MAT

OPERACIONES FINANCIERAS EN DIVERSOS ESCENARIOS

Norberto Tomas

OPERA-CIONES FINAN-CIERAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Rector Enrique Mammarella
Director de Planeamiento y Gestión Académica Daniel Comba
Directora Ediciones UNL Ivana Tosti

Tomás, Norberto
Operaciones financieras en diversos escenarios / Norberto Tomás. - 1a ed . - Santa Fe : Ediciones UNL, 2020.
Libro digital, PDF - (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-200-2

1. Matemática Financiera. 2. Economía.
I. Título.
CDD 332

Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación diseño
Alina Hill
Producción general
Ediciones UNL

—
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

Operaciones financieras en diversos escenarios

Operaciones financieras en diversos escenarios

Norberto P. Tomas

Operaciones financieras en diversos escenarios
Tomás, Norberto
1a ed. 1a reimp.- Santa Fe: Ediciones UNL, 2015.
212 pp; 25 x 17 cm (Cátedra)

ISBN 978-987–657–935–3

1. Matemática Financiera. 2. Economía. I. Título.
CDD 332

Coordinación editorial: *Ivana Tosti*
Corrección: *Félix Chávez*
Diagramación de interiores: *Analía Drago*

Secretaría de Extensión,
Universidad Nacional del Litoral,
Santa Fe, Argentina, 2015.

9 de Julio 3563 (3000)
Santa Fe, Argentina
Telefax: (0342) 4571194
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

Se diagramó y compuso en ediciones UNL
y se terminó de imprimir en
Docuprint SA, Tacuarí 123, CABA,
Buenos Aires, Argentina, octubre de 2015.

Índice

Capítulo 1
Nociones preliminares
Tasas de interés y de descuento 7
1.1. Generalidades. Capital y rédito 7
1.2. Operaciones financieras 8
1.3. Tasa de interés. Tasa de descuento o Tasa adelantada 12
1.4. Factor periódico de capitalización. Factor periódico de descuento 17
1.5. Tasas equivalentes 19
1.6. Tasas proporcionales. Tasa nominal de interés y Tasa nominal de descuento 21
1.7. Tasa instantánea 24
1.8. Tasa aparente, Tasa real y Tasa de inflación 26
1.9. Factor periódico de corrección monetaria 28

Capítulo 2
Operaciones financieras simples 31
2.1. Operaciones de capitalización en el campo discreto 31
2.2. Operaciones de descuento en el campo discreto 45
2.3. Valoración de las operaciones financieras simples en condiciones de inestabilidad monetaria 55
2.4. Valoración de capitales mediante leyes continuas 59

Capítulo 3
Equivalencia de capitales.
Aplicaciones en el análisis de inversión 71
3.1. Valoración de un conjunto de capitales 71
3.2. Valor de un conjunto de capitales en función de su valor en otro punto 74
3.3. Equivalencia entre conjuntos de capitales ....
3.4. Capital único equivalente a varios otros. Vencimiento 77
común y vencimiento medio 79
3.5. Aplicación del concepto de equivalencia de capitales en el análisis de inversión 80

Capítulo 4
Rentas ciertas ... **89**
4.1. Introducción ... 89
4.2. Concepto. Elementos. Clasificación ... 89
4.3. Valoración de rentas ... 92
4.4. Cálculo de la tasa de interés implícita en las rentas ... 105
4.5. Rentas perpetuas de términos constantes ... 108
4.6. Rentas temporarias de términos variables ... 109
4.7. Valoración de rentas con tasas variables ... 116
4.8. Valoración de rentas en un contexto inflacionario ... 116

Capítulo 5
Sistemas de amortización de préstamos ... **121**
5.1. Sistemas de amortización de préstamos. Concepto y generalidades ... 121
5.2 Sistemas de reembolso único de capital y pago acumulado de intereses al vencimiento del plazo ... 125
5.3. Sistemas de reembolso único de capital y pago acumulado de intereses al inicio del plazo ... 130
5.4. Sistemas de reembolso único de capital y pago periódico de intereses por vencido ... 131
5.5. Sistemas de reembolso mediante pago periódico de capital e intereses sobre saldos ... 137
5.6 Sistema de préstamo con intereses directos o cargados ... 163

Capítulo 6
Empréstitos ... **173**
6.1. Generalidades. Condiciones. Modalidades de colocación y rescate ... 173
6.2. Conceptos a aplicar para el análisis y valoración de un título ... 177
6.3. Empréstitos con reembolso de vencimiento cierto ... 181
6.4. Empréstitos con reembolso de vencimiento aleatorio ... 196

Capítulo 1
Nociones preliminares. Tasas de interés y de descuento

1.1. Generalidades. Capital y rédito

La Matemática Financiera es una disciplina que forma parte de las Ciencias Matemáticas aplicada a la cuantificación y valoración de capitales cuando los mismos son expuestos a un proceso productivo.

Ella provee las herramientas necesarias para la cuantificación de las variaciones que se producen en el valor capital, durante el transcurso del tiempo. Cuando se dispone de una cierta cantidad de dinero en vez de destinar a gastarlo, satisfaciendo alguna necesidad inmediata, se lo puede invertir para recuperarlo en un futuro próximo, esperando una compensación económica. En esas circunstancias se producen las variaciones que cuantifica la Matemática Financiera.

Para interpretar correctamente los principios fundamentales de esta disciplina se debe empezar por recordar conceptos básicos como el de *capital*, que «es todo conjunto de factores de producción (inmuebles, maquinarias, instalaciones, tierra, trabajo, etc.) que tienen la capacidad potencial de generar nuevos bienes o servicios».

Otro concepto importante relacionado con el anterior es el de *interés* o *rédito* que *es la diferencia entre el valor capital adquirido y el capital inicial*. En un sentido más amplio se dice que el interés es la retribución o renta que percibe el titular de un capital cuando lo cede o lo que paga la persona que dispone durante un cierto tiempo de un capital ajeno. En la práctica económica surge este concepto cuando se toma la decisión de invertir o bien, hacer uso de esa capacidad de producir, ya que al afectar el capital a un proceso productivo éste genera un valor futuro mayor al capital inicialmente invertido. Este incremento, en una economía estable, es siempre positivo (independientemente de las políticas económicas o inflacionarias, de los avances tecnológicos y otros factores similares).

El concepto de *descuento* también es fundamental para comprender los temas matemáticos en el ámbito financiero. Como dice Alberto M. Yasukawa: «interés y descuento no son sino dos caras de una misma moneda». Descontar es el proceso inverso al de invertir que consiste en evaluar en el presente un capital disponible en el futuro.

En ambas situaciones se hace necesario analizar las variaciones que se generan en un determinado tiempo y es entonces cuando interviene la Matemática Financiera proporcionando las técnicas que permiten obtener los modelos matemáticos adecuados para su valoración.

Lo expuesto pone en evidencia que el objetivo del presente texto no se limita al ámbito estrictamente bancario sino que también brinda las herramientas imprescindibles para su utilización en cualquier empresa frente a casos como la toma de decisiones, análisis de proyectos de inversión, valoración de flujos futuros de fondos, por mencionar algunos ejemplos de su aplicación.

1.2. Operaciones financieras

1.2.1. Concepto

Se entiende por *operación financiera* «al intercambio no simultáneo de capitales». Así las definió la profesora Blanca N. Quirelli en su libro *La valoración dinámica de capitales*. Se puede ampliar diciendo que «es el intercambio de un capital disponible en un determinado momento por otro u otros disponibles en momentos distintos debiendo resultar financieramente equivalentes a partir de determinadas condiciones establecidas entre las partes al contratar».

