 + 5 + \ldots + x = 100$
(c) $(x + 3) + (x + 8) + (x + 13) + \ldots + (x + 33) = 133$
(d) $3x + x + \frac{x}{3} + \ldots = 27$

24. Determina o 1º termo e a razão q de uma PG, sabendo que a soma do 1º e 2º termos é 15 e a soma do 3º e 4º termos é 60.

25. Determine a soma de todos termos da sucessão PG infinita a seguir (0,3; 0,03; 0,003;…)

26. Determine o valor x de modo que a sucessão (x – 3, x – 1, x + 3) seja progressão geométrica.

27. Quantos números divisíveis por 3 existem entre 100 e 10 00inclusive?

28. Calcula a soma de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

29. Um automóvel percorreu no primeiro dia de viagem x km, no segundo dia percorreu o dobro de x e no terceiro dia percorreu o triplo de x, assim sucessivamente. Até ao fim de 10 dias, percorreu uma distância total de 1650km. **Quantos quilómetros o automóvel percorreu no primeiro dia de viagem?**

30. O cometa Halley é visto da terra de 76 em 76 anos. Seu último aparecimento foi em 2019. **Determina as suas 4 ocorrências seguintes.**

31. O Senhor Eliézer depositou num banco 5 mil meticais e resolveu ai colocar, todos meses, 500 meticais. Assim, decorrido um mês o Senhor Eliézer tinha 5500 meticais no banco. **Ao fim de quantos meses o Senhor Eliézer terá 50 000 meticais depositados no banco?**

32. Um mentiroso conta uma mentira a três amigos. Ao fim de 10 minutos cada um deles conta-a a outros três que, por sua vez, a contam em 10 minutos a outros três (cada um). **Quantas pessoas, incluindo o mentiroso, conhecem a mentira ao fim de uma hora ao contar do momento em que três amigos a começaram a espalhar?**

5 LIMITES E CONTINUIDADES DE FUNÇÕES

OBJECTIVOS:

No fim do ano, deverás ser capaz de:

- Efectuar o cálculo de factorial de um número natural;
- Simplificar as expressões que envolvem factorial;
- Resolver as equações que envolvem factorial;
- Distinguir Arranjos, Permutações e Combinações;
- Aplicar as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações para resolver problemas reais da vida:
- Desenvolver as linhas do triângulo de Pascal;
- Determinar a soma dos elementos das linhas do triângulo de Pascal;
- Aplicar a fórmula de Newton para efectuar o desenvolvimento do binómio $(x + y)^n$, sendo n natural;
- Reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios;
- Calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento, como cálculo de probabilidade;
- Calcular a probabilidade de um acontecimento pela lei de Laplace;
- Aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida;

6 CÁLCULO DIFERENCIAL (DERIVADA DE UMA FUNÇÃO)

OBJECTIVOS:

No fim do ano, deverás ser capaz de:

- Efectuar o cálculo de factorial de um número natural;
- Simplificar as expressões que envolvem factorial;
- Resolver as equações que envolvem factorial;
- Distinguir Arranjos, Permutações e Combinações;
- Aplicar as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações para resolver problemas reais da vida:
- Desenvolver as linhas do triângulo de Pascal;
- Determinar a soma dos elementos das linhas do triângulo de Pascal;
- Aplicar a fórmula de Newton para efectuar o desenvolvimento do binómio $(x + y)^n$, sendo n natural;
- Reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios;
- Calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento, como cálculo de probabilidade;
- Calcular a probabilidade de um acontecimento pela lei de Laplace;
- Aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida;

6.1. DEFINIÇÃO DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

6.2. REGRAS DE DERIVAÇÃO

6.3. DEREIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA

6.4. DERIVADA DE FUNÇÕES ELEMENTARES

6.4.1. DERIVADA DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

6.4.1. DERIVADA DE FUNÇÃO LOGARÍTMICA

6.4.1. DERIVADA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

6.5. DERIVADA DE FUNÇÃO NUM PONTO

6.6. DERIVADA LATERAIS

6.7. DERIVADAS SUCESSIVAS

6.8. RECTA TANGENTE E NORMAL A UMA CURVA PLANA

6.8. APLICAÇAO DA DERIVADA – ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO E EXTREMOS RELACTIVOS

6.9. APLICAÇAO DA DERIVADA – ESTUDO DA CONCAVIDADE DA FUNÇÃO E PONTO DE INFLEXÃO

6.10. APLICAÇAO DA DERIVADA – PROBLEMAS DE OPTMIZAÇÃO

6.11. APLICAÇAO DA DERIVADA – A REGRA DE L´HOSPITAL

7 CÁLCULO INTEGRAL (PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO)

OBJECTIVOS:

No fim do ano, deverás ser capaz de:

- Efectuar o cálculo de factorial de um número natural;
- Simplificar as expressões que envolvem factorial;
- Resolver as equações que envolvem factorial;
- Distinguir Arranjos, Permutações e Combinações;
- Aplicar as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações para resolver problemas reais da vida:
- Desenvolver as linhas do triângulo de Pascal;
- Determinar a soma dos elementos das linhas do triângulo de Pascal;
- Aplicar a fórmula de Newton para efectuar o desenvolvimento do binómio $(x + y)^n$, sendo n natural;
- Reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios;
- Calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento, como cálculo de probabilidade;
- Calcular a probabilidade de um acontecimento pela lei de Laplace;
- Aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida;

