

SEMAINE DU 12/1 AU 16/1

MATRICES

- ① Définition d'espace vectoriel, d'espaces vectoriels produits, combinaison linéaire, sous-espaces vectoriels. L'intersection de sous espaces vectoriels est un espace vectoriel.
- ② Définition d'une matrice de matrice carré, ligne, colonne, diagonale, triangulaire, triangulaire strict, élémentaire, transposée, symétrique, antisymétrique, nilpotente, inversible,
- ③ Propriétés des lois de composition de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et du groupe $\text{GL}_n(\mathbb{K})$. $AB = I_n \implies A$ et B inversibles (preuve non vue en cours)
- ④ Multiplication des matrices par lignes et par colonnes
- ⑤ Inverse d'une matrice triangulaire, diagonale, 2×2 . Les étudiants doivent savoir calculer l'inverse d'une matrice quelconque.
Les méthodes avec le déterminant ont été vues en TD, mais aucune preuve n'a été faite. On peut demander aux étudiants de calculer des déterminants 2×2 ou 3×3
- ⑥ Lien entre matrices et systèmes linéaires
- ⑦ Les étudiants connaissent seulement la notion d'application linéaire comme application $f : E \rightarrow F$ telle que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$, vue dans le cours des structures algébriques. Vous pouvez donc l'utiliser dans les exercices.
- ⑧ Application linéaire associée à une matrice.
$$\begin{array}{ccc} f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Calculer la puissance d'une matrice, somme d'une matrice nilpotente et scalaire, avec le binôme de Newton.
$$ex : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + N$$
- ② Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- ③ Calcul de l'inverse d'une matrice 3×3 au choix de l'examineur.