Geometria Euclidiana Plana

Por

Almir Rogério Silva Santos

e

Humberto Henrique de Barros Viglioni

UFS - 2011.1

Sumário

AULA 1

Geometria Euclidiana

META

Introduzir o método axiomático na geometria.

OBJETIVOS

Identificar e entender os axiomas de Euclides para a Geometria Plana.

Entender do porquê modificar os Axiomas de Euclides para o estudo axiomatizado da Geometria Euclidiana Plana.

Introduzir os Axiomas de Incidência e de ordem.

PRÉ-REQUISITOS

Fundamentos de Matemática

1.1 Introdução

Seja bem vindo caro aluno, daremos início aqui ao estudo axiomatizado daquela geometria estudada no ensino fundamental e médio, a Geometria Euclideana Plana, porém com um enfoque diferente. Faremos uso do método utilizado por Euclides em seu livro *Os Elementos*, o método axiomático.

A palavra "geometria" vem do grego *geometrein* (*geo*, "terra", e *metrein*, "medida"); originalmente geometria era a ciência de medição da terra. O historiador Herodotus (século 5 a.C.), credita ao povo egípcio pelo início do estudo da geometria, porém outras civilizações antigas (babilônios, hindu e chineses) também possuiam muito conhecimento da geometria.

Os Elementos de Euclides é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. Os 4 primeiros livros, que hoje pode ser pensando como capítulos, tratam da Geometria Plana conhecida da época, enquanto os demais tratam da teoria dos números, dos incomensuráveis e da geometria espacial.

Esta aula está segmentada em duas partes. Na primeira parte vamos apresentar para você, caro aluno, os postulados de Euclides e veremos porquê se faz necessário introduzir outros postulados a fim de que se obtenha uma geometria sólida, sem "lacunas" nos resultados.

1.2 Um Pouco de História

No livro 1 dos Elementos de Euclides, inicia-se o estudo da geometria plana, hoje conhecida como Geometria Euclidiana Plana em sua homenagem. Inicialmente ele define os objetos geométricos cujas propriedades deseja-se estudar. São 23 definições, entre as quais encontramos as definições de ponto, reta, círculo, triângulo, retas paralelas, etc. Em seguida ele enuncia 5 noções comuns, que são afirmações admitidas como verdades óbvias. São elas:

1 - Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais.

2 - Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais

3 - Se iguais são subtraídos de iguais, os totais obtidos são iguais

4 - Coisas que coincidem uma com a outra são iguais

5 - O todo é maior do que qualquer uma de suas partes

O que Euclides faz é construir axiomaticamente a geometria plana, através do método axiomático. Mas o que é o método axiomático? Se eu desejo convencê-lo que uma afirmação A_1 é verdadeira, eu posso mostrar como esta afirmação segue logicamente de alguma outra afirmação A_2, a qual você acredita ser verdadeira. No entanto, se você não acredita em A_2, eu terei que repetir o processo utilizando uma outra afirmação A_3. Eu devo repetir este processo várias vezes até atingir alguma afirmação que você acredite ser verdadeira, um que eu não precise justificar. Esta afirmação tem o papel de um axioma (ou postulado). Caso essa afirmação não exista, o processo não terá fim, resultando numa sequência sucessiva de demonstrações.
Assim, existem dois requisitos que devem ser cumpridos para que uma prova esteja correta:

> **Requisito 1:** Aceitar como verdadeiras certas afirmações chamadas "axiomas" ou "postulados", sem a necessidade de prova.
>
> **Requisito 2:** Saber como e quando uma afirmação segue logicamente de outra.

O trabalho de Euclides destaca-se pelo fato de que com apenas 5 postulados ele foi capaz de deduzir 465 proposições, muitas complicadas e não intuitivas.
A seguir apresentamos os 5 postulados de Euclides.

Postulado 1. *Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.*

Postulado 2. *Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.*

Postulado 3. *Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.*

Postulado 4. *Todos os ângulos retos são iguais.*

Algumas observações antes do Postulado 5 merecem atenção.

- Com apenas estes 4 postulados Euclides provou 28 proposições
- Nos Postulados 1 e 2 os termos entre parênteses não foram empregados por Euclides; porém, pela forma como ele os aplicam, deduz-se que estes termos foram implicitamente assumidos.
- Euclides define ângulos sem falar em medida e ângulo reto como um ângulo que é igual ao seu suplementar. Daí, a necessidade do Postulado 4.

A primeira proposição do Livro I segue abaixo:

Proposição 1. *Existe um triângulo equilátero com um lado igual a um segmento de reta dado.*

Demonstração

- Passo 1: Pelo Postulado 3, podemos traçar um círculo com centro em uma extremidade do segmento de reta e raio igual a este segmento.
- Passo 2: Como no passo 1, podemos traçar um outro círculo com centro na outra extremidade e mesmo raio.
- Passo 3: Tome um dos pontos de interseção dos dois círculos como o terceiro vértice do triângulo procurado.

□

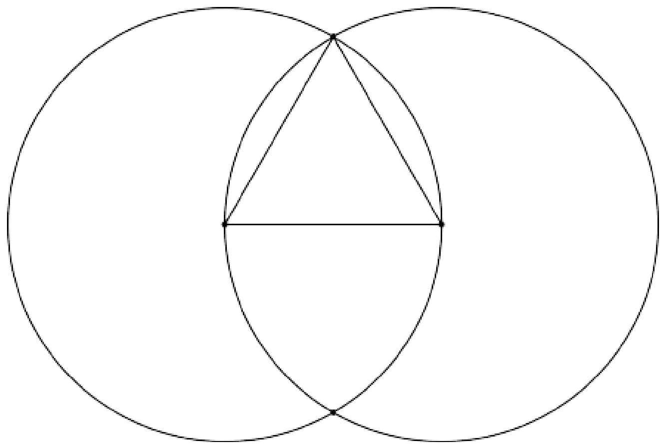

Figura 1.1: Um triângulo equilátero.

Existe uma falha nesta demonstração. Se queremos construir a geometria a partir dos axiomas, precisamos justificar toda afirmação a partir deles. Note que justificamos os passos 1 e 2 utilizando o Postulado 3. Porém, não existe nenhum postulado para sustentar a veracidade do passo 3, ou seja, nenhum dos postulados garante que o ponto de interseção entre os dois círculos existe.
De fato, em muitas passagens dos Elementos Euclides faz uso de afirmações que não estão explícitas. Apesar disso, Euclides foi audacioso em escrever os Elementos, um belíssimo trabalho que de tão pouco deduziu-se centenas de afirmações.

1.2.1 O Quinto Postulado de Euclides

Analisemos a proposição 28 do Livro I.
Proposição 28. *Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r. Se a soma dos ângulos formados (ver figura 1.2) é 180 graus, então m e n são retas paralelas.*
Na simbologia atual podemos representar a Proposição 28 da seguinte forma

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow m \cap n = \emptyset.$$

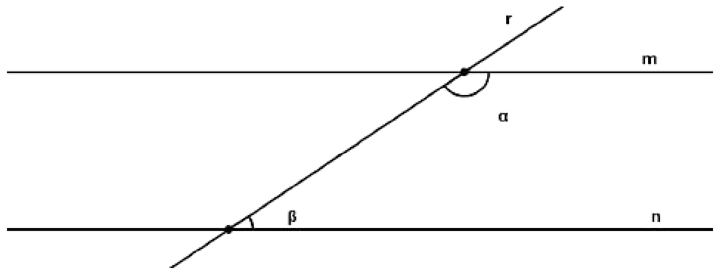

Figura 1.2: $\alpha + \beta = 180°$.

E a recíproca, é verdadeira? Ou seja, é verdade que

$$m \cap n = \emptyset \Rightarrow \alpha + \beta = 180°?$$

A resposta a essa pergunta é complexa e levou mais de dois mil anos para ser entendida completamente. De fato, esta recíproca é exatamente o conteúdo do Postulado 5.

Postulado 5. *Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r. Se a soma dos ângulos formados (ver figura) é menor do que* 180 *graus, então m e n não são paralelas. Além disso, elas se intersectam do lado dos ângulos cuja soma é menor do que* 180 *graus.*

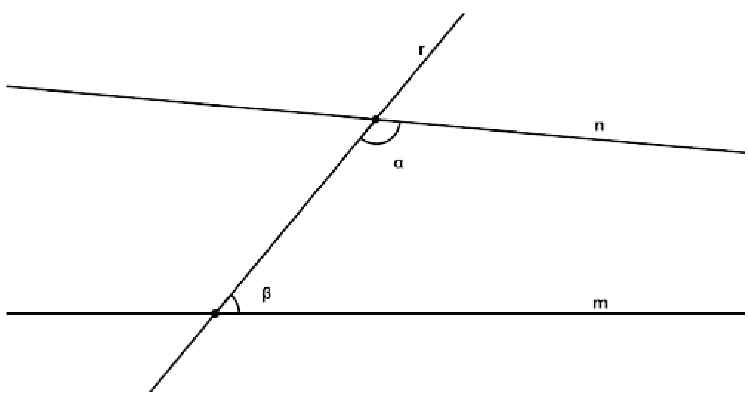

Figura 1.3: $\alpha + \beta < 180°$.

Esta foi a forma como Euclides enunciou o Postulado 5. Na simbologia atual podemos representar a Proposição 28 da seguinte forma

$$\alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow m \cap n \neq \emptyset \tag{1.1}$$

Note que a afirmação 1.1 é equivalente a

$$m \cap n = \emptyset \Rightarrow \alpha + \beta \geq 180^\circ.$$

Porém, se $\alpha + \beta > 180^\circ$ teríamos que a soma dos suplementares de α e β seria $< 180^\circ$, implicando, pelo Postulado 5, que $m \cap n \neq \emptyset$; contradição!

Logo, o Postulado 5 é equivalente a afirmação

$$m \cap n = \emptyset \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ,$$

que é exatamente a recíproca da Proposição 28.

Muitos acreditavam que quando Euclides chegou no Postulado 5 não soube como demonstrá-lo e então resolveu deixá-lo como postulado. Com certeza Euclides deve ter pensado muito até aceitar que teria que acrescentar este postulado, visto que diferentemente dos demais, este parece muito mais com um teorema que com uma simples afirmação que podemos aceitá-la sem demonstração.

1.3 Geometria de Incidência

A partir desta seção, caro aluno, iremos iniciar nosso estudo axiomático da Geometria Euclidiana Plana. Nas seções anteriores, vimos que os postulados de Euclides não são suficientes para demonstrar todos os resultados da geometria plana. De fato, vimos que nos Elementos de Euclides existem lacunas que não são possíveis preenchê-las somente com o conteúdo dos Elementos.

O que iremos fazer neste curso é axiomatizar a geometria de tal forma que não deixemos lacunas. Iremos usar um conjunto de axiomas que serão suficientes para demonstrar todos os resultados conhecidos desde o ensino fundamental.

Não podemos definir todos os termos que iremos usar. De fato, para definir um termo devemos usar um outro termo, e para definir esses termos devemos usar outros termos, e assim por diante. Se não fosse permitido deixar alguns termos indefinidos, estaríamos envolvidos em um processo infinito.
Euclides definiu linha como aquilo que tem comprimento sem largura e ponto como aquilo que não tem parte. Duas definições não muito úteis. Para entendê-las é necessário ter em mente uma linha e um ponto. Consideraremos alguns termos, chamados de primitivos ou elementares, sem precisar defini-los. São eles:

1. ponto;
2. reta;
3. pertencer a (dois pontos pertencem a uma única reta);
4. está entre (o ponto C está entre A e B);

O principal objeto de estudo da Geometria Euclidiana Plana é o plano.

O **plano** é constituído de pontos e retas.

1.3.1 Axiomas de Incidência

Pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas. O primeiro grupo é constituído pelos *axiomas de incidência.*

Axioma de Incidência 1: *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*

Axioma de Incidência 2: *Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos.*

Axioma de Incidência 3: *Existem três pontos distintos com a propriedade que nenhuma reta passa pelos três pontos.*

Figura 1.4:

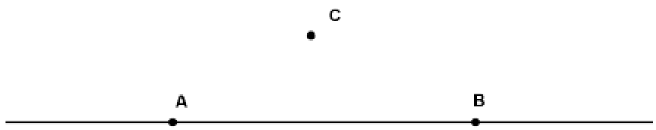

Figura 1.5:

Observação Destes três axiomas deduzimos alguns fatos simples, porém importantes:

- Toda reta possui pelo menos dois pontos.
- Não existe uma reta contendo todos os pontos.
- Existem pelo menos três pontos no plano.

Definição 1.1. Duas retas intersectam-se quando elas possuem um ponto em comum. Se elas não possuem nenhum ponto em comum, elas são ditas *paralelas*.

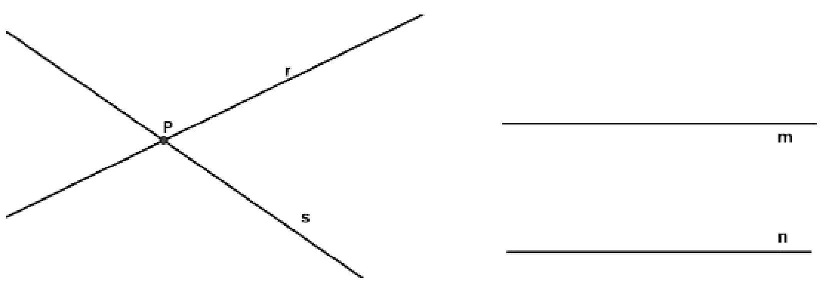

Figura 1.6: r e s se intersectam no ponto P e m e n são paralelas.

Proposição 1.1. *Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto.*

Demonstração Sejam m e n duas retas distintas. Se m e n possuem pelo menos dois pontos distintos em comum então, pelo Axioma de Incidência 1, m e n coincidem, que é uma contradição com o fato que m e n são retas distintas.
Logo, m e n ou possuem um ponto em comum ou nenhum. $\square$

Portanto a Proposição 1.1 diz que se duas retas não são paralelas, então elas têm um ponto em comum.

Proposição 1.2. *Para todo ponto P, existem pelo menos duas retas distintas passando por P.*

Demonstração Pelo Axioma de Incidência 3, existe um ponto Q distinto de P. Pelo Axioma de Incidência 1 existe uma única reta l que passa por P e Q. Pelo Axioma de Incidência 3 existe um ponto R que não pertence a l. Novamente pelo Axioma de Incidência 1, existe uma reta r distinta de l que contém os pontos P e R. $\square$

Proposição 1.3. *Para todo ponto P existe pelo menos uma reta l que não passa por P.*

Exercício 1.1. Prove a Proposição 1.3.

1.3.2 Modelos para a geometria de incidência

Um plano de incidência é um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ onde $\mathcal{P}$ é um conjunto de pontos e $\mathcal{R}$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{P}$, chamados de retas, satisfazendo os três axiomas de incidência.

Exemplo 1.1. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$. O par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ é plano de incidência, já que satisfaz os três axiomas de incidência (Verifique!). Observe que dois subconjuntos quaisquer de $\mathcal{R}$ têm interseção vazia. Portanto, não existem retas paralelas.

Exemplo 1.2. Sejam $\mathcal{P} = \mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $\mathcal{R}$ = conjunto de todos os grandes círculos em $\mathbb{S}^2$. Não é plano de incidência. Já que a interseção de dois grandes círculos em $\mathbb{S}^2$ são dois pontos. (ver figura 1.7.)

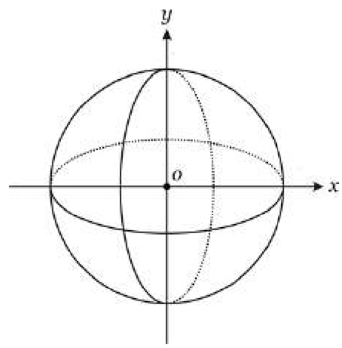

Figura 1.7: Esfera unitária no espaço euclidiano.

Exemplo 1.3. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E\}$ e $\mathcal{R}$ = {todos os subconjuntos de $\mathcal{P}$ com dois elementos}. É plano de incidência (Verifique!). Dada uma reta l e um ponto fora dela, existem pelo menos duas retas paralelas a l.

Exemplo 1.4. Sejam $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$. É plano de incidência (Verifique!). Dada uma reta l e um ponto P fora dela, existe uma única reta r paralela a l passando por P.

Nos exemplos acima, as retas são subconjuntos de $\mathcal{P}$ e não uma reta como nós a conhecemos.

1.4 Axiomas de ordem

Dissemos anteriormente que a noção de "está entre" é uma noção primitiva. Nesta seção iremos apresentar o segundo grupo de axiomas que rege as leis para esta noção, os *axiomas de ordem*.

Escreveremos $A * B * C$ para dizer que o ponto B está entre os pontos A e C.

Axioma de ordem 1: *Se $A * B * C$, então A, B e C são pontos distintos de uma mesma reta e $C * B * A$.*

Axioma de ordem 2: *Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.*

Figura 1.8:

Este axioma assegura que uma reta não é um círculo, onde não temos a noção bem clara de um ponto está entre outros dois. (Ver figura 1.9.)

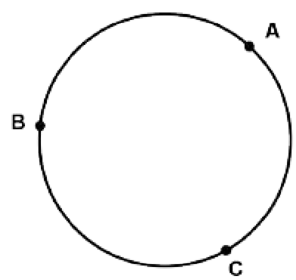

Figura 1.9:

Axioma de ordem 3: *Dados dois pontos distintos B e D, existem pontos A, C e E pertencentes à reta contendo B e D, tais que $A * B * D, B * C * D$ e $B * D * E$.*
Este axioma assegura que uma reta possui infinitos pontos.

Definição 1.2. Sejam dois pontos distintos A e B, o segmento AB é o conjunto de todos os pontos entre A e B mais os pontos

Figura 1.10:

extremos A e B.

Definição 1.3. A semi-reta com origem em A e contendo B é o conjunto dos pontos C tais que $A * B * C$ mais o segmento AB, sendo representada por S_{AB}.

Figura 1.11: À esquerda o segmento AB e à direita a semi-reta S_{AB}.

Proposição 1.4. *Para quaisquer dois pontos A e B tem-se:*

a) $S_{AB} \cup S_{BA} =$ *reta determinada por A e B.*

b) $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$.

Demonstração

a) Seja m a reta determinada por A e B. Da definição de semi-reta, segue imediatamente que $S_{AB} \cup S_{BA} \subset m$. Se C pertence à reta m, então o Axioma de Ordem 2 implica somente uma das três alternativas:

1) $A * C * B$
2) $C * A * B$
3) $A * B * C$

No caso 1, C pertence ao segmento AB; no caso 2 C pertence à semi-reta S_{BA} e no caso 3, C pertence a $S_{AB.}$ Em qualquer caso, C pertence a $S_{AB} \cup S_{BA}$. Daí, $m \subset S_{AB} \cup S_{BA}$.

b) Deixamos a prova deste ítem como exercício.

□

Definição 1.4. Seja uma reta m. Dois pontos distintos fora de m, A e B, estão em um mesmo lado da reta m se o segmento AB não a intersecta, caso contrário dizemos que A e B estão em lados opostos de m. O conjunto dos pontos de m e dos pontos C tais que A e C estão em um mesmo lado da reta m é chamado de semi-plano determinado por m contendo A e será representado por $P_{m,A}$.

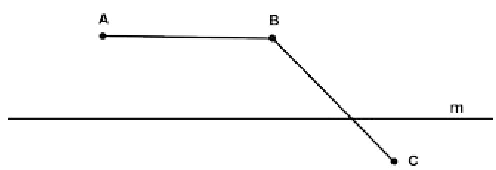

Figura 1.12: A e B estão no mesmo lado de m. B e C estão em lado opostos de m.

Axioma de ordem 4: *Para toda reta l e para qualquer três pontos A, B e C fora de l, tem-se:*

i) Se A e B estão no mesmo lado de l e B e C estão no mesmo lado de l, então A e C estão no mesmo lado de l.

ii) Se A e B estão em lados opostos de l e B e C estão em lados opostos de l, então A e C estão no mesmo lado de l.

Corolário 1.1. *Se A e B estão no mesmo lado de l e B e C estão em lados opostos de l, então A e C estão em lados opostos de l.*

Ver figura 1.12.

Exercício 1.2. Prove o Corolário 1.1.

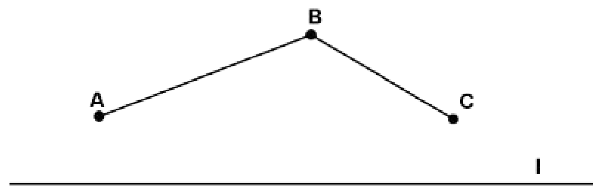

Figura 1.13:

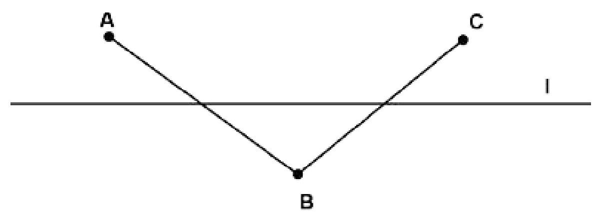

Figura 1.14:

Proposição 1.5. *Toda reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta m.*

Demonstração

Passo 1: Existe um ponto A fora de l (Proposição 1.3).

Passo 2: Existe um ponto O pertencente a l (Axioma de incidência 2).

Passo 3: Existe um ponto B tal que $B * O * A$ (Axioma de ordem 3).

Passo 4: Então A e B estão em lados opostos de l, e l possui pelo menos dois lados.

Passo 5: Seja C um ponto fora de l diferente de A e B. Se C e B não estão no mesmo lado de l, então A e C estão no mesmo lado de l (Axioma de ordem 4). Logo, o conjunto dos pontos fora de l é a união dos semi-planos S_{mA} e S_{mB}

Passo 6: Se $C \in S_{mA} \cap S_{mB}$ com $C \notin m$, então A e B estão do mesmo lado (Axioma de ordem 4); contradição com o passo 4. Assim, se $C \in S_{mA} \cap S_{mB}$, então $C \in m$. Portanto, $S_{mA} \cap S_{mB} = m$.

□

Teorema 1.1 (Pasch). *Se A, B, C sã pontos distintos não colineares e m é qualquer reta intersectando AB em um ponto entre A e B, então l também intersecta AC ou BC. Se C não está em m então m não intersecta ambos AC e BC.*

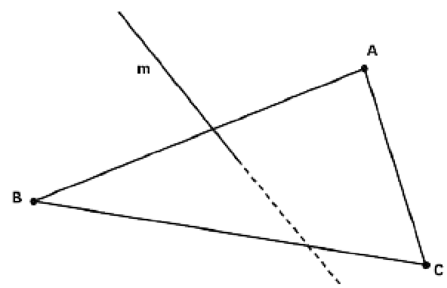

Figura 1.15: Teorema de Pasch

Euclides utilizou este teorema sem prová-lo.

Exercício 1.3. Prove o Teorema de Pasch.

RESUMO

Nesta aula você conheceu os 5 postulados de Euclides. Você viu que na prova da Proposição 1 dos Elementos de Euclides, ele fez uso de afirmações que não estavam explícitas em seus 5 postulados. Você viu também que o Postulado 5 dos Elementos nada mais é do que a recíproca da Proposição 28, o que gerou dúvida entre muitos matemáticos da época se o Postulado 5 era mesmo um postulado ou uma proposição que Euclides não sabia prová-la. Além disso, você viu os dois primeiros grupos de axiomas, de incidência e ordem, que permitirá tapar os "buracos" deixados por Euclides nos Elementos. Finalmente, você também viu o Teorema de Pasch que é uma consequência dos axiomas de ordem.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula daremos continuidade a construção da geometria plana axiomatizada. Introduziremos mais dois grupos de axiomas, os axiomas de medição de segmentos e de ângulos.

ATIVIDADES

1. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

   ( ) Por definição, uma reta m é "paralela"a uma reta l se para quaisquer dois pontos P e Q em m, a distância perpendicular de P a l é a mesma distância perpendicular de Q a l.

   ( ) Foi desnecessário para Euclides assumir o postulado das paralelas porque o Francês Legendre o provou.

(   ) "Axioma" ou "postulados" são afirmações que são assumidas, sem justificativas, enquanto que "teoremas" ou "proposições" são provadas usando os axiomas.

(   ) $A * B * C$ é logicamente equivalente a $C * B * A$.

(   ) Se A, B e C são pontos colineares distintos, é possível que ambos $A * B * C$ e $A * C * B$ ocorram.

2. Sejam dois pontos A e B e um terceiro ponto C entre eles. É possível provar que C pertecente a reta que passa por A e B utilizando somente os 5 postulados de Euclides?

3. É possível provar a partir dos 5 postulados de Euclides que para toda reta l existe um ponto pertencente a l e um ponto que não pertence a l?

4. É possível provar a partir dos 5 postulados de Euclides que pontos e retas existem?

5. Para cada par de axiomas de incidência construa um modelo no qual estes dois axiomas são satisfeitos mas o terceiro axioma não. (Isto mostra que os três axiomas são *independentes*, no sentido qeu é impossível provar qualquer um deles dos outros dois.)

6. Verifique se são planos de incidência os pares $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ seguintes:

   (a) $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by + c = 0, \text{ com } ab \neq 0\}$.

   (b) $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R}$ = conjunto dos círculos em $\mathbb{R}^2$.

   (c) $\mathcal{P}$ = conjunto das retas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{R}$ = conjunto dos planos em $\mathbb{R}^3$.

7. Construa exemplos distintos de plano de incidência com o mesmo número de pontos, ou seja, o conjunto $\mathcal{P}$ será o mesmo porém $\mathcal{R}$ será diferente.

8. Mostre que não existe um exemplo de um plano de incidência com 6 pontos, em que todas as retas tenham exatamente 3 pontos.

9. Quantos pontos comuns a pelo menos duas retas pode ter um conjunto de 3 retas no plano? E um conjunto de 4 retas do plano? E um conjunto de n retas do plano?

10. Dizemos quem três ou mais pontos são *colineares* quando todos pertencem a uma mesma reta. Do contrário, dizemos que eles são *não colineares*. Mostre que três pontos não colineares determinam três retas. Quantas retas são determinadas por quatro pontos sendo que quaisquer três deles são não colineares? E se forem 6 pontos? E se forem n pontos?

11. Prove que a união de todas as retas que passam por um ponto A é o plano.

12. Dados $A * B * C$ e $A * C * D$, prove que A, B, C e D são quatro pontos colineares distintos.

13. Dado $A * B * C$. Prove que $S_{AB} = S_{AC}$.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.

AULA 2

Axiomas de Medição

META

Introduzir os axiomas de medição de segmentos e ângulos.

OBJETIVOS

Determinar o comprimento de um segmento e a distância entre dois pontos.

Determinar a medida de um ângulo

Determinar propriedades de pontos de uma reta utilizando as coordenadas do ponto.

PRÉ-REQUISITOS

Para seguir adiante, é necessário que o aluno tenha compreendido os axiomas de incidência e de ordem apresentados na aula anterior.

2.1 Introdução

Olá, caro aluno. Espero que tenha gostado da nossa primeira aula. Nela apresentamos os cinco postulados de Euclides, bem como a primeira proposição dos Elementos para ilustrar a necessidade de modificação de seus axiomas para obter uma geometria sólida e consistente, com toda afirmação devidamente justificada. Vimos também os axiomas de incidência e ordem.

Note que, com apenas o conjunto de axiomas apresentados na primeira aula, ainda não temos a geometria euclidiana plana que conhecemos. O que estamos fazendo é introduzindo as regras (axiomas) a serem seguidas pelos objetos de estudo da geometria plana: plano, reta e ponto.

O próximo passo é aprender a medir o comprimento de um segmento. Para este fim emprega-se diversos instrumentos de medição, dos quais a régua graduada é um dos mais conhecidos. Aprendemos com a experiência que para medir o comprimento de um segmento AB com uma régua graduada, basta colocar a régua graduada sobre o segmento AB, verificar a quais números correspondem o ponto A e o ponto B e então o módulo da diferença será o comprimento do segmento AB. Aprendemos também que se um ponto C está entre A e B, então o comprimento de AB é a soma dos comprimentos dos segmentos AC e CB.

Veremos nesta aula como introduzir estas noções axiomaticamente.

2.2 Axiomas de Medição de Segmentos

A maneira como procedemos para medir segmentos é regida pelos seguintes axiomas:

Axioma de medição 1: *A todo segmento corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se as extremidades coincidem.*

Está implícito no enunciado do axioma, a escolha de uma unidade de medida que será fixada ao longo de nosso curso. O número a que se refere o axioma é denominado de comprimento do segmento ou distância entre os pontos que define o segmento.

Axioma de medição 2: *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Fixada uma correspondência, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado *coordenada* daquele ponto. Portanto, se a e b são as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente, então o comprimento do segmento AB, denotado por $\overline{AB}$, é igual a $\overline{AB} = |a - b|$.

Axioma de medição 3: *Se* $A * C * B$, *então*

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$$

É importante observar aqui que o axioma não diz que se $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ então $A * C * B$. O que você acha? É verdadeira essa afirmação?
O Axioma de Medição 2 diz apenas que existe uma bijeção entre os pontos de uma reta e os números reais, porém não fixa nenhuma restrição para a bijeção. O Axioma de Medição 3, garante que a bijeção não será arbitrária, ela tem que satisfazer a uma certa ordem. É isto que diz a próxima proposição.

Proposição 2.6. *Se em uma semi-reta* S_{AB} *considerarmos um segmento* AC *com* $\overline{AC} < \overline{AB}$, *então* $A * C * B$.

Demonstração Sabemos que, pelo Axioma de Ordem 2, só pode ocorrer uma das seguintes possibilidades: $B * A * C$, $A * B * C$ ou $A * C * B$.

Vamos mostrar que não pode ocorrer a primeira nem a segunda possibilidade.
Como A é a origem da semi-reta S_{AB}, então não é verdade que $B * A * C$, caso contrário teríamos C não pertenceria a esta semi-reta. Se $A * B * C$, então, pelo Axioma de Medição 3 teríamos $\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}$, implicando que $\overline{AB} < \overline{AC}$, que é uma contradição com a hipótese $\overline{AC} < \overline{AB}$.
Logo, só pode ocorrer $A * C * B$. $\square$

Teorema 2.1. *Sejam A, B e C pontos distintos de uma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. Então $A * C * B$ se e somente se o número c está entre a e b.*

Demonstração Suponha $A * C * B$. Pelo Axioma de Medição 3 e pela definição de comprimento, tem-se que

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB},$$

implicando que

$$|c - a| + |b - c| = |a - b|.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $a < b$. Assim, obtemos que

$$|c - a| < b - a \ \text{ e } \ |b - c| < b - a.$$

Isto implica que

$$c - a < b - a \ \text{ e } \ b - c < b - a.$$

Logo, $a < c < b$.
Suponha agora que $a < c < b$. Então

$$b - a = b - c + c - a,$$

ou seja,

$$|b - a| = |b - c| + |c - a|.$$

Segue daí que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ e então $\overline{AC} < \overline{AB}$ e $\overline{CB} < \overline{AB}$. Se A, B e C pertencem à mesma semi-reta determinada por A, segue da Proposição 2.6 que $A * C * B$. Caso B e C pertençam a semi-retas distintas, então $B * A * C$. Neste caso,

$$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{BA} < \overline{AC},$$

o que está em contradição com a igualdade obtida anteriormente.

□

Definição 2.1. O *ponto médio* C de um segmento AB é um ponto deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Teorema 2.2. *Um segmento tem exatamente um ponto médio.*

Demonstração Sejam a e b as coordenadas dos extremos de um segmento AB. Pelo Axioma de Medição 2, existe um ponto C, na reta que contém A e B, com coordenada $c = \frac{a+b}{2}$.
Afirmação 1: O ponto C é o ponto médio de AB.
De fato, verifica-se que

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= |a - c| = \left|\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}\right| \\ \overline{CB} &= |c - b| = \left|\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2}\right|, \end{aligned}$$

e como c está entre a e b, usando o Teorema 2.1, obtemos que C é o ponto médio de AB.
Afirmação 2: O ponto C é o único ponto médio de AB.
Se D é ponto médio de AB, então $\overline{AD} = \overline{DB}$. Se a, b e d são coordenadas dos pontos A, B e D, respectivamente, então

$$|a - d| = |d - b|.$$

Daí, obtemos $d = \frac{a+b}{2}$. (Por quê?) Assim, $c = d$ e pelo Axioma de Medição 2, segue que $D = C$. □

Definição 2.2. Seja A um ponto e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $\overline{AB} = r$.

Segue do Axioma de Medição 2 o Terceiro Postulado de Euclides: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

O conjunto dos pontos C que satisfazem a desigualdade $\overline{AC} < r$ é chamada de *disco* de raio r e centro A. Um ponto C está fora do circulo se $\overline{AC} > r$ e dentro se $\overline{AC} < r$.

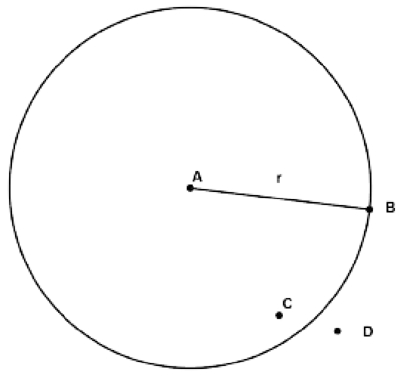

Figura 2.1: Círculo de centro A e raio $\overline{AB} = r$. C está dentro do disco e D está fora do disco.

2.3 Axiomas de Medição de Ângulos

Definição 2.3. Um *ângulo* com vértice A é um ponto A com duas semi-retas S_{AB} e S_{AC}, chamadas os *lados* do ângulo.

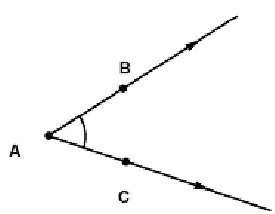

Figura 2.2: Ângulo com vértice A.

Notação: $\hat{A}, B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$.

Usaremos a notação $\hat{A}$ quando não houver dúvida a que ângulo estaremos nos referindo.
Se dois ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ possuem um lado S_{AD} em comum e os outros dois lados S_{AB} e S_{AC} são semi-retas distintas de uma mesma reta, os ângulos são ditos *suplementares*.

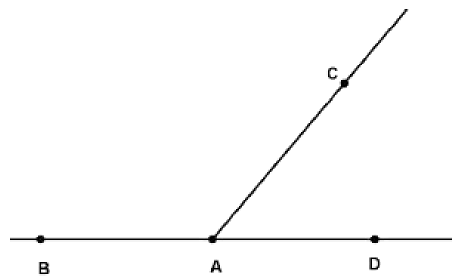

Figura 2.3: Os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ são suplementares.

Um ângulo é dito *raso* se os lados são semi-retas distintas de uma mesma reta. Dois ângulos sumplementares formam um ângulo raso.

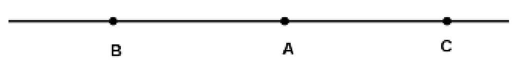

Figura 2.4: O ângulos $B\hat{A}C$ é raso.

Introduzimos o conceito de ângulo sem a necessidade de falar em medida de ângulo, "graus", por exemplo. A maneira de introduzir medidas aos ângulos é através dos próximos axiomas.

Axioma de Medição 4: *A todo ângulo corresponde um único número real maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se os lados do ângulo coincidem.*

Uma semi-reta divide um semi-plano se ela pertence ao semi-plano e sua origem pertence à reta que o determina.

Axioma de Medição 5: *Existe uma bijeção entre as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano e os números entre zero e* 180, *de modo que a diferença entre os números é a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.*

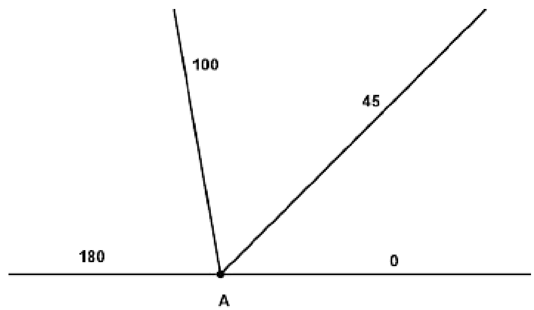

Figura 2.5:

A medida de um ângulo $A\hat{O}B$ será denotada pelo próprio ângulo. Assim, $A\hat{O}B$ poderá indicar o ângulo ou a medida deste ângulo, mas sempre estará claro no contexto se estaremos nos referindo ao ângulo ou a sua medida.
Observe que o ângulo raso mede 180° graus.

Definição 2.4. Uma semi-reta S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$ se o segmento AB intercecta S_{OC}. Se uma semi-reta S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$ de tal modo que $A\hat{O}C = C\hat{O}B$, dizemos que S_{OC} é a *bissetriz* do ângulo $A\hat{O}B$.

Axioma de Medição 6: *Se uma semi-reta* S_{OC} *divide um ângulo* $A\hat{O}B$, *então*

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B.$$

Definição 2.5. Dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ditos opostos pelo vértice se os pares de lados (S_{OA}, S_{OD}) e (S_{OB}, S_{OC}) são semi-retas distintas de uma mesma reta. Note que ângulos opostos pelo

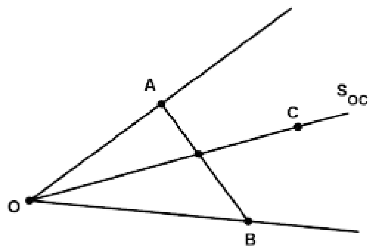

Figura 2.6: S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$.

vértice têm o mesmo suplemento. Portanto, ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

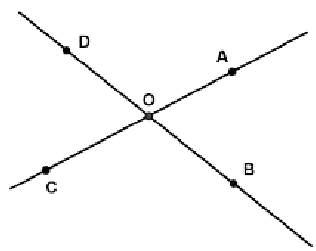

Figura 2.7: $C\hat{O}D$ e $A\hat{O}B$ são opostos pelo vértice.