7.1. NOÇÃO DE PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO – INTEGRAL INDEFINIDO

7.2. PROPRIEDADES DA INTEGRAÇÃO

7.3. TABELA DE INTEGRAIS

7.4. TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

7.4.1. METODO DE SUBSTITUIÇÃO

7.4.2. INTEGRAÇÃO POR PARTES

7.4.3. INTEGRAÇÃO DE FUNCOES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

7.5. INTEGRAIS TRIGOMÉTRICAS

7.5.1. SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

8 NÚMEROS COMPLEXOS (NÚMEROS IMAGINÁRIOS)

OBJECTIVOS:

No fim do ano, deverás ser capaz de:

- Efectuar o cálculo de factorial de um número natural;
- Simplificar as expressões que envolvem factorial;
- Resolver as equações que envolvem factorial;
- Distinguir Arranjos, Permutações e Combinações;
- Aplicar as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações para resolver problemas reais da vida:
- Desenvolver as linhas do triângulo de Pascal;
- Determinar a soma dos elementos das linhas do triângulo de Pascal;
- Aplicar a fórmula de Newton para efectuar o desenvolvimento do binómio $(x + y)^n$, sendo n natural;
- Reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios;
- Calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento, como cálculo de probabilidade;
- Calcular a probabilidade de um acontecimento pela lei de Laplace;
- Aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida;

EXERCÍCIOS DE CONSOLIDAÇÃO

PARA CADA QUESTÃO ESCOLHA A ALTERNATIVA CORRECTA

1. Qual é o valor numérico de d(5; 7)?

A. 2 B. 7 C. 5 D. 12

2.Considerando $\sqrt{x^2}= |x|$, a que é igual $\sqrt{81c^2a^4p^2}$?

A. $9ca^2p$ B. $|9ca^2p|$ C. $|9ca^2p|^2$ D. $|81c^2a^4p^2|$

3. Sendo n um número par, $\sqrt[n]{(x-5)^n}$ é igual à …

A. $|x-5|$ B. $|x+5|$ C. $x-5$ D. $x+5$

4. Qual das condições é verdadeira, $\forall_{x,y \in IR}$?

A. $|x+y| \geq 0$ B. $\sqrt{(x-y)^2} = x-y$ C. $|x+y| \geq |x| + |y|$ D. $|x-y| \leq |x| - |y|$

5. Sendo x e y dois números reias quaisquer, qual das opções <u>NÃO</u> é correcta?

A. $|x \cdot y| = x \cdot y$ B. $|x^2| = |x|^2 = x^2$ C. $|x-y| \geq |x| - |y|$ D. $|x+y| \leq |x| + |y|$

6. Qual é a expressão equivalente a $|x+\frac{1}{2}|$, na condição $x < -\frac{1}{2}$?

A. $-x-\frac{1}{2}$ B. $x+\frac{1}{2}$ C. $x-\frac{1}{2}$ D. $x+\frac{1}{2}$

7. Qual é a escrita simbólica da afirmação "***A distância entre os pontos da recta numérica cujas abcissas são x e - 2 é igual a 4***"?

A. $|x-2| = 4$ B. $|x+2| = 4$ C. $|x-4| = 2$ D. $|x+4| = 2$

8. Considere a afirmação "*Conjunto de valores de x que se encontram a 5 unidades de 3*". **Qual é correcta tradução simbólica da afirmação?**

A. $|x+3| = 5$ B. $|x-3| = 5$ C. $x+3 = 5$ D. $x-3 = 5$

9. Qual é a designação correcta de conjunto das abcissas dos pontos cuja distância à origem excede 4?

A. $|x-4| < 0$ B. $|x-4| > 0$ C. $|x| < 4$ D. $|x| > 4$

10. Qual é a condição para que $|-x+1| = x-1$?

A. $x > 1$ B. $x \geq 1$ C. $x < 1$ D. $x < -1$

11.Quais são os valores que m pode tomar para que a equação $|x-2| = -1 + m$ tenha solução em IR?

A. $m > 1$ B. $m \geq 1$ C. $m < 1$ D. $m \leq 1$

12.Qual é a condição para que a igualdade $|1 - 3x| - x + 8 = 9 - 4x$ seja verdadeira?

A. $x \leq \frac{1}{3}$ B. $x \geq \frac{1}{3}$ C. $x < \frac{1}{3}$ D. $x > \frac{1}{3}$

13.Na condição $-2x + 1 < 0$, $|-2x + 1|$ é igual á…

A. $-2x + 1$ B. $-2x - 1$ C. $2x - 1$ D. $2x + 1$

14.Qual é a soma das raízes da equação $|x - 2| = 8$?

A. -6 B. 4 C. 6 D. 10

15.Qual é a solução da equação $|3x - 1| = -2$?

A. $\{-2\}$ B. $\{1\}$ C. $\{0\}$ D. $\{\ \}$

16.Qual é a solução da equação $|2x + 2| = x - 5$?

A. $\{7\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-7\}$ D. $\{\ \}$

17.Qual é a solução da equação $|x + 3| = 7$?

A. $x = -10 \vee x = -4$ B. $x = -10 \vee x = 4$ C. $x = 10 \vee x = -4$ D. $x = 10 \vee x = 4$

18.Qual é a solução da equação $|x^2 + 2x - 2| = |x^2 - x - 1|$?

