MATEMÁTICA
Especialização

Algebra Linear

Adélia Conceição Diniz
Carlos A. Raposo da Cunha
Francinildo Nobre Ferreira
Guilherme Chaud Tizziotti

ISBN 978-85-8141-016-6
9 788581 410166

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

nead
núcleo de educação a distância

UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

nead
núcleo de educação a distância

Adélia Conceição Diniz
Carlos A. Raposo da Cunha
Francinildo Nobre Ferreira
Guilherme Chaud Tizziotti

Algebra Linear

UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
2012

A394 Álgebra linear / Adélia Conceição Diniz; et al. – São João del-Rei, MG : UFSJ, 2012.
129p.

Curso de especialização em Matemática.

1. Álgebra linear 2. Matemática I. Diniz, Adélia Conceição. II. Cunha, Carlos Alberto Raposo da. III. Ferreira, Francinildo Nobre. IV. Tizziotti, Guilherme Chaud.V. Título

CDU: 37.018.43

Edição
Núcleo de Educação a Distância
Comissão Editorial - NEAD-UFSJ

Capa
Eduardo Henrique de Oliveira Gaio

Diagramação
Luciano Alexandre Pinto

SUMÁRIO

PRA COMEÇO DE CONVERSA...

Olá! Seja bem-vindo(a) ao curso de pós-graguação *lato sensu* "Especialização em Matemática". Seja bem-vindo(a) ao **Módulo da Disciplina Álgebra Linear**. Neste módulo, você irá estudar a disciplina **Álgebra Linear**, que será oferecida em dois meses e tem uma carga horária de 60 horas. Você deverá estudar os seguintes tópicos:

1. Espaços Vetoriais: Definição, exemplos e propriedades. Dependência linear, bases e dimensão. Espaços vetoriais finitamente gerados. Coordenadas. Subespaços vetoriais.

2. Transformações Lineares: Definição, exemplos e propriedades. Núcleo e imagem de uma transformação linear. Matriz de uma transformação linear. Isomorfismos entre dois espaços vetoriais.

3. Espaços com produto interno: Produto interno. Norma. Ortogonalidade. Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Complemento ortogonal. Projeção ortogonal.

4. Diagonalização de Operadores: Autovalores e autovetores de operadores lineares. Polinômio característico. Operador linear adjunto. Operador linear autoadjunto. Operador linear normal. Operador linear unitário.

Dividimos a ementa em 4 unidades. Cada unidade é composta de 5 aulas. Desse modo, você poderá estudar uma unidade a cada duas semanas, fazendo as aulas de segunda a sexta e aproveitando os fins de semana para descanso, mais estudos de revisão e resolução de exercícios propostos.

Você tem 60 dias para estudar e compreender todos esses tópicos. Como este é um curso de pós-graduação, acreditamos que você já tenha visto boa parte deles na graduação. Selecionamos alguns livros textos de Álgebra Linear e procuramos manter os conceitos, notações, propriedades e exemplos utilizados pelos autores. Um ótimo livro que atende muito bem a um curso de pós-graduação é a referência [1]. Fizemos boa parte deste módulo utilizando este livro.

Na graduação, você fez a disciplina **Álgebra Linear**? Qual o livro texto adotado pelo seu professor? Qual o conceito de Espaço Vetorial que você tem? Em geral, nos cursos de graduação, para os quais se leciona Álgebra Linear, estuda-se o conceito de **espaço vetorial real**, isto é, espaço vetorial cujo corpo dos escalares é o conjunto dos números reais. Será que podemos definir espaço vetorial sobre um corpo qualquer? Qual é a definição de corpo?

Neste módulo, você irá estudar tudo isso e muito mais.

Atenção! Recomendamos que você estude cada **Unidade** em duas semanas. Faça todos os exercícios propostos e tire suas dúvidas com os tutores presenciais e a distância. Lembre-se de que o ensino a distância tem suas peculiaridades e de que você é o principal responsável pelo seu sucesso no curso. Por isso, é necessário que você tenha disciplina, dedicação e empenho. Não deixe acumular matéria. Caso isso aconteça, aproveite os fins de semana para colocar a matéria em dia e finalizar cada unidade proposta.

Nós, professores-autores, bem como os tutores presenciais e os tutores a distância, estamos à sua disposição para atendê-lo(a) da melhor maneira possível.

unidade 1

ESPAÇOS VETORIAIS

Objetivos

1. Reconhecer e descrever espaços vetoriais, especificando o corpo dos escalares.
2. Explicitar os conceitos de combinação linear, conjunto gerador, vetores linearmente independentes (l.i.) e vetores linearmente dependentes (l.d.). Escrever um vetor como combinação linear de outros vetores. Determinar se um conjunto de vetores é l.i. ou l.d.
3. Explicitar os conceitos de base e dimensão de um espaço vetorial. Verificar se um determinado conjunto de vetores é uma base de um espaço vetorial.
4. Determinar as coordenadas de um vetor em relação a uma base de um espaço vetorial.
5. Identificar e descrever subespaços vetoriais.

Introdução

A **UNIDADE I** está dividida em 5 aulas, da seguinte forma:

1) Primeira aula: Espaços Vetoriais.

2) Segunda aula: Combinação Linear.

3) Terceira aula: Bases e Dimensão.

4) Quarta aula: Coordenadas.

5) Quinta aula: Subespaços Vetoriais.

Na primeira aula, você irá estudar o conceito de Espaço Vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer. Para isso, você deve rever o conceito de corpo. Nesta aula, apresentamos a definição e vários exemplos de Espaços Vetoriais. Recomendamos que você se certifique de que cada exemplo apresentado é, de fato, um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ especificado.

Na segunda aula, você irá estudar os conceitos de Combinação Linear, vetores linearmente independentes (l.i.) e vetores linearmente dependentes (l.d.).

Na terceira aula, você irá estudar os conceitos de base e dimensão de um $\mathbb{K}-$espaço vetorial. Antes de dar a definição de base e dimensão, foi necessário estudar propriedades (teoremas, proposições e corolários) que provam sua existência. No Teorema 2, você irá aprender como completar um conjunto l.i. de vetores, para se obter uma base de um espaço vetorial de dimensão finita e, também, irá aprender como obter uma base de um espaço vetorial, a partir de um conjunto finito gerador.

Na quarta aula, você irá estudar os conceitos de coordenadas de um vetor em relação a uma base de um espaço vetorial. Antes, porém, faz-se necessário provar a existência das coordenadas, através de proposições.

Na quinta aula, você irá estudar o conceito de subespaço vetorial. Este conceito é muito importante do ponto de vista prático, pois permite-nos identificar vários exemplos de espaços vetoriais, como subconjuntos de outros espaços vetoriais. Apresentamos vários exemplos de subespaços.

Ao final de cada aula, você encontrará uma lista com vários exercícios de aprendizagem e fixação.

Pré-requisito

Para compreender o conceito de espaço vetorial sobre um corpo, você deverá relembrar a definição de corpo. Abaixo, apresentamos a definição algébrica de corpo, bem como alguns exemplos.

Definição 1 *Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio, no qual estão definidas duas operações binárias:*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad e \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},$$

chamadas de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, respectivamente. O conjunto $\mathbb{K}$ é um corpo, se forem satisfeitas as seguintes propriedades:

A_1) *Comutatividade da adição: $a + b = b + a$, para todos $a, b \in \mathbb{K}$.*

A_2) *Associatividade da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$.*

A_3) *Existência de elemento neutro da adição: $\exists 0 \in \mathbb{K}$, tal que $0 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{K}$.*

A_4) *Existência do inverso aditivo: Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe $-a \in \mathbb{K}$, tal que $-a + a = 0$.*

P_1) *Comutatividade da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$, para todos $a, b \in \mathbb{K}$.*

P_2) *Associatividade da multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$.*

P_3) *Existência do elemento neutro da multiplicação: $\exists 1 \in \mathbb{K}$, tal que $a \cdot 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{K}$.*

P_4) *Distributividade : $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$.*

P_5) *Existência do inverso multiplicativo: Para cada $a \in \mathbb{K}$, com $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.*

Exemplos

a) O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$, com as operações usuais de adição e multiplicação,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

é um corpo. De fato, vamos verificar que as operações de adição e multiplicação, definidas acima, satisfazem todas as propriedades da Definição 1.

Primeiro, observe que o conjunto dos números racionais é fechado por essas duas operações, isto é, a soma de dois números racionais é um número racional, e o produto de dois números racionais é um número racional, pois

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}.$$

Verifiquemos, agora, as demais propriedades:

A_1) Comutatividade da adição:
Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, temos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{bc+ad}{bd} = \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

Observe que, aqui, simplificamos as frações $\frac{bc}{bd}$ e $\frac{ad}{bd}$, dividindo ambas pelos números inteiros b e d, respectivamente. Pudemos fazer isso, porque os números b e d são diferentes de zero.

A_2) Associatividade da adição:
Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ (observe que os denominadores das frações têm que ser números inteiros diferentes de zero!), temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} &= \frac{ad+bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{(ad+bc)f + (bd)e}{bdf} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf} \\ &= \frac{adf}{bdf} + \frac{b(cf+de)}{bdf} = \frac{a}{b} + \frac{cf+de}{df} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right).\end{aligned}$$

Aqui, também, simplificamos as frações $\frac{adf}{bdf}, \frac{b(cf+de)}{bdf}$, dividindo ambas pelos números d e b, respectivamente. Alertamos para o fato de que isso só foi possível porque os números d e b são diferentes de zero!

A_3) Existência do elemento neutro da adição:

Considere o número racional $0 = \dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{d}$, para qualquer $d \in \mathbb{Z}$, com $d \neq 0$. Vamos mostrar que esse é o "zero" de $\mathbb{Q}$. De fato, para qualquer número racional $\dfrac{a}{b}$, temos que

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a1 + b0}{b1} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b}.$$

A_4) Existência do inverso aditivo:

Para cada $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, vamos mostrar que seu inverso aditivo, denotado por $-\dfrac{a}{b}$, é dado por $\dfrac{(-a)}{b}$. De fato,

$$\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = \frac{ab + b(-a)}{b^2} = \frac{ab - ba}{b^2} = \frac{ab - ab}{b^2} = \frac{0}{b^2} = 0.$$

P_1) Comutatividade da multiplicação:

Dados $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, temos que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

P_2) Associatividade da multiplicação:

Dados $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, com b, d, f diferentes de zero, temos que

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{(ac)e}{(bd)f} = \frac{a(ce)}{b(df)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ce}{df} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right).$$

P_3) Existência do elemento neutro da multiplicação:

O número racional $1 = \dfrac{1}{1} = \dfrac{a}{a}$, $\forall\, a \neq 0$, é o "um" de $\mathbb{Q}$, pois dado um número racional $\dfrac{a}{b}$ qualquer, temos que

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1a}{1b} = \frac{a}{b}.$$

P_4) Distributividade da multiplicação em relação à adição:

Dados $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} &= \frac{(ad+bc)}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{(ad+bc)e}{(bd)f} = \frac{ade + bce}{bdf} \\ &= \frac{ade}{bdf} + \frac{bce}{bdf} = \frac{ae}{bf} + \frac{ce}{df} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.\end{aligned}$$

P_5) Existência do inverso multiplicativo:

Dado um número racional não nulo, $\frac{a}{b}$, isto é, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, vamos mostrar que seu inverso multiplicativo é o número racional $\frac{b}{a}$. De fato, temos que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

b) O conjunto $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dos números reais, com as operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo.

c) Seja $i = \sqrt{-1}$, o número imaginário puro. O conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, dos números complexos, com as operações usuais de adição e multiplicação:

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i, \end{aligned}$$

é um corpo.

Aula 1 - Espaços Vetoriais

Objetivos

1. Verificar se um determinado conjunto é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer.
2. Verificar a importância das operações de adição de vetores e do produto de escalar por vetor, na definição de espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.
3. Verificar a importância do corpo dos escalares na definição de espaço vetorial.
4. Reconhecer e provar várias propriedades de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Definição 2 *Seja V um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados de vetores, e seja $\mathbb{K}$ um corpo cujos elementos são chamados de escalares. Suponha que em V estejam definidas uma operação de soma de vetores e uma operação de produto de escalar por vetor, como segue:*

$$\begin{array}{rcl} + & : & V \times V \to V \\ & & (u,v) \to u+v \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot & : & \mathbb{K} \times V \to V \\ & & (c,v) \to c \cdot v. \end{array}$$

O conjunto $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, se forem satisfeitas as seguintes propriedades:

S) *Para cada par u, v de vetores em V, devemos ter o vetor $u + v \in V$, chamado de soma de u e v, de modo que*

S1) $u + v = v + u$, *para todo $u, v \in V$ (propriedade comutativa).*

S2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, *para todo $u, v, w \in V$ (propriedade associativa).*

S3) *exista em V um vetor, denominado de vetor nulo e denotado por $\vec{0}$, tal que $\vec{0} + v = v,\ \forall v \in V$.*

S4) *a cada vetor $v \in V$, exista um vetor em V, denotado por $-v$, tal que*

$$v + (-v) = \vec{0}.$$

P) *A cada par $c \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, corresponde um vetor $c \cdot v \in V$, denominado produto por escalar de c por v, de modo que*

P1) $(bc) \cdot v = b \cdot (c \cdot v),\ \forall b, c \in \mathbb{K}$ *e* $\forall v \in V$ *(propriedade associativa).*

P2) $1 \cdot v = v,\ \forall v \in V$, *onde 1 é o elemento neutro da multiplicação do corpo $\mathbb{K}$.*

P3) $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v,\ \forall c \in \mathbb{K}$ *e* $\forall u, v \in V$.

P4) $(b + c) \cdot v = b \cdot v + c \cdot v,\ \forall b, c \in \mathbb{K}$ *e* $\forall v \in V$.

Exemplos

Nesta seção, apresentamos uma coletânea de exemplos de espaços vetoriais sobre vários corpos. Esses exemplos foram selecionados do livro [1]. Para um bom entendimento do conceito de $\mathbb{K}$-espaço vetorial, você deve verificar, através da Definição 2, que cada um dos espaços seguintes são espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ especificado.

1) Todo corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre si mesmo. De fato, como $\mathbb{K}$ é um corpo, então existem duas operações binárias sobre $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} + \ : \ & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ & (u, v) \to u + v \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \cdot \ : \ & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ & (a, v) \to a \cdot v \ , \end{aligned} \tag{2}$$

chamadas de adição e multiplicação, respectivamente, que satisfazem todas as propriedades da definição de corpo, enunciadas na Definição 1.

Se considerarmos $V = \mathbb{K}$ como o conjunto de vetores, veremos que a soma de vetores dada em (1) satisfaz as quatro primeiras propriedades da Definição 2, isto é,

S1) Comutatividade da soma de vetores:
Dados dois vetores u e v, em $V = \mathbb{K}$, temos que

$$u + v = v + u,$$

pois $\mathbb{K}$ é um corpo, e a soma (1) de elementos de $\mathbb{K}$ é comutativa.

S2) Associatividade da soma de vetores:
Dados os vetores u, v e w, em $V = \mathbb{K}$, temos que

$$(u + v) + w = u + (v + w),$$

pois $\mathbb{K}$ é um corpo, e a soma (1) de elementos de $\mathbb{K}$ é associativa.

S3) Existência do vetor nulo em $V = \mathbb{K}$:
Como $\mathbb{K}$ é um corpo, sabemos que existe o elemento neutro 0 da soma (1) em $\mathbb{K}$. Como estamos considerando os elementos de $\mathbb{K}$ como sendo os vetores, temos que 0 é o vetor nulo de $V = \mathbb{K}$.

S4) Existência do inverso aditivo de um vetor:
Seja v um vetor qualquer em $V = \mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo, sabemos que todo elemento de $\mathbb{K}$ possui um inverso aditivo $-v \in \mathbb{K}$, que é o inverso aditivo do vetor v.

Agora, considere o conjunto $\mathbb{K}$ como o corpo dos escalares, e $V = \mathbb{K}$ como o conjunto dos vetores. Então,

P1) Sejam $b, c \in \mathbb{K}$ escalares quaisquer, e seja $v \in V = \mathbb{K}$ um vetor qualquer. Então,

$$(b \cdot c) \cdot v = b \cdot (c \cdot v),$$

pois a multiplicação (2) de elementos de $\mathbb{K}$ é associativa.

P2) Seja 1 o elemento neutro da multiplicação (2) em $\mathbb{K}$. Então, para todo vetor $v \in V = \mathbb{K}$, temos que

$$1 \cdot v = v.$$

P3) Sejam $c \in \mathbb{K}$ um escalar, e $u, v \in V = \mathbb{K}$ dois vetores quaisquer. Então, como $\mathbb{K}$ é um corpo e $c, u, v \in \mathbb{K}$, vale a propriedade distributiva:

$$c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v.$$

P4) Sejam $b, c \in \mathbb{K}$ escalares, e $v \in V = \mathbb{K}$ um vetor. Então, como $\mathbb{K}$ é um corpo e $b, c, v \in \mathbb{K}$, vale a propriedade distributiva:

$$(b + c) \cdot v = b \cdot v + c \cdot v.$$

2) O conjunto $\mathbb{C}^2 = \{v = (z, w) \mid z, w \in \mathbb{C}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Basta definirmos as operações:

$$\begin{array}{cccccc} + : & \mathbb{C}^2 & \times & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (\ (z_1, w_1) & , & (z_2, w_2)\ ) & \longrightarrow & (z_1 + z_2, w_1 + w_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdot : & \mathbb{R} & \times & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (\ c & , & (z, w)\ ) & \longrightarrow & (cz, cw). \end{array}$$

Vamos verificar que as operações de soma de vetores e de produto de escalar por vetor, definidas acima, satisfazem todas as propriedades da Definição 2.

Primeiramente, precisamos nos convencer de que o conjunto $\mathbb{C}^2$ é fechado pela soma de vetores e pelo produto de escalar por vetor, definidos acima, isto é, precisamos verificar que, se $v_1 = (z_1, w_1)$ e $v_2 = (z_2, w_2)$ são dois vetores em $\mathbb{C}^2$, então, o vetor soma $v_1 + v_2 = (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$, também, pertence a $\mathbb{C}^2$ e, se $c \in \mathbb{R}$ é um escalar qualquer, e $v = (z, w)$ é um vetor em $\mathbb{C}^2$, então, o vetor $c \cdot v = (cz, cw)$, também, pertence a $\mathbb{C}^2$. Porém isso decorre do fato de que a soma de dois números complexos é um número complexo, e o produto de dois números complexos é um número complexo [1].

Agora, vamos verificar as demais propriedades da Definição 2.

[1]observe que $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$, $w_1 + w_2 \in \mathbb{C}$, $cz \in \mathbb{C}$ e $cw \in \mathbb{C}$, pois $c, z, w, z_1, z_2, w_1, w_2$ são números complexos. Logo, os vetores $c \cdot v$ e $v_1 + v_2$ pertencem a $\mathbb{C}^2$, pois suas coordenadas pertencem a $\mathbb{C}$.

S1) Comutatividade da soma de vetores:

Dados dois vetores, $v_1 = (z_1, w_1)$ e $v_2 = (z_2, w_2)$ em $\mathbb{C}^2$, [2] segue da definição de soma de vetores em $\mathbb{C}^2$, que

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (z_1, w_1) + (z_2, w_2) \\ &= (z_1 + z_2, w_1 + w_2) \\ &= (z_2 + z_1, w_2 + w_1) \\ &= (z_2, w_2) + (z_1, w_1) \\ &= v_2 + v_1 \ . \end{aligned}$$

S2) Associatividade da soma de vetores:

Dados $v_1 = (z_1, w_1), \ v_2 = (z_2, w_2), \ v_3 = (z_3, w_3)$ em $\mathbb{C}^2$, temos que

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) + v_3 &= [\ (z_1, w_1) + (z_2, w_2)\ ] + (z_3, w_3) \\ &= (z_1 + z_2, w_1 + w_2) + (z_3, w_3) \\ &= [\ (z_1 + z_2) + z_3, (w_1 + w_2) + w_3\ ] \\ &= [\ z_1 + (z_2 + z_3), w_1 + (w_2 + w_3)\ ] \\ &= (z_1, w_1) + (z_2 + z_3, w_2 + w_3) \\ &= v_1 + [\ (z_2, w_2) + (z_3, w_3)\ ] \\ &= v_1 + (v_2 + v_3). \end{aligned}$$

S3) Existência do vetor nulo:

Seja $\vec{0} = (0, 0)$ o vetor em $\mathbb{C}^2$ cujas coordenadas são ambas nulas. Vamos mostrar que esse é o vetor nulo de $\mathbb{C}^2$. De fato, dado um vetor qualquer, $v = (z, w) \in \mathbb{C}^2$, segue da definição de soma de vetores em $\mathbb{C}^2$, que

$$\vec{0} + v = (0, 0) + (z, w) = (0 + z, 0 + w) = (z, w) = v.$$

S4) Existência do inverso aditivo:

Dado um vetor $v = (z, w)$ qualquer em $\mathbb{C}^2$, vamos mostrar que o seu inverso aditivo é o vetor $-v = (-z, -w) \in \mathbb{C}^2$. De fato,

$$v + (-v) = (z, w) + (-z, -w) = (z - z, w - w) = (0, 0) = \vec{0}.$$

P1) Associatividade do produto de escalar por vetor:

Dados os escalares $b, c \in \mathbb{R}$, e o vetor $v = (z, w) \in \mathbb{C}^2$, quaisquer, temos que

$$\begin{aligned} (bc) \cdot v = (bc) \cdot (z, w) &= (\ (bc)z, (bc)w\ ) = (\ b(cz), b(cw)\ ) \\ &= b \cdot (cz, cw) = b \cdot (c \cdot (z, w)) = b \cdot (c \cdot v). \end{aligned}$$

[2] Observe que um vetor $v = (z, w)$ pertence a $\mathbb{C}^2$, se $z = a + bi$ e $w = c + di$, onde a, b, c, d são números reais e $i = \sqrt{-1}$ é o número imaginário puro.