Definição 2.6. Um ângulo cuja medida é $90°$ é chamado *ângulo reto*. Se duas retas se intersectam formando um ângulo reto, dizemos que as retas são *perpendiculares*. Se a soma das medidas de dois ângulos é $90°$, dizemos que os ângulos são *complementares*.

Teorema 2.3. *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.*

Demonstração A existência é garantida pelo Axioma de Medição 5. (Por quê?)
Suponha então que existam duas perpendiculares r e r' a uma reta m passando pelo ponto A. Assim, r e r' formam um ângulo α em

um dos semi-planos determinados por m. Mas como r e r' formam ângulos retos com m, segue que $\alpha = 0$. (ver figura) Logo, r e r' coincidem. $\square$

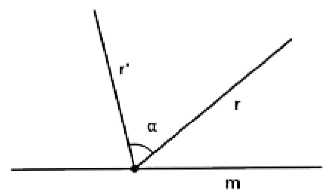

Figura 2.8:

Definição 2.7. Um ângulo é *agudo* se mede menos de $90°$ e é *obtuso* se mede mais de $90°$.
A medida de ângulos que usaremos neste curso será o grau, uma invenção dos babilônios que data da época antes de Cristo e que entraram para a história da ciência matemática como uma contribuição importante que utilizamos até hoje.

RESUMO

Nesta aula aprendemos a medir segmentos e ângulos. Além disso, vimos a utilidade do uso de coordenadas dos pontos de uma reta para resolver problemas. Vimos também que os axiomas de medição nos permite ordenar os pontos de uma reta de acordo com a ordenação dos números reais, bastando para isso colocar os pontos da reta em correspondência biunívoca com os números reais de forma que esta correspondência obedeça aos axiomas de medição. Mostramos também que todo segmento de reta possui um único ponto médio. Introduzimos para cada ângulo uma medida entre zero e 180.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos começar nosso estudo de congruência de triângulos. Definiremos congruência de segmentos e de triângulos. Em seguida, daremos as condições para que dois triângulos sejam congruentes.

ATIVIDADES

1. São dados três pontos A, B e C com B entre A e C. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = (\overline{AB} + \overline{BC})/2$.

2. São dados três pontos A, B e C com C entre A e B. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = (\overline{AB} - \overline{BC})/2$.

3. São dados pontos A, B, C e D colineares com coordenadas x, y, z e w tais que $x < y < z < w$. Prove que $AC = BD$ se e só se $AB = CD$.

4. Existem pontos A, B e C tais que $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$ e $\overline{AC} = 1$?

5. Sejam M, A e B pontos distintos situados sobre uma mesma reta. Se $a = \overline{MA}/\overline{MB}$ diz-se que M divide AB na razão a.

   (a) Dado qualquer número real positivo a mostre que existe um único ponto $M \in AB$ tal que M divide AB na razão a.

   (b) Dado qualquer número real positivo $a \neq 1$, mostre que existe um único ponto M na reta determinada por A e B, que não pertence a AB e que divide AB na razão a. Porque o caso $a = 1$ teve que ser excluído?

6. Sejam M, N, A e B pontos distintos sobre uma mesma reta, sendo que $M \in AB$ e que $N \notin AB$. Suponha que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = a.$$

   Neste caso, dizemos que M e N dividem harmonicamente o seguimento AB.

   (a) Quando $a > 1$, determine as posições relativas dos quatro pontos.

   (b) Faça o mesmo para o caso em que $0 < a < 1$.

   (c) Mostre que
$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} \pm \frac{1}{\overline{AN}}.$$

   (d) Se O é o ponto médio de AB. Mostre que

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON}.$$

7. Qual a medida da diferença entre o suplemento de um ângulo e seu complemento.

8. (a) Qual o ângulo formado entre o ponteiro dos minutos e das horas quando são 12 horas e 30 minutos?

(b) Exatamente às 12 horas um ponteiro estará sobre o outro. A que horas voltará a ocorrer que os dois ponteiros formem um ângulo de 0^o.

9. Um polígono é uma figura formada por uma sequência de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots,$ $A_{n-1}A_n$ e satisfazendo as condições

   (a) $A_n = A_1$;

   (b) os lados da poligonal se intercectam somente em suas extremidades;

   (c) cada vértice é extremidade de dois lados;

   (d) dois lados com mesma extremidade não pertecem a uma mesma reta.

   O segmento ligando vértices não consecutivos de um polígono é chamado uma diagonal do polígono. Faça o desenho de um polígono de seis lados. Em seguida desenhe todas as suas diagonais. Quantas diagonais terá um polígono de 20 lados? E de n lados?

10. São dados quatro pontos A, B, C e D. É também sabido que $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ e $2\overline{AC}$ são iguais. O que você pode afirmar sobre a posição relativa dos quatro pontos?

11. Mostre que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.

12. Sejam m e n duas retas. Mostre que se m está contida em um dos semi-planos determinados por n então ou $m = n$ ou m e n não se intersectam.

13. Ao longo de meia hora o ponteiro dos minutos de um relógio descreve um ângulo raso (ou seja, o ângulo entre sua posição inicial e sua posição final é um ângulo raso). Quanto tempo ele leva para descrever um ângulo de $60°$ graus?

14. De quantos graus move-se o ponteiro dos minutos enquanto o ponteiro das horas percorre um ângulo raso?

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.
2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.
3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.
4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.
5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.

AULA
3

Congruência

META

Introduzir e explorar o conceito de congruência de segmentos e de triângulos.

OBJETIVOS

Identificar segmentos e ângulos congruentes.
Identificar os casos de congruência de triângulos.
Usar os casos de congruência de triângulos para resolver problemas.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve ter compreendido os axiomas de medição de segmentos e de ângulo.

3.1 Introdução

A idéia intuitiva de congruência é que duas figuras são congruentes se elas podem ser movidas sem alterar o tamanho e a forma, de tal maneira que coincidam. Assim, dois triângulos equiláteros de mesmo tamanho são congruentes, dois círculos de mesmo raio também são congruentes, e assim por diante. Da mesma forma, dois segmentos de mesmo comprimento são congruentes.
Nesta aula daremos a definição formal de congruência, começando com segmentos e depois triângulos.

3.2 Congruência de Segmentos

Definição 3.1. Sejam AB e CD segmentos. Se $\overline{AB} = \overline{CD}$, então os segmentos são chamados *congruentes*, e escrevemos $AB = CD$.

Uma relação $\sim$, definida em um conjunto A, é chamada uma relação de *equivalência* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a \sim a, \forall a \in A$ (reflexiva).

2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (simetria).

3. $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (trasitiva).

Teorema 3.1. *São válidas as seguintes propriedades:*

a) $AB = AB$ *(reflexiva).*

b) $AB = CD \Rightarrow CD = AB$ *(simétrica).*

c) $AB = CD$ *e* $CD = EF$ *então* $AB = EF$ *(transitiva).*

Devido a este teorema, a relação de congruência é uma relação de *equivalência*.

3.3 Congruência de Triângulos

Exatamente como definimos congruência para segmentos em termos de comprimento, definimos congruência entre ângulos em termos de medida. Isto é, se dois ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ possuem a mesma medida, então diremos que os ângulos são congruentes, e indicaremos por

$$A\hat{B}C = D\hat{E}F.$$

Da mesma forma que a relação de congruência para segmentos é uma relação de equivalância, a relação de congruência para ângulos também é uma relação de equivalência.

Note que se dois ângulos suplementares são congruentes, então cada um deles é um ângulo reto. Além disso, temos também que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, já que possuem o mesmo suplemento.

Definição 3.2. Dois triângulos ABC e DEF são congruentes se existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices tal que os lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Indicaremos por $ABC = DEF$ para dizer que os dois triângulos são congruentes e a correspondência é dada por

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow D, \\ B &\leftrightarrow E, \\ C &\leftrightarrow F. \end{aligned}$$

Neste caso, teremos seis congruências induzidas sobre os lados e os ângulos.

$$\begin{aligned} AB &= DE, \\ BC &= EF, \\ CA &= FD, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{D},\\ \hat{B} &= \hat{E},\\ \hat{C} &= \hat{F}.\end{aligned}$$

De fato, para que dois triângulos sejam congruentes é necessário que as seis congruências acima sejam satisfeitas. Porém, se queremos verificar se dois triângulos são congruentes será necessário verificar somente algumas delas.
Isto é o que diz o próximo axioma, conhecido também como o *primeiro caso de congruência de triângulos.*

Axioma de Congruência 1 *Sejam ABC e DEF dois triângulos. Se $AB = DE, AC = DF$ e $\hat{A} = \hat{D}$, então $ABC = DEF$.*

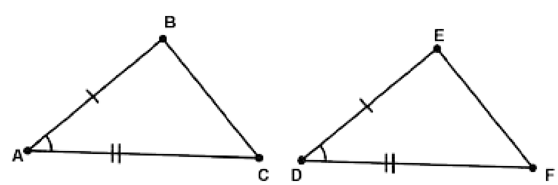

Figura 3.1:

Este axioma é também conhecido como o caso LAL (lado, ângulo, lado) de congruência de triângulos.

Definição 3.3. Um triângulo é dito *isósceles* se possui dois lados conguentes. Estes lados são chamados de *laterais* e o terceiro de *base.* Os ângulos opostos as laterais são chamados de *ângulos da base.*

Proposição 3.7. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

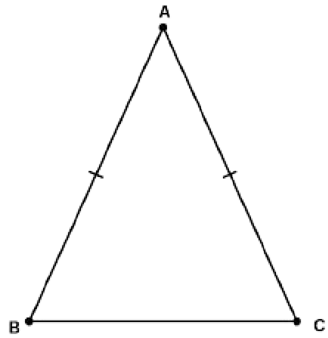

Figura 3.2: ABC é um triângulo isósceles com base $AB = AC$.

Demonstração Considere a correspondência entre os vértices de um triângulo isósceles ABC :

$$\begin{array}{ccc} A & \leftrightarrow & A \\ B & \leftrightarrow & C \\ D & \leftrightarrow & B \end{array}$$

Por hipótese, segue que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AC} = \overline{AB}$ e $\hat{A} = \hat{A}$. Pelo Axioma de Congruência 1, segue que $ABC = ACB$. Isto implica que $\hat{B} = \hat{C}$. $\square$

Observe que a prova anterior mostra que o triângulo ABC é congruente ao triângulo ACB. Caso você tenha dificuldades em acompanhar a prova, você pode desenhar duas cópias do triângulo e repetir a prova para estes dois triângulos. A prova de Euclides para este resultado aparece no início dos Elementos e é longa. A prova acima é devida, essencialmente, ao grande geômetra grego Pappus de Alexandria (350 d.C.), embora ele não tenha usado a formulação do Axioma de Congruência 1 que utilizamos aqui.

Corolário 3.1. *Todo triângulo equilátero possui os três ângulos congruentes.*

Exercício 3.1. Prove o Corolário 3.1.

Teorema 3.2 (Caso ALA)**.** *Dados dois triângulos ABC e DEF com $AB = DE, \hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC = DEF$.*

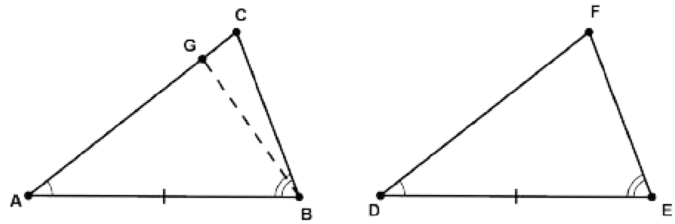

Figura 3.3: ABC é um triângulo isósceles com base $AB = AC$.

Demonstração Sabemos que existe um ponto G na semi-reta S_{AC} tal que $AG = DF$. (ver figura 3.3) Por construção, temos que os triângulos ABG e DEF satisfazem $AG = DF, AB = DE$ e $\hat{A} = \hat{D}$. Pelo Axioma de Congruência 1, obtemos que $ABG = DEF$. Pela definição de congruência de triângulos, segue que $A\hat{B}G = \hat{E} = A\hat{B}C$. Logo, as semi-retas S_{BG} e S_{BC} coincidem. Isto implica que G coincide com o ponto C. Então $ABC = ABG = DEF$. $\square$

Observe que o ponto G na figura acima poderia ser tal que $A*C*G$ e mesmo assim obteríamos o mesmo resultado.
Este teorema é também conhecido como o 2° Caso de Congruência de Triângulos ou o caso ALA (ângulo, lado, ângulo) de congruência de triângulos.

Corolário 3.2. *Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.*

Este corolário é a recíproca da Proposição 3.7. Tente demonstrá-lo de forma análoga, porém será necessário usar o caso ALA de congruência de triângulos. De fato, os lados congruentes serão opostos aos ângulos congruentes.

Corolário 3.3. *Todo triângulo que possui todos os ângulos congruentes é equilátero.*

Definição 3.4. Seja ABC um triângulo e D um ponto da reta que contém B e C.

i) O segmento AD é a *mediana* do triângulo ABC relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC.

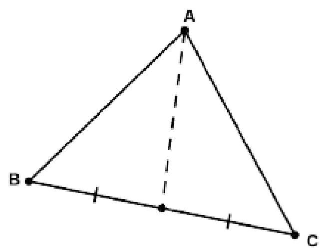

Figura 3.4: Mediana

ii) O segmento AD é a *bissetriz* do ângulo $\hat{A}$ se a semi-reta S_{AD} divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos congruentes.

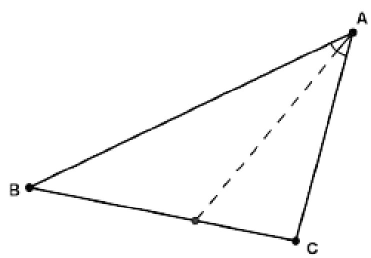

Figura 3.5: Bissetriz

iii) O segmento AD é a *altura* do triângulo ABC relativamente ao lado BC, se AD é perpendicular à reta que contém B e C.

Proposição 3.8. *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente à base é também a bissetriz e altura.*

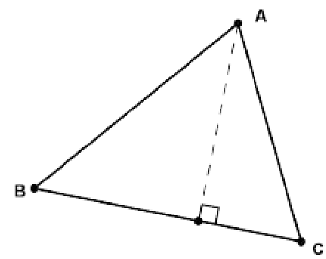

Figura 3.6: Altura

Demonstração Seja ABC um triângulo com $AB = AC$. Seja AD a mediana relativamente à base BC. Considere os triângulos ABD e ACD. Como D é o ponto médio de BC, então $BD = CD$. Além disso, ABC é um triângulo isósceles, o que implica que $AB = AC$ e $\hat{B} = \hat{C}$. Logo, os triângulos ABD e ACD são tais que $AB = AC, BD = CD$ e $A\hat{B}D = A\hat{C}D$. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, segue que $ABD = ACD$. Em particular, $B\hat{A}D = C\hat{A}D$, o que implica que AD é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. Além disso, temos $A\hat{D}B = A\hat{D}C$, e como estes ângulos são suplementares, segue que $A\hat{D}B = A\hat{D}C = 90°$. □

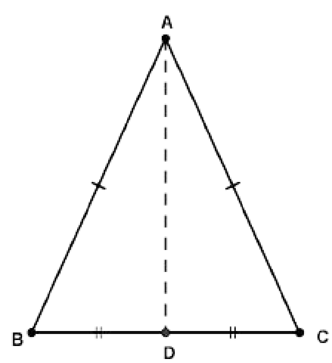

Figura 3.7:

Teorema 3.3 (Caso LLL)**.** *Se dois triângulos têm três lados cor-*

respondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

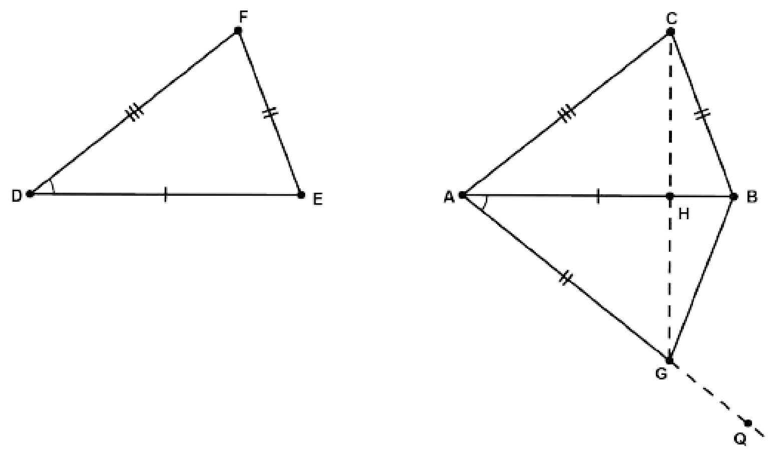

Figura 3.8: Altura

Demonstração Sejam ABC e DEF triângulos tais que $AB = DE, BC = EF$ e $AC = DF$. A idéia da prova é construir um triângulo AGC, com o ponto G no lado oposto da reta que contém DB, tal que $AGC = DEF$. Então mostraremos que $ABC = AGC$.

- Passo 1: Pelo Axioma de Medição de Ângulo 2, existe uma semi-reta S_{AQ} no semi-plano oposto ao que contém C, tal que $B\hat{A}Q = \hat{D}$.

- Passo 2: Na semi-reta S_{AQ} tome um ponto G tal que $AG = DF$.

- Passo 3: Pelo 1° caso de congruência de triângulos, segue que $AGB = DEF$.

- Passo 4: O segmento CG intercepta AB no ponto H, pois estão em lados opostos.

- Passo 5: Note que $AG = DF = AC$. Assim, o triângulo ACG é isósceles e então $A\hat{G}C = A\hat{C}G$.

- Passo 6: Da mesma forma, concluímos que o triângulo BCG é isósceles com $B\hat{C}G = B\hat{G}C$.

- Passo 7: Porém,

$$\begin{aligned} A\hat{G}B &= A\hat{G}C + C\hat{G}B \\ &= A\hat{C}G + G\hat{C}B \\ &= A\hat{C}B. \end{aligned}$$

Portanto, podemos aplicar o Axioma de Congruência 1 para concluir que $ACB = AGB$. Mas como $AGB = DFE$, segue que $ABC = DEF$. □

Este teorema é conhecido como o 3° Caso de Congruência de Triângulo, ou caso LLL (lado, lado, lado) de congruência de triângulos.

RESUMO

Caro aluno, definimos congruência de segmentos, de ângulos e de triângulos. Introduzimos o Axioma de Congruência, conhecido também como o 1° caso de congruência de triângulo, que nos permitiu obter todos os outros casos de congruência de triângulos.

PRÓXIMA AULA

Na próxma aula continuaremos nosso estudo axiomático da geometria, com o estudo de propriedades geométricas de retas e triângulos sem o postulado das paralelas.

ATIVIDADES

1. Em um triângulo ABC a altura do vértice A é perpendicular ao lado BC e o divide em dois segmentos congruentes. Mostre que $AB = AC$.

2. Mostre que os pontos médios de um triângulo isósceles formam um triângulo também isósceles.

3. Sejam dois triângulos ABC e ABD tais que $AC = AD$. Se AB é a bissetriz do ângulo $C\hat{A}D$, então AB é perpendicular a CD.

4. Considere um círculo de raio R centrado em um ponto O. Sejam A e B pontos do círculo. Mostre que o raio que passa pelo ponto médio do segmento AB é perpendicular a este segmento. Inversamente, mostre que, se o raio é perpendicular ao segmento então o cortaria no seu ponto médio.

5. Dois círculos de centro A e B e mesmo raio se interceptam em dois pontos C e D. Se M é ponto de intersecção de AB e CD, mostre que M é ponto médio de AB e CD.

6. Considere um ângulo $A\hat{O}B$ onde $AO = BO$. Trace dois círculos de mesmo raio centrados em A e em B. Suponha que seus raios sejam grande suficientes para que eles se interceptem em dois pontos. Mostre que a reta ligando estes dois pontos passa pelo vértice do ângulo e é sua bissetriz.

7. Seja $ABCD$ um quadrilátero e E um ponto entre A e B. Suponha que $AD = DE$, $\hat{A} = D\hat{E}C$ e $A\hat{D}E = B\hat{D}C$. Mostre que os triângulos ADB e EDC são congruentes.

8. Determine o conjunto de pontos que satisfazem a propriedade de serem equidistante dos extremos de um segmento.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.

AULA 4

Geometria sem o Postulado das Paralelas

META:

Introduzir o Teorema do Ângulo Externo e suas consequências.

OBJETIVOS:

Ao final da aula o aluno deverá compreender como

1. aplicar o Teorema do Ângulo Externo;
2. identificar triângulos retângulos congruentes.
3. aplicar o Teorema do Ângulo Externo e a Desigualdade Triangular para a demonstração do Teorema de Saccheri-Legendre.

PRÉ-REQUISITOS

Para um bom acompanhamento desta aula o aluno deverá ter compreendido todos os casos de congruência de triângulos da aula anterior.

4.1 Introdução

Observe, caro aluno, que já estamos na Aula 4 e até agora ainda não introduzimos o postulado das paralelas, além daquela forma introduzida na primeira aula. Até agora todos os nossos resultados demonstrados até aqui não foi necessário usar o postulado das paralelas. Portanto, qualquer modelo de geometria que seja válido os nossos axiomas, incidência, ordem, medição e de congruência, os resultados provados até esta aula também será válido nesta geometria.

O que faremos nesta aula é demonstrar mais alguns resultados, alguns bem conhecidos de vocês e outros nem tanto. O que estamos interessados é mostrar que certas questões que podem ser respondidas na Geometria Euclidiana Plana não podem ser respondidas em uma geometria em que não seja válido o postulado das paralelas, simplesmente porque seus axiomas não nos dá informações suficientes.

Veremos nesta aula alguns resultados que serão muito úteis nas aulas seguintes, sendo o seu entendimento crucial para o bom encaminhamento do curso. Por exemplo, o Teorema do Ângulo Interior alternado, que nos dá condições suficientes para que duas retas sejam paralelas, e o Teorema do Ângulo Exterior que relaciona os ângulo internos de um triângulo com seus ângulos exteriores.

Todos os estudantes que algum dia estudou geometria plana na escola, sabem que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a $180°$. Nesta aula, veremos que até aqui só temos condições de mostrar que a soma destes ângulos é no máximo $180°$, sendo igualdade provada somente com o postulado das paralelas.

4.2 Teorema do Ângulo Interior Alternado

O próximo teorema requer uma definição.

Definição 4.1. Seja t uma reta transversal a duas retas m e n, com t interceptando m em E e n em B. Escolha pontos D e F em m tais que $D * E * F$, e pontos A e C em n tais que A e D estejam no mesmo lado de t e $A * B * C$. Os ângulos $D\hat{E}B, F\hat{E}B, A\hat{B}E$ e $C\hat{B}E$ são chamados *ângulos interiores.* Os pares de ângulos $(A\hat{B}E, F\hat{E}B)$ e $(D\hat{E}B, C\hat{B}E)$ são chamados de pares de *ângulos interiores alternados.*

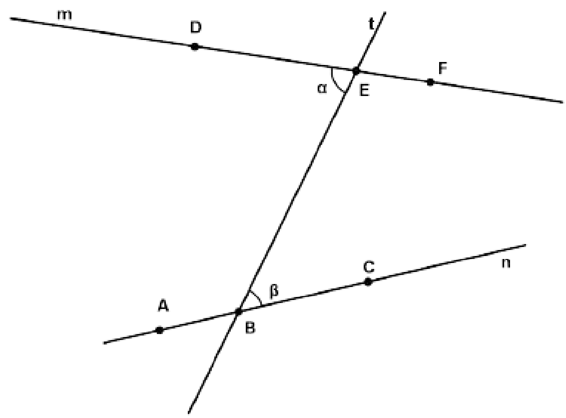

Figura 4.1: α e β são ângulo internos alternados.

Definição 4.2. Duas retas são ditas paralelas se elas não se intersectam.

Teorema 4.1. *(Teorema do ângulo interior alternado): Se duas retas m e n são cortadas por uma reta transversal t formando um par de ângulos interiores alternados congruentes, então as duas retas são paralelas.*

Demonstração: Suponha que $m \cap n = \{G\}$ e $D\hat{E}B = C\hat{B}E$. Podemos supor que G está no mesmo lado de F e C (ver figura 4.2). Existe um ponto H na semi-reta S_{ED}, tal que $HE = BG$. Considere os triângulos HEB e GBE. Como $HE = BG, EB = BE$ e $H\hat{E}B = G\hat{B}E$, segue do 1° Caso de Congruência de Triângulos que

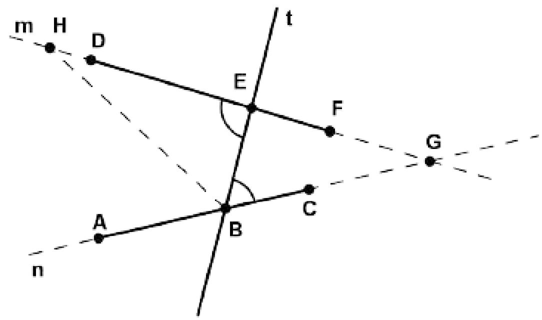

Figura 4.2:

$HEB = GBE$. Em particular, $G\hat{E}B = H\hat{B}E$. Mas como $G\hat{E}B$ é o suplementar de $H\hat{E}B$, segue que os ângulos $H\hat{B}E$ e $G\hat{B}E$ são suplementares. Isto implica que S_{BH} e S_{BG} são semi-retas opostas. Como S_{BA} é oposta a S_{BG}, segue que $S_{BA} = S_{BH}$. Portanto H pertence a $m \cap n$. Contradizendo a Proposição 1.1.
Logo, m e n são paralelas.
Este teorema tem duas importantes consequências.

Corolário 4.1. *Duas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.*

Demonstração Se m e n são retas distintas perpendiculares a uma reta t, então os ângulo interiores alternados são retos, portanto congruentes.
Logo, o Teorema do Ângulo Interior Alternado implica o resultado.

$\square$

Corolário 4.2. *Dada uma reta m e um ponto P fora dela, existe uma única reta l perpendicular a m passando por P.*

Demonstração (Existência) Tome dois pontos distintos de m, B e C . Se PB é perpendicular, terminou a construção. Caso contrário, no semi-plano oposto ao que contém P, trace uma semi-reta com origem em B formando com S_{BC} um ângulo congruente com $P\hat{B}C$. Nesta semi-reta, tome um ponto P' tal que $P'B = PB$. Considere os triângulos ABP e ABP', onde A é o ponto de interseção de PP' com m. Pelo 1° Caso de Congruência de Triângulos, segue que $ABP = ABP'$ (Por quê ?) Como $P\hat{A}B$ e $P'\hat{A}B$ são congruentes e suplementares, segue que PP' é perpendicular a m.

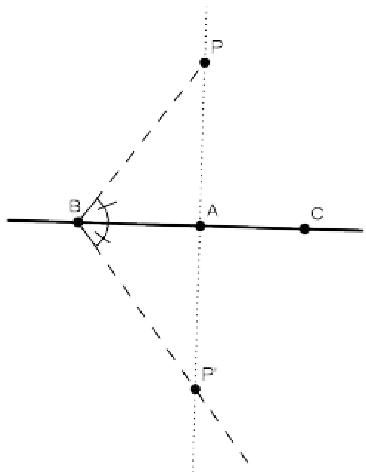

Figura 4.3:

(Unicidade) Suponha que existam duas retas perpendiculares a m passando por P. Pelo Teorema do ângulo interno alternado, as retas coincidem, já que todos os ângulos internos são retos. □

O ponto A da demonstração anterior é chamado de *pé* da perpendicular baixada de P a m.

Corolário 4.3. *Dada uma reta l e P um ponto fora dela, existe pelo menos uma paralela a l que passa por m.*

Demonstração Pelo Corolário 4.2 existe uma única perpendicular r a l passando por P. Da mesma forma, pelo Teorema 2.1 existe uma única perpendicular s a r, passando por P. Portanto, pelo Teorema do Ângulo Interior Alternado, segue que s é uma reta paralela a l passando por P. □

Nós estamos acostumados à Geometria Euclidiana onde de fato existe uma *única* reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela. Neste ponto de nosso curso, ainda não é possível provar este resultado. Também estamos acostumados à recíproca do Teorema do Ângulos Internos Alternados: "se duas retas são paralelas, então os pares de ângulos interiores alternados formados por uma transversal são congruentes." Para obtermos estes resultados só será possível com o axioma das paralelas, que veremos na próxima aula.

4.3 Teorema do Ângulo Exterior

Considere a definição seguinte antes do próximo teorema.

Definição 4.3. Os ângulos *internos* de um triângulo são os ângulos formados pelos lados do triângulo. Um ângulo suplementar a um ângulo interno do triângulo é denominado ângulo *exterior* do triângulo.

Todo triângulo possui exatamente seis ângulos externos. Esses seis ângulos formam três pares de ângulos congruentes.

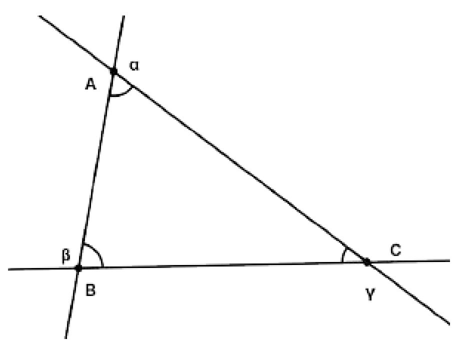

Figura 4.4: $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ são ângulo internos. α, β e γ são ângulos externos.

Teorema 4.2. *(Teorema do Ângulo Exterior): Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer ângulo interno não adjacente a ele.*

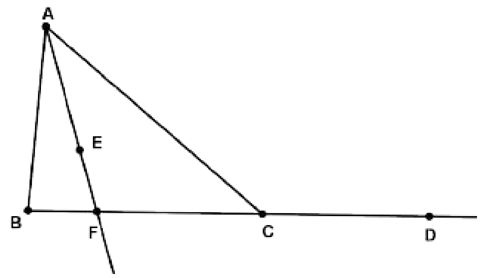

Figura 4.5:

Demonstração Sejam ABC um triângulo e $A\hat{C}D$ um ângulo externo. (ver figura) Vamos mostrar que $A\hat{C}D > B\hat{A}C$.
Se $A\hat{C}D = B\hat{A}C$, então as retas contendo A e B e contendo CD são paralelas, contradizendo a hipótese que B é oponto de interseção destas retas.
Suponha que $B\hat{A}C > A\hat{C}D$. Então existe uma semi-reta S_{AE} que divide $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}D = C\hat{A}E$. Seja F o ponto de interseção de BC com S_{AE}. Pelo Teorema do ângulo alternado, as retas contendo AF e CD são paralelas, contradizendo o fato que elas intersectam-se no ponto F. Portanto, $A\hat{C}D > B\hat{A}C$.
Para mostrar que $A\hat{C}D > C\hat{B}A$, o raciocínio é análogo, utilizando-se o ângulo oposto pelo vértice a $A\hat{C}D$. □

O Teorema do Ângulo Externo aparece na 16^a Proposição dos Elementos de Euclides. Sua prova continha um "buraco", que com os nossos axiomas é possível corrigi-lo. Euclides foi levado pela figura. Ele considerou o ponto médio M de AC e um ponto N na semi-reta S_{BM} tal que $BM = MN$. Daí ele assumui erroneamente, com base no diagrama, que N está no interior do ângulo $A\hat{C}D$. Como $AMB = CMN$ (caso LAL de congruência de triângulos), Euclides

concluiu corretamente que $A\hat{C}D > B\hat{A}C$.
Você consegue corrigir o argumento de Euclides ?
Como consequência do Teorema do Ângulo Exterior, podemos provar o 4° caso de congruência de triângulos.

Proposição 4.9 (4° Caso de Congruência de Triângulos)**.** *Sejam ABC e DEF triângulos satisfazendo $AC = DF$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Então $ABC = DEF$.*

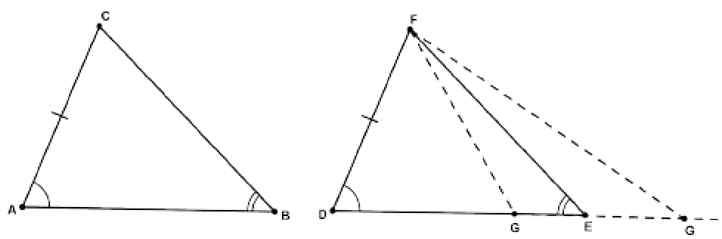

Figura 4.6:

Demonstração Seja G um ponto da semi-reta S_{DE}, tal que $DG = AB$. Pelo caso LAL temos $ABC = DGF$. Isto implica que $D\hat{G}F = \hat{B} = D\hat{E}F$. Como G pertence a S_{DE} temos três casos: $D*G*E, D*E*G$ ou $E = G$. Se $D*G*E$, então $D\hat{G}F$ é um ângulo externo do triângulo FGE. Do Teorema do Ângulo Externo, segue que $D\hat{G}F > D\hat{E}F$, o que é falso. Se $D*E*G$ então $D\hat{E}F$ é um ângulo externo do triângulo FGE. Novamente, do Teorema do Ângulo Externo, segue que $D\hat{E}F > E\hat{G}F$, o que é falso. Logo, $G = F$ e $ABC = DEF$. □

Definição 4.4. Um triângulo é dito *retângulo* se um dos ângulos internos é reto. O lado oposto ao ângulo reto é denominado de *hipotenusa* e os outros dois de *catetos*.

Pelo Teorema do Ângulo Interior Alternado, segue que um triângulo tem no máximo um ângulo reto. Mais ainda, pelo Teorema do Ângulo Externo um triângulo retângulo possui dois ângulos agudos.

4.4 Congruência de Triângulos Retângulos

Como um triângulo possui no máximo um ângulo reto, segue que se dois triângulos retângulos são congruentes, então os ângulos retos devem estar em correspondência. Devido a isto, existe mais um caso de congruência específico para triângulos retângulos.

Teorema 4.3. *Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são $\hat{C}$ e $\hat{F}$. Se $AB = DE$ e $BC = EF$, então $ABC = DEF$.*

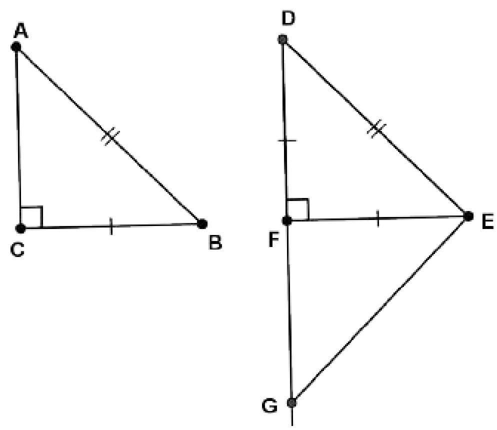

Figura 4.7:

Demonstração Seja G um ponto tal que $D * F * G$ e $FG = AC$. Segue que o triângulo EGF é retângulo cujo ângulo reto é $\hat{F}$. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, segue que $ABC = GEF$ e, em particular, que $EG = AB$. Então DEG é um triângulo isósceles com base DG. Logo, $E\hat{D}G = E\hat{G}D$. Pelo caso LAA, segue que $DEF = GEF$. Portanto, $ABC = DEF$. □

4.5 Desigualdades no triângulo

Já vimos um teorema que nos dá uma desigualdade importante no triângulo, O Teorema do Ângulo Externo que tem consequências

importantes.
Nesta seção estudaremos mais algumas desigualdades que são consequências daquele teorema.

Proposição 4.10. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes então seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

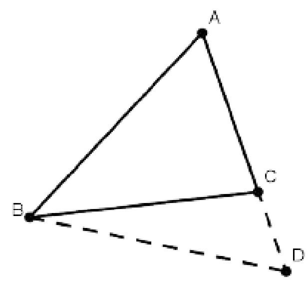

Figura 4.8:

Demonstração Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} > \overline{AC}$. Se $\hat{B} = \hat{C}$ então ABC seria um triângulo isósceles com $AB = AC$, o que é falso. Vamos mostrar que $\hat{C} > \hat{B}$. Seja D um ponto da semi-reta S_{AC} tal que $A * C * D$ e $AD = AB$. D existe por causa da hipótese $\overline{AB} > \overline{AC}$. Assim, ABD é um triângulo isósceles com base BD. Isto implica que $A\hat{B}D = A\hat{D}B$. Como o ângulo $A\hat{C}B$ é externo ao triângulo BCD, segue do teorema do ângulo externo que $A\hat{C}B > A\hat{D}B = A\hat{B}D$. Como a semi-reta S_{BC} divide o ângulo $A\hat{B}D$, já que AD intercepta S_{BC} em C, segue que $A\hat{B}D > A\hat{B}C$. Logo $A\hat{C}B > A\hat{B}C$. $\square$

Proposição 4.11. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

Demonstração Seja ABC um triângulo com $\hat{B} < \hat{C}$. Se $AB = AC$, então ABC é um triângulo isósceles e $\hat{B} = \hat{C}$, o que é falso.