A. $\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$ B. $\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$ C. $\{\frac{1}{3}, 1\}$ D. $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$

19. Qual é a solução da equação $|3 - 2x| = 5 - 10x$?

A. $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$ e $-\frac{2}{3}$

20. A que é igual a soma das soluções da equação $\left|\frac{x-3}{2}\right| = \frac{1}{3}$?

A. -6 B. -5 C. -4 D. -1

21.A que é o produto das raízes da equação $|6x - 1| = 17$?

A. -8 B. $-\frac{8}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. 3

22.Qual é o conjunto solução da inequação $|2x - 6| \leq 4$?

A. [2; 5] B.]2; 5[C. [2; 5[D.]2; 5]

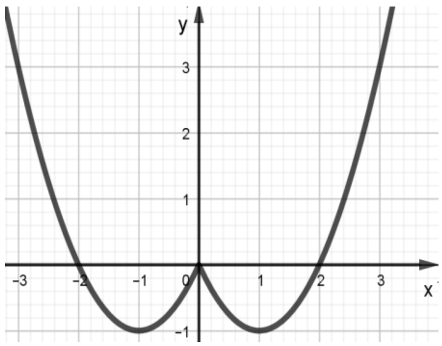
23.Qual é o conjunto solução da inequação $|5 - x| < 7x - 3$?

A. $x < 1$ B. $x \leq 1$ C. $x > 1$ D. $x \geq 1$

24. Qual é o conjunto solução da inequação $|3 - 2x| < |1 - x|$?

A. $[1; \frac{4}{3}]$ B. $]1; \frac{4}{3}[$ C. $]-\infty;1[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[$ D. $\emptyset$

Observe o gráfico abaixo da função f definida em IR, responde as perguntas: 25, 26, 27, 28, 29 e 30.



25. Qual das funções corresponde ao gráfico da função f?

A. $f(x) = x^2 - 2|x|$ C. $f(x) = |x^2 - 2x|$
B. $f(x) = x^2 + 2|x|$ D. $f(x) = |x^2 + 2x|$

26. Qual é o domínio da função?

A. { } B. $[1, +\infty[$ C. IR_0^+ D. IR

27. Qual é o contradomínio da função?

A. { } B. $[1; +\infty[$ C. IR_0^+ D. IR

28. Quais são os zeros da função?

A. {-2, 0, 2} B. {-2, 2} C. {0, 2} D. {-1, 2}

29. Em que intervalo a função é crescente?

A. $]1; 0[\cup]1; +\infty[$ B. $]-\infty; 1[\cup]0; 1[$ C. $]-\infty; 1[\cup]1;+\infty[$ D. $]1; 1[$

30. Para que valores de x a função é positiva?

A. $]2; 0[\cup]2;+\infty[$ B. $]-\infty; 2[\cup]0; 2[$ C. $]-\infty; 2[\cup]2;+\infty[$ D. $]2; 2[$

31. Considere o triângulo de Pascal abaixo:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
… …. …. … … … …

Qual é a soma dos termos da oitava linha do triângulo de Pascal

A. 32 B. 64 C. 128 D. 256

32. Qual é a expressão simplifica de $\frac{(n+1)! - P_n}{n!}$?

A. n^2 B. $2n^2$ C. n D. $(n + 1)!$

33. Qual é a expressão simplifica de $\frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!}$?

A. $\frac{1}{n}$ B. $\frac{1}{n+1}$ C. $\frac{1}{n(n+1)}$ D. $\frac{n}{n+1}$

34. Qual é a expressão simplifica de $\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{(n-p)! \bullet p!}$ **?**

A. 2^k B. 2^{n-k} C. 2^n D. 2^{k-n}

35. A que é igual a soma dos termos $\binom{12}{3} + \binom{12}{4}$ **?**

A. $\binom{12}{3}$ B. $\binom{12}{4}$ C. $\binom{13}{3}$ D. $\binom{12}{4}$

36. Considere a equação $(n-3)! = 6(n-4)!$. **Qual é o domínio da variável n?**

A. $n < 4$ B. $n \leq 3$ C. $n > 0$ D. $n \geq 0$

37. Qual é a solução da equação $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 24$**?**

A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

38. Qual é a solução da equação $\frac{(n-1)!}{(n+1)!-n!} = \frac{1}{81}$**?**

A. 2 B. 5 C. 9 D. 10

39. Qual é a solução de $A_2^n = 20$**?**

A. – 5 B. 4 C. 5 D. 6

40. Sendo $C_2^n = 45$, $n > 2$ **qual é o valor de n**?

A. 90 B. 45 C. 20 D. 10

41. Quantos termos tem o desenvolvimento de $(x + y)^{18}$?

A. 17 B. 18 C. 19 D. 20

42. Sabendo que no desenvolvimento binómio do $(2x + 5)^n$, tem 12 termos, qual é o valor de n?

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

43. Qual é o termo médio do desenvolvimento $(x + 3)^6$?

A. $C_3^6 \bullet x^3 \bullet 3^3$ B. $C_4^6 \bullet x^2 \bullet 3^4$ C. $C_4^6 \bullet x^3 \bullet 3^3$ D. $C_2^6 \bullet x^4 \bullet 3^2$

44. A parte literal de um termo no desenvolvimento do binómio de Newton do oitavo grau $x^k y^3$. **Qual é o valor de k?**