P2) Seja $1 \in \mathbb{R}$ o elemento neutro da multiplicação do corpo dos números reais (o "um"de $\mathbb{R}$). Dado um vetor $v = (z, w) \in \mathbb{C}^2$ qualquer, temos que

$$1 \cdot v = 1 \cdot (z, w) = (1z, 1w) = (z, w) = v.$$

P3) Seja $c \in \mathbb{R}$ um escalar qualquer, e sejam $v_1 = (z_1, w_1)$ e $v_2 = (z_2, w_2)$ dois vetores quaisquer em $\mathbb{C}^2$. Então,

$$\begin{array}{rcl} c \cdot (v_1 + v_2) & = & c \cdot (z_1 + z_2, w_1 + w_2) \\ & = & (\ c(z_1 + z_2),\ c(w_1 + w_2)\ ) \\ & = & (cz_1 + cz_2,\ cw_1 + cw_2) \\ & = & (cz_1, cw_1) + (cz_2, cw_2) \\ & = & c \cdot (z_1, w_1) + c \cdot (z_2, w_2) \\ & = & c \cdot v_1 + c \cdot v_2. \end{array}$$

P4) Dados $b, c \in \mathbb{R}$ e $v = (z, w) \in \mathbb{C}^2$, temos que

$$\begin{array}{rcl} (b + c) \cdot v & = & (b + c) \cdot (z, w) \\ & = & (\ (b + c)z,\ (b + c)w\ ) \\ & = & (\ bz + cz,\ bw + cw\ ) \\ & = & (bz, bw) + (cz, cw) \\ & = & b \cdot (z, w) + c \cdot (z, w) \\ & = & b \cdot v + c \cdot v. \end{array}$$

Portanto, mostramos que o conjunto $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial real, isto é, $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Observação: Se considerarmos as mesmas definições de soma de vetores e produto de escalar por vetor em $\mathbb{C}^2$, dadas acima, porém tomando como corpo dos escalares o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, podemos mostrar, de maneira análoga, que $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Desse modo, concluímos que $\mathbb{C}^2$ pode ser visto como um espaço vetorial real (quando o corpo dos escalares é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$) ou como um espaço vetorial complexo (quando o corpo dos escalares é o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$). Apesar de ser o mesmo conjunto de vetores, esses dois exemplos determinam espaços vetoriais diferentes. Por isso, é essencial que fique claro sobre qual corpo de escalares $\mathbb{K}$ um determinado conjunto V é um espaço vetorial.

3) Para cada número natural $n \geq 1$, o conjunto,

$$\mathbb{K}^n = \{u = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K},\ \forall i = 1, \ldots, n\},$$

tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações:

$$\begin{array}{rcl} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) & = & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{K}^n \\ \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) & = & (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{K}^n. \end{array}$$

O vetor nulo desse espaço é $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, e o inverso aditivo de um vetor $v = (x_1, \ldots, x_n)$ é $-v = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Com isso, observe que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

4) O corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. De fato, defina:

$$+ \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (a, b) \to a + b \end{array} \qquad \cdot \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (r, b) \to r \cdot b, \end{array}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Então, é fácil verificar que todas as propriedades da Definição 2 são satisfeitas. Observe que, aqui, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é visto como o conjunto dos vetores e, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é visto como o corpo dos escalares.

5) O conjunto de todos os polinômios na indeterminada x:

$$\mathbb{K}[x] = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}, \text{ e } n \geq 0\},$$

com coeficientes sobre um corpo $\mathbb{K}$, é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação por escalar:

$$\begin{array}{rcl} p(x) + q(x) & = & b_m x^m + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + (b_n + a_n)x^n + \cdots + (b_0 + a_0) \\ \alpha p(x) & = & (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0). \end{array}$$

$\forall p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{K}[x]$, com $n \leq m$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

6) O conjunto $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$, com entradas em $\mathbb{K}$, é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com as operações de soma de matrizes e multiplicação de escalar por matriz.

7) Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ é uma função}\}$, o conjunto de todas as funções com domínio em X e contradomínio em $\mathbb{K}$. Defina uma operação de soma de "vetores"e uma operação de produto de escalar por vetor em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, como segue:

$$\begin{array}{ccccccl} + & : & \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) & \times & \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \\ & & (f & , & g) & \to & (f+g) : X \to \mathbb{K} \\ & & & & & & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} \cdot & : & \mathbb{K} & \times & \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \\ & & (c & , & f) & \to & (cf) : X \to \mathbb{K} \\ & & & & & & (cf)(x) = cf(x) \end{array}$$

Então, com essas duas operações, o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Vamos verificar todas as propriedades da Definição 2. Primeiro, observe que a soma de duas funções em $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, ainda, é uma função em $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ e que o produto de um escalar $c \in \mathbb{K}$, por uma função f em $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, ainda, é uma função em $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

S1) Comutatividade da soma de vetores:

Dados dois vetores $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, temos que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall \ x \in X.$$

Como $f(x)$ e $g(x)$ pertencem ao corpo $\mathbb{K}$, e a soma de elementos de $\mathbb{K}$ é comutativa, segue que $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$, $\forall \ x \in X$. Portanto, $f+g = g+f$, para todos vetores $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

S2) Associatividade da soma de vetores:

Dados $f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, temos que

$$\begin{aligned}
[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x) + h(x) && (3)\\
&= [f(x)+g(x)] + h(x) && (4)\\
&= f(x) + [g(x)+h(x)] && (5)\\
&= f(x) + [(g+h)(x)] && (6)\\
&= [f+(g+h)](x)\ , && (7)
\end{aligned}$$

$\forall \ x \in X$. Como as funções $(f+g)+h$ e $f+(g+h)$ coincidem em todos os pontos do domínio X, temos que $(f+g)+h = f+(g+h)$ e, portanto, a soma de vetores em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é associativa.

Observe que, em (3), aplicamos a definição de soma de funções em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, para as funções $(f+g)$ e h. Em (4), aplicamos a definição de soma de funções em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, para as funções f e g. Em (5), usamos o fato que $f(x), g(x)$ e $h(x)$ são escalares do corpo $\mathbb{K}$, e que a soma de elementos desse corpo é associativa. Em (6), aplicamos a definição de soma de funções em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, para as funções g e h e, finalmente, em (7), aplicamos a definição de soma de funções em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, para as funções f e $(g+h)$.

S3) Existência do vetor nulo em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$:

Seja

$$\begin{array}{rccc}
0 : & X & \rightarrow & \mathbb{K} \\
& x & \rightarrow & 0(x) = 0
\end{array}$$

a função nula, isto é, a função que leva todos os elementos do domínio X em $0 \in \mathbb{K}$. Vamos mostrar que essa é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. De fato, para qualquer vetor $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, temos que

$$(0+f)(x) = 0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x), \ \forall \ x \in X.$$

Como as funções $(0+f)$ e f coincidem em todos os pontos do domínio, segue que $0+f = f$ e, portanto, a função identicamente nula $0 \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

S4) Existência do inverso aditivo de um vetor em $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$:
Seja $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ um vetor qualquer, e seja $(-f) : X \to \mathbb{K}$ a função dada por $(-f)(x) = -f(x)$, para todo $x \in X$. Vamos mostrar que $(-f)$ é o inverso aditivo de f. De fato, para cada $x \in X$, temos que

$$[f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = 0(x).$$

Logo, $f + (-f) = 0$ e, portanto, $(-f)$ é o inverso aditivo de f.

P1) Sejam $b, c \in \mathbb{K}$ escalares, e $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ um vetor. Então, para cada $x \in X$, temos que

$$[(bc) \cdot f](x) = (bc)f(x) = b(cf(x)) = [b \cdot (cf)](x).$$

Portanto, $(bc) \cdot f = b \cdot (cf)$.

P2) Seja $1 \in \mathbb{K}$ o "um"de $\mathbb{K}$, e seja $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ um vetor qualquer. Então, para cada $x \in X$, temos que

$$(1 \cdot f)(x) = 1f(x) = f(x).$$

Portanto, $1 \cdot f = f$.

P3) Seja $c \in \mathbb{K}$ um escalar e sejam $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ dois vetores quaisquer. Então, para cada $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned}
[c \cdot (f+g)](x) &= c(f+g)(x) && (8)\\
&= c[f(x) + g(x)] && (9)\\
&= cf(x) + cg(x) && (10)\\
&= (c \cdot f)(x) + (c \cdot g)(x) && (11)\\
&= [c \cdot f + c \cdot g](x) && (12)
\end{aligned}$$

Portanto, $c \cdot (f+g) = c \cdot f + c \cdot g$.
Observe que, em (8), aplicamos a definição de produto de escalar por vetor em $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, para o escalar c e o vetor $(f+g)$. Em (9), aplicamos a definição de soma de vetores em $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, para as funções f e g. Em (10), aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de elementos do corpo $\mathbb{K}$. Em (11), aplicamos a definição de produto de escalar por vetor em $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, para o escalar c e o vetor f e para o escalar c e o vetor g. Em (12), aplicamos a definição de soma de vetores em $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, para os vetores $c \cdot f$ e $c \cdot g$.

P4) Sejam $b, c \in \mathbb{K}$ escalares e $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ um vetor. Então, para cada $x \in X$, temos que

$$[(b+c)\cdot f](x) = (b+c)f(x) = bf(x) + cf(x) = (b\cdot f)(x) + (c\cdot f)(x) = (b\cdot f + c\cdot f)(x).$$

Portanto, $(b+c) \cdot f = b \cdot f + c \cdot f$.

No caso particular em que $X = \mathbb{N}$, chamamos o espaço $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ de espaço de sequências.

Exercícios

1. Seja V a união do primeiro e terceiro quadrantes do plano xy. Isto é,

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}.$$

Considere em V as seguintes operações:

$$\begin{array}{ll} + : V \times V \to V & \cdot : \mathbb{R} \times V \to V \\ ((a, b), (c, d)) \to (a + c, b + d) & (c, (x, y)) \to (cx, cy) \end{array}$$

Verifique se $(V, +, \cdot)$ é um $\mathbb{R}-$espaço vetorial.

2. Se uma massa m for presa na extremidade de uma mola, e, se a mola for puxada para baixo e liberada, o sistema massa-mola começará a oscilar. O deslocamento y da massa com relação à sua posição de repouso é dado por uma função da forma

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \mathrm{sen}(\omega t), \tag{13}$$

onde ω é uma constante que depende da mola e da massa, e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Mostre que o conjunto $V = \{y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \ \mathrm{sen}(\omega t) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, de todas as funções descritas em (1), é um $\mathbb{R}$- espaço vetorial, com as seguintes operações:

$$\begin{array}{rcl} y(t) + z(t) & = & (c_1 + d_1) \cos(\omega t) + (c_2 + d_2)\mathrm{sen}(\omega t) \in V \\ ky(t) & = & (kc_1) \cos(\omega t) + (kc_2)\mathrm{sen}(\omega t) \in V, \end{array}$$

para todo $c_1, d_1, c_2, d_2, k \in \mathbb{R}$.

3. Determine se cada uma das afirmativas abaixo é verdadeira ou falsa, justificando suas respostas.

   (a) O conjunto $V = \mathbb{R}^3$, com as operações

   $$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) & = & (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ c(x, y, z) & = & (cx, 0, 0), \quad c \in \mathbb{R}, \end{array}$$

   é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

   (b) O conjunto $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ dos números reais positivos, com as operações $x \oplus y = xy$ e $c \odot x = x^c$, $c \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

4. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.
   (a) Mostre que $0 \cdot v = \vec{0}$, $\forall v \in V$ e que $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\forall c \in \mathbb{K}$.
   (b) Mostre que, se $c \cdot v = \vec{0}$, com $c \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, então, $c = 0$ ou $v = \vec{0}$.
   (c) Mostre que $c\vec{0} = \vec{0}$, para qualquer escalar $c \in \mathbb{K}$.
   (d) Mostre que $(-1)v = -v$, para todo $v \in V$.
   (e) Mostre que, se $u + v = u + w$, então, $v = w$, onde $u, v, w \in V$.

5. Defina operações de soma de vetores e de multiplicação de escalar por vetor no conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, de tal forma que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ seja um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

6. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ um subcorpo de $\mathbb{K}$. Isto é, $\mathbb{K}'$ é subconjunto não vazio de $\mathbb{K}$, que é um corpo com as mesmas operações de soma e multiplicação já definidas em $\mathbb{K}$. Mostre que $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}'$. Mais geralmente, mostre que, se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, então, V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}'$.

7. Seja $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ um plano de $\mathbb{R}^3$ passando pela origem. Mostre que Π é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com a soma de vetores e produto de escalar por vetor usuais de $\mathbb{R}^3$.

8. Suponha que estejam definidas as seguintes operações no conjunto $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0 \text{ e } b > 0\}$:

$$\begin{aligned} &(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd) \\ &c(a, b) = (a^c, b^c), \end{aligned}$$

   para todo $(a, b), (c, d) \in V$ e para todo $c \in \mathbb{R}$.

   Prove que V, munido dessas operações, é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

9. Seja $\mathbb{S}$ o conjunto de todas as sequências de números reais duplamente infinitas:

$$\{y_n\} = (\ldots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_1, y_2, \ldots).$$

   Se $\{z_n\}$ é outro elemento de $\mathbb{S}$, então, a soma $\{y_n\} + \{z_n\}$ é a sequência $\{y_n + z_n\}$ e o múltiplo escalar $c\{y_n\}$ é a sequência $\{cy_n\}$. Mostre que $\mathbb{S}$, munido dessas duas operações, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Aula 2 - Combinação Linear

Objetivos

1. Escrever um vetor qualquer de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V, como combinação linear de outros vetores de V.
2. Verificar a importância do corpo dos escalares $\mathbb{K}$, ao se escrever um vetor como combinação linear de outros vetores.
3. Verificar se um determinado conjunto de vetores de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é um conjunto gerador de V.
4. Verificar se um conjunto de vetores de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é linearmente independente (l.i.) ou linearmente dependente (l.d.).
5. Reconhecer e provar várias propriedades relacionadas com os conceitos de combinação linear, conjunto gerador, dependência e independência linear.

Definição 3 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja S um subconjunto não vazio de V.*

*a) Dizemos que um vetor $v \in V$ é uma **combinação linear** dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de S, se existirem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, tais que*

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n.$$

*b) Dizemos que S é um **conjunto gerador** do espaço vetorial V, se todo elemento de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de S.*

c) Sejam $v_1, \ldots, v_n$ vetores em V, e considere a seguinte equação vetorial:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = \vec{0}, \tag{14}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$.

Observe que a equação (14) admite, pelo, menos a solução trivial $X = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$.

Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são Linearmente Independentes (L.I.), se a equação (14) admitir apenas a solução trivial. Caso contrário, isto é, se existirem escalares não todos nulos $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, tais que $X = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é uma solução de (14), dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são Linearmente Dependentes (L.D.).

Exemplos

1) Considere $\mathbb{R}^3$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e sejam

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3.$$

Então, o conjunto $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$, pois, dado um vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer, temos que $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

2) Considere $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e seja

$$S = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\} \subset \mathbb{C}^2.$$

É claro que S gera $\mathbb{C}^2$, pois, se $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, temos que $(z, w) = z(1,0) + w(0,1)$, com $z, w \in \mathbb{C}$.

Porém, se considerarmos $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, veremos que o conjunto S não gera $\mathbb{C}^2$. De fato, considere, por exemplo, o vetor $v = (i, 0) \in \mathbb{C}^2$. Se tentarmos escrever v como combinação linear de S sobre os reais, teremos que $(i, 0) = a(1,0) + b(0,1)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Nesse caso, teremos: $a = i$ e $b = 0$, o que é absurdo, pois $a \in \mathbb{R}$.

Atividade

Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras:

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $S \subset V$ um subconjunto não vazio.

1. Se S contém o vetor nulo $\vec{0} \in V$, então S é linearmente dependente.
2. Se S é linearmente independente e $T \subset S$ é um subconjunto não vazio de S, então, T é linearmente independente.
3. Se $S = \{v\}$, $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, então, S é linearmente independente.
4. Se S contém um subconjunto T, que é linearmente dependente, então, S também é linearmente dependente.

Observação

Um mesmo subconjunto não vazio S de um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V pode ser L.I. ou L.D., dependendo do corpo de escalares $\mathbb{K}$ sobre o qual V é espaço vetorial. Por exemplo,

a) Considere $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e seja

$$S = \{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Vamos mostrar que S é um conjunto linearmente dependente. De fato, considere a equação vetorial

$$c_1(1,0) + c_2(i,0) + c_3(0,1) + c_4(0,i) = (0,0),$$

onde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$.

Temos que

$$(c_1 + ic_2, c_3 + ic_4) = (0,0),$$

o que nos dá o seguinte sistema homogêneo de duas equações e quatro incógnitas:

$$\begin{cases} c_1 + ic_2 = 0 \\ c_3 + ic_4 = 0 \end{cases}$$

Esse sistema tem infinitas soluções, a saber:

$$S = \{X = (-iz, z, -iw, w) \in \mathbb{C}^4 \mid z, w \in \mathbb{C}\}.$$

Tomando, por exemplo, $z = 1$ e $w = 0$, temos que

$$(0,0) = -i(1,0) + 1(i,0) + 0(0,0) + 0(0,i),$$

o que implica que o conjunto S é L.D. sobre $\mathbb{C}$.

b) Considere, agora, $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que o mesmo conjunto S, considerado acima, é linearmente independente sobre $\mathbb{R}$. De fato, considere a equação vetorial

$$c_1(1,0) + c_2(i,0) + c_3(0,1) + c_4(0,i) = (0,0), \tag{15}$$

onde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Analogamente ao caso anterior, temos que resolver o mesmo sistema acima, só que, agora, procuramos soluções em $\mathbb{R}$. Observe que, como $c_1 + ic_2 = 0 = 0 + i0$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, devemos ter $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Do mesmo modo, como $c_3 + ic_4 = 0 = 0 + i0$ e $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, devemos ter $c_3 = c_4 = 0$. Portanto, a equação (15) admite apenas a solução trivial e o conjunto S é L.I. sobre $\mathbb{R}$.

Exercícios

1. Considere o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e sejam $c_1 = 1,\ c_2 = i - 1,\ c_3 = 1 + i \in \mathbb{C}$. Quais dos seguintes vetores de $\mathbb{C}$ são combinações lineares de $S = \{c_1, c_2, c_3\}$?

   (a) $v = 2 + 3i$

   (b) $v = 7 - 2i$

   (c) $v = 5$

2. Seja $\mathbb{R}[x]$ o $\mathbb{R}-$espaço vetorial dos polinômios, na indeterminada x, com coeficientes sobre $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes vetores são combinações lineares de $p_1(x) = x^2 + 2x + 1,\ p_2(x) = x^2 + 3$ e $p_3(x) = x - 1$?

   (a) $p(x) = x^2 + x + 1.$

   (b) $p(x) = 2x^2 + 2x + 3.$

   (c) $p(x) = -x^2 + x - 4.$

   (d) $p(x) = -2x^2 + 3x + 1.$

3. Em $\mathbb{R}^3$, exprima o vetor $v = (1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (2, -3, 5).$

4. Verifique se o conjunto $S = \{v_1 = (2, 2, 3),\ v_2 = (-1, -2, 1),\ v_3 = (0, 1, 0)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

5. Prove que $S = \{1, \sqrt{2}\}$ é um conjunto gerador do espaço vetorial $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sobre $\mathbb{Q}$.

6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Mostre que o conjunto $\{1\}$ é um conjunto gerador do $\mathbb{K}-$espaço vetorial $\mathbb{K}$.

7. Considere $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. É possível encontrar um conjunto gerador de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, com dois elementos?

8. Mostre que $S = \{1, i\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

9. Prove que os vetores

   $$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{K}^n$$

   são linearmente independentes.

10. Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ um conjunto de vetores em um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V. Prove que S é linearmente dependente se, e somente se, um dos vetores de S for uma combinação linear de todos os outros vetores em S.

11. Suponha que $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto l.i. de vetores em um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$. Prove que $T = \{u_1, u_2, u_3\}$ também é l.i., onde

$$u_1 = v_1 + v_2 + v_3, \;\; u_2 = v_2 + v_3, \quad \text{e} \;\; u_3 = v_3.$$

12. Sejam v_1, v_2, v_3 vetores em um $\mathbb{K}-$espaço vetorial, tais que $\{v_1, v_2\}$ é l.i. Mostre que, se v_3 não pertence ao espaço gerado por v_1, v_2, então, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é l.i.

13. Seja $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz $m \times n$ sob a forma escalonada reduzida por linhas. Prove que as linhas não-nulas de A, consideradas como vetores em $\mathbb{R}^n$, formam um conjunto linearmente independente de vetores.

14. Sejam S_1 e S_2 subconjuntos finitos de um $\mathbb{K}-$espaço vetorial, tais que $S_1 \subset S_2$.

    (a) Se S_2 é linearmente dependente, mostre, por meio de exemplos, que S_1 pode ser ou l.d. ou l.i.

    (b) Se S_1 é l.i., mostre, por meio de exemplos, que S_2 pode ser ou l.d. ou l.i.

15. Mostre que o espaço vetorial $V = \mathbb{K}[x]$ dos polinômios sobre o corpo $\mathbb{K}$ não pode ser gerado por um número finito de vetores.

Aula 3 - Bases e Dimensão

Objetivos

1. Explicitar os conceitos de base e dimensão de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
2. Verificar se um conjunto de vetores é uma base de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V.
3. Determinar a dimensão de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
4. Escrever um vetor como combinação linear dos vetores de uma base de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
5. Determinar uma base de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V, contendo determinados vetores de V.
6. Obter uma base de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V, a partir de um conjunto gerador de V.
7. Reconhecer e provar várias propriedades relacionadas com os conceitos de conjunto gerador e base de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

O conceito de base de um espaço vetorial é bastante útil para representarmos os vetores do espaço vetorial. Se conhecemos uma base de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, podemos escrever qualquer vetor desse espaço como uma combinação linear dos vetores da base, de forma única. Desse modo, o espaço vetorial fica determinado pela escolha de uma base.

Definição 4 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto não vazio $\mathcal{B} \subset V$ é uma base de V, se for um conjunto linearmente independente que gera V.*

Os resultados seguintes nos mostram que, num espaço vetorial finitamente gerado, toda base possui o mesmo número de elementos. Desse modo, é possível definir a **dimensão** de um espaço vetorial.

