

**Resolução de Exame de Matemática –
12ª. Classe
Ano: 2017/ 2ª Época**



Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2017/ 2ª Época**Resoluções****❖ Conceitos básicos****Operações sobre proposições lógicas**

Na lógica matemática estuda-se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição**Conjunção de proposições****Disjunção de proposições****Implicação material****Equivalência material****Expressão algébrica**

Uma expressão algébrica diz-se **irracional** quando a variável aparece sob forma de um radicando.

Repare que a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a variável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponencial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base a , sendo a positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações lineares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ chama-se}$$

determinante proveniente de uma matriz de 3 por 3

1. Resposta:

A negação da expressão $4 + 8 < 13$ é:

Seja $p : 4 + 8 < 13 \Rightarrow \sim p : \sim (4 + 8 < 13) \Leftrightarrow \sim p : 4 + 8 \geq 13$.

2. Resposta:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim q \Rightarrow p$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

$$x = 0 \wedge y = 1$$

3. Resposta:

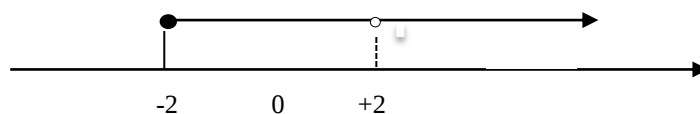
A expressão $\sqrt{5}x$ é racional inteira.

4. Resposta:

Vamos determinar o domínio de existência da expressão $\frac{\sqrt{2x+4}}{x^2-4x+4}$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 \geq 0 \wedge x^2 - 4x + 4 \neq 0\} \Rightarrow 2x + 4 \geq 0 \wedge (x - 2)(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -4 \wedge x - 2 \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-4}{2} \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x \geq -2 \wedge x \neq 2$$



$$D = [-2; +\infty[\setminus \{2\}$$

5. Resposta:

Pretendemos determinar a soma de 7 com a solução da equação $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117 \Leftrightarrow 3^x + 3 \times 3^x + 3^2 \times 3^x = 117 \Leftrightarrow 3^x \times (1 + 3 + 9) = 117$$

$$3^x \times 13 = 117 \Leftrightarrow 3^x = \frac{117}{13} \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow 7 + 2 = 9$$

6. Resposta:

A equação $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ é biquadrática, vamos resolvê-la e depois somar as suas raízes:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot x^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \vee x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1 \vee x = \pm 1$$

$$\{-1, 1\} \Rightarrow S = -1 + (-1) + 1 + 1 = -2 + 2 = 0$$

7. Resposta:

Pretendemos determinar a solução da equação $\log_2(x) + \log_4(x) = 1$



Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Outras relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama-se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio número se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

Exemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 120$$

Permutação

A solução tem que estar dentro do conjunto $x \in \mathbb{R}^+$

$$\log_2(x) + \log_4(x) = 1 \Leftrightarrow \log_2(x) + \log_{2^2}(x) = 1 \Leftrightarrow \log_2(x) + \frac{1}{2}\log_2(x) = \log_2(x)$$

$$\log_2(x) + \log_4(x) = 1 \Leftrightarrow \log_2(x) + \log_{2^2}(x) = 1 \Leftrightarrow \log_2(x) + \frac{1}{2}\log_2(x) = \log_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x) + \log_2(\sqrt{x}) = \log_2(2) \Leftrightarrow \log_2(x \cdot \sqrt{x}) = \log_2(2) \Rightarrow x\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow (x\sqrt{x})^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot x = 4 \Leftrightarrow x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

8. Resposta:

Vamos resolver a inequação $\frac{x-1}{x+3} < 0$ por auxílio de uma tabela de variação de sinal. Seja

$$x-1 = 0 \wedge x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = -3$$

x	$]-\infty; -3[$	-3	$] -3; 1[$	1	$]1; +\infty[$
$x-1$	—	-4	—	0	+
$x+3$	—	0	+	4	+
$\frac{x-1}{x+3}$	+	ND	—	0	+