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

45. Qual é o terceiro termo do desenvolvimento de (x + $\frac{1}{2}$)^4?

A. x^3 B. $\frac{1}{2}x^2$ C. $\frac{1}{2}x^3$ D. $\frac{3}{2}x^3$

46. Numa competição há 8 concorrentes. Não havendo empates. **De quantas maneiras diferentes podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze para o primeiro, segundo e terceiro lugares respectivamente?**

A. 40320 B. 336 C. 20 D. 25

47. Suponha que 7 pessoas sejam dispostas em fila de todas formas possíveis. **De quantas formas diferentes isso pode ser feito?**

A. 40 B. 50 C. 504 D. 5040

48. Um eleitor deve escolher, entre cinco candidatos, um presidente, um secretário e um tesoureiro. **De quantas maneiras diferentes pode se fazer a escolha?**

A. 60 B. 61 C. 62 D. 63

49. Um grupo de 5 amigos pretende criar subgrupos de 2 para repintá-los num torneio. **Sabendo que há 3 mulheres e 2 homens, quantos subgrupos são possíveis criar com uma mulher e um homem?**

A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

50. Quantos números de três algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos do conjunto M = {1, 3, 7, 8, 9}

A. 10 B. 30 C. 60 D. 125

51. Num grupo de 6 pessoas pretende-se escolher duas pessoas para chefe e subchefe. **De quantas maneiras se pode fazer a selecção?**

A. 6 B. 10 C. 15 D. 30

52. Numa reunião de congregação em que cada professor cumprimentou todos os seus colegas, registam-se 21 apertos de mãos. **O número de professores presente foi de…**

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

53. O João te 4 pares de sapatos e 10 pares de meia. De quantas maneiras diferentes ele poderá calçar, utilizando de cada vez, um par de meias e um de sapatos.

A. 4 B. 10 C. 14 D. 16

54. Uma urna de 10 bolas idênticas, numeras de 1 a 10. Se retirarmos ao acaso uma bola da urna, **qual é a probabilidade de obter-se uma bola com um número par menor do que 6?**

A. 0,1 B. 0,2 C. 0,25 D. 0,5

55. Duas moedas são lançadas uma vez ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de ao caírem, apresentarem faces idênticas?

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

56. O António abre aleatoriamente uma revista de 40 páginas enumerada de 1 a 40**. Qual é a probabilidade de abrir uma pagina cujo número é múltiplo 6?**

A. 12,5%   B. 15%   C. 20%   D. 25%

57. Num café estão 20 pessoas das quais 8 são mulheres. **Qual será a probabilidade de ao escolher uma das pessoas, ao acaso, seja homem?**

A. $\frac{1}{30}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

58. Numa turma de 10 rapazes e 20 raparigas, metade dos rapazes e metades das raparigas, tem olhos castanhos. **Qual será a probabilidade de um individuo, escolhido ao acaso, ter olhos castanhos?**

A. $\frac{1}{28}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

59. A probabilidade de um estudante passar de classe é de 0,7. Qual é a probabilidade de o estudante não passar de classe?

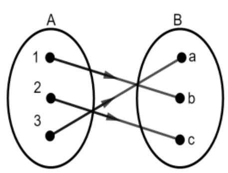
A. 0,2   B. 0,3   C. 0,4   D. 0,7

60. Num grupo de 120 pessoas, a probabilidade de, numa escolha ao acaso obter um homem é Quantos homens é $\frac{5}{8}$ faziam parte do grupo?

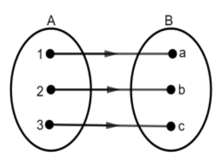
A. 40   B. 75   C. 100   D. 120

61. Quais dos diagramas **<u>NÃO</u>** representa uma função de M em N, onde M = {1, 2, 3} e N = {a, b, c}?

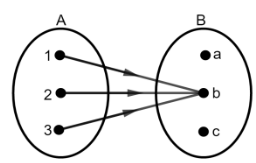
A.



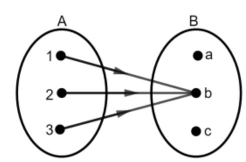
B.



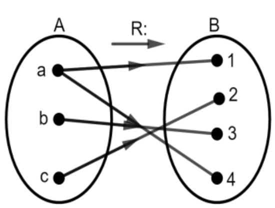
C.



D.



62. Dado os conjuntos M ={a, b, c} e N = {1, 2, 3, 4} considera a relação R: M → N representada na figura.



Qual das opções é relação inversa de R?

A. R^{-1}= {(1;a), (4;a), (3;b), (2;c)}   C. R^{-1}= {(1;a), (4;a), (3;b), (2;c)}

B. R^{-1}= {(1;a), (4;a), (3;b), (2;c)}   D. R^{-1}= {(1;a), (4;a), (3;b), (2;c)}

63. Considere as funções: $f(x) = 2^x$, $g(x) = \text{sen}x$, $h(x) = x^2 + 5$ e $m(x) = x^3$.**Qual é a proposição falsa?**

A. **f** e **m** são monótonas;

B. **f** e **h** podem ter domínio IR;

C. **f** e **b** não tem zeros;

D. **g** e **m** são ímpares;

64. Sendo $y = f(x)$ uma função tal que $f(-x) = f(x)$, $\forall_{x \in IR}$. **Qual das afirmações é correcta?**

A. f(x) é injectiva

B. f(x) é ímpar

C. f(x) é injectiva

D. f(x) é par

65. Qual das funções **NÃO** é injectiva?

A. $f(x) = x^2 + 4$

B. $f(x) = \frac{2}{x}$

C. $f(x) = \log_2 x$

D. $f(x) = 2^x$

66. Qual é a classificação da função $\mathbf{f(x) = \cos\frac{1}{2}x}$ quanto a paridade?

A. Ímpar

B. Ímpar e par

C. Não par nem ímpar

D. Par

67.Qual é a classificação da função $f(x) = x^2 + 2$ quando à paridade?

