

TD

Intégration

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ ■ □

Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

On pensera à montrer l'inéquation $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x - y|}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ ■ □

Montrer que $\ln$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ □ □

Calculer les limites des suites suivantes, en utilisant une somme de Riemann.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad \textcircled{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, \quad \textcircled{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}, \quad \textcircled{4} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □ Intégrations par parties

Montrer les égalités suivantes avec une ou plusieurs IPP.

$$\textcircled{1} \int t \ln t \, dt = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 + \text{Cste}$$

$$\textcircled{2} \int t \sin^3 t \, dt = \frac{2}{3} \sin t - t \cos t + \frac{1}{3} t \cos^3 t + \frac{1}{9} \sin^3 t + \text{Cste}$$

$$\textcircled{3} \int t \arctan t \, dt = \frac{1}{2} ((t^2 + 1) \arctan t - t) + \text{Cste}$$

$$\textcircled{4} \int (t^2 - t + 1) e^{-t} \, dt = -(t^2 + t + 2) e^{-t} + \text{Cste}$$

$$\textcircled{5} \int (t - 1) \sin t \, dt = \sin t + (1 - t) \cos t + \text{Cste}.$$

$$\textcircled{6} \int (t + 1) \operatorname{ch} t \, dt = (t + 1) \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t + \text{Cste}$$

$$\textcircled{7} \int_0^1 \ln(1 + t^2) \, dt = \ln 2 - 2[t - \arctan t]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{8} \int_1^e t^n \ln t \, dt = \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$$

$$\textcircled{9} \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \, dt = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$\textcircled{10} \int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \, dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □ Changements de variables

Montrer les égalités suivantes avec un ou plusieurs changements de variables.

$$\textcircled{1} \int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} = 2 \arctan \sqrt{t} + \text{Cste}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\ln t \, dt}{t + t(\ln t)^2} = \frac{1}{2} \ln(1 + \ln^2 t) + \text{Cste}$$

$$\textcircled{3} \int \frac{e^{2t} \, dt}{e^t + 1} = e^t - \ln(1 + e^t) + \text{Cste}$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = \arctan(\sqrt{t^2 - 1}) + \text{Cste}$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 t^2 \sqrt{1 - t^2} \, dt = \frac{\pi}{16}$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t} = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{7} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{8} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\textcircled{9} \int_0^1 x \tan(x^2) dx = -\frac{1}{2} \ln(\cos 1).$$

$$\textcircled{10} \int t \sqrt[3]{1+t} dt = \frac{3}{7}(1+x)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}} + \text{Cste}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■ □ □ Décomposition en éléments simples _____

Calculer les primitives des expressions suivantes.

$$\textcircled{1} \frac{1}{x^3 - x}$$

$$\textcircled{6} \frac{x}{x^4 + 1}$$

$$\textcircled{2} \frac{x-2}{x(x+1)^2}$$

$$\textcircled{7} \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\textcircled{3} \frac{x+1}{x^3 + x}$$

$$\textcircled{8} \frac{x}{x^3 + 1}$$

$$\textcircled{4} \frac{x-1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\textcircled{9} \frac{\arctan(x)}{(x+1)^2}$$

$$\textcircled{5} \frac{x}{x^3 - 1}$$

$$\textcircled{10} \frac{1}{x^2 + 2ax + b}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □ _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$.

① Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

② En déduire la valeur de I_3 .

► Indication ► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 10 ■ ■ □ Avec les ε _____

Soit $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée. ► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □ Avec les ε _____

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue vérifiant

$$\forall x > 0, f(nx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ □ □ _____

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \frac{\text{sh } t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$$

① Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f .

② Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.

③ Dresser le tableau de variation de f .

► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ □ □ _____

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

① Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$, la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$ et montrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.

② Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.

③ Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ □ □

Donner une équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$. [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 15 ■ ■ □

Déterminer les limites sans calculer les intégrales.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-x}^x \sin t^2 \, dt$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} \, dt$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} \, dt$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} \, dt$$

[► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 16 ■ ■ □ **Calcul avec les racines de l'unité**

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^n |a_k|^2$. [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"EXERCICE 17 ■ ■ □ **Subdivision la moins fine**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier.