Vamos mostrar que $\overline{AC} < \overline{AB}$. Mas se este não fosse o caso, teríamos $\overline{AC} > \overline{AB}$, que pela proposição anterior implicaria $\hat{B} > \hat{C}$, o que é falso.
Logo, só resta $\overline{AC} < \overline{AB}$. □

Pelas proposições anteriores segue que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que os outros dois catetos. Disto podemos provar a seguinte proposição

Proposição 4.12. *O menor segmento unindo uma reta a um ponto fora dela é o segmento perpendicular.*

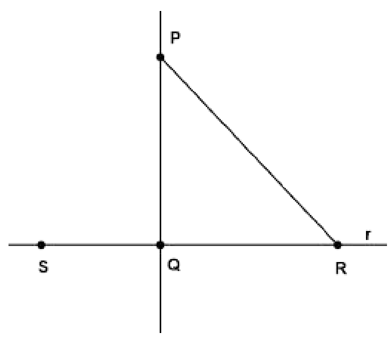

Figura 4.9:

Demonstração Seja P um ponto fora de uma reta r. Considere o ponto Q interseção da reta que passa por P e perpendicular a r, denominado pé da perpendicular baixada do ponto A à reta r. Seja R qualquer ponto de r distinto de Q. Vamos mostrar que $\overline{PQ} < \overline{PR}$. Seja S um ponto de r tal que $S * Q * R$. Como PQ é perpepndicular a r, segue que $P\hat{Q}S = 90°$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos $P\hat{Q}S > P\hat{R}Q$, o que implica que $\overline{PR} > \overline{PQ}$. □

De fato o que a proposição mostra é que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior do que os catetos. O número $\overline{PQ}$ da demonstração anterior é denominado de distância do ponto P à reta

m. O segmento QR é chamado de projeção do segmento PR sobre a reta r.

Teorema 4.4. *(Desigualdade Triangular): Dados três pontos distintos A, B e C, têm-se que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade ocorre se e somente se B pertence ao segmento AC.*

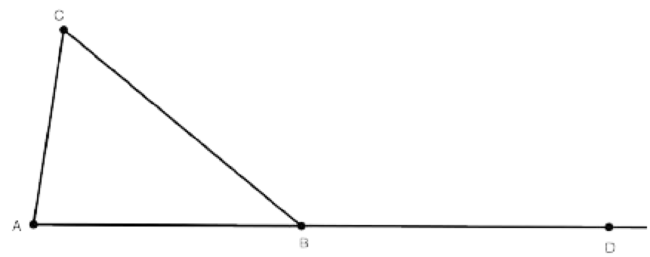

Figura 4.10:

Demonstração Suponha que A, B e C não são colineares. Então ABC é um triângulo. Seja D um ponto da semi-reta S_{AB} tal que $A * B * D$ e $BD = BC$. Assim, o triângulo BCD é isósceles com base CD. Isto implica que $B\hat{C}D = B\hat{D}C$. Note que S_{CB} divide o ângulo $A\hat{C}D$, já que AD intercepta S_{CB}. Assim,

$$A\hat{C}D = A\hat{C}B + B\hat{C}D > B\hat{C}D = B\hat{D}C.$$

Pela Proposição 4.11 temos que $\overline{AD} > \overline{AC}$. Como $A * B * D$ então $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}$.
Logo, $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$.
Suponha agora que A, B e C são pontos colineares.
Se B pertence ao segmento AC, a igualdade $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ é trivial. Se vale a igualdade, vamos mostrar que B pertence ao segmento AC. Considere a, b e c as coordenadas dos pontos A, B e C, com $c < a$, por exemplo. Neste caso,

$$|a - c| = |a - b| + |b - c| \Rightarrow \begin{cases} |a - c| & > & |a - b| \\ |a - c| & > & |b - c| \end{cases}$$

o que implica que

$$\begin{array}{rcl} a-c & > & a-b \\ & e & \\ a-c & > & b-c \end{array}$$

e portanto

$$\begin{array}{rcl} b & > & c \\ & e & \\ a & > & b \end{array}$$

Logo, pelo Teorema 2.1 segue o resultado. $\square$

Definição 4.5. Sejam uma reta m e um ponto P fora dela. Dizemos que o ponto P' é o *reflexo* de P relativamente a m se PP' é prependicular a m e $AP = AP'$, onde A é o ponto de interseção de PP' com m.

Problema 4.1. *Dados dois pontos A e B fora de uma reta r, determinar um ponto P em m tal que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja o menor possível.*

Solução Suponha que A e B estão em semi-planos distintos. Neste caso, AB intercepta r em um ponto P. Se C é um outro ponto de m, então da desigualdade triangular, obtemos

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Como $A * P * B$, segue que $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, e P é o ponto procurado.

Se A e B pertencem a semi-planos distintos, basta considerar o reflexo B' de B relativamente à reta m. Neste caso, encontramos um ponto P de m que resolve o problema para os pontos A e B'. Este ponto P também resolve o problema para A e B, já que $AP = AP'$. $\square$

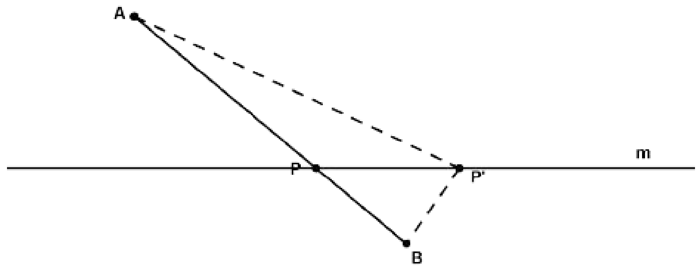

Figura 4.11:

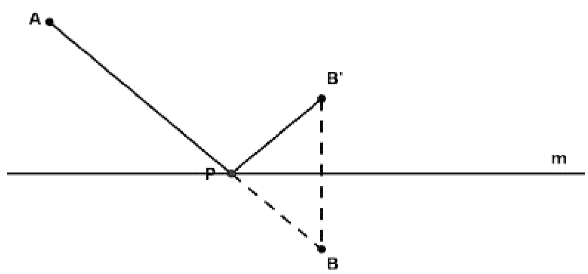

Figura 4.12:

4.6 Teorema de Saccheri-Legendre

O objetivo desta seção é provar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180°. Este resultado foi provado por Saccheri que na verdade estava tentando encontrar uma igualdade.

Proposição 4.13. *Seja ABC um triângulo. Existe um triângulo AEC tal que a soma dos ângulos é a mesma soma dos ângulos do triângulo ABC e AEC possui um ângulo cuja medida é menor ou igual à metade de um dos ângulos do triângulo ABC.*

Demonstração Seja um ponto D em BC tal que $BD = DC$. Na semi-reta S_{AD} considere um ponto E tal que $AD = DE$. Pelo caso

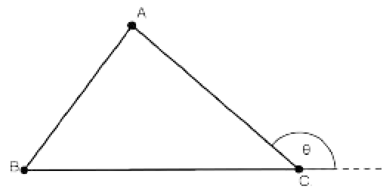

Figura 4.13:

LAL segue que $ADB = EDC$.

Afirmação 1: $A\hat{E}C + A\hat{C}E + C\hat{A}E = A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B$.

Da congruência $ADB = EDC$ concluímos que $A\hat{B}D = E\hat{C}D$ e $B\hat{A}D = C\hat{E}D$. Como S_{AD} divide $B\hat{A}C$ e S_{CD} divide $A\hat{C}E$, segue que

$$\begin{aligned} A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C &= B\hat{C}E + A\hat{C}B + B\hat{A}D + D\hat{A}C \\ &= A\hat{C}E + A\hat{E}C + E\hat{A}C. \end{aligned}$$

Afirmação 2: $E\hat{A}C$ ou $A\hat{E}C \leq \frac{1}{2}B\hat{A}C$.

Note que, como S_{AD} divide $B\hat{A}C$, segue que

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C = A\hat{E}C + E\hat{A}C.$$

Logo, $A\hat{E}C$ ou $E\hat{A}C \leq \frac{1}{2}B\hat{A}C$. □

Proposição 4.14. *A soma de dois ângulos internos de um triângulo é menor do que* $180°$.

Demonstração Seja ABC um triângulo. Seja θ um ângulo externo com vértice C. Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos que $\theta > \hat{B}$. Como $\theta + \hat{C} = 180°$, segue que

$$\hat{B} + \hat{C} < \theta + \hat{C} < 180°.$$

□

Desta proposição, reobtemos o resultado

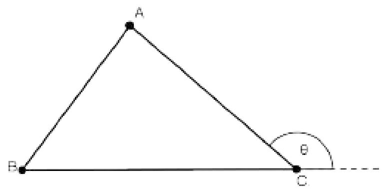

Figura 4.14:

Corolário 4.4. *Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.*

De fato, caso contrário existiria um triângulo com pelo menos dois ângulos obtusos cuja soma seria maior do que $180°$.

Teorema 4.5. *(Saccheri-Legendre): A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a* $180°$.

Demonstração Suponha que exista um triângulo ABC cuja soma dos ângulos internos é maior do que $180°$, digamos, que seja $180° + \delta$, onde δ é algum número positivo. Pela Proposição 4.13, podemos encontrar um outro triângulo $A_1B_1C_1$ satisfazendo

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180° + \delta \\ \hat{A}_1 \leq \frac{1}{2}\hat{A}. \end{cases}$$

Seguindo indutivamente podemos encontrar um triângulo $A_nB_nC_n$ satisfazendo

$$\begin{cases} \hat{A}_n + \hat{B}_n + \hat{C}_n = 180° + \delta \\ \hat{A}_n \leq \frac{1}{2^n}\hat{A}. \end{cases}$$

Tomando n_0 suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^{n_0}}\hat{A} < \delta$, teremos que o triângulo $A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0}$ é tal que

$$\begin{cases} \hat{A}_{n_0} + \hat{B}_{n_0} + \hat{C}_{n_0} = 180° + \delta \\ \hat{A}_{n_0} < \delta \end{cases}$$

Isto implica que $B_{n_0}+C_{n_0} = 180° + \delta - \hat{A}_{n_0} > 180°$, contradizendo a Proposição 4.14.
Logo, só pode ser $\hat{A}_n + \hat{B}_n + \hat{C}_n \leq 180°$. □

4.7 Soma dos Ângulos de um Triângulo

Até aqui ainda não falamos do postulado das paralelas. De fato, todos os resultados até aqui demonstrados são independentes deste postulado, ou seja, podem ser demonstrados sem o uso do postulado das paralelas. O Teorema de Saccheri-Legendre afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180°.
Agora, iremos mostrar que se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a 180°, então a soma dos ângulos de qualquer triângulo é também 180°. Mas ainda não ficará demonstrado que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, restando para isso exibir um triângulo com tal propriedade.

Definição 4.6. Seja ABC um triângulo. O *defeito* de um triângulo é o número

$$\delta ABC = 180° - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}.$$

Note que $\delta ABC \geq 0$.

Teorema 4.6. *Seja ABC um triângulo e D um ponto entre A e B. Então $\delta ABC = \delta ACD + \delta BCD$.*

Demonstração Como S_{CD} divide o ângulo $A\hat{C}B$, então $A\hat{C}B = A\hat{C}D + D\hat{C}B$. Além disso, $A\hat{D}C$ e $B\hat{D}C$ são suplementares, o que implica que $A\hat{D}C + B\hat{D}C = 180°$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta ACD + \delta BCD &= 180° - \hat{A} - A\hat{C}D - A\hat{D}C \\
&\quad +180° - \hat{B} - B\hat{C}D - B\hat{D}C \\
&= 180° - \hat{A} - A\hat{C}B - \hat{B} \\
&= \delta ABC.
\end{aligned}$$

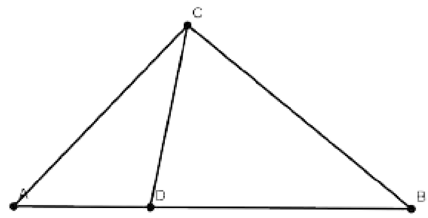

Figura 4.15:

□

Sabendo que o defeito de triângulo é sempre um número não negativo, obtemos o seguinte corolário

Corolário 4.5. *Sejam ABC um triângulo e D um ponto entre A e B. Então $\delta ABC = 0$ se e somente se $\delta ACD = \delta BCD = 0$.*

Definição 4.7. Um *retângulo* é um quadrilátero com os quatro ângulos retos.

Teorema 4.7. *Se um triângulo existe com a soma dos ângulos $180°$, então um retângulo existe. Se um retângulo existe, então todo triângulo tem a soma dos ângulos igual a $180°$.*

Demonstração Faremos a demonstração em 5 passos.
Suponha incialmente que existe um triângulo com a soma dos ângulos igual a $180°$.

> **Passo 1:** Construir um triângulo retângulo com a soma dos ângulos $180°$.
>
> Seja ABC um triângulo com $\delta ABC = 0$, que existe pela hipótese. Suponha que não seja reto; caso contrário não temos nada a fazer. Como a soma dos ângulos de um triângulo é sempre $\leq 180°$, Teorema de Saccheri-Legendre, então pelo menos dois ângulos são agudos, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, por exemplo.

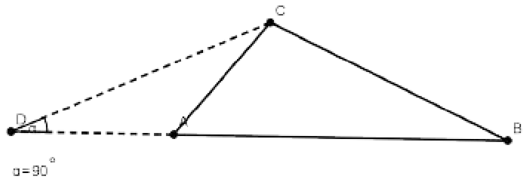

Figura 4.16:

Seja CD um segmento perpendicular à reta que contém AB.

Afirmação: $A * D * B$.

De fato, caso contrário devemos ter $D * A * B$ ou $A * B * D$.

Se ocorre $D * A * B$, então $C\hat{A}B$ é um ângulo exterior ao triângulo CDA satisfazendo $C\hat{A}B < C\hat{D}A$, contradizendo o Teorema do Ângulo Exterior.

Se $A*B*D$, da mesma forma, encontramos uma contradição.

Portanto, o Corolário 4.5 implica que $\delta ADC = 0$ e $\delta BDC = 0$.

Passo 2: Construir um retângulo.

Seja BCD um triângulo retângulo em $\hat{D}$ com defeito zero, que existe pelo passo 1. Seja S_{CE} uma semi-reta no semi-plano oposto ao semi-plano contendo D determinado pela reta que contém BC. Podemos tomar S_{CE} tal que $E\hat{C}B = C\hat{B}D$. Tome $F \in S_{CE}$ tal que $CF = DB$. Pelo 1° caso de congruência de triângulos, segue que $DBC = FCB$. Em particular $\hat{D} = \hat{F} = 90°$ e $\delta FCB = 0$. Como δ então $B\hat{C}D + D\hat{B}C = 90°$. Pela congruência $DBC = FCB$, encontramos $F\hat{C}B + D\hat{C}B = 90°$ e $D\hat{B}C + F\hat{B}C = 90°$.

Logo, $DBFC$ é um retângulo. (Ver figura 4.17.)

Passo 3: Construir um retângulo arbitrariamente grande.

Basta construir cópias do retângulo como na figura 4.18.

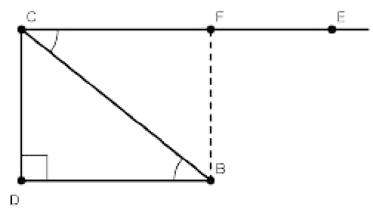

Figura 4.17:

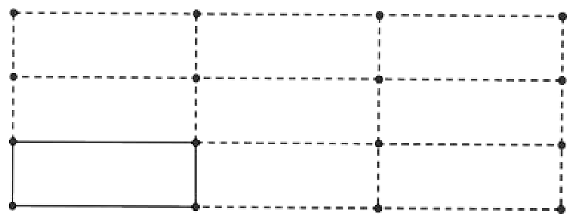

Figura 4.18:

Passo 4: Todos os triângulos retângulos têm defeito zero.

Se ABC é um triângulo retângulo e $DEFG$ um retângulo arbitrariamente grande. Sejam os pontos H^{EDE} e I^{EEF} tais que $HEI = ABC$. Assim, $\delta HEI = \delta ABC$. Note que $\delta DEF = 0$. Daí, segue, do corolário anterior que $0 = \delta DFH + \delta HEE \Rightarrow HFE = 0$. Aplicando novamente o corolário encontramos $\delta HFE = 0$. (Figura 4.19).

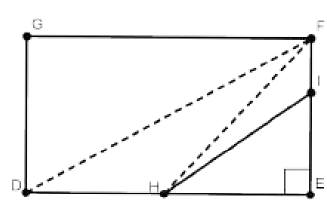

Figura 4.19:

Passo 5: Se todo triângulo retângulo tem defeito zero, então todo triângulo tem defeito zero.

Como no passo 1, divida o triângulo em dois triângulos retângulos e use o Corolário 4.5.

□

Como consequência imediata temos o corolário.

Corolário 4.6. *Se existe um triângulo com defeito positivo, então todos os triângulos têm defeito positivo.*

RESUMO

Nesta aula aprendemos dois teoremas importantes, o Teorema do Ângulo Interno Alternado, par determinar retas paralelas, e o Teorema do Ângulo Externo, que nos dá uma importante desigualdade entre os ângulos internos e externos de um triângulo arbitrário. Vimos também que sem o postulado das paralelas, provamos apenas que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual que $180°$. Além disso, provamos que se existe um triângulo com defeito zero, então todos os outros também terá defeito zero.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula introduziremos o axioma das paralelas e, entre muitos outros resultados, provaremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo arbitrário é sempre igual a $180°$.

ATIVIDADES

1. A figura 4.20 é formada pelos segmentos AC, AE, CF e EB. Determine os ângulos que são:
   (a) menores do que o ângulo $\hat{7}$.
   (b) maiores do que o ângulo $\hat{5}$.
   (c) menores do que o ângulo $\hat{4}$.
2. Na figura 4.21 os ângulos externos $A\hat{C}E$ e $A\hat{B}D$ satisfazem a desigualdade: $A\hat{C}E < A\hat{B}D$. Mostre que $A\hat{B}D > A\hat{B}$.
3. Em um cartório de registro de imóveis um escrivão recusou-se a transcrever o registro de um terreno triangular cujos lados, segundo o seu proprietário, mediam 100m, 60m e 20m. Você pode dar um argumento que justifique a atitude do escrivão?

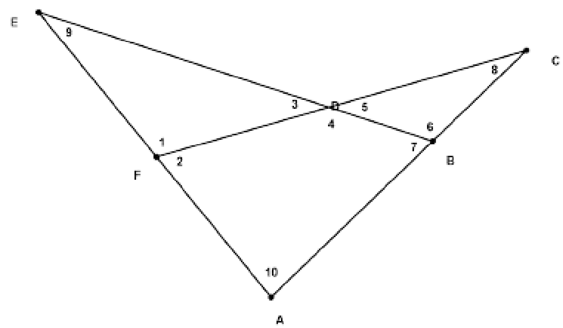

Figura 4.20:

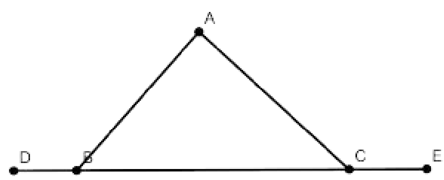

Figura 4.21:

4. Considere um quadrilátero $ABDC$ tal que $\overline{BD} > \overline{BC}$ e $\hat{A} > A\hat{B}C$. Prove que $\overline{BD} > \overline{AC}$.

5. Considere um triângulo EFG. Tome $H \in FG$ tal que $EG = EG$. Mostre que $E\hat{H}F > E\hat{H}G$.

6. Na figura 4.22 m e n são duas retas perpendiculares. Qual o caminho mais curto para se ir do ponto A ao ponto B tocandop-se nas duas retas?

7. Mostre que qualquer triângulo tem pelo menos um ângulo externo obtuso.

8. Considere um triângulo ABC. No segmento AB tome um ponto D, e no segmento CD tome um ponto E. Mostre que $A\hat{E}C > D\hat{B}C$.

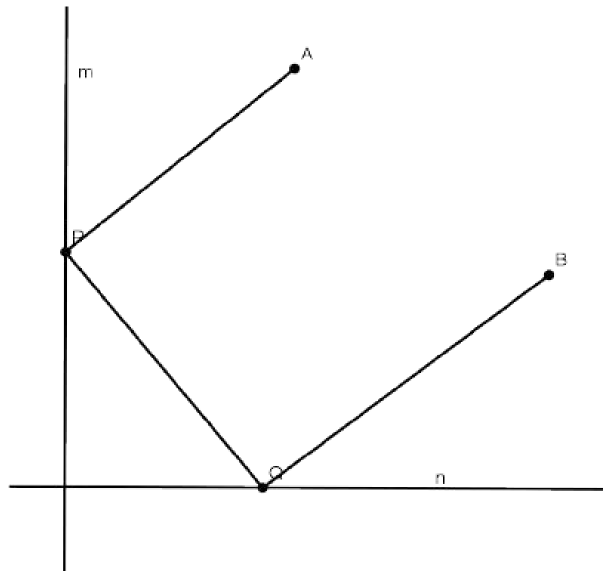

Figura 4.22:

9. Mostre que a soma das diagonais de um quadrilátero é maior que a soma de dois lados opostos.

10. Dado um triângulo ABC, marca-se um ponto D no lado AB. Mostre que $\overline{CD}$ é menor do que o comprimento de um dos lados AC ou BC.

11. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos não retângulo com $\hat{C} = \hat{C}'$, $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$. Dê um exemplo para mostrar que estas hipóteses não acarretam que os triângulos devam ser congruentes.

12. Dois segmentos têm extremidades em um círculo. Mostre que o mais distante do centro do círculo têm o menor comprimento.

LEITURA COMPLEMENTAR

..

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.

AULA 5

O Axioma das Paralelas

META:

Estudar o Axioma das Paralelas e suas consequências.

OBJETIVOS:

Introduzir o Axioma das Paralelas;

Estudar a soma dos ângulos de um triângulo.

PRÉ-REQUISITOS

Congruência e o Teorema do Ângulo Interno Alternado.

5.1 Introdução

Há evidências de que os postulados, particularmente o quinto, foram formulados por Euclides. Sabe-se que o quinto postulado tornou-se alvo de críticas pelos matemáticos da época. Que o próprio Euclides não confiava totalmente no quinto postulado é mostrado pelo fato que ele adiou o uso em uma prova até sua Proposição 29.

Além disso, o fato de que o quinto postulado parecer muito mais com uma proposição do que com afimação óbvia, que qualquer um aceita sem problemas, e que ele é a recíprova de uma das proposições, a Proposição 28 dos Elementos, levou muitos matemáticos a acreditarem que o quinto postulado era na verdade uma proposição que Euclides, por não saber demonstrá-la a partir dos quatro primeiros postulados, o introduziu como um postulado. Como consequência destas suspeitas, muitas foram as tentativas de prova do quinto postulado, até que três matemáticos, Carl F. Gauss (1777-1855), Johann Bolyai (1802-1860) e Nikolai I. Lobachewsky (1793-1856), descobriram independentemente as chamadas geometrias não-Euclidianas, que a grosso modo são geometrias onde o quinto postulado não é válido.

Nas aulas anteriores vimos que dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma reta paralela a reta dada e passando pelo ponto dado. Nesta aula introduziremos o axioma que garante que esta reta paralela é única, exatamente o que falta para demonstrar muitos outros resultados além do que já provamos até aqui.

5.2 Axioma das Paralelas

O Axioma das Paralelas é o seguinte

Axioma das Paralelas: Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta.

O Teorema do Ângulo Interior Alternado afirma que se duas retas são intercectadas por uma terceira então elas são paralelas. O próximo teorema é a recíproca deste resultado.

Teorema 5.1. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos internos alternados são congruentes.*

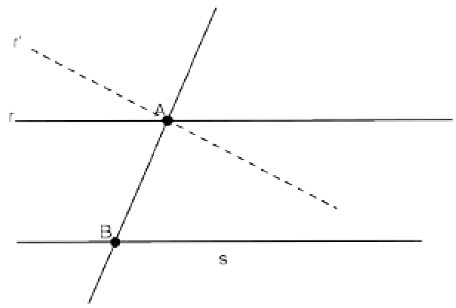

Figura 5.1:

Demonstração Sejam r e s duas retas paralelas cortadas por uma transversal t nos pontos A e B, respectivamente. Sabemos que existe somente uma reta r' passando por A formando ângulo interior alternado com s congruentes. Pelo Teorema do Ângulo Interior Alternado, segue que r' e s são paralelas. Pelo Axioma das Paralelas, temos que r coincide com r'. $\square$

Note que na demonstração fizemos uso do seguinte resultado.

Proposição 5.15. *Se a reta m é paralela às retas r e s, então r e s são paralelas.*

Prove esta proposição como exercício.

Corolário 5.1. *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.*

Demonstração Se uma reta cortasse somente uma de duas paralelas, então teríamos uma reta paralela a duas retas não paralelas. $\square$

Teorema 5.2. *Se m e n são retas paralelas, então todos os pontos de m estão à mesma distância da reta m.*

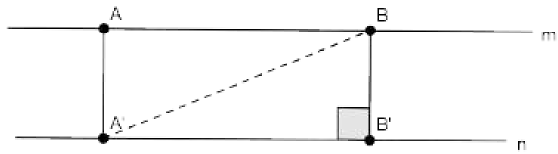

Figura 5.2:

Demonstração Sejam A e B pontos de m. Sejam A' e B' os pés das perpendiculares baixadas de A e B até m.
Vamos mostrar que $AA' = AB'$.
Como m e n são paralelas, segue do Teorema 5.1 que $B\hat{A}'B' = A\hat{B}A'$ e $B\hat{A}A' = B\hat{B}'A'$. Logo, os triângulos ABA' e $B'A'B$ são retângulos em A e B' com hipotenusa congruentes e um ângulo agudo congruente. Portanto, a Proposição 4.9 implica que $ABA' = B'A'B$. Em particular, $AA' = B'B$. $\square$

Exercício 5.1. Mostre a recíproca deste teorema, ou seja, se todos os pontos de m estão à mesma distância da reta m, então m e n são paralelas.

5.3 Triângulos e Paralelogramos

Vamos mostrar agora que com o Axioma das Paralelas, a desigualdade no Teorema de Saccheri-Legendre não ocorre.

Teorema 5.3. *Em qualquer triângulo ABC, tem-se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.*

Demonstração Tome uma reta r paralela ao lado AC. Sejam D e E pontos de r tais que $D * B * E$ e D e A pontos localizados no lado da reta contendo BC. Então

$$D\hat{B}A + A\hat{B}C = D\hat{B}C \;\text{ e }\; D\hat{B}C + A\hat{B}E = 180°.$$

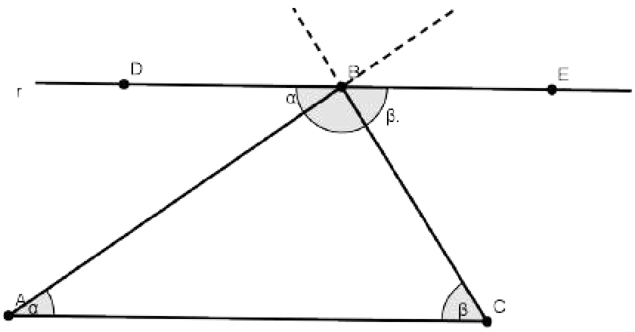

Figura 5.3:

Portanto,

$$C\hat{B}E + A\hat{B}C + A\hat{B}D = 180°.$$

Pelo Teorema 5.1, temos que $C\hat{B}E = A\hat{C}B$ e $A\hat{B}D = B\hat{A}C$.
Logo,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°.$$

□

Como consequência imediata obtemos o seguinte corolário, cuja prova é deixada para o aluno.

Corolário 5.2. *a) A soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é* $90°$.

b) A medida de um ângulo externo de um triângulo é a soma dos ângulos internos não-adjacentes.

c) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$.

Definição 5.1. Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Proposição 5.16. *Os lados e ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.*

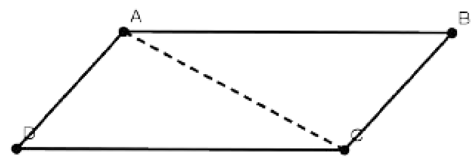

Figura 5.4:

Demonstração Seja $ABCD$ um paralelogramo. Como AB e DC são paralelos, então $B\hat{A}C = A\hat{C}D$. Da mesma forma, concluímos que $C\hat{A}D = A\hat{C}B$. Isto implica que $DAC = BCA$, já que AC é comum a ambos os triângulos. Em particular, $AB = DC$, $AD = BC$ e $\hat{B} = \hat{D}$. Além disso, $\hat{A} = D\hat{A}C + C\hat{A}B = B\hat{C}A + A\hat{C}D = \hat{C}$. □

Exercício 5.2. Prove que as diagonais de um paralelogramo se intersectam em um ponto que é o ponto médio das duas diagonais.

Proposição 5.17. *Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é um paralelogramo.*

Demonstração Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB = CD$ e $BC = AD$. O 3° caso de congruência de triângulos implica que $ABC = CDA$. Em particular, $\hat{B} = \hat{D}$ e

$$D\hat{A}B = D\hat{A}C + C\hat{A}B = B\hat{C}A + A\hat{C}D = B\hat{C}D.$$

□

Exercício 5.3. Mostre que se dois lados opostos de um quadrilátero são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Teorema 5.4. *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

Demonstração Seja ABC um triângulo. Sejam D e E os pontos médios dos segmentos AB e AC, respectivamente.

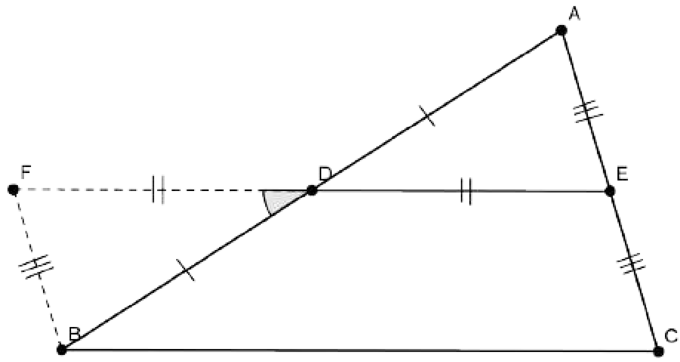

Figura 5.5:

Vamos mostrar que DE é paralelo a BC e $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.
Seja F um ponto na semi-reta S_{ED} tal que $FD = DE$ e $E * D * F$. Observe que $ADE = BDF$, já que $FD = DE$ (por construção), $AD = DB$ (já que D é o ponto médio do segmento AB) e $A\hat{D}E = B\hat{D}F$ (pois são opostos pelo vértice). Em particular $BF = AE$. O ponto E é ponto médio de AC e isto implica que $AE = EC$ e então $FB = EC$. Além disso, novamente da congruência $ADE = BDF$, obtemos $A\hat{E}F = B\hat{F}E$. Do Teorema do Ângulo Interior Alternado, que FB é paralelo a EC. Pelo Exercício 5.3, segue que $BCEF$ é um paralelogramo. Portanto, da Proposição 5.16, obtemos que $EF = BC$ e como $FD = DE$, e $F * D * E$ segue que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. □

A próxima proposição será muito útil para o estudo de semelhança de triângulos e é tradicionalmente atribuída a Tales de Mileto, matemático grego que viviu por volta dos anos 624 - 546 a.C.

Proposição 5.18. *Sejam a, b e c retas paralelas e m e n duas transversais. Suponha que m e n intercectam a, b e c nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se $A * B * C$,* *então* $A' * B' * C'$. *Se* $AB = BC$ *então* $A'B' = B'C'$.

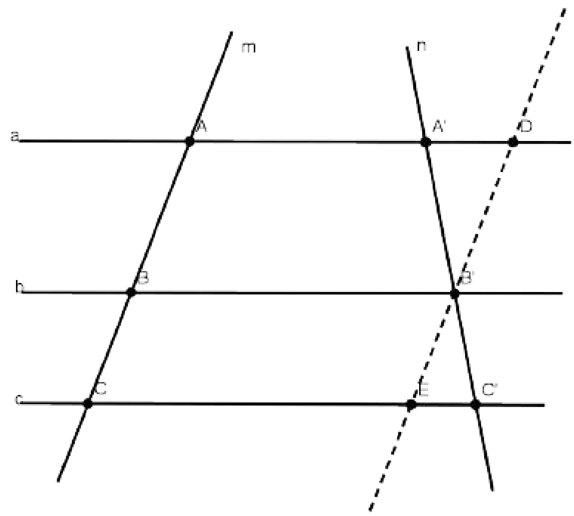

Figura 5.6:

Demonstração Suponha qeu $A * B * C$. Neste caso, A e C estão em semi-planos opostos relativamente à reta b. Como AA' não intercecta b, já que os pontos A e A' pertencem a reta a que é paralela à reta b, segue que A e A' estão no mesmo semi-plano determinado por b. Do mesmo modo, concluímos que C e C' estão no mesmo semi-plano. Portanto, A' e C' estão em semi-planos distintos relativamente a b. Logo, b intercecta $A'C'$ implicando $A' * B' * C'$.

Suponha agora que $AB = BC$. Trace pelo ponto B' uma paralela a m. Esta paralela corta a e c em pontos D e E, respectivamente. Como $ADB'B$ e $BB'EC$ são paralelogramos, segue que $DB' = AB$ e $B'E = BC$. Além disso, temos do Teorema do Ângulo Interno Alternado que $B'\hat{D}A' = B'EC'$. Como $AB = BC$, por hipótese, e $A'\hat{B}'D = E\hat{B}'C'$ por serem opostos pelo vértice, segue que $A'B'D = C'B'E$.

Assim, $A'B' = C'B'$. $\square$

Corolário 5.3. *Suponha que k retas paralelas $a_1, \ldots, a_k$ cortam duas retas m e n nos pontos $A_1, \ldots, A_k$ e nos pontos $B_1, \ldots, B_k$, respectivamente. Se $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{k-1}A_k$ então $B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_{k-1}B_k$.*

Utilizando a Proposição 5.18, a demonstração é simples e é feita por indução sobre o número de retas. Deixamos para o aluno.

Teorema 5.5. *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

O que o teorema diz é que se uma reta r paralela a BC corta os lados AB e AC de um triângulo ABC, nos pontos D e E, respectivamente, então vale a igualdade:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

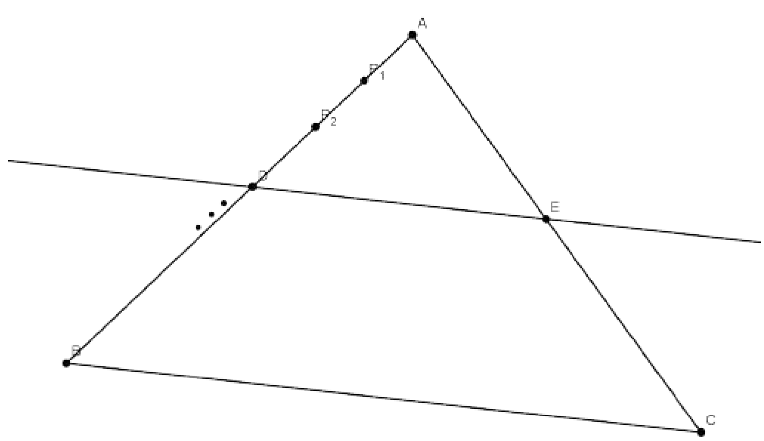

Figura 5.7:

Demonstração Na semi-reta S_{AB}, tome um ponto P_1 tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$$

não sejam números inteiros. De fato, basta tomar P_1 tal que $\overline{AP_1}$ não seja um divisor comum de AB e AD. Assim, por indução, encontramos pontos $P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$ na semi-reta S_{AB} tais que

$$P_{k-1} * P_k * P_{k+1} \quad \text{e} \quad \overline{AP_k} = k\overline{AP_1}, \;\; \forall k \geq 2.$$

Observe que isto implica que $\overline{P_kP_{k+1}} = \overline{AP_1}$.
Afirmação: D e B não coincidem com nenhum dos $P_i's$.
De fato, caso contrário teríamos $D = P_{k_0}$ para algum $k_0 \geq 1$ e

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}} = \frac{\overline{AP_k}}{\overline{AP_1}} = \frac{k\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}} = k,$$

impcando que $\frac{\bar{AD}}{\bar{AP_1}}$ seria inteiro, o que é uma contradição pela escolha do ponto P_1.
Logo, existem inteiros m e n tais que $P_m * D * P_{m+1}$, $P_n * B * P_{n+1}$, $A * P_m * D$ e $A * P_n * B$.
Isto implica que

$$\begin{aligned} m\overline{AP_1} = \overline{AP_m} &< \overline{AP_m} + \overline{P_mD} = \overline{AD} \\ &< \overline{AD} + \overline{DP_{m+1}} = \overline{AP_{m+1}} = (m+1)\overline{AP_1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$m\overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1)\overline{AP_1}.$$

Da mesma forma, encontramos

$$n\overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1)\overline{AP_1}.$$

Afirmação:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n}. \tag{5.2}$$

Esta afirmação é consequência imediata das duas últimas desigualdades.
Trace retas paralelas à reta contendo o segmento BC passando pelos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$. Pelo Corolário 5.3, estas paralelas cortam S_{AC} em pontos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ tais que $\overline{AQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \cdots$. Em particular, $\overline{AQ_k} = k\overline{AQ_1}$. Além disso, $Q_m *$

$E * Q_{m+1}$ e $Q_n * C * Q_{n+1}$. Da mesma forma que obtivemos a desigualdade (5.2), obtemos

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n}. \tag{5.3}$$

As desigualdades (5.2) e (5.3) implicam que

$$\left|\frac{\bar{AD}}{\bar{AB}} - \frac{\bar{AE}}{\bar{AC}}\right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}.$$

Observe que $m \leq n$, o que implica que

$$\begin{aligned} \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} &= \frac{m+n+1}{n(n+1)} \\ &\leq \frac{2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\right| < \frac{2}{n}. \tag{5.4}$$

Como $\frac{2}{n}$ pode ser tomado muito pequeno se $\overline{AP_1}$ é tomado muito pequeno (Por quê?), segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}},$$

já que estes quocientes não dependem de n na desigualdade (5.4).

□

5.4 Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos ABC e DEF são semelhantes se existe uma correspondência entre os vértices $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow D$ e $C \leftrightarrow F$, tal que $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}.$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de proporcionalidade* entre os triângulos.

Notação: Usaremos a notação $ABC \sim DEF$ para indicar que os dois triângulos são semelhantes e a correspondência entre os vértices é dada exatamente na ordem que eles aparecem.