1.2.2. Interpretación

Al interpretar el concepto resulta que:

• *Intercambio*: implica la existencia de dos partes que pueden ser físicas o jurídicas. Una de las partes entrega o cede un capital o varios y la otra parte recibe otro o varios capitales. En general se habla de acreedor y deudor.

• *No simultáneo*: presupone que debe existir siempre un proceso productivo (al menos implícito o subyacente) que dure un cierto tiempo para que pueda generarse el interés. Aun en la operación financiera más simple, como lo es una inversión a plazo fijo este requisito se cumple.

Los bancos que se encargan de la toma y colocación de fondos, al recibir los depósitos, luego prestan ese dinero a factores de la producción que lo necesitan (Pymes, comercios, industrias inmobiliarias, automotriz y otros).

Siempre debe transcurrir un cierto tiempo por lo que el capital varía en función del mismo, mientras que el interés y el descuento además de ser función del tiempo dependen del valor de los capitales intercambiados.

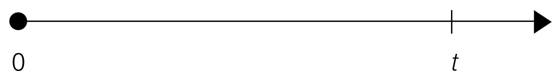
Esto permite afirmar que el interés anticipado como tal es una contradicción y su uso es ambiguo ya que el rédito no se produce en forma espontánea.

Por otro lado, cuando se dice que el capital es función del tiempo surge una relación estrictamente matemática:

$$C_t = f_{(x)}$$

donde las expresiones resultan equivalentes. Es conveniente observar que la notación tradicional al referirse a una función la expresa como *C(t)* mientras que en esta disciplina se acostumbra a escribirla de la manera C_t por lo que en este texto se utilizará esta última expresión.

El tiempo es la variable independiente y como tal se grafica en el semieje positivo de las abscisas.



• *Financieramente equivalentes:* significa que resulta indistinto disponer de un capital u otro en distintas fechas. Los capitales que se intercambian deben ser equivalentes de acuerdo a las condiciones imperantes en el mercado financiero y en el contexto económico en que se realiza y que las partes aceptan de mutuo acuerdo al contratar. El capital que se entrega hoy debe ser equivalente al que se va a recibir en el futuro o viceversa. Debe respetarse el principio de la equidad financiera, por lo que para que exista operación financiera los capitales que se intercambian en fechas distintas nunca pueden ser iguales.

• *Basada en determinadas condiciones:* la equivalencia financiera resulta de la aplicación de determinadas condiciones:

a) Las llamadas condiciones formales: son las que hacen a cuestiones de procedimiento y requisitos como los de la papelería requerida y garantías para la aprobación, aceptación y concreción de la operación. En general son aquellas que si se cambia una condición por otra, no se modifica el valor de los capitales intercambiados.

b) Las llamadas sustanciales son las que inciden en los resultados a obtener y el cambio de una condición por otra, implica una modificación en el valor de los capitales que se intercambian. Ellas son:

b.1) *Las tasas:* de interés o de descuento efectivas, reales o aparentes, siempre referidas a la unidad de tiempo a la que corresponden, las tasas instantáneas y otras cuyo uso sería conveniente evitar como es la tasa nominal.

b.2) *El tiempo:* entendido como duración de la operación financiera, es la amplitud del intervalo en el cual se realiza la operación o bien, dicho en una palabra, es el plazo. Al hablar de esta condición, y recordando que el tiempo es la variable de capitalización, sería oportuno hacer algunas aclaraciones:

- Diferenciar plazo y período. *Plazo* es el intervalo de tiempo que transcurre desde el inicio de la operación financiera hasta su finalización; mientras que *período* es la unidad de tiempo en que se mide la variable de capitalización. Algunas veces pueden coincidir.

- Cuando se evalúa en el campo discreto, es decir cuando t toma valores enteros positivos, la menor unidad que se utiliza en la práctica para medir el tiempo es el día. Pero cuando es necesario hacer estudios analíticos sobre el comportamiento de la función capital resulta más útil la valoración en el campo continuo para lo cual se toman períodos infinitésimos, es decir que la menor unidad es el instante y t toma valores reales positivos.

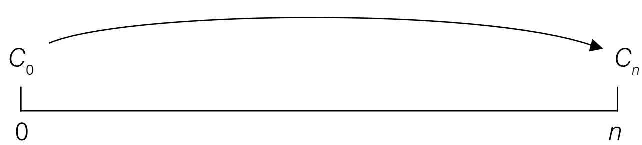
- Cuando se propone un ejercicio práctico, al resolverlo, se plantea el interrogante que surge de considerar año calendario de 365 días o año comercial de 360 días. Actualmente, por disposición del BCRA los cálculos deben realizarse utilizando el año calendario. No obstante ello, *el presente texto sugiere el siguiente criterio*: cuando se hable de meses, trimestres, semestres, etc., entendidos como parte alícuota del año, el problema o ejercicio está planteado para que su resolución se haga tomando como base el año comercial de 360 días. En cambio, cuando el planteo establezca períodos como 30 días, 90 días, 180 días, etc., debe usarse el año real o calendario.

b.3) *Las variables aleatorias*: el eventual enlace de la operación financiera con variables aleatorias o hechos contingentes de los que depende la disponibilidad de los capitales. En general la bibliografía considera como variable aleatoria a la vida humana, donde el monto y la disponibilidad del capital dependen de la vida o muerte de la persona asegurada. En este material sólo se hará referencia a esas operaciones, aunque existen otros fenómenos que requieren evaluar en condiciones de incertidumbre como la incobrabilidad, el contexto inflacionario y distintos riesgos financieros.

1.2.3. Clasificación

• Según el momento de su valoración

- *Operaciones de capitalización:* consisten en evaluar un capital con posterioridad a la fecha de su disponibilidad.

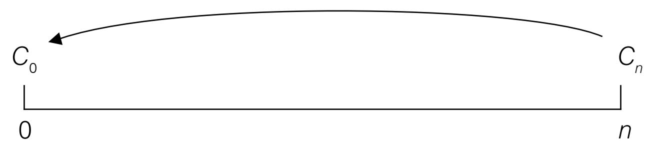


Se conoce el valor presente del capital y se calcula su valor futuro. Se dispone de un capital inicial que transcurrido un determinado plazo aumenta su valor y constituye el capital final (llamado también valor adquirido o monto).

El interés en el intervalo [0; n] es la diferencia entre el capital en n (C_n) y el capital en 0 (C_0).

$$I_{[0;n]} = C_n - C_0$$

- *Operaciones de descuento:* consisten en evaluar un capital con anterioridad a la fecha de su disponibilidad o exigibilidad.



Algunos autores suelen denominarlas operaciones de actualización, término que a veces también se lo utiliza cuando hay que efectuar correcciones monetarias por la incidencia de la inflación, y a los efectos de evitar confusiones que surgen de la dualidad en la terminología, en este trabajo se hará referencia concretamente a operaciones de descuento.

El valor del capital en n recibe el nombre de valor nominal (C_n) y el valor del capital en 0 recibe el nombre de valor actual (C_0). La diferencia entre el valor nominal y el valor actual es el descuento en el intervalo [0; n].

$$D_{[0;n]} = C_n - C_0$$

Como ya se dijo antes, interés y descuento no son sino dos caras de una misma moneda, por lo que, en idénticas condiciones sustanciales, el descuento se supone igual al rédito.

Si se descuenta un capital se obtiene un valor actual tal que, si a ese valor se lo capitaliza a la misma tasa y durante el mismo tiempo, se obtiene el mismo valor capital del cual se había partido. Esto justificará que en este texto se traten ambas operaciones en forma paralela para simplificar demostraciones.