Montrer qu'il existe une subdivision σ du segment $[a, b]$ adaptée à f telle que toute autre subdivision adaptée à f soit plus fine que σ . [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 18 ■ □ □

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{2x+y}^{2y+x} f(t) \, dt$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f . [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 19 ■ (A) ■

Déterminer la limite de la suite $\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 20 ■ ■ □ **Égalité de Taylor-Lagrange**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a < b \in I$.

① Définissons l'application

$$\varphi : x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!} (b-x)^{n+1},$$

où A est une constante choisie de sorte à ce que $\varphi(a) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

② En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

[► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 21 ■ (A) ■

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $n^2 \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) f(x) dx \rightarrow f(1)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ □

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$.

On pourra commencer par calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i^\alpha}$, pour $\alpha = 1$ et 3 . ► Indication

► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ ■

Etudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{r(1) + r(2) + \cdots + r(n)}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $r(k)$ le reste de la division euclidienne de n par k .

On pourra étudier la suite de terme général $v_n = \frac{(n - r(1)) + \cdots + (n - r(n))}{n^2}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ □

Soit $f : x \mapsto x[x] - [x]^2$. Calculer $\int_0^n f(t) dt$ où $n \in \mathbb{N}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 25 ■ ■ □

Considérons les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + 2 \sin t \cos t}} dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + 2 \sin t \cos t}} dt$.

① Calculer $I + J$.

② Montrer que $I = J$ par un judicieux changement de variables.

③ En déduire la valeur de I .

► Indication ► Correction

EXERCICE 26 ■ ■ □ Équivalent avec Taylor

Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ , puis donner un équivalent simple de $u_n - \ell$, quand n tend vers $+\infty$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 27 ■ ■ ■

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue.

① Montrer qu'il existe une subdivision $(x_k^{(n)})_{k \in [0, n]}$ telle que

$$\forall k \in [1, n], \quad \int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) dt$$

② Déterminer la limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^{(n)}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ■ (A) ■

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 f(t) dt = f(0) + \frac{1}{2} f'(c).$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 29 ■ ■ □

Soit x_n l'abscisse du premier maximum local de $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $f_n(x_n) \rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 30 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la borne inférieure de la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$E = \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+), \int_0^1 f(\sqrt[n]{t}) dt \leq c \int_0^1 f(t) dt \right\}.$$

► Indication

► Correction

PROBLÈMES

EXERCICE 31 ■ ■ ■ Seconde formule de la moyenne

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.

- ① Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t) dt$, avec $a_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$.

Montrer que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g(t) dt$.

- ② Soit G la primitive de g s'annulant en a . Montrer que

$$f(a) \cdot \min_{[a,b]}(G) \leq S_n \leq f(a) \cdot \max_{[a,b]}(G).$$

- ③ En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt$.

- ④ Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec f monotone. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt + f(b) \int_c^b g(t) dt$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 32 ■ ■ □

Soit $I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

- ① Montrer que $I_n \rightarrow 0$ en décroissant.
- ② Simplifier $I_n + I_{n+1}$ et en déduire une expression de I_n à l'aide d'un symbole $\sum$.

- ③ Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- ④ Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

On pourra faire les mêmes étapes avec $J_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 33 ■ ■ □ Inégalité de Wirtinger

Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$.

- ① 1.a Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) \cotan(x)$ est prolongeable par continuité sur $[0, \pi]$.

- 1.b Montrer l'existence et déterminer la valeur de la limite en 0 de

$$x \mapsto (f^2(x) + f^2(\pi - x)) \cotan(x).$$

- ② Montrer que, pour tout $x \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned} \int_x^{\pi-x} (f'(t) - f(t) \cotan(t))^2 dt \\ = (f^2(x) + f^2(\pi - x)) \cotan(x) + \int_x^{\pi-x} (f'^2(t) - f^2(t)) dt. \end{aligned}$$

- ③ En déduire l'inégalité suivante dite de Wirtinger

$$\int_0^\pi f^2(t) dt \leq \int_0^\pi f'^2(t) dt.$$

- ④ **Cas d'égalité.** Supposons $\int_0^\pi f^2(t) dt = \int_0^\pi f'^2(t) dt$.