Teorema 1 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e seja $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ um conjunto gerador de V. Se $T = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é um subconjunto linearmente independente, então, $n \leq m$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $n > m$. Então, como S gera V, cada vetor de T se escreve como combinação linear dos vetores de S. Portanto, existem escalares $c_{ij} \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que

$$u_1 = \sum_{i=1}^{m} c_{i1} v_i, \; u_2 = \sum_{i=1}^{m} c_{i2} v_i, \; \ldots \; , u_n = \sum_{i=1}^{m} c_{in} v_i. \tag{16}$$

Considere, agora, a equação vetorial

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n = \vec{0}, \tag{17}$$

onde $x_j \in \mathbb{K}, \; \forall j = 1, \ldots, n$.

Vamos mostrar que a equação (17) admite solução não trivial. De fato, substituindo os valores da equação (16), na equação (17), obtemos:

$$x_1 \sum_{i=1}^{m} c_{i1} v_i + \cdots + x_n \sum_{i=1}^{m} c_{in} v_i = \vec{0}.$$

Isso implica que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j \right) v_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} c_{2j} x_j \right) v_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} c_{mj} x_j \right) v_m = \vec{0}. \tag{18}$$

Observe que a equação (18) admite, pelo menos, a solução trivial:

$$X = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} c_{2j} x_j, \; \ldots \; , \sum_{j=1}^{n} c_{mj} x_j \right) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Portanto, temos o seguinte sistema:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \cdots + c_{1n} x_n = 0 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \cdots + c_{2n} x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ c_{m1} x_1 + c_{m2} x_2 + \cdots + c_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Mas $\mathcal{S}$ é um sistema homogêneo, com o número de equações m menor do que o número de incógnitas n e, portanto, admite soluções não nulas. Isto é, existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$

em $\mathbb{K}$, não todos nulos, que satisfazem o sistema $\mathcal{S}$. Como os sistemas $\mathcal{S}$, (18) e (17), são equivalentes, segue que $X = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é uma solução não nula de (17). Consequentemente, o conjunto $T = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente dependente, o que é uma contradição. Portanto, $n \leq m$.

$\square$

Corolário 1.1 *Se um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V admite uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ com m elementos, qualquer outra base de V possui também m elementos. Isto é, duas bases de V têm o mesmo número de elementos.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}' = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ uma outra base de V. Como $\mathcal{B}$ gera V e $\mathcal{B}'$ é linearmente independente, segue, do Teorema 1, que $n \leq m$. Analogamente, como $\mathcal{B}'$ gera V e $\mathcal{B}$ é linearmente independente, segue, do Teorema 1, que $m \leq n$. Logo, $m = n$.

$\square$

Agora, podemos definir dimensão de um espaço vetorial.

Definição 5 *Dizemos que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V tem dimensão finita, quando admite uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ com um número finito $n \geq 1$ de elementos. Esse número, que é o mesmo para todas as bases de V, é chamado de* **dimensão** *do espaço vetorial V. Usamos a notação*

$$dim_{\mathbb{K}} V = n$$

para indicar que n é a dimensão do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se o espaço vetorial V não admite uma base finita, dizemos que V é um espaço vetorial de dimensão infinita.

Observação

A dimensão de um espaço vetorial depende do corpo dos escalares considerado. Por exemplo,

a) Considere o conjunto $\mathbb{C}^2 = \{(z, w) \mid z, w \in \mathbb{C}\}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e seja

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$. Já vimos anteriormente que $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{C}^2$. Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. De fato, considere a equação vetorial

$$c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0), \tag{19}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

É fácil mostrar que a equação (19) admite somente a solução trivial $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Logo, o conjunto $\mathcal{B}$ é L.I. e, consequentemente, é uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, isto é, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$.

b) Se considerarmos $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, podemos mostrar que

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4.$$

Para isso, basta mostrar, por exemplo, que $\mathcal{B} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Corolário 1.2 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ um subconjunto de V com m elementos. São válidas:*

a) *Se $m > n$, então, S é linearmente dependente.*

b) *Se $m < n$, então, S não gera V.*

Proposição 1 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ um subconjunto de V, de vetores não nulos. Então, S é linearmente dependente, se, e somente se, um dos vetores v_j for uma combinação linear dos vetores precedentes de S.*

Demonstração: Se S é um conjunto linearmente dependente, então, existem escalares $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que $c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m = \vec{0}$. Seja $j \in \{1, \ldots, m\}$ o maior índice para o qual $c_j \neq 0$. Se $j = 1$, então, $c_1 v_1 = \vec{0}$, o que implica que $v_1 = \vec{0}$, uma contradição à hipótese de que nenhum dos vetores de S é nulo. Logo, devemos ter $j > 1$. Nesse caso, podemos escrever:

$$v_j = -\frac{c_1}{c_j} v_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j} v_{j-1},$$

o que implica que v_j é combinação linear dos vetores precedentes de S.

Reciprocamente, se existir um vetor $v_j \in S$, que é uma combinação linear dos vetores precedentes de S, temos

$$v_j = c_1 v_1 + \cdots + c_{j-1} v_{j-1},$$

com $c_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \ldots, j-1$.

Então, podemos escrever:

$$c_1 v_1 + \cdots + c_{j-1} v_{j-1} - v_j + 0 v_{j+1} + \cdots + 0 v_m = \vec{0}.$$

Como pelo menos o escalar c_j é diferente de zero (pois $c_j = -1$), concluímos que S é linearmente dependente.

$\square$

Seja V um $\mathbb{K}$-espaco vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. A proposição, a seguir, nos mostra que, para verificarmos se um subconjunto $\mathcal{B}$ de V, com n elementos, é uma base, basta verificarmos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente, ou que $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V.

Proposição 2 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de V, com exatamente n elementos. Então, $\mathcal{B}$ gera V, se, e somente se, é linearmente independente.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{B}$ gera V. Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. De fato, suponha, por absurdo, que $\mathcal{B}$ é linearmente dependente. Então, existe um vetor $v_j \in \mathcal{B}$, $j > 1$, que é combinação linear dos vetores precedentes $v_1, \ldots, v_{j-1}$. Retirando esse vetor v_j do conjunto $\mathcal{B}$, teremos um conjunto com $n-1$ vetores, gerando o espaço V. Porém, isso é uma contradição com o corolário 1.2. Desse modo, $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ gera V. De fato, suponha, por absurdo, que existe um vetor $v \in V$, que não se escreve como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$. Então, o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é linearmente independente. Porém, isso é uma contradição, pois o número máximo de vetores L.I. em V, é $n = \dim_{\mathbb{K}} V$.

$\square$

Teorema 2 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e seja $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ um subconjunto não vazio de V. São válidas:*

a) *Se S é linearmente independente, então, S está contido em alguma base de V.*

b) *Se S gera V, então, S contém uma base de V.*

Demonstração:

a) Suponha que S é linearmente independente e seja $T = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ um conjunto L.I., contendo S e contendo o maior número possível n de vetores L.I. de V. Vamos mostrar que T gera V. De fato, se existir um vetor $v \in V$ que não se escreve como combinação linear dos vetores de T, temos que $T \cup \{v\}$ é linearmente independente, o que contradiz a maximalidade de n. Portanto, T é uma base de V que contém S.

b) Suponha que S é um conjunto gerador de V. Se S for linearmente independente, então, S é uma base.

Se S for linearmente dependente, então, $m > n$. Nesse caso, retiramos do conjunto S todos os vetores v_j, $j > 1$, que são combinações lineares dos vetores precedentes de S, até obtermos n vetores linearmente independentes em S.

$\square$

Exercícios

1. Mostre que os vetores $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ e $u_3 = (1, 4, 9)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Exprima cada um dos vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ da base canônica de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de u_1, u_2 e u_3.

2. Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Exprima cada um dos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ como combinação linear dos elementos dessa base.

3. Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$, que contenha o vetor $u = (-1, 1, 0)$.

4. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$, que contenha os vetores $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 1, -1, 0)$.

5. Seja $V = \mathbb{R}_3[x]$ o espaço dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3, incluindo o polinômio nulo. Quais dos seguintes subconjuntos são bases de V?

   (a) $S = \{x^3 + 2x^2 + 3x,\ 2x^3 + 1,\ 6x^3 + 8x^2 + 6x + 4,\ x^3 + 2x^2 + x + 1\}$.

   (b) $S = \{x^3 - x,\ x^2 + 1,\ x - 1\}$.

6. Mostre que as matrizes

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   formam uma base para o $\mathbb{R}-$espaço vetorial $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

7. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vetores

$$u_1 = (1, 2, 2), u_2 = (3, 2, 1), u_3 = (11, 10, 7), u_4 = (7, 6, 4).$$

   (a) Mostre que $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ que está contida em S.

8. Considere o conjunto finito, $X = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$, e seja $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ o $\mathbb{R}-$ espaço vetorial de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$. Obtenha uma base de V.

9. Seja $V = \mathbb{C}^2$.

   (a) Suponha que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Mostre que os conjuntos

   $$S_1 = \{(1,0),(0,1)\}, \quad S_2 = \{(i,0),(2,-3)\}, \quad S_3 = \{(i,i),(-1,2i)\}$$

   são bases de V sobre $\mathbb{C}$.

   (b) Suponha que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Mostre que o conjunto

   $$S = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$$

   é uma base de V sobre $\mathbb{R}$.

   (c) Mostre que toda base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ tem 2 elementos e que toda base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ tem 4 elementos.

10. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ o $\mathbb{C}-$espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. Prove que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é l.i. em V, onde

    $$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = e^{ix} = \cos(x) + i\mathrm{sen}(x) \quad \text{e} \quad f_3(x) = e^{-ix}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

11. Mostre que o conjunto $\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$ é uma base infinita do $\mathbb{K}-$espaço vetorial $\mathbb{K}[x]$. Essa base é chamada de *base canônica* de $\mathbb{K}[x]$.

12. Ache uma base de $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Quantos elementos tem? E se considerarmos $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

13. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e considere, no conjunto $V_{\mathbb{C}} = \{(u,v) \mid u, v \in V\}$, as seguintes operações de soma e produto por um número complexo:

    $$\begin{aligned}(u_1,v_1)+(u_2,v_2) &= (u_1+u_2, v_1+v_2)\\ (a+bi)(u,v) &= (au-bv, bu+av),\end{aligned}$$

    para todos $(u,v),(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in V_{\mathbb{C}}$ e para todo $a+bi \in \mathbb{C}$.

    (a) Mostre que $V_{\mathbb{C}}$, munido dessas duas operações, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

    (b) Seja $\{v_1,\ldots,v_n\} \subset V$ um subconjunto l.i. Mostre que $\{(v_1,0),\ldots,(v_n,0)\}$ e $\{(0,v_1),\ldots,(0,v_n)\}$ são subconjuntos l.i. em $V_{\mathbb{C}}$.

14. Seja V um espaço vetorial não nulo, sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que em V o maior número de vetores l.i. é m. Mostre que qualquer conjunto de m vetores l.i. em V é uma base de V.

Aula 4 - Coordenadas

Objetivos

Conceituar e determinar as coordenadas de um vetor em relação a uma base de um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V.

Nesta aula, mostramos que, num $\mathbb{K}-$espaço vetorial V de dimensão finita $n \geq 1$, todo vetor $v \in V$ se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. Isto é, existem escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, únicos, tais que

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i.$$

Portanto, cada vetor de V fica determinado por esses escalares, que são chamados de as **coordenadas** do vetor v, em relação à base $\mathcal{B}$.

Proposição 3 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão $n \geq 1$ e seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de V. Então, $\mathcal{B}$ é uma base de V, se, e somente se, cada vetor de V se escreve de maneira única, como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$.*

Demonstração:
Se $\mathcal{B}$ é uma base, então, $\mathcal{B}$ contém n vetores linearmente independentes, que geram o espaço vetorial V. Suponha que $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Considere um vetor qualquer $v \in V$. Suponha que existem escalares $c_1, \ldots, c_n,\ d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$, tais que

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = d_1v_1 + \cdots + d_nv_n.$$

Então, $(c_1 - d_1)v_1 + \cdots + (c_n - d_n)v_n = \vec{0}$. Como $\mathcal{B}$ é linearmente independente, segue que $c_i = d_i,\ \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, v se escreve de forma única como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$.

Reciprocamente, suponha que todo vetor de V se escreve de forma única como combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathcal{B}$. Em particular, $\mathcal{B}$ gera V. Considere a equação vetorial

$$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = \vec{0}, \tag{20}$$

onde $c_i \in \mathbb{K},\ \forall i = 1, \ldots, n$.

Então, $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0v_1 + \cdots + 0v_n$. Pela hipótese de unicidade na combinação linear, concluímos que $c_i = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de V.

□

Definição 6 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Fixemos a ordem dos elementos de $\mathcal{B}$ e a chamamos de base ordenada de V. Dado $v \in V$, existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, únicos, tais que*

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n.$$

Pela unicidade desses escalares, dizemos que eles são as coordenadas do vetor v em relação à base $\mathcal{B}$ e denotamos por

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Seja $V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, \text{ e } a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$ o $\mathbb{K}-$espaço vetorial das matrizes 2×2 de traço zero, e seja

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset V.$$

Dado $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \in V$, temos que

$$v = a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + a_{21}E_3.$$

Isso significa que $\mathcal{B}$ gera o espaço vetorial V. É fácil provar que $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I., sendo, portanto, uma base de V. Logo, as coordenadas do vetor v, em relação à base $\mathcal{B}$, são dadas por

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \end{bmatrix}.$$

Em particular, $\dim_{\mathbb{K}} V = 3$.

Exercícios

1. Seja $V = \mathbb{R}_3[x]$ e seja $\mathcal{B} = \{1,\ 2+x,\ 3x-x^2,\ x-x^3\} \subset V$.

   (a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de V.

   (b) Escreva as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, em relação à base $\mathcal{B}$.

2. Seja $V = \mathbb{K}^n$, e seja $\mathcal{C} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de V. Escreva as coordenadas de $v = (a_1, \ldots, a_n) \in V$ com relação à base $\mathcal{C}$.

3. Seja $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

   (a) Considere V como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E_5 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

   e $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8\} \subset V$. Mostre que $\mathcal{C}$ é uma base de V sobre $\mathbb{R}$, e escreva as coordenadas de um vetor qualquer $v \in V$ com relação à base $\mathcal{C}$.

   (b) Considere V como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Mostre que $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ é uma base de V sobre $\mathbb{C}$. Escreva as coordenadas de um vetor qualquer $v \in V$ com relação à base $\mathcal{B}$.

4. Escreva as coordenadas da função $f(x) = 3\operatorname{sen} x + 5\cos x$ em relação à base $\mathcal{B} = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}$.

Aula 5 - Subespaços Vetoriais

Objetivos

1. Explicitar o conceito de $\mathbb{K}$-subespaço vetorial.

2. Verificar se um determinado subconjunto W de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de V.

3. Determinar uma base de um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial.

4. Reconhecer e provar várias propriedades relacionadas com o conceito de $\mathbb{K}$-subespaço vetorial.

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto não vazio W de V é um $\mathbb{K}-$subespaço vetorial de V, se W é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, com as mesmas operações de soma de vetores e de produto de escalar por vetor já definidas em V.

Para verificarmos se um determinado subconjunto $W \subset V$ é um $\mathbb{K}-$subespaço vetorial de V (ou apenas $\mathbb{K}-$subespaço de V), basta verificarmos se as três propriedades da proposição seguinte são válidas para os elementos de W, pois todas as outras propriedades definidoras de espaço vetorial serão herdadas do espaço vetorial V, no qual W está contido.

Proposição 4 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $W \subset V$ um subconjunto. Então, W é um $\mathbb{K}-$subespaço de V, se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:*

a) $\vec{0} \in W$

b) *se $w_1, w_2 \in W$, então, $w_1 + w_2 \in W$, isto é, W é fechado pela soma de vetores.*

c) *se $c \in \mathbb{K}$ e $w \in W$, então, $cw \in W$, isto é, W é fechado pelo produto de escalar por vetor.*

Exemplos

1. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial qualquer, e seja $W = \{\vec{0}\}$ o subconjunto de V que contém apenas o vetor nulo. Vamos mostrar que $W = \{\vec{0}\}$ satisfaz todas as propriedades da Proposição 4. De fato,

   a) É claro que $\vec{0} \in W$, pois $W = \{\vec{0}\}$.

   b) Se $w_1, w_2 \in W$, então, $w_1 = \vec{0}$ e $w_2 = \vec{0}$, pois W só contém o vetor nulo. Então, $w_1 + w_2 \in W$, pois $w_1 + w_2 = \vec{0}$. Portanto, W é fechado pela soma de vetores.

   c) Se $c \in \mathbb{K}$ é um escalar qualquer e $w \in W$ é um vetor qualquer de W, então, $w = \vec{0}$, pois $W = \{\vec{0}\}$. Logo, $cw = c\vec{0} = \vec{0} \in W$. Portanto, W é fechado pelo produto de escalar por vetor.

   Como $W = \{\vec{0}\}$ satisfaz as três propriedades da Proposição 4, concluímos que W é um $\mathbb{K}-$subespaço de V, chamado de subespaço nulo.

2. Considere o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ como um $\mathbb{Q}-$espaço vetorial, onde $\mathbb{Q}$ é o corpo dos números racionais.

   Vamos mostrar que $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Q}-$subespaço de $\mathbb{C}$. De fato,

   a) O vetor nulo 0, que nesse caso é o número complexo $0 = 0 + 0i$, também, é um número racional e, portanto, pertence a $\mathbb{Q}$.

   b) Se $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, então, $r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$, pois a soma de dois números racionais é um número racional e, portanto, $\mathbb{Q}$ é fechado pela soma de vetores.

   c) Se $c \in \mathbb{Q}$ é um escalar qualquer, e $r \in \mathbb{Q}$ é um vetor qualquer, então, $cr \in \mathbb{Q}$, pois o produto de dois números racionais é um número racional e, portanto, $\mathbb{Q}$ é fechado pelo produto de escalar por vetor.

   Como o subconjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ satisfaz as propriedades da Proposição 4, concluímos que $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Q}-$subespaço do $\mathbb{Q}-$espaço vetorial $\mathbb{C}$.

   De maneira análoga, podemos mostrar que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um $\mathbb{Q}-$subespaço do $\mathbb{Q}-$espaço vetorial $\mathbb{C}$.

3. Considere $\mathbb{C}$ como um $\mathbb{R}-$espaço vetorial. Será que $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{R}-$subespaço vetorial de $\mathbb{C}$?

4. Seja $\mathbb{K}[x]$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial de todos os polinômios na indeterminada x. Para cada número natural $n \geq 0$, considere o subconjunto,

$$\mathbb{K}_n[x] = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}\},$$

   dos polinômios de grau menor ou igual a n, incluindo o polinômio nulo. Então, $\mathbb{K}_n[x]$ é um $\mathbb{K}-$subespaço de $\mathbb{K}[x]$.

5. Considere o seguinte sistema linear homogêneo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, para $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Uma solução de S é uma n-upla $X = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, que satisfaz as equações do mesmo. Podemos também representar S na forma matricial, como $AX = 0$, onde $A = (a_{ij})$ é a matriz $m \times n$ dos coeficientes do sistema, $X = (x_i)$ é a matriz $n \times 1$ das variáveis do sistema, e 0 é a matriz nula $m \times 1$.

Seja $W = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0\}$. Isto é, W é o conjunto de todas as soluções do sistema S. É fácil mostrar que W é um $\mathbb{K}-$subespaço de $\mathbb{K}^n$. De fato,

a) O vetor nulo $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ pertence a W, pois é uma solução do sistema homogêneo $\mathcal{S}$.

b) Se X_1 e X_2 são duas soluções de $\mathcal{S}$, então, $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$. Logo,

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0,$$

o que implica que $X_1 + X_2$, também, é uma solução de $\mathcal{S}$ e, portanto, W é fechado pela soma de vetores.

c) Se $c \in \mathbb{K}$ e $X \in W$, então, $AX = 0$. Logo,

$$A(cX) = cAX = c0 = 0,$$

o que implica que $cX \in W$ e, portanto, W é fechado pelo produto de escalar por vetor.

Exercícios

1. Considere o seguinte sistema linear homogêneo:

$$S = \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 5z + 3w = 0 \\ 4x + 4y + 10z + 3w = 0 \end{cases}$$

   (a) Descreva o subespaço vetorial $W \subset \mathbb{R}^4$ das soluções de S.

   (b) Encontre uma base de W.

2. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Dado um subconjunto $B \subset \mathbb{R}$, defina $N(B) = \{f \in V \mid f(b) = 0,\ \forall\ b \in B\}$. Prove que

   (a) Para qualquer subconjunto $B \subset \mathbb{R}$, $N(B)$ é um subespaço vetorial de V.

   (b) Se $A \subset B$, então, $N(B) \subset N(A)$.

   (c) $N(A \cup B) = N(A) \cap N(B)$.

   (d) $N(B) = \{\vec{0}\}$, se, e somente se, $B = \mathbb{R}$.

3. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais?

   (a) O conjunto $W \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$, tais que $z = 3x$ e $x = 2y$.

   (b) O conjunto $W \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$, tais que $xy = 0$.

   (c) O conjunto W das matrizes 2×3 nas quais alguma coluna é formada por elementos iguais.

   (d) O conjunto $W \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(x+1) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (e) O conjunto W de $\mathbb{R}^5$ que tem duas ou mais coordenadas nulas.

4. Considere o seguinte subconjunto do espaço vetorial de todas as funções reais

$$S = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos(2t)\},$$

   e seja $W = [S]$ o subespaço gerado por S. Determine uma base de W. Qual a dimensão de W?

5. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita n, e seja $W \subset V$ um subespaço não nulo de V.

   (a) Mostre que W também tem dimensão finita e que $\dim_{\mathbb{K}} W \leq n$.

   (b) Mostre que, se $\dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} V = n$, então, $W = V$.

6. Seja $V = GL_{n\times n}(\mathbb{K}) = \{A_{n\times n} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}\ \forall i, j = 1, \ldots, n\}$ o $\mathbb{K}-$espaço vetorial de todas as matrizes quadradas de ordem $n \geq 1$. Verifique se os seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de V.

   (a) $W = \{A_{n\times n} \in V \mid \det(A) \neq 0\}$.

   (b) $W = \{A_{n\times n} \in V \mid \text{traço}(A) = 0\}$.