Observe que dois triângulos congruentes são semelhantes.
O próximo teorema afirma que não é necessário verificar todas as condições da definição de semelhança de triângulos, basta verificar algumas delas. Ele conhecido também como o 2° caso de semelhança de triângulos.

Teorema 5.6 (Casso AAA de semelhança)**.** *Se em dois triângulos ABC e DEF tem-se $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$, então $ABC \sim DEF$.*

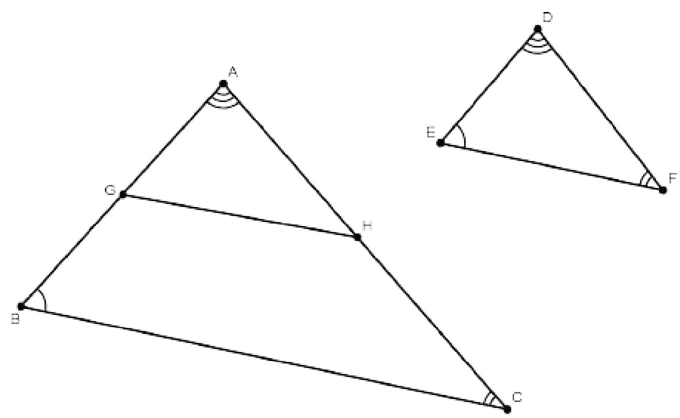

Figura 5.8:

Demonstração Sejam G e H pontos nas semi-retas S_{AB} e S_{AC}, respectivamente, tais que $AG = DE$ e $AH = DF$. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, segue que $AGH = DEF$. Assim, $A\hat{G}H = \hat{E} = \hat{B}$, o que implica que GH e BC são paralelas. O Teorema 5.5 afirma que

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}.$$

Da mesma forma, mostramos que

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}.$$

□

Se dois triângulos possuem dois pares de ângulos congruentes, então o terceiro par também será congruente, já que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°. Logo, se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC \sim DEF$. De fato, na demonstração anterior não fizemos uso da congruência $\hat{C} = \hat{F}$. O próximo teorema é também conhecido como 2° caso de semelhança de triângulos.

Teorema 5.7 (Caso LAL de semelhança)**.** *Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\hat{A} = \hat{D}$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}},$$

então $ABC \sim EFG$.

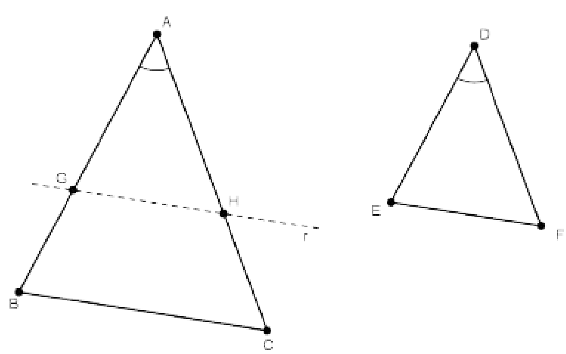

Figura 5.9:

Demonstração Seja G um ponto na semi-reta S_{AB} tal que $AG = DE$. Sejam r a reta paralela a BC que passa por G e H o ponto de interseção desta reta com a semi-reta S_{AC}. Como r é paralela a BC, segue que $A\hat{G}H = A\hat{B}C$ e $A\hat{H}G = A\hat{C}B$, o que implica que $ABC \sim AGH$, pelo caso AAA de semalhança de triângulos. Como

$$AG = DE \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}},$$

segue que

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}},$$

ou seja, $DF = AH$.
Logo, pelo caso LAL de congruência, segue que $AGH = DEF$. Como $AGH \sim ABC$, então $ABC \sim DEF$. □

O próximo teorema é conhecido também como o 3° caso de semelhança de triãngulos.

Teorema 5.8 (Caso LLL de semelhança)**.** *Se em dois triângulos ABC e DEF tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}},$$

então $ABC \sim DEF$.

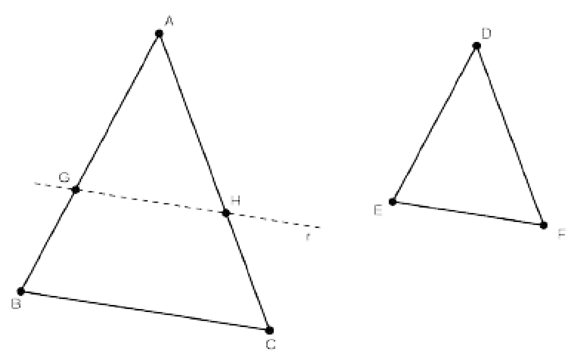

Figura 5.10:

Demonstração Sejam G em ponto de S_{AB} tal que $AG = DE$ e H o ponto de interseção da reta paralela a BC que passa por G.

Note que $A\hat{G}H = \hat{B}$, o que implica que $AGH \sim ABC$, pelo caso AAA de semelhança de triângulos. Em particular

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}}.$$

Mas como

$$AG = DE \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}},$$

então

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

o que implica que

$$EF = GH.$$

Da mesma forma, mostramos que $AG = DE$ e $AH = DF$.
Logo, $ABC \sim EFG$. □

Teorema 5.9. *Seja ABC um triângulo retângulo cujo ângulo reto é $\hat{C}$. Seja D o pé da perpendicular baixada de C a AB. Então $ACD \sim ABC \sim CBD$.*

A demonstração baseia-se no fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é 180° e no caso AAA de semelhança de triângulos. Usaremos este teorema para a demonstração do Teorema de Pitágoras a seguir.

Teorema 5.10 (Teorema de Pitágoras)**.** *Seja ABC um triângulo retângulo cujo ângulo reto é $\hat{C}$. Se $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então $c^2 = a^2 + b^2$.*

Demonstração Seguindo a figura anterior, temos $ACD \sim ABC \sim CBD$, o que implica que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}.$$

Assim,

$$b^2 = c\overline{AD} \;\text{ e }\; a^2 = c\overline{DB}$$

implica que

$$a^2 + b^2 = c(\overline{AD} + \overline{DB}) = c^2.$$

□

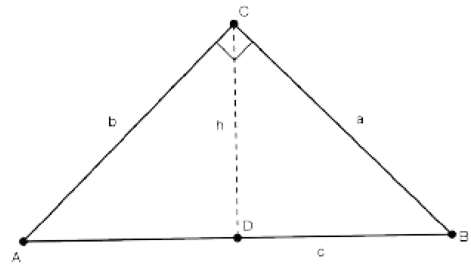

Figura 5.11:

Exercício 5.4. Nas condições anteriores ,prove que $h^2 = \bar{A}D\hat{D}B$.

O próximo teorema é simplesmente a recíprova do Torema de Pitágoras.

Teorema 5.11. *Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo e satisfazem $c^2 = a^2 + b^2$, então o triângulo é retângulo com hipotenusa c.*

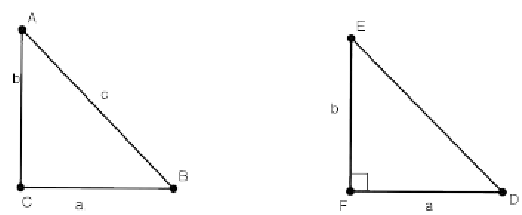

Figura 5.12:

Demonstração Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Seja $D\hat{F}E$ um ângulo reto com $EF = AC$ e $DF = BC$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{DE} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos $ABC = EDF$. $\square$

Exercício 5.5. Mostre que em qualquer triângulo, o produto de uma base e a correspondente altura é independente da escolha da base.

RESUMO

Nesta aula introduzios o Axioma das Paralelas, que nos permitiu mostrar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$. Estudamos algumas propriedades dos paralelogramos. Além disso, definimos semelhança de triângulos e mostramos três casos de semelhança. Como aplicação de semelhança de triângulos, mostramos o Teorema de Pitágoras, que diz que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos estudar angulos inscritos num círculos. Também estudaremos polígonos inscritíveis e circunscritíveis num círculo.

ATIVIDADES

1. Prove que a soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é $90°$.
2. Prove que a medida do ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos a ele não adjacentes.
3. O que é maior, a base ou a lateral de um triângulo isósceles cujo ângulo oposto à base mede $57°$?
4. Quanto medem os ângulos de um triângulo se eles estão na mesma proporção que os números 1, 2 e 3?

5. Se um triângulo retângulo possui um ângulo que mede 30°, mostre que o cateto oposto a este ângulo mede a metade da hipotenusa.

6. Seja ABC um triângulo isósceles com base AB. Sejam M e N os pontos médios dos lados CA e CB, respectivamente. Mostre que o reflexo do ponto C relativamente à reta que passa por M e N é exatamente o ponto médio do segmento AB.

7. Um *retângulo* é um quadrilátero que tem todos os seus ângulos retos. Mostre que, todo retângulo é um paralelogramo.

8. Um *losango* é um paralelogramo que tem todos os seus lados congruentes. Mostre que, as diagonais de um losango cortam-se em ângulo reto e são bissetrizes dos seus ângulos.

9. Pode existtir um triângulo ABC em que a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ e a bissetriz do ângulo externo no vértice B sejam paralelas?

10. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Mostre que a bissetriz do seu ângulo externo no vértice A é paralela a sua base.

11. Na figura 5.13 AB, AC e CD são congruentes. Determine o ângulo β em função do ângulo α.

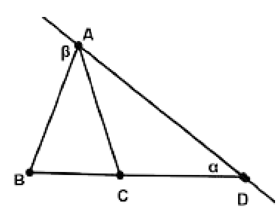

Figura 5.13:

12. Na figura 5.14 determine o valor de $\alpha + \beta + \gamma + \theta$.

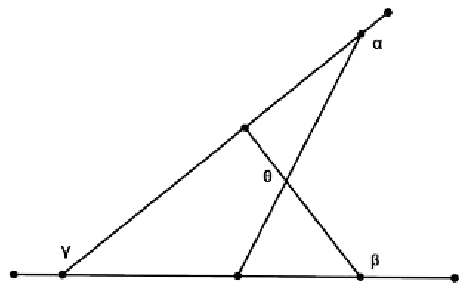

Figura 5.14:

13. Mostre que, se os ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

14. Mostre que, se as diagonais de um quadrilátero se intersectam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um paralelogramo.

15. Mostre que, se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é um retângulo.

16. Mostre que, os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramos.

17. Mostre que dois triângulos equilátero são sempre semelhantes.

18. Considere um triângulo ABC e um ponto $D \in AC$ tal que $BDA \sim ABC$. Conclua que o triângulo BDA é isósceles.

19. Na figura (pg 114) o triângulo ABC é equilátero, as três retas ligando os lados AB a AC são paralelas a BC, dividem o lado AB em quatro segmentos congruentes. Se $\overline{DG} + \overline{EH} + \overline{FI} = 18$, determine o perímetro do triângulo ABC.

20. Considere o triângulo EFG formado pelos pontos médios dos lados do triângulo ABC. Qual a relação entre seus perímetros?

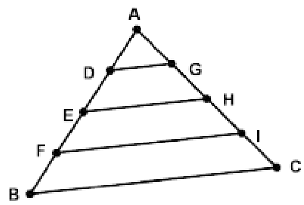

Figura 5.15:

21. Prove que alturas correspondentes em triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

22. Seja ABC um triângulo, D o ponto médio de AC e E o ponto médio de BC. Sabendo que BD é perpendicular a AE, $\overline{AC} = 7$, determine $\overline{AB}$.

23. Seja ABC um triângulo retângulo em que $\hat{C}$ é o ângulo reto. Trace a altura a partir do ponto C. Se a e b são comprimentos dos catetos e h é o comprimento da altura, mostre que

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

24. Os lados de um triângulo ABC medem: $\overline{AB} = 20$cm, $\overline{BC} = 15$cm e $\overline{CA} = 10$cm. Sobre o lado BC marca-se um ponto D de modo que $\overline{BD} = 3$cm e traçam-se pelo ponto D retas paralelas aos lados AB e AC as quais intercectam, respectivamente, nos pontos F e E. Mostre que o quadrilátero $AEDF$ é um paralelogramo e determine seu perímetro.

LEITURA COMPLEMENTAR

¨

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.

AULA 6

O Círculo

META:

Estudar propriedades básicas do círculo.

OBJETIVOS:

Estudar retas tangentes a um círculo.
Estudar ângulo inscritos no círculo.
Identificar polígonos inscritíveis e circunscritíveis num círculo.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve ter compreendido todas as aulas anteriores, principalmente os casos de congruência de triângulos.

6.1 Introdução

O terceiro postulado de Euclides diz que é possível traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio. Com os nossos axiomas, este postulado é simplesmente uma consequência.
Até o momento nós estudamos apenas triângulo e quadriláteros, figuras planas definidas por pontos e retas. Nesta aula começaremos nosso estudo do círculo, que é uma figura plana definida através da noção de distância entre dois pontos. Veremos quais as consequências de um ângulo inscrito em um polígono, e também quando um polígono possui um círculo inscrito e outro circunscrito.

6.2 O Círculo

Seja P um ponto e r um número positivo.

Definição 6.1. O *círculo* com centro P e raio r é o conjunto dos pontos Q tais que $\overline{PQ} = r$.

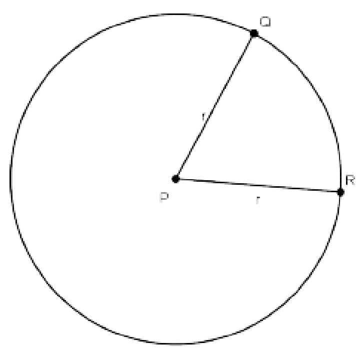

Figura 6.1:

Dois ou mais círculos com o mesmo centro são ditos *concêntricos*. Se Q é qualquer ponto do ciruclo, então o segmento PQ é um *raio* do circulo, e Q é a extremidade do raio. Se Q e R são pontos do círculo, então QR é uma *corda* do círculo. Uma corda que contém o centro é denominada um *diâmetro* do círculo. Evidentemente, o comprimento de todo diâmetro é o número $2r$. Este número é denominado o diâmetro do círculo.

Observação Note que a palavra raio é usada com dois sentidos. Ela pode significar um número r ou um segmento PQ. Porém, no contexto sempre será fácil identificar o significado. Quando falamos "o raio", falamos do número r, e quando falamos de "um raio", falamos de um segmento. Da mesma forma, para a palavra diâmetro.

Definição 6.2. Uma reta é tangente a um círculo se possui um único ponto em comum. O ponto em comum é denominado de ponto de tangência. Se uma reta intersecta um círculo em dois pontos, ela é denominada reta secante.

Teorema 6.1. *Se uma reta é perpendicular a um raio de um círculo em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.*

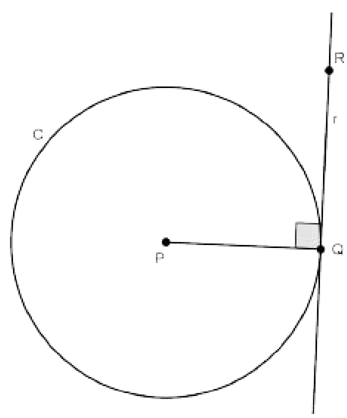

Figura 6.2:

Demonstração Sejam C um círculo com centro em P, PQ um raio e r uma perpendicular a PQ em Q.

Se R é qualquer outro ponto de r, então $\overline{PR} > \overline{PQ}$, já que o menor segmento unindo um ponto a uma reta é o segmento perpendicular. Portanto, R está no exterior de C.
Logo, r intersecta C somente no ponto Q, o que implica que r é tangente a C. □

Teorema 6.2. *Toda tangente r a um círculo C é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência Q.*

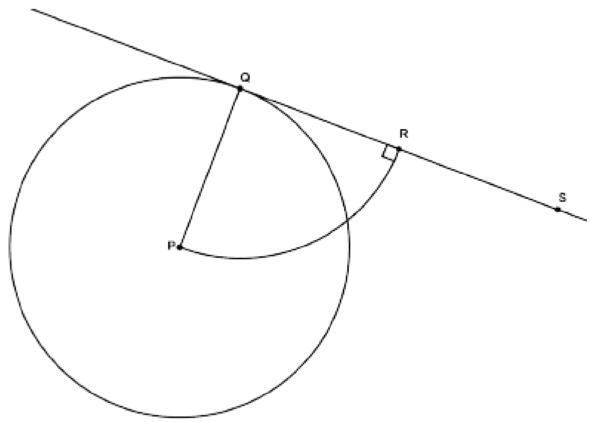

Figura 6.3:

Demonstração Suponha que PQ não seja perpendicular a r. Então, seja R um ponto de r tal que PR é perpendicular a r. Sabemos que existe um ponto S na reta r tal que $Q * R * S$ e $\overline{RQ} = \overline{RS}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 = \overline{PQ}^2$$

e

$$\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 = \overline{PS}^2,$$

o que implica que

$$\overline{PQ} = \overline{PS}.$$

Logo, S pertence ao círculo, e isto implica que r não é tangente ao círculo. □

Proposição 6.19. *Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se e somente se a divide em dois segmentos congruentes.*

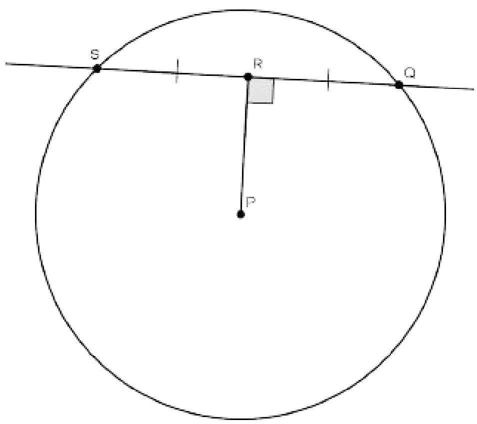

Figura 6.4:

Demonstração Suponha inicialmente que um raio PR seja perpendicular a uma corda AB que não é um diâmetro.

Seja M o ponto de interseção de PR com AB. Como $PA = PB$, segue que APB é um triângulo isósceles com base AB. Então PM é a altura de APB com respeito a AB. Pela Proposição 3.8, temos que a altura coincide com a mediana.

Logo, $AM = MB$.

Para a recíproca, a demonstração é análoga ao caso anterior, já que em um triângulo isósceles a altura coincide com a mediana. □

Exercício 6.1. Mostre que em um círculo duas cordas são congruentes se e somente se elas estão à uma mesma distância do centro do círculo.

A demonstração deste exercício é simples, basta usar congruência de triângulo retângulos.

6.3 Ângulos Inscritos em um Círculo

Sejam A e B pontos de um círculo de centro P. Considere a reta r que passa por A e B. Cada semi-plano determinado por r contém uma parte do círculo chamada arco.

Definição 6.3. O arco contido no semi-plano contendo o centro é chamado de *arco maior* e o outro arco é denominado *menor*.

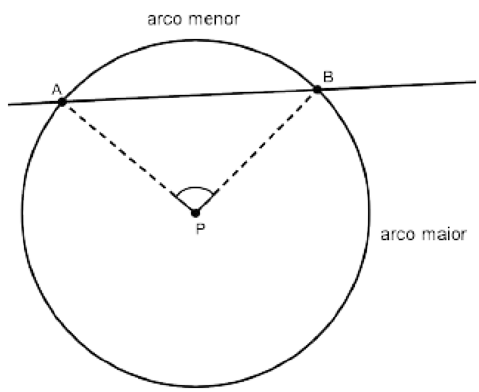

Figura 6.5:

Se $A\hat{P}B$ é raso, cada arco é um semi-círculo.

Definição 6.4. O ângulo $A\hat{P}B$ é denominado de *ângulo central*.

A medida em graus do arco menor é a medida do ângulo central $A\hat{P}B$. A medida em graus do arco maior é $360° - A\hat{P}B$.

Exercício 6.2. Em um mesmo círculo, cordas congruentes determinam ângulos centrais congruentes.

Para a demonstração deste exercício use o caso LLL de congruência de triângulos.

Definição 6.5. Um ângulo está *inscrito* em um círculo se seu vértice A pertence ao círculo e os lados intersectem o círculo em pontos, B e C, distintos do vértice. O arco determinado por B e C

que não contém o vértice A é denominado de *arco correspondente* ao ângulo inscrito dado.

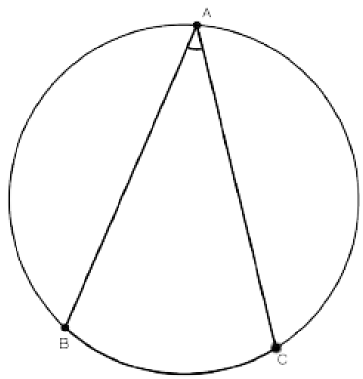

Figura 6.6:

Dizemos também que o ângulo *subtende* o arco.

Proposição 6.20. *Todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente.*

Demonstração Seja $B\hat{A}C$ um ângulo inscrito em um círculo de centro P.
Temos três casos a considerar.

- Caso 1: Suponha que um dos lados do ângulo $B\hat{A}C$ contém um diâmetro.

  Note que PAB é isósceles com base AB. Assim, $B\hat{A}P = P\hat{B}A$. Além disso,

  $$A\hat{B}P + B\hat{P}A + P\hat{A}B = 180°$$

  e

  $$B\hat{P}C + B\hat{P}A = 180°.$$

  Logo, $C\hat{A}B = P\hat{A}B = \frac{1}{2}P\hat{P}C$.

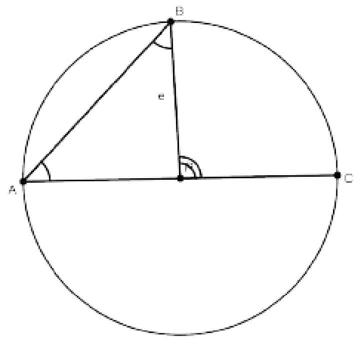

Figura 6.7:

- Caso 2: Suponha que B e C estão em lados opostos do diâmetro com extremidade A.

  Seja D a outra extremidade do diâmetro contendo A. Assim,

  $$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C.$$

  Pelo caso 1, temos que

  $$B\hat{A}D = \frac{1}{2}B\hat{P}D \text{ e } D\hat{A}C = \frac{1}{2}D\hat{P}C.$$

  Portanto, $B\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{P}D + \frac{1}{2}D\hat{P}C = \frac{1}{2}B\hat{P}C$.

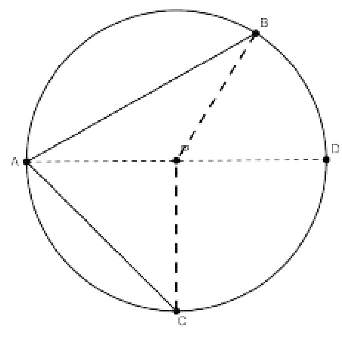

Figura 6.8:

- Caso 3: Suponha que B e C estão no mesmo lado do diâmetro contendo A.

  Basta ver que, pelo caso 1 novamente, obtemos

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D - C\hat{A}D = \frac{1}{2}B\hat{P}D - \frac{1}{2}C\hat{P}D = \frac{1}{2}B\hat{A}C.$$

□

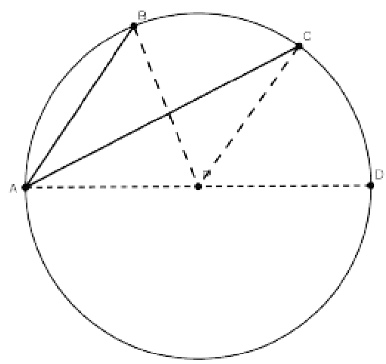

Figura 6.9:

Corolário 6.1. *Todos os ângulos inscritos no mesmo arco são congruentes.*

Corolário 6.2. *Um ângulo inscrito em um semi-círculo é reto.*

A prova destes corolários são imediatas e deixada ao aluno.

Proposição 6.21. *Sejam AB e CD cordas distintas de um círculo que se intersectam em um ponto P. Então $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.*

Demonstração Pelo Corolário 6.1 temos $D\hat{A}B = D\hat{C}B$ e $A\hat{D}C = A\hat{B}C$. Como $A\hat{P}D$ e $B\hat{P}C$ são opostos pelo vértices, então são congruentes.
Logo, pelo caso AAA de semelhança de triângulos, segue que $APD \sim CPB$.

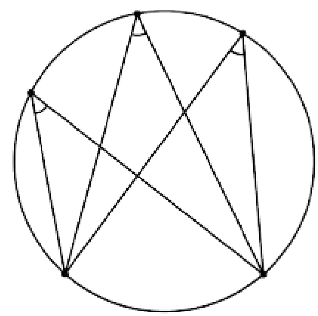

Figura 6.10:

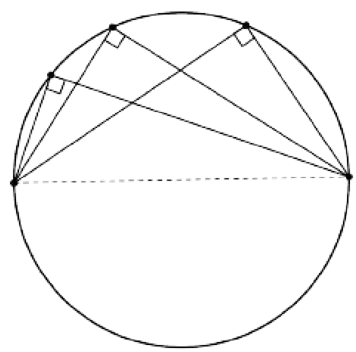

Figura 6.11:

Portanto,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}},$$

que é equivalente a $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$. □

Proposição 6.22. *Se os dois lados de um ângulo com vértice P são tangentes a um círculo de centro O nos pontos A e B, então*

a) $A\hat{P}B = 180°$ *menos o arco menor determinado por A e B.*

b) $PA = PB$.

Demonstração Pelo Teorema 6.2, segue que $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90°$. Como o arco menor determinado por A e B mede $A\hat{O}B$,

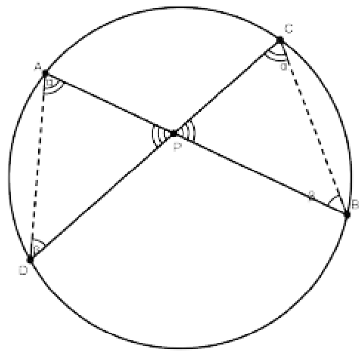

Figura 6.12:

segue que

$$\hat{P} + P\hat{A}O + A\hat{O}B + O\hat{B}P = 360°,$$

implica que

$$\hat{P} = 180° - A\hat{O}B,$$

provando a parte (a).
Para provar a parte (b), inicalmente observe que os triângulos PAO e PBO são retângulo em A e B, respectivamente. Como $AO = BO$, por serem raios de um mesmo círculo, e PO é comum a ambos os triângulos, segue $PAO = PBO$, pelo caso de congruência de triângulos retângulos. Em particular, $PA = PB$. □

6.4 Polígonos Inscritos em um Círculo

Incialmente vejamos a seguinte definição

Definição 6.6. A *mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio.

Lema 6.1. *Os pontos da mediatriz de um segmento são equidistantes das extremidades do segmento.*

Demonstração Sejam AB um segmento, M seu ponto médio e r sua mediatriz.

Tome um ponto P qualquer de r diferente de M. Obeserve que temos dois triângulos AMP e BMP com $AM = MB$, já que M é o ponto médio de AB, $A\hat{M}P = B\hat{M}P = 90°$ (pois r é perpendicular a AB) e com um lado MP em comum.
Logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $AMP = BMP$, em particular $AP = BP$, que é o que queríamos demonstrar. □

Definição 6.7. Um polígono está *inscrito* num círculo se todos os seus vértices pertencem ao círculo.

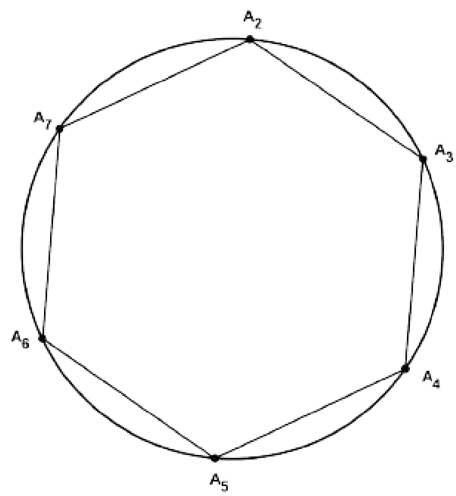

Figura 6.13:

Proposição 6.23. *Todo triângulo está inscrito em algum círculo.*

Demonstração Considere um triângulo ABC. Seja m a reta perpendicular a AB e passando por seu ponto médio M. Seja n a reta perpendicular a BC e passando por seu ponto médio N. Seja P o ponto de interseção de m com n. Pelo Lema 6.1, segue que todo ponto de m é equidistante de A e B e todo ponto de n é equidistante de B e C.
Logo, P é o centro do círculo que contém A, B e C. □

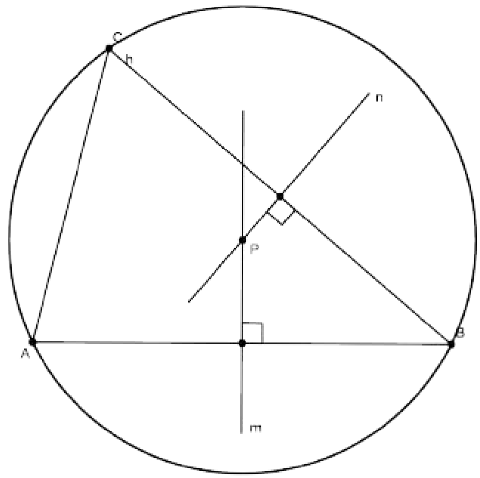

Figura 6.14:

Corolário 6.3. *As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto.*

A demonstração deste corolário é uma aplicação direta da Proposição 6.23 e deixada para o aluno. O próximo corolário é basicamente a Proposição 6.23.

Corolário 6.4. *Três pontos não colineares determinam um círculo.*

Mostramos que qualquer triãngulo está inscrito em um círculo. Então, podemos perguntar se qualquer polígono pode ser inscrito em algum círculo. Em geral esta pergunta tem uma resposta negativa, visto que a condição de que um polígono esteja inscrito em um círculo acarreta fortes restrições sobre sua medida.
Para um quadrilátero temos a seguinte proposição.

Proposição 6.24. *Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.*

Demonstração Suponhamos que o quadrilátero $ABCD$ esteja inscrito em um círculo de centro P. Note que os ângulos $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$ subtendem os dois arcos determinados por B e D. Assim, pela Proposição 6.20, temos

$$D\hat{A}B = \frac{1}{2}D\hat{P}B \quad \text{e} \quad D\hat{C}B = \frac{1}{2}D\hat{P}B.$$

Aqui estamos indicando pela mesma notação, $D\hat{P}B$, dois ângulos cuja soma é $360°$.
Logo, $D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180°$.

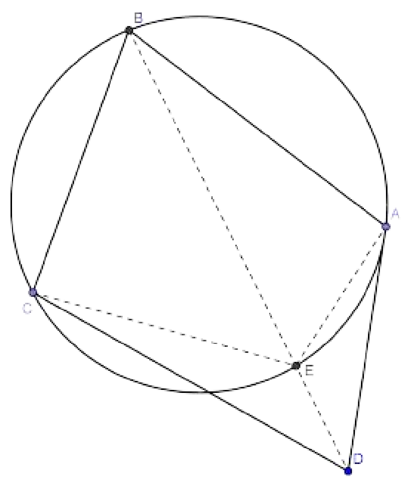

Figura 6.15:

Suponha agora que $ABCD$ é um quadrilátero com $\hat{A} + \hat{C} = 180°$.
Vamos mostrar que $ABCD$ está inscrito em algum círculo.
Pelo Corolário 6.4 podemos traçar um círculo pelos pontos A, B e C.
Temos três casos possíveis.

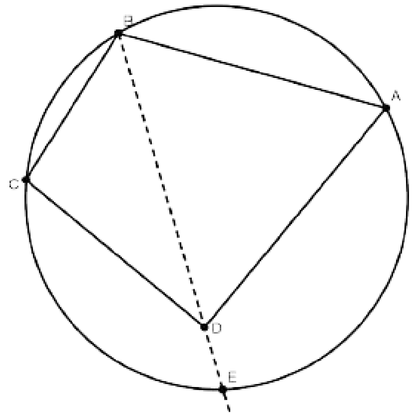

Figura 6.16:

Caso 1: D esta fora do círculo.

Seja E o ponto de interseção de BD com o círculo. Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos

$$A\hat{E}B > A\hat{D}B \text{ e } B\hat{E}C > C\hat{D}B.$$

Assim,

$$A\hat{E}C = A\hat{E}B + B\hat{E}C > A\hat{D}B + B\hat{D}C = A\hat{D}C.$$

Por outro lado,

$$A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ,$$

por hipótese, e

$$A\hat{B}C + A\hat{E}C = 180^\circ,$$

pela primeira parte.

Logo, $A\hat{D}C = A\hat{E}C$, que é uma contradição.

Caso 2: D pertence ao interior do círculo.

Nete caso, tome E o ponto de interseção do círculo com a semi-reta S_{BD}. Da mesma forma que antes, mostramos que $A\hat{D}C = A\hat{E}C$ e $A\hat{D}C > A\hat{E}C$. Contradição.

Logo, só podemos ter que D pertence ao círculo. $\square$

Definição 6.8. Um círculo está inscrito em um polígono se todos os lados são tangentes ao círculo.

Neste caso, dizemos que o polígono *circunscreve o círculo.*

Proposição 6.25. *Todo triângulo possui um círculo inscrito.*

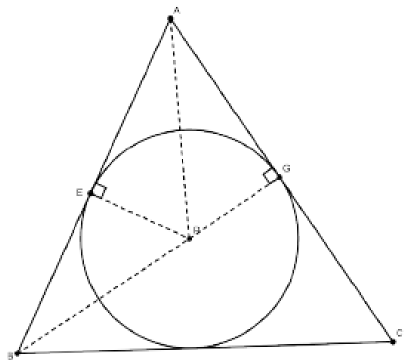

Figura 6.17:

Demonstração Seja ABC um triângulo e P o ponto de encontro das bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
Afirmação: P é equidistante dos lados do triângulo.
De fato, se E e G são os pés das perpendiculares baixadas de P a AB e a AC, respectivamente, então

$$P\hat{A}E = P\hat{A}G \quad \text{e} \quad P\hat{E}A = P\hat{G}A = 90°.$$

Logo, $PAE = PAG$, já que PA é comum a ambos. Em particular, $PE = PG$. Da mesma forma, mostramos que P é equidistante de BC e AB. $\square$

Corolário 6.5. *As bissetrizes de um triângulo encontram-se em um ponto.*

A demonstração deste corolário é imediata da Proposição 6.25.

Definição 6.9. Um *polígono regular* é um polígono com todos os lados e ângulos congruentes.

Proposição 6.26. *Todo polígono regular está inscrito em um círculo.*

Demonstração Seja $A_1A_2a\ldots A_n$ um polígono regular. Pelo Corolário 6.4, podemos traçar um círculo contendo A_1, A_2 e A_3. Seja P o centro deste círculo.
Vamos mostrar que os vértices A_4, A_5, $\ldots$, A_n pertencem a este círculo.
Para isto, note que o triângulo PA_2A_3 é isósceles, já que PA_2 e PA_3 são raios de um mesmo círculo. Assim, $P\hat{A}_2A_3 = P\hat{A}_3A_2$.
Como o polígono é regular, todos os seus ângulos são congruentes. Portanto, $A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_4$. Além disso, temos

$$A_1\hat{A}_2A_3 = A_1\hat{A}_2P + P\hat{A}_2A_3$$

e

$$A_2\hat{A}_3A_4 = A_2\hat{A}_3P + P\hat{A}_3A_4,$$

implicando que $A_1\hat{A}_2P = P\hat{A}_3A_4$. Também temos que $A_1A_2 = A_3A_4$, já que são lados de um polígono regular, e $PA_2 = PA_3$, pelo fato que A_1 e A_2 pertencem a um círculo de raio P. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $PA_1A_2 = PA_4A_3$. Em particular obtemos $PA_4 = PA_1$, implicando que A_4 pertence ao círculo contendo A_1, A_2 e A_3.
Analogamente mostramos que cada um dos pontos $A_5, \ldots, A_n$ pertencem a este mesmo círculo. □

Corolário 6.6. *Todo polígono regular possui um círculo inscrito.*

Demonstração Seja $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono regular. Pela Proposição 6.26, podemos traçar um círculo contendo $A_1, A_2 \ldots, A_n$. Seja P o centro deste círculo.
Pelo caso LLL de congruência de triângulos, mostramos que todos os triângulos A_1PA_2, $A_2PA_3, A_3PA_4, \ldots$ são congruentes. Como

consequência suas alturas relativamente às bases são também congruentes.
Portanto, o círculo de centro P e raio igual a esta altura está inscrito no polígono. (Por que este círculo é tangente aos lados do triângulo?) $\square$

6.5 Como calcular o comprimento de um círculo?

Até aqui já sabemos calcular a distância entre dois pontos, bastando para isso calcular o comprimento do segmento determinado por estes pontos. A maneira como nós introduzimos o comprimento de um segmento foi através de um axioma. Então podemos perguntar:

> Mas como calcular o comprimento de um círculo? É necessário um outro axioma?

De fato, não é necessário introduzir um novo axioma para este fim. Calcula-se o comprimento de um círculo através de uma idéia intuitiva. Aproxima-se o círculo através de polígonos regulares inscritos, cujo perímetro sabemos calcular. A nossa intuição nos diz que se o número de lados do polígono regular for suficientemente grande, então o perímetro do polígono será muito próximo do comprimento do círculo.
De fato, se P é um polígono convexo inscrito em um círculo e A e B são vértices consecutivos de P, então considerando P_1 o polígono cujos os vértices são os vértices de P mais um ponto C do círculo entre os pontos A e B, teremos que que o perímetro de P_1 será maior que o perímetro de P, desde que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$. Assim, adicionando-se a um polígono convexo novos vértices, aumentamos o seu perímetro. Além disso, o perímetro de um polígono circunscrito ao círculo é maior que o perímetro de qualquer polígono convexo inscrito.
Assim, temos a seguinte definição

Definição 6.10. O comprimento de um círculo é o menor dos números maior que o perímetro de qualquer polígono convexo nele inscrito.