- 4.a Montrer que, pour tout $x \in]0, \pi[$, $f'(x) = f(x) \cotan(x)$.

- 4.b En déduire que f est colinéaire à la fonction sin.

► Indication

► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____ INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

On utilise le théorème de Taylor Lagrange pour majorer la distance entre la somme et la valeur que l'on reconnaît à partir des DL.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

On utilise le théorème de Taylor Lagrange pour majorer la distance entre la somme et la valeur que l'on reconnaît à partir des DL.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 **Intégrations par parties** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 **Changements de variables** _____

① $u = \cos t$

② $u = \ln^2 t$

③ $u = e^t$

④ $u = \sqrt{t^2 - 1}$

⑤ $t = \sin u$, attention à la bijectivité du changement de variable

⑥ $t = \sin u$, attention à la bijectivité du changement de variable

⑦ $u = \pi/2 - t$

⑧ $u = \cos t$

⑨ $u = x^2$

⑩ tellement plus simple avec une IPP...

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 **Décomposition en éléments simples** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 Avec les ε _____

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 Avec les ε _____

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16 Calcul avec les racines de l'unité _____

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 17 Subdivision la moins fine _____

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20 Égalité de Taylor-Lagrange _____

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 24 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 25](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 26](#) **Équivalent avec Taylor** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 27](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 28](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 29](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 30](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

PROBLÈMES

[INDICATION POUR L'EXERCICE 31](#) **Seconde formule de la moyenne** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 31](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 32](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 32](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 33](#) **Inégalité de Wirtinger** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 33](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1

Pour $y \geq x \geq 0$, $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y + x - 2\sqrt{xy} \leq y - x$, donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$.

x et y jouant des rôles symétriques, $\forall x, y \geq 0, |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $\eta = \varepsilon^2 > 0$. Pour tout $x, y \geq 0$,

$$|y - x| \leq \eta \implies |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|} \leq \sqrt{\eta} = \varepsilon$$

La fonction racine carrée est donc uniformément continue.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

Correction de l'EXERCICE 2

Par l'absurde supposons que $x \mapsto \ln x$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y > 0, |y - x| \leq \eta \implies |\ln y - \ln x| \leq \varepsilon.$$

Pour $y = x + \eta$,

$$|\ln y - \ln x| = \ln \left(\frac{x + \eta}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Absurde.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

Correction de l'EXERCICE 3

Voir cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

Correction de l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 4

Voir cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k/n}{1 + (k/n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2k/n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x}} = [\sqrt{1 + 2x}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$$

$$\textcircled{4} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{1 + t} = \ln 2$$

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6 Intégrations par parties

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7 Changements de variables

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8 Décomposition en éléments simples

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

Une intégration par parties donne, en posant $u(x) = (x^2 + 1)^{-n}$ et $v'(x) = 1$,

$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^n} \right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx.$$

$$\text{Or, } \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = I_n - I_{n+1}.$$

En regroupant les termes, on trouve

$$2nI_{n+1} = (2n - 1)I_n + \frac{1}{2^n} \iff I_{n+1} = \frac{2n - 1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

On a $I_1 = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, donc $I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ et $I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$.

↩ retour à l'EXERCICE 9

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 10 Avec les ε

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1[, |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq 1$$

Par suite, pour tout $x \in [1 - \alpha, 1[$, on a $|f(x) - f(1 - \alpha)| \leq 1$ puis $|f(x)| \leq 1 + |f(1 - \alpha)|$. De plus, la fonction f est continue donc bornée sur le segment $[0, 1 - \alpha]$ par un certain M . On a alors f bornée sur $[0, 1[$ par $\max \{M, 1 + |f(1 - \alpha)|\}$.