   (c) $W = \{A_{n\times n} \in V \mid A \text{ é diagonal}\}$.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Objetivos

1. Identificar uma transformação linear.
2. Determinar o núcleo e a imagem de uma transformação linear.
3. Explicitar o teorema do núcleo e da imagem e suas aplicações.
4. Explicitar o conceito de isomorfismo e suas propriedades.
5. Determinar a matriz de representação de uma transformação linear.

Introdução

A **UNIDADE II** está dividida em 5 aulas, da seguinte forma:

1) Primeira aula: Transformações Lineares.

2) Segunda aula: Núcleo e Imagem.

3) Terceira aula: O Teorema do Núcleo e da Imagem.

4) Quarta aula: Isomorfismos.

5) Quinta aula: Matriz de uma Transformação Linear.

Na **primera aula**, você irá estudar o conceito de Transformação Linear entre dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Nesta aula, apresentamos a definição e vários exemplos de transformações lineares. Em cada exemplo, você deve se convencer de que a função ali apresentada é, de fato, uma tranformação linear.

Na **segunda aula**, você irá estudar os conceitos e propriedades do Núcleo e da Imagem de uma transformação linear.

Na **terceira aula**, você irá estudar uma demonstração do Teorema do Núcleo e da Imagem de uma transformação linear.

Na **quarta aula**, você irá estudar o conceito de Isomorfismo entre dois espaços vetoriais.

Na **quinta aula**, você verá que toda transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita U e V pode ser representada por uma matriz em relação a bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ de U e V, respectivamente. Na verdade, aqui, você verá que, se $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ e $\dim_{\mathbb{K}} V = m$, então, o espaço de todas as transformações lineares de U em V está em bijeção com o espaço de todas as matrizes $m \times n$, sobre $\mathbb{K}$.

Ao final de cada aula, você encontrará uma lista com vários exercícios de aprendizagem e fixação.

Recomendamos que você estude a UNIDADE II em duas semanas.

Ao longo desta unidade, $\mathbb{K}$ denota um corpo arbitrário.

Aula 1 - Transformações Lineares

Objetivos

1. Explicitar o conceito de transformação linear.

2. Verificar se uma função $T : U \to V$ entre dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais U e V é uma transformação linear.

3. Verificar a existência de transformações lineares, satisfazendo certas condições.

4. Reconhecer e provar várias propriedades relacionadas com o conceito de transformação linear.

Definição 7 *(Transformação Linear). Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear, se*

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

2. $T(au) = aT(u)$,

para todos $u, u_1, u_2 \in U$ e para todo $a \in \mathbb{K}$.

Exemplos

1. A função nula $T : U \to V$, $T(u) = \vec{0}$, $\forall\ u \in U$ e a função identidade $I : U \to U$, $T(u) = u$, $\forall\ u \in U$ são transformações lineares.

2. Seja $a \in \mathbb{R}$ fixo. Então, a função $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_a(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$ é uma transformação linear.

3. A função $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$, dada por

$$T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix},$$

é uma transformação linear.

4. Seja $U = \mathbb{C}[x]$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes complexos, e considere a função $D : U \to U$, dada por

$$D(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Então, D é uma transformação linear.

5. Seja $U = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então, a função $I : U \to \mathbb{R}$, dada por

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

é uma transformação linear.

6. A projeção $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobre o plano, dada por $\Pi(x,y,z) = (x,y)$, é uma transformação linear.

7. Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, e seja $L(U,V) = \{T : U \to V \mid T \text{ é linear }\}$, o conjunto de todas as transformações lineares de U em V. Dados $S, T \in L(U,V)$, e $c \in \mathbb{K}$, definimos as funções $(S+T)$, $(cT) : U \to V$, como segue:

$$\begin{aligned} (S+T)(u) &= S(u) + T(u) \\ (cT)(u) &= cT(u), \end{aligned} \tag{21}$$

para todo $u \in U$.

Então, é fácil mostrar que as funções $(S+T)$ e cT são lineares, isto é, $(S+T), cT \in L(U,V)$, e que o conjunto $L(U,V)$, munido das operações de soma e de produto por escalar definidas em (21), é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

A seguir, listamos algumas propriedades das transformações lineares.

Proposição 5 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então, uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear, se, e somente se,*

$$T(cu_1 + u_2) = cT(u_1) + T(u_2), \ \forall\ u_1, u_2 \in U, \ \forall c \in \mathbb{K}.$$

Demonstração:
Suponha que T é uma transformação linear. Então, dados $u_1, u_2 \in U$ e $c \in \mathbb{K}$, temos $T(cu_1 + u_2) = T(cu_1) + T(u_2) = cT(u_1) + T(u_2)$.

Reciprocamente, suponha que $T(cu_1 + u_2) = cT(u_1) + T(u_2)$, $\forall u_1, u_2 \in U$, $\forall c \in \mathbb{K}$. Então, fazendo $c = 1$, temos $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ e, fazendo $u_2 = \vec{0}$, temos $T(cu_1) = cT(u_1)$. Donde segue que T é linear.

□

Teorema 3 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Se $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ for uma base de U, e, se $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ for um conjunto qualquer de n vetores de V, então, existe uma única transformação linear $T : U \to V$, tal que $T(u_i) = v_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração:
Existência:

Dado $u \in U$, sejam $[u]_{\mathcal{B}} = (c_1, \ldots, c_n)$ as coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$. Defina $T : U \to V$ por

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

Então, temos:

1. T está bem definida, pois as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ são únicas.
2. $T(u_i) = v_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.
3. T é linear, pois, dados $u, v \in U$, tais que $[u]_{\mathcal{B}} = (c_1, \ldots, c_n)$, $[v]_{\mathcal{B}} = (d_1, \ldots, d_n)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda u + v) &= T[\ (\lambda c_1 + d_1)u_1 + \cdots + (\lambda c_n + d_n)u_n\ ] \\ &= (\lambda c_1 + d_1)v_1 + \cdots + (\lambda c_n + d_n)v_n \\ &= (\lambda c_1 v_1 + \cdots + \lambda c_n v_n) + (d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n) \\ &= \lambda(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) + (d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n) \\ &= \lambda T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Unicidade:

Suponha que exista uma transformação linear $S : U \to V$, tal que $S(u_i) = v_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Então, para cada $u \in U$, tal que $[u]_{\mathcal{B}} = (c_1, \ldots, c_n)$, temos

$$S(u) = S\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i S(u_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = T(u).$$

Donde segue que $S = T$ e, portanto, só existe uma transformação linear com as condições requeridas.

$\square$

Exercícios

1. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Prove que

   a) $T(\vec{0}) = \vec{0}$, isto é, T leva o vetor nulo de U no vetor nulo de V.

   b) $T(-u) = -T(u)$, $\forall u \in U$. Isto é, a imagem do inverso aditivo de $u \in U$ é o inverso aditivo da imagem de $u \in U$.

   c) $T(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \cdots + c_mT(u_m)$, onde $c_i \in \mathbb{K}$ e $u_i \in U$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

2. Quais das seguintes funções T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são transformações lineares?

   (a) $T(x, y) = (1 + x, y)$

   (b) $T(x, y) = (y, x)$

   (c) $T(x, y) = (x^2, y)$

   (d) $T(x, y) = (\text{sen}(x), y)$

   (e) $T(x, y) = (x - y, 0)$

3. Existe uma transformação linear T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ e $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?

4. Se
$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & (1, -2) \\ u_2 & = & (2, -1) \\ u_3 & = & (-3, 2) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} v_1 & = & (1, 0) \\ v_2 & = & (0, 1) \\ v_3 & = & (1, 1), \end{array}$$
   existe uma transformação linear T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, tal que $T(u_i) = v_i$, para $i \in \{1, 2, 3\}$?

5. Descreva, explicitamente, uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, tal que $T(e_1) = (a, b)$ e $T(e_2) = (c, d)$, onde $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.

6. Seja $V = \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, o espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$, e seja $B \in V$ uma matriz fixa. Se $T : V \to V$ é a função dada por $T(X) = XB - BX$, verifique que T é um operador linear sobre V.

7. Seja $V = \mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Considere V como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Determine uma função $T : V \to V$ que seja linear sobre $\mathbb{R}$, mas que não seja linear sobre $\mathbb{C}$.

Aula 2 - Núcleo e Imagem

Objetivos

1. Conceituar e determinar o núcleo e o conjunto imagem de uma transformação linear.
2. Determinar uma base do núcleo e do conjunto imagem de uma transformação linear.
3. Determinar uma transformação linear através de um conjunto gerador do seu conjunto imagem.
4. Reconhecer e provar várias propriedades relacionadas com os conceitos de núcleo e imagem de uma transformação linear.

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $T : U \to V$ uma transformação linear. O núcleo de T, denotado por $N(T)$, é o conjunto dos vetores de U, que são levados no vetor nulo, pela transformação linear T, isto é,

$$N(T) = \{u \in U \mid T(u) = \vec{0}\}.$$

O conjunto imagem de T, denotado por $Im(T)$, é o conjunto dos vetores de V, que são imagens de vetores de U, isto é,

$$Im(T) = \{v \in V \mid v = T(u), \text{ para algum } u \in U\}.$$

Proposição 6 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então:*

1. *$N(T) \subset U$ é um subespaço vetorial de U e $Im(T) \subset V$ é um subespaço vetorial de V.*

2. *T é injetora, se, e somente se, $N(T) = \{\vec{0}\}$.*

Demonstração: 1. Vamos mostrar que $N(T)$ é não vazio e que $N(T)$ é fechado pela soma de vetores e pelo produto de escalar por vetor.

De fato, $N(T) \neq \emptyset$, pois $\vec{0} \in N(T)$. Dados $u_1, u_2 \in N(T)$ e $c \in \mathbb{K}$, temos que $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, o que implica que $u_1 + u_2 \in N(T)$. Do mesmo modo, $T(cu_1) = cT(u_1) = c\vec{0} = \vec{0}$, o que implica que $cu_1 \in N(T)$. Portanto, $N(T)$ é um subespaço vetorial de U. A prova para $Im(T)$ é análoga.

2. Suponha que T é injetora, e seja $u \in N(T)$. Então, $T(u) = \vec{0} = T(\vec{0})$. Como T é injetora, temos que $u = \vec{0}$ e, portanto, $N(T) = \{\vec{0}\}$.

Reciprocamente, suponha que $N(T) = \{\vec{0}\}$. Sejam $u_1, u_2 \in U$, tais que $T(u_1) = T(u_2)$. Então, $T(u_1 - u_2) = \vec{0}$, o que implica que $u_1 - u_2 \in N(T)$. Como $N(T) = \{\vec{0}\}$, temos que $u_1 = u_2$ e, portanto, T é injetiva.

$\square$

Dada uma transformação linear $T : U \to V$, a dimensão do subespaço $Im(T)$ é chamada de posto de T, e a dimensão do subespaço $N(T)$ é chamada de nulidade de T.

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix}.$$

Um vetor $u = (a,b,c)$ pertence ao $N(T)$, se, e somente se, $a+b=0$ e $c-b=0$, isto é, se, e somente se, $a=-b$ e $c=b$. Portanto,

$$N(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a=-b \text{ e } c=b\} = \{(-b,b,b) \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que $N(T)$ é gerado pelo vetor $(-1,1,1)$, o que implica que $\mathcal{B} = \{(-1,1,1)\}$ é uma base para $N(T)$ e $\dim_{\mathbb{R}} N(T) = 1$.

O conjunto $Im(T)$ é dado por todas as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $a,b,c \in \mathbb{R}$, o que implica que

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerador de $Im(T)$.

No conjunto $\mathcal{C}$, observe que a terceira matriz é a diferença das duas primeiras, e que as duas primeiras matrizes são L.I. Isso significa que $\mathcal{C}$ é L.D., e que

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para $Im(T)$. Portanto, $\dim_{\mathbb{R}} Im(T) = 2$.

Observe que $\dim_{\mathbb{R}} N(T) + \dim_{\mathbb{R}} Im(T) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

Lema 1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, e $T : U \to V$ uma transformação linear. Se $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U, então, $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera $Im(T)$.*

Demonstração:
Considere $v \in Im(T)$. Então, existe $u \in U$, tal que $T(u) = v$. Sejam $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$, tais que $[u]_{\mathcal{B}} = (c_1, \dots, c_n)$. Isto é, $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$. Então,

$$v = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(u_i),$$

o que implica que v é combinação linear dos vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$ e, portanto, $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera $Im(T)$.

$\square$

Atenção! Podemos usar o Lema 1 para determinar uma base para o conjunto imagem $Im(T)$ de uma transformação linear $T : U \to V$.

Exemplo

Considere $U = \mathbb{C}^2$ e $V = \mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espaços vetoriais. Seja $T : U \to V$ a transformação linear dada por

$$T(a + bi, c + di) = (a - c, b + 2d, a + b - c + 2d),$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Então, pelo Lema 1, temos que o conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{T(1,0), T(i,0), T(0,1), T(0,i)\} \\ &= \{(1,0,1), (0,1,1), (-1,0,-1), (0,2,2)\} \\ &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \end{aligned}$$

gera $Im(T)$.

Então, $\mathcal{C}$ contém uma base de $Im(T)$. Para obter essa base, basta retirar do conjunto $\mathcal{C}$ todos os vetores que são combinações lineares dos vetores precedentes.

Como v_2 não é paralelo a v_1, mantemos v_2. Como $v_3 = -v_1 + 0v_2$, isto é, v_3 é combinação linear dos vetores precedentes, retiramos v_3 do conjunto $\mathcal{C}$, restando apenas os vetores $\{v_1, v_2, v_4\}$. Como $v_4 = 0v_1 + 2v_2$, retiramos v_4, restando apenas os vetores v_1, v_2. Logo, concluímos que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $Im(T)$.

Exercícios

1. Determine o núcleo e a imagem da transformação nula e da transformação identidade sobre um espaço vetorial de dimensão finita.

2. Seja $V = \mathbb{K}[x]$ o $\mathbb{K}-$espaço vetorial dos polinômios, na indeterminada x, com coeficientes sobre $\mathbb{K}$, e seja $D : V \to V$, $D(p(x)) = p^{'}(x)$ a aplicação derivação. Prove que D é uma transformação linear e determine o núcleo e a imagem de D.

3. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ um subcorpo dos números complexos, e seja $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ a função definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$.

   (a) Prove que T é uma transformação linear.

   (b) Se (a, b, c) é um vetor em $\mathbb{K}^3$, quais as condições sobre a, b e c, para que o vetor esteja no conjunto imagem de T? Qual a dimensão de $Im(T)$?

   (c) Quais são as condições sobre a, b, c para que (a, b, c) pertença ao núcleo de T? Qual a dimensão de $N(T)$?

4. Descreva explicitamente uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ que tem o conjunto imagem gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (1, 2, 2)$.

5. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, e seja $T : V \to V$ uma transformação linear, tal que o núcleo e a imagem de T são iguais. Prove que n é par. Você pode dar um exemplo de uma tal transformação linear?

6. Seja V um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Prove que as seguintes afirmações a respeito de T são equivalentes.

   (a) $Im(T) \cap N(T) = \{\vec{0}\}$, isto é, a interseção do conjunto imagem de T com o núcleo de T é o subespaço nulo de V.

   (b) Se $v \in V$ é tal que $T(T(v)) = \vec{0}$, então, $T(v) = \vec{0}$.

Aula 3 - Teorema do Núcleo e da Imagem

Objetivos

Compreender o enunciado e a demonstração do Teorema do Núcleo e da Imagem de uma Transformação Linear e aplicar esse Teorema para provar várias propriedades de uma transformação linear.

Teorema 4 (Teorema do Núcleo e da Imagem). *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $dim_{\mathbb{K}}U = n \geq 1$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então,*

$$dim_{\mathbb{K}}U = dim_{\mathbb{K}}N(T) + dim_{\mathbb{K}}Im(T).$$

Demonstração:
Primeiro, suponha que $N(T) \neq \{\vec{0}\}$, e seja $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ uma base de $N(T)$. Como $\dim_{\mathbb{K}}U = n$, devemos ter $r \leq n$. Seja $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$, com $r + s = n$, uma base de U que contém $\mathcal{B}$. Segue, do Lema 1, que o conjunto

$$\mathcal{D} = \{T(u_1), \ldots, T(u_r), T(v_1), \ldots, T(v_s)\} = \{\vec{0}, T(v_1), \ldots, T(v_s)\}$$

gera $Im(T)$. Vamos mostrar que $\mathcal{D} - \{\vec{0}\}$ é linearmente independente. De fato, considere a equação

$$c_1T(v_1) + \cdots + c_sT(v_s) = \vec{0}, \tag{22}$$

onde $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{K}$.

Como T é linear, temos que $T(c_1v_1 + \cdots + c_sv_s) = \vec{0}$, o que implica que o vetor $c_1v_1 + \cdots + c_sv_s \in N(T)$. Como $\mathcal{B}$ é base de $N(T)$, existem escalares $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{K}$, tais que

$$c_1v_1 + \cdots + c_sv_s = d_1u_1 + \cdots + d_ru_r,$$

o que implica que $d_1u_1 + \cdots + d_ru_r - c_1v_1 - \cdots - c_sv_s = \vec{0}$. Como $\mathcal{C}$ é (L.I.), segue que $c_j = 0, \forall j \in \{1, \ldots, s\}$. Isso implica que a equação (22) admite apenas a solução trivial e os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_s)$ são linearmente independentes. Portanto, $\{T(v_1), \ldots, T(v_s)\}$ é uma base de $Im(T)$. Assim, temos que

$$\dim_{\mathbb{K}}U = r + s = \dim_{\mathbb{K}}N(T) + \dim_{\mathbb{K}}Im(T).$$

Se $N(T) = \{\vec{0}\}$, considere uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de U e, de maneira análoga à feita acima, mostra-se que o conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de $Im(T)$.

$\square$

Exercícios

1. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o único operador linear sobre $\mathbb{C}^2$, tal que

$$T(1,0,0) = (1,0,i), \quad T(0,1,0) = (0,1,1), \quad T(0,0,1) = (i,1,0).$$

   T é invertível?

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$.

   (a) O operador T é invertível? Se for, o que é T^{-1}?

   (b) Mostre que $(T^2 - I)(T - 3I) = 0$, onde $T^2 = T \circ T$.

3. Seja $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ o $\mathbb{C}-$espaço vetorial das matrizes complexas 2×2. Sejam

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

   e $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, o operador linear definido por $T(A) = BA$. Qual é o conjunto imagem de T? O que é T^2?

4. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$, e seja U uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$. Prove que a transformação linear $U \circ T$ não é invertível. Generalize esse resultado.

5. Determine dois operadores lineares T e U sobre $\mathbb{R}^2$, tais que $TU = 0$, mas $UT \neq 0$.

6. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita, e seja T um operador linear sobre V. Se $T^2 = 0$, qual é a relação entre $Im(T)$ e $N(T)$? Dê um exemplo de um operador linear T sobre $\mathbb{R}^2$, tal que $T^2 = 0$, mas $T \neq 0$.

7. Seja T um operador linear sobre um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V de dimensão finita. Suponha que existe um operador linear U sobre V, tal que $T \circ U = I$. Prove que T é invertível e que $U = T^{-1}$. Dê um exemplo que mostre que esse resultado é falso, quando V não é de dimensão finita. (**Sugestão: Seja $T = D$ o operador diferenciação sobre o espaço dos polinômios**).

Aula 4 - Isomorfismos

Objetivos

1. Explicitar o conceito de espaços vetoriais isomorfos.
2. Aplicar o Teorema do Núcleo e da Imagem para verificar se dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais são isomorfos.

Definição 8 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear $T : U \to V$ é um isomorfismo, se for uma aplicação bijetiva. Se existir um isomorfismo $T : U \to V$, dizemos que U e V são espaços isomorfos e denotamos por $U \cong V$.*

Observação

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se U e V são isomorfos, então,

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

De fato, seja $T : U \to V$ um isomorfismo.

a) Se $\dim_{\mathbb{K}} U = \infty$, então, U possui um conjunto infinito $\mathcal{B}$ de vetores (L.I.). Como T é injetiva, temos que $T(\mathcal{B}) \subset V$ é um conjunto infinito de vetores (L.I.) em V e, portanto,
$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V = \infty.$$

b) Se $\dim_{\mathbb{K}} U = n \geq 1$, então, U possui uma base $\mathcal{C}$ com n elementos. Como T é injetiva, segue que $T(\mathcal{C}) \subset V$ é um conjunto de n vetores (L.I.) em $Im(T)$ que, pelo Lema 1, gera $Im(T)$. Logo, $\dim_{\mathbb{K}} Im(T) = n$. Como T é sobrejetiva, temos que $Im(T) = V$ e, portanto,
$$\dim_{\mathbb{K}} V = n = \dim_{\mathbb{K}} U.$$

Seja $T : U \to V$ um isomorfismo entre os $\mathbb{K}$-espaços vetoriais U e V. Então, T possui uma função inversa $T^{-1} : V \to U$. Vamos mostrar que T^{-1} também é linear. De fato, dados $v_1, v_2 \in V$ e $c \in \mathbb{K}$, temos que existem $u_1, u_2 \in U$, tais que $v_1 = T(u_1)$ e $v_2 = T(u_2)$. Então,

$$\begin{aligned} T^{-1}(cv_1 + v_2) &= T^{-1}(cT(u_1) + T(u_2)) \\ &= T^{-1}(T(cu_1 + u_2)) \\ &= cu_1 + u_2 \\ &= cT^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Proposição 7 *Sejam U e V, $\mathbb{K}-$espaços vetoriais de mesma dimensão finita $n \geq 1$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) T é um isomorfismo.

2) T é injetiva.

3) T é sobrejetiva.

Demonstração:
$(1 \Rightarrow 2)$ Se T é um isomorfismo, então, T é uma bijeção. Logo, T é injetiva.

$(2 \Rightarrow 3)$ Se T é injetiva, então, $\dim_{\mathbb{K}} N(T) = 0$, donde segue, do Teorema do Núcleo e da Imagem (Teorema 4), que $\dim_{\mathbb{K}} Im(T) = \dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V = n$. Como $Im(T)$ é um subespaço de V, ambos com mesma dimensão n, segue que $V = Im(T)$ e T é sobrejetiva.