Por otro lado, si bien existen varios nombres para definir el descuento, según su forma de cálculo, todos responden a un concepto que es único: determinar el valor presente de un capital futuro.

• Según la cantidad de capitales que se intercambian

- *Operaciones simples:* cuando se intercambia un capital por otro capital. Constan de un solo capital en la prestación y en la contraprestación.

- *Operaciones complejas:* cuando se intercambia un capital por varios o varios capitales por uno solo, o bien cuando se intercambia un conjunto de capitales por otro conjunto de varios capitales. Constan de más de un capital en la prestación y/o en la contraprestación.

• Según la vinculación que tengan con un suceso aleatorio o contingente

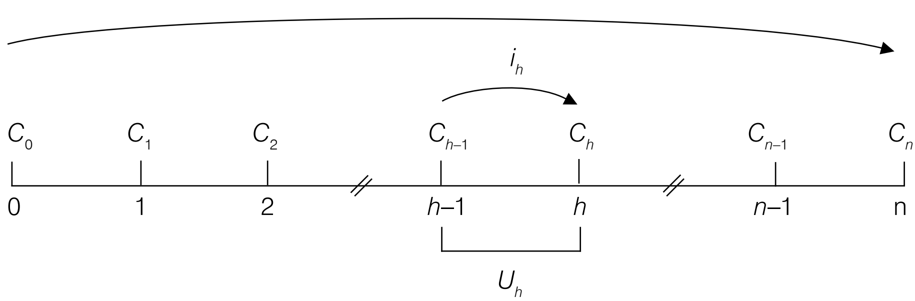
- *Operaciones ciertas:* son aquellas en las que la operación no está ligada a ninguna variable aleatoria ni sucesos inciertos.
- *Operaciones aleatorias:* son aquellas en las que la disponibilidad de los capitales está sujeta a factores aleatorios. Cuando los riesgos de disponibilidad corresponden a la vida humana las operaciones son de previsión o seguro y de ellas se ocupa la Matemática Actuarial.

• Según la duración

- *Operaciones a corto plazo:* cuando la duración de la operación no supera el año.
- *Operaciones a largo plazo:* cuando la duración de la operación es superior al año.

1.3. Tasa de interés. Tasa de descuento o Tasa adelantada

Independientemente de que se trate de una operación de capitalización o de descuento, o sea una valoración prospectiva o retrospectiva, y recordando que en este texto se tratarán ambas operaciones simultáneamente, se considerará que el intervalo [0; n] está partido en n subintervalos o períodos de igual o diferente amplitud. Si se toma a uno de ellos como el subintervalo de observación (o subintervalo bajo estudio), y se lo llama como el «$h-$ésimo» y se lo simboliza como U_h, gráficamente resulta:



• Tasa de interés:

En una operación de capitalización, C_{h-1} es el valor adquirido por el capital inicial C_0 en el momento $t = h-1$ y C_h el valor adquirido en $t = h$ y sabiendo que dicha operación implica siempre un crecimiento en la función capital se tiene que $C_h > C_{h-1}$, por lo tanto será:

$$C_h - C_{h-1} > 0$$

diferencia que matemáticamente representa la variación absoluta que experimenta el capital en el $h-$ésimo período y que financieramente dicha variación o incremento es el interés o rédito producido en esa unidad de tiempo por el capital C_{h-1} disponible al inicio del mismo.

$$I_{[h-1;h]} = C_h - C_{h-1}$$

Para su mejor comprensión se propone un *ejemplo* numérico, a saber:

$$h-1 = 40 \text{ días contados a partir de } 0$$
$$h = 70 \text{ días contados a partir de } 0$$
$$C_{h-1} = \$\ 1000$$
$$C_h = \$\ 1020$$

En este caso propuesto resulta:

$$I_{[40;70]} = 1020 - 1000$$

$$I_{[40;70]} = 20$$

que es el interés generado por el capital de $ 1000 en el subintervalo de 30 días que transcurre de los 40 a los 70 días contados desde $t = 0$.

Pero las variaciones absolutas no aportan información completa ya que sólo indican el incremento bruto, sin tener en cuenta que ese incremento puede ser el mismo y estar generado por capitales diferentes. Por lo tanto para aplicar en modelos matemáticos que se repiten con frecuencia en la práctica comercial, bancaria y financiera, es conveniente expresar estos resultados por unidad de capital inicial, utilizando para ello la variación relativa del valor capital, de manera que la razón:

$$\frac{1020 - 1000}{1000} = 0{,}02$$

expresa el interés obtenido por cada unidad de capital invertido en los 30 días comprendidos en el intervalo [40,70] . En general se puede decir que:

$$i_h = \frac{C_h - C_{h-1}}{C_{h-1}}$$

es la *tasa de interés* del $h-$ésimo período y que se define como *el rendimiento por unidad de capital en la unidad de tiempo considerada*.

• Ampliación conceptual de la tasa de interés:

Antes de avanzar, es conveniente hacer algunas aclaraciones con respecto a este concepto tan relevante.

Primero hay que decir que existen muchas denominaciones asignadas al mismo que causan confusión entre quienes no hacen uso habitual del cálculo financiero. Si correspondiera agregar algo al concepto de tasa de interés, la única ampliación adecuada es «tasa de interés *efectiva*» y siempre se debe indicar la unidad de tiempo a la que se refiere. Además esta tasa señala que para esa unidad de tiempo se produce la capitalización de los intereses, o sea que los mismos se acumulan al capital disponible al inicio del período para generar nuevos intereses. En el ejemplo propuesto la tasa de interés es del 0,02 para 30 días y los $ 20 se acumularán a los $ 1000 para generar intereses en el período siguiente.

Por otro lado es oportuno decir que el concepto de tasa se calcula en tanto por uno y no en tanto por ciento. Es muy común que en el ámbito comercial y bancario se usen expresiones tales como tasa del 7 %, tasa del 12 %, etc., por lo que cuando así sea, se considera sobreentendido que la tasa que se utiliza para los cálculos correspondientes en esos casos es $i = 0{,}07$; $i = 0{,}12$; etcétera.

La tasa de interés no es otra cosa que el precio del dinero que se debe pagar o cobrar por tomarlo prestado o cederlo, que depende de la situación imperante en cada mercado de capitales y que por lo general regulan los bancos centrales de cada país.

Existen dos tipos de tasas de uso corriente:

- *Tasas de interés activas:* son las que las instituciones bancarias cobran por los diferentes tipos de crédito o servicios que prestan a los usuarios de los mismos.
- *Tasas de interés pasivas:* son las que pagan las instituciones bancarias a quienes depositan dinero mediante cualquiera de los instrumentos que a tal efecto existen.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 1

En la factura de servicio telefónico correspondiente a una casa de familia se observa que en el primer vencimiento arroja un saldo a pagar de $ 276,67 y que en el segundo vencimiento que opera 10 días después el importe a pagar es $ 279,25. Se solicita calcular la tasa de interés que cobra la empresa telefónica por los 10 días de mora.