A fracção $\frac{x-1}{x+3}$ é menor que zero se e somente se $x \in]-3; 1[$, logo $\frac{x-1}{x+3} < 0$ se

$$x \in]-3; 1[$$

9. Resposta:

Vamos resolver a equação $\sin^2(x) = \sin(x)$, em $\mathbb{R}$:

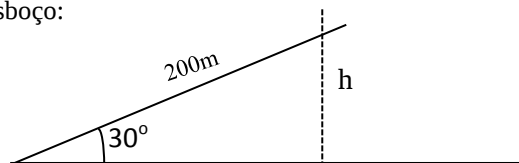
$$\sin^2(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)(\sin(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee \sin(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\pi k) \vee \sin(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pi k \vee \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \Leftrightarrow x = \pi k \vee x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

10. Resposta:

Esboço:



$$\sin(30^\circ) = \frac{h}{200} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{200} \Leftrightarrow 1 \times 200 = 2h \Leftrightarrow 2h = 200 \Leftrightarrow h = \frac{200}{2} \Rightarrow h = 100m$$

A altura atingida pelo avião é de 100m aproximadamente



A permutação de n elementos tomados p a p , é dado por:

$$P_n = n! \text{ ou}$$

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$n \equiv p$$

Exemplo:

$$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$p_4 = 24$$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}, n > p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \dots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

11. Resposta:

A condição para que $|1-3x| + x + 7$ seja igual a $8-2x$ segue:

Vamos igualar $|1-3x| + x + 7$ com $8-2x$, assim:

$$|1-3x| + x + 7 = 8-2x \Leftrightarrow |1-3x| = 8-2x-x-7 \Leftrightarrow |1-3x| = 1-3x$$

Pela definição do módulo de um número real temos:

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x, & \text{se } 1-3x \geq 0 \\ -(1-3x), & \text{se } 1-3x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

A condição para que $|1-3x| + x + 7$ seja igual a $8-2x$ é

$$1-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

12. Resposta:

Vamos resolver a equação modular: $|3x-1| = -2$,

Pela definição do módulo de um número real, a equação $|3x-1| = -2$ é impossível em

$$R. x \in \{ \}$$

13. Resposta:

A expressão equivalente a $\frac{n!+(n-1)!}{n!}$ segue:

$$\frac{n!+(n-1)!}{n!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)!+(n-1)!}{n(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{(n-1)![n+1]}{n(n-1)!} = (n+1) = \frac{n+1}{n}$$

14. Resposta:

Vamos escrever o espaço de amostra: $S = \{1,2,3,5,4,5,6\}$

Acontecimentos:

M : Sair face de um número ímpar; N : Sair face de um número maior ou igual a 4.

$M \cup N$: Sair face de um número ímpar ou sair face de um número maior ou igual a 4

$$M \cup N = \{1,3,4,5,6\}$$

O acontecimento contrário de $M \cup N$ é $\overline{M \cup N}$: recorrendo as propriedades de operações sobre conjuntos, teremos: $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$, O complementar transforma a união em intersecção de complementares, sendo assim, temos: o evento contrário de

$$M \cup N \text{ é } \overline{M} \cap \overline{N}:$$

$$\overline{M} \cap \overline{N} = \{2\}, \text{ logo o evento contrario de } M \cup N \text{ é sair face 2}$$

15. Resposta:

Sabe-se que no sistema numérico usual existe 10 algarismos de 0 a 9, assim:

$A = \{0,1,2,3,5,4,5,6,7,8,9\}$, neste conjunto vamos retirar dois algarismos, 0 e 1 que não são usados para formar número telefónica da vila. Cada número de telefone tem uma sequência de 3 algarismos diferentes, por exemplo, 234, 432 e 324 são números telefónicos diferentes, excluindo a possibilidade da existência de número telefónicas como 222, 233, 344. Logo neste problema temos que trabalhar com 8 elementos (algarismos) e agrupando – os três em três sem repeti – los, pois a ordem de cada elemento é importante, fica claro que temos explorar a fórmula de arranjos simples sem repetição:

$$A_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} \Leftrightarrow A_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336 \text{ a vila tem 336 numero de telefones.}$$