A. Par

B. Não par

C. Não par nem ímpar

D. Ímpar

68. Qual é opção correcta ?

A. Uma função diz-se bijectiva se $f(-x) = -f(x)$;

B. Uma função monótona não te vértice;

C. O gráfico da função $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ é uma parábola;

D. Uma função diz-se ímpar se $f(-x) = f(x)$;

69. Dadas as funções: $f(x) = 2^{x-1}$,$g(x) = \lg(x)$, $h(x) = \text{sen}x$ e $m(x) = x^2$. **Qual delas é bijectiva?**

A. $\mathbf{f(x) = 2^{x-1}}$

B. $\mathbf{g(x) = \lg(x)}$

C. **h(x) = senx**

D. $\mathbf{m(x) = x^2}$

70. Qual é a alternativa **NÃO** correcta?

A. Toda função injectiva é bijctiva;

B. Toda função sobrejectiva tem contradomínio IR;

C. Toda função com vértice, cresce e decresce no seu domínio;

D. O gráfico de uma função par é simétrico;

71. Os gráficos de $f(x) = k^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ intersectam-se num ponto de abcissa $x = 3$. **Qual e o valor de k?**

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

72. Qual é a expressão analítica de uma função do segundo grau, cujo passa pelo ponto $P(0, -2)$ e tem como coordenadas de vértice $V(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$?

A. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

B. $f(x) = -x^2 - 3x + 2$

C. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

D. $f(x) = x^2 - 3x - 2$

73. De uma função quadrática f(x) sabe-se que os zeros da função respectivamente $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$, a ordenada na origem é 8. **Qual é a expressão que representa a função f(x)?**

A. $f(x) = x^2 + 6x + 8$

B. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

C. $f(x) = x^2 + 8x + 16$

D. $f(x) = x^2 - 6x - 8$

74. Qual é o declive da recta perpendicular à recta da equação $y = -3x + 2$?

A. -3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3

75. Qual é o valor de k para que as rectas dadas por $x - 3y + 9 = 0$ e $kx + y - 8 = 0$, seja perpendiculares entre si?

A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

76. Qual é a equação da recta que passa pelo ponto (1, 1) paralelamente à recta de equação $y = 2x + 1$?

A. $x + 3y - 4 = 0$ B. $2x + y + 1 = 0$ C. $3x - y - 2 = 0$ D. $-2x - y + 9 = 0$

77. Qual é a equação da recta que passa pelo ponto $(-1, 3)$ perpendicularmente à recta de equação $y = 2x - 1$?

A. $-2x + y + 1 = 0$ B. $2x + 2y - 5 = 0$ C. $x + 2y - 5 = 0$ D. $x + 2y + 5 = 0$

78. Qual deve ser o valor de k para que o ponto (1, 1) pertença à recta equação $(k - 2)x - 4y + 20 = 0$?

A. -26 B. -14 C. 14 D. 26

79. Qual é o contradomínio da relação $R = \{(x, y): 2x + y = 8\}$, com x e y pertencentes ao conjunto IN?

A. { } B. IN C. {0, 1, 2, 3, 4} D. {0, 2, 4, 6, 8}

80. O gráfico da função $f(x) = \frac{k}{x-1}$ passa pelo ponto $(1, \frac{2}{3})$. **Qual é o valor de k?**

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

81. Considere a função $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Quais são as equações das assintótas?

A. $x = 2$ e $y = 3$ B. $x = 2$ e $y = -3$ C. A. $x = 1$ e $y = -1$ D. A. $x = -2$ e $y = 3$

82. Quantas assintótas verticais têm o gráfico da função $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

83. Qual é o período da função $y = tg\frac{x}{3}$?

A. 3π B. 2π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{3}$

84. Qual é o período da função $y = \cos(2x)$?

A. π B. 2π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

85. Seja $\frac{\pi}{4}$ o período da função $f(x) = \cos(2mx)$, com $m \in IR^+$. **Qual é o valor de m?**

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{\pi}{8}$ C. 4 D. 8

86. Considere a função $f(x) = \cos kx$ de período $T = 5\pi$. **Qual é o valor de $k \in IR^+$?**

A. $\frac{1}{2}$ e $\frac{9}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ e $\frac{2}{5}$ C. 3 e 2 D. 4 e 1

87. Seja $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = ax + b$ onde a e b são números reais. **Nesta condições, a que é igual (fog)(0)?**

A. $b^2 - 2b$ B. $2b - b^2$ C. b D. 0

88. Considere as funções $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 2^x$. Qual **é a expressão de f[g(x)]?**

A. 2^{2x-4} B. $\mathbf{2^{x^2-4}}$ C. $2^{2x} - 4$ D. $2^{2x-4} - 4$

89. Considere a função $h(x) = 4x + 2$. A **que é igual hoh(x)?**

A. $4x + 2$ B. $8x + 4$ C. $16x + 4$ D. $16x + 10$

90. Considere as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = 2x - 1$. **Qual é o valor de f[g(x)]?**

A. -4 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 4

91. Sendo $f(x) = x^3$ com $x \in IR$, qual é o valor de $f^{-1}(8)$?

A. 2 B. 4 C.6 D. 8

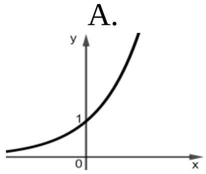
92. Qual é a expressão analítica da inversa da função $f(x) = \frac{x}{x-1}$?