SOLUCIÓN

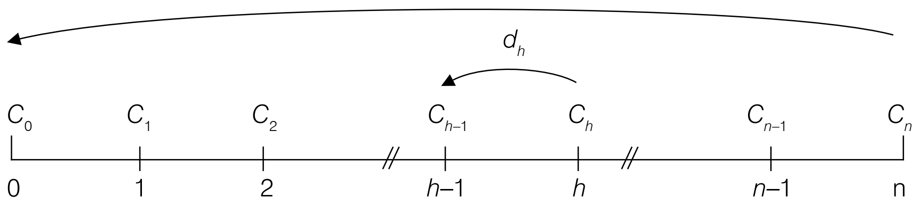
Para determinar la tasa de interés que aplica la empresa correspondiente a los 10 días de mora, se debe hacer:

$$i = \frac{279{,}25 - 276{,}67}{276{,}67} = 0{,}009325 \text{ para 10 días.}$$

Si bien 10 días no es la unidad que se usa habitualmente para medir rendimientos o costos y hacer comparaciones, en la medida que se incorporen otros conceptos se verán procedimientos que, a partir de este dato, nos permitirán encontrar parámetros para otras unidades de tiempo, que son de uso corriente.

• Tasa de descuento o Tasa adelantada:

Planteando un gráfico similar al expuesto al inicio de 1.3 y recordando que una operación de descuento consiste en evaluar un capital con anterioridad a su disponibilidad, resulta:



Donde C_h es el valor actual del capital C_n en el momento $t = h$ y C_{h-1} el valor actual del mismo capital en $t = h-1$ y por el comportamiento del valor capital respecto del tiempo de descuento se verifica que $C_{h-1} < C_h < C_n$ de manera tal que, en el $h-$ésimo subintervalo o período en estudio, resulta:

$$D_{[h-1;h]} = C_h - C_{h-1}$$

diferencia positiva que matemáticamente representa la variación absoluta del capital C_h descontado un período y que financieramente es el descuento sufrido por ese capital en esa unidad de tiempo.

Para su mejor comprensión se propone un *ejemplo* numérico, a saber:

h es el día 28/10 de un determinado año

$h-1$ es el día 29/08 del mismo año

$$C_h = \$\ 5000$$

$$C_{h-1} = \$\ 4800$$

En este caso propuesto resulta:

$$D_{[29/8;28/10]} = 5000 - 4800$$

$$D_{[29/8;\ 28/10]} = 200$$

que es el descuento sufrido por el capital de \$ 5000 en el subintervalo de 60 días que transcurre entre el 29/08 y el 28/10.

Pero como ya se dijo al tratar la tasa de interés, las variaciones absolutas no aportan información completa porque no tienen en cuenta los valores capitales sobre los cuales se producen esas variaciones, en consecuencia recurriendo a la razón:

$$d = \frac{5000 - 4800}{5000} = 0{,}04 \text{ para 60 días}$$

se obtiene el descuento por cada unidad de capital descontado 60 días antes de su vencimiento.

Generalizando, resulta:

$$d_h = \frac{C_h - C_{h-1}}{C_h}$$

que es la variación relativa del capital descontado y constituye la tasa de descuento la cual se define como la quita o reducción por unidad de capital descontado en la unidad de tiempo considerada.

Al igual que la tasa de interés debe estar referida a la unidad de tiempo que corresponde y siempre expresada en tanto por uno.

Se la llama también tasa adelantada porque, como se demostrará después, se la puede interpretar como el valor actual de la tasa de interés del mismo período.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 2

Un comerciante posee en cartera un cheque de pago diferido de \$ 2400 con vencimiento a 45 días y en el día de la fecha lo descuenta en un banco que, sin considerar gastos adicionales, le acredita en su cuenta corriente la suma de \$ 2340. Se solicita calcular la tasa de descuento para 45 días resultante de negociar el cheque diferido.

SOLUCIÓN

$$d = \frac{2400 - 2340}{2400} = 0{,}025 \text{ para 45 días}$$

1.4. Factor periódico de capitalización. Factor periódico de descuento

• Factor periódico de capitalización

Si se parte del subintervalo de observación y se tiene como información la tasa de interés i_h de ese período al que se denomina U_h, significa que se conoce el rendimiento por unidad de capital en esa unidad de tiempo. Esto supone que en el $h-$ésimo período, cada unidad de moneda ($ 1) rinde i_h pesos.

Con este razonamiento se define que el rédito o incremento del capital C_{h-1} disponible al inicio de U_h será:

$$I_h = C_{h-1} \times i_h$$

y el capital al final de U_h

$$C_h = C_{h-1} + C_{h-1} \times i_h$$

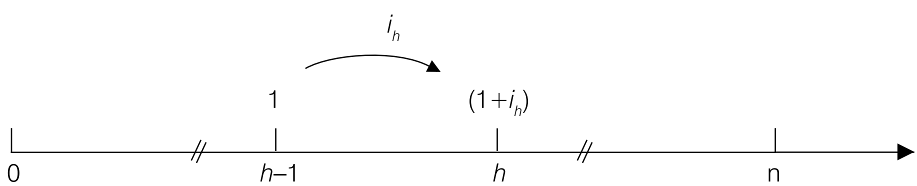
sacando factor común C_{h-1} resulta

$$C_h = C_{h-1}(1 + i_h)$$

que es el valor final en $t = h$ del capital C_{h-1}, y como $C_{h-1} \neq 0$ dividiendo en ambos miembros por C_{h-1} queda:

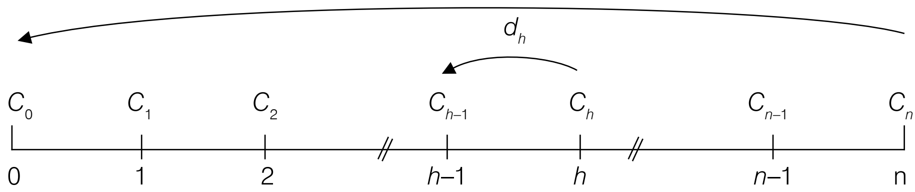
$$\frac{C_h}{C_{h-1}} = (1 + i_h)$$

Interpretando esta igualdad se dice que $(1 + i_h)$ es el *factor de capitalización del período* U_h en función de la tasa de interés i_h porque al multiplicar el capital al inicio de ese período se puede obtener el valor capital al vencimiento y se define como «*el valor final de cada unidad de capital invertido en la unidad de tiempo considerada*». Gráficamente es:



• Factor periódico de descuento

Considerando el $h-$ésimo período, como se hizo para obtener el factor de capitalización, pero suponiendo conocida la tasa de descuento del mismo



por definición de descuento y tasa de descuento y siendo C_h el capital sometido a descuento, el descuento correspondiente al $h-$ésimo período es:

$$D_h = C_h\, d_h$$

El valor actual C_{h-1} de dicho capital será:

$$C_{h-1} = C_h - C_h\, d_h$$

sacando factor común C_h

$$C_{h-1} = C_h\,(1 - d_h)$$

que es el valor actual en $t = h-1$ del capital C_h, y como $C_h \neq 0$ resulta

$$\frac{C_{h-1}}{C_h} = (1 - d_h)$$

donde $(1 - d_h)$ es el *factor de descuento del período* U_h *en función de la tasa de descuento* d_h.

Por otra parte se puede expresar el factor de descuento en función de la tasa de interés ya que, si en la igualdad vista antes

$$C_h = C_{h-1}\,(1 + i_h)$$

despejando C_{h-1}, siendo $(1 + i_h) \neq 0$

$$C_{h-1} = \frac{C_h}{(1 + i_h)} \qquad \text{o} \qquad C_{h-1} = C_h\,(1 + i_h)^{-1}$$

resulta $(1 + i_h)^{-1}$ *el factor de descuento del período* U_h *en función de la tasa de interés* i_h ya que también permite obtener el valor actual en $t=h-1$ del capital disponible en $t=h$.

En general se define el factor de descuento como «el valor actual de cada unidad de capital descontado en la unidad de tiempo considerada».