O comprimento do círculo de raio r é tradicionalmente representado na forma $2\pi r$.
O número π é um velho conhecido dos matemáticos. Os babilônios, por volta de 2000 a 1600 a.C., considerou o comprimento do círculo três vezes o diâmetro, isto é, eles aproximaram π como sendo igual a 3. Os egipcios de 1800 a.C., de acordo com o papiro de Rhind, tomaram a aproximação $\pi \sim \left(\frac{22}{9}\right)^2 \sim 3,1604$. O valor aproximado de π, correto até a 5ª casa decimal é $\pi = 3,141593$.
Em 1789 Johann Lambert provou que π não é um número racional, e em 1882 F. Lindemann provou que π é um número trascendente, ou seja, não raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros. Isto implica, como veremos nas próximas aulas, que é impossível construir um quadrado com mesma área de um círcul usando somente régua e compasso.

RESUMO

Nesta aula vimos algumas propriedades básicas dos círculos. Estudamos algumas relações de ângulos inscritos no círculo e obtemos algumas consequências, como por exemplo, que um quadrilátero está inscrito em algum círculo se e somente se possui um par de ângulo opostos suplementares. Vimos também que todo triângulo e todo polígono regular possui um círculo inscrito e circunscrito.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos usar o que estudamos de círculos e de triângulos para definir uma clase de funções bem conhecidas, as funções trigonométricas.

ATIVIDADES

1. Considere dois círculos de raios r_1 e r_2. Mostre que se eles se intersectam em mais de um ponto então $r_1 + r_2$ é maior do que a distância entre seus centros.

2. Diremos que dois círculos são *tangentes* se são tangentes a uma mesma reta em um mesmo ponto. O ponto mencionado é chamado de *ponto de contato*. Mostre que, quando dois círculos são tangentes, os dois centros e o ponto de contato são colineares.

3. Dois círculos são ditos *tangentes exteriores* se ficam de lados opostos da reta tangente comum. Se os dois ficam do mesmo lado da reta tangente, diz-se que os dois são *tangentes interiores*. Qual a distância entre os centros de dois círculos que são tangentes exteriores sabendo-se que seus raios medem 2cm e 5cm?

4. Prove que, em um mesmo círculo ou em círculos de mesmo raio, cordas equidistantes do centro são congruentes.

5. Em um triãngulo equilátero mostre que o círculo inscrito e o círculo circunscrito têm o mesmo centro.

6. Na figura 6.18 as três retas são tangentes simultaneamente aos dois círculos. Estas retas são denominadas *tangentes comuns* aos círculos. Desenhe dois círculos que tenham:

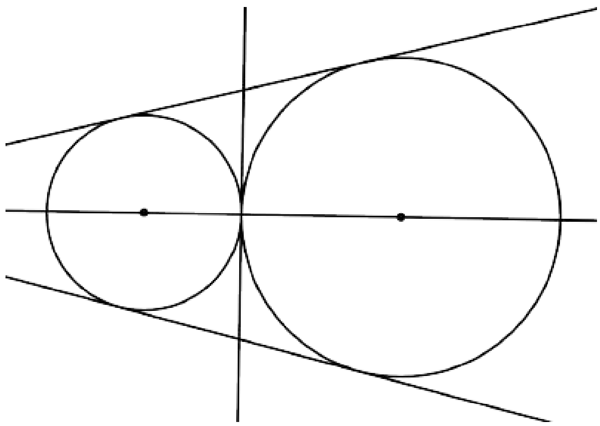

Figura 6.18:

   (a) quatro tangentes comuns.
   (b) exatamente duas tangentes comuns.
   (c) somente uma tangente comum.
   (d) nenhuma tangete comum.
   (e) mais de qutro tangentes comuns.

7. Na figura relativa ao exercício anterior, os dois círculos são tangentes e a tangente que passa no ponto de contato intersecta as outras duas, determinando um segmento. Determine, em função dos dois raios, o comprimento deste segmento e mostre que o ponto de contato é o seu ponto médio.

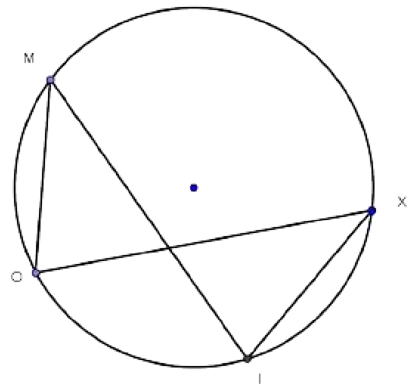

Figura 6.19:

8. Na figura 6.19 $MO = IX$. Prove que $MI = OX$.

9. Na figura 6.20 sabe-se que Y é o centro do círculo e que $BL = ER$. Mostre que BE é paralelo a LR.

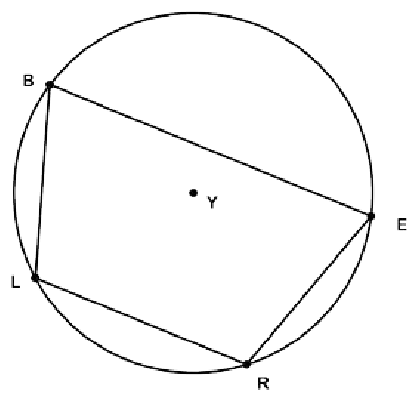

Figura 6.20:

10. Na figura 6.21 o quadrilátero $DIAN$ é um paralelogramo e I, A e M são colineares. Mostre que $DI = DM$.

11. Na figura 6.22 qual dos dois arcos, $\widehat{AH}$ ou $\widehat{MY}$, tem a maior

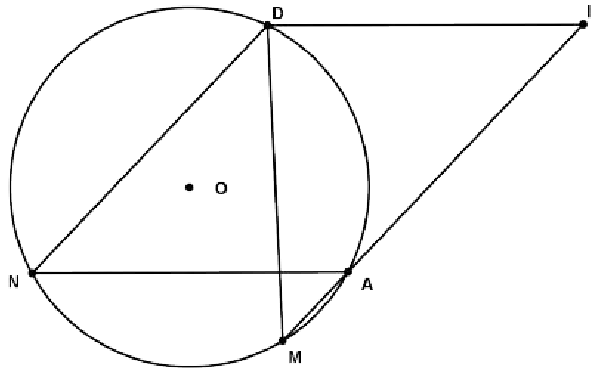

Figura 6.21:

medida em graus? Sabe-se que os dois círculos são concêntricos.

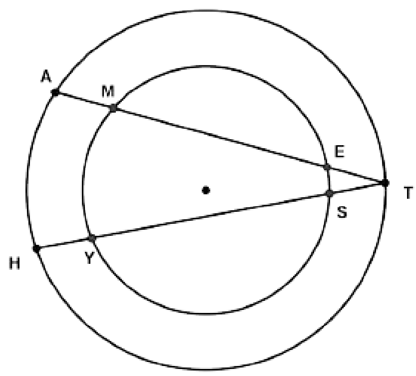

Figura 6.22:

12. Uma reta intersecta um círculo em no máximo dois pontos. As que o intersectam em exatamente dois pontos são chamadas de *secantes*. Um *ângulo secante* é um ângulo cujos lados estão contidos em duas secantes do círculo e que cada lado intersecta o círculo em pelo menos um ponto exclído o vértice. Vamos chamar de *região angular* associada a um ân-

gulo $A\hat{B}C$ a intrseção dos seguintes dois semi-planos: o que contém o ponto C e é determinado por AB, e o que contém o ponto A e é determinado por BC. Dados um ângulo e um círculo, a parte do círculo contida na região angular associada ao ângulo dado designado *arco* (ou arcos) *determinado* (determinados) *pelo ângulo.* Nos ítens seguintes indicaremos por $\widehat{AB}$ a medida em graus do arco $\widehat{AB}$.

(a) Na figura 6.23 à esquerda $A\hat{P}B$ é um ângulo secante cujo vértice está dentro do círculo. Mostre que

$$A\hat{P}B = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}).$$

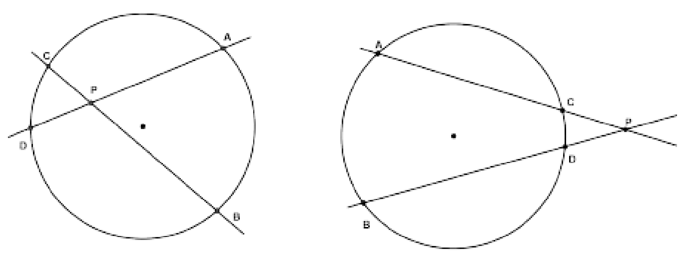

Figura 6.23:

(b) Na figura 6.23 à direita $A\hat{P}B$ é um ângulo secante cujo vértice está fora do círculo. Mostre que

$$A\hat{P}B = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD}).$$

13. Prove que todo paralelogramo inscrito em um círculo é um retângulo.

14. Um círculo está inscrito em um triãngulo retângulo cujos catetos medem b e c e a hipotenusa mede a. Determine o diâmetro do círculo.

15. Dois círculos são tangentes exteriores sendo A o ponto de contato. Seja B um ponto de um dos círculos e C um ponto do outro tais que a reta que passa por estes pontos é tangente comum aos dois círculos. Mostre que o ângulo $B\hat{A}C$ é reto.

16. Na figura 6.24 à esquerda, $A\hat{P}C$ é um ângulo secante cujo vértice encontra-se fora do círculo e que o intersecta em quatro pontos como indicado. Prove que $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.

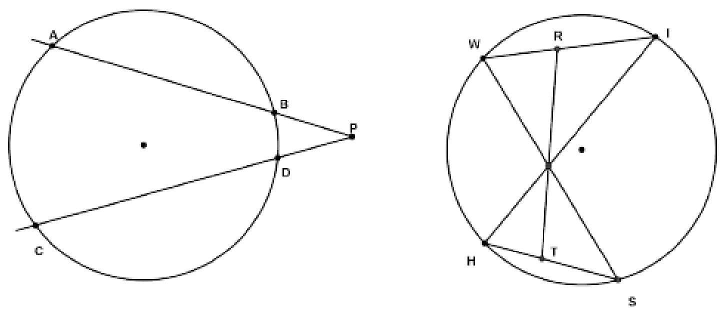

Figura 6.24:

17. Na figura à direita, WS e HI são cordas que se interesectam no ponto G, e RT é bissetriz do ângulo $W\hat{G}I$. Prove que $\overline{WR} \cdot \overline{TS} = \overline{RI} \cdot \overline{HT}$.

18. Na figura seguinte as retas são tangentes comuns aos dois círculos. Prove que m_1 e m_2 se intersectam na reta que contém os centros dos círculos. Prove que se os raios dos dois círculos são diferentes, as retas n_1 n_2 também se intersectam na reta que contém os centros.

LEITURA COMPLEMENTAR

..

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.

AULA 7

Funções Trigonométricas

META:

Introduzir as principais funções trigonométricas: *seno*, *cosseno* e *tangente*.

OBJETIVOS:

Definir as funções seno, cosseno e tangente.
Mostrar algumas identidades trigonométricas.
Calcular os valores das funções seno, cosseno e tangente para alguns ângulos.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno para acompanhar esta aula, é necessário que tenha compreendido todos os casos de semelhança de triângulos e as propriedades de ângulos inscritos em um círculo.

7.1 Introdução

Olá caro aluno, espero que esteja curtindo a leitura. Nesta aula iremos iniciar nosso estudo da funções trigonométricas. O estudo destas funções e de suas aplicações é denominado trigonometria. A trigonometria iniciou-se como estudo das aplicações, a problemas práticos, das relações entre os lados de um triângulo.

Algumas funções eram historicamente comuns, mas agora são raramente usadas, como a *corda*, que em notação atual é dada por $\text{crd}\theta = 2\sin(\theta/2)$. Hoje as funções trigonométricas mais conhecidas são as funções *seno*, *cosseno* e *tangente*. De fato, as funções seno e cosseno são as funções principais, visto que todas as outras podem ser colocadas em termos destas.

Nesta aula veremos como utilizar semelhança de triângulo para definir as funções trigonométricas, bem como provrar algumas de suas principais propriedades. Veremos também como calcular alguns valores destas funções tomando triângulo retângulos particulares.

7.2 Funções Trigonométricas

Considere um semicírculo de centro P e diâmetro AB. Tome um ponto C do semicírculo e faça $\alpha = C\hat{P}B$. Seja D um ponto de AB tal que CD seja perpendicular a AB.

Definição 7.1. a) Chama-se *seno do ângulo* α, e denotamos por sen α, ao quociente

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{PC}}.$$

b) Chama-se de *cosseno do ângulo* α, e denotamos por $\cos\alpha$, ao quociente

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \quad \text{se} \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

ou

$$\cos\alpha = -\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \quad \text{se} \quad 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

c) Chama-se de *tangente do ângulo* α, e denotamos por $\tan\alpha$ ao quociente

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha}.$$

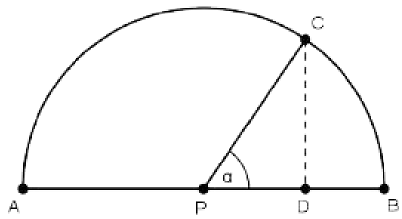

Figura 7.1:

Observação: De acordo com as definições acima podemos deduzir os seguintes valores

$$\text{sen } 0^\circ = 0, \;\; \text{sen } 90^\circ = 1, \quad \text{e} \quad \text{sen } 180^\circ = 0,$$

$$\cos 0^\circ = 1, \;\; \cos 90^\circ = 0, \quad \text{e} \quad \cos 180^\circ = -1$$

e

$$\tan 0^\circ = \tan 180^\circ = 0.$$

Além disso, a tangente não está definida para $\alpha = 90^\circ$.

Proposição 7.27. *O seno e cosseno independem do semi-círculo utilizado para definí-los.*

Demonstração De fato, se temos dois semi-círculos como na figura abaixo e tomamos C e C' tais que $C\hat{P}D = C'\hat{P}'D' = \alpha$, então os triângulos PDC e $P'D'C'$, retângulos em D e D', respectivamente, são semelhantes (Por quê ?). Assim,

$$\frac{\overline{C'P'}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{P'D'}}{\overline{PD}}.$$

Portanto,

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'P'}} \;\; \text{e} \;\; \cos\alpha = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{P'D'}}{\overline{P'C'}}.$$

□

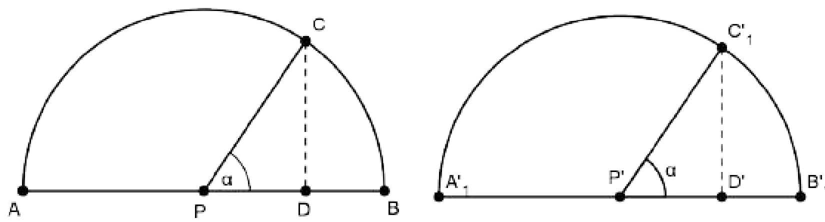

Figura 7.2:

Teorema 7.1. *Para todo ângulo α temos sen $\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$.*

Demonstração Se $\alpha = 0°, 90°$ e $180°$, o resultado é imediato, pelo que vimos anteriormente. Nos outros casos, considere a figura 7.2. Assim,

$$\text{sen}\ ^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{PC}}\right)^2 = \frac{\overline{PD}^2 + \overline{CD}^2}{\overline{PC}^2} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{PC}^2}.$$

Nesta terceira igualdade usamos o Teorema de Pitágoras.
Logo,

$$\text{sen}\ ^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

□

7.3 Fórmulas de Redução

Os próximos resultados irão nos permir calcular os valores de alguns ângulos a partir de outros.

Teorema 7.2. *Se α é um ângulo agudo, então*

a) *sen* $(90° - \alpha) = \cos\alpha$

b) $\cos(90° - \alpha) =$ *sen* α

c) $\tan(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

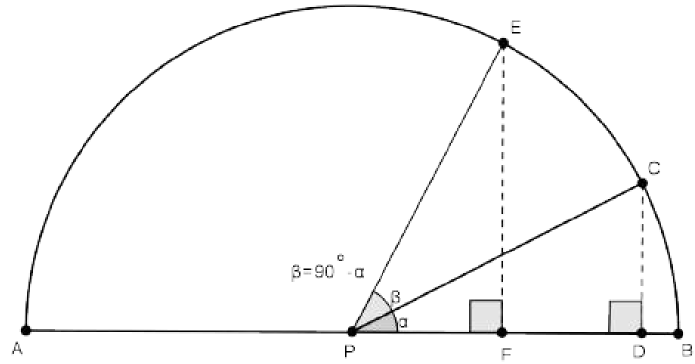

Figura 7.3:

Demonstração Considere a figura abaixo. Como os triângulos PFE e PDC são retos em F e D, e a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90°, segue que PFE e CDP são congruentes. Em particular,

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{PF}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{sen } (90^\circ - \alpha) &= \frac{\overline{EF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \cos\alpha, \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} = \text{sen } \alpha, \end{aligned}$$

e

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{sen } (90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

□

Teorema 7.3. *Para todo α temos*

a) *sen* $(180^\circ - \alpha) =$ *sen* α

b) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

Demonstração Para $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$ ou 180°, segue diretamente. Considere a figura abaixo. Como antes, mostramos que $PDC =$

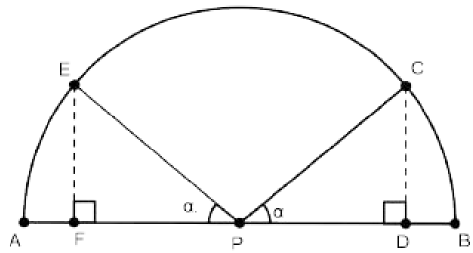

Figura 7.4:

PFE, o que implica que

$$\text{sen }(180° - \alpha) = \frac{\overline{EF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PC}} = \text{sen }\alpha$$

e

$$|\cos(180° - \alpha)| = \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = |\cos\alpha|.$$

Como $\alpha \neq 90°$, então α ou $180° - \alpha$ é agudo e o outro obtuso. Isto implica que $\cos\alpha$ e $\cos(180° - \alpha)$ têm sinais contrários. □

Exercício 7.1. Mostre que se ABC é um triângulo retângulo em C, então

$$\overline{BC} = \overline{AB}\text{sen }\hat{A}, \quad \overline{AC} = \overline{AB}\cos\hat{A} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \overline{AC}\tan\hat{A}.$$

Proposição 7.28.

a) $\textit{sen } 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *e* $\tan 45° = 1$

b) $\textit{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Demonstração

a) Seja ABC um triângulo retângulo em $\hat{C}$ e com $AC = BC$. Então $\hat{A} = \hat{B} = 45°$, já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. O Teorema de Pitágoras implica que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2$$

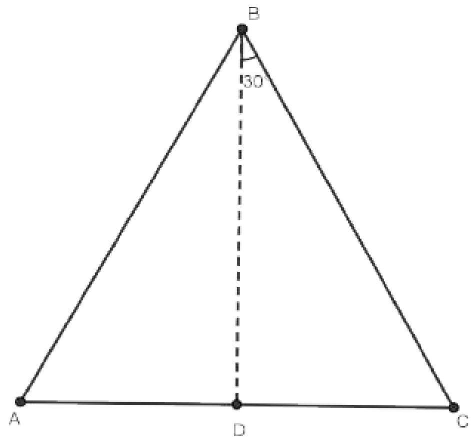

Figura 7.5:

e assim,

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}.$$

Logo,

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}/\sqrt{2}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A tangente é obtida pela simples divisão dos valores do seno e cosseno.

b) Seja ABC um triângulo equilátero. Considere D o ponto médio de AC. Daí, $D\hat{B}C = 30^\circ$ e, pelo Teorema de Pitágoras $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}}{2}$. Portanto,

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}/2}{\overline{BC}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - (\text{sen } 30^\circ)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Usando o Teorema 7.28 e as fórmulas de redução, podemos calcular os valores do seno e cosseno dos ângulos $60°, 120°, 135°$ e $150°$. Deixamos como exercício.

7.4 Lei dos Cossenos

Teorema 7.4. *Seja ABC um triângulo. Então*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos \hat{C}.$$

Demonstração Se $\hat{C} = 90°$, então não temos nada a fazer, já que $\cos 90° = 0$ e, neste caso, a fórmula reduz-se ao Teorema de Pitágoras.
Suponha que $\hat{C} \neq 90°$.
Seja D o pé da perpendicular da altura do vértice A. Como $\hat{C} \neq 90°$, então $C \neq D$.
Se $D = B$, então $\hat{B} = 90°$. Neste caso

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

e

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{AC} \cos \hat{C}, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.
Suponha agora que $D \neq B$ e C.
Neste caso, ADB e ADC são triângulos retângulos em $\hat{D}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$$

e

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2.$$

Subtraindo, obtemos

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{DC}^2$$

que é equivalente a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DB}^2 - \overline{DC}^2. \tag{7.5}$$

Temos três casos a considerar.

- **Caso 1:** $B * C * D$.

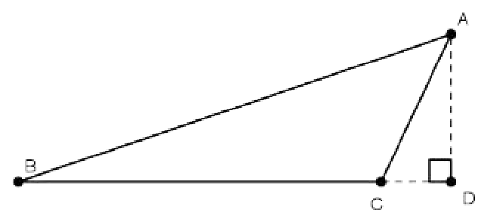

Figura 7.6:

Neste caso,

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}.$$

Assim, da equação (7.5), obtemos

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + (\overline{BC} + \overline{CD})^2 - \overline{DC}^2\\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{CD} - \overline{CD}^2\\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{CD}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\cos A\hat{C}D = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

e

$$\cos A\hat{C}B = -\cos(180^\circ - A\hat{C}B) = -\cos A\hat{C}D.$$

Logo,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cos\hat{C}.$$

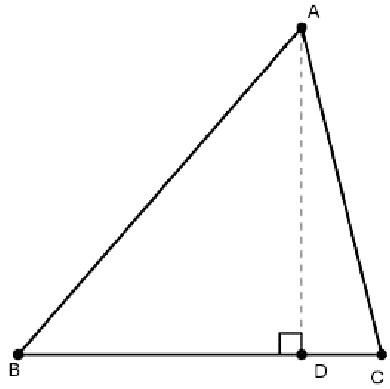

Figura 7.7:

- **Caso 2:** $B * D * C$.

  Neste caso,

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} \quad \text{e} \quad \cos\hat{C} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}.$$

  Assim, a equação (7.5) implica que

$$\begin{aligned}
\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + (\overline{BC} - \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{DC} - \overline{DC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{DC} \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC}\cos\hat{C}.
\end{aligned}$$

- **Caso 3:** $C * B * D$.

  Neste último caso, temos que

$$\overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BD} \quad \text{e} \quad \overline{CD} = \overline{AC}\cos\hat{C}$$

  donde, da equação (7.5) segue que

$$\begin{aligned}
\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + (\overline{CD} - \overline{BC})^2 - \overline{DC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{CD} \cdot \overline{BC} - \overline{DC}^2 \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{ACBC}\cos\hat{C}.
\end{aligned}$$

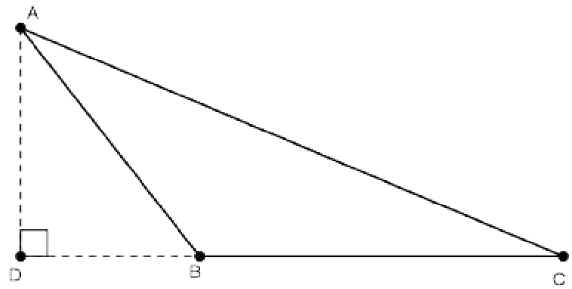

Figura 7.8:

Portanto, fica demonstrada a Lei dos Cossenos. $\square$

7.5 Lei dos Senos

Teorema 7.5. *Seja ABC um triângulo. Então*

$$\frac{sen\ \hat{A}}{\overline{BC}} = \frac{sen\ \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{sen\ \hat{C}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2R},$$

onde R é o raio do círculo circunscrito no triângulo ABC.

Demonstração Considere o círuclo de centro P e raio R que circunscreve o triângulo. Seja D um ponto do círculo tal que BD é um diâmetro. Temos dois casos, A e C estão no mesmo lado de BD ou em lados opostos.
Se A e C estão em lados opostos de BD, então $B\hat{A}C = B\hat{D}C$, por serem ângulos inscritos no círculo que subentende o mesmo arco.
Se A e C estão no mesmo lado de BD, então $ABDC$ é um quadrilátero inscrito no círuclo.
Então, pela Proposição 6.24, temos

$$C\hat{A}B + C\hat{D}B = 180°.$$

Em ambos os casos, sen $B\hat{A}C =$ sen $B\hat{D}C$. Como BCD é retângulo em C, já que está inscrito em um semi-círculo, segue que

$$\text{sen } \hat{A} = \text{sen } B\hat{A}C = \text{sen } B\hat{D}C = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DC}}{2R}.$$

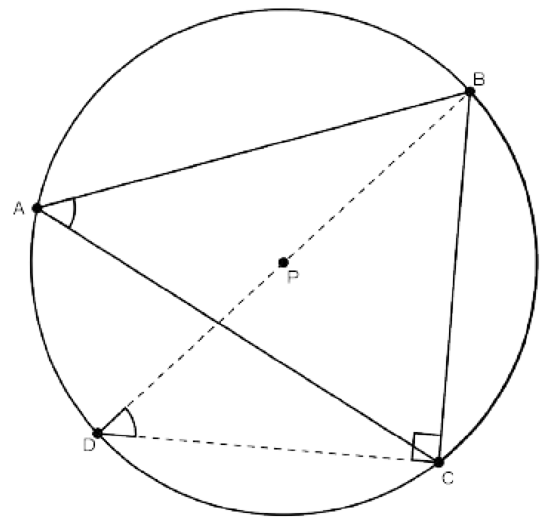

Figura 7.9:

Da mesma forma, mostramos que

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{2R} \text{ e sen } \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{2R}.$$

Disto segue o resultado. □

Teorema 7.6. *Sejam α e β ângulos agudos. Então*

a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\ \alpha sen\ \beta$

b) $sen\ (\alpha+\beta) = sen\ \alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\ \beta.$

Demonstração

a) Considere um ângulo de medida $\alpha+\beta$ e vértice P. Trace uma semi-reta S_{PH} que divide o ângulo em dois ângulos de medidas α e β. Trace uma perpendicular a S_{PH} que intercepta os lados do ângulo $\alpha+\beta$ em A e B. Sejam $\overline{PH} = h, \overline{PB} = b, \overline{PA} = a, \overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = m$. Pela Lei dos Cossenos temos que

$$(m+n)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta), \tag{7.6}$$

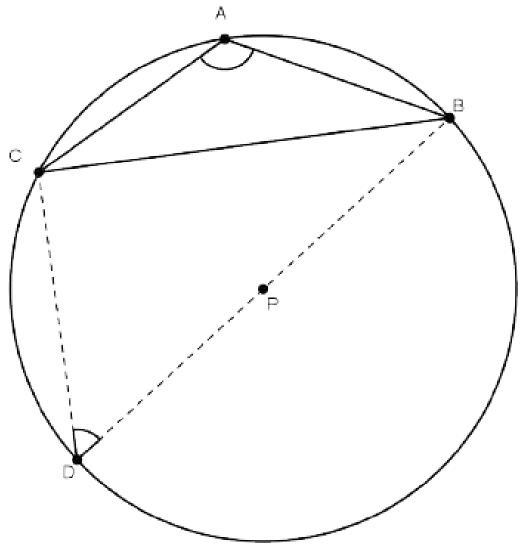

Figura 7.10:

$$m^2 = a^2 + h^2 - 2ah\cos\alpha \qquad (7.7)$$

e

$$n^2 = b^2 + h^2 - 2bh\cos\beta. \qquad (7.8)$$

Além disso,

$$\cos\alpha = \frac{h}{a} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{h}{b}.$$

Portanto,

$$h^2 = ab\cos\alpha\cos\beta$$

e

$$ah\cos\alpha = bh\cos\beta = ab\cos\alpha\cos\beta.$$

Logo, de (7.7) e (7.8) obtemos

$$m^2 = a^2 - ab\cos\alpha\cos\beta \qquad (7.9)$$

e

$$n^2 = b^2 - ab\cos\alpha\cos\beta. \qquad (7.10)$$

Além disso,

$$\text{sen } \alpha = \frac{m}{a} \quad \text{e} \quad \text{sen } \beta = \frac{n}{b}$$

que junto com (7.9) e (7.10), implica em

$$\begin{aligned}
(m+n)^2 &= m^2 + n^2 + 2mn \\
&= a^2 - ab\cos\alpha\cos\beta + b^2 - ab\cos\alpha\cos\beta \\
&\quad +2ab\text{sen } \alpha\text{sen } \beta \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\cos\beta + 2ab\text{sen } \alpha\text{sen } \beta.
\end{aligned}$$

Comparando com (7.6) obtemos que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen } \alpha\text{sen } \beta.$$

b) Nas condições do ítem a), obtemos que $\hat{A} = 90° - \alpha$. Isto implica que, pelo Teorema 7.2,

$$\text{sen } \hat{A} = \text{sen } (90° - \alpha) = \cos\alpha. \tag{7.11}$$

Pela Lei dos Senos, temos

$$\frac{\text{sen } (\alpha+\beta)}{m+n} = \frac{\text{sen } \hat{A}}{b} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen } \alpha}{m} = \frac{\text{sen } \hat{A}}{h},$$

o que implica em

$$\text{sen } (\alpha+\beta) = \frac{m}{b}\text{sen } \hat{A} + \frac{n}{b}\text{sen } \hat{A} \tag{7.12}$$

e

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{m}\text{sen } \alpha. \tag{7.13}$$

Substituindo (7.13) no primeiro termo do segundo membro de (7.12) e (7.11) no segundo termo do segundo membro de (7.13), obtemos

$$\text{sen } (\alpha+\beta) = \frac{h}{b}\text{sen } \alpha + \frac{n}{b}\cos\alpha. \tag{7.14}$$

Porém,

$$\text{sen } \beta = \frac{n}{b} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{h}{b},$$

que substituindo em (7.14), obtemos

$$\text{sen } (\alpha+\beta) = \text{sen } \alpha\cos\beta + \cos\alpha\text{sen } \beta.$$

□

Corolário 7.1. *Se $\alpha > \beta$, então*

a) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\ \alpha sen\ \beta$.

b) $sen\ (\alpha = \beta) = sen\ \alpha\cos\beta - \cos\alpha sen\ \beta$.

Demonstração No teorema anterior, faça $\alpha + \beta = a$ e $\alpha = b$. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cdot \cos(a-b) - \text{sen } b \cdot \text{sen } (a-b) \\ \text{sen } a = \text{sen } b \cdot \cos(a-b) + \cos b \cdot \text{sen } (a-b) \end{cases},$$

para encontrar $\cos(a - b)$ e sen $(a - b)$. □

RESUMO

Nesta aula nós vimos como definir as funções trigonométricas e como utilizar semelhança de triângulos para mostrar que elas estão bem definidas. Mostramos algumas fórmulas de redução, as Leis dos Cossenos e a Lei dos Senos, identidades trigonmétricas muito útil nas aplicações. Além disso, também calculamos alguns valores das funções trigonométricas, por exemplo, para os ângulos $30°$, $45°$ e $60°$.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos definir a noção de área e mostrar como calcular a área de algumas figuras geométricas.

ATIVIDADES

1. Em um triângulo ABC, em que todos os ângulos são agudos, a altura do vértice C forma com os lados CA e CB, respectivamente, ângulos α e β. Seja D o pé da altura do vértice C. Calcule $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ sabendo qeu $\overline{AD} = 1$, que $\alpha = 30°$ e $\beta = 45°$.

2. Quando o sol está $30°$ acima do horizonte, qual o comprimento da sombra projetada por um edifício de 50 metros?

3. Um barco está ancorado no meio de um lago. Uma longa estrada retilínea acompanha parte de sua margem. Dois amigos em passeio turístico observam o barco de um ponto na estrada e anotam que a reta daquele ponto ao barco forma um ângulo de $45°$ com a estrada. Após viajarem 5 km eles

param e anotam que agora podem ver o barco segundo um ângulo de 30° com a estrada. Com esta informação calcule a distância do barco à estrada.

4. Um parque de diversões deseja construir um escorregador gigante cujo ponto de partida fique a 20m de altura. As normas de segurança exigem que o ângulo do escorregador com a horizontal seja de, no máximo, 45°. Qual será o comprimento mínimo do escorregador?

5. Achar o comprimento da corda de um círculo de 20cm de raio subtendida por um ângulo central de 150°.

6. Do topo de um farol, 40m acima do nível do mar, o faroleiro vê um navio segundo um ângulo (de depressão) de 15°. Qual a distância do navio ao farol?

7. Mostre que o perímetro de um polígono regular inscrito em um círculo de raio R é $p_n = 2Rn\text{sen}\ \left(\frac{180°}{n}\right)$.

8. Num triângulo ABC tem-se $\overline{AC} = 23$, $\hat{A} = 20°$ e $\hat{C} = 140°$. Determine a altura do vértice B.

9. O que é maior:

   (a) sen 55° ou $\cos 55°$?

   (b) sen 40° ou $\cos 40°$?

   (c) $\tan 15°$ ou $\cot 15°$?

10. As funções *secante*, *cosecante* e *cotangenet* de um ângulo α são definidas por $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$, $\csc\alpha = 1/\text{sen}\ \alpha$ e $\cot\alpha = 1/\tan\alpha$. Para qualquer ângulo α diferente de zero e 180° mostre que:

    (a) $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\csc\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha} = 1$.

    (b) $\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha\csc\alpha$.

    (c) $\sec\alpha = \text{sen}\ \alpha(\cot\alpha + \tan\alpha)$.

(d) $\sec^2\alpha - \csc^2\alpha = \tan^2\alpha - \cot^2\alpha$.

(e) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\text{sen }\alpha} = \dfrac{1+\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$.

(f) $\text{sen }^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\text{sen }^2\alpha - 1$.

11. Calcule $\cos 105°$, $\cos 15°$ e $\text{sen } 75°$.

12. Mostre que se α e β são ângulos agudos então

    (a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

    (b) $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$.

13. Em um triângulo ABC, em que todos os ângulos são agudos, a altura do vértice C forma com os lados CA e CB respectivamente ângulos α e β. Seja D o pé da altura do vértice C. Calcule $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ sabendo que $\overline{AD} = 1$.

14. Mostre que $\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$.

15. Mostre que $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}$.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.

AULA

8

Área

META:

Definir e calcular área de figuras geométricas.

OBJETIVOS:

Definir área de figuras geométricas.

Calcular a área de figuras geométricas básicas, triângulos e paralelogramos.

PRÉ-REQUISITOS

Nesta aula o aluno deverá ter compreendido as noções de congruência e de semelhança de triângulos.

8.1 Introdução

Nesta aula iremos aprender como introduzir e calcular a área de regiões poligonais. Existem várias formas de introduzir área, dando continuidade à nossa construção axiomática da geometria, a forma como foi escolhida para ser apresentada é a axiomática.
A área é um objeto geométrico que tem diversas aplicações, uma delas é a demonstração do Teorema de Pitágora. Essa demonstração será deixada ao aluno na forma de exercício.

8.2 Área

Uma *região triangular* é um conjunto de todos os pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é a *fronteira* da região triangular e todos os outros pontos são pontos interiores.

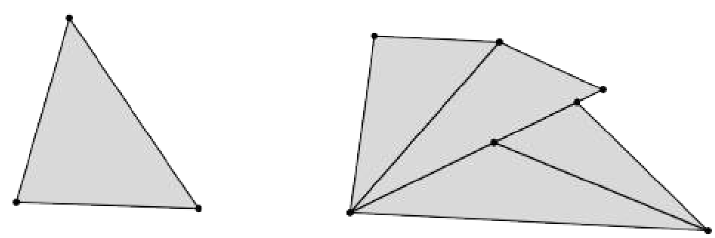

Figura 8.1: À esquerda: região triangular. À direita: região poligonal.

Uma *região poligonal* é uma figura plana que pode ser expressa como a união de um número finito de regiões triangulares, de tal modo que duas a duas não têm pontos interiores em comum.
A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas

Axioma de Área 1: A toda região poligonal corresponde um único número maior do que zero.

Axioma de Área 2: Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais, de modo que duas a duas não possuam pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

Axioma de Área 3: Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.

Axioma de Área 4: Se $ABCD$ é um retângulo então sua área é dada pelo produto $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

Vamos calcular a área de algumas figuras planas.

Proposição 8.29. *Seja $ABCD$ um paralelogramo com altura h com respeito ao lado DC. Então sua área é $h \cdot \overline{DC}$.*

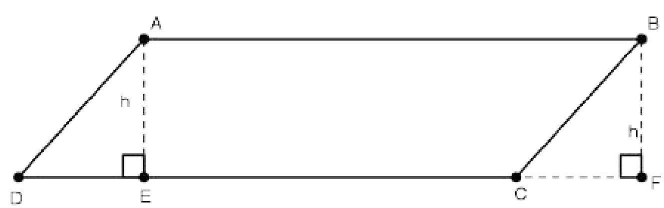

Figura 8.2:

Demonstração Trace, a partir dos pontos A e B, dois segmentos, AE e BF, perpendiculares à reta que contém CD. O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$, a qual em termos de nossa notação, é exatamente $h \cdot \overline{DC}$, já que $EF = AB = CD$. Observe que pelo caso LAL de congruência de triângulo, temos que

$ADE = BCF$. Portanto,

$$\begin{aligned}\text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(ADE)\\ &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(CBF)\\ &= \text{Área}(ABFE).\end{aligned}$$

□

Proposição 8.30. *Seja ABC um triângulo com altura h com respeito ao lado BC. Então, sua área é $h \cdot \overline{BC}$.*

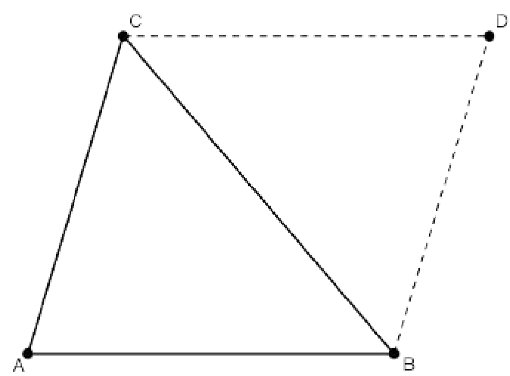

Figura 8.3:

Demonstração Trace pelo vértice C uma reta paralela ao lado AB, e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC. Estas duas retas se intercectam em um ponto D. O polígono $ABCD$ é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes, pelo caso LAL de congruência de triângulos. Como

$$\text{Área}(ABDC) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(BCD)$$

e

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}BCD,$$

então

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\text{Área}(ABDC).$$

Além disso, a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativamente ao lado AB. $\square$

Definição 8.1. Um *trapézio* é um quadrilátero com dois lados opostos paralelos. Os lados paralelos são chamados de *bases*.