↩ retour à l'EXERCICE 10

Correction de l'EXERCICE 11 Avec les ε

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x, y > 0, |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Considérons alors la suite de terme général, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n\alpha)$. Puisque celle-ci converge vers 0 par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N, |f(n\alpha)| \leq \varepsilon$. Posons $A = N\alpha$. Pour $x \geq A$, il existe $n \geq N$, tel que $|n\alpha - x| \leq \alpha$. On obtient donc $|f(x)| \leq |f(x) - f(n\alpha)| + |f(n\alpha)| \leq 2\varepsilon$, qui est la définition de f convergeant vers 0 en $+\infty$.

↩ retour à l'EXERCICE 11

Correction de l'EXERCICE 12

① φ est continue sur $\mathbb{R}$ (on vérifie en 0) donc $f(x)$ existe. De plus, f est impaire, car

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt \stackrel{u=-t}{=} - \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh} u}{u} du = -f(x)$$

② φ est continue donc possède une primitive F . Comme $f(x) = F(2x) - F(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, et que l'on peut vérifier que la limite en 0 est finie, f est dérivable (et même $\mathcal{C}^1$), d'après le théorème de prolongement de la dérivée et $f'(x) = \frac{\operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} x}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f'(0) = 1$.

③ Pour tout $x \geq 0$, on a $\operatorname{sh} 2x \geq \operatorname{sh} x$ donc $f'(x) \geq 0$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(x) \geq \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt = \operatorname{sh} x \ln 2$, on a $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. On complète le tableau de variation par parité.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

- ① La fonction f est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ car pour chaque x dans ce domaine, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 car 1 n'y appartient pas. Pour $x \in]0, 1[$, on a pour tout $t \in [x^2, x]$, $2 \ln x \leq \ln t \leq \ln x$ puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

et donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. L'encadrement est identique pour $x > 1$ ce qui permet d'affirmer $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t \ln t} dt$$

et par encadrement du t du numérateur par x et x^2 , on obtient $f(x)$ encadré par $xI(x)$ et $x^2I(x)$ avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln 2$.

- ② On introduit H primitive de $t \mapsto 1/\ln t$ et on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Cette dérivée étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on conclut que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ et puisque $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec $f'(1) = 1$. Par développement en série entière $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1 et par passage à l'inverse $x \mapsto f'(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1. Finalement f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Le calcul de $f''(x)$ permet de justifier que f'' n'a pas de limite finie en 0 et donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
- ③ f est croissante, convexe, branche parabolique verticale en $+\infty$, tangente horizontale en l'origine.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

On peut écrire

$$S_n = n\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right)$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

avec $f : t \mapsto \sqrt{t}$ définie et continue sur $[0, 1]$. Par somme de Riemann

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

donc

$$S_n \sim \frac{2}{3} n^{3/2}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

- ① Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\left| \int_{-x}^x \sin t^2 dt \right| \leq \int_{-x}^x |\sin t^2| dt \leq \int_{-x}^x 1 dt = 2x \rightarrow 0$$

donc $\int_{-x}^x \sin t^2 dt \rightarrow 0$.

- ② Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln 2x} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$$

donc

$$\frac{x}{\ln 2x} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$$

puis

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \rightarrow +\infty$$

③ Par intégration par parties

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Or quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\left[-\frac{\cos t}{t} \right]_x^{2x} \rightarrow 0 \text{ et } \left| \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} \rightarrow 0$$

donc

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow 0$$

④ (a) Quand $x \rightarrow 0^+$, par croissance de la fonction exponentielle

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt$$

donc

$$e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$$

puis par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \rightarrow \ln 2$$

⑤ Quand $x \rightarrow +\infty$, par décroissance de la fonction $t \mapsto e^{1/t}$

$$\int_x^{2x} \frac{e^{1/2x}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{1/x}}{t} dt$$

donc

$$e^{1/x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt \leq e^{1/2x} \ln 2$$

puis par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt \rightarrow \ln 2$$

⑥ Quand $x \rightarrow +\infty$, pour x assez grand, la fonction $t \mapsto \cos(1/t)$ est croissante sur $[x; 2x]$ donc

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(1/x)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(1/2x)}{t} dt$$

puis

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt \leq \cos\left(\frac{1}{2x}\right) \ln 2$$

et par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt \rightarrow \ln 2$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16 Calcul avec les racines de l'unité

Écrivons dans l'intégrale que $|P(e^{i\theta})|^2 = P(e^{i\theta}) P(e^{i\theta})$

$$\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n a_k \overline{a_l} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta} d\theta$$

Or, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_k} 2\pi = 2\pi \sum_{k=0}^n |a_k|^2$$

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 17 Subdivision la moins fine

Soit A l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ adaptée à f . A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède donc un plus petit élément p . Il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ adaptée à f . Montrons que toute subdivision $\sigma' = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ adaptée à f est plus fine que σ .