• *Observaciones:* Si bien el concepto de descuento es único, existen modalidades de cálculo que, según la tasa que se aplique se le asigna denominaciones distintas. Si para calcularlo se aplican tasas de interés, se acostumbra denominarlo descuento racional o matemático, mientras que si se utilizan tasas de descuento se acostumbra a decir que es descuento comercial.

Si se verifica que:

$$(1 - d_h) = (1 + i_h)^{-1}$$

será indistinto aplicar una u otra tasa ya que se obtiene el mismo valor actual.

Otra consideración a realizar es que todo factor de capitalización tiene su recíproco que es el factor de descuento y todo factor de descuento tiene su recíproco que es el factor de capitalización, por lo que $(1 - d_h)^{-1}$ será una manera de expresar el factor periódico de capitalización con la tasa de descuento. Son recíprocos por verificarse que:

$$(1 + i_h)\,(1 + i_h)^{-1} = 1$$

y

$$(1 - d_h)^{-1}\,(1 - d_h) = 1$$

1.5. Tasas equivalentes

1.5.1. Concepto

Las tasas equivalentes son aquellas que aplicadas a un mismo capital inicial en un mismo tiempo generan el mismo valor final o cuando aplicadas a un mismo valor nominal generan el mismo valor actual. Dicho de otra manera, son aquellas que para un mismo tiempo generan iguales factores de capitalización y/o iguales factores de descuento.

Basándonos en la metodología propuesta y en función de la información conocida hasta el momento sólo es posible plantear las siguientes igualdades:

$$(1 + i_h) = (1 - d_h)^{-1}$$

$$(1 + i_h)^{-1} = (1 - d_h)$$

Al verificarse las mismas se afirma que la tasa de interés h y la tasa de descuento h son equivalentes porque para un mismo período generan iguales factores de capitalización y/o descuento.

En el próximo capítulo se mostrarán las distintas condiciones sustanciales en las que se pueden efectuar las operaciones financieras, y entonces se podrán establecer diversas relaciones de equivalencia de tasas, siempre aplicando el concepto enunciado en este punto.

1.5.2. Relación entre tasa de interés y tasa de descuento

De las igualdades propuestas se deducen los modelos que permiten, conocida una de esas tasas, hallar la otra, a saber:

$$d_h = \frac{i_h}{1 + i_h} \qquad\qquad i_h = \frac{d_h}{1 - d_h}$$

En estas condiciones se verifica la relación entre la tasa de descuento y la de interés: siendo $(1+ i_h)^{-1}$ un factor de descuento, es posible interpretar que la tasa de descuento es el valor actual de la tasa de interés, motivo por el cual se la llama también tasa adelantada y siendo $(1- d_h)^{-1}$ un factor de capitalización la tasa de interés resulta ser el valor final de la tasa de descuento.

Estas relaciones permiten a su vez justificar que en las operaciones de descuento, resulta indistinto calcular el descuento aplicando la tasa de interés correspondiente sobre el capital al inicio o valor actual, o la tasa de descuento equivalente sobre el capital al final o valor nominal.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 3

Si una entidad financiera estipula para operaciones de descuento una tasa de interés para 30 días del 3,6 %:

a) ¿qué tasa de descuento debería aplicar para el mismo plazo?

$$d_{30} = \frac{i_{30}}{1 + i_{30}} \Rightarrow d_{30} = \frac{0{,}036}{1 + 0{,}036} = 0{,}034749 \text{ donde se advierte que } i_{30} > d_{30}$$

b) calcular el valor actual de un documento de valor nominal \$ 10 000 con vencimiento a 30 días aplicando la tasa de interés dada y la de descuento obtenida.

$V.A. = 10000\,(1 + 0{,}036)^{-1} = 9652{,}51$
$V.A. = 10000\,(1 - 0{,}034749) = 9652{,}51$

c) verificar que el descuento es el mismo aplicando la tasa de descuento sobre el valor nominal o la tasa de interés sobre el valor actual.

$D = 10000 \times 0{,}034749 = 347{,}49$
$D = 9652{,}51 \times 0{,}036 = 347{,}49$

1.6. Tasas proporcionales. Tasa nominal de interés y Tasa nominal de descuento

Para poder dar el concepto de tasa nominal previamente se debe definir qué se entiende por tasas proporcionales y para ello es necesario decir que dos magnitudes son proporcionales cuando la razón o el cociente entre dos de ellas es igual a la razón o el cociente entre dos de la otra. Si se acepta que magnitud es todo aquello que puede ser medible o cuantificable, para el caso concreto de la matemática financiera tanto el tiempo como las tasas de interés y/o descuento son magnitudes, por su capacidad de ser medibles. Hechas estas aclaraciones se sostiene que *dos tasas son proporcionales cuando el cociente entre ellas es igual al cociente entre los tiempos a los que están referidas*.

Ejemplo:

Si el 0,06 es una tasa para 90 días y el 0,02 lo es para 30 días, las mismas son proporcionales porque se verifica que el cociente entre ellas, que es igual a 3, es igual al cociente entre los tiempos a los que se refieren, a saber:

tasas	tiempos
$\frac{0{,}06}{0{,}02}$	$\frac{90}{30}$

Dado este enunciado es necesario establecer dos unidades de tiempo: una unidad U a la que se denomina período y una unidad U' a la que se llama subperíodo y el cociente U/U' nos indicará el número de veces que el subperíodo está contenido en el período. La mayoría de la bibliografía designa a esta frecuencia con la letra «*m*», pero se ha optado por U/U' tratando de facilitar el manejo de las unidades de tiempo correspondientes a partir de la utilización del año calendario o real que hace que ese cociente casi nunca resulte un número entero. *Ejemplo*: si se toma el año de 365 días como período y 30 días como subperíodo la frecuencia 365/30 no es 12 sino 12,16666.

Luego de realizadas estas observaciones se está en condiciones de introducir el concepto de tasa nominal. A la misma se la simboliza con la letra «*J*» y refiere a la unidad

U, mientras que a la tasa de interés efectiva correspondiente al subperíodo U' se simboliza con «i» y resulta que *la tasa nominal de interés es una tasa periódica para una cierta unidad de tiempo, que es proporcional a la tasa de interés efectiva del subperíodo*.

Generalizando en forma simbólica será:

$$\frac{j_U}{i_{U'}} = \frac{U}{U'}$$

donde despejando se obtiene

$$j_U = i_{U'} \, \frac{U}{U'}$$

La tasa nominal es un indicador periódico proporcional de la tasa de interés, pero no es una tasa efectiva y su uso debería eliminarse pues provoca confusión al brindar una información distorsionada de los rendimientos. Es la tasa que en la práctica comercial y bancaria se utiliza para «nominar» o «publicitar» el rendimiento, pero no es la tasa que se efectiviza y acostumbran a enunciarla como TNA. Generalmente están referidas al año como unidad o período, pero la que se aplica en la operación es la tasa proporcional correspondiente a subperíodos menores como ser 30 días o mes, 90 días o trimestre, etcétera.

Se dice, por ejemplo, que un determinado banco ofrece el 18 % nominal anual con capitalización mensual o cada 30 días, lo que implica que los intereses se capitalizarán mensualmente a la tasa del 0,015 o a la tasa del 0,014795 cada 30 días, según se tome año comercial o calendario, respectivamente, y resultantes de hacer:

$$i_{\text{mensual}} = 0{,}18 \text{ x } \frac{30}{360} = 0{,}015 \qquad \text{o} \qquad i_{30} = 0{,}18 \text{ x } \frac{30}{365} = 0{,}014795$$

Además debe decirse que la tasa nominal coincide con la tasa efectiva sólo en el caso en que la frecuencia de capitalización es 1 (uno), o sea cuando $U/U' = 1$; por ejemplo, cuando se enuncia una tasa nominal anual y la capitalización es anual.