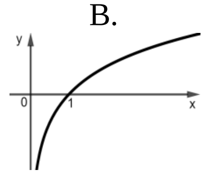
A. $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$ B. $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$ C. $f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}$ D. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$

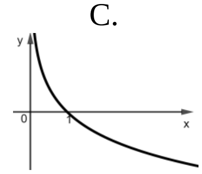
93. Qual é a inversa da função $f(x) = \log_2 x + 1$?

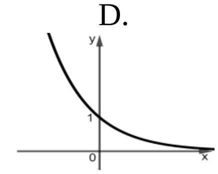
A. $f^{-1}(x) = 2^{x-1}$ B. $f^{-1}(x) = 2^{x+1}$ C. $f^{-1}(x) = 2^x - 1$ D. $f^{-1}(x) = 2^x + 1$

94. Qual é o gráfico da inversa da função $f(x) = 2^x$?

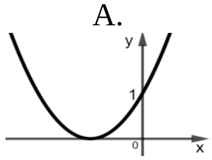
A.


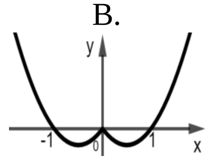
B.


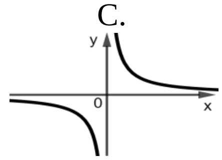
C.


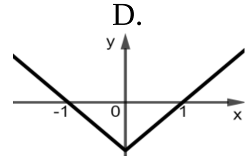
D.


95. Qual é o gráfico que representa uma função ímpar?

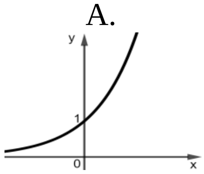
A.


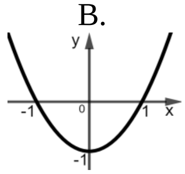
B.


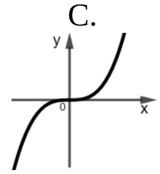
C.


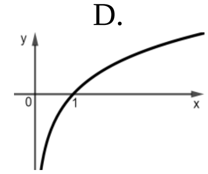
D.


96. Qual das funções **<u>NÃO</u>** é injectiva?

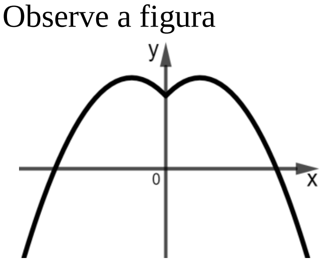
A.


B.


C.


D.


97. Observe a figura



Esta figura representa uma função …

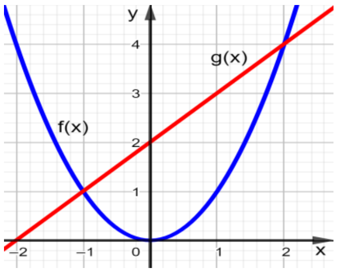
A. Ímpar

B. Par

C. Injectiva

D. Bijectiva

Observe a figura, resolve os números 98, 99 e 100.



98. Para que valores de x, tal que f(x) = g(x)?

A. – 2 e – 1 B. – 2 e 1 C. – 1 e 2 D. 1 e 2

99. Para que valores de x, tal que f(x) ≤ g(x)?

A. $]-\infty; -1]$ B. [1; 4] C. [– 1; 2] D. $[2; +\infty[$

100. Para que valores de x, tal que f(x) > g(x)?

A. $]-\infty; -1[$ C. $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$
B .$]2; +\infty[$ D. $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

101. Na sucessão de termo geral $a_n = \frac{3n}{n+1}$, **qual é o termo de ordem 11?**

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{33}{12}$ C. $\frac{7}{6}$ D. $\frac{33}{14}$

102. Considere a sucessão de termo geral $u_n = 3n + 7$. **Qual é a ordem do termo 52?**

A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

103. Na sucessão $a_n = \frac{5n+1}{n+2}$, qual é o termo de ordem 7?

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

104. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{2n}$, n ∈ IN. **Qual é o termo de ordem n + 1?**

A. $\frac{n}{2n+2}$ B. $\frac{n+1}{2n+2}$ C. $\frac{n+2}{2n+1}$ D. $\frac{n+2}{2n+2}$

105. Qual é a ordem do termo 17 da sucessão $a_n = 2n + 1$?

A. 35 B. 17 C. 9 D. 8

106. Quais são os 3 primeiro termos da sucessão $a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}; \textbf{ se n é par}; \\ \frac{n+1}{n}; \textbf{ se n é impar}; \end{cases}$?