Par l'absurde : supposons $\exists i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tel que $a_i \notin \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$. On peut alors affirmer qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $a_i \in]b_{j-1}, b_j[$. Comme σ et σ' sont adaptées à f on peut affirmer que f est constante sur $]a_{i-1}, a_i[$ et $]b_{j-1}, b_j[$ puis que f est constante sur $]a_{i-1}, a_{i+1}[$. Par suite la subdivision $\sigma' = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p)$ est adaptée à f or cela contredit la définition de p .

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

Puisque continue, la fonction f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(y) = F(2y + x) - F(2x + y)$$

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on obtient

$$f : x \mapsto f(y) + F(2y + x) - F(2x + y)$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = f(2y + x) - 2f(2x + y)$$

En dérivant cette relation en la variable y , on obtient

$$0 = 2f'(2y + x) - 2f'(2x + y)$$

et donc

$$f'(2y + x) = f'(2x + y)$$

Puisque pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} 2x + y = s \\ x + 2y = t \end{cases}$$

on peut affirmer que la fonction f' est constante. On en déduit que la fonction f est affine. Par le calcul, on vérifie que, parmi les fonctions affines, seule la fonction nulle vérifie la relation proposée.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

On a

$$\ln \left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(n+k) - \ln n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

La fonction $x \rightarrow \ln(1+x)$ étant continue sur $[0, 1]$, on obtient

$$\ln \left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$$

On en déduit

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{4}{e}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20 Égalité de Taylor-Lagrange

- ① La fonction φ est dérivable sur $[a, b]$ (car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$) et $\varphi(a) = \varphi(b)$, on peut donc appliquer le théorème de Rolle et il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
- ② Le calcul explicite de la dérivée de φ donne pour $x \in I$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{A}{n!} (b-x)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - \frac{A}{n!} (b-x)^n. \end{aligned}$$

La condition $\varphi'(c) = 0$ entraîne alors $A = -f^{(n+1)}(c)$. La formule de l'énoncé n'est alors que l'égalité $\varphi(a) = 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

Nous allons montrer le résultat équivalent suivant

$$\lim_n (n+2)(n+1) \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) f(x) dx = f(1)$$

En effet, $\int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ donc

$$f(1) = (n+1)(n+2) \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) f(1) dx.$$

Par suite,

$$\left| (n+2)(n+1) \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) f(x) dx - f(1) \right| \leq (n+2)(n+1) \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) |f(x) - f(1)| dx.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons, par continuité de f en 1, $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [\eta, 1]$, $|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$. Ainsi,

$$\left| (n+2)(n+1) \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) f(x) dx - f(1) \right| \leq (n+2)(n+1) \int_0^\eta (x^n - x^{n+1}) |f(x) - f(1)| dx + \varepsilon$$

Majorons f par M sur $[0, 1]$,

$$(n+2)(n+1) \int_0^\eta (x^n - x^{n+1}) |f(x) - f(1)| dx \leq 2M(n+2)(n+1) \int_0^\eta (1-x)x^n dx \leq 2M(n+2)\eta^{n+1}$$

Ce dernier terme tend vers 0 donc à partir d'un certain rang N , il est inférieur à ε .
Donc pour $n \geq N$,

$$\left| (n+2)(n+1) \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) f(x) dx - f(1) \right| \leq 2\varepsilon$$

ce qui est la définition de la limite annoncée par l'énoncé.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Correction de l'EXERCICE 22

Par somme de Riemann, on a, pour $\alpha > 1$

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i^\alpha} = n^{1-\alpha} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^\alpha} \rightarrow 0 \times \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^\alpha} = 0.$$