16. Resposta:



$$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)}, n(C.F) \geq n(C.P)$$

Límite de uma sucessão**Sucessão convergente**

Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve-se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem p a partir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna-se tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r , tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \times r}{2} \times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão geométrica (P.G) se existe um número real r , tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$$k \times \infty = \infty$$

$$\infty^k = \infty$$

Dados do problema dizem que no grupo há 120 pessoas entre homens e mulheres, e a probabilidade de escolher um homem é $\frac{5}{8}$, pela definição clássica de probabilidade temos:

$$P(H) = \frac{n(H)}{120} \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{n(H)}{120} \Leftrightarrow 5 \times 120 = 8 \times n(H) \Rightarrow n(H) = \frac{5 \times 120}{8} \Leftrightarrow n(H) = 75$$

No grupo há 75 homens.

17. Resposta:

$x-3; x; x+6$ São termos consecutivos de uma PG, pretende-se encontrar o valor de incógnita x , assim:

$$\frac{x+6}{x} = \frac{x}{x-3} \text{ Condição para que uma sucessão seja PG.}$$

$$\frac{x+6}{x} = \frac{x}{x-3} \Leftrightarrow (x+6)(x-3) = x \times x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - 9x + 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x + 18 \Leftrightarrow -9x = -18 \Leftrightarrow x = \frac{-18}{-9} \Rightarrow x = 2$$

18. Resposta:

Considere a sucessão $2; -5; 8; -11; \dots$

Vamos determinar os valores absolutos dos termos da sucessão dada, assim:

$$|2| = 2; |-5| = 5; |8| = 8; |-11| = 11; \dots \text{ a sucessão ganha a forma: } 2; 5; 8; 11; \dots$$

Fazendo $a_1 = 2; a_2 = 5; a_3 = 8; a_4 = 11; \dots \Rightarrow 11 - 8 = 8 - 5 = 5 - 2 = 3$ a diferença entre a_{n+1} e a_n é constante pois é igual a 3 unidades.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1) \times 3 \Leftrightarrow a_n = 3n - 3 + 2 \Leftrightarrow a_n = 3n - 1$$

Não se esquecendo que a sucessão é alternada, o seu termo geral deve ter factor $(-1)^{n+1}$, logo, o termo geral pedido pelo enunciado será:

$$b_n = a_n \times (-1)^{n+1} \Rightarrow b_n = (3n - 1)(-1)^{n+1}$$

19. Resposta:

Considerando a sucessão de termo geral $a_n = 2n + 1$

A ordem do termo 17 segue:

$$a_n = 2n + 1, n = ? \Rightarrow u_n = 17 \Leftrightarrow 17 = 2n + 1 \Leftrightarrow 2n + 1 = 17 \Leftrightarrow 2n = 17 - 1 \Leftrightarrow 2n = 16 \Leftrightarrow n = \frac{16}{2}$$

$$\Rightarrow n = 8$$

17 é termo de ordem 8.

20. Resposta:

Vamos aplicar directamente a fórmula da soma de n termos de PA, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n, a_1 = 4, a_{13} = 40, n = 13 \wedge a_{13}$$

$$\Rightarrow S_{13} = \frac{4 + 40}{2} \times 13 \Leftrightarrow S_{13} = 22 \times 13 = 286$$

21. Resposta:

Considere $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \dots = 20$, vamos determinar o valor de x na condição anterior,



$$\begin{aligned}\infty \times \infty &= \infty \\ k + \infty &= \infty \\ k - \infty &= -\infty \\ \frac{\infty}{k} &= \infty \\ \frac{k}{\infty} &= 0\end{aligned}$$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função $f(x)$ definida no domínio D_f , a , L são números reais. Diz-se, se, L é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a (a não necessariamente pertencente ao domínio de $f(x)$) sse:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