Proposição 8.31. *A área de um trapézio é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

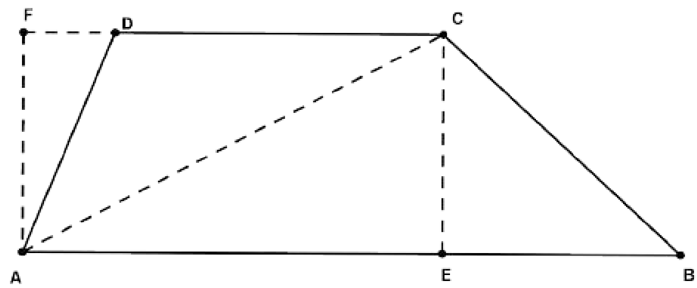

Figura 8.4:

Demonstração Seja $ABCD$ um trapézio cujas bases são os lados AB e CD. Trace a diagonal AC para dividir o trapézio em dois triângulos. Trace as alturas CE, do triângulo ACB, e AF, do triângulo ACD. Então teremos que $AF = CE$, já que os lados AB e CD são paralelos. Como consequência

$$\begin{aligned}
\text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ACB) + \text{Área}(ACD) \\
&= \tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CE} + \tfrac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{AF} \\
&= \tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot\overline{CE}.
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 8.2. A área da região limitada por um círculo é o menor número maior do que a área de qualquer polígono nele inscrito.

Da mesma forma que o comprimento do círculo é finito, a área é finita, já que a área de qualquer polígono nele circunscrito é maior do que a área de qualquer polígono inscrito.

8.3 Área do Círculo

Teorema 8.1. *A área da região limitada por um círculo é igual à metade do produto do raio pelo comprimento do círculo.*

Demonstração Sejam p o perímetro do círculo de raio R e A a área da região por ele limitada. Se P é um polígono inscrito neste círculo, então façamos

- $p(P) :=$ perímetro de P;
- $A(P) :=$ área de P;
- $L(p) :=$ comprimento do maior lado de P.

Tome $\varepsilon > 0$ arbitrário. Sejam três polígonos P_1, P_2 e P_3 tais que

i) $L(P_1) < \varepsilon$;

ii) $A - \varepsilon R < A(P_2)$;

iii) $p - \varepsilon < p(P_3)$.

Note que a existência de P_2 e P_3 é garantida pela definição de perímetro e área do círculo.
Seja P o polígono contendo todos os vértices dos polígonos P_1, P_2 e P_3. Observe que ao aumentarmos um vertice a um polígono inscrito, a nova área não diminui e o perímetro também não diminui. Portanto, o polígono P também goza das propriedades $i), ii)$ e $iii)$ acima.
A área do polígono P é a soma das áreas de todos os triângulos com vértices no centro do círculo e tendo como lado um dos lados do polígono P. Sejam OAB um destes triângulos e OC a altura com respeito ao lado AB. Assim,

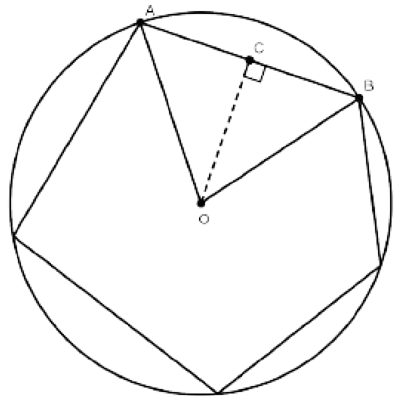

Figura 8.5:

$$\text{Área}(OAB) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OC}.$$

Como a hipotenusa é maior que qualquer um dos catetos, segue da desigualdade triângular que

$$\overline{OA} > \overline{OC} > \overline{OA} - \overline{AC},$$

o que implica que

$$\frac{1}{2}\overline{AB}(\overline{OA} - \overline{AC}) < \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OC} = \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OA}.$$

Mas como $\overline{OA} = R$ e $\overline{AC} < L(P) < \varepsilon$, concluímos que

$$\overline{OA} - \overline{AC} = R - \overline{AC} > R - \varepsilon.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\overline{AB}(R - \varepsilon) < \frac{1}{2}\overline{AB}(\overline{OA} - \overline{AC}) < \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2}R \cdot \overline{AB}.$$

Como o triângulo OAB foi escolhido arbitrariamente, obtemos uma desigualdade análoga para todos os outros. Somando todas elas, obtemos

$$\frac{1}{2}p(P)(R - \varepsilon) < A(P) < \frac{1}{2}p(P)R.$$

Da desigualdade $iii)$ e de $p(P) < p$, obtemos

$$\frac{1}{2}(p-\varepsilon)(R-\varepsilon) < \frac{1}{2}p(P)(R-\varepsilon) < A(P) < \frac{1}{2}p(P)R < \frac{1}{2}pR.$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}pR - \frac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2) < A(p) < \frac{1}{2}pR.$$

Assim,

$$\left|A(P) - \frac{1}{2}pR\right| < \frac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2).$$

Então, de $ii)$

$$\begin{array}{rcl} \left|A - \frac{1}{2}pR\right| & \leq & |A - A(P)| + \left|A(P) - \frac{1}{2}pR\right| \\ & < & \varepsilon R + \frac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2). \end{array}$$

Como o lado esquerdo independe de ε e $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrário, concluímos que

$$A = \frac{1}{2}pR.$$

□

Corolário 8.1. *A área de um disco de raio R é πR^2.*

RESUMO

Nesta aula o aluno pode aprendeu com introduzir a noção de área para regiões planas, bem como calcular a área de algumas regiões, como o triângulo, retângulo, paralelogramo, trapézio e o círculo.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos aplicar o que aprendemos nesta aula para demonstrar um interessante teorema, o Teorema de Ceva.

ATIVIDADES

1. Que relação satisfazem as áreas de dois triângulos semelhantes?

2. O raio do círculo inscrito em um polígono regular é chamado de *apótema* do polígono regular. Prove que a área de um polígono regular é igual a metade do produto do seu perímetro por seu apótema.

3. Se o diâmetro de dois discos são 3 e 6, qual a relação entre as suas áreas?

4. O comprimento de um círculo vale duas vezers o comprimento de outro círculo. Que relação satisfazem suas áreas?

5. Inscreve-se um triângulo equilátero de lado a em um círculo. Determine a área limitada por este círculo em termos de a.

6. Na figura 8.6, $ABCD$ é um quadrado e a, b e c são três retas paralelas passando nos vértices A, B e C, respectivamente. Determine a área do quadrado sabendo que a distância entre as retas a e b é 5cm e entre as retas b e c é 7cm.

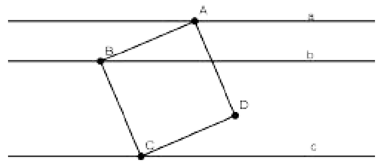

Figura 8.6:

7. A figura 8.7, apresenta um círculo de centro O cujo raio mede 2cm. AB é um diâmetro, C é um ponto do círculo tal que $B\hat{O}C = 60°$. Determine a área da região sobreada limitada por AC e pelo arco menor determinado por A e C.

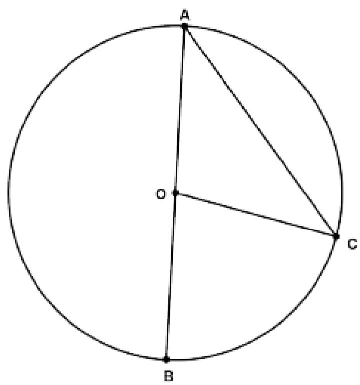

Figura 8.7:

8. Um losango tem três de seus vértices sobre um círculo de raio r e o quarto no centro do círculo. Determine sua área.

9. Na figura abaixo são representados dois círculos concêntricos de raios r e R, sendo $r < R$. Seja m um areta tangente ao círculo menor tendo A como ponto de contato. Seja B o ponto onde esta reta corta o círculo maior e seja n a reta tangente em B ao círculo maior. Se o ângulo α (o menor

formado entre m e n) mede $30°$, determine a razão entre as áreas limitadas pelos dois círculos.

10. Deseja-se calcular a área da figura ao lado. Ela foi desenhada tomando-se um círculo e um ponto P fora dele e trançando-se as duas tangentes ao círculo à partir de P. Sabe-se também que o ponto P dista $2r$ do centro do círculo, sendo r o seu raio.

11. A figura 8.8 sugere uma outra maneira de demonstrar o Teorema de Pitágora. Para fazer a demonstração expresse a área do quadrado maior de duas maneiras diferentes: como produto dos lados e como soma das áreas dos 4 triãngulos e do quadrado menor. Complete a demonstração.

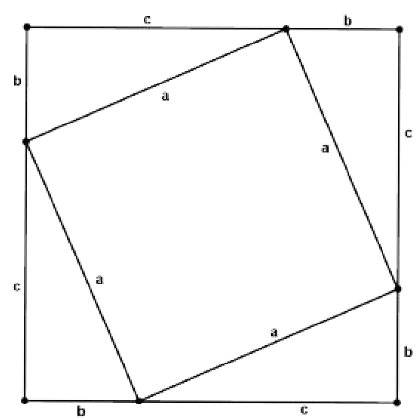

Figura 8.8:

12. Uma outra prova do Teorema de Pitágora é sugerida pela figura 8.9. Determine a área do trapézio de duas maneira diferentes, de forma análoga ao que feito no exercício anterior. Complete a prova.

13. Baseado na figura 8.10, demonstre o Teorema de Pitágoras. Esta prova foi dada por Bhaskara.

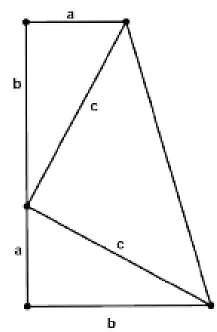

Figura 8.9:

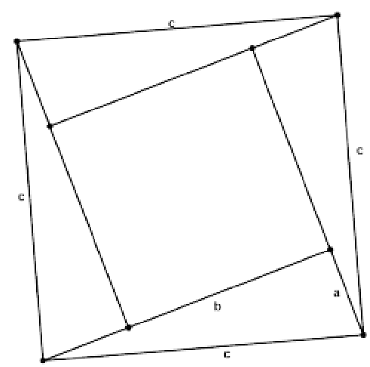

Figura 8.10:

14. Na figura 8.11 os segmentos PQ e MN são paralelos ao lado BC do triângulo ABC. Se M é o ponto médio de AC e P é o ponto médio de AM, determine a área do trapézio $MPQN$ em termos da área do triângulo ABC.

15. Na figura 8.12 $ABCD$ é um retângulo e $DM = MN = NB$. Determine a área do triângulo MNC.

16. Um triângulo isósceles está inscrito em um círculo cujo raio mede 5cm. Qual a área da região exterior ao triângulo e interior ao círculo.

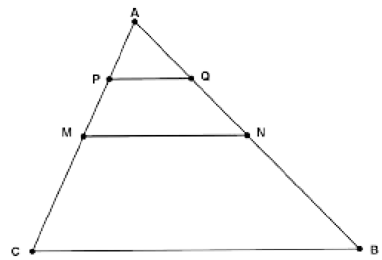

Figura 8.11:

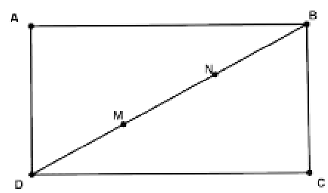

Figura 8.12:

17. Um triângulo tem lados medindo a, b e c e perímetro igual a $2p$. Mostre que sua área vale $\sqrt{p(p-a)(p-b)(pc)}$. (p é chamado de *semi-perímetro* do triângulo.)

18. Um triãngulo tem semi-perímetro p e o raio do círculo inscrito é r. Mostre que sua área é igual a pr.

19. Um triângulo tem lados medindo a, b e c. Se R é a medida do raio circunscrito ao triângulo então sua área é dada por $\frac{abc}{4R}$.

20. Mostre que, entre todos os retângulos de perímetro 8cm o que tem maior área é o quadrado.

LEITURA COMPLEMENTAR

¨

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.

AULA 9

Teorema de Ceva

META:

O Teorema de Ceva e algumas aplicações.

OBJETIVOS:

Enunciar e demonstrar o Teorema de Ceva;

Aplicar o Teorema de Ceva.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deverá ter compreendido as aulas anteriores.

9.1 Introdução

Perceba que com a introdução do Axioma das Paralelas foi possível provar uma série de resultados a partir deles. Na última aula nós introduzimos o conceito de área, tendo sido necessário o conhecimento de triângulos congruentes para garantir que triângulos congruentes possuem a mesma área.
Nesta aula faremos uso do conceito de área para provar um resultado não muito conhecido do ensino básico, o Teorema de Ceva. Este teorema foi provado pelo matemática italiano Giovanni Ceva (1647–1734) em 1678, em seu trabalho intitulado *De lineis rectis*.

9.2 O Teorema de Ceva

Uma *ceviana* de um triângulo é um segmento que liga um vértice a um ponto do lado oposto. Assim, se X, Y e Z são pontos nos lados BC, AC e AB, respectivamente de um triângulo ABC, os segmentos AX e BY são cevianas. Exemplos particulares de cevianas são as alturas, medianas e bissetrizes. Este termo vem do nome do matemático italiano Giovanni Ceva, que publicou em 1678 o seguinte teorema

Teorema 9.1. *Se três cevianas AX, BY, CZ de um triângulo ABC são concorrentes, então*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1.$$

Demonstração Seja P o ponto de encontro das três cevianas. Denote por (ABC) a área de um triângulo ABC. Observe que os triângulos BXP e CXP possuem a mesma altura h com respeito às bases BX e XC, respectivamente. E os triângulos ABX e ACX têm altura H com respeito às bases BX e CX, respectivamente. Assim,

$$(ABX) = \frac{1}{2}H \cdot \overline{BX}, \quad (ACX) = \frac{1}{2}H \cdot \overline{CX}$$

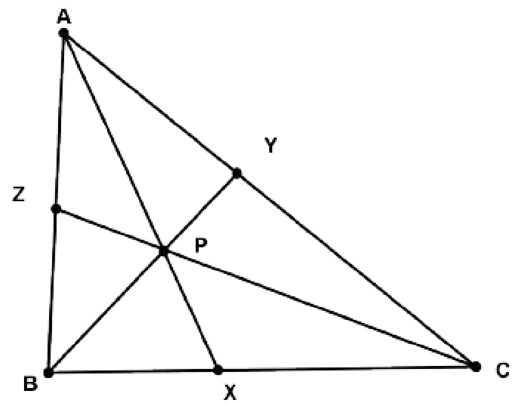

Figura 9.1: Cevianas concorrentes.

e

$$(BXP) = \frac{1}{2}h \cdot \overline{BX} \quad \text{e} \quad (CXP) = \frac{1}{2}h \cdot \overline{CX}.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\frac{(ABP)}{(ACP)} &= \frac{(ABX) - (BXP)}{(ACX) - (CXP)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}H \cdot \overline{BX} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{BX}}{\frac{1}{2}H \cdot \overline{CX} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{CX}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{(ABP)}{(ACP)}.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{(BCP)}{(ABP)} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{(CAP)}{(BCP)}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{(ABP)}{(ACP)} \frac{(BCP)}{(ABP)} \frac{(ACP)}{(BCP)} = 1.$$

$\square$

Também vale a recíproca.

Teorema 9.2. *Se três cevianas AX, BY e CZ satisfazem*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$$

então elas são concorrentes.

Demonstração Seja P o ponto de interseção das cevianas AX e BY.
Vamos mostrar que CZ passa por P.
Seja CZ' uma ceviana que passa por P. Pelo Teorema anterior, temos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = 1.$$

Pela hipótese, obtemos

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}.$$

Isto implica que $Z = Z'$. (Por quê ?) $\square$

Como consequência desse útlimo teorema temos o seguinte corolário.

Corolário 9.1. *As medianas de um triângulo são concorrentes.*

De fato, basta observar que as medianas satisfazem a hipótese do Teorema 9.2.

Teorema 9.3. *As medianas de um triângulo o divide em seis triângulos de mesma área.*

Demonstração Observe que

- $(BPX) = (CPX)$
- $(BPZ) = (APZ)$
- $(CPY) = (APY)$

já que têm a mesma altura com respeito a bases congruentes. Pela mesma razão, $(AXC) = (ABX)$. Mas como

$$(AXC) = (APY) + (CPY) + (CPX) = 2(APY) + (CPX)$$

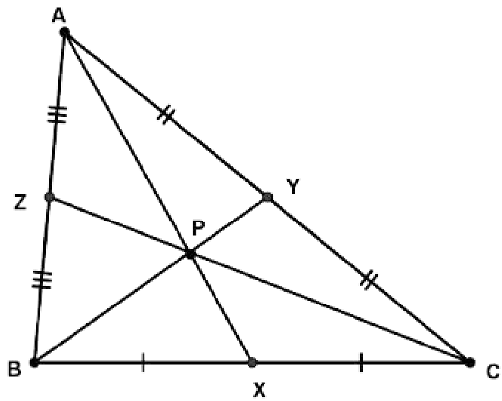

Figura 9.2: As medianas de um triângulo são concorrentes.

e

$$(ABX) = (APZ) + (BPZ) + (BPX) = 2(APZ) + (CPX),$$

então

$$(APY) = (APZ).$$

Da mesma forma mostramos que $(APY) = (BPX)$. $\square$

Teorema 9.4. *O ponto de interseção das medianas as divide na razão* $2:1$.

Demonstração Pelo teorema anterior, temos $(APB) = 2(PBX)$. Além disso, APB e PBX têm a mesma altura h com respeito às bases AP e PX. Assim,

$$(APB) = \frac{1}{2}h\overline{AP}$$

e

$$(PBX) = \frac{1}{2}h\overline{PX},$$

o que implica que $\overline{AP} = 2\overline{PX}$. Da mesma forma, mostramos que $\overline{CP} = 2\overline{PZ}$ e $\overline{BP} = 2\overline{PY}$. $\square$

Exercício 9.1. Prove que as três alturas de um triângulo são concorrentes.

Sugestão: Use o fato que em um triângulo ABC retângulo em $\hat{A}$ satisfaz $\overline{AB} = \overline{BC}\cos\hat{B}$. Use o Teorema de Ceva.

9.3 Pontos Notáveis de um Triângulo

Definição 9.1.

a) O ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo é chamado de *incentro*.

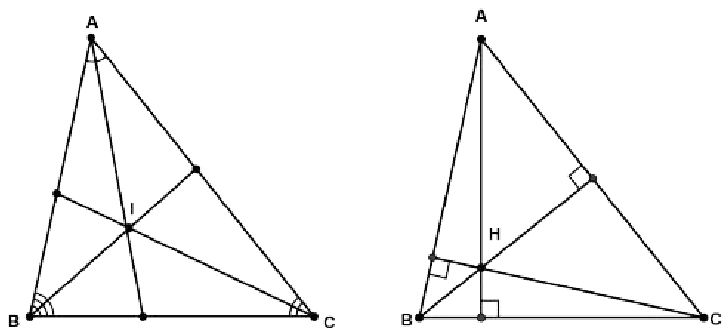

Figura 9.3: O ponto I é o incentro e o ponto H é o ortocentro.

b) O ponto de encontro das alturas de um triângulo é denominado de *ortocentro*.

c) O ponto de encontro das medianas de um triângulo é denominado *baricentro*.

d) O ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é denominado de *circuncentro*.

Teorema 9.5. *Em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o ortocentro, e o circuncentro são colineares. Além disso, o baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.*

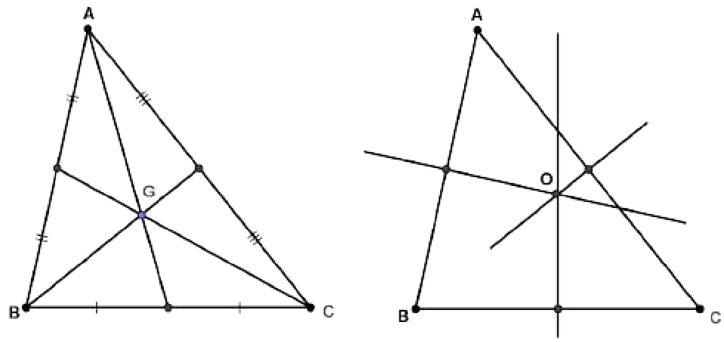

Figura 9.4: O ponto G é o Baricentro e o ponto O é o circuncentro.

Definição 9.2. A reta que contém esses três pontos do teorema é denominada de Reta de Euler do triângulo ABC.

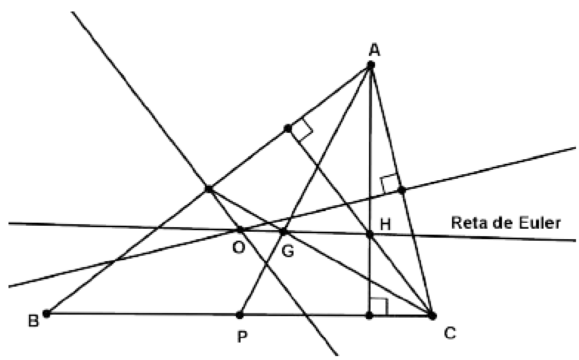

Figura 9.5: $\overline{OG} = 2\overline{GH}$.

Observe que em um triângulo equilátero a reta de Euler não está definida, já que neste triângulo a mediatriz, a bissetriz e a altura coincidem e por sua vez os três pontos também coincidem. Em triângulos isósceles, temos que a mediana, mediatriz e altura relativa à base são coincidentes, logo, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro pertencem a um mesmo segmento. Assim, a reta que contém esse segmento é a reta de Euler do triângulo.

Demonstração [do Teorema] Vamos supor que todos os ângulos do triângulo ABC são agudos, para garantirmos que os três pontos são internos ao triângulo. Para um triângulo com um ângulo obtuso ou retângulo, a prova é análoga. Podemos supor que ABC não é isósceles. Neste caso, a mediana é distinta da mediatriz, o que implica que o baricentro G e o circuncentro O são pontos distintos. Tome a reta r determinada por G e O. Na semi-reta S_{OG} tome um ponto H tal que $\overline{GH} = 2\overline{GO}$. Seja P o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Considere a mediana e a mediatriz relativas ao lado BC. Os triângulos GHA e GOP são semelhantes pelo caso LAL de semelhança, pois

$\overline{GH} = 2\overline{GO}$ (por construção)

$A\hat{G}H = P\hat{G}O$ (opostos pelo vértice)

$\overline{AG} = 2\overline{GO}$ (propriedade do baricentro, Teorema 9.4)

Logo, $A\hat{H}G = P\hat{O}G$. Portanto, as retas contendo AH e OP são paralelas pelo Teorema do Ângulo Interno Alternado. Mas como OP é perpendicular a BC e paralela a AH, segue que H pertence à altura de ABC relativa ao lado BC. Da mesma forma, mostramos que H pertence à altura de ABC relativa ao lado AC. (Ver figura 9.5.) Como H é a interseção de duas alturas, então H é o ortocentro de ABC. $\square$

Um teorema interessante, mas que não iremos provar aqui é o seguinte

Teorema 9.6 (Círculo dos nove pontos)**.** *Existe uma circunferência passando pelos seguintes pontos:*

- *os pontos médios dos lados;*
- *os pés das alturas;*
- *os pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro.*

O raio desta circunferência é a metade do raio da circunferência inscrita. Além disso, o centro desta circunferência está na reta de Euler, entre o ortocentro e o circuncentro.

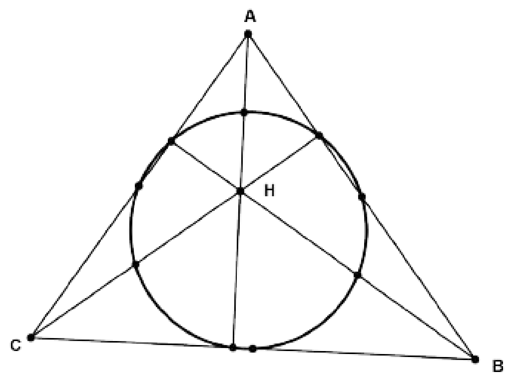

Figura 9.6: O círculo dos nove pontos do triângulo ABC.

A história destes dois últimos teoremas é um pouco confusa. Uma publicação de 1804, indicava que eles já eram conhecidos de B. Bevan. As vezes os dois teoremas são atribuídos a Euler, que provou em 1765, resultados análogos a este. De fato, alguns escritos chamam o círculo de "o Círculo de Euler". A primeira prova completa surgiu em 1821, devido a J. V. Poncelet, a qual originou o nome *circulo dos nove pontos.*

RESUMO

Nesta aula demonstramos o Teorema de Ceva, um resultado importante que tem diversas aplicações. Vimos uma interessante relação entre os pontos notáveis de um triângulo, ortocentro, baricentro e circuncentro, estes pontos são colineares. Enunciamos o Teorema dos noves pontos, um resultado surpreendente.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iremos fazer uso do que foi aprendido até aqui para construções geométricas com régua e compasso. Iremos estudar os três problemas clássicos, trisecção do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo.

ATIVIDADES

1. Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes.
2. Prove que as alturas de um triângulo são concorrentes.
3. Prove que as bissetrizes de um triângulo são concorrentes.
4. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos não congruentes cujos os respectivos lados são paralelos. Prove que as retas contento AA', BB' e CC' são concorrentes.
5. Prove que o circuncentro e o ortocentro de triângulo obtuso está fora do triângulo.
6. Se um triângulo possui duas medianas congruentes então é isósceles.
7. Se um triângulo possui duas alturas congruentes então é isósceles.

8.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.

2. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

3. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.

4. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.

5. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.

AULA 10

Construções Elementares

META:

Introduzir as principais construções elementares.

OBJETIVOS:

Introduzir as construções elementares.

Resolver problemas práticos.

PRÉ-REQUISITOS

Para um melhor aproveitamento o aluno deverá ter compreendido todas as aulas anteriores.

10.1 Introdução

Os matemáticos gregos estudaram três problemas de Geometria que desempenharam papel importande no desenvolvimento da matemática. São os problemas de construções com régua e compasso, e resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los, o que só veio a acontecer na virada do século XVIII para o XIX d.C.
Os problemas, que ficaram conhecidos como os três *problemas clássicos*, são

- A duplicação do cubo.
- A quadratura do círculo.
- A trissecção do ângulo.

Com relação as origens do primeiro problema existe uma lenda que conta que em 427 a.C. um quarto da população de Atenas morreu de peste. Quando um orácolo anunciou aos habitantes como combater a doença, eles deveriam duplicar o altar de Apolo, que possuia o formato de um cubo, prontamente os atenienses dobraram as dimensões do altar, mas isso não afastou a peste. O volume fora multiplicado por oito e não por dois.
A primeira mensão conhecida do problema da quadratura do círculo encontra-se no problema 50 do papiro de Rhind, em torno de 1600 a.C.
Quanto a trissecção do ângulo, acredita-se que Hípias de Elis, que viveu no século V a.C. foi um dos primeiros a tentar resolver este problema, utilizando curvas e construções que não podem ser efetuadas somente com régua e compasso.
A história do completo esclarecimento deste problema é uma das mais interessantes e instrutivas da história da Matemática, passando pela "consolidação" dos números complexos, com o grande Gauss (1777–1855), e pela criação da teoria dos grupos com o genial Galois (1811–1832).

Nas próximas aulas, estudaremos algumas construções geométricas com régua e compasso. Estudaremos também os três problemas clássicos e veremos porque eles não podem ser resolvidos somente com régua e compasso.

10.2 Construções Elementares

Antes de considerarmos problemas de construções com régua (não graduada) e compasso, algumas observações se faz necessário.
Para abordar problemas de construções geométricas com régua e compasso precisamos está atento as seguintes construções permitidas:

1. Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos;
2. Traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo;
3. Determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos.

Algumas construções que não são permitidas:

1. Traçar um círculo de raio ou centro "arbitrário";
2. Usar uma graduação previamente preparada da régua ou do compasso;
3. Tomar sobre uma reta um ponto "arbitrário";
4. Deslizar a régua até uma certa posição.

10.2.1 Perpendiculares

Um dos primeiros problemas básicos de construções geométricas é o traçado de perpendiculares.

Problema 10.2. *Dada uma reta r e um ponto P fora de r, traçar por P uma reta perpendicular a r.*

Solução Siga os passos seguintes (Veja figura 10.1):

1. Trace um círculo de centro P cortando a reta r em A e B.

2. Trace círculos de mesmo raio com centros em A e B obtendo Q, um dos pontos de interseção.

3. A reta que passa por P e Q é perpendicular à reta r.

□

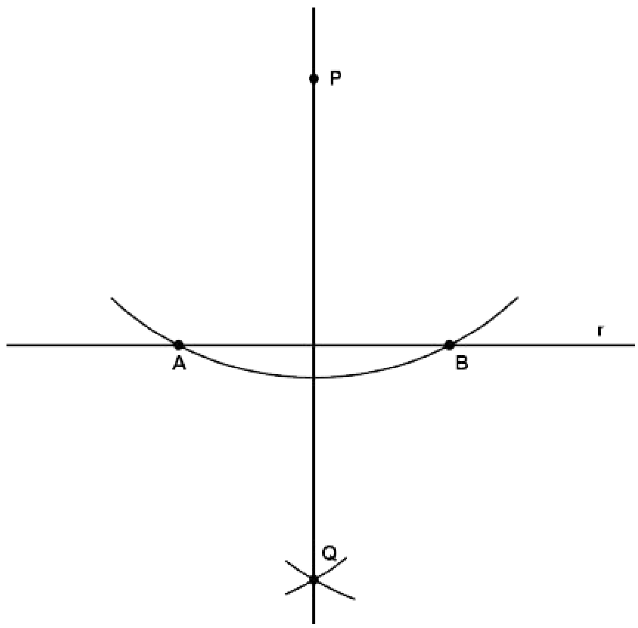

Figura 10.1: Reta perpendicular a r passando por P.

Justificativa os triângulos APQ e BPQ são congruentes, já que $AP = BP$ e $AQ = BQ$. Assim, $A\hat{P}Q = B\hat{P}Q$, ou seja, a reta PQ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$. Como APB é um triângulo isósceles, segue que a bissetriz é também a altura. □

Problema 10.3. *Dada uma reta r e um ponto $P \in r$, traçar por P uma reta perpendicular a r.*

Solução

1. Trace um círculo com centro em P e qualquer raio cortando r nos pontos A e B.

2. Trace círculos de mesmo raio com centros em A e B obtendo Q, um dos pontos de interseção.

3. A reta que passa por P e Q é perpendicular à reta r.

□

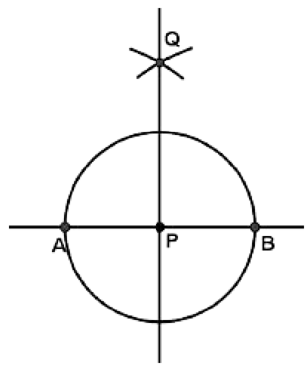

Figura 10.2: Reta perpendicular a r passando por $P \in r$.

A justificativa é análoga a da proposição anterior e é deixada para o aluno

10.2.2 Paralelas

Um outro problema básico é o traçado de paralelas.

Problema 10.4. *Dada uma reta r e um ponto P fora dela, traçar uma reta paralela a r passando por P.*

Solução Siga os passos:

1. Trace três círculos de mesmo raio:

   (a) O 1° com centro em P, determinando um ponto A na reta r;

(b) O 2° com centro em A, determinando um ponto B na reta r;

(c) O 3° com centro em B, determinando um ponto Q, diferente de A, sobre o primeiro círculo.

2. A reta que passa pelos pontos P e Q é a reta procurada (Ver figura 10.3).

□

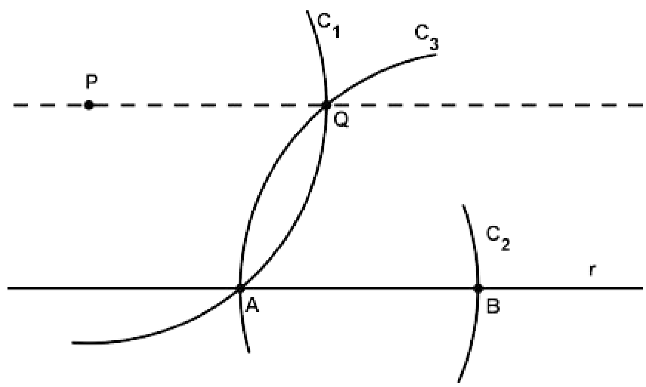

Figura 10.3: Reta paralela à reta r passando por P.

Justificativa $PABQ$ é um quadrilátero com todos os lados congruentes, logo é um paralelogramo, de fato um losango. Portanto seus lados opostos, PQ e AB, são paralelos. □

10.2.3 Mediatriz

Definição 10.1. A *mediatriz* de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio.

Problema 10.5. *Construir a mediatriz de um segmento AB.*

Solução Veja figura 10.4

1. Construa dois círculos de mesmo raio com centros em A e B, determinando dois pontos de interseção, P e Q.

2. A reta contendo PQ é a mediatriz de AB.

□

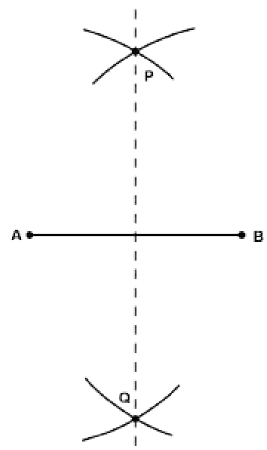

Figura 10.4: Mediatriz de AB.

Justificativa Observe que os triângulos APQ e BPQ são congruentes. Em particular, $A\hat{P}Q = B\hat{P}Q$. Assim, PQ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$. Como ABP é um triângulo isósceles, segue que PQ é perpendicular a AB. □

Lembremos a seguinte propriedade da mediatriz:

A mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento.

10.2.4 Bissetriz

A *bissetriz* de um ângulo $A\hat{O}B$ é a semi-reta S_{OC} tal que $A\hat{O}C = C\hat{O}B$.

Problema 10.6. *Construir a bissetriz de um ângulo* $A\hat{O}B$.

Solução Ver figura 10.5.

1. Trace um círculo de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo.

2. Trace dois círculos de mesmo raio com centros em X e Y. Seja C um dos pontos de interseção.

3. A semireta S_{OC} é a bissetriz de $A\hat{O}B$.

$\square$

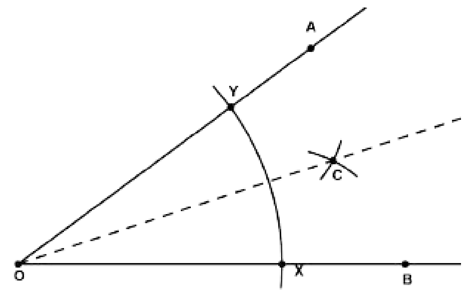

Figura 10.5: Bissetriz de $A\hat{O}B$.

Justificativa Note que $OYC = OXC$, pelo caso LLL de congruência de triângulos. Portanto, $Y\hat{O}C = X\hat{O}C$. $\square$

Lembremos a seguinte propriedade da bissetriz:

A bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo.

10.2.5 O arco capaz

Antes de definirmos e construir o arco capaz de um ângulo, vejamos como transportar um ângulo.

Problema 10.7. *Dado um ângulo θ de vértice V e uma semi-reta S_{AB}, construir um ângulo sobre S_{AB} com medida θ.*

Solução Veja figura 10.6.

1. Trace um círculo de centro V, determinando os pontos P e Q sobre os lados do ângulo θ.

2. Trace um círculo de mesmo raio com centro A, determinando P' em S_{AB}.

3. Trace um círculo de raio PQ e centro P', determinando Q'.

4. Portanto, $P'\hat{A}Q' = \theta$.

□

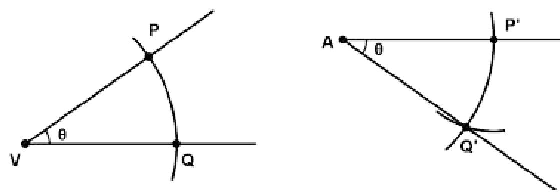

Figura 10.6: Transporte de um ângulo.

Justificativa Pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos $PVQ = P'AQ'$. Em particular $P'\hat{A}Q' = \theta$. □

Definição 10.2. Sejam A e B dois pontos sobre um círculo. Para todo ponto M em um mesmo arco determinado por A e B, o ângulo $\theta = A\hat{M}B$ é constante. Este arco chama-se *arco capaz* (Ver figura 10.7) do ângulo θ sobre o segmento AB.

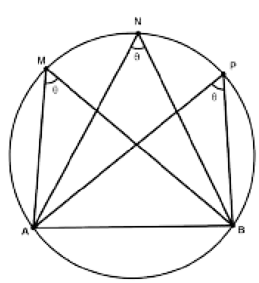

Figura 10.7: O arco determinado por A e B contendo M é o arco capaz do ângulo θ sobte o segmento AB.