Sachant pour $x > 0$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

on obtient

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2$$

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

Correction de l'EXERCICE 23

La division euclidienne de n par k s'écrit

$$n = \lfloor n/k \rfloor k + r(k)$$

et donc

$$n - r(k) = k \lfloor n/k \rfloor$$

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

ce qui fait penser à une somme de Riemann associée à la fonction $f : t \mapsto t \lfloor 1/t \rfloor$ définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$. Bien qu'elle soit prolongeable par continuité en 0, ce prolongement n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ (il n'existe pas de subdivision finie du segment $[0, 1]$ qui soit adaptée) et l'on ne peut donc pas employer directement le théorème du cours relatif aux sommes de Riemann : cela va nous obliger à un petit découpage...

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/N \rfloor} \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/N \rfloor + 1}^n \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

D'une part

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/N \rfloor} \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/N \rfloor} 1 \leq \frac{\lfloor n/N \rfloor}{n} \leq \frac{1}{N}$$

et d'autre part, par les sommes de Riemann

$$\frac{1}{n - \lfloor n/N \rfloor} \sum_{k=\lfloor n/N \rfloor + 1}^n \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{1/N}^1 t \lfloor 1/t \rfloor dt$$

Par le changement de variable $u = 1/t$

$$\int_{1/N}^1 t \lfloor 1/t \rfloor dt = \int_1^N \frac{\lfloor u \rfloor}{u^3} du = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{k}{u^3} du$$

puis

$$\int_{1/N}^1 t \lfloor 1/t \rfloor dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2}$$

et l'on remarque que

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{12}$$

En choisissant N assez grand pour que $1/N \leq \varepsilon$ et $\frac{1}{2} \sum_{k=N+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \varepsilon$, on a

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + \frac{n - \lfloor n/N \rfloor}{n} \left(\frac{1}{n - \lfloor n/N \rfloor} \sum_{k=\lfloor n/N \rfloor+1}^N \frac{k}{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \frac{\pi^2}{12} \right) + \frac{\lfloor n/N \rfloor}{n} \frac{\pi^2}{12}$$

Puis pour n assez grand

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + \frac{n - \lfloor n/N \rfloor}{n} \left(\sum_{k=N+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \varepsilon \right) + \frac{\lfloor n/N \rfloor}{n} \frac{\pi^2}{12}$$

ce qui donne

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon \frac{\pi^2}{12}$$

Finalement $v_n \rightarrow \pi^2/12$ puis $u_n \rightarrow 1 - \pi^2/12$

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Correction de l'EXERCICE 24

D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_0^n f(t) dt &= \int_0^n f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} (kx - k^2) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} k(2k+1) - k^2 \right) \\ &= \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25

- ① Commençons par réécrire le dénominateur : pour tout t ,

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sin t \cos t &= \cos^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t \\ &= (\cos t + \sin t)^2 \end{aligned}$$

Remarquons ensuite que, sur l'intervalle étudié, $\cos t + \sin t > 0$ donc

$$\sqrt{1 + 2 \sin t \cos t} = \cos t + \sin t$$

Par conséquent,

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{1 + 2 \sin t \cos t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

- ② Utilisons dans I le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sqrt{1 + 2 \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cos(\frac{\pi}{2} - x)}} (-dx) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + 2 \sin x \cos x}} dx = J. \end{aligned}$$

- ③ En conclusion, $\frac{\pi}{2} = I + J = 2I$ donc $I = \frac{\pi}{4}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26 Équivalent avec Taylor

- ① En écrivant

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}$$

on reconnaît une somme de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ continue sur $[0, 1]$ (somme des rectangles à droite). Par conséquent,

$$\lim u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

- ② Pour avoir le terme suivant du développement asymptotique de u_n , écrivons la formule de TaylorLagrange pour f entre $\frac{k}{n}$ et x

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M_2}{2} \left| x - \frac{k}{n} \right|^2$$

avec $M_2 = \sup |f''|$. Intégrons entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$ en utilisant que la valeur absolue de l'intégrale est inférieure à l'intégrale de la valeur absolue,

$$\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M_2}{2n^3}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27