$(3 \Rightarrow 1)$ Se T é sobrejetiva, então, $Im(T) = V$ e $\dim_{\mathbb{K}} Im(T) = n = \dim_{\mathbb{K}} U$. Novamente, pelo Teorema 4, segue que $\dim_{\mathbb{K}} N(T) = 0$ e T é injetiva. Portanto, T é um isomorfismo. $\square$

Atenção! A proposição 7 só é válida, se $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$, e ambas forem dimensões finitas. Os exemplos, a seguir, ilustram esse fato.

Exemplos

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (-y, x, x + y)$. Observe que $N(T) = \{(x, y) \mid (-y, x, x + y) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0)\}$ e, portanto, pela proposição 6, T é injetora. Basta observar que $(-1, 0, 0)$ não é um elemento de $Im(T)$ para concluir que T não é sobrejetora. Não é difícil ver, também, que $\{(-1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ forma uma base de $Im(T)$.

2. Seja $\mathbb{R}[x]$ o $\mathbb{R}-$espaço vetorial dos polinômios com coeficientes sobre $\mathbb{R}$, e seja $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ a transformação linear dada pela derivação
$$D(p(x)) = p^{'}(x), \quad \text{onde} \quad p(x) \in \mathbb{R}[x].$$
Observe que D não é injetiva, pois todo polinômio constante pertence ao núcleo de D. Por outro lado, é fácil ver que D é sobrejetiva, pois todo polinômio de $\mathbb{R}[x]$ tem uma primitiva (isto é, pode ser integrado).

3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formado por todas as sequências de elementos de $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Seja $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, dada por
$$T((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}.$$
É fácil ver que T é uma transformação linear. Além disso, T é sobrejetiva, pois, dada uma sequência $(y_n)_{i \in \mathbb{N}}$, podemos considerar a sequência $x = (0, y_1, y_2, y_3, \ldots)$, para termos que
$$T(0, y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, \ldots).$$
Por outro lado, é fácil ver que T não é injetiva, pois
$$N(T) = \{(x_1, 0, 0, 0, \ldots) \mid x_1 \in \mathbb{K}\}.$$

4. Seja $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, dada por
$$T((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$
É claro que T é uma transformação linear e que T é injetiva, já que $N(T) = \{\vec{0}\}$. Por outro lado, T não é sobrejetiva, uma vez que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_1 = 1$ e $x_j = 0, \ \forall j \geq 2$ não é imagem de nenhuma sequência de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, via T.

Atenção! Vimos anteriormente que espaços vetoriais isomorfos possuem a mesma dimensão. Vamos mostrar que a recíproca desse resultado é verdadeira para espaços de dimensão finita.

Teorema 5 *Dois $\mathbb{K}-$espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.*

Demonstração:
Se ambos os espaços forem nulos, não há nada a demonstrar. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $n \geq 1$. Para definirmos um isomorfismo $T : U \to V$, considere bases $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de U e V, respectivamente. Sabemos que existe uma única transformação linear $T : U \to V$, tal que $T(u_i) = v_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vamos mostrar que T é injetiva. De fato, seja $u \in N(T)$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de U, existem escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, tais que $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$. Então, temos que

$$\vec{0} = T(u) = c_1 T(u_1) + \cdots + c_n T(u_n) = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Como $\mathcal{C}$ é linearmente independente, temos que $c_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n$. Isso implica que $u = \vec{0}$ e T é injetiva. Portanto, T é um isomorfismo.

$\square$

Corolário 5.1 *Todo $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Exercícios

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Com as operações usuais, $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$. Descreva um isomorfismo de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}^2$.

2. Seja V um espaço vetorial complexo, e suponha que exista um isomorfismo T de V sobre $\mathbb{C}^3$. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 vetores em V, tais que $T(v_1) = (1, 0, i)$, $T(v_2) = (-2, 1+i, 0)$, $T(v_3) = (-1, 1, 1)$, $T(v_4) = (\sqrt{2}, i, 3)$.

   (a) O vetor v_1 pertence ao espaço gerado por v_2 e v_3?

   (b) Seja W_1 o subespaço gerado por v_1 e v_2, e seja W_2 o subespaço gerado por v_3 e v_4. Qual é a interseção de W_1 e W_2?

   (c) Determine uma base para o subespaço de V gerado pelos quatro vetores v_1, v_2, v_3 e v_4.

3. Seja W o conjunto de todas as matrizes 2×2 complexas A, tais que $\overline{A}^T = A$. Considere W como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^4 \to W$, dada por
$$T(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$
é um isomorfismo.

4. Mostre que $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Defina $T : \mathbb{C} \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, por
$$T(x+iy) = \begin{bmatrix} x+7y & 5y \\ -10y & x-7y \end{bmatrix}, \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Prove que T é uma transformação linear injetiva.

   (b) Prove que $T(z_1 z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$.

   (c) Determine o conjunto imagem de T.

6. Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, e seja U um isomorfismo de V sobre W. Prove que a aplicação $T \to UTU^{-1}$ é um isomorfismo de $L(V, V)$ sobre $L(W, W)$.

Aula 5 - Matriz de uma Transformação Linear

Objetivos

1. Explicitar o conceito de matriz de representação de uma transformação linear $T : U \to V$, em relação a bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ dos $\mathbb{K}$-espaços vetoriais U e V, respectivamente.

2. Determinar a matriz de uma transformação linear $T : U \to V$, em relação a bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ de U e V, respectivamente.

3. Determinar uma transformação linear, a partir de sua matriz de representação.

Sejam U e V, $\mathbb{K}-$espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente, e seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de U e V, respectivamente. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos que o vetor $T(u_j) \in V$ se escreve, de forma única, como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}'$. Isto é, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existem m escalares $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbb{K}$, tais que

$$[T(u_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Seja A a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores $T(u_j)$ na base $\mathcal{B}'$, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A matriz A, acima, é chamada de matriz da transformação linear T com relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e denotada por $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. No caso em que os espaços U e V são iguais e as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são iguais, dizemos que $T : V \to V$ é um operador linear sobre o espaço vetorial V e denotamos $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, simplesmente por $[T]_{\mathcal{B}}$.

Teorema 6 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensões n e m, respectivamente, e seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Sejam, ainda, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de V. Então,*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}} = [T(u)]_{\mathcal{B}'}.$$

Demonstração: Dado $u \in U$, suponha que $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ e que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (a_{ij})_{i,j}$.

Então, temos que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Por outro lado, temos que

$$T(u) = \sum_{j=1}^{n} b_j T(u_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) v_i.$$

Donde segue que

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Agora, comparando as equações (23) e (24), concluímos que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}} = [T(u)]_{\mathcal{B}'},$$

para todo $u \in U$.

$\square$

Teorema 7 *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, e*

$$L(U,V) = \{T : U \to V \mid T \text{ é transformação linear }\},$$

o conjunto de todas as transformações lineares de U em V. Sejam, ainda, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de U e V, respectivamente. Então, $L(U,V)$ é um $\mathbb{K}-$espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demonstração: É fácil mostrar que $L(U,V)$, munido das seguintes operações:

$$\begin{aligned}(T+S)(v) &= T(v)+S(v)\\ (cT)(v) &= cT(v),\end{aligned}$$

para todos $T, S \in L(U,V)$, $c \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Vamos mostrar que a aplicação $\Psi : L(U,V) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, dada por

$$\Psi(T) = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'},$$

é um isomorfismo. De fato, temos que

$$\begin{aligned}\Psi(T+S) &= [T+S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} + [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \Psi(T)+\Psi(S)\\ \Psi(cT) &= [cT]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = c[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = c\Psi(T),\end{aligned}$$

para todos $c \in \mathbb{K}$ e $T, S \in L(U,V)$. Isso implica que Ψ é uma transformação linear.

Dado $T \in N(\Psi)$, temos que $\Psi(T) = \vec{0}$, o que implica que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = 0_{m\times n}$. Desse modo, temos que as coordenadas dos vetores $T(u_j)$, em relação à base $\mathcal{B}'$, são todas nulas, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Porém, isso significa que $T(u_j) = \vec{0}$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ e, consequentemente, $T(u) = \vec{0}, \forall u \in U$. Portanto, $N(\Psi) = \{\vec{0}\}$ e Ψ é injetiva.

Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, defina $T : U \to V$, por

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i,$$

para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Então, é fácil ver que T é uma transformação linear de U em V, cuja matriz de representação em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ é exatamente a matriz A, isto é, $\Psi(T) = A$. Isso significa que Ψ é sobrejetiva e, portanto, Ψ é um isomorfismo.

□

Observe que o Teorema 7 nos diz que, fixadas duas bases $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de U e V, respectivamente, para cada transformação linear T de U em V, existe uma única matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, que é a matriz de representação de T, em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. E, reciprocamente, para cada matriz A, $m \times n$, existe uma única transformação linear T de U em V, tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = A$. Em particular, temos que $\dim_{\mathbb{K}} L(U, V) = mn$.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}_3[x]$ o $\mathbb{R}-$espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 3, com coeficientes reais. Considere a transformação linear $D : V \to V$, dada pela derivação $D(p(x)) = p'(x)$. A matriz de D com relação à base canônica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de V é

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercícios

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por
$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y, 2y + z).$$
Sejam $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^3$. Determine as seguintes matrizes de T:
   (a) $[T]_{\mathcal{C}}$
   (b) $[T]_{\mathcal{B}}$
   (c) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

2. Seja $T : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, definida por $T(p(x)) = x^2 p(x)$. Sejam as bases $S = \{x, 1\}$ e $S' = \{x, x+1\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$, e sejam as bases $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ e $\mathcal{B}' = \{x^3, x^2-1, x, x+1\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Determine as seguintes matrizes de T:
   (a) $[T]_S^{\mathcal{B}}$
   (b) $[T]_{S'}^{\mathcal{B}'}$

3. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita n. Se $I : V \longrightarrow V$ é a transformação identidade, definida por $I(v) = v$, para todo $v \in V$, mostre que a matriz de I, com relação a qualquer base de V, é a matriz identidade de ordem n.

4. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita n. Se $0 : V \longrightarrow V$ é a transformação nula, prove que a matriz de 0 com relação a qualquer base de V é a matriz nula de ordem n.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determine $T(x, y, z)$.
   (b) Qual é a matriz de T com relação à base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$?
   (c) O operador T é invertível? Justifique.

ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Objetivos

1. Explicitar o conceito de produto interno num espaço vetorial.
2. Explicitar o conceito de ortogonalidade. Verificar se dois ou mais vetores são ortogonais.
3. Obter um conjunto ortogonal de vetores, a partir de um conjunto de vetores linearmente independente, através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.
4. Explicitar o conceito e propriedades de subespaço ortogonal.
5. Explicitar o conceito de projeção ortogonal, bem como projetar um vetor de um espaço vetorial, num subespaço.

Introdução

Nesta unidade, consideramos somente espaços vetoriais reais ou complexos, isto é, espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais ou sobre o corpo dos números complexos. Nosso objetivo é estudar espaços vetoriais nos quais faz sentido falar sobre o comprimento de um vetor e sobre o ângulo entre dois vetores. Vamos estudar um certo tipo de função que assume valores escalares sobre pares de vetores, conhecida como produto interno. Um exemplo de um produto interno é o produto escalar de vetores em $\mathbb{R}^3$. O produto escalar dos vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em $\mathbb{R}^3$ é o número real

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Geometricamente, esse é o produto do comprimento de u pelo comprimento de v e pelo cosseno do ângulo entre u e v. Consequentemente, é possível definir os conceitos geométricos de "comprimento"e "ângulo", em $\mathbb{R}^3$, pelo significado algébrico do produto escalar.

Um produto interno sobre um espaço vetorial é uma função com propriedades semelhantes às do produto interno em $\mathbb{R}^3$ e, em termos de um tal produto interno, podemos definir "comprimento"e "ângulo". Nossos comentários a respeito da noção geral de ângulo serão restritos ao conceito de perpendicularidade, ou ortogonalidade de vetores. Nesta unidade, definimos produto interno sobre um $\mathbb{K}-$espaço vetorial, consideramos alguns exemplos particulares e estabelecemos algumas propriedades básicas. Então, continuamos com a tarefa de discutir comprimento e ortogonalidade.

A **UNIDADE III** está dividida em 5 aulas, da seguinte forma:

1) Primeira aula: Espaços com Produto Interno.

2) Segunda aula: Ortogonalidade.

3) Terceira aula: O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

4) Quarta aula: Subespaço Ortogonal.

5) Quinta aula: Projeção Ortogonal.

Na **primeira aula**, você irá estudar o conceito e propriedades de produto interno, num espaço vetorial, bem como verá exemplos de produtos internos. Também irá estudar a desigualdade de Schwarz e a desigualdade triangular.

Na **segunda aula**, você irá estudar os conceitos de vetores ortogonais, base ortogonal e base ortonormal de um espaço vetorial com produto interno.

Na **terceira aula**, você irá estudar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, que é um processo que permite obter um conjunto ortonormal de vetores, a partir de um dado conjunto (l.i.). Aqui, você verá que todo espaço vetorial de dimensão finita, com produto interno, possui uma base ortonormal.

Na **quarta aula**, você irá estudar o conceito e propriedades de subespaço ortogonal.

Na **quinta aula**, você vai aprender como projetar um vetor v de um espaço vetorial V com produto interno, sobre um subespaço de dimensão finita $W \subset V$. Aqui, você verá que a projeção ortogonal de v sobre W é o vetor de W que melhor se aproxima de v.

Ao final de cada aula, você encontrará uma lista com vários exercícios de aprendizagem e fixação.

Nesta unidade, o corpo base $\mathbb{K}$ de um espaço vetorial será sempre igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Aula 1 - Espaços com Produto Interno

Objetivos

1. Explicitar o conceito de produto interno num $\mathbb{K}$-espaço vetorial V.
2. Provar várias propriedades de um produto interno.
3. Verificar se uma dada função é um produto interno num espaço vetorial.

O produto interno num espaço vetorial é uma estrutura que nos permite abordar noções geométricas no espaço vetorial, como ângulo, perpendicularidade, comprimento, distância etc.

Definição 9 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um produto interno sobre V é uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

2) $\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle$

3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, *onde* $\overline{\langle v, u\rangle}$ *representa o conjugado do número complexo* $\langle v, u\rangle$.

4) $\langle u, u\rangle > 0$, *se* $u \neq \vec{0}$,

para quaiquer vetores $u, v, w \in V$ e para todo escalar $c \in \mathbb{K}$.

Observação

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a propriedade 3) da Definição 9 implica a igualdade

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle,\ \forall u, v \in V,$$

pois, nesse caso, temos que $\overline{\langle u, v\rangle} = \langle u, v\rangle$. Essa simetria se perde no caso complexo. De fato, se V é um espaço vetorial complexo e $v \in V$, temos que

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \text{e} \quad \langle iv, iv\rangle > 0,$$

pelo item 3) da Definição 9. Se fosse válido, aqui, que $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle,\ \forall u, v \in V$, teríamos

$$\langle iv, iv\rangle = i\langle v, iv\rangle = i\langle iv, v\rangle = i^2\langle v, v\rangle = -\langle v, v\rangle > 0,$$

o que é uma contradição.

Proposição 8 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Então, dados $u, v, w \in V$ e $c \in \mathbb{K}$, são válidas*

1) $\langle \vec{0}, v\rangle = \langle v, \vec{0}\rangle = 0.$

2) $\langle v, v\rangle = 0$, *se, e somente se,* $v = \vec{0}$.

3) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.$

4) $\langle u, cv\rangle = \overline{c}\langle u, v\rangle.$

5) *Para quaisquer vetores $u_i, v_j \in V$ e quaisquer escalares $c_i, d_j \in \mathbb{K}$, com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, temos*

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i u_i,\ \sum_{j=1}^{m} d_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i \overline{d}_j \langle u_i, v_j\rangle.$$

Demonstração:

1) $\langle \vec{0}, v\rangle + \langle \vec{0}, v\rangle = \langle \vec{0} + \vec{0}, v\rangle = \langle \vec{0}, v\rangle$. Subtraindo dos dois lados da equação o número $\langle \vec{0}, v\rangle$, teremos $\langle \vec{0}, v\rangle = 0$.

2) Suponha que $\langle v, v\rangle = 0$. Pelo item 4) da definição 9, se $v \neq \vec{0}$, então, $\langle v, v\rangle > 0$. Logo, devemos ter $v = \vec{0}$.

Reciprocamente, se $v = \vec{0}$, temos, pelo item anterior, que $\langle \vec{0}, \vec{0}\rangle = 0$.

3) $\langle u, v + w\rangle = \overline{\langle v + w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.$

4) $\langle u, cv\rangle = \overline{\langle cv, u\rangle} = \overline{c\langle v, u\rangle} = \overline{c}\ \overline{\langle v, u\rangle} = \overline{c}\ \langle u, v\rangle.$

5) Segue dos itens anteriores.

$\square$

Exemplos

1. Para o $\mathbb{K}-$espaço vetorial $V = \mathbb{K}^n$, definimos

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i.$$

Tal produto interno é chamado de produto interno canônico em $\mathbb{K}^n$. Vamos mostrar que esse satisfaz as propriedades da Definição 9.

Sejam $u = (x_1, \ldots, x_n),\ v = (y_1, \ldots, y_n)$ e $w = (z_1, \ldots, z_n)$ em $\mathbb{K}^n$ e $c \in \mathbb{K}$. Então,

1)

$$\begin{aligned}
\langle u + v, w \rangle &= \langle (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), (z_1, \ldots, z_n) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\overline{z_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\ x_i\overline{z_i} + y_i\overline{z_i}\ ) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{z_i} + \sum_{i=1}^{n} y_i\overline{z_i} \\
&= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

2)

$$\langle cu, v \rangle = \langle (cx_1, \ldots, cx_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} cx_i\overline{y_i} = c\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = c\langle u, v \rangle$$

3)

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{x_i}y_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i\overline{x_i}} = \overline{\langle v, u \rangle}$$

4)

$$\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0, \text{ para todo } u \neq \vec{0}.$$

2. Considere o $\mathbb{K}-$espaço vetorial $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{K}$. As regras de integração garantem que

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt, \text{ para } f, g \in V$$

é um produto interno (verifique!). Esse é chamado de produto interno canônico em V.

3. O produto interno canônico em $V = \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é dado por

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}} = \operatorname{tr}(\overline{B}^T A),$$

onde $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ são matrizes de V,

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

denota o traço da matriz A, e $\overline{B}^T$ denota a transposta da conjugada de B.

Definição 10 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Para cada $v \in V$, chamamos de norma de v ao número real dado por $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Observação

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Segue diretamente das definições envolvidas que

1. $|v| \geq 0,\ \forall v \in V$ e $|v| = 0$, se, e somente se, $v = \vec{0}$.
2. $|cv| = |c||v|,\ \forall c \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$.

Teorema 8 *(Desigualdade de Schwarz). Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno. Então,*

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|, \quad \forall u, v \in V.$$

A igualdade vale, se, e somente se, $\{u, v\}$ for linearmente dependente.

Demonstração:
Dados $c, d \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V$, temos

$$\begin{aligned}
\langle cu - dv, cu - dv\rangle &= \langle cu, cu\rangle - \langle cu, dv\rangle - \langle dv, cu\rangle + \langle dv, dv\rangle \\
&= c\bar{c}\langle u, u\rangle - c\bar{d}\langle u, v\rangle - d\bar{c}\langle v, u\rangle + d\bar{d}\langle v, v\rangle \\
&= |c|^2|u|^2 - [\ c\bar{d}\langle u, v\rangle + \overline{c\bar{d}\langle u, v\rangle}\ ] + |d|^2|v|^2 \\
&= |c|^2|u|^2 - 2re(c\bar{d}\langle u, v\rangle) + |d|^2|v|^2.
\end{aligned}$$

Fazendo $c = |v|^2$ e $d = \langle u, v\rangle$, obtemos

$$c\bar{d}\langle u, v\rangle = |v|^2\bar{d}d = |v|^2|d|^2 \in \mathbb{R}.$$

Daí, segue que

$$0 \leq \langle cu - dv, cu - dv\rangle = |u|^2|v|^4 - 2|v|^2|\langle u, v\rangle|^2 + |\langle u, v\rangle|^2|v|^2 = |v|^2(|u|^2|v|^2 - |\langle u, v\rangle|^2).$$

Portanto,

$$|u|^2|v|^2 - |\langle u, v\rangle|^2 \geq 0.$$

Donde segue que

$$|\langle u, v\rangle \leq |u||v|.$$

Suponha, agora, que $|\langle u, v\rangle| = |u||v|$ e tome $c = |v|^2$ e $d = \langle u, v\rangle$. Então, usando o cálculo acima, teremos $\langle cu - dv, cu - dv\rangle = 0$. Se $v = \vec{0}$, então, $\{u, v\}$ é L.D. Suponha que $v \neq \vec{0}$. Então, $c \neq 0$ e $cu = dv$, o que implica que $u = \frac{d}{c}v$ e, portanto, $\{u, v\}$ é L.D.

Supondo, agora, que $\{u, v\}$ é L.D., isto é, supondo que $u = \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{K}$, uma conta simples nos leva à igualdade $|\langle u, v\rangle| = |u||v|$.

$\square$

Corolário 8.1 *(Desigualdade Triangular). Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno. Então,*

$$|u+v| \leq |u| + |v|, \quad \forall u, v \in V.$$

Demonstração:
Vimos, acima, que

$$|u+v|^2 = |u|^2 + 2re(\langle u, v\rangle) + |v|^2.$$

Como $re(z) \leq |z|, \ \forall z \in \mathbb{C}$, temos que

$$|u+v|^2 \leq |u|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + |v|^2 \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2.$$

Portanto, temos que

$$|u+v|^2 \leq (|u| + |v|)^2,$$

donde segue que

$$|u+v| \leq |u| + |v|.$$

$\square$

Exercícios

1. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.
   (a) Mostre que $\langle \vec{0}, v\rangle = 0$, para todo $v \in V$.
   (b) Mostre que se $\langle u, v\rangle = 0$, para todo $v \in V$, então, $u = \vec{0}$.

2. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial. Mostre que a soma de dois produtos internos sobre V é um produto interno sobre V. A diferença de dois produtos internos é um produto interno? Mostre que um múltiplo positivo de um produto interno é um produto interno.