• Limites Neperianos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

• Limites trigonométricos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variável real é contínua num ponto de abscissa $x = a$ sse,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Se existir a diferença entre os membros dessa igualdade, a função é descontínua no ponto de abscissa a

$$\text{Seja } a_1 = x; a_2 = \frac{x}{2}; a_3 = \frac{x}{4}; \dots$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \rightarrow \text{Condição para a sequência seja uma PG.}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{4}}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x}{2}}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{4} \times \frac{2}{x} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = q$$

Uma vez a razão é igual a $\frac{1}{2}$ e $a_1 = x$ e a fórmula da soma de n termos de uma progressão geométrica diz:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow S_n = 20 \Leftrightarrow 20 = x \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow 20 = x \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 10 = x \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Aplicando limite ambos os membros da última igualdade temos:

$$\lim 10 = \lim x \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right); n \rightarrow \infty \Leftrightarrow 10 = x \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right) \Leftrightarrow 10 = x(1 - 0) \Leftrightarrow 10 = x \Rightarrow x = 10$$

22. Resposta:

$$\Rightarrow g(x) = tg(x), \text{ em } \mathbb{R}, \text{ o domínio da função tangente é } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\} \text{ com } k$$

inteiro, portanto o possível domínio dentre as opções representada pode ser o conjunto

$$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

23. Resposta:

O gráfico da função homógrafa elementar é ímpar e injectiva, a opção certa é C.

24. Resposta:

$$\text{O valor de } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x-1)^5(x+8)}{x^6-1} \right) = \frac{(2 \cdot \infty - 1)^5(\infty + 8)}{\infty^6 - 1} = \frac{(\infty - 1)^5 \times \infty}{\infty - 1} = \frac{\infty^5 \times \infty}{\infty} = \frac{\infty \times \infty}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Vamos levantar a indeterminação:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x-1)^5(x+8)}{x^6-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(\left(x \left(2 - \frac{1}{x} \right) \right)^5 \left(x \left(1 + \frac{8}{x} \right) \right) \right)}{\left(x^6 \left(1 - \frac{1}{x^6} \right) \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^5 \left(2 - \frac{1}{x} \right)^5 x \left(1 + \frac{8}{x} \right)}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^6} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^5 \times x \left(2 - \frac{1}{x} \right)^5 \left(1 + \frac{8}{x} \right)}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^6} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^6 \left(2 - \frac{1}{x} \right)^5 \left(1 + \frac{8}{x} \right)}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^6} \right)} \right) = \end{aligned}$$



Cálculo diferencial

- Definição da derivada de uma função**

Dada uma função $F(x)$ definida no domínio D_F , sendo a abscissa de um ponto P , tal que $a \in D_F$. A derivada da função $F(x)$ no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-h} = f'(x)$$

A função $f(x)$ chama-se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata**Função constante**

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Função potência

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Função polinomial**Função composta**

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$f'(x) = (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \dots + (a_n)'$$

Derivada da soma

$$f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

Função afim

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

Função produto

$$f(x) = u \times v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

Função quociente

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Função composta

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}u'$$

Derivada da função exponencial**Função exponencial de base e**

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$$

Função exponencial de base a

$$f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \ln(a)$$

Derivada da função logarítmica**Função logarítmica de base e**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right)^5 \left(1 + \frac{8}{x}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x^6}\right)} \right) &= \\ &= \left(\frac{\left(2 - \frac{1}{\infty}\right)^5 \left(1 + \frac{8}{\infty}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\infty^6}\right)} \right) = \left(\frac{(2-0)^5 (1+0)}{\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)} \right) = \left(\frac{(2)^5 \times (1)}{(1-0)} \right) = \frac{2^5}{1} = 32 \end{aligned}$$

25. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) = \sqrt{\infty+3} - \sqrt{\infty} = \sqrt{\infty} - \infty = [\infty - \infty], \text{ este não é um}$$

numero real, temos que redefinir o limite como segue:

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$, vamos multiplicar e dividir pelo seu conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{((\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x})^2)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3-x)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3-x)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} = \frac{3}{(\sqrt{\infty+3} + \sqrt{\infty})} =$$

$$\frac{3}{(\sqrt{\infty} + \infty)} = \frac{3}{(\infty + \infty)} =$$

$$\frac{3}{(\infty + \infty)} = \frac{3}{\infty} = 0$$

26. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$, teremos:

Baseando no limite *euleriano* $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$ teremos.