O arco capaz de 90° sobre um segmento AB é um semicírculo com diâmetro AB.

Problema 10.8. *Dado um ângulo θ, construir seu arco capaz.*

Solução

1. Dado um segmento AB, trace a sua mediatriz e o ângulo $B\hat{A}X = \theta$.

2. Trace a perpendicular a AX que passa por A. Seja O a interseção desta perpendicular com a mediatriz de AB.

3. O arco de centro em O e extremidades A e B é o arco capaz do ângulo θ sobre AB.

□

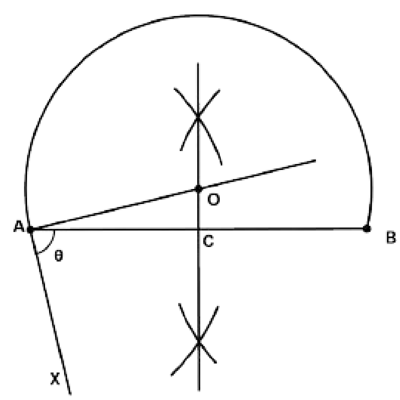

Figura 10.8: Construção do arco capaz.

Justificativa Se C é o ponto médio de AB então $C\hat{A}O = 90° - \theta, A\hat{O}C = \theta$. Daí, $A\hat{O}B = 2\theta$. Sabemos que se M é um ponto nesse arco, então

$$A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B.$$

Portanto, temos que este arco é de fato o arco capaz do ângulo θ. □

O arco capaz tem uma interessante propriedade:

Um observador que se move sobre o arco capaz de um ângulo θ, consegue ver o segmento AB sempre sob o mesmo ângulo.

10.2.6 Divisão de um segmento em partes iguais

Problema 10.9. *Dividir um segmento AB em n partes iguais.*

Solução Faremos a demonstração para $n = 4$ e para n arbitrário, a solução é análoga.

1. Trace uma semi-reta S_{AX}.

2. Com o compasso, construa segmentos congruentes em AA_1, A_1A_2, A_2A_3 e A_3A_4.

3. Trace paralelas a A_4B que passam por A_1, A_2 e A_3, determinando 3 pontos em AB, P_1, P_2 e P_3. Os segmentos AP_1, P_1P_2, P_2P_3 e P_3P_4 são congruentes.

□

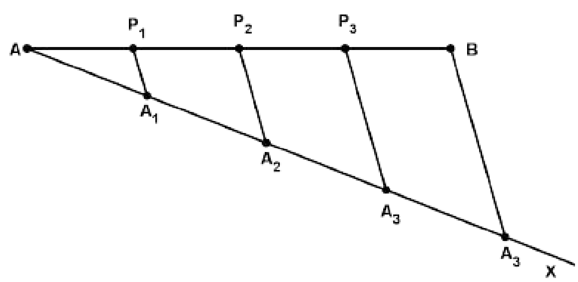

Figura 10.9: Divisão de AB em 4 partes iguais.

A justificativa é uma aplicação direta do Corolário 5.3.

10.2.7 Tangentes a um círculo

Problema 10.10. *Traçar uma reta tangente a um círculo de centro O passando por um ponto P.*

Solução Se P pertence ao círculo, basta traçar a reta perpendicular ao raio de extremidade P. (Ver figura 10.10.)

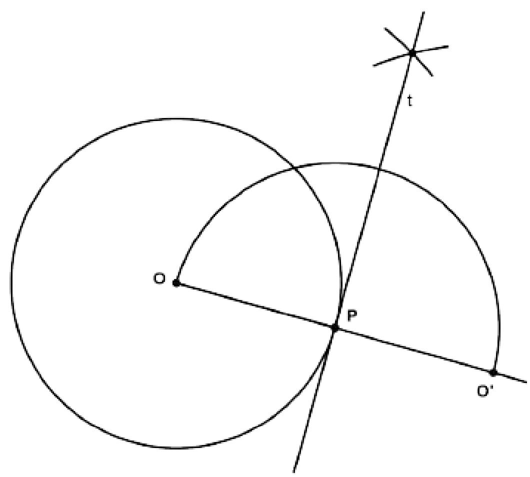

Figura 10.10: Tangente a um círculo por um ponto do círculo.

Suponha que P não pertença ao círculo.

1. Trace um círculo de centro no ponto médio de PO e raio $\frac{\overline{PO}}{2}$, determinando os pontos de interseção A e A', sobre o círculo original.

2. As retas PA e PA' são tangentes ao círculo dado.

$\square$

Justificativa Como o ângulo $P\hat{A}O$ está inscrito em um semicírculo, então ele é reto. Como toda reta perpendicular a um raio em sua extrimidade é tangente ao cículo, temos o resultado. $\square$

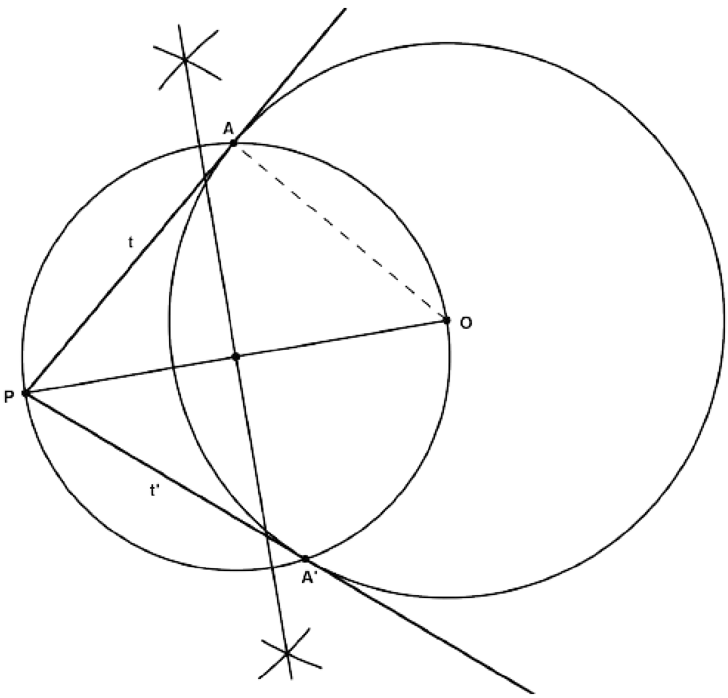

Figura 10.11: Tangente a um círculo por um ponto fora do círculo.

10.3 Problemas Resolvidos

Para resolver um problema de construção, é conveniente fazer um esboço de uma figura supondo o problema resolvido. Observando o esboço, planeje a solução, quais dados devem ser colocados primeiro e que construções devem ser realizadas para atingir a solução.

Problema 10.11. *Construir os triângulos ABC sendo dados os lados* $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ *e o ângulo* $\hat{A} = \theta$.

Solução Ver figural 10.13.

1. Trace o segmento AB.

2. Construa a semi-reta S_{AX} tal que $B\hat{A}X = \theta$.

3. Trace o círculo de centro B e raio a.

Figura 10.12: Dados do problema 10.11.

Qualquer um dos pontos de interseção, C_1 e C_2, com a semi-reta S_{AX} nos dá o triângulo procurado. □

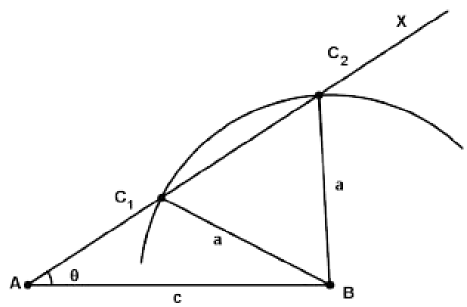

Figura 10.13: Solução do problema 10.11.

Observe que neste último problema pode acontecer três casos:

1. o problema tem duas soluções.
2. o problema tem uma única solução.
3. ou o problema não admite solução.

Qual a relação entre a e c para que ocorra cada um dos casos?
Esta construção mostra porque uma correspondência entre dois triângulos do tipo ALL não é necessariamente uma congruência.

Problema 10.12. *Construir o triângulo ABC sendo dados o lado BC, a altura h relativa a esse lado e o ângulo $\hat{A}$.*

Solução

1. Trace o segmento BC.

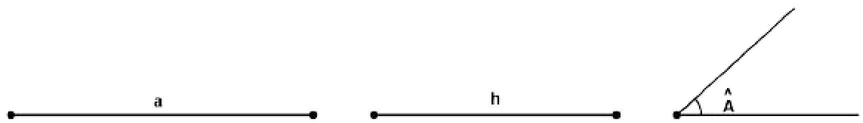

Figura 10.14: Dados do problema 10.12.

2. Trace a perpendicular a BC que passa por B.

3. Nesta perpendicular, marque um ponto P tal que $\overline{PB} = h$.

4. Trace a paralela a BC que passa por P.

5. Construa o arco capaz do ângulo $\hat{A}$ sobre BC.

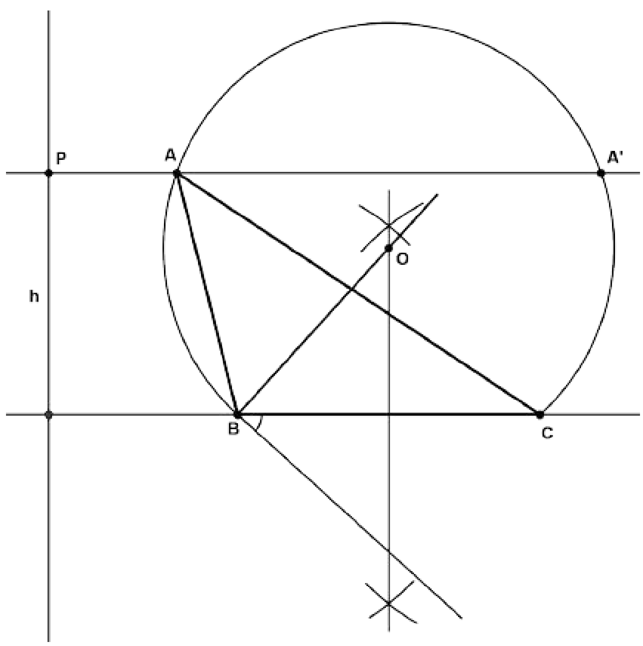

Figura 10.15: Solução do problema 10.12.

A interseção do arco capaz com a reta paralela a BC que passa por P nos dá o vértice A. □

Novamente, este problema pode ter uma, duas ou nenhuma solução. Você consegue a relação entre a, h e sen $\hat{A}$ tal que ocorra cada um dos casos?

Problema 10.13. *Construir o triângulo ABC sendo dadas as medianas m_a, m_b e a altura h_a.*

Figura 10.16: Dados do problema 10.13.

Analisemos como chegar a solução. Suponha que o triângulo ABC da figura 10.17 seja a solução do problema.

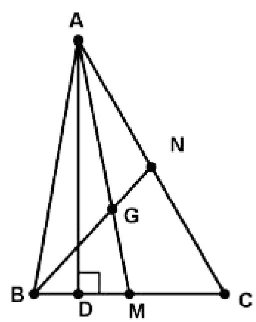

Figura 10.17: Esboço da solução do problema 10.13.

É claro que o triângulo ADM pode ser resolvido, já que é um triângulo retângulo e temos h_a e m_a. Para encontrar o ponto G, usamos o fato que as medianas de um triângulo são concorrentes e se encontram num que as dividem na razão 2:1. Assim, o ponto G é tal que $\overline{AG} = \frac{2}{3}m_a$, e como já sabemos dividir um segmento em partes iguais, podemos encontrar G. Em seguida, para determinar B na reta contendo DM, usamos o fato que $\overline{BG} = \frac{2}{3}m_b$. Agora, podemos encontrar C, visto que M é o ponto médio de BC.

Uma observação importante, é que esta construção só pode ser feita se os dados foresm compatíveis. Você é capaz de determinar condições sobre os dados do problema para sempre exista solução?

Solução As medianas de um triângulo cortam-se em um ponto (baricentro) que divide cada uma delas na razão 2 : 1.

1. Trace segmentos $\overline{PR} = m_a$ e $\overline{PQ} = m_b$.

2. Divida os segmentos PQ e PR em três partes iguais.

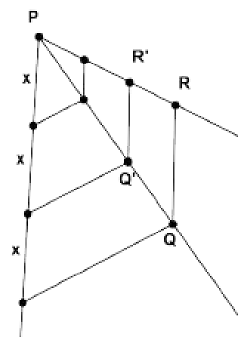

Figura 10.18: Divisão em 3 partes iguais dos segmentos PQ e PR.

3. Determine pontos Q' em PQ e R' em PR, tais que $\overline{PQ'} = \frac{2}{3}m_a$ e $\overline{PR'} = \frac{2}{3}m_b$.

4. Trace uma reta r, fixe um ponto D sobre ela e construa uma perpendicular AD com $\overline{AD} = h_a$. (Ver figura 10.19.)

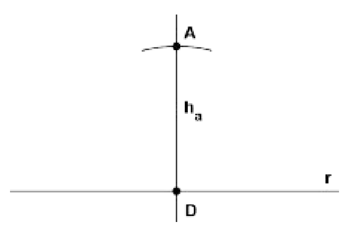

Figura 10.19: $AD \perp r$.

5. Trace um círculo com centro em A e raio m_a, determinando um ponto M sobre r. (Ver figura 10.20.)

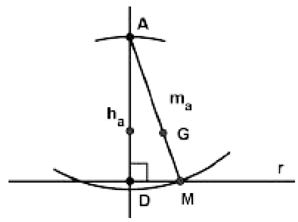

Figura 10.20: Determinação de M e G.

6. Tome G sobre AM tal que $\overline{AG} = \frac{2}{3}m_a = \overline{PR'}$.

7. Trace um círculo com centro G e raio $\frac{2}{3}m_b = \overline{PQ'}$, determinando um ponto B em r. (Ver figura 10.21)

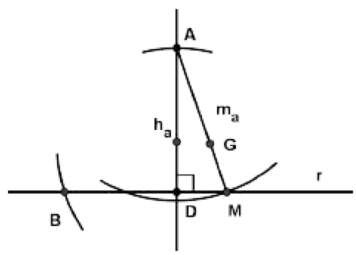

Figura 10.21: Construção de B.

8. Tome um ponto C na reta que contém B e D tal que $MC = BM$. (Ver figura 10.22.)

$\square$

Aqui também não temos uma única solução para o problema. Depende dos dados do problema. Na figura 10.23, podemos ver uma outra solução. Apesar de serem bem parecidas, elas são diferentes. Tente encontrar relações sobre os dados do problema tal que a construção seja possível.

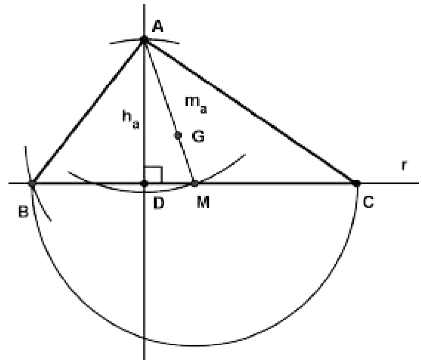

Figura 10.22: Solução do problema 10.13.

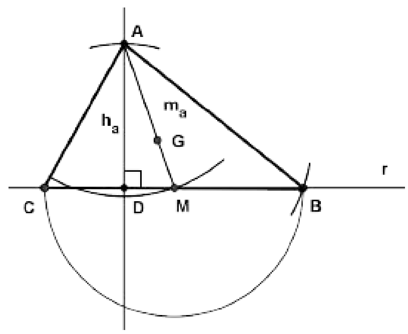

Figura 10.23: Outra solução do problema 10.13.

Problema 10.14. *Dados um círculo de centro O e um ponto P, traçar por P uma reta que determine no círculo uma corda igual a um segmento dado a.*

Solução

1. No círculo dado trace uma corda de comprimento a.
2. Trace uma perpendicular a esta corda passando pelo centro O, determinando um ponto D na corda.
3. Trace um círculo C de centro O e raio OD.
4. Trace um círculo C' de diâmetro PO e centro como sendo o

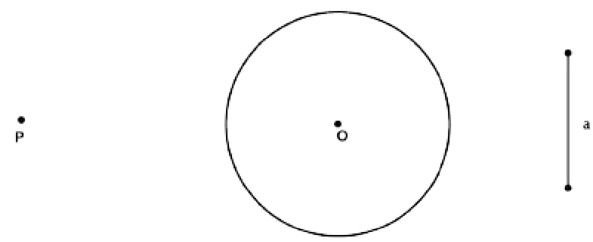

Figura 10.24: Dados em posição no plano do problema 10.14.

ponto médio de PO. Sejam M e M' os pontos de interseção com o círculo C.

5. As retas PM ou PM' nos dão a solução.

□

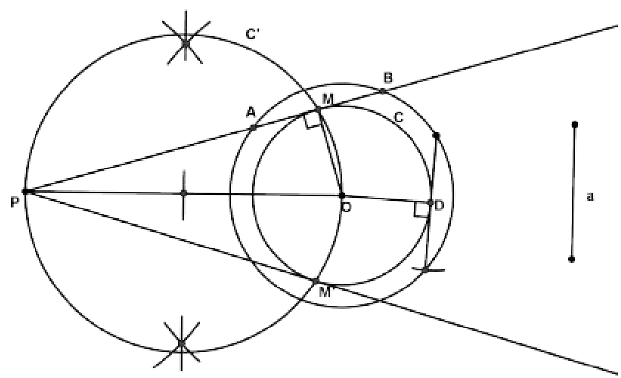

Figura 10.25: Solução do problema 10.14.

Exercício 10.1. Resolver o problema 10.14 quando P está dentro do círculo.

Problema 10.15. *São dados um círculo C de centro O, uma reta r e um ponto A sobre r. Construir um circulo C', tangente exteriormente a C e tangente em A à reta r.*

Primeiramente vamos justificar nossa construção.

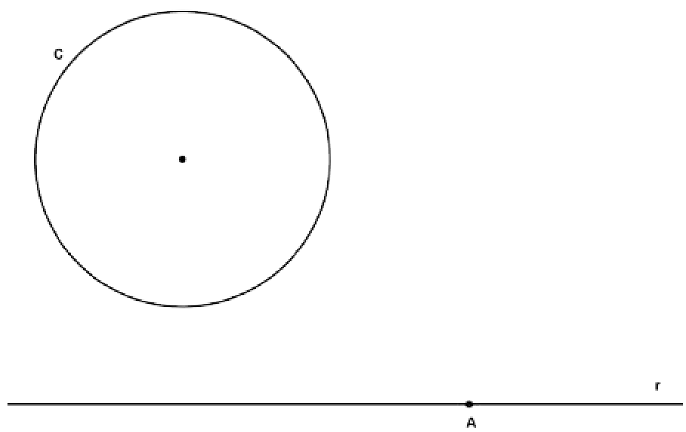

Figura 10.26: Dados do problema 10.15.

Justificativa Vamos fazer uma análise, supondo o problema resolvido. (Veja a figura 10.14.)
Sejam O o centro de C, T o ponto de tangência entre C e C' e O' o centro de C'.
Como T é o ponto de tangência entre C e C', então qualquer reta tangente aos círculos C e C', é perpendicular aos raios OT e $O'T$. Isto implica que $T \in OO'$. Além disso, $O'A$ é perpendicular a r.
Trace por O uma perpendicular a r que intersecta C em N e S, N mais distante de r que S. Trace TA e TN. Como $N\hat{O}T$ e $T\hat{O'}A$ são ângulos internos alternos nas paralelas NO e $O'A$, então eles são congruentes. Além disso, como os triângulos NOT e $TO'A$ são isósceles então

$$O\hat{T}N = \frac{1}{2}(180^\circ - N\hat{O}T) = \frac{1}{2}(180^\circ - T\hat{O'}A) = O'\hat{T}A.$$

Isto mostra que os pontos N, T e A são colineares. □

Solução

1. Trace por O uma perpendicular a r obtendo o ponto N, um dos pontos de interseção com C, o mais distante de r.

2. Trace a reta NA e considere T o ponto de interseção com C.

3. Trace a perpendicular m a r passando por A.

4. Trace a semi-reta S_{OT}. O ponto de interseção com a reta m é o centro do círculo procurado C'.

□

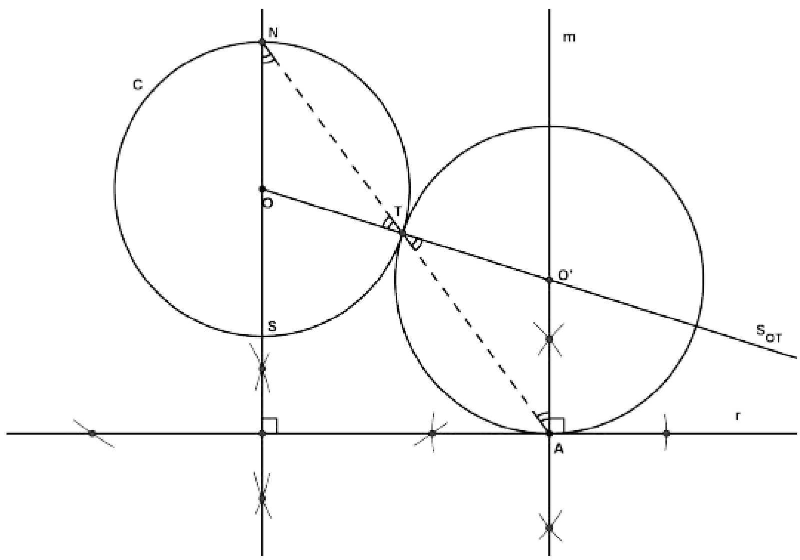

Figura 10.27: Solução do problema 10.15.

Problema 10.16. *Dado um triângulo ABC, traçar uma paralela a BC que corta AB em M e AC em N e de forma que se tenha $AN = MB$.*

Solução

1. Construa a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, determinando um ponto D em BC.

2. Trace uma paralela a AB passando por D, determinando um ponto N em AC.

3. A paralela a BC passando por N resolve o problema.

□

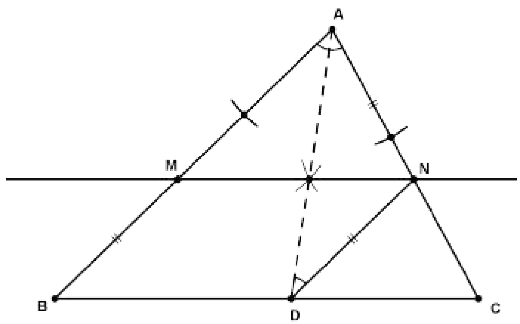

Figura 10.28: Solução do problema 10.16.

RESUMO

..

Nesta aula vimos como construir com régua e compasso perpendiculares e paralelas a retas dadas, mediatriz de segmentos, bissetriz de um ângulo dado e o arco capaz de um ângulo. Vimos também algumas aplicações dessas construções elementares.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula veremos como resolver geometricamente expressões algébricas.

ATIVIDADES

..

Nos exercícios abaixo, construir significa indicar os passos de uma construção com régua e compasso.

1. Construir um quadrado conhecendo sua diagonal.

2. Construir um quadrado dados em posição os pontos médios de dois lados adjacentes.

3. Construir o círculo circunscrito a um triângulo.

4. Construir o círculo inscrito em um triângulo.

5. Construir um hexágono regular, dado em posição um lado.

6. Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e a mediana m_a, relativa ao lado vértice A.

7. Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ e a altura h_a, relativa ao lado vértice A.

8. Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e a altura h_a, relativa ao lado vértice A.

9. São dados em posição um círculo C e uma reta r. Determinar um ponto P sobre r de forma que as tangentes traçadas de P ao círculo C formem um ângulo α, dado.

10. Construir as tangentes comuns a dois círculos dados em posição.

11. Construir o triângulo ABC conhecendo o perímetro $2p$ e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

12. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $\overline{BC} = a$, o ângulo $\hat{A}$ e a diferença $d = b - c$ dos outros dois lados.

13. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $\overline{BC} = a$ e as alturas h_b, com respeito ao lado AC, e h_c, com respeito ao lado AB.

14. Construir o trapézio $ABCD$ conhecendo a soma das bases $\overline{AB} + \overline{CD} = s$, as diagonais $\overline{AC} = p$ e $\overline{BD} = q$ e o lado $\overline{AD} = a$.

15. Construir um triângulo conhecendo os comprimentos da altura, mediana e bissetriz relativas a um mesmo vértice.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

2. CARVALHO, j. p., *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*. OBMEP.

3. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

4. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.

5. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.

6. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.

7. WAGNER, E., *Construções Geométricas.* SBM

8. WAGNER, E., *Uma Introdução às Construções Geométricas.* OBMEP.

AULA

11

Expressões Algébricas

META:

Resolver geometricamente problemas algébricos.

OBJETIVOS:

Introduzir a 4^a proporcional.

Construir segmentos que resolvem uma equação algébrica.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deverá ter compreendido as construções elementares.

11.1 Introdução

Olá caro aluno. Na aula passada você aprendeu como construir paralelas e perpendiculares, ângulos e seu arco capaz.
Nesta aula iremos tratar os problemas de construções um pouco diferente. Veremos qual a relação entre as construções geométricas e as soluções de equações algébricas.

11.2 A 4^a proporcional

Sempe que nos referirmos ao segmento x estaremos nos referindo tanto ao segmento quanto ao comprimento do segmento, ficando claro no contexto seu uso.

Definição 11.1. Dizemos que o segmento x é a quarta proporcional dentre os segmentos a, b e c quando

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Problema 11.17. *Construir a 4^a proporcional entre os segmentos a, b e c.*

Solução Ver figura 11.1

1. Construa um ângulo de vértice O.
2. Sobre um lado tome pontos A e C tais que $\overline{OA} = a$ e $\overline{AC} = c$.
3. Sobre o outro lado tome um ponto B tal que $\overline{OB} = b$.
4. Trace por C uma paralela a AB, obtendo o ponto D em $S_{OB.}$
5. o segmento BD de comprimento $\overline{BD} = x$ é 4^a proporcional dentre os segmentos a, b e c.

□

Vejamos uma aplicação.

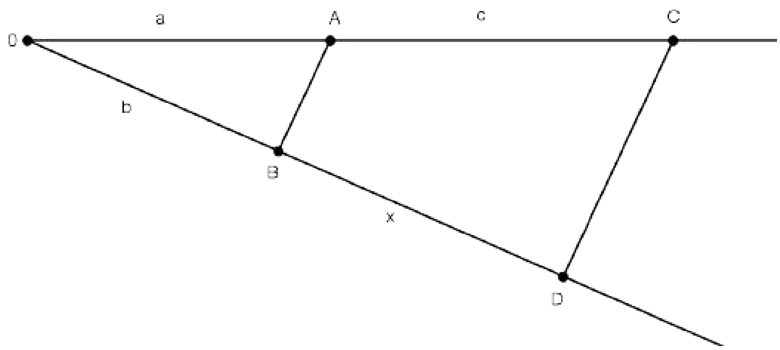

Figura 11.1: 4^a proporcional

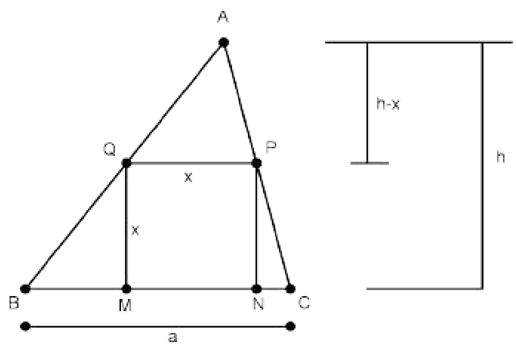

Figura 11.2: Esboço da solução do Problema 11.18

Problema 11.18. *Inscrever no triângulo ABC dado, um quadrado tendo um lado sobre $\overline{BC} = a$.*

Suponha resolvido o problema (veja figura 11.2).
Os triângulos AQP e ABC são semelhantes, já que QP é paralelo a BC. Daí,

$$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$$

o que implica que

$$x = \frac{ah}{a+h} \Rightarrow \frac{a+h}{a} = \frac{h}{x}.$$

Portanto, x é a 4^a proporcional entre $a+h, a$ e h.

Solução

1. Trace a perpendicular a BC que passa por A, determinando o ponto D. Assim, AD é a altura do triângulo ABC.

2. Determine a 4^a proporcional x dentre os números $a+h$, a e h.

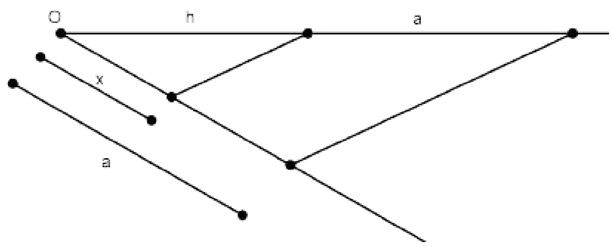

Figura 11.3: 4^a proporcional entre $a+h$, a e h.

3. Sobre a altura, construa $\overline{DE} = x$.

4. Trace uma paralela a BC passando por E, obtendo Q e P.

5. Q e P são os vértices do quadrado.

$\square$

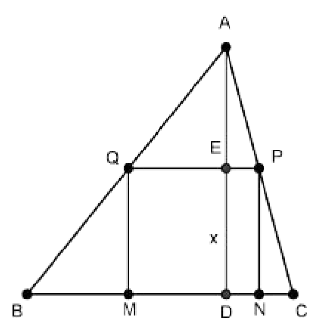

Figura 11.4: Solução do Problema 11.18

11.3 Expressões com raízes quadradas

Problema 11.19. *Construir* $\sqrt{a^2+b^2}$ *e* $\sqrt{a^2-b^2}$, *onde* a *e* b *são segmentos dados.*

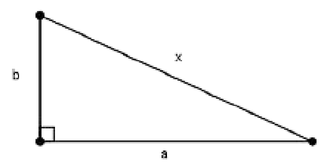

Figura 11.5: $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

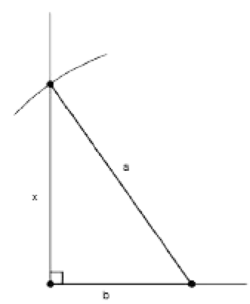

Figura 11.6: $x = \sqrt{a^2-b^2}$.

1. Se $x = \sqrt{a^2+b^2}$, então x é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a e b.

2. Se $x = \sqrt{a^2-b^2}$, então x é um cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa a, onde o outro cateto é igual a b.

3. Se $x = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ faça $m = \sqrt{a^2+b^2}$ e então$x = \sqrt{m^2+c^2}$. (ver figura 11.7).

Para construir a expressão $\sqrt{a^2+b^2}$, construímos um ângulo de $90°$ com vértice O, e tomamos pontos, A e B, nos lados deste ângulo tais que $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$. Assim, a hipotenusa do

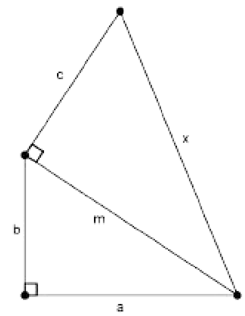

Figura 11.7: $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

triângulo retângulo OAB tem medida exatamente $\sqrt{a^2 + b^2}$. (ver figura 11.5).

Problema 11.20. *Construir $a\sqrt{n}$ com n natural e a um segmento dado.*

A solução está descrita na figura 11.8.

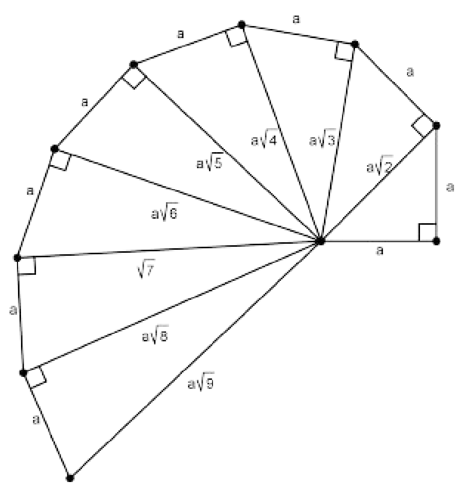

Figura 11.8: $x = a\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Problema 11.21. *Construir um quadrado conhecendo a soma s da diagonal com o lado.*

Solução Se a é o lado, então $s = a\sqrt{2} + a$, ou seja, $a = s(\sqrt{2} - 1)$.

1. Construa um triângulo retângulo com catetos iquais a s. Assim a diagonal é igual a $s\sqrt{2}$
2. Sobre a diagonal, construa s obtendo a.

□

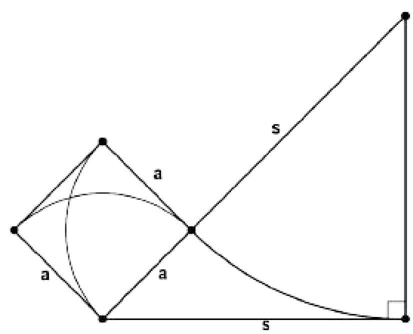

Figura 11.9: Solução do Problema 11.21

Problema 11.22. *Construir a média geométrica de dois segmentos a e b.*

- Solução 1: Veja a figura 11.10.

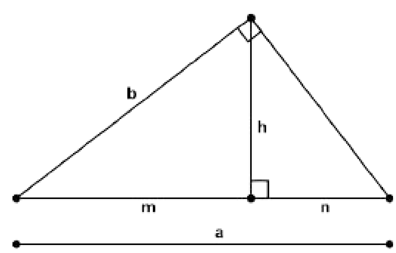

Figura 11.10: $h^2 = mn$ e $b^2 = am$.

- Solução 2:

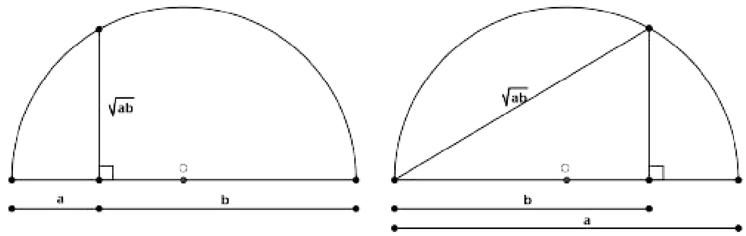

Figura 11.11: Você consegue mostrar que cada segmento é igual a $\sqrt{ab}$?

Na figura 11.12 a secante PA e a tangente PT ao círculo possuem a relação $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Este valor é chamado de *potência* do ponto P em relação ao círculo.

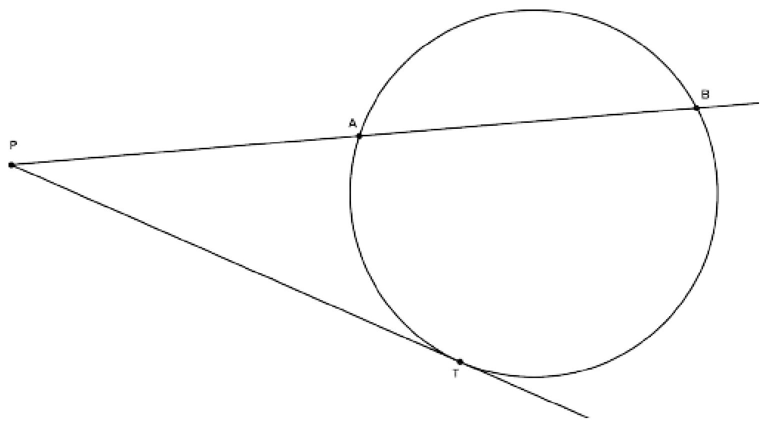

Figura 11.12: $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Para demonstrar que $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ = constante, considere a notação da figura 11.13.

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \overline{PA} \cdot \overline{PB} &= (\overline{PM} - m)(\overline{PM} + m) = \overline{PM}^2 - m^2 \\ &= \overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 - (m^2 + \overline{OM}^2) = d^2 - R^2 \\ &= \text{potência de } P = POT(P) \end{aligned}$$

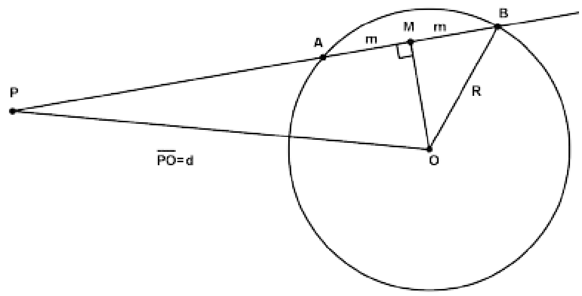

Figura 11.13: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} =$ constante.

Problema 11.23. *Dados a e $\sqrt{ab}$, determine b.*

Solução

1. Trace $\overline{PT} = \sqrt{ab}$.
2. Trace um círculo tangente em T a PT.
3. Determine no círculo um ponto A tal que $\overline{PA} = a$.
4. PA determina um ponto B no círculo tal que $\overline{PB} = b$ e $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

□

Problema 11.24. *Resolver a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$, onde a e b são segmentos dados.*

Solução (Veja figura 11.14). Resolvendo algebricamente essa equação temos

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} = \frac{a}{2} \pm \frac{r}{2},$$

onde $r = \sqrt{a^2 - (2b)^2}$. Fazemos

$$x_1 = \frac{a}{2} - \frac{r}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{a}{2} + \frac{r}{2}.$$

Se $a > 2b$ a construção pode ser feita seguindo os passos:

1. Construa um triângulo ABC retângulo em A com $\overline{AB} = 2b$ e $\overline{BC} = a$. Daí, $\overline{AC} = r$.

2. Tome P o ponto médio de BC e trace uma paralela a AB passando por P, determinando Q em AC. Daí, $\overline{AQ} = \frac{r}{2}$.

3. Com centro em C e raio $\overline{CQ}$, trace um círculo obtendo M e N em BC, tais que $\overline{PM} = x_1$ e $\overline{PN} = x_2$.