3. Verifique que o produto interno canônico sobre $\mathbb{K}^n$ é um produto interno.

4. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno canônico sobre $\mathbb{R}^2$.
   (a) Sejam $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$. Se w é um vetor, tal que $\langle w, u\rangle = -1$ e $\langle w, v\rangle = 3$, determine w.
   (b) Mostre que qualquer vetor w em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $w = \langle w, e_1\rangle + \langle w, e_2\rangle$, onde $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$.

5. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno canônico sobre $\mathbb{R}^2$, e seja T o operador linear $T(x, y) = (-y, x)$. Mostre que T é uma rotação de 90º, e que $\langle T(v), v\rangle = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

6. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno canônico sobre $\mathbb{C}^2$. Prove que não existe um operador linear não nulo sobre $\mathbb{C}^2$, tal que $\langle T(v), v\rangle = 0$, para todo $v \in \mathbb{C}^2$.

7. Seja A uma matriz 2×2 com entradas reais. Para X e Y em $\mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, seja
   $$f_A(X, Y) = Y^T AX.$$
   Mostre que f_A é um produto interno sobre $\mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, se, e somente se, $A = A^T$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ e $\det A > 0$.

8. Seja V um espaço vetorial real ou complexo, com produto interno. Mostre que vale a lei do paralelogramo
   $$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

9. Seja V um espaço vetorial complexo. Uma função J de V em V é chamada uma conjugação, se satisfaz as três seguintes propriedades:

   i) $J(u+v) = J(u) + J(v)$

   ii) $J(cv) = \bar{c}J(v)$

   iii) $J(J(v)) = v$,

   para todos $u, v \in V$ e $c \in \mathbb{C}$. Se J é uma conjugação, mostre que

   (a) O conjunto $W = \{w \in V \mid J(w) = w\}$ é um subespaço vetorial de V sobre $\mathbb{R}$.

   (b) Para cada $v \in V$ existem únicos vetores $w_1, w_2 \in V$, tais que $v = w_1 + iw_2$, onde $i = \sqrt{-1}$.

10. Seja V um espaço vetorial complexo, e seja W um subconjunto de V com as seguintes propriedades:

    i) W é um subespaço real de V.

    ii) Para cada $v \in V$ existem únicos vetores $w_1, w_2 \in W$, tais que $v = w_1 + iw_2$.

    Mostre que a equação $J(v) = w_1 - iw_2$ define uma conjugação sobre V, tal que $J(v) = v$, se, e somente se, $v \in W$. Mostre também que J é a única conjugação sobre V com essa propriedade.

11. Determine todas as conjugações sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{C}^2$.

12. Seja W um subespaço real de dimensão finita de um espaço vetorial complexo V. Mostre que W satisfaz a condição *ii*) do exercício 11, se, e somente se, qualquer base de W é também uma base de V.

Aula 2 - Ortogonalidade

Objetivos

1. Explicitar o conceito de ortogonalidade num espaço vetorial como produto interno.
2. Verificar se um conjunto de vetores num espaço vetorial é ortogonal.
3. Explicitar os conceitos de bases ortogonais e bases ortonormais.
4. Verificar se um conjunto de vetores num espaço vetorial é uma base ortonormal
5. Provar várias propriedades relacionadas com o conceito de ortogonalidade.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, e sejam $u, v \in V$. Dizemos que u e v são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$. Um subconjunto $\mathcal{O}$ de V é chamado de **ortogonal**, se os seus elementos são ortogonais dois a dois. Dizemos que $\mathcal{O}$ é um conjunto **ortonormal**, se for um conjunto ortogonal no qual $|u| = 1,\ \forall u \in \mathcal{O}$.

Observe que o vetor nulo $\vec{0} \in V$ é ortogonal a todos os elementos de V, pois $\langle\vec{0}, v\rangle = 0,\ \forall v \in V$. Além disso, o vetor nulo é o único vetor com essa propriedade.

Exemplos

1) Seja $\mathbb{K}^n$ o $\mathbb{K}-$espaço vetorial com o produto interno canônico

$$\langle(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Então, a base canônica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$, onde

$$e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{posição j}}, 0, \ldots, 0),$$

para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é um conjunto ortonormal de vetores com relação ao produto interno canônico $\langle\ ,\ \rangle$, pois

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

2) Seja $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes 2×2, com entradas complexas. Considere V como um $\mathbb{R}-$espaço vetorial, e seja

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(\overline{B}^T A), \tag{25}$$

o produto interno canônico em V. Então, a base

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. E_5 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

não é ortogonal em relação ao produto interno (25), pois os vetores E_3 e E_7, por exemplo, não são ortogonais. De fato,

$$\begin{aligned} \langle E_3, E_7\rangle &= \mathrm{tr}(\overline{E_7}^T E_3) \\ &= \mathrm{tr}\left(\overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= -i + 0 \\ &= -i \neq 0. \end{aligned}$$

Teorema 9 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e seja $\mathcal{O}$ um subconjunto ortogonal de V, formado por vetores não nulos.*

1) *Se um vetor v pertence ao espaço gerado por $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathcal{O}$, isto é, se $v \in [v_1, \ldots, v_n]$, com $v_i \in \mathcal{O}, \forall i = 1, \ldots, n$, então,*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{|v_i|^2} v_i.$$

2) *$\mathcal{O}$ é linearmente independente.*

Demonstração:
1) Seja $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$, com $c_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Então, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal, temos, para $j = 1, \ldots, n$, que

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle v_i, v_j \rangle = c_j \langle v_j, v_j \rangle.$$

Portanto,

$$c_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{|v_j|^2}, \ \forall j = 1, \ldots, n \ \text{ e } v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{|v_i|^2} v_i.$$

2) Suponha que existam escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ e vetores não nulos $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{O}$, tais que

$$\vec{0} = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

De maneira análoga à realizada no item 1), segue que

$$c_i = \frac{\langle \vec{0}, v_i \rangle}{|v_i|^2} = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n$$

e, portanto, $\mathcal{O}$ é L.I.

$\square$

Corolário 9.1 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno, e seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Então, para $v \in V$, temos*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Exercícios

1. Seja V um espaço vetorial com produto interno, sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

   (a) Sejam $u, v \in V$. Mostre que, se $u \perp v$, então, $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$.

   (b) Suponha que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e sejam $u, v \in V$. Se $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$, mostre que u e v são ortogonais.

   (c) Mostre que o item (b) é falso, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   (d) Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostre que $u, v \in V$ são ortogonais, se, e somente se,

   $$|\alpha u + \beta v|^2 = |\alpha u|^2 + |\beta v|^2,$$

   para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

2. Quais, dentre os seguintes conjuntos de vetores, são ortogonais?

   (a) $(1, -1, 2), \ (0, 2, -1), \ (-1, 1, 1)$.

   (b) $(1, 2, -1, 1), \ (0, -1, -2, 0), \ (1, 0, 0, -1)$.

   (c) $(0, 1, 0, -1), \ (1, 0, 1, 1), \ (-1, 1, -1, 2)$.

3. Considere a base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, de $\mathbb{R}^3$, onde

   $$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \ u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \ u_3 = (0, 1, 0).$$

   Dado um vetor $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, escreva v como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$.

4. Mostre que um conjunto ortonormal de n vetores em $\mathbb{R}^n$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

5. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Sejam $v, v_1, \ldots, v_n$ vetores em V. Mostre que, se v for ortogonal aos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, então, v é ortogonal a todos os vetores do espaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

6. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, e seja $v_0 \in V$ um vetor fixo. Prove que o conjunto W de todos os vetores de V, que são ortogonais a v_0, é um subespaço vetorial de V.

Aula 3 - O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Objetivos

1. Aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para se obter uma base ortonormal de um espaço vetorial com produto interno.
2. Obter uma base ortonomal de um espaço vetorial com produto interno, contendo uma determinada base.

Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Seja $\mathcal{O}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de V linearmente independente. Vamos construir um outro conjunto, $\mathcal{O} = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset V$, que seja ortogonal e tal que os subespaços gerados por $\mathcal{O}$ e por $\mathcal{O}'$ sejam os mesmos. Essa construção é feita, indutivamente, como segue:

Faça $w_1 = v_1$.

Faça $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{|w_1|^2} w_1$.

Para cada $k \in \{3, \ldots, n\}$, defina

$$w_k = v_k - \frac{\langle v_k, w_1\rangle}{|w_1|^2} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_k, w_{k-1}\rangle}{|w_{k-1}|^2} w_{k-1} = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j\rangle}{|w_j|^2} w_j.$$

Não é difícil ver que o conjunto $\{w_1, \ldots, w_n\}$ definido, acima, é ortogonal e, em particular, linearmente independente. Observe que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$w_i \in W = [v_1, \ldots, v_n].$$

Como $\dim_{\mathbb{K}} W = n$, segue que $\mathcal{O} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ é uma base de W, o que mostra a igualdade dos subespaços gerados por $\mathcal{O}$ e por $\mathcal{O}'$.

Teorema 10 *Todo espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno possui uma base ortonormal.*

Demonstração:
Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, e seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos encontrar um conjunto ortogonal $\mathcal{O} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, que gera V. Como todo conjunto ortogonal é linearmente independente, segue que $\mathcal{O}$ é uma base ortogonal de V. Por fim, $\left\{\dfrac{w_1}{|w_1|}, \ldots, \dfrac{w_n}{|w_n|}\right\}$ é uma base ortonormal de V.

$\square$

Exercícios

1. Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal, para o subespaço de $\mathbb{R}^2$ com base $\mathcal{B} = \{(1,-1,0),\ (2,0,1)\}$.

2. Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal, para o subespaço de $\mathbb{R}^4$, com base $\{(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(3,1,0,0)\}$.

3. Considere $V = \mathbb{C}^3$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com o produto interno canônico. Seja $S = [(1+i, 3i, 2-i),\ (2-3i, 10+2i, 5-i)] \subset V$. Determine uma base ortogonal para S, usando o processo de Gram-Schmidt.

4. Considere o $\mathbb{C}-$espaço vetorial $\mathbb{C}^2$, com o produto interno canônico. Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,i),\ (i,1)\}$ de $\mathbb{C}^2$. Determine uma base ortonormal de $\mathbb{C}^2$, a partir de $\mathcal{B}$.

Aula 4 - Subespaço Ortogonal

Objetivos

1. Explicitar o conceito de subespaço ortogonal de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V com produto interno.
2. Determinar o subespaço ortogonal $W^{\perp}$ de um subconjunto W de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V.
3. Determinar uma base ortonormal de um subespaço ortogonal.
4. Determinar uma base ortogonal de um subespaço vetorial e de seu complemento ortogonal.

Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno, e seja $S \subset V$ um subconjunto de V. Chamamos de conjunto ortogonal a S ao conjunto

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0, \ \forall u \in S\}.$$

Proposição 9 *Seja S um subconjunto não vazio de um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V com produto interno. Então,*

(a) O conjunto $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V, mesmo que S não seja um espaço vetorial.

(b) Se $S = \{\vec{0}\}$, então, $S^{\perp} = V$.

(c) Se S contiver uma base de V, então, $S^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

Demonstração: a) $\vec{0} \in S^{\perp}$, pois $\langle \vec{0}, v \rangle = 0, \ \forall v \in V$.

Se $v_1, v_2 \in S^{\perp}$, então, $\langle v_1, u \rangle = \langle v_2, u \rangle = 0, \ \forall u \in S$. Portanto, temos que

$$\langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle = 0, \ \forall u \in S,$$

donde segue que $v_1 + v_2 \in S^{\perp}$.

Se $c \in \mathbb{K}$ e $v \in S^{\perp}$, temos que $\langle cv, u \rangle = c\langle v, u \rangle = c0 = 0, \ \forall u \in S$ e, portanto, $cv \in S^{\perp}$.

Consequentemente, $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V.

b) Se $S = \{\vec{0}\}$, temos que $\langle \vec{0}, v \rangle = 0, \ \forall v \in V$, donde segue que $V \subset S^{\perp}$. Como $S^{\perp}$ é um subconjunto de V, segue que $S^{\perp} = V$.

c) Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset S$ uma base ortonormal de V que está contida em S. Dado $v \in S^{\perp}$, temos que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Como $v_i \in S, \ \forall i = 1, \ldots, n$, temos que $\langle v, v_i \rangle = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$. Donde segue que $v = \vec{0}$ e, portanto, $S^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

$\square$

Proposição 10 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial munido de um produto interno. Sejam $W \subset V$ um subespaço e $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_k\}$ um conjunto gerador de W. Então, $w \in W^{\perp}$, se, e somente se, $\langle w, w_i \rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Demonstração: Seja $w \in W$. Então, existem escalares $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$, tais que $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i w_i$, donde segue que $\langle v, w \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \overline{c_i} \langle v, w_i \rangle$.

Se $v \in W^{\perp}$, temos que $\langle v, w_i \rangle = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$, pois $w_i \in W$, $\forall i$.

Reciprocamente, se $\langle v, w_i \rangle = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$, temos que $\langle v, w \rangle = 0$, o que implica que $v \in W^{\perp}$.

$\square$

Proposição 11 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e com produto interno, e seja $W \subset V$ um subespaço de V. Então, $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Demonstração:

a) Vamos mostrar que $V = W + W^{\perp}$. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ uma base ortonormal de W, e seja
$$\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n\} \subset V$$
uma base ortonormal de V, que contém $\mathcal{B}$. Dado $v \in V$, temos que
$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle v, w_i \rangle w_i + \sum_{i=m+1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i \\ &= w + u. \end{aligned}$$
Observe que $w \in W$. Vamos mostrar que $u \in W^{\perp}$. De fato,
$$\langle u, w_j \rangle = \sum_{i=m+1}^{n} \langle v, w_i \rangle \langle w_i, w_j \rangle = 0, \text{ para todo } j = 1, \ldots, m.$$
Como u é ortogonal a todos os vetores da base de W, segue que u é ortogonal a qualquer vetor de W e, portanto, $u \in W^{\perp}$. Logo, $v = w + u$, onde $w \in W$ e $u \in W^{\perp}$.

b) Vamos mostrar que $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$. Seja $u \in W \cap W^{\perp}$. Então, $\langle u, w \rangle = 0$, $\forall\, w \in W$. Mas $u \in W$. Logo, temos que $\langle u, u \rangle = 0$ e, portanto, $u = \vec{0}$.

$\square$

Exercícios

1. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno canônico. Determine uma base ortogonal para o subconjunto $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z + w = 0\}$ e uma base ortogonal para o conjunto $S^\perp$.

2. Considere o $\mathbb{R}-$espaço vetorial $V = \mathbb{R}_3[x]$, dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3, com o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad \forall\ f, g \in V.$$

   Ache uma base ortonormal de $S^\perp$, onde S é o subespaço gerado por $\{5,\ 1 + x\}$.

3. Considere o $\mathbb{R}-$espaço vetorial $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, com o produto interno

$$\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

   onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Seja W o subespaço de V, dado por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}.$$

   (a) Determine uma base ortogonal de W.

   (b) Determine uma base de $W^\perp$.

4. Seja W um subespaço de um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V, com produto interno. Se V for de dimensão finita, prove que $(W^\perp)^\perp = W$.

5. Seja $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ o $\mathbb{R}-$espaço vetorial das funções reais contínuas, definidas no intervalo $[-1, 1]$, com o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

   Seja $W \subset V$ formado por todas as funções ímpares, isto é,

$$W = \{f \in V \mid f(-x) = -f(x),\ \forall x \in [-1, 1]\}.$$

   Determine $W^\perp$.

Aula 5 - Projeção Ortogonal

Objetivos

1. Explicitar o conceito de projeção ortogonal de um vetor sobre um subespaço de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V com produto interno.

2. Determinar a projeção ortogonal de um vetor sobre um $\mathbb{K}$-subespaço de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V.

3. Usar a propriedade de "menor distância", para aproximar um vetor de um subespaço vetorial.

O conceito de ortogonalidade pode ser usado para aproximar elementos de um espaço vetorial de outros em um dado subespaço.

Proposição 12 *Sejam V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e W um subespaço de V de dimensão finita. Então, dado $v \in V$, existe um único $w \in W$, tal que $v - w \in W^{\perp}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base ortogonal do subespaço W. Dado $v \in V$, considere o vetor

$$w = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{|w_1|^2} \cdot w_1 + \cdots + \frac{\langle v, w_n \rangle}{|w_n|^2} \cdot w_n.$$

É claro que $w \in W$ e não é difícil provar que $\langle v - w, w_i \rangle = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$. Assim, segue, da proposição 10, que $v - w \in W^{\perp}$.

Suponha, agora, que existam $w, w' \in W$, tais que $v - w, v - w' \in W^{\perp}$. Então,

$$\langle w - w', w - w' \rangle = \langle w - w', w - w' + v - v \rangle = \langle w - w', w - v \rangle + \langle w - w', v - w' \rangle = 0,$$

pois $w - w' \in W$ e $w - v, v - w' \in W^{\perp}$. Consequentemente, $w - w' = \vec{0}$ e, portanto, para cada $v \in V$, existe um único vetor $w \in W$ tal que $v - w \in W^{\perp}$.

$\square$

O vetor w nas condições da proposição anterior é chamado de projeção ortogonal de v sobre W e é denotado por $w = proj_W v$.

Observação

Observe que a proposição 12 indica que, para subespaços de dimensão finita W, cada $v \in V$ admite uma única projeção ortogonal de v sobre W. Além disso, se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ for uma base ortogonal de W, então, tal projeção é dada por

$$proj_W v = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{|w_1|^2} \cdot w_1 + \cdots + \frac{\langle v, w_n \rangle}{|w_n|^2} \cdot w_n.$$

Proposição 13 *Sejam V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno, W um subespaço de V e $v \in V$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) Existe $w_0 \in W$, tal que $v - w_0 \in W^{\perp}$.

b) Existe $w_0 \in W$, tal que $|v - w_0| < |v - w|$, $\forall w \in W$, com $w \neq w_0$.

Demonstração:

$a) \Rightarrow b)$

Seja $w_0 \in W$, tal que $v - w_0 \in W^{\perp}$. Para cada $w \in W$, temos que $w - w_0 \in W$ e, consequentemente, $v - w_0 \perp w - w_0$. Agora, temos que

$$|v - w|^2 = |v - w_0 + w_0 - w|^2 = |v - w_0|^2 + |w - w_0|^2$$

e, assim, para $w \in W$, $w \neq w_0$, temos que $|v-w|^2 > |v-w_0|^2$ e, portanto, $|v-w| > |v-w_0|$, para todo $w \in W$, $w \neq w_0$.

$b) \Rightarrow a)$

Seja $w_0 \in W$, tal que

$$|v - w_0| < |v - w|, \quad \forall w \in W, \; w \neq w_0. \tag{26}$$

Suponha, por absurdo, que $v - w_0 \notin W^{\perp}$, ou seja, existe $w_1 \in W$, tal que $\langle v - w_0, w_1 \rangle \neq 0$. Observe que $w_1 \neq \vec{0}$ e considere W' o subespaço gerado por $\{w_0, w_1\}$. Então, $W' \subset W$ e a dimensão de W' é igual a 1 ou 2. Assim, W' tem dimensão finita e, pela proposição 12, existe $proj_{W'} v = w_0'$. Logo, $v - w_0' \in (W')^{\perp}$ e, consequentemente, $|v - w_0'| < |v - w'|$, para todo $w' \in W'$, $w' \neq w_0'$.

Observe que $w_0' \neq w_0$, já que $\langle v - w_0, w_1 \rangle \neq 0$ e $\langle v - w_0', w_1 \rangle = 0$, pois $w_1 \in W'$ e $v - w_0' \in (W')^{\perp}$. Portanto,

$$|v - w_0'| < |v - w_0|. \tag{27}$$

Daí, concluímos, usando as inequações (26) e (27), que

$$|v - w_0| < |v - w_0'| < |v - w_0|,$$

o que é uma contradição.

□

A proposição 13 garante, em particular, que a $proj_W v$, quando existe, é a melhor aproximação de v por um vetor de W e vice-versa. Quando a dimensão de W for finita, o problema de determinar a projeção ortogonal de um vetor v sobre W é equivalente a determinar um vetor de W que melhor se aproxima de v.

Exemplo

Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canônico. Sejam $v = (3, 0, 2)$ e $W = [w_1, w_2]$, onde $w_1 = (1, 0, -2)$ e $w_2 = (1, 1, 1)$. Isto é, W é o subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado pelos vetores w_1 e w_2. Como os vetores w_1, w_2 são linearmente independentes, segue que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de W. Vamos usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para determinar uma base ortogonal $\{v_1, v_2\}$ de W.

Faça $v_1 = w_1$.

Faça $v_2 = w_2 - \dfrac{\langle w_2, v_1\rangle}{|v_1|^2} v_1$. Portanto, temos que

$$v_2 = (1, 1, 1) - \frac{-1}{5}(1, 0, -2) = (1, 1, 1) + (\frac{1}{5}, 0, \frac{-2}{5}) = (\frac{6}{5}, 1, \frac{3}{5}).$$

Considere $v_2 = (6, 5, 3)$, que também é ortogonal a $v_1 = (1, 0, -2)$. Desse modo, temos que

$$proj_W v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{|v_1|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{|v_2|^2} v_2 = \frac{-1}{5}(1, 0, -2) + \frac{24}{70}(6, 5, 3) = \frac{1}{7}(13, 12, 10).$$

Exercícios

1. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^4$, gerado pelos três vetores ortogonais $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0, -1)$ e $u_3 = (0, 0, 1, 0)$. Determine a projeção ortogonal do vetor $v = (x, y, z, w)$ sobre S.

2. Seja $V = \mathbb{R}[x]$ o $\mathbb{R}-$espaço vetorial de todos os polinômios na indeterminada x, com coeficientes sobre $\mathbb{R}$. Considere, em V, o seguinte produto interno:
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt,\ \ f(x), g(x) \in V.$$
   (a) Considere o subespaço S de $\mathbb{R}[x]$ gerado pelos polinômios $p_1(x) = -x + 1$ e $p_2(x) = x^2 - 2x + 1$. Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base ortogonal de S.
   (b) Determine a projeção ortogonal do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ sobre o subespaço S do item (a).

3. Considere o $\mathbb{R}-$espaço vetorial $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, munido do produto interno
$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{2\pi} f(t)g(t)dt, \quad \text{para} \quad f, g \in V.$$
Determine a função de $W = [1,\ \text{sen}t,\ \cos t]$ que melhor se aproxima de $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t - 1$.

