

TD

Convexité

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ □ □

Montrer que si f est convexe sur $[a, b]$ et si $f(a) = f(b)$ alors $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq f(a)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Soient f une fonction de I dans J et g une fonction de J dans $\mathbb{R}$. On suppose f et g convexes.

- ① Montrer que la composée $g \circ f$ n'est pas toujours une fonction convexe.
- ② Montrer que si g est croissante alors $g \circ f$ est convexe.

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Soit f une fonction convexe sur I admettant un minimum en $a \in I$. Déterminer les variations de f .

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Montrer qu'une fonction f est à la fois convexe et concave si, et seulement si, f est affine.

► Indication ► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 5 ■ □ □

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$ et dont la dérivée seconde est bornée par M sur $[a, b]$.

En utilisant les fonctions $x \mapsto f(x) \pm M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$, montrer que

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq \frac{M}{2} (x-a)(b-x)$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □

Soit f une fonction convexe strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J . Que peut-on dire sur f^{-1} ?

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur I intervalle non singulier.

- ① Établir que pour tout $a, x \in I$ on a l'inégalité $\varphi(x) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$.
- ② Soit $f : [0, 1] \rightarrow I$ continue. Établir $\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t)) dt$.
- ③ Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue et d'intégrale égale à 1. Montrer que

$$\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq 0$$

- ④ Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continues et d'intégrales égales à 1. En justifiant et en exploitant l'inégalité $x \ln(x) \geq x - 1$ pour $x > 0$, montrer que

$$\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq \int_0^1 f(t) \ln(g(t)) dt$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■■■

Soit p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ainsi que $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels positifs.

- ① Montrer l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

- ② En déduire l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p}$$

► Indication

► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 9 ■■□

Montrer que si f vérifie

$$\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

alors f est convexe sur I .

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ■□□

Montrer que si f et g sont deux fonctions convexes sur le même intervalle I , alors la fonction $h = x \mapsto \max(f(x), g(x))$ aussi.

► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■□□

Soit f et g deux fonctions convexes, positives et de même monotonie sur I .

- ① On suppose f et g deux fois dérivables. Montrer que fg est convexe.

- ② Montrer que le résultat est conservé dans le cas général.

► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■□□

Soit f une fonction convexe sur un intervalle borné I , montrer que f est minorée.

► Indication

► Correction

EXERCICE 13 ■■■

Une fonction f de I dans $\mathbb{R}_+^*$ est dite logarithmiquement convexe si $\ln f$ est convexe.

- ① Montrer que si f est logarithmiquement convexe alors f est convexe.
La réciproque est-elle vraie?

- ② Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que f est logarithmiquement convexe si, et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto f(x)\alpha^x$ est convexe.

► Indication

► Correction

EXERCICE 14 ■ □ □

Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ croissante. Montrer que

$$f \text{ est constante} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 15 ■ □ □

Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est constante.

Le résultat est-il conservé si f est convexe et majorée sur $[a, +\infty[$?

► Indication

► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ ■

Soit f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Si on a le courage, on peut essayer de la montrer pour une fonction quelconque.

► Indication

► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ ■

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

► Indication

► Correction

EXERCICE 18 ■ (A) ■ Putnam Mathematical Competition

Soient $b_0, \dots, b_{2025}$ des nombres réels tels que $b_{2025} \neq 0$, et $1 \leq b_0 < \dots < b_{2025} \leq 2025$.
Notons $z_1, z_2, \dots, z_{2025}$ les racines complexes (possiblement égales) du polynôme

$$P(z) = \sum_{k=0}^{2025} b_k z^k$$

Soit $\mu = (|z_1| + \dots + |z_{2025}|)/2025$ la moyenne des distances de $z_1, z_2, \dots, z_{2025}$ à l'origine.

Déterminer la plus grande constante M telle que $\mu \geq M$ pour tous les choix possibles de $b_0, b_1, \dots, b_{2025}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- ① Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + \mu x \end{aligned}$$

est bornée sur $[a, b]$ et atteint sa borne supérieure en a ou en b .

- ② Supposons que f soit continue. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x \in I, \forall h > 0 \text{ vérifiant } (x-h, x+h) \in I^2, \quad 2hf(x) \leq \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, concave et vérifiant $f(0) = 1$.

- ① Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $x \frac{f(0)+f(x)}{2} \leq \int_0^x f(t)dt$.

- ② En déduire que $\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ □

Soit f une fonction réelle définie et convexe sur $[0, +\infty[$.

- ① Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet, quand x tend vers $+\infty$, une limite (réelle ou infinie).

- ② Dans le cas où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ admet, quand x tend vers $+\infty$, une limite (réelle ou infinie).

► Indication

► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

On utilise juste la définition.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Prenez g une fonction décroissante, pour le contre exemple.
Appliquer g à la définition de la convexité pour f .

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Utilisez l'inégalité des pentes pour obtenir des taux d'accroissement.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Utilisez les définitions.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

Quelles sont les propriétés de cette nouvelle fonction ?

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Théorème de la bijection pour connaître la monotonie de f^{-1} , Puis on l'applique à la définition de convexité de f .

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

- ① Tangentes et convexité
- ② Poser $a = \int_0^1 f(u)du \in I$ et considérons $x = f(t) \in I$.
- ③ Utiliser l'inégalité démontrée pour une certaine fonction.
- ④ Tout à gauche, et on force l'apparition de l'inégalité donnée ci dessus.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

Convexité de $x \mapsto x^p$, pour $p > 1$, puis l'inégalité de Jensen, donne presque la première inégalité.

Le deuxième inégalité, découle de la première en décomposant $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

C'est la preuve que l'inégalité des pentes implique la convexité.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

On écrit les définitions.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Dans la première question, on montre que $(fg)''$ existe et est positive sur I .
Dans la seconde, on peut montrer directement la définition, en forçant l'apparition des termes que l'on souhaite.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Si on avait les tangentes, ce serait immédiat...
Essayons de "minorer" f par ses cordes.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

- ① Par la définition, puis la convexité d'exponentielle.
- ② Le sens direct est immédiat en calculant $\ln(f_\alpha)$.
Pour le sens indirect, comparer l'inégalité de logarithmique convexité passée à l'exponentielle, et celle de f_α .

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Supposer f non constante et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On pourra penser à fixer une corde.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Raisonnez par l'absurde, et regardez les limites infinies de f .

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

Une des inégalité est donnée par les cordes, l'autre par les tangentes.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

On montrera par récurrence la propriété

$$\mathcal{H}_n : \forall p \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket \quad f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y)$$

On utilise alors la suite dyadique $\left(\frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers λ pour montrer la convexité.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18 Putnam Mathematical Competition

Rappelez vous de l'inégalité arithmético-géométrique.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

$$\textcircled{1} \text{ Il suffit de prendre } \mu = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\textcircled{2}$ Par l'absurde pour le sens indirect, en utilisant la question $\textcircled{1}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 20

Pour ①, utiliser la concavité. La courbe de f est au-dessus de la corde joignant $(0, f(0))$ et $(x, f(x))$. En comparant l'aire du trapèze et l'aire sous la courbe on obtient l'inégalité cherchée.

Pour ② intégrer l'inégalité de ① en faisant apparaître une double intégral, puis permuter l'ordre d'intégration. Enfin, utiliser une inégalité évidente du type $2 \left(\int_0^1 f \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f - \frac{1}{2}$ (carré parfait).

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 21

Considérer la fonction pente.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1

Soit $x \in [a, b]$. Par définition d'un segment, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $x = (1 - t)a + tb$. Comme f est convexe, on a

$$f(x) \leq (1 - t)f(a) + tf(b) = (1 - t)f(a) + tf(a) = f(a).$$

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

- Les fonctions $g : x \mapsto -x$ et $f : x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ mais leur composée $g \circ f : x \mapsto -x^2$ est concave.
- Soit $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$. On a $f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$. La croissance de g puis sa convexité implique que

$$(g \circ f)((1 - t)x + ty) \leq g((1 - t)f(x) + tf(y)) \leq (1 - t)(g \circ f)(x) + t(g \circ f)(y)$$

ce qui prouve $g \circ f$ est convexe sur I .

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Montrons que f est décroissante sur $I \cap]-\infty, a]$ et croissante sur $I \cap [a, +\infty[$. - Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y \leq a$. On a $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$.

On a $f(a) - f(x) \leq 0$ car f est minimale en a donc, comme $a - x > 0$, $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq 0$ puis $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$; cela prouve la décroissance de f sur $I \cap]-\infty, a]$. - Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $a \leq x < y$. On a $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. On a $f(y) - f(a) \geq 0$ car f est minimale

en a donc, comme $y - a > 0$, $0 \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ puis $0 \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$; cela prouve la croissance de f sur $I \cap [a, +\infty[$.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

Si f est une fonction affine, alors f et $-f$ sont affines donc convexes. Réciproquement, supposons f et $-f$ convexes. Si l'on fixe $a \in I$, alors la fonction $I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante et décroissante donc constante. Il existe

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad f(x) = f(a) + C(x - a)$$

L'égalité étant également vraie en a , la fonction f est affine.

↩ retour à l'EXERCICE 4

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 5

La fonction $g : x \mapsto f(x) - M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$ a pour dérivée seconde $g'' = f'' + M$ qui est positive sur $[a, b]$. La fonction g est donc convexe et, comme elle est nulle en a et b , elle est négative sur $[a, b]$. On prouve de même que la fonction $h : x \mapsto f(x) + M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$ est concave puis positive sur $[a, b]$. Finalement, on a prouvé :

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

Soit $(x, y) \in J^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. En appliquant l'inégalité de convexité à $f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(y)$ qui appartiennent à I , on a

$$f(\lambda f^{-1}(x) + (1-\lambda)f^{-1}(y)) \leq \lambda x + (1-\lambda)y$$

Ainsi, si f est croissante, alors en composant par f^{-1} qui est également croissante, on en déduit que f^{-1} est concave ; et si f est décroissante, alors, de même, f^{-1} est convexe.

↩ retour à l'EXERCICE 6

Correction de l'EXERCICE 7

- ① φ étant convexe, la courbe est au dessus de chacune de ses tangentes.
- ② Posons $a = \int_0^1 f(u)du \in I$ et considérons $x = f(t) \in I : \varphi(f(t)) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)(f(t) - a)$ En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient

$$\int_0^1 \varphi(f(t))dt \geq \varphi\left(\int_0^1 f(u)du\right)$$

car

$$\int_0^1 \varphi'(a)(f(t) - a)dt = \varphi'(a)\left(\int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 f(u)du\right) = 0$$

- ③ $\varphi : x \mapsto x \ln(x)$ est convexe sur $I = \mathbb{R}_+^*$ car $\varphi'(x) = 1 + \ln(x)$ croît avec x . L'inégalité précédente donne alors

$$0 \leq \int_0^1 f(t) \ln(f(t))dt$$

puisque $\int_0^1 f(t)dt = 1$ annule φ .

- ④ $x \mapsto x \ln(x)$ étant convexe et de tangente d'équation $y = x - 1$ en 1, on a

$$x \ln(x) \geq x - 1 \text{ pour tout } x > 0$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) \ln(f(t))dt - \int_0^1 f(t) \ln(g(t))dt &= \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) g(t)dt \\ &\geq \int_0^1 \left(\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right) g(t)dt = 0 \end{aligned}$$

↩ retour à l'EXERCICE 7

Correction de l'EXERCICE 8

- ① La fonction $x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ puisque $p > 1$. Si l'on considère $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}_+$ de somme égale à 1, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p \quad \text{soit} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

On aimerait avoir pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les égalités : $\lambda_i x_i = a_i b_i$ et $\lambda_i x_i^p = a_i^p$, ce qui conduirait à prendre $\lambda_i = b_i^q$ et $x_i = a_i b_i^{-\frac{q}{p}}$ mais il faudrait que tous les termes soient strictement positifs et que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Notons $S = \sum_{i=1}^n b_i^q$. Cette somme n'est pas forcément égale à 1 mais on va s'adapter.

- Si les a_i et b_i sont tous strictement positifs, alors on prend $\lambda_i = b_i^q/S$ et $x_i = a_i b_i^{-\frac{q}{p}}$. On a alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{S}{S} = 1$, $\lambda_i x_i = a_i b_i/S$ et $\lambda_i x_i^p = a_i^p/S$ donc :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i/S \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p/S\right)^{\frac{1}{p}}$$

puis, comme S est strictement positive, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} S^{1-1/p}$$

ce qui donne l'inégalité cherchée.

- Sinon, on pose $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_i b_i > 0\}$, et le cas précédent donne

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i \in I} a_i b_i \leq \left(\sum_{i \in I} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \in I} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

car les a_i^p et b_i^q sont positifs.

- ② Comme $q = \frac{p}{p-1}$, on va utiliser la question précédente en écrivant que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$(a_i + b_i)^p = a_i (a_i + b_i)^{p-1} + b_i (a_i + b_i)^{p-1}$$

L'inégalité de Hölder donne alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Si $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p > 0$, alors on obtient l'inégalité

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Sinon, l'inégalité est évidente car les réels considérés sont positifs.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 9

Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$. Si l'on pose $t = (1 - \lambda)x + \lambda y$ alors $x < t < y$ donc

$$f(x)(t - y) + f(t)(y - x) + f(y)(x - t) \leq 0.$$

Comme $t - y = (1 - \lambda)(x - y)$ et $x - t = \lambda(x - y)$ et $y - x > 0$, on obtient

$$f(t) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

ce qui prouve la convexité de f .

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Or $f(x) \leq h(x)$ et $\lambda \geq 0$ donc $\lambda f(x) \leq \lambda \max(f(x), g(x))$. De même $(1 - \lambda)f(y) \leq (1 - \lambda)h(y)$ donc :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$$

et, par symétrie, on a aussi

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$$

donc

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$$

ce qui prouve que h est convexe.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

- ① La fonction fg est deux fois dérivable et $(fg)'' = f''g + 2f'g' + g''f$. L'hypothèse de convexité implique $f'' \geq 0$ et $g'' \geq 0$ et celle de monotonie conduit à $f'g' \geq 0$. La caractérisation par la dérivée, permet de conclure.

- ② Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Comme les fonctions f et g sont positives, les inégalités de convexité conduisent à :

$$(fg)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq (\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \\ = \lambda(fg)(x) + (1 - \lambda)(fg)(y) + (\star)$$

avec

$$(\star) = (\lambda^2 - \lambda)((fg)(x) + (fg)(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)) \\ = (\lambda^2 - \lambda)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$$

L'hypothèse de même monotonie implique alors que :

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

Ainsi, comme $\lambda \in [0, 1]$, on a $(\star) \leq 0$ donc :

$$(fg)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(fg)(x) + (1 - \lambda)(fg)(y)$$

ce qui prouve la convexité de la fonction fg .

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

Soient $a, b, c \in I$, tel que $a < b < c$. On regarde le graphe de f par rapport aux cordes reliant ses points en a et b , puis en c et b .

En dehors de $[a, b]$, la courbe de f est au dessus de la corde entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Sur $[a, b]$, la courbe de f est au dessus de la corde entre $(c, f(c))$ et $(b, f(b))$.

Une fonction affine est minorée sur tout intervalle bornée (car elle continue par exemple), donc f est minorée par le plus petit de tous ces minorants.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

- ① Soit f une fonction logarithmiquement convexe. Considérons $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\ln f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y)$$

donc la croissance de la fonction exponentielle implique que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \exp(\lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y))$$

Comme la fonction exponentielle est convexe, on a

$$\exp(\lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

ce qui prouve que f est convexe sur I .

La réciproque est fautive : par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, mais la fonction $x \mapsto 2 \ln x$ ne l'est pas.

- ② • Soit f une fonction logarithmiquement convexe. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\forall x \in I \quad \ln(f(x)\alpha^x) = \ln f(x) + x \ln \alpha$$

Toute fonction affine étant convexe, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln f_\alpha$ est convexe comme somme de deux fonctions convexes. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction f_α est donc logarithmiquement convexe et donc convexe.

- Supposons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto f(x)\alpha^x$ soit convexe. Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. En passant à l'exponentielle, on cherche à prouver que $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a par inégalité de convexité

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x)\alpha^{(1-\lambda)(x-y)} + (1 - \lambda)f(y)\alpha^{\lambda(y-x)}$$

Pour conclure, il suffit donc de prouver que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\alpha^{(1-\lambda)(x-y)} = f(y)^{1-\lambda} f(x)^{\lambda-1} \quad \text{et} \quad \alpha^{\lambda(y-x)} = f(y)^{-\lambda} f(x)^\lambda$$

Si $x = y$, tout réel strictement positif α convient.

Si $x \neq y$, alors on prend $\alpha = \left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x-y}}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

Si f n'est pas constante, il existe x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$, par croissance de f . La courbe de f est au dessus de la corde passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, qui a une pente croissante, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, par théorème de minoration.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

f non constante, veut dire que f a une corde non horizontale. Par convexité et par théorème de minoration, si la corde est de pente positive, $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$ et si la corde est de pente négative, $f \xrightarrow{-\infty} +\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x - a + 1}$ donne un contre-exemple.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

Si l'on interprète le réel $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ comme l'aire d'un trapèze, la représentation graphique ci-dessous permet de comprendre que l'inégalité

$$\int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

découle de la position du graphe de f par rapport à la corde reliant les points d'abscisses a et b . Plus précisément, considérons la fonction affine φ telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$. La fonction f étant convexe, on a

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq \varphi(x).$$

En intégrant entre a et b , on obtient l'inégalité

$$\int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Pour la seconde inégalité, le réel $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ peut être vu comme l'aire d'un trapèze car, pour toute fonction affine ψ , on a

$$\int_a^b \psi(t)dt = (b-a)\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Pour montrer la deuxième inégalité, il suffit donc d'écrire que le graphe de la fonction f est au dessus de sa tangente en $\frac{a+b}{2}$. Ainsi, si l'on considère la fonction affine

$$\psi : x \mapsto f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

alors $\forall x \in [a, b] \quad \psi(x) \leq f(x)$. En intégrant entre a et b , on obtient l'inégalité

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt$$

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons par récurrence la propriété suivante

$$\mathcal{H}_n : \forall p \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket \quad f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y)$$

L'assertion $\mathcal{H}_0$ est clairement vraie. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain entier n et considérons $p \in \llbracket 0, 2^{n+1} \rrbracket$.

- Si p est pair, alors il existe $k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket$ tel que $p = 2k$ donc, d'après $\mathcal{H}_n$, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \\ &\leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y) \\ &= \frac{p}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)f(y) \end{aligned}$$

- Si p est impair, alors $\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y = \frac{X+Y}{2}$ avec

$$X = \frac{p-1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p-1}{2^{n+1}}\right)y \quad \text{et} \quad Y = \frac{p+1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p+1}{2^{n+1}}\right)y$$

On a donc

$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) \leq \frac{f(X) + f(Y)}{2}$$

Comme $p-1$ et $p+1$ sont deux entiers pairs appartenant à $\llbracket 0, 2^{n+1} \rrbracket$, le cas précédent donne l'inégalité

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p-1}{2^{n+1}}\right)f(y) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{p+1}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p+1}{2^{n+1}}\right)f(y) \right) \\ &= \frac{p}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)f(y) \end{aligned}$$

et montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

Soit $\lambda \in [0, 1]$. La suite $\left(\lambda_n = \frac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λ car, pour tout entier n , on a $|\lambda - \lambda_n| \leq 2^{-n}$. De plus, pour tout entier n , on a $\lfloor 2^n \lambda \rfloor \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket$ donc

$$f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)$$

En utilisant la continuité de f , on en déduit, en faisant tendre n vers $+\infty$, que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18 Putnam Mathematical Competition

L'inégalité A-G donne $\mu \geq (|z_1 \cdots z_n|)^{1/n} = \left(\frac{b_0}{b_n}\right)^{1/2025}$, par relation coefficients racines.

Comme $b_0 \geq 1$ et $b_{2025} \leq 2025$, on a $\mu \geq \left(\frac{1}{2025}\right)^{1/2025}$.

La condition d'égalité de l'inégalité A-G est si tous les z_i sont égaux. Dans ce cas, $P(z) = (z - z_1)^{2025}$. On peut alors avoir $b_0 = 1$ et $b_{2025} = 2025$.

↪ retour à l'EXERCICE 18

Correction de l'EXERCICE 19

- ① **Condition nécessaire.** Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I et $\mu \in \mathbb{R}$. L'application φ est convexe sur $[a, b]$ car c'est la somme de deux fonctions convexes. L'un des réels $\varphi(a), \varphi(b)$ est donc la borne supérieure de φ car si $M = \sup\{\varphi(a), \varphi(b)\}$,

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad \varphi(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda \varphi(a) + (1 - \lambda)\varphi(b) \leq \lambda M + (1 - \lambda)M = M$$

Condition suffisante. Soit $[a, b]$ un sous intervalle fermé de I . On choisit μ de sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$, c'est-à-dire que l'on considère l'application

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

Ainsi on a bien $\varphi(a) = \varphi(b)$. Par hypothèse on a

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad \varphi(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \varphi(a) = \varphi(b)$$

et en remplaçant φ par son expression en fonction de f , on vérifie facilement que ceci s'écrit aussi

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

Ceci étant vrai pour tout $[a, b] \subset I$, on en déduit que f est convexe.

- ② **Condition nécessaire.** Soit $x \in I$ et $h > 0$ tel que $(x - h, x + h) \in I^2$. On a

$$\forall t \in [0, h], \quad f(x) = f\left(\frac{(x - t) + (x + t)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x - t) + f(x + t))$$

et en intégrant cette inégalité pour $t \in [0, h]$ on obtient

$$\int_x^{x+h} f(x) dt \leq \frac{1}{2} \left[\int_{x-h}^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \right]$$

Condition suffisante. Utilisons le critère de la question précédente. Si f n'était pas convexe, il existerait un sous intervalle fermé $[a, b]$ de I et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

l'application $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) + \mu x$ n'admet pas son maximum en a ou en b . L'application φ étant continue, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\varphi(c) = \sup_{x \in [a, b]} \varphi(x)$, et par construction, on a $\varphi(c) > \varphi(a)$ et $\varphi(c) > \varphi(b)$. Soit $h = \inf\{b - c, c - a\}$. La continuité de φ entraîne

$$\int_{c-h}^{c+h} \varphi(t) dt < \int_{c-h}^{c+h} \varphi(c) dt = 2h\varphi(c)$$

et en remplaçant φ par son expression en fonction de f , on obtient

$$\int_{c-h}^{c+h} f(t) dt < 2hf(c)$$

Ceci est contraire aux hypothèses. La fonction f est donc convexe.

↪ retour à l'EXERCICE 19

Correction de l'EXERCICE 20

Par un argument géométrique (trapèze sous la courbe) la concavité donne

$$x \frac{1 + f(x)}{2} \leq \int_0^x f(t) dt$$

On en déduit $xf(x) \leq 2 \int_0^x f(t) dt - x$ donc

$$\int_0^1 xf(x) dx \leq 2 \int_{x=0}^1 \left(\int_{t=0}^x f(t) dt \right) dx - \frac{1}{2} \quad (1)$$

Or

$$\int_{x=0}^1 \int_{t=0}^x f(t) dt dx = \int_{t=0}^1 \int_{x=t}^1 f(t) dx dt = \int_{t=0}^1 (1-t)f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 tf(t) dt$$

La relation (1) donne alors

$$3 \int_0^1 xf(x) dx \leq 2 \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \quad (2)$$

Enfin

$$2 \left(\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

donne

$$2 \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) permettent alors de conclure.

↩ retour à l'EXERCICE 20

Correction de l'EXERCICE 21

- ① La convexité de f sur $[0, +\infty[$ peut se caractériser par: pour tout $a \in [0, +\infty[$, la fonction $p_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $[0, +\infty[\setminus\{a\}$. En particulier, $p_0 : x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$. p_a admet donc une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Compte tenu de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(0)}{x} = 0$, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

- ② On suppose que la limite $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est un réel. On en déduit aisément que $\ell = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, pour tout $x \in [0, +\infty[$. La croissance de la fonction p_x sur $[0, +\infty[\setminus\{x\}$ permet de dire que

$$\forall y \in \left[0, +\infty \right] \setminus \{x\}, \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \ell$$

et par suite, $f(y) \leq f(x) + (y-x)\ell$ pour tout $y \in]x, +\infty[$, c'est-à-dire $f(y) - y\ell \leq f(x) - x\ell$ pour tout $y \in]x, +\infty[$. On a ainsi prouvé la décroissance sur $[0, +\infty[$ de la fonction

$$\psi : x \mapsto f(x) - x\ell$$

d'où l'existence d'une limite ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$ de cette fonction ψ . Ce qui exprime que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x\ell) = \ell'$.

↩ retour à l'EXERCICE 21