Atenção, a parcela $\left(-\frac{5}{x}\right)$ é negativa, temos que lhe transformar para ter mesma estrutura

do limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$, assim, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x}\right)^x$, fazendo $-5 = k$,

temos $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$; se $k = -5 \Rightarrow = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x}\right)^x = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$



$$f(x) = \ln(u) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Função logarítmica de base a

$$f(x) = \log_a(a) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u \ln(a)}$$

Derivada da função trigonométrica

Função seno

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(u) \Rightarrow f'(x) = u' \cos(u)$$

Função co-seno

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \cos(u) \Rightarrow f'(x) = -u' \sin(u)$$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra

Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Onde

27. Resposta:

$$\text{Calculando o valor de } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) + \sin(3x) - \sin(2x)}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) + \sin(3x) - \sin(2x)}{5x} = \frac{\sin(4.0) + \sin(3.0) - \sin(2.0)}{5.0} = \frac{\sin(0) + \sin(0) - \sin(0)}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) + \sin(3x) - \sin(2x)}{5x} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ Indeterminação, vamos redefinir o limite,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) + \sin(3x) - \sin(2x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(4x)}{5x} + \frac{\sin(3x)}{5x} - \frac{\sin(2x)}{5x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) + \sin(3x) - \sin(2x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{5x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \times \sin(4x)}{4x \times 5x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \times \sin(3x)}{3x \times 5x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \times \sin(2x)}{2x \times 5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x}{5x} \times \frac{\sin(4x)}{4x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{5x} \times \frac{\sin(3x)}{3x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{5x} \times \frac{\sin(2x)}{2x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{5} \times 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \times 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5} \times 1 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4+3-2}{5} = \frac{7-2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

28. Resposta:

$$\text{Dada a função } f(x) = \begin{cases} k + px, & x > 2 \\ 3; & \text{se } x = 2 \\ p - kx^2; & x < 2 \end{cases}, \text{ para que } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ exista e seja igual a}$$

$f(2)$, é necessário que $f(x)$ seja contínua em $x=2$, assim,

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (p - kx^2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (k + px) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (p - kx^2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (k + px) = 3 \Leftrightarrow (p - k.2^2) = k + p.2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p - 4k = k + 2p = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} p - 4k = k + 2p \\ k + 2p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5k - p = 0 \\ k + 2p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -5k \\ k - 10k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p = -5k \\ -9k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -5k \\ -3k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{5}{3} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

29. Resposta:

O gráfico que representa um ponto de descontinuidade eliminável é da opção C.

30. Resposta:

O gráfico $y=f(x)$ tem primeira derivada nula no intervalo $x \in]-1; 2[$



$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau n e um binómio linear $x - a$.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjuntos

Reunião de conjuntos

Intersecção de conjuntos

Diferença de conjuntos

Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto $P(x_0, y_0)$ e recta r :

$Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta r representada por $d(P, r)$ é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ com } cx + d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O conjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$
Exemplo:

$3 + 4i \wedge 3 - 4i$ são dois números complexos conjugados.

Primitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$$\int (k) dx = kx + c$$

31. Resposta:

Dada a função $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, vamos determinar a primeira derivada da função f :

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = (e^{\sqrt{x}})' \Leftrightarrow f'(x) = (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

32. Resposta:

Dada a função $f(x) = \log_2(x)$, vamos determinar a primeira derivada da função:

$$f(x) = \log_2(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln 2} \Leftrightarrow f'(x) = \\ = \frac{\frac{x'}{x}}{\ln(2)} = \frac{1}{x \ln(2)}$$

33. Resposta:

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, para achar a segunda derivada de f , em primeiro lugar vamos achar a primeira derivada assim:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1' \times x - 1 \times x'}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{0 - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \rightarrow$$

agora vamos a caça da segunda derivada a partir da primeira derivada assim,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right)' \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{1' \times x^2 - 1 \times (x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{0 - 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

34. Resposta:

Dada a função $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, a função f , não é definida em $x = -1$, logo ela não é derivável em $x = -1$.