$\square$

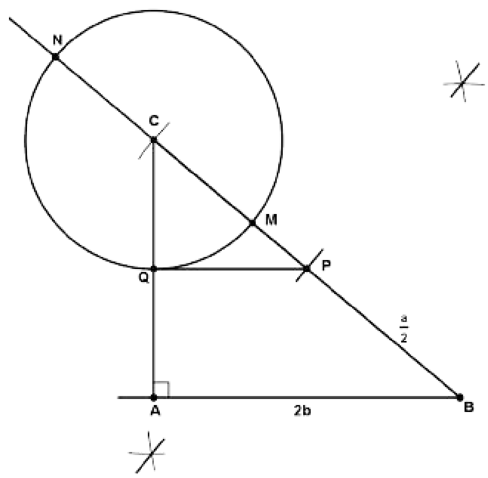

Figura 11.14: Resolvendo a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$.

2^a **Solução:** Suponha $2a > b$. (Veja figura 11.15.)
Note que $x_1 + x_2 = a$ e $x_1 x_2 = b^2$.

1. Trace um semi-círculo de diâmetro $\overline{AB} = a$.

2. Trace uma perpendicular a AB e nesta perpendicular tome um ponto D a uma distância igual a b de AB.

3. Trace uma paralela a AB passando por D, determinando um ponto C no semi-círculo.

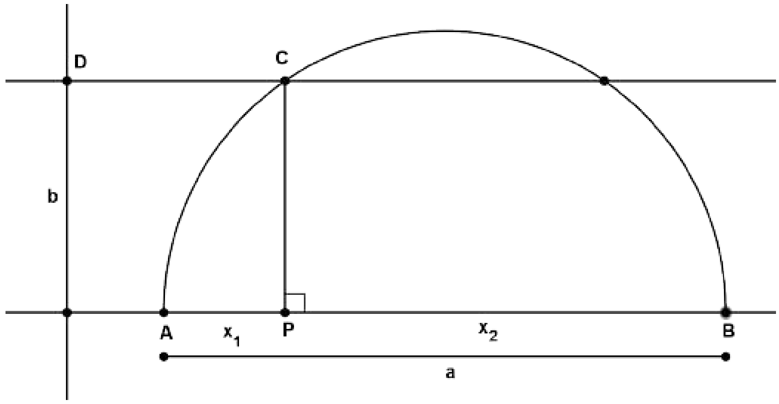

Figura 11.15: Resolvendo a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$.

4. Trace uma perpendicular a AB passando por C, determinando P em AB.

Daí, usando o Teorema de Pitágora, mostramos que $\overline{PA} = x_1$ e $\overline{PB} = x_2$. $\square$

Problema 11.25. *Sejam A e B pontos em um mesmo lado de uma reta r. Construir um círculo passando por A e B que seja tangente a r.*

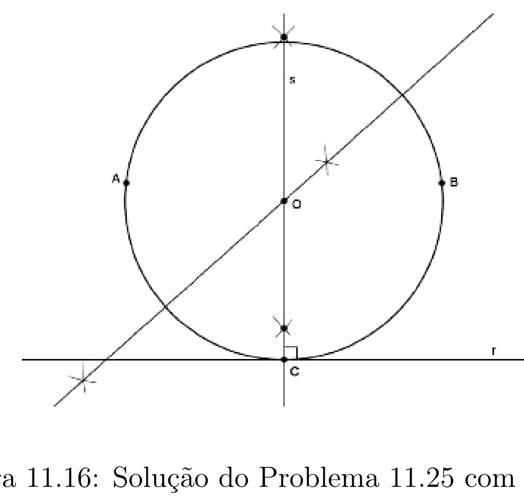

Figura 11.16: Solução do Problema 11.25 com $AB \parallel r$

Solução Suponha que AB seja paralelo a r (Figura 11.16.)

1. Trace a mediatriz s do segmento AB, encontrando o ponto C de interseção com a reta r.

2. Trace a mediatriz do segmento AC, encontrando o ponto O, interseção com s.

3. O ponto O é o centro do círculo que contém os pontos A, B e C, cujo raio é OA.

Note que este círculo é tangente à reta r.

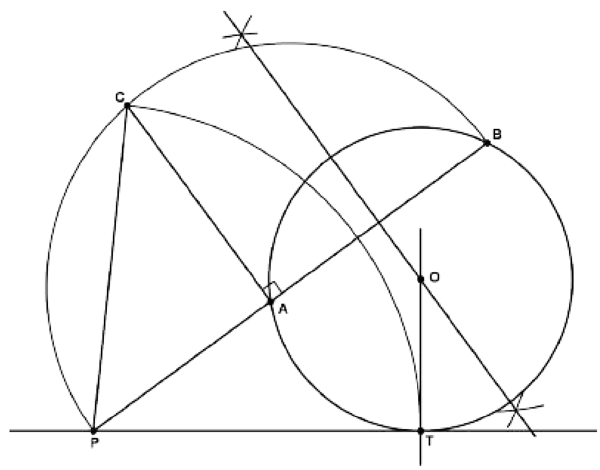

Figura 11.17: Solução do Problema 11.25 com AB arbitrário.

Suponha que AB não seja paralelo a r.

1. Determine o ponto P de interseção entre AB e r.

2. Determine um ponto T em r tal que $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Aqui use a solução do Problema 11.22 dada pela figura 11.11.

3. Trace a mediatriz de AB.

4. Trace a perpendicular a r passando por T, obtendo o centro do círculo O, interseção com a mediatriz.

□

A maneira usual de encontrar a solução de um problema, é pensar nele resolvido e analisar um esboço da solução.

11.4 O segmento áureo

Tome um segmento AB e um ponto C em AB tal que a razão entre a menor parte e a maior parte é igual a maior parte e AB, isto é,

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Definição 11.2. Este segmento AC é chamado de *segmento áureo interno* de AB.

Se $\overline{AB} = a$, obtemos

$$\overline{AC} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Esta razão tem fascinado matemáticos por mais de 2 mil anos, surgindo em diversas situações, desde a arquitetura ao corpo humano.

Considere um segmento AC' e um ponto B em AC' com a mesma propriedade do ponto C acima.

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}.$$

Definição 11.3. O segmento AC' é chamado segmento áureo externo de AB.

Se $\overline{AB} = a$, obtemos

$$\overline{AC'} = a\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

O lado do decágono regular inscrito em um círculo de raio R é igual a $R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Note também que $\overline{AC} \cdot \overline{AC'} = \overline{AB}^2$.

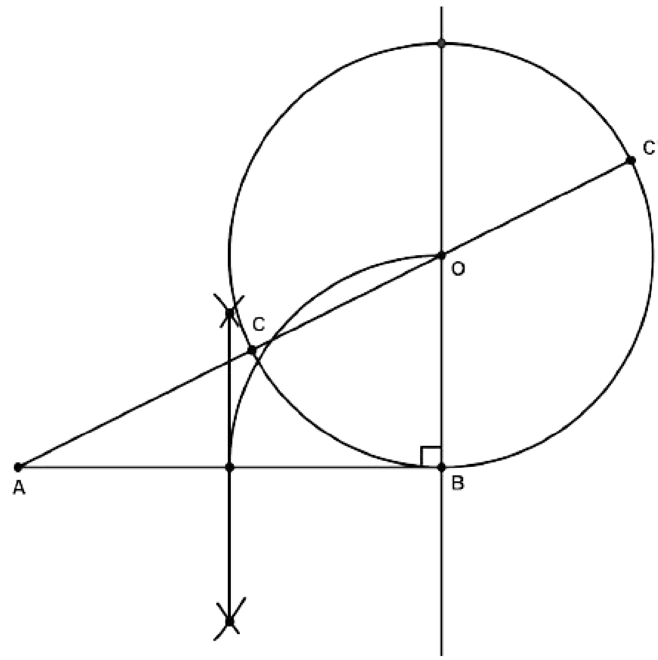

Figura 11.18: AC e AC' são os segmentos áureos de AB.

Problema 11.26. *Construir os segmentos áureos de* $\overline{AB} = a$.

Solução Ver figura 11.18.

1. Trace um círculo de raio $\frac{\overline{AB}}{2}$, tangente a AB em B.

2. A reta que passa por A e pelo centro do círculo corta o círculo em C e C' de modo que

$$\overline{AC} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ e } \overline{AC'} = a\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

De fato, pelo Teorema de Pitágora, temos $\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2$. Como $\overline{AB} = a$, $\overline{BO} = \frac{a}{2}$ e $\overline{AC} = \overline{AO} - \frac{a}{2}$, segue o resultado. $\square$

11.5 Expressões construtíveis

Nesta seção daremos uma breve introduções às expressões construtíveis com régua e compasso.

Definição 11.4. Estabelecido um segmento unitário, dizemos que um número x é construtível se podemos obter um segmento de comprimento x a partir do segmento unitário com régua e compasso.

Problema 11.27. *Dados a e b, construir* $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{a}$, a^2 *e* $\sqrt{a}$.

Solução As figuras abaixo mostram as construções dessas expressões. Nelas, aparece uma semi-reta cuja origem está associada o número 0 e um ponto associado ao número 1. Justifique cada construção. □

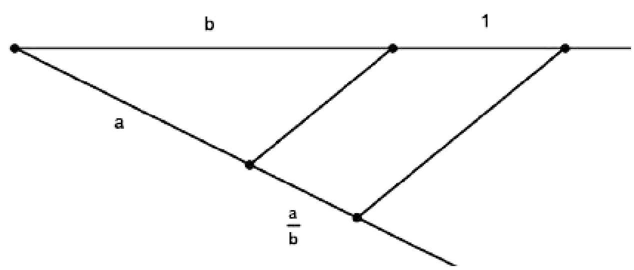

Figura 11.19: $\frac{a}{b}$ é contrutível se a e b o forem.

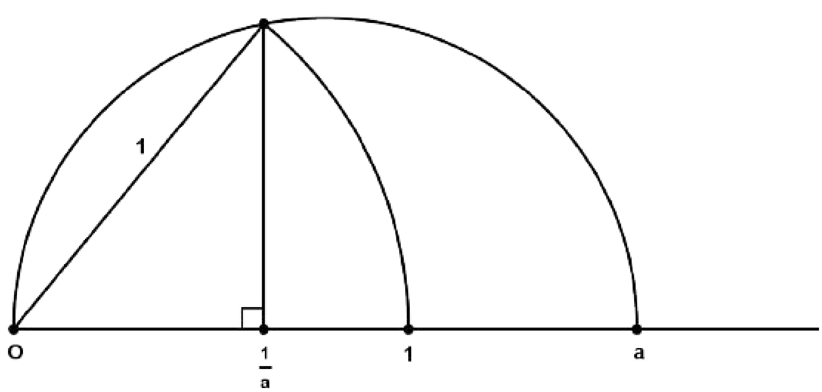

Figura 11.20: $\frac{1}{a}$ é contrutível se a o for.

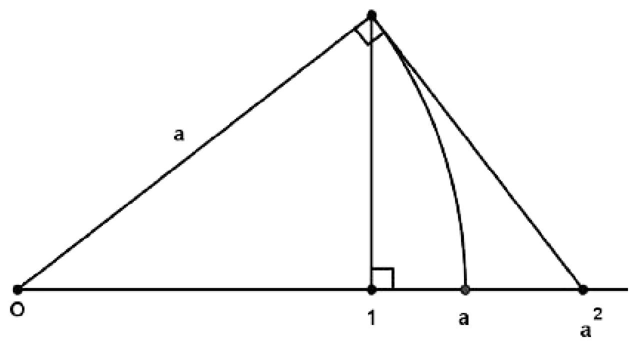

Figura 11.21: a^2 é contrutível se a o for.

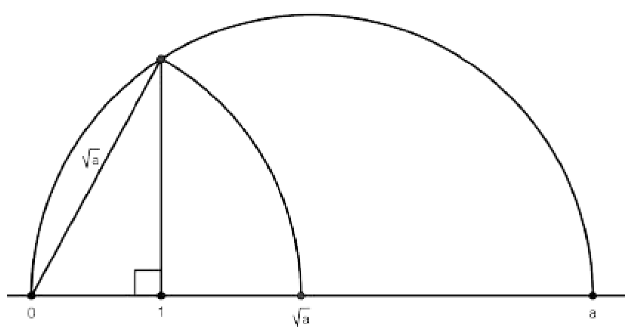

Figura 11.22: $\sqrt{a}$ é contrutível se a o for.

RESUMO

..

Nesta aula definimos a 4^a proporcional e vimos algumas de suas aplicações. Aprendemos sobre potência de um ponto com respeito a um círculo. Estudamos também como construir algumas expressões algébricas usando régua e compasso.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula veremos mais sobre construções possíveis e condições necessárias e suficientes para que seja possível construir uma expressão algébrica usando régua e compasso.

ATIVIDADES

Nos exercícios abaixo, construir significa indicar os passos de uma construção com régua e compasso.

1. Construir $x = \dfrac{abc}{de}$ onde a, b, c, d, e são segmentos dados.
2. Construir $x = \sqrt{a^2 + 3b^2}$ onde a e b são segmentos dados.
3. Construir $x = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$ onde a é um segmentos dado e n é um número natural.
4. Construir $x = \dfrac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2}$ onde a e b são segmentos dados.
5. Construir x tal que $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.
6. Construir um triângulo retângulo conhecendo a soma dos catetos e a altura relativa à hipotenusa.
7. Construir um triângulo conhecendo a hipotenusa e asoma dos catetos.
8. A média harmônica de dois segmentos a e b é o segmento h tal que
$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$
Construa a média harmônica de a e b.
9. Construa um pentágono regular conhecendo o seu lado.
10. São dados um círculo C e uma tangente t. Construir um quadrado que tenha dois vértices em C e os outros dois vértices em t.
11. Construir $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

12. Dados os segmentos a, b e c construa, utilizando um segmento unitário, $x = \sqrt{abc}$.

13. Construir x que resolve a equação $x^2 - ax - b^2 = 0$, onde a e b são segmentos dados.

14. Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases}$$

onde a e b são segmentos dados.

15. Resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$$

onde a e b são segmentos dados.

LEITURA COMPLEMENTAR

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.
2. CARVALHO, j. p., *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega.* OBMEP.
3. EUCLIDES, *Os Elementos.* Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.
4. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* Third Edition. W. H. Freeman.
5. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental.* MIR.
6. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Third edition. Addison-Wesley.
7. WAGNER, E., *Construções Geométricas.* SBM
8. WAGNER, E., *Uma Introdução às Construções Geométricas.* OBMEP.

AULA

Construções Possíveis

12

META:

Identificar construçõs possíveis.

OBJETIVOS:

Dividir o círculo em partes iguais.

Apresentar critérios de construtibilidade.

Entender porque os problemas clássicos não possuem solução.

Construir polígonos regulares.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deverá ter compreendido as duas últimas aulas.

12.1 Introdução

Na aula 10 já falamos um pouco sobre os problemas clássicos, que consistem em resolver três problemas com o uso somente da régua (não graduada) e do compasso.
Embora a regra do jogo seja a utilização somente de régua e copasso, é fato que os gregos utilizaram outros métodos na resolução de problemas de construções geométricas. De suas tentativas para achar soluções para os problemas clássicos, surgiram várias curvas e métodos que enriqueceram a Matemática.
Nesta aula, vamos apresentar as construções geométricas possíveis usando régua e compasso. Muitas das demonstrações sobre construtibilidade faz uso de uma matemática que foge ao escopo deste curso, e desta forma não apresentaremos aqui.

12.2 Divisão do círculo em n parte iguais

Alguns problemas de natureza simples não podem ser resolvidos com régua e compasso. Por exemplo, é impossível retificar o círculo com régua e compasso, simplesmente por que o número π não é construtível, como veremos adiante.
O problema de dividir o círculo em n partes iguais, em geral, é impossível resolvê-lo.
Aqui apresentaremos alguns casos particulares.

Problema 12.28. *Dividir o círculo em n partes iguais.*

Como foi dito anteriormente, este problema em geral não é possível de resolver. Vamos resolvê-lo para alguns casos.
Caso 1: $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}$. Este caso é o mais simples de todos. E a prova é por indução.

1. $n = 2 \rightarrow$ Trace o diâmetro.
2. $n = 2^2 = 4 \rightarrow$ Trace as bissetrizes dos dois ângulos formados pelo diâmetro.

3. $n = 2^3 = 8 \rightarrow$ Trace as mediatrizes dos lados do polígono formado no caso anterior.

4. $n = 2^k \rightarrow$ Trace as mediatrizes dos lados do polígono formado no caso $n = 2^{k-1}$.

Caso 2: $n = 2^k 3,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

1. $n = 3 \rightarrow$ Construa um triângulo equilátero inscrito no círculo.

   Se ABC é um triângulo equilátero inscrito no círculo de raio R, então o lado do triângulo é igual $a = R\sqrt{3}$ (Por que?). Então, dado o segmento R, pela construção da aula passada, podemos construir o segmento $R\sqrt{3}$. Com um compasso, construímos um triângulo equilátero de lado $R\sqrt{3}$ inscrito no círculo de raio R.

2. $n = 6 \rightarrow$ Trace as mediatrizes dos lados do triângulo anterior formando um polígono regular de 6 lados.

3. $n = 2^k 3 \rightarrow$ Trace as mediatrizes dos lados do polígono regular formado no caso $2^{k-1}3$.

Caso 3: $n = 2^k 5,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

1. $n = 10 = 2 \cdot 5 \rightarrow$ Construir um polígono regular de 10 lados (decágono) inscrito no círculo.

   Se o raio do círculo é R, então o lado mede

   $$R\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

   Com um compasso encontramos os vértices do decágono no círculo.

2. $n = 5 \rightarrow$ Construir um pentágono regular a partir do decágono regular.

   Construa um decágono com vértices numerados de 1 a 10. O pentágono é o polígono obtido a partir dos vértices pares do decágono.

3. $n = 2^k 5 \to$ Traçar as mediatrizes dos lados do polígono regular formado no caso $2^{k-1}5$

Caso 4: $n = 2^k \cdot 3 \cdot 5$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. $n = 3 \cdot 5 = 15 \to$ Construir um triângulo equilátero ABC inscrito no círculo e um pentágono regular $ADEFG$ inscrito no círculo. Considere a figura 12.1

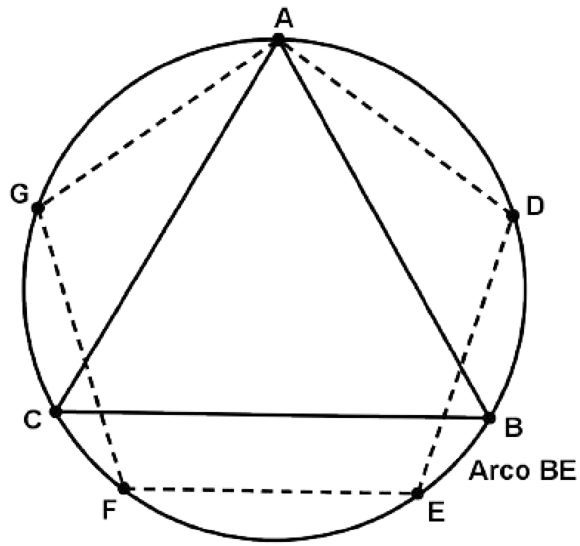

Figura 12.1: O arco BE é 1/5 do círculo

Note que

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= \frac{1}{3} \text{ do círculo} \\ \overset{\frown}{AE} &= \frac{2}{5} \text{ do círculo,} \end{aligned}$$

o que implica que $\overset{\frown}{BE} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{15}$ do círculo.

2. $n = 2^k \cdot 3 \cdot 5 \to$ Traçar as mediatrizes dos lados do polígono regular formado no caso $2^{k-1} \cdot 3 \cdot 5$.

Observação: É impossível dividir um círculo em $7, 9, 11, 13, 14, 18, 19$ partes iguais, citando apenas os valores menores que 20.

No final do século 18, Gauss descobriu que é possível dividir um círculo exatamente em 17 partes iguais.

Apresentamos a seguir um método de divisão aproximada do círculo em n partes iguais, para qualquer valor de n. Veja figura 12.2

Solução

1. Trace um diâmetro AB.
2. Determine pontos P e Q tais que ABP e ABQ sejam triângulos equiláteros.
3. Divida AB em n partes iguais pelos pontos 1,2, $\cdots$, n-1.
4. As retas que unem P e Q aos pontos de ordem par, determinam nos semi-círculos opostos os pontos que dividem aproximadamente esse círculo em n partes iguais.

□

12.3 Construções Possíveis Utilizando Régua e Compasso

Relembremos algumas regras para as construções com régua e compasso.

Regras:

1. Traçar uma reta, conhecendo dois de seus pontos
2. traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo
3. Determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos

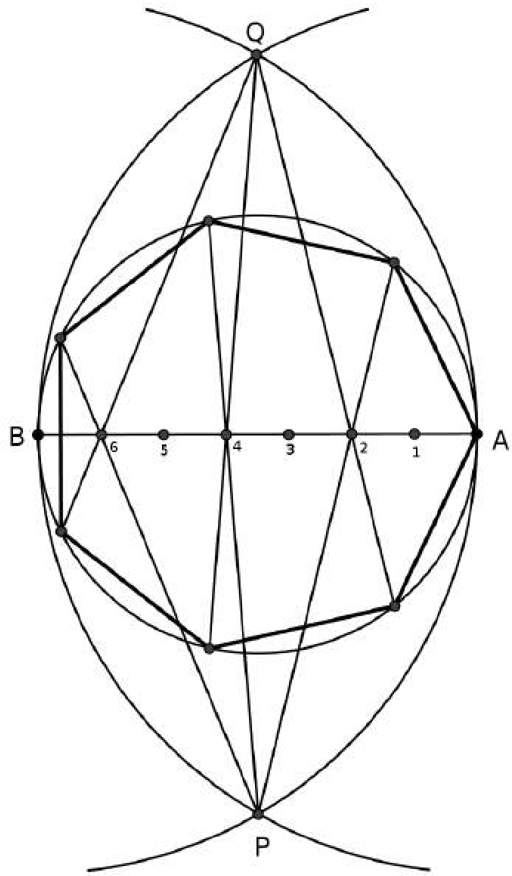

Figura 12.2: Divisão aproximada do círculo em 7 partes iguais.

Pelo que nós vimos até aqui, somente com régua e compasso, é possível construir um ponto (não arbitrário) fora de uma reta, e traçar por este ponto (ou qualquer outro já construído) uma paralela ou uma perpendicular a esta reta.

Problemas: Os famosos problemas clássicos são:

1. Duplicação do cubo
2. Quadratura do círculo
3. Tri-secção de um ângulo arbitrário

4. Construção de polígonos regulares

Esses problemas surgiram na Grécia antiga por volta do ano de 429 a.C. e só foram completamente entendidos na virada do século 18 para o século 19 d.C., com os trabalhos de Gauss (1777 - 1855) e Galois (1811 - 1832).
O último problema acima não é tão famoso quanto os outros, mas o enumeramos, já que assim como os outros ele é bastante interessante.

Definição 12.1. Fixado um segmento com a unidades de comprimento, diremos que um número x é *construtível* se for possível construir com régua e compasso um segmento de comprimento x a partir do segmento de com comprimento a.

Problema 12.29. *Se a e b são construtíveis, então $a+b, -a, ab$ e $\frac{1}{a}$ também o são.*

A figura 12.3 e 12.4 mostram como fazer construção. A construção é feita com retas paralelas. Para justificá-las utilize as propriedades de paralelogramos e o Teorema de Tales.

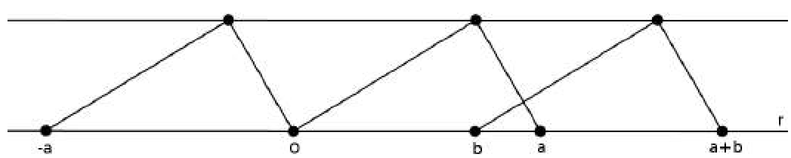

Figura 12.3:

Observação Disto segue que todos os números inteiros e racionais são construtíveis.

A figura 12.5 mostra que, se $a > 0$ for construtível, então $\sqrt{a}$ também será construtível.
De fato, Seja A o ponto da reta r que corresponde ao número 1 e B o ponto que corresponde ao número $\frac{a}{2}$. Assim, $\overline{BA} = \frac{a}{2} - 1$, e

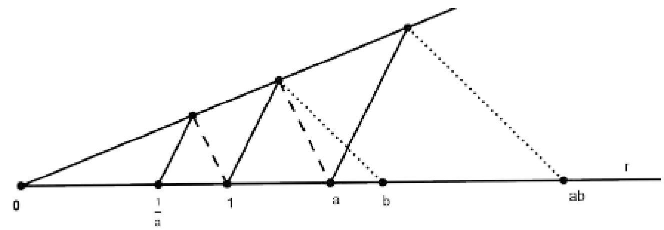

Figura 12.4:

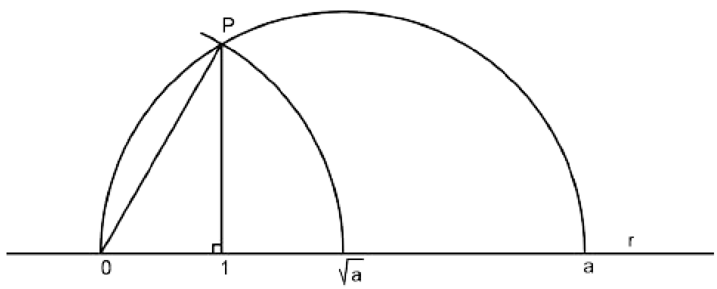

Figura 12.5:

pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\overline{AP}^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 = a - 1.$$

O que implica que

$$\overline{OP}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{PB} = 1 + a - 1 = a.$$

Disto, segue que existem irracionais construtíveis ($\sqrt{2}$ por exemplo).

Exercício 12.1. Construir os números $-\frac{2}{7}, 1,333\cdots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Observação O conjunto dos números construtíveis formam um subcorpo dos números reais, isto é, é um subconjunto dos números reais que possui 0 e 1 e é fechado para a adição, multiplicação, e cálculo de simétricos e de inversos (de elementos não nulos).

12.3.1 O Princípio da Solução

Muitas vezes, para determinar se determinado número é construtível com régua e compasso é necessário passar o problema para o plano.

Definição 12.2. Um ponto $P = (a, b)$ do plano é dito construtível se a e b são construtíveis.

Como já sabemos que todos os números racionais são construtíveis, segue que todos os pontos do plano com coordenadas racionais são construtíveis.

Observação: Se uma reta r une dois pontos do plano (α, β) e (γ, δ) com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, a equação de r é da forma $ax+by+c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
Se um círculo tiver centro (α, β) e passa pelo ponto (γ, δ) com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, sua equação é da forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, com $a, b,\ c \in \mathbb{Q}$.
Assim, se queremos encontrar o ponto de interseção entre retas e cículos dos tipos acima, temos 3 casos a considerar:

1. Interseção de duas retas do tipo acima.

   Neste caso, devemos resolver o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + c & = & 0 \\ a'x + b'y + c & = & 0 \end{array} \right.$$

   com $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$.

2. Interseção de uma reta com um círculo dos tipos acima.

   Devemos resolver o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + ax + by + c & = & 0 \\ a'x + b'y + c' & = & 0, \end{array} \right.$$

   com $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$.

3. Interseção de dois círculos como acima.

   Resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' &= 0, \end{cases}$$

   ou, equivalentemente, resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ (a-a')x + (b-b')y + c - c' &= 0, \end{cases}$$

   com $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$.

As soluções destes sistemas são racionais ou do tipo $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}, c \geq 0$.

Conclusão:

Sabemos que os números racionais são construtíveis. Em particular, todos os pontos do plano com coordenadas racionais são construtíveis. Partindo destes pontos e fazendo construções com régua e compasso, envolvendo apenas uma interseção de reta com reta, reta com círculo ou círculo com círculo, as coordenadas dos novos pontos obtidos são da forma $a + b\sqrt{c}$ com $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $c \geq 0$. Prosseguindo com uma segunda etapa de construção com régua e compasso, os novos números obtidos serão da forma $a + b\sqrt{c}$, com a, b e c da forma anteriormente indicada.

Exemplo 12.1.

- 1^a Etapa: $1 + \sqrt{2}, \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{8}}$
- 2^a Etapa: $4(1 + \sqrt{2}) + 5\sqrt{3(1 + \sqrt{2})}, 1 + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{8}}}$

Exercício 12.2. Mostre que os números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$, é um corpo.

Resumo:

- Um número construtível é obtido como primeira coordenada de um ponto que tenha sido obtido a partir dos pontos iniciais 0 e 1 da reta base, através de um número finito de interseções de retas e/ou círculos.

- Um número é contrutível se e somente se pode ser escrito em termos de números racionais, usando somente adições, multiplicações, simétricas, inversos e raízes quadradas.

Exercício 12.3. Verifique que é construtível o número

$$\sqrt[4]{\frac{3-0,2\sqrt[16]{1+\sqrt{2}}}{\frac{2}{11}+\sqrt[32]{6-\sqrt[8]{0,4}}}}.$$

12.3.2 Um critério de não-construtibilidade

O próximo teorema fornece um meio de determinar números não-construtíveis.

Teorema 12.1. *Todo número construtível é raiz de uma equação polinomial (ou algébrica) de coeficientes inteiros.*

Exercício 12.4. Verifique o número construtível $\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{3}}$ é raiz de uma equação polinomial.

Definição 12.3. Um número que é raiz de algum polinômio com coeficientes inteiros é dito *algébrico.* Caso contrário é dito *transcendente.*

Exemplo 12.2. Os números racionais e os números $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ e $\sqrt{2+\sqrt[4]{3}}$ são algébricos. Os números e , π, $\sqrt{\pi}$, e^2 são transcendentes.

Em geral, é muito difícil de determinar se um determinado número é transcendente ou não. O primeiro a exibir números comprovadamente transcendente foi Liouville (1809–1882). Somente em 1873, Hermite mostrou que o famoso número e é transcedente, e em 1882, Lindermann provou que o número π também é transcedente.

Corolário 12.1. *Todo número transcendente não é construtível. Portanto π não é construtível, donde concluímos que o círculo não é quadrável.*

De fato, a área do círculo unitário é 2π. Quadrar o círculo, significa que devemos construir um quadrado com lado a tal que sua área seja exatamente 2π, ou seja, $a^2 = 2\pi$. Mas como π não é construtível, segue que $\sqrt{\pi}$ também não é construtível.

12.3.3 O critério geral de não-construtibilidade

Na seção anterior vimos que todos os números construtíveis são algébricos. Então você pode se perguntar se todos os números algébricos são construtíveis. A resposta é não.

Definição 12.4. O grau de um número α é o grau do polinômio irredutível $p(x)$ com coeficientes inteiros e tal que $p(\alpha) = 0$.

Exemplo 12.3. O grau de $\sqrt[3]{2}$ é três. Basta considerar o polinômio $x^3 - 2$.

Exemplo 12.4. Determine o grau de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Solução Faça $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Então,

$$\sqrt{2} = x - \sqrt{3} \Rightarrow 2 = x^2 + 3 - 2\sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}x = x^2 + 1 \Rightarrow 12x^2 = x^4 + 1 + 2x^2$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

□

Agora podemos dar o critério geral de não construtibilidade.

Teorema 12.2. *Um número é construtível se e somente se é algébrico de grau igual a uma potência de* 2.

A demonstração deste teorema envolve envolve ferramentas da teoria de grupos e da teoria de Galois.

Corolário 12.2. *O cubo não é duplicável.*

Demonstração Considere um cubo de aresta a. A aresta do cubo com o dobro do volume é $a\sqrt[3]{2}$. Então o cubo poderá ser duplicado se $\sqrt[3]{2}$ for construtível, porém o grau de $\sqrt[3]{2}$ é igual a 3 que não é uma potência de 2. □

Corolário 12.3. *É impossível tri-seccionar um ângulo arbitrário.*

Definição 12.5. Um ângulo θ é construtível se seu cosseno for construtível. (Ver figura).

Exemplo 12.5. O ângulo $60°$ é construtível, pois $\cos 60° = 1/2$.

Exemplo 12.6. O ângulo $\theta = 90°$ pode ser tri-seccionado, pois $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ é construtível. De fato $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é raiz da equação polinomial $4x^2 - 3 = 0$.

Exemplo 12.7. O ângulo $\theta = 20°$ não pode ser tri-seccionado.
De fato, se $x = \cos 20°$, então da fórmula $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, obtemos

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

que é equivalente a

$$8x^3 - 6x - 1 = 0,$$

onde $8x^3 - 6x - 1$ é irredutível, pois do contrário

$$8x^3 - 6x - 1 = (ax - b)(cx^2 + dx + e),\ \ a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$$

e portanto $\frac{b}{a}$ seria uma raiz com $mdc(a, b) = 1$, ou seja,

$$8\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 6\frac{b}{a} - 1 = 8\frac{b^3}{a^3} - 6\frac{b}{a} - 1 = 0$$

o que implica que

$$a = 8\frac{b^3}{a^2} - 6b,$$

que é possível somente se $\frac{b}{a}$ for inteiro, mas estamos supondo que $mdc(a, b) = 1$.
Portanto, $8x^3 - 6x - 1 = 0$ é irredutível.

12.3.4 Polígonos regulares construtíveis

Naturalmente, o problema de construir um polígono regular de n lados, ou o que é equivalente, dividir o círculo em n parte iguais, consiste em construir seu ângulo central $\frac{360°}{n}$, ou o que é o mesmo, o seu cosseno. Nos Elementos de Euclides, eles fornecem a construção dos polígonos regulares com $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ e 15. Construções para os polígonos de 7 e 9 lados, por exemplo, só foram dadas por Gauss em 1796.

De fato, não é díficil verificar que se $p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ for a decomposição do número n em fatores primos, então o polígono regular de n é construtível se e somente se o polígono regular de $p_i^{k_i}$ lados o for. Mais ainda, como o fator 2 não causa problema, temos que nos preocupar apenas com os primos ímpares.

Teorema 12.3 (Gauss)**.** *Se n for primo, então o polígono regular de n lados será construtível se e somente se n for da forma* $2^{2^m}+1$.

Os números naturais da forma $2^{2^m}+1$ são chamados de números de Fermat, devido a Fermat (1601–1665), que conjecturou que todos eles fossem primos. Na verdade os únicos números primos desta forma conhecidos são 3, 5, 17, 257 e 65537, que são os números correspondentes a $m = 0, 1, 2, 3$ e 4. Para $m = 5$, temos que

$$2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700417.$$

Gauss descobriu a construtibilidade do polígono regular de 17 lados um mês antes de completar 19 anos. Fato este que agusou o interesse de alguns almães do século 19 que um certo Richelot publicou, em 194 páginas de uma conhecida revista de Matemática, a construção do polígono de 257 lados. Um matemático amador dedicou dez anos de sua vida escrevendo o método de construção do polígono regular de 65.537 lados.

Para você ter uma idéia da dificuldade de construir estes polígonos, como o próprio Gauss calculou, o problema de construir o polígono regular de 17 lados é equivalente a construir o número:

$$\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Resumimos nossa discussão no seguinte teorema.

Teorema 12.4. *É possível construir um polígono regular de n lados se e somente se n se decompuser em fatores primos na forma $2^k p_1 \cdots p_m$, onde os p_i são primos de Fermat.*

RESUMO

..

Nesta aula vimos que os problemas clássicos não possíveis de resolvidos não somente com régua e compasso. Aprendemos como identificar números construtíveis, polígonos regulares construtíveis e ângulos construtíveis.

ATIVIDADES

..

1. Construa $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.
2. Construa $-\dfrac{4}{5}$ e $1,33333\cdots$
3. Verifique que é construtível o número

$$\sqrt[4]{\frac{3-0,2\sqrt[16]{1+\sqrt{2}}}{\dfrac{2}{11}+\sqrt[32]{6-\sqrt[8]{0,8}}}}.$$

4. Mostre que $1+\sqrt{3}$ é algébrico.

Considere no plano complexo o círculo unitário, isto é, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere as raízes complexas da equação $x^n = 1$, são elas: 1, ω, $\omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, onde $\omega = \cos\theta + i\text{sen}\ \theta$, com $\theta = 360°/n$. Estas raízes dividem o círculo unitário $\mathbb{S}^1$ em n partes iguais. A construtibilidade do polígono regular de n partes é equivalente à de $\cos\theta$, ou, de modo equivalente, à de $2\cos\theta = \omega + \overline{\omega} = \omega + 1/\omega$.

5. Vamos mostrar que o pentágono é construtível
   (a) Mostre que o polinômio $x^2 + x - 1$ é irredutível.
   (b) Tome $\theta = 360°/5$ e faça $\alpha := \omega + 1/\omega$. Mostre que $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ e conclua que $\cos(360°/5) = (\sqrt{5} - 1)/2$.

(c) Conclua que o pentágono regular é construtível.

6. Vamos mostrar que heptágono regular é não é construtível.

   (a) Mostre que o polinômio $x^3 + x^2 - 2x - 1$ é irredutível.

   (b) Mostre que $\alpha = \omega + 1/\omega = \cos(360°/7)$ é raiz do polinômio acima.

   (c) Conclua que o heptágono regular não é construtível.

7. Seja P_n é o polígono regular de n lados. Para que valores de $n \leq 50$ P_n é construtível?

8. Seja P_n é o polígono regular de n lados. Para que valores de $n \leq 50$ P_n não é construtível?

LEITURA COMPLEMENTAR

¨

1. BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.

2. CARVALHO, j. p., *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega*. OBMEP.

3. EUCLIDES, *Os Elementos*. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.

4. GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition. W. H. Freeman.

5. POGORELOV, A. V., *Geometria Elemental*. MIR.

6. MOISE, E. E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Third edition. Addison-Wesley.

7. WAGNER, E., *Construções Geométricas*. SBM

8. WAGNER, E., *Uma Introdução às Construções Geométricas*. OBMEP.