Análogamente, la *tasa nominal de descuento es una tasa periódica para una cierta unidad de tiempo, que es proporcional a la tasa de descuento efectiva del subperíodo* y simbolizándola como f_U, se tendrá:

$$\frac{f_U}{d_{U'}} = \frac{U}{U'}$$

y al despejar resulta

$$f_U = d_{U'} \, \frac{U}{U'} \text{ o bien } d_{U'} = f_U \, \frac{U'}{U}$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 4

Se desea realizar una inversión a 60 días depositándose $ 50 000. De acuerdo con la información suministrada se sabe que la TNA que ofrece el Banco es del 15 % correspondiente a una frecuencia de capitalización cada 60 días. Se solicita calcular:

a) La tasa de interés para 60 días.

$$i_{60} = 0{,}15 \text{ X } \frac{60}{365} = 0{,}024658;\ \text{o } 2{,}4658\ \%$$

b) El valor final del capital a los 60 días.

$$C_{60} = 50\,000 \text{ X } (1 + 0{,}024658) = 51\,232{,}90$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 5

Si una entidad financiera desea otorgar préstamos a 45 días y decide cobrar una tasa de interés para 45 días del 3 %: ¿Qué TNA debería publicitar?

SOLUCIÓN

$$j_{365} = 0{,}03 \times \frac{365}{45} = 0{,}24333;\ \text{o bien TNA} = 24{,}33\ \%$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 6

Para operaciones de descuento, un banco de la ciudad anuncia una tasa nominal anual de descuento del 21 % para una frecuencia de 45 días. Se solicita:

a) Calcular la tasa de descuento a aplicar para una operación a 45 días.

$$d_{45} = 0{,}21 \times \frac{45}{365} = 0{,}025890$$

b) Si para el mismo plazo se desea aplicar tasa de interés, cuál es la tasa nominal anual que debería publicarse para que resulte indistinto optar por una u otra.

Previamente debe calcularse la tasa de interés para 45 días equivalente a la de descuento para el mismo plazo y luego su correspondiente nominal, a saber:

$$i_{45} = \frac{0{,}025890}{(1\text{–}0{,}025890)} = 0{,}026579$$

por lo tanto la TNA de interés será

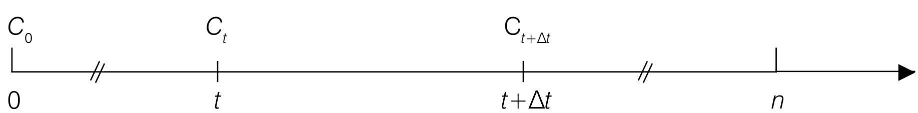
$$j_{365} = 0{,}0265793 \text{ X } \frac{365}{45} = 0{,}215585; \text{ o bien TNA} = 21{,}55\ \%$$

1.7. Tasa instantánea

Esta medida, que no es utilizada en la práctica financiera ni en los cálculos que habitualmente se realizan, es de suma utilidad teórica ya que permite deducir modelos financieros e indagar sobre los mismos brindando conclusiones relevantes en la disciplina.

Para analizar la tasa instantánea hay que hacer algunas aclaraciones respecto al dominio. La función capital, como ya se dijo, es una función cuya variable es el tiempo *t*. Por lo tanto el dominio de la función va a estar formado por los valores que puede tomar *t*, y como ya se dijo, cuando se trabaja en el campo continuo, *t* puede tomar cualquier valor real positivo.

Para obtenerla hay que comenzar por considerar, a partir de un punto *t* X [0; *n*], un incremento Δt en la variable de capitalización de manera que, para valores positivos de Δ*t*, resultará definido el valor capital $C_{t+\Delta t}$ como el valor adquirido por el capital C_t en el tiempo Δ*t* de capitalización. Gráficamente quedaría reflejado de la siguiente manera:



Aplicando el concepto de interés que ya se ha visto y que matemáticamente se designa como la variación absoluta, se sabe que

$$I_{\Delta t} = C_{t+\Delta t} - C_t$$

Esta magnitud del incremento de la función C_t ofrece una primera idea de la rapidez con que crece el capital; pero si lo que se desea conocer es cuántas unidades crece C_t por cada unidad de crecimiento de *t*, es decir Δ*t*, se obtendrá una mejor información si se divide la variación absoluta por el incremento del tiempo.

$$\frac{I_{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{C_{t+\Delta t} - Ct}{\Delta t}$$

que es la *variación absoluta media* y representa la rapidez media del crecimiento del valor capital en el intervalo [t; $t+ \Delta t$]. Éste es un indicador promedio del rédito producido en ese intervalo, correspondiente a la unidad en la que se ha expresado Δt y proporcional al mismo.

A este cociente también se lo llama «cociente incremental» de la función C_t cuando t varía de t a Δt.

$$\frac{\Delta C_t}{\Delta t}$$

Por consiguiente, el valor del cociente incremental depende no sólo de t sino también de Δt. Como en los distintos puntos del intervalo [t; $t+ \Delta t$] la rapidez de crecimiento de C_t varía, se tendrá una idea más precisa de cuánto crece la función capital en t cuánto más pequeño sea Δt, lo que induce a considerar no la razón incremental sino su límite para $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta C_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{\Delta t} =$$

Si este límite existe, queda definida la derivada C'_t de la función valor capital en el punto de evaluación t. Como $C_{t+\Delta t} > C_t$ y $\Delta t > 0$, por tratarse de una operación de capitalización, entonces la derivada es positiva para todo t que pertenece al intervalo de valoración, lo que implica que es una función creciente para todo punto t que pertenece a ese intervalo.

Además, si existe la derivada, se puede afirmar que la función capital es una función continua del tiempo, es decir que el interés se va produciendo en cada instante; y si bien en la práctica se lo mide por períodos finitos de tiempo, también es posible la medición en el campo continuo por intervalos infinitésimos.

Por otro lado, si se hace la razón entre la variación relativa del valor capital en el intervalo [t; $t+ \Delta t$] y el tiempo Δt necesario para que dicha variación se produzca, se obtiene:

$$\frac{\frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{C_t}}{\Delta t} = \frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{C_t \Delta t}$$

que es por lo tanto una tasa de variación relativa media u otra forma de expresar a la tasa nominal, ya que si a Δt se lo mide con respecto a la unidad U, dicha medida es un indicador periódico para U proporcional al rédito por unidad de capital $\frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{C}$.

Sabiendo que el valor capital es una función creciente en todo punto del dominio, se procede a analizar el comportamiento de la variación relativa media antes expresada, cuando Δt tiende a cero por la derecha, y aplicando el límite se obtiene:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{C_t \times \Delta_t} = \frac{1}{C_t} \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{\Delta_t} = \frac{C'_t}{C_t} = p_{(t)}$$

La expresión obtenida constituye la *tasa instantánea de rendimiento* y se la simboliza con $p(t)$, pudiéndose observar que es el límite de la tasa nominal cuando $\Delta t \to 0$, o sea que, por analogía a dicha tasa media, es posible interpretar a la tasa instantánea como un indicador para la unidad «*U*» del rédito por unidad de capital en el instante «*t*».