35. Resposta:

Se a segunda derivada de uma determinada função é constante, a sua primeira derivada é uma função do primeiro grau, logo a função primitiva é uma função do segundo grau, o gráfico da função do segundo grau é uma parábola. A opção correcta é A.

• Somente Para Secção de Letras

36. Resposta:

Se os graus dos polinómios dividendos e divisor são respectivamente m e n , então o grau do quociente é $m - n$

37. Resposta:

Seja $d(x) = x + 1$, $q(x) = x^2 - 3x$, $\wedge r(x) = -5 \dots D(x) = ?$



$$\int (ku) dx = k \int u dx$$

$$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$\int e^u u' dx = e^u + C$$

$$\int a^u u' dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Integração por parte

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

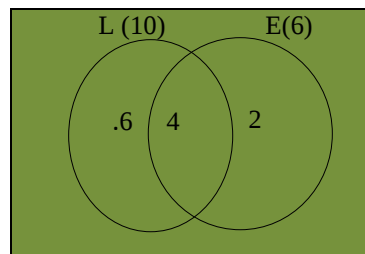
Função modular do tipo $y = f(|x|)$

Função modular do tipo $y = |f(x)|$

Função modular do tipo $y = |f(|x|)|$

$$D(x) = d(x) \times q(x) + r(x) \Rightarrow D(x) = (x+1) \times (x^2 - 3x) + (-5) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow D(x) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 5 \Leftrightarrow D(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 5$$

38. Resposta ao problema:



$$n(U) = ?$$

$$n(L \cup E) = ?$$

$$\Rightarrow n(L \cup E) = n(L) + n(E) - n(L \cap E)$$

$$n(L \cup E) = 6 + 6 - 4 = 8$$

São 12 pessoas que compraram esferográficas.

39. Resposta:

Seja $y = f(x)$ tal que $f(-x) = -f(x)$, então $y = f(x)$ é **ímpar** porque objectos simétricos correspondem a imagens simétricas.

40. Resposta:

A opção que representa o gráfico certo é A.

- Somente Para Secção de Ciências

36. Resposta:

Dado os pontos $P(2;1) \wedge Q(1,4) \Rightarrow x_1 = 2; y_1 = 1; x_2 = 1 \wedge y_2 = 4$ o declive de uma recta que passa pelos dois pontos é determinada pela fórmula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{4-1}{1-2} = \frac{3}{-1} \Rightarrow m = -3$$

37. Resposta:

Dada a equação irracional $\sqrt{x^2 + 1} = x + 2$ vamos resolver em $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1})^2 = (x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - 4x = 3 \\ \Leftrightarrow -4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{-4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Atenção, essa solução pode ser distraidora, portanto, vamos achar o domínio de existência da expressão algébrica irracional do primeiro membro:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 0\}$$

$x^2 + 1 \geq 0$ tem como conjunto solução $\mathbb{R}$, logo a solução encontrada anteriormente está correcta.

38. Resposta:

Se o contradomínio da função $y = f(x)$ é $[-7;10]$ então o contradomínio de $g(x) = |f(x)|$ é $[0;10]$

39. Resposta:

$$i^{13} = i^2 \times i^2 \times i^2 \times i^2 \times i^2 \times i^2 \times i = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times i = i$$

40. Resposta:

$$y = f(x) = \frac{1}{x \ln(2)}$$

A primitiva da função segue:



$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{x \ln(2)} \right) dx \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(2)} \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(2)} \times \ln|x| + C \Leftrightarrow F(x) = \log_2|x| + C$$

FIM