A. 2; 3; 6 B. 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ C. 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$ D. 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$

107. Considere a sucessão $a_n = 1 - 3n$. Qual é a ordem do termo −59?

A. 30 B. 20 C. -176 D. - 177

108. Qual é a classificação da sucessão $b_n = \frac{n-1}{n}$ quanto monotonia?

A. Alternada B. Constante C. Crescente D. Decrescente

109. Qual é a classificação da sucessão $a_n = \frac{n+1}{n}$ quanto monotonia?

A. Alternada B. Constante C. Crescente D. Decrescente

110. Qual é a característica correcta que corresponde sucessão $a_n = 5 + 2^{-3n}$?

A. Oscilante B. Constante C. Crescente D. Decrescente

111. A partir de que ordem os termos da sucessão de termo geral $a_n = \frac{2n+1}{n}$ encontram-se a menos de 0,02 do limite?

A. 2 B. 3 C. 50 D. 51

112. A partir de que ordem os termos da sucessão de termo geral $a_n = 5 - \frac{2}{n+1}$ ficam mais perto do limite a menos de uma décima?

A. 5 B. 6 C. 19 D. 20

113. De uma progressão aritmética sabe-se que o quarto termo é 17 e o décimo terceiro termo é 62. Quais são, respectivamente, os valores do primeiro termo e da diferença?

A. -5 e 5 B. 2 e 5 C. 1 e 7 D. 5 e 17

114. Sabendo que o lucro semanal da venda de automóveis cumpre a ordem (2000; 4000; 8000; …). Qual é o lucro obtido durante as primeiras 10 semanas?

A. 1024 B. 2046 C. 1024000 D. 2046000

115. Qual destas sucessões é infinitamente grande negativa?

A. $3n - 1000$ B. $13 - n$ C. $n^2 - 800$ D. $n + 9$

116. Qual das sucessões é uma progressão aritmética?

A. 7; 19; 31; 43; 55 B. 7; 18; 30; 42; 55 C. 7; 20; 32;44; 55 D. 7; 30; 37; 44; 55

117. Qual é o termo geral da sucessão: 2; 6; 18; …?

A. $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ B. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ C. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ D. $a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

118. De uma progressão aritmética de 13 termos sabe-se que o primeiro termo é 4 e ultimo é 40. Qual é a soma dos termos da progressão?

A. 44 B. 144 C. 286 D. 572

119. Numa progressão geométrica de quantidade impar de termos, qual é o termo médio, sabendo que 4 e 324 são respectivamente o primeiro e o último termos?

A. 36 B. 164 C. 200 D. 202

120. Quantos termos tem a sucessão -14; - 10; - 6; …; 42?

A. 4 B. 12 C. 15 D. 42

121. Qual é a classificação da sucessão cujo o termo geral é $a_n = (-n)^n$?

A. Convergente e infinitamente pequena;
C. Divergente e infinitamente pequena;
B. Convergente e infinitamente grande;
D. Divergente e infinitamente grande;

122. Quantos números ímpares, menores 175 existem?

A. 83 B. 85 C. 87 D. 89

123. Qual é o valor de x na equação $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 15$

A. 10 B. 11 C. 20 D. 30

124. Qual é a soma dos 5 primeiros termos de uma progressão geométrica cujo termo geral é $a_n = 2^{n-2}$?

A. $-\frac{33}{2}$ B. $-\frac{31}{2}$ C. $\frac{31}{2}$ D. $\frac{33}{2}$

125. Sabendo que (x; x + 9; x + 45; …) formam uma progressão geométrica, qual é o valor de x?

A. – 3 B. 3 C. 9 D. 27

126. Qual é o termo geral da sucessão 2; -5; 8; -11; …?

A. $a_n = (3n - 1)(-1)^{n+1}$ B. $a_n = (3n + 1)(-1)^{n+1}$ C. $a_n = (3n - 1)(-1)^n$ D. $a_n = (3n + 1)(-1)^n$

127. Sabendo que (x – 3; x; x+6), são termos consecutivos de uma progressão geométrica, qual é o valor de x?

A. 3 B. 6 C. 9 D. 27

128. Qual é a sucessão infinitamente pequena?

A. $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \ldots$ B. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$ C. $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \ldots$ D. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots$

129. Para que valores $k \in \mathbf{IR}$, a sucessão $u_n = k^n$ com $n \in IN$ é infinitamente grande:

A. $|k| > 1$ B. $k > 1$ C. $|k| < 1$ D. $k < 1$

130. Qual das sucessões é divergente?

A. $\frac{n^2}{n-5}$ B. $(\frac{2}{5})^n$ C. $\frac{3n^2+5n}{n^5-1}$ D. $(1+\frac{5}{n})^n$

131. Qual é o termo geral a sucessão $1; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{9}; \frac{1}{8}; \ldots$?

A. $\frac{\sqrt{2n}}{n^2}$ B. $\frac{\sqrt{n}}{n^2}$ C. $\frac{\sqrt{n-1}}{n^2}$ D. $\frac{n^2}{\sqrt{n}}$

132. Qual é o 105º numero ímpar?

A. 105 B. 109 C. 205 D. 209

133. O termo médio de uma progressão aritmética de 5 termos é 11. Qual é a soma destes termos?

A. 11 B. 17 C. 55 D. 110

134. Os pares dos termos equidistantes de uma progressão aritmética finita são respectivamente 1 e 37; k e 31. Qual é valor de k?

A. 6 B. 7 C. 13 D. 25

135. Numa progressão geométrica o quinto termo é 40% do quarto termo. Qual é o terceiro termo, sabendo que o primeiro termo é 100?