- ① L'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est continue, strictement croissante (car sa dérivée, f , est strictement positive) donc réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[F(a), F(b)] = [0, F(b)]$. Par conséquent, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique antécédent $x_k^{(n)}$ par F à la valeur $\frac{k}{n} F(b)$. Par construction, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} f(t) dt = F\left(x_k^{(n)}\right) - F\left(x_{k-1}^{(n)}\right) = \frac{1}{n} F(b) = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) dt$$

- ② D'après la première question, $x_k^{(n)} = F^{-1}\left(\frac{k}{n} F(b)\right)$ pour tout $k \in [0, n]$. Ainsi, la somme recherchée est une somme de Riemann

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F^{-1}\left(\frac{k}{n} F(b)\right) \rightarrow \int_0^1 F^{-1}(tF(b)) dt$$

Simplifions cette dernière expression, en posant $x = F^{-1}(tF(b))$,

$$\int_0^1 F^{-1}(tF(b)) dt = \frac{1}{\int_a^b f(t) dt} \int_a^b x f(x) dx$$

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28

Notons $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, F est de classe $\mathcal{C}^2$; la formule de Taylor avec reste intégral donne alors

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \int_0^x (x-t)f'(t) dt$$

soit en appliquant en 1,

$$\int_0^1 f(t) dt = f(0) + \int_0^1 (1-t)f'(t) dt$$

Or,

$$\frac{1}{2} \min_{[0,1]} f' = \int_0^1 (1-t) dt \min_{[0,1]} f' \leq \int_0^1 (1-t)f'(t) dt \leq \int_0^1 (1-t) dt \max_{[0,1]} f' = \frac{1}{2} \max_{[0,1]} f'$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $\frac{1}{2}f'$, il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 (1-t)f'(t) dt = \frac{1}{2} f'(c)$$

ce qui donne bien le résultat désiré.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Correction de l'EXERCICE 29

Commençons par déterminer x_n . La fonction f_n est dérivable (comme somme de fonctions dérivables) et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

Pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, cette dernière somme se calcule comme partie réelle d'une somme géométrique complexe de raison différente de 1. Après calculs, on obtient

$$f'_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{nx}{2}$$

Cette expression permet d'obtenir le tableau de signe de $f'_n(x)$ au voisinage de 0. Par conséquent, le premier maximum local de f_n sur $\mathbb{R}_+$ est atteint en $x_n = \frac{\pi}{n}$. $\triangleright$ Remarquons que $f_n(x_n)$ est une somme de Riemann pour la fonction continue

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Plus précisément,

$$f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{k} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\frac{k\pi}{n}}.$$

En conclusion, $f_n(x_n) \rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$.

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

Correction de l'EXERCICE 30

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

PROBLÈMES

Correction de l'EXERCICE 31 Seconde formule de la moyenne

- ① En exploitant la relation de Chasles, on peut écrire

$$S_n - \int_a^b f(t)g(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t))g(t)dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, elle y est uniformément continue et donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| \leq \alpha \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Pour n assez grand, on a $(b - a)/n \leq \alpha$ et alors pour tout $t \in [a_k, a_{k+1}]$ on a $|a_k - t| \leq \alpha$ donc $|f(a_k) - f(t)| \leq \varepsilon$. On en déduit

$$\left| S_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon |g(t)|dt \leq \varepsilon M(b - a) \text{ avec } M = \sup_{[a, b]} |g|$$

Par suite

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g(t)dt$$

- ② En exprimant l'intégrale à l'aide de la primitive G

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) (G(a_{k+1}) - G(a_k))$$

En séparant la somme en deux, puis en procédant à un décalage d'indice sur la première

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(a_{k-1}) G(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) G(a_k)$$

puis en recombinaison les deux sommes

$$S_n = f(a_{n-1}) G(a_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (f(a_{k-1}) - f(a_k)) G(a_k) - f(a_0) G(a_0)$$

Or $G(a_0) = G(a) = 0$ et puisque la fonction f est décroissante et positive

$$S_n \leq f(a_{n-1}) M + \sum_{k=1}^{n-1} (f(a_{k-1}) - f(a_k)) M \text{ avec } M = \max_{[a, b]} G$$