Otra manera de expresarla es en función de diferenciales:

$$\rho_{(t)} = \frac{C'_t}{C_t} = \frac{1}{C_t} \times \frac{dC_t}{dt}$$

$$\Rightarrow \rho_{(t)} = \frac{d(lnC_t)}{dt}$$

Por otro lado, si se propone encontrar la expresión de la *tasa instantánea de descuento*, y en sentido retrospectivo del tiempo, se considera un $\Delta t \to 0$ por la izquierda, como si fuera un instante anterior a *h*, se puede plantear la existencia del límite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C_t - C_{t-\Delta t}}{C_t \times \Delta_t}$$

y sabiendo que la función capital es derivable en «*t*» y que existe dicho límite por lo demostrado antes, será también:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C_t - C_{t-\Delta t}}{C_t \times \Delta_t} = \frac{1}{C_t} \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C_t - C_{t-\Delta t}}{\Delta_t} = \frac{C'_t}{C_t}$$

Esto permite interpretar que el valor capital decrece en operaciones de descuento con la misma velocidad que crece en operaciones de capitalización.

1.8. Tasa aparente, Tasa real y Tasa de inflación

Si se admite estabilidad en el poder adquisitivo de la moneda puede decirse que la tasa real de rendimiento coincide con la tasa de interés. Pero en épocas de inestabilidad monetaria ha surgido la necesidad de utilizar nuevas denominaciones:

• *Tasa de interés aparente:* es el interés de una unidad de capital en una unidad de tiempo, que ha sido denominada siempre tasa de interés. Para evitar confusiones sería conveniente hablar de tasa de interés a moneda corriente o heterogénea.

• *Tasa de interés real:* es la tasa de interés corregida de los efectos de la inflación en la unidad de tiempo a la que corresponde. Se la define en términos de poder adquisitivo y puede considerarse como la tasa de interés a moneda constante u homogénea a un momento considerado de referencia.

• *Tasa de inflación:* es la variación relativa de precios en una determinada unidad de tiempo.

$$F_{[h-1;h]} = \frac{P_h - P_{h-1}}{P_{h-1}}$$

Esta definición también conserva validez si en lugar de precios se consideran los índices correspondientes a los extremos del período considerado:

$$F_{[h-1;h]} = \frac{I_h - I_{h-1}}{I_{h-1}}$$

De acuerdo con los conceptos anteriores y si a la tasa aparente la seguimos simbolizando con «i», a la tasa real se la simboliza con «r» y a la de inflación con «F», en caso que la tasa aparente sea igual a la tasa de inflación, la tasa real será nula, pues si en una misma unidad de tiempo es $i = F$ se verifica que:

$$1 + i = 1 + F$$

$$\Rightarrow \frac{1 + i}{1 + F} = 1$$

En el caso que ello no ocurra y la tasa i sea distinta de F, mayor o menor, el cociente sería > 1 ó < 1 y para recomponer la igualdad, la relación anterior se transforma en:

$$\frac{1 + i}{1 + F} = 1+r$$

de donde se deduce el modelo general:

$$(1+i)=(1+r)(1+F)$$

Esta relación está mostrando que la tasa de interés, en épocas de inestabilidad monetaria, tiene implícito dos componentes: la inflación y el rendimiento real propiamente dicho. Por lo tanto es posible afirmar que en esas condiciones resultará indistinto colocar o invertir un capital a una tasa de interés aparente «*i*», que ajustarlo o corregirlo monetariamente y sobre ese valor ajustado aplicar la tasa «*r*». A partir de ella particularmente se obtiene:

$$r = \frac{i - F}{1 + F}$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 7

Determinar la tasa real para 30 días lograda en un depósito a plazo fijo si la entidad financiera en la que se efectúa ofrece una tasa de interés para 30 días del 3 %, período en que la tasa de inflación fue:

a) $F_{30} = 0{,}016$
b) $F_{30} = 0{,}03$
c) $F_{30} = 0{,}04$

SOLUCIÓN

a) $r = \dfrac{0{,}03 - 0{,}016}{1 + 0{,}016} = 0{,}01378$ ó 1,368 % real para 30 días

b) $r = \dfrac{0{,}03 - 0{,}03}{1 + 0{,}03} = 0$ ó 0 % real para 30 días

c) $r = \dfrac{0{,}03 - 0{,}04}{1 + 0{,}04} = -0{,}009615$ ó – 0,9615 % real para 30 días

1.9. Factor periódico de corrección monetaria

Cuando existe inestabilidad monetaria las magnitudes a las que se refieren los capitales disponibles en distintas fechas tienen distinto poder adquisitivo, por lo que se dice que están expresados en moneda heterogénea. Esto hace que para poder compararlos, previamente hay que convertirlos a una misma moneda, ya sea moneda del inicio o moneda del final. Esto implica expresarlos a moneda homogénea a un momento dado.

Por lo tanto, observando la variación del poder adquisitivo en una unidad de tiempo cualquiera, es propósito en este punto obtener el factor de corrección monetaria para esa unidad y, acorde a la metodología adoptada, se deducirá el correspondiente al h−ésimo período.

Para ello se consideran los índices de precios y la tasa de inflación obtenidos en el punto anterior

$$F_{[h-1;h]} = \frac{I_h - I_{h-1}}{I_{h-1}}$$

$$F_{[h-1;h]} = \frac{I_h}{I_{h-1}} - 1$$

Obteniéndose

$$1 + F_{[h-1;h]} = \frac{I_h}{I_{h-1}}$$

Donde $1 + F_{[h-1;h]}$ es el factor de corrección monetaria que me permite expresar los capitales a moneda del final del período U_h, resultante de hacer el cociente entre el índice al final de período sobre el índice al inicio del mismo. Si se quiere expresar los capitales a moneda del inicio se aplica el factor recíproco $\dfrac{1}{1 + F_{[h-1;h]}}$.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 8

Suponiendo la existencia de una deuda comercial de \$ 12300 que debió pagarse hace exactamente un año atrás y, a los efectos de evitar un pleito, el deudor le propone a su acreedor el pago de dicha suma con el correspondiente ajuste inflacionario tomando para ello un determinado índice de precios, calcular dicha suma sabiendo que el valor del índice considerado hace un año era 2,2060 y a la fecha de pago es 2,45969.

SOLUCIÓN

$$\text{Cap. a la fecha} = 12300\,\frac{2{,}45969}{2{,}2060} = 13714{,}50$$

Donde $\dfrac{2{,}45969}{2{,}2060} = 1{,}115$ es el factor de corrección monetaria y 0,115 es la tasa de inflación anual resultante.

CAPÍTULO 2
Operaciones financieras simples

En el presente capítulo se tratará el estudio de las operaciones financieras simples, o sea las que implican el intercambio de un capital por otro, tanto para la valoración con posterioridad como con anterioridad a su disponibilidad. El análisis se hará en condiciones de certeza y, en una primera instancia, bajo el supuesto de estabilidad monetaria para luego proponer la valoración con un patrón moneda de poder adquisitivo cambiante.

Para poder encontrar los modelos matemáticos a utilizar se deberá definir sustancialmente la operación, es decir, enunciar las condiciones sustanciales de tasa y tiempo, dejando de lado las variables aleatorias ya que, como se dijo antes, la valoración se realizará sin considerar la coexistencia de factores inciertos.

Teniendo en cuenta que el valor capital es función del tiempo como variable de capitalización, sólo resta enunciar la *ley de valoración*, entendiéndose como tal al conjunto de tasas constantes o variables, de interés o de descuento, periódicas o instantáneas que posibilitarán obtener los distintos modelos cuantitativos para evaluar los capitales.

Primero se realizará la valoración en *forma discreta* o sea mediante la fijación de tasas de interés y/o descuento periódicas para intervalos finitos de tiempo, que pueden ser constantes o no, según la partición que se efectúe del intervalo de valoración. Al final de la unidad se realizará la valoración en *forma continua* mediante la fijación de la tasa instantánea de variación relativa media para cualquier valor real positivo de t.