A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

136. Qual é o valor da soma de todos termos da sucessão $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots$?

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 3 D. $+\infty$

137. Qual é o termo geral da sucessão 18; 15; 12; 9; 6; …?

A. $u_n = 3n - 21$ B. $u_n = 21 - 3n$ C. $u_n = 3n + 15$ D. $u_n = -3n + 15$

138. Qual é a soma dos n primeiros números impares?

A. n B. 2n C. n^2 D. n^3

139. Quantos das sucessões é uma progressão aritmética?

A. -9; 13; -17; -22; … B. 1; 5; 10; 14; C. 20: 15; 10; 5; … D. 1; 7; 13; 20; …

140. Quantos termos tem a sucessão -14; - 10; -6; …, 42?
A. 4 B. 12 C. 15 D. 42

141. De uma progressão geométrica de quatro termos positivos, sabe-se que a soma dos primeiros dois termos é 6 e a dos últimos é 24. Qual é a razão?
A. 4 B. 2 C. - 2 D. - 4

142. De uma progressão geométrica de 5 termos, sabe-se que a_1= 3 e q = 2. **Qual é a soma de todos os termos?**
A. - 99 B. - 93 C. 91 D. 93

143. Quantos múltiplos de 2 se escrevem com dois algarismos?
A. 98 B. 88 C. 45 D. 44

144. De uma progressão aritmética sabe-se o primeiro termo é 3 e a diferença é 2. **Qual a soma dos primeiros 6 termos?**
A. 33 B. 36 C. 48 D. 54

145. Numa progressão geométrica de 5 termos a_1= 3 e a_5 = 48. **Qual é o terceiro termo?**
A. 12 B. $\frac{35}{2}$ C. $\frac{51}{2}$ D. 72

146. De uma progressão aritmética sabe-se que $a_1 = -1$ e $a_{11} = 29$. **Qual é o valor de a6?**
A. 7 B. 13 C. 14 D. 28

147. Qual é o termos geral da sucessão 5; 9; 13; 17; …?
A. $a_n = 2n + 3$ B. $a_n = 4n + 1$ C. $a_n = 5n$ D. $a_n = 9n – 1$

148. Qual é a sucessão infinitamente grande?
A. $a_n = \frac{n^2 + 1}{2 + n}$ B. $a_n = \frac{2n + 3}{n^2 + 2}$ C. $a_n = \frac{200}{n + 1}$ D. $a_n = \frac{8}{2n}$

149. Quantos divisores de 1024 existem?
A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

150. A que é igual $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$?
A. $\frac{7}{40}$ B. $\frac{3}{28}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

151. A sucessão u_n é uma progressão geométrica de razão 0,3 e u_2 = 0,9. Qual é o termo geral da progressão?
A. $u_n = 0{,}3 \cdot (0{,}3)^{n-1}$ B. $u_n = 3 \cdot (0{,}3)^{n-1}$ C. $u_n = 0{,}9 \cdot (0{,}3)^{n-1}$ D. $u_n = 9 \cdot (0{,}3)^{n-1}$

152. De uma progressão de 8 termos sabe-se que o primeiro termo é 1 e a soma de todos os termos é 148. Qual é a diferença entre os termos da progressão?
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

153. Qual é a soma dos primeiros 6 termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 3 e razão é 2?
A. 32 B. 64 C. 144 D. 189

154. Considere uma progressão aritmética $a_{10} = 32$ e $a_{15} = 46$. **Qual é diferença entre os termos dessa progressão?**

A. -5 B. -3 C. 3 D. 5

155. Os extremos de uma progressão aritmética de 5 termos são 1 e 13. **Qual é a soma de todos os termos dessa progressão?**

A. 70 B. 35 C. 14 D. 7

156. Qual é a soma de todos os termos da sucessão $(9; 3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \ldots)$?

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{27}{2}$

157. Um motorista de táxi foi multados 3 vezes, tendo o valor duplicado de cada vez que pagava uma nova multa. A última multa foi de 204 meticais. **Quanto dinheiro pagou na primeira multa?**

A. 50 B. 51 C. 52 D. 53

158. Um atleta decidiu que a partir do segundo dia de treino irá correr sempre mais 3 km do que no dia anterior. Se no primeiro dia correu 20 km , **quantos quilómetros correu no total em 20 dias?**

A. 40 km B. 60 km C. 400 km D. 970 km

159. O lucro semanal da venda de laranjas cumpre a ordem de uma progressão aritmética em que a primeira semana foi de 200,ooMT e a segunda semana foi de 240,00MT. **Qual foi o lucro acumulado em quatro semanas?**

A. 1060 B. 1040 C. 1000 D. 440

160. Uma empresa contratou um empregado para trabalhar de segunda a sexta durante duas semanas. O dono da empresa pagou 200MT pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ele recebeu no dia anterior. **Terminando o contrato, quanto é que o empregado recebeu no total?**

A. 400 MT B. 600MT C. 102.400MT D. 204.600MT

161. Um médico veterinário decidiu analisar a produção de uma população de patos, que iniciou com 50 aves e obteve nos três dias seguintes 100, 200 e 400 aves respectivamente. Considerando nula a taxa de mortalidade e permanentes as condições de reprodução, qual será a população total de patos após 10 dias de observação?

A. 25600 B. 51150 C. 51200 D. 102300

162.