4. Determine a projeção ortogonal do vetor $v = (1, 1, 1, 1)$ sobre o subespaço de $\mathbb{R}^4$, gerado pelos vetores $u_1 = (1, 2, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2, 1)$ e $u_3 = (2, 1, 1, 0)$.

5. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$, com base ortonormal $\{u_1, u_2\}$, onde $u_1 = (0, 1, 0)$ e $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e seja $u = (1, 2, -1)$.
   (a) Escreva u na forma $w + v$, onde $w \in W$ e $v \in W^{\perp}$.
   (b) Determine a distância de u a W.
   (c) Determine o vetor de W que melhor se aproxima de u.

unidade 4

OPERADORES LINEARES

Objetivos

1. Explicitar o conceito de diagonalização de operadores lineares. Verificar quando um determinado operador linear é diagonalizável, bem como diagonalizá-lo.
2. Explicitar o conceito de operador adjunto. Determinar o adjunto de um operador linear.
3. Verificar quando um operador linear é autoadjunto.
4. Explicitar o conceito de operador unitário e suas propriedades. Verificar quando um determinado operador linear é unitário.
5. Explicitar o conceito de operador normal e suas propriedades. Verificar quando um determinado operador linear é normal.

Introdução

Nesta unidade, você irá estudar operadores lineares T sobre um espaço vetorial de dimensão finita V. Você deverá responder à seguinte pergunta:

Existe uma base de V na qual a matriz de T assume uma forma mais simples?

Talvez, as matrizes mais simples de se trabalhar sejam as matrizes diagonais:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Se existir uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V, na qual T é representado por uma matriz diagonal D, podemos obter informações consideráveis a respeito de T. Por exemplo, números simples associados a T, como o posto de T ou o determinante de T, poderiam ser determinados com um pequeno olhar na matriz D. Podemos descrever explicitamente o conjunto imagem e o núcleo de T. Uma vez que $[T]_{\mathcal{B}} = D$, se, e somente se,

$$T(v_j) = \lambda_j v_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

o conjunto $Im(T)$ imagem de T é o subespaço de V, gerado por todos os v_j's, para os quais $\lambda_j \neq 0$, e o núcleo $N(T)$ de T é o subespaço de V gerado pelos v_j's restantes.

Será que todo operador linear T pode ser representado por uma matriz diagonal em alguma base de V? Se não, para quais operadores T uma tal base existe? Como podemos determinar uma tal base, se ela existe? Essas são algumas das questões que vamos atacar nesta unidade.

Observação:

Em toda a UNIDADE IV, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e V é um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, com produto interno $\langle , \rangle$.

Aula 1 - Diagonalização de Operadores Lineares

Objetivos

1. Explicitar o conceito de diagonalização de um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita.
2. Explicitar os conceitos de autovalor, autovetor e polinômio característico de um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita.
3. Determinar o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita.
4. Verificar se um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita é diagonalizável.
5. Determinar o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de uma matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}\mathbb{K})$.
6. Provar propriedades relacionadas com o conceito de diagonalização de operadores lineares.

Um operador linear sobre V é uma transformação linear $T : V \to V$, isto é, é uma transformação linear que tem domínio e contradomínio iguais a V. Nesta aula, estudamos condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja diagonalizável.

Definição 11 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $T : V \to V$ um operador linear sobre V.*

a) Dizemos que T é diagonalizável, se ele pode ser representado por uma matriz diagonal D, isto é, se existe uma base $\mathcal{B}$ de V, tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K},\ \forall i = 1, \ldots, n$.

b) Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor de T, se existe um vetor não nulo $v \in V$, tal que $T(v) = \lambda v$. O vetor v é chamado de autovetor de T associado ao autovalor λ.

c) Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T, denotamos por $E_\lambda(T)$ o conjunto de todos os autovetores associados a λ, juntamente com o vetor nulo. Isto é,

$$E_\lambda(T) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} \cup \{\vec{0}\}.$$

O conjunto $E_\lambda(T)$ é chamado autoespaço de T de autovalor λ.

Polinômio Característico

Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, e seja $T : V \to V$ um operador linear sobre V. Dada uma base $\mathcal{B}$ de V, considere a matriz $[xId - T]_{\mathcal{B}}$ do operador $xId - T$ em relação a $\mathcal{B}$, onde Id é o operador identidade em V e $x \in \mathbb{K}$. Se denotarmos por I a matriz identidade de ordem n, teremos que

$$[xId - T]_{\mathcal{B}} = xI - [T]_{\mathcal{B}}.$$

Sabemos que, para qualquer outra base $\mathcal{C}$ de V, as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$ são semelhantes, isto é, existe uma matriz invertível P, tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P. \tag{28}$$

Considere o polinômio $\det[xId - T]_{\mathcal{B}}$. Então, pela equação (28), temos que

$$\begin{aligned}
\det[xId - T]_{\mathcal{B}} &= \det(xI - [T]_{\mathcal{B}}) \\
&= \det(P^{-1}xIP - P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P) \\
&= \det(P^{-1}(xI - [T]_{\mathcal{C}})P) \\
&= \det(P^{-1})\det(xI - [T]_{\mathcal{C}})\det(P) \\
&= \det(xI - [T]_{\mathcal{C}}) \\
&= \det[xId - T]_{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que o polinômio, acima, é um invariante de T, não dependendo da base $\mathcal{B}$ escolhida. Esse polinômio é chamado de polinômio característico de T e denotado por $p_T(x) = \det(xI - [T]_{\mathcal{B}})$. Observe que o polinômio característico de T é um polinômio mônico de grau n, isto é,

$$p_T(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

onde $a_i \in \mathbb{K}, \forall i = 0, \ldots, n-1$.

Teorema 11 *Sejam T um operador linear num espaço vetorial V de dimensão $n \geq 1$, e $\mathcal{B}$ uma base de V. Então,*

a) Os autovalores de T consistem de todos os escalares $\lambda \in \mathbb{K}$, que são raízes do polinômio característico de T.

b) Para um dado autovalor λ de T, temos que $E_\lambda(T) = N(\lambda Id - T)$. Em particular, o autoespaço $E_\lambda(T)$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração:

a) Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor de T, se, e somente se, $N(\lambda Id - T) \neq \{\vec{0}\}$. Isso equivale a dizer que λ é autovalor de T, se, e somente se, $\det(\lambda I - [T]_\mathcal{B}) = 0$. Portanto, λ é autovalor de T, se, e somente, se é raiz do polinômio característico de T.

b) Dado $v \in E_\lambda(T)$, com $v \neq \vec{0}$, temos que $T(v) = \lambda v$, isto é, $(\lambda Id - T)(v) = \vec{0}$. Isso significa que $v \in N(\lambda Id - T)$. Como o vetor nulo pertence ao núcleo do operador $(\lambda Id - T)$, segue que $E_\lambda(T) \subset N(\lambda Id - T)$.

Reciprocamente, se v é um vetor não nulo, tal que $v \in N(\lambda Id - T)$, temos que $T(v) = \lambda v$, o que implica que $v \in E_\lambda(T)$. Como $\vec{0} \in E_\lambda(T)$, temos que $N(\lambda Id - T) \subset E_\lambda(T)$ e, portanto, $E_\lambda(T) = N(\lambda Id - T)$.

□

Observação

É claro que existem operadores lineares que não possuem autovalores. Considere, por exemplo, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Então, $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de T, se, e somente se, existir um vetor não nulo $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $T(v) = \lambda v$. Isto é, devemos ter $(-y, x) = (\lambda x, \lambda y)$, o que nos dá o seguinte sistema na variável λ:

$$\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, vemos que $\lambda^2 + 1 = 0$. Porém, essa última equação não tem solução em $\mathbb{R}$. Logo, T não tem autovalor.

No seguinte teorema, temos condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja diagonalizável.

Teorema 12 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita, e seja T um operador linear sobre V. Então, T é diagonalizável, se, e somente se, existe uma base $\mathcal{B}$ de V que consiste de autovetores de T. Nesse caso, a matriz de T com relação à base $\mathcal{B}$ é diagonal e os seus elementos diagonais são os autovalores correspondentes.*

Demonstração:
Suponha que T é diagonalizável. Então, existe uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Então, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$T(v_i) = \lambda_i v_i,$$

o que implica que cada vetor v_i da base $\mathcal{B}$ é autovetor de T, associado ao autovalor λ_i.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V formada por autovetores de T, com respectivos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Então,

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \ \forall i = 1, \ldots, n,$$

o que implica que $[T]_{\mathcal{B}} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

$\square$

Exercícios

1. Em cada um dos seguintes casos, seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^2$, que é representado pela matriz A na base canônica de $\mathbb{R}^2$, e seja S o operador linear sobre $\mathbb{C}^2$, que é representado pela matriz A na base canônica de $\mathbb{C}^2$. Determine os polinômios característicos de T e de S, determine os autovalores de cada operador e, para cada autovalor, determine uma base para o autoespaço correspondente.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita n. Qual é o polinômio característico do operador identidade I sobre V? Qual é o polinômio característico do operador nulo sobre V?

3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   uma matriz $n \times n$ triangular superior, com $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $\forall i, j$. Prove que os autovalores de A são os elementos da diagonal de A, isto é, os escalares a_{ii}, para $i = 1, \dots, n$.

4. Seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ que é representado, na base canônica, pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Prove que T é diagonalizável, exibindo uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

5. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$
A é semelhante, sobre o corpo $\mathbb{R}$, a uma matriz diagonal? Isto é, existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal? A é semelhante, sobre o corpo $\mathbb{C}$, a uma matriz diagonal? Isto é, existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal?

6. Seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^4$, que é representado, na base canônica, pela matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$
Quais condições devem ser satisfeitas pelos escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$, para que T seja diagonalizável?

7. Seja T um operador linear sobre um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V de dimensão finita n. Suponha que T tem n autovalores distintos. Prove que T é diagonalizável.

8. Sejam A e B matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$. Prove que se $(I - AB)$ é invertível, então, $(I - BA)$ é invertível e
$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

9. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, sobre o corpo $\mathbb{K}$.
   a) Mostre que $0 \in \mathbb{K}$ é autovalor de A, se, e somente se, A não é invertível.
   b) Mostre que AB e BA têm os mesmos autovalores.
   c) Suponha que A é invertível, e seja $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de A. Mostre que λ^{-1} é um autovalor de A^{-1}.
   d) Mostre que A e sua transposta A^T têm o mesmo polinômio característico.

10. Seja A uma matriz 2×2, com entradas reais, que é simétrica (isto é, $A^T = A$). Prove que A é semelhante a uma matriz diagonal.

Aula 2 - Operadores Adjuntos

Objetivos

1. Explicitar o conceito de operador adjunto sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno.
2. Explicitar a relação entre operador adjunto e produto interno num espaço vetorial.
3. Determinar o adjunto de um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno.
4. Explicitar a relação existente entre a matriz de um operador linear e a matriz de seu adjunto, em relação a uma base ortonormal do espaço.
5. Determinar a matriz do adjunto de um operador linear em relação a uma base do espaço.
6. Provar propriedades relacionadas com o conceito de operador adjunto.

Nesta aula, você verá que todo operador linear $T \in L(V, V)$, num $\mathbb{K}-$espaço vetorial V de dimensão finita e com produto interno, possui um adjunto, isto é, existe um único operador linear $T^* \in L(V, V)$, tal que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle,$$

para todo $u, v \in V$.

O adjunto T^* está intimamente relacionado com um tipo especial de funcionais lineares em V. Por isso, é necessário falar um pouco sobre funcionais lineares.

Um funcional linear sobre V é uma transformação linear $f : V \to \mathbb{K}$. Seja $V^* = \{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ é funcional linear } \}$ o conjunto de todos os funcionais lineares em V. Dados $f, g \in V^*$ e $c \in \mathbb{K}$, defina os funcionais lineares $(f+g), (cf) : V \to \mathbb{K}$, como

$$\begin{aligned}(f+g)(v) &= f(v) + g(v)\\ (cf)(v) &= cf(v),\end{aligned}$$

para todo $v \in V$. Então, é fácil mostrar que V^*, munido dessas duas operações, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. O espaço V^* é chamado de espaço dual a V.

Definição 12 *Sejam V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e $v_0 \in V$. A partir de v_0, podemos definir um funcional linear $f_{v_0} : V \to \mathbb{K}$, como segue:*

$$f_{v_0}(v) = \langle v, v_0 \rangle, \ \forall v \in V.$$

A linearidade de f_{v_0} é garantida pelas propriedades do produto interno.

Pergunta: Vale a recíproca? Isto é, dado um funcional linear $f \in V^*$, existe um vetor $v_0 \in V$, tal que $f = f_{v_0}$?

A seguinte proposição mostra que a resposta a essa pergunta é sim.

Proposição 14 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita $n \geq 1$. Se $f \in V^*$ é um funcional linear sobre V, então, existe um único $v_0 \in V$, tal que $f(v) = \langle v, v_0 \rangle$, para todo $v \in V$.*

Demonstração: Considere uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, e seja

$$v_0 = \sum_{j=1}^{n} \overline{f(v_j)} v_j.$$

Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$f_{v_0}(v_k) = \langle v_k, v_0 \rangle = \langle v_k, \sum_{j=1}^{n} \overline{f(v_j)} v_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{f(v_j)}} \langle v_k, v_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} f(v_j) \langle v_k, v_j \rangle.$$

Como $\langle v_k, v_j \rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}$, temos que $\sum_{j=1}^{n} f(v_j) \langle v_k, v_j \rangle = f(v_k)$, donde segue que $f_{v_0}(v_k) = f(v_k), \ \forall k = 1, \ldots, n.$

Como f e f_{v_0} coincidem nos elementos de uma base, segue que $f = f_{v_0}$, como queríamos.

Unicidade:

Sejam $v_1, v_2 \in V$, tais que $f = f_{v_1} = f_{v_2}$. Então, $\langle v, v_1 \rangle = \langle v, v_2 \rangle, \ \forall v \in V$. Desse modo, $\langle v, v_1 - v_2 \rangle = 0, \ \forall v \in V$, donde segue que $v_1 - v_2 = \vec{0}$. Portanto, $v_1 = v_2$ e a unicidade está provada.

$\square$

Teorema 13 *Sejam V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita, e $T : V \to V$ um operador linear sobre V. Então, existe um único operador linear $T^* : V \to V$, tal que*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle,$$

para quaisquer $u, v \in V$.

Demonstração: Dado um vetor $\hat{v} \in V$, considere a função $f : V \to \mathbb{K}$, dada por $f(v) = \langle T(v), \hat{v}\rangle$, $\forall v \in V$. Observe que f é linear, pois dados $v_1, v_2 \in V$ e $c \in \mathbb{K}$, temos que

$f(v_1 + cv_2) = \langle T(v_1 + cv_2), \hat{v}\rangle = \langle T(v_1) + cT(v_2), \hat{v}\rangle = \langle T(v_1), \hat{v}\rangle + c\langle T(v_2), \hat{v}\rangle = f(v_1) + cf(v_2)$.

Pela proposição 14, sabemos que existe um único $v_0 \in V$, tal que $f(v) = \langle v, v_0\rangle$, $\forall v \in V$, isto é, tal que $\langle T(v), \hat{v}\rangle = \langle v, v_0\rangle$, $\forall v \in V$. Como v_0 é determinado de modo único por $\hat{v}$, definimos $T^*(\hat{v}) = v_0$. Então, temos que

$$\langle T(v), \hat{v}\rangle = \langle v, T^*(\hat{v})\rangle, \ \forall\ v\ \in V.$$

Como o vetor $\hat{v}$ é arbitrário, segue que

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle, \ \forall\ v, w \in V.$$

Afirmação: T^* é linear.

De fato, dados $u, v_1, v_2 \in V$ e $c \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} \langle u, T^*(v_1 + cv_2)\rangle &= \langle T(u), v_1 + cv_2\rangle \\ &= \langle T(u), v_1\rangle + \overline{c}\langle T(u), v_2\rangle \\ &= \langle u, T^*(v_1)\rangle + \overline{c}\langle u, T^*(v_2)\rangle \\ &= \langle u, T^*(v_1) + cT^*(v_2)\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle u, T^*(v_1 + cv_2) - T^*(v_1) - cT^*(v_2)\rangle = 0$, $\forall u \in V$, o que implica que

$$T^*(v_1 + cv_2) = T^*(v_1) + cT^*(v_2).$$

□

Definição 13 *O operador linear T^* dado no teorema anterior é chamado de adjunto de T.*

Exemplo

Considere no $\mathbb{C}-$espaço vetorial $V = \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ o produto interno dado por

$$\langle A, B\rangle = tr(B^* A),$$

onde $B^* = \overline{B}^T$.

Dada uma matriz $M \in V$, defina o operador linear $T_M : V \to V$, por

$$T_M(A) = MA.$$

Queremos descrever o operador linear $(T_M)^*$. Para tanto, calculemos:

$$\langle T_M(A), B\rangle = \langle MA, B\rangle = tr(B^*(MA)) = tr((B^*M)A) = tr((M^*B)^*A) = \langle A, M^*B\rangle.$$

Como $\langle T_M(A), B\rangle = \langle A, M^*B\rangle$, para todo $A \in V$, temos, pela unicidade do adjunto, que

$$(T_M)^*(B) = M^*B.$$

Proposição 15 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno. Sejam T, S operadores lineares sobre V que admitem adjuntos T^* e S^*, respectivamente, e $c \in \mathbb{K}$. Então,*

a) $T + S$ admite adjunto e $(T + S)^* = T^* + S^*$.

b) cT admite adjunto e $(cT)^* = \overline{c}T^*$.

c) $T \circ S$ admite adjunto e $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

d) T^* admite adjunto e $(T^*)^* = T$.

Demonstração: a) Dados $u, v \in V$, temos

$$\begin{aligned} \langle (T+S)(u), v\rangle &= \langle T(u) + S(u), v\rangle \\ &= \langle T(u), v\rangle + \langle S(u), v\rangle \\ &= \langle u, T^*(v)\rangle + \langle u, S^*(v)\rangle \\ &= \langle u, (T^* + S^*)(v)\rangle. \end{aligned}$$

Como a igualdade dada acima vale para todos os vetores $u, v \in V$, segue que $T+S$ admite adjunto e $(T + S)^* = T^* + S^*$.

b) Para $u, v \in V$, temos

$$\langle (cT)(u), v\rangle = c\langle T(u), v\rangle = c\langle u, T^*(v)\rangle = \langle u, \overline{c}T^*(v)\rangle = \langle u, (\overline{c}T^*)(v)\rangle$$

e, portanto, cT admite adjunto e $(cT)^* = \overline{c}T^*$.

c) Para $u, v \in V$, temos

$$\langle (T \circ S)(u), v\rangle = \langle T(S(u)), v\rangle = \langle S(u), T^*(v)\rangle = \langle u, S^*(T^*(v))\rangle = \langle u, (S^* \circ T^*)(v)\rangle.$$

Logo, $T \circ S$ admite adjunto e $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

d) Para $u, v \in V$, temos

$$\langle T^*(u), v\rangle = \overline{\langle v, T^*(u)\rangle} = \overline{\langle T(v), u\rangle} = \langle u, T(v)\rangle.$$

Portanto, T^* admite adjunto e $(T^*)^* = T$.

□

Quando o espaço vetorial V tem dimensão finita, vimos, acima, que qualquer operador linear $T \in L(V, V)$ admite adjunto T^*. Nem sempre é fácil descrever T^*, a partir de sua definição. Para essa descrição, utilizamos, muitas vezes, as matrizes de T e T^* com relação a uma base ortonormal fixada.

Proposição 16 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V e $T \in L(V, V)$ um operador linear sobre V. Então, $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{i,j}$, onde $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$.*

Demonstração: Segue da definição de $[T]_{\mathcal{B}}$, que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \quad \text{para cada} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

Por outro lado, como $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal, segue que, para todo $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Em particular, temos que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_j), v_i \rangle v_i, \quad \text{para cada} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Comparando-se as equações (29) e (30) (que nos dão ambas as coordenadas de $T(v_j)$ em termos da base $\mathcal{B}$), concluímos que $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

$\square$

Podemos agora mostrar um resultado que é bastante útil ao se calcular o operador T^*.

Teorema 14 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno de dimensão finita, e seja $T \in L(V, V)$. Em relação a qualquer base ortonormal de V, a matriz de T^* é igual à transposta conjugada da matriz de T. Isto é, $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]^*_{\mathcal{B}}$.*

Demonstração:
Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal do espaço V, e considere $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{i,j}$ e $[T^*]_{\mathcal{B}} = (c_{ij})_{i,j}$ as matrizes dos operadores lineares T e T^*, respectivamente, com relação à base $\mathcal{B}$. Segue da proposição 16, que $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$ e $c_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i \rangle$ para todos $i, j = 1 \ldots, n$. Usando-se a definição de T^* e as propriedades do produto interno, segue que

$$c_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i \rangle = \overline{\langle v_i, T^*(v_j) \rangle} = \overline{\langle T(v_i), v_j \rangle} = \overline{a_{ji}}.$$

Portanto, $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]^*_{\mathcal{B}}$.

$\square$

Exercícios

1. Seja V o $\mathbb{C}-$espaço vetorial $\mathbb{C}^2$, com o produto interno canônico. Seja T um operador linear definido por $T(1,0) = (1,-2)$, $T(0,1) = (i,-1)$. Se $v = (x,y) \in V$, determine T^*v.

2. Seja T o operador linear sobre $\mathbb{C}^2$, definido por $T(1,0) = (1+i,2)$, $T(0,1) = (i,i)$. Usando o produto interno canônico, determine a matriz de T^* na base canônica de $\mathbb{C}^2$. T comuta com T^*?

3. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita, com produto interno, e seja T um operador linear sobre V. Se T é invertível, mostre que T^* é invertível e que
$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

4. Seja $V = \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com o produto interno $\langle A, B\rangle =$ traço(AB^*), onde B^* denota a transposta da conjugada da matriz B. Seja P uma matriz invertível fixa em V, e seja $T_P : V \to V$ o operador linear definido por $T_P(A) = P^{-1}AP$. Determine o adjunto de T_P.

5. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno, e sejam u, w vetores fixos em V. Mostre que $T(v) = \langle v, u\rangle w$ define um operador linear sobre V. Mostre que T tem um adjunto e determine o adjunto T^* de T.

Aula 3 - Operadores Auto-Adjuntos

Objetivos

1. Explicitar o conceito de operador autoadjunto sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno.

2. Verificar se um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno é autoadjunto.

Uma importante classe de operadores lineares é formada pelos operadores que coincidem com os respectivos adjuntos. Estudar tais operadores é o principal objetivo desta aula.

Definição 14 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno, e seja $T \in L(V, V)$ um operador linear sobre V. Dizemos que T é autoadjunto, se $T^* = T$. No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, usamos também o termo hermitiano, e, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, usamos também o termo simétrico.*

Definição 15 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$, com entradas a_{ij} pertencentes ao corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dizemos que A é autoadjunta se $A^* = A$, onde $A^* = \overline{A}^T$ denota a matriz transposta da conjugada de A. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dizemos que A é simétrica. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dizemos que A é hermitiana.*

Teorema 15 *Sejam V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $T \in L(V,V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *T é autoadjunto.*

b) $\overline{[T]}_{\mathcal{B}}^{T} = [T]_{\mathcal{B}}$, *para toda base ortonormal $\mathcal{B}$ de V.*

c) *Existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, tal que* $\overline{[T]}_{\mathcal{B}}^{T} = [T]_{\mathcal{B}}$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V. Pelo teorema 14, temos que $[T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}_{\mathcal{B}}^{T}$. Assumindo T autoadjunto, segue que $\overline{[T]}_{\mathcal{B}}^{T} = [T]_{\mathcal{B}}$, o que prova a implicação $a) \Rightarrow b)$.

$c) \Rightarrow a)$. Suponha que existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $\overline{[T]}_{\mathcal{B}}^{T} = [T]_{\mathcal{B}}$. Então, novamente pelo teorema 14, temos que $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}$ e, portanto, T é autoadjunto.

□

Corolário 15.1 *Sejam V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial e $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V. Se T for um operador linear autoadjunto em V e, se $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{i,j}$, então, $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Em particular, os elementos da diagonal de $[T]_{\mathcal{B}}$ são números reais.*

Exemplo

Considere $V = \mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, e considere em V o produto interno usual. Seja $T : V \to V$ o operador linear dado por

$$T(z,w) = (2z + (1+i)w, (1-i)z + 3w), \quad \forall z,w \in V.$$

Se considerarmos a base canônica $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ de V, temos que

$$\begin{cases} T(1,0) = (2, 1-i) = 2(1,0) + (1-i)(0,1) \\ T(0,1) = (1+i, 3) = (1+i)(1,0) + 3(0,1) \end{cases}$$

Isso implica que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} = \overline{[T]}_{\mathcal{B}}^{T} = [T^*]_{\mathcal{B}}$$

e, portanto, T é um operador linear autoadjunto.

Lema 2 *Sejam V um $\mathbb{C}-$espaço vetorial com produto interno, e $T \in L(V,V)$ um operador linear sobre V. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $T = 0$.

b) $\langle T(u), u\rangle = 0,\ \forall u \in V$.

c) $\langle T(u), v\rangle = 0,\ \forall u, v \in V$.

Demonstração: Que $a) \Rightarrow b)$ é claro.

$b) \Rightarrow c)$. Sejam $u, v \in V$ e $c, d \in \mathbb{C}$, e considere $w = du + cv \in V$. Então,

$$\begin{aligned} 0 = \langle T(w), w\rangle &= \langle T(du+cv), du+cv\rangle \\ &= |d|^2\langle T(u), u\rangle + \overline{d}c\langle T(v), u\rangle + d\overline{c}\langle T(u), v\rangle + |c|^2\langle T(v), v\rangle \\ &= \overline{d}c\langle T(v), u\rangle + d\overline{c}\langle T(u), v\rangle. \end{aligned}$$

Como a igualdade acima vale para todos $c, d \in \mathbb{C}$, escolhendo-se $c = d = 1$, temos que $\langle T(v), u\rangle + \langle T(u), v\rangle = 0$. Por outro lado, escolhendo-se $d = i$ e $c = 1$, temos que $-i\langle T(v), u\rangle + i\langle T(u), v\rangle = 0$. Resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} \langle T(v), u\rangle + \langle T(u), v\rangle = 0 \\ -i\langle T(v), u\rangle + i\langle T(u), v\rangle = 0, \end{cases}$$

temos que $\langle T(u), v\rangle = 0$, e segue o resultado.

$c) \Rightarrow a)$. Como $\langle T(u), v\rangle = 0,\ \forall u, v \in V$, podemos escolher $v = T(u)$ e teremos $\langle T(u), T(u)\rangle = 0,\ \forall u \in V$. Decorre da definição de produto interno que $T(u) = \vec{0},\ \forall u \in V$. $\square$

Observação

A equivalência, acima, não é verdadeira, se considerarmos espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Na verdade, a equivalência das condições $a)$ e $c)$ continua valendo assim como a implicação $c) \Rightarrow b)$. O que não é verdade é a implicação $b) \Rightarrow c)$, como nos mostra o seguinte exemplo:

Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, o operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Considerando em $\mathbb{R}^2$ o produto interno canônico, temos

$$\langle T(x,y), (x,y)\rangle = \langle(-y,x), (x,y)\rangle = -yx + xy = 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto, $\langle T(u), u\rangle = 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^2$, mas existe $v \in \mathbb{R}^2$, tal que $\langle T(u), v\rangle \neq 0$.

Proposição 17 *Sejam* V *um* $\mathbb{C}-$*espaço vetorial com produto interno e* $T \in L(V,V)$*. Então,* T *é um operador hermitiano, se, e somente se,* $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$*,* $\forall v \in V$*.*

Demonstração:
Suponha que T é hermitiano. Então, $T = T^*$ e, para cada $v \in V$, temos

$$\langle T(v), v\rangle = \langle v, T^*(v)\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}.$$

Porém, isso significa que $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, suponha que $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$. Então,

$$\langle T(v), v\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle} = \overline{\langle v, T^*(v)\rangle} = \langle T^*(v), v\rangle.$$

Portanto, $\langle T(v) - T^*(v), v\rangle = 0$, $\forall v \in V$. Desse modo, segue do lema 2, que $T(v) = T^*(v)$, $\forall v \in V$, como queríamos.

$\square$

Exercícios

1. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja E um operador linear idempotente sobre V, isto é, $E^2 = E$. Prove que E é autoadjunto, se, e somente se, $EE^* = E^*E$.

2. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e com produto interno, e seja T um operador linear sobre V. Prove que T é autoadjunto, se, e somente se, $\langle T(v), v\rangle$ é real, para todo $v \in V$.

3. Mostre que a composta de dois operadores autoadjuntos é autoadjunto, se, e somente se, os dois operadores comutam.

4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno, e seja T um operador linear sobre V. Mostre que
$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*),$$
são operadores autoadjuntos.

5. Seja $V = \mathbb{C}_3[x]$ o $\mathbb{C}-$espaço vetorial dos polinômios com coeficientes complexos de grau menor ou igual a 3, munido do produto interno
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt, \quad f(x), g(x) \in V.$$
Verifique se o operador derivação $D : V \to V$ é autoadjunto.

6. Considere $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, munido do produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^T A)$. Sejam $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in V$, e $T : V \to V$ o operador linear dado por $T(A) = MA - AM$. Determine T^* e verifique se T é autoadjunto.

Aula 4 - Operadores Normais

Objetivos

1. Explicitar o conceito de operador normal sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno.

2. Verificar se um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno é normal.

3. Verificar que todo operador normal, sobre um espaço vetorial complexo de dimensão finita n e com produto interno, possui n autovetores ortonormais.

4. Determinar uma base ortonormal de autovetores de um operador normal sobre um espaço vetorial complexo de dimensão finita e com produto interno.

5. Provar várias propriedades relacionadas com o conceito de operador normal.

Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e dimensão finita $n \geq 1$. O principal objetivo desta aula é solucionar o seguinte problema: se T é um operador linear sobre V, sob quais condições V tem uma *base ortonormal*, formada por autovetores de T? Em outras palavras, quando existe uma *base ortonormal* de V, relativamente à qual a matriz de T é diagonal?

Devemos começar obtendo algumas condições necessárias sobre T, que mostraremos, posteriormente, que são suficientes.

Suponha que exista uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, cujos elementos são autovetores de T, isto é, existem escalares $c_i \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tais que

$$T(v_i) = c_i v_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Isso significa que a matriz de T, em relação à base $\mathcal{B}$, é a matriz diagonal com entradas diagonais $c_1, \ldots, c_n$, isto é,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n).$$

Como a base $\mathcal{B}$ é ortonormal, temos que o operador adjunto T^* é representado, na mesma base $\mathcal{B}$, pela matriz transposta conjugada, isto é,

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_n).$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então, $c_i = \bar{c}_i$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ e $[T]_{\mathcal{B}} = [T^*]_{\mathcal{B}}$, isto é, T é autoadjunto. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então, T não é necessariamente autoadjunto, mas vale a relação

$$[T]_{\mathcal{B}}[T^*]_{\mathcal{B}} = [T^*]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}},$$

isto é, T comuta com o seu adjunto T^*.

Pergunta: A recíproca desse resultado é verdadeira? Isto é, se T é um operador linear sobre V, tal que $T \circ T^* = T^* \circ T$, então, existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T?

Definição 16 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno, e seja T um operador linear sobre V. Dizemos que T é normal, se existir T^* e se $T \circ T^* = T^* \circ T$.*

Proposição 18 *Sejam V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno e $T \in L(V, V)$ um operador normal. Então,*

a) $|T(v)| = |T^*(v)|,\ \forall v \in V$.

b) *Se $T(v) = cv$, para $c \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, então, $T^*(v) = \bar{c}v$.*

c) *Se $T(v_1) = c_1v_1$ e $T(v_2) = c_2v_2$, para $v_1, v_2 \in V$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, com $c_1 \neq c_2$, então, $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.*

Demonstração:

a) Seja $v \in V$. Então,

$$\langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, (T^* \circ T)(v)\rangle = \langle v, (T \circ T^*)(v)\rangle = \overline{\langle (T \circ T^*)(v), v\rangle}.$$

Como $\langle T(v), T(v)\rangle$ é um número real, segue que

$$\overline{\langle (T \circ T^*)(v), v\rangle} = \langle (T \circ T^*)(v), v\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle.$$

Portanto, $|T(v)| = |T^*(v)|$, como queríamos.

b) Se $T(v) = cv$, então, $(T - cId)(v) = \vec{0}$. Logo, $|(T - cId)(v)| = 0$. Usando o item a), concluímos que $|(T - cId)^*(v)| = 0$. Então, $(T - cId)(v) = \vec{0}$ e, portanto, $T^*(v) = \bar{c}v$.

c) Observe que

$$\langle T(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, T^*(v_2)\rangle = \langle v_1, \bar{c}_2v_2\rangle = c_2\langle v_1, v_2\rangle.$$

Por outro lado,

$$\langle T(v_1), v_2\rangle = \langle c_1v_1, v_2\rangle = c_1\langle v_1, v_2\rangle.$$

Daí segue que $c_1\langle v_1, v_2\rangle = c_2\langle v_1, v_2\rangle$ e, portanto, $(c_1 - c_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Como $c_1 \neq c_2$, segue que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

$\square$

Teorema 16 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se T é um operador linear autoadjunto sobre V, então, T possui um autovetor.*

Demonstração:
Suponha que $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, e seja $T \in L(V, V)$ um operador autoadjunto. Sejam $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V e $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Como $T = T^*$, temos que $A = \overline{A}^T$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então, $p_T(x)$ tem raízes que são os autovalores de T e o resultado está provado.

Suponha que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e considere $W = \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ com o produto interno

$$\langle X, Y\rangle = \overline{Y}^T X$$

e $S : W \to W$, o operador linear dado por $S(X) = AX$. Sabemos que

$$S^*(X) = \overline{A}^T X = AX$$

e, portanto, S é autoadjunto.

Por outro lado, não é difícil ver que $p_T(x) = p_S(x)$. Seja c uma raiz de $p_S(x)$. Como W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, segue que c é um autovalor de S. Vamos mostrar que c é um número real.

De fato, se $v \neq \vec{0}$ é um autovetor associado ao autovalor c, então,

$$\langle S(v), v\rangle = \langle cv, v\rangle = c\langle v, v\rangle$$

e, por outro lado,

$$\langle S(v), v\rangle = \langle v, S^*(v)\rangle = \langle v, S(v)\rangle = \langle v, cv\rangle = \overline{c}\langle v, v\rangle.$$

Portanto, $c\langle v, v\rangle = \overline{c}\langle v, v\rangle$ e, então, $(c - \overline{c})\langle v, v\rangle = 0$. Como $\langle v, v\rangle \neq 0$, segue que $c = \overline{c}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Desse modo, temos que c é uma raiz real de $p_T(x)$ e, consequentemente, c é um autovalor de T, como queríamos.

$\square$

Teorema 17 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e com produto interno. Se $T : V \to V$ é um operador linear autoadjunto, existe uma base ortonormal de V, consistindo de autovetores de T.*

Demonstração:
A prova é feita por indução sobre n.

Se $n = 1$, o teorema vale trivialmente.

Suponha que $n > 1$ e que o resultado vale para todo espaço vetorial de dimensão $n - 1$. Como T é autoadjunto, existe um autovetor não nulo v_1 de T, associado a um autovalor $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Seja W o espaço gerado por v_1, e seja u_1 um vetor unitário em W. Por exemplo, seja $u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$.

Como v_1 é um autovetor de T e $T = T^*$, temos que $T(W) \subset W$ e que $T(W^\perp) \subset W^\perp$, pois

1. Dado $v \in T(W)$, temos que $v = T(c_1 v_1)$, para algum $c_1 \in \mathbb{K}$. Então,

$$v = c_1 T(v_1) = c_1 \lambda_1 v_1 = (c_1 \lambda_1) v_1, \text{ o que implica que } v \in W = [v_1].$$

2. Dado $z \in T(W^\perp)$, temos que $z = T(v)$, para algum $v \in W^\perp$. Então, para todo $w \in W$, temos que

$$\langle z, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle = \langle v, T(w) \rangle = 0, \text{ o que implica que } T(W^\perp) \subset W^\perp.$$

Assim, a restrição $\hat{T} = T|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ de T a $W^\perp$ é um operador autoadjunto. Sabemos que $V = W \oplus W^\perp$. Portanto, $\dim_{\mathbb{R}} W^\perp = n - 1$, pois $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$. Por indução, existe uma base ortonormal $\{u_2, \ldots, u_n\}$ de $W^\perp$, consistindo de autovetores de $\hat{T}$ e, portanto, de T. Mas, $\langle u_1, u_j \rangle = 0$, para todo $j \in \{2, \ldots, n\}$, pois $u_j \in W^\perp$. De acordo com isso, temos que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de autovetores de T.

$\square$

Seja V um espaço vetorial complexo, de dimensão finita e com produto interno. No teorema, a seguir, mostramos que todo operador normal T, sobre V, é diagonalizável e V possui uma base ortonormal de autovetores de T.

Teorema 18 *Sejam V um $\mathbb{C}-$espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita, e T um operador linear sobre V. Então, T é um operador normal, se, e somente se, existir uma base ortonormal de V cujos vetores são autovetores de T.*

Demonstração:
Seja $v_1 \in V$ um autovetor de T. Sem perda de generalidade, podemos supor que $|v_1| = 1$ (v_1 existe, pois V é um espaço vetorial complexo). Seja $W = [v_1]$ o subespaço gerado por v_1. Então, $T(W) \subset W$, isto é, W é invariante por T.

Pelo item **b)** da proposição 18, temos que v_1, também, é autovetor de T^* e, portanto, W é invariante por T^*. Como $T^*(W) \subset W$, segue que $T(W^\perp) \subset W^\perp$.

A restrição de T a $W^\perp$ é um operador normal. Usando o mesmo argumento de indução do teorema 17, mostra-se que existe uma base ortonormal de autovetores. A recíproca foi mostrada no início desta seção.

$\square$

Exercícios

1. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno, e seja T um operador linear sobre V. Prove que

   (a) Se T é autoadjunto, então, T é normal.

   (b) Se T é normal, então, cT é normal, para todo $c \in \mathbb{K}$.

2. Para cada uma das seguintes matrizes reais simétricas A, determine uma matriz ortogonal P, tal que $P^T AP$ é diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3. Seja $V = \mathbb{C}^2$, com o produto interno canônico. Seja T um operador linear sobre V, que é representado na base canônica pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

   Mostre que T é normal e determine uma base ortonormal de V, consistindo de autovetores de T.

4. Prove que um operador linear T é normal, se, e somente se, $T = T_1 + iT_2$, onde T_1 e T_2 são operadores autoadjuntos que comutam.

5. Se dois operadores normais comutam, prove que sua composta é normal.

Aula 5 - Operadores Unitários

Objetivos

1. Explicitar o conceito de operador unitário sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno.
2. Verificar se um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno é unitário.
3. Provar várias propriedades relacionadas com o conceito de operador unitário sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Seja T um operador linear sobre V. Dizemos que T é unitário, se for um isomorfismo que preserva o produto interno de V, isto é, T é um operador linear bijetivo em V e

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle,\ \forall u, v \in V.$$

Teorema 19 *Seja $T \in L(V, V)$ um operador linear sobre V, onde V é um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno. Então, T é unitário, se, e somente se, o adjunto T^* existe e $T \circ T^* = T^* \circ T = Id$.*

Demonstração: Suponha que T é unitário. Então, T possui inversa e, como T preserva o produto interno, temos que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle T(u), (T \circ T^{-1})(v)\rangle = \langle T(u), T(T^{-1}(v))\rangle = \langle u, T^{-1}(v)\rangle,\ \forall u, v \in V$$

onde, na última igualdade, usamos que T preserva o produto interno.

A expressão, acima, nos diz que o adjunto de T existe e que $T^* = T^{-1}$.

Reciprocamente, suponha que T^* existe e que $T^* \circ T = T \circ T^* = Id$. Então, T possui inversa e $T^{-1} = T^*$. Falta mostrar que T preserva produto interno. De fato,

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, (T^* \circ T)(v)\rangle = \langle u, Id(v)\rangle = \langle u, v\rangle,$$

para todos $u, v \in V$, e o resultado está provado.

$\square$

Observação

Observe que todo operador unitário é normal e, portanto, todo operador unitário sobre um espaço vetorial complexo é diagonalizável.

Definição 17 *a) Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dizemos que A é unitária, se $A^*A = AA^* = I$, onde $A^* = \overline{A}^T$ é a transposta da conjugada de A e I é a matriz identidade de ordem n.*

b) Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é ortogonal, se $AA^T = A^TA = I$, onde A^T denota a transposta da matriz A.

Teorema 20 *Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial $n-$dimensional, com produto interno, e seja T um operador linear sobre V. Então, T é unitário, se, e somente se, a matriz de T, em alguma (ou qualquer) base ortonormal ordenada de V, é uma matriz unitária.*

Demonstração:
Se $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal ordenada de V e A é a matriz de T relativa a $\mathcal{B}$, então, $A^*A = I$, se, e somente se, $T^*T = I$. O resultado agora segue do teorema 19.

$\square$

Exercícios

1. Seja V o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ complexas, com produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^*A)$. Para cada $M \in V$, seja T_M o operador linear sobre V, definido por $T_M(A) = MA$. Mostre que T_M é unitário, se, e somente se, M é uma matriz unitária.

2. Sejam $T_1, T_2 \in Ł(V, V)$ operadores lineares num $\mathbb{K}-$espaço vetorial V com produto interno. Prove que

   (a) Se T_1 e T_2 são unitários, então, $T_1 \circ T_2$ também é unitário.

   (b) Se T_1 é unitário, então, T_1^{-1} também é unitário.

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$, com o produto interno canônico. Se T é um operador unitário sobre V, mostre que a matriz de T, na base canônica ordenada, é A ou B, onde

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

   para algum $\theta \in [0, 2\pi]$. Seja T_θ o operador linear correspondente à primeira matriz, isto é, T_θ é a rotação pelo ângulo θ. Agora, convença-se de que qualquer operador unitário sobre V é uma rotação, ou uma reflexão, em torno do eixo x, seguida por uma rotação.

   (a) Determine $T_\theta \circ T_\phi$.

   (b) Mostre que $T_\theta^* = T_{-\theta}$.

4. Seja V um $\mathbb{K}-$espaço vetorial $n-$dimensional com produto interno, e seja W um subespaço vetorial de V. Então, $V = W \oplus W^\perp$, isto é, cada vetor $v \in V$ é unicamente expresso na forma $v = w + u$, onde $w \in W$ e $u \in W^\perp$. Defina um operador linear $T : V \to V$, por $T(v) = w - u$. Prove que T é autoadjunto e unitário.

PRA FINAL DE CONVERSA...

Você estudou, ao longo desses 60 dias, a disciplina **Álgebra Linear**, que lhe dará suporte para a continuidade do curso. Contudo, não queremos que nosso diálogo se encerre aqui. Sempre que você sentir necessidade, busque com os tutores presenciais, a distância e coordenadores de polos uma alternativa para sanar suas dúvidas.

Lembre-se de que, além dos sujeitos envolvidos no seu processo de aprendizagem, a apostila é um recurso imediato e está ao seu alcance, quando necessário.

Esperamos que esta apostila lhe tenha sido proveitosa e agradável. Procuramos escrevê-la da melhor maneira possível, com muito carinho e com o objetivo de facilitar o seu entendimento, sem perder a qualidade. Tratamos, aqui, de assuntos essenciais para sua formação acadêmica e que lhe darão suporte para compreender novas disciplinas que surgirão, no decorrer do curso de pós-graduação. Desejamos que você prossiga com seus estudos, que obtenha êxito e paixão para continuar sempre!

Atenciosamente,

Os Autores.

REFERÊNCIAS

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um curso de álgebra linear**. São Paulo: Edusp, 2001.

HOFFMAN, K. and KUNZE, R. **Linear algebra**. 2. ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1971, 1961.

KOLMAN, B. **Álgebra linear**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

LIMA, Elon Lages, **Álgebra linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1998.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear:** Teoria e Problemas. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.