2.1. Operaciones de capitalización en el campo discreto

En este punto se realizarán los análisis y las deducciones necesarias que posibiliten encontrar el modelo matemático para calcular el valor final o valor adquirido por el capital C_0, disponible en $t = 0$, sometido a una operación de capitalización en el intervalo n.

Para ello se proponen a continuación las condiciones sustanciales más usuales en la práctica financiera, comercial y bancaria que permitirán encontrar las distintas fórmulas de cálculo, según las pautas establecidas.

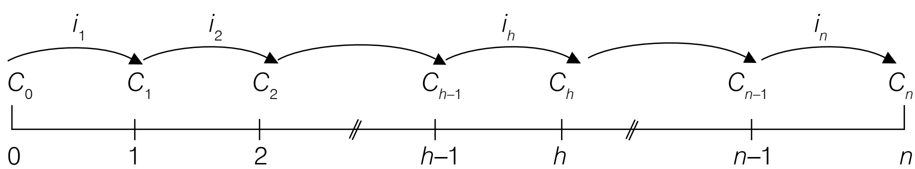
Se comenzará con los sistemas de *interés compuesto* o sea, cuando los intereses de cada período a que se refiere la tasa, se acumulan al capital a inicio del mismo para producir nuevos intereses en el período siguiente.

2.1.1. Capitalización compuesta mediante una ley discreta definida por tasas periódicas de interés variables

El objetivo será encontrar el modelo matemático que permita calcular el valor C_n como el valor final o capitalizado de C_0 en el intervalo [0;n] si se fija como condición sustancial para la valoración de capitales las siguientes tasas periódicas de interés para los respectivos períodos de capitalización, a saber:

$$i_1\, p/\, U_1\, ;\, i_2\, p/U_2;\ldots\ldots;\, i_h\, p/U_h;\ldots\ldots;\, i_n\, p/U_n$$

Gráficamente:



Si bien se proponen unidades de tiempo constantes es conveniente aclarar que en la práctica las mismas pueden ser de distinta amplitud. Por ejemplo, los meses calendarios no contienen el mismo número de días o bien surgen cuando cada inversor elige los períodos en que irá renovando su inversión dentro del plazo que se fijó para la misma.

Con esta información se podrá entonces deducir el modelo matemático correspondiente para la valoración del capital al vencimiento, y la obtención del factor de capitalización para el plazo total. Para ello debe recordarse que en el capítulo 1 se obtuvo el factor periódico de capitalización para el $h-$ésimo subintervalo contado a partir de «0», resultando que:

$$C_h = C_{h-1}\,(1 + i_h)$$

Si ahora se deseara obtener el capital C_1 al vencimiento del primer período, a partir del capital C_0, con idéntico razonamiento se llega a la siguiente igualdad:

$$C_1 = C_0\,(1 + i_1)$$

De esta forma, por aplicación sucesiva de los factores periódicos de capitalización, se logra la siguiente expresión:

$$C_2 = C_1 (1 + i_2) = C_0 (1 + i_1) (1 + i_2)$$
$$C_3 = C_2 (1 + i_3) = C_0 (1 + i_1) (1 + i_2) (1 + i_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_h = C_0 (1 + i_1) (1 + i_2) (1 + i_3) \dots (1 + i_h)$$

Y el valor capitalizado luego de transcurridos «n» períodos tiene como modelo el siguiente:

$$C_n = C_0 (1 + i_1) (1 + i_2) (1 + i_3) \dots (1 + i_h) \dots (1 + i_n)$$

Donde $(1 + i_1) (1 + i_2) (1 + i_3) \dots (1 + i_n) \dots (1 + i_n)$ *es el factor de capitalización para el plazo total, o sea para el intervalo* $[0;n]$*, ya que es el valor por el cual se debe multiplicar al capital* C_0 *para obtener su valor final* $C_{n.}$.

Este modelo es el que se obtiene cuando se establece como condición sustancial un conjunto de tasas de interés variables o flotantes siendo de aplicación en contextos financieros inestables. El interés obtenido se denomina *interés compuesto* porque los mismos se van acumulando al capital período tras período para generar nuevos intereses.

Por último decimos que el conjunto de tasas de interés o rendimiento propuestas constituye una ley discreta de capitalización porque permite encontrar los valores capitales en los extremos de los períodos en los que se ha partido el intervalo de valoración, es decir que *t* toma valores enteros.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 1

Se realiza una inversión a 90 días de plazo colocándose un capital de $ 15000 primero a 30 días a una tasa del 0,8 % para 30 días, luego se renueva por 45 días a una tasa del 1,5 % para 45 días y finalmente se renueva por 15 días a una tasa del 0,5 % para 15 días. Calcular el capital que se logrará al vencimiento de los 90 días.

SOLUCIÓN

$C_n = 15000\,(1 + 0{,}008)\,(1 + 0{,}015)\,(1 + 0{,}005) = 15423{,}53$

El presente problema plantea un caso de operación de capitalización correspondiente a un sistema de interés compuesto donde para unidades de tiempo variables resultan tasas de interés también variables.

2.1.2. Capitalización compuesta mediante una ley discreta definida por tasas periódicas de interés constantes

Se obtendrá ahora un modelo matemático que permita calcular el valor C_n como el valor final o capitalizado de C_0 en el intervalo $[0;n]$ si para la valoración se fija la siguiente condición: *para unidades de tiempo o períodos iguales las tasas de interés periódicas serán constantes*.

Para lograr lo propuesto sólo basta con reemplazar en la relación deducida anteriormente las tasas variables por una tasa «i» constante resultando

$$C_n = C_0 \ (1 + i)\ (1 + i)\ (1 + i) \ldots (1 + i)$$

y por propiedad del producto de potencias de igual base resulta:

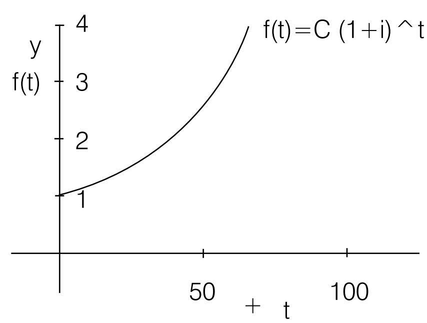
$$C_n = C_0 \ (1 + i)^n$$

El modelo obtenido corresponde al cálculo del valor final o monto cuando se pacta una tasa de interés constante para toda unidad U, y se puede afirmar que toda tasa constante de interés o rendimiento define también una ley de capitalización discreta ya que es posible encontrar el valor capital en los extremos de los períodos en los que se ha dividido el intervalo de valoración.

También, utilizando la definición correspondiente se puede verificar que el interés será:

$$I_n = C_n - C_0$$
$$I_n = C_0 (1 + i)^n - C_0$$
$$I_n = C_0 [(1 + i)^n - 1]$$

Por otro lado debe destacarse que $(1+ i)^n$ *es el factor de capitalización para el plazo total cuando la tasa es constante* y que es una función exponencial con respecto a la variable de capitalización que es el tiempo; como la base es mayor que 1, la misma es creciente y cóncava hacia arriba, como puede verse en la siguiente figura:



También debe tenerse en cuenta que si n permanece constante y varía la tasa, si ésta aumenta el valor final también aumenta ya que se incrementan los intereses, ocurriendo lo contrario si la misma disminuye.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 2

Calcular el monto que producirá un capital de \$ 25 000 colocado a una tasa de interés del 3 % trimestral durante 2 años y medio.

SOLUCIÓN

$