Enfin par télescopage

$$S_n \leq f(a_0) M = f(a) M$$

De façon symétrique, on a aussi

$$S_n \geq f(a) m \text{ avec } m = \min_{[a, b]} G$$

- ③ En passant à la limite ce qui précède, on obtient

$$f(a) m \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq f(a) M$$

Si $f(a) = 0$, le problème est immédiatement résolu, sinon, ce qui précède affirme que

$$\frac{1}{f(a)} \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est valeur intermédiaire à deux valeurs prises par G et le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

- ④ Quitte à considérer $-f$, ce qui ne change rien au problème posé, on peut supposer que la fonction f est croissante. En appliquant le résultat précédent à la fonction $t \mapsto f(b) - f(t)$ décroissante et positive, on peut affirmer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b (f(b) - f(t))g(t)dt = (f(b) - f(a)) \int_a^c g(t)dt$$

et il suffit de réorganiser les membres de cette identité pour former celle voulue.

[↩ retour à l'EXERCICE 31](#)

Correction de l'EXERCICE 32

① On a

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donc $I_n \rightarrow 0$. De plus, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\frac{x^n}{x+1} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1}$$

donc $I_n \leq I_{n+1}$.

②

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} + (-1)^n I_0$$

③ $I_0 = \ln 2$ et $(-1)^n I_n \rightarrow 0$ donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{-k}}{k} + \ln 2 \rightarrow 0$$

puis la conclusion.

④ Comme ci-dessus, $J_n \rightarrow 0$. De plus

$$J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$J_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{2k+1} + (-1)^n J_0$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{\pi}{4} \rightarrow 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 32](#)

Correction de l'EXERCICE 33 Inégalité de Wirtinger

① ①.a Écrivons $f(x) \cotan(x) = \frac{f(x)}{x} x \cotan(x)$ puis remarquons que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0), \quad x \cotan(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1,$$

car $\cotan(x) \sim \frac{1}{x}$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto f(x) \cotan(x)$ est prolongeable par continuité en 0.

On procède de même en π en partant de l'écriture

$$f(x) \cotan(x) = \frac{f(x)}{\pi - x} (\pi - x) \cotan(x)$$

①.b D'après les règles générales de manipulation des limites, la quantité

$$(f^2(x) + f^2(\pi - x)) \cotan(x) = f(x)(f(x) \cotan(x)) + f(\pi - x)(f(\pi - x) \cotan(\pi - x))$$

converge vers $f(0)f'(0) + f(\pi)f'(\pi) = 0$ en 0.

② Il suffit de remarquer que la dérivée de $x \mapsto f(x) \cotan(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} 2f(x)f'(x) \cotan(x) + f(x)^2 \cotan'(x) &= 2f(x)f'(x) \cotan(x) - f(x)^2 (1 + \cotan(x)^2) \\ &= f'^2(x) - f^2(x) - (f(x) \cotan(x) - f'(x))^2 \end{aligned}$$

- ③ En faisant tendre x vers 0 dans l'égalité précédente, on obtient que

$$\int_0^\pi (f'(t) - f(t) \cotan(t))^2 dt = \int_0^\pi (f'(t) - f(t) \cotan(t))^2 dt$$

Ce dernier terme est positif comme intégrale d'une fonction positive (avec les bornes dans le bon ordre) donc

$$\int_0^\pi f'^2(t) dt \geq \int_0^\pi f^2(t) dt$$

- ④ ④.a D'après l'identité de la question précédente, l'égalité se réécrit

$$\int_0^\pi (f'(t) - f(t) \cotan(t))^2 dt = 0. \text{ Or, la fonction } x \mapsto (f'(x) - f(x) \cotan(x))^2 \text{ est continue positive donc est identiquement nulle.}$$

- ④.b Résolvons l'équation différentielle ainsi obtenue en remarquant qu'une primitive de $\cotan$ sur $]0, \pi[$ est $\ln \circ \sin$. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto C e^{\ln(\sin(x))} = C \sin(x)$.

↩ retour à l'EXERCICE 33