

Trigonalisation d'une matrice

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$.

PARTIE A - PUISSANCES DE A

- ① Calculer le rang de la matrice A .
En déduire que celle-ci est inversible et calculer son inverse.
- ② Calculer $(P - I_3)^3 - 2P$. En déduire que P est inversible et préciser son inverse P^{-1} .
- ③ Comparer les matrices AP et PT .
- ④ (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
(b) Montrer que la formule précédente est encore valable pour $n = -1$.
- ⑤ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Quelle relation existe-t-il entre α_n et α_{n+1} ?

- ⑥ On pose $J = T - 2I_3$.
(a) Calculer J^0, J^1, J^2, J^3 puis établir l'expression de J^k pour tout $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.
(b) En déduire une expression détaillée de T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ puis α_n en fonction de n .
- ⑦ Détailler alors les éléments de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE B - APPLICATIONS

- ① **Application 1.** On définit trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$u_0 = 1, v_0 = -1, w_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 6v_n - 4w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + 6v_n - 2w_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$.

Exprimer X_n en fonction de A, n et X_0 et en déduire une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n .

- ② **Application 2.** Pour toute matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B . Autrement dit,

$$\mathcal{C}(B) = \{M \in M_3(\mathbb{R}), BM = MB\}$$

- (a) Donner trois éléments de $\mathcal{C}(B)$.
- (b) Montrer que si $(M, N) \in (\mathcal{C}(B))^2$ et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $\lambda M + \mu N \in \mathcal{C}(B)$. On dit que $\mathcal{C}(B)$ est stable par combinaison linéaire.
- (c) Montrer que si $(M, N) \in (\mathcal{C}(B))^2$ alors $MN \in \mathcal{C}(B)$. On dit que $\mathcal{C}(B)$ est stable par produit matriciel.

- ④ Montrer que si $M \in \mathcal{C}(B)$ et M inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{C}(B)$. On dit que $\mathcal{C}(B)$ est stable par passage à l'inverse.
- ⑤ Prouver que pour toute matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$,

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(T)$$

- ⑥ Montrer que les éléments de $\mathcal{C}(T)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où a, e et f sont des réels.
- ⑦ En déduire l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de trois matrices fixes que l'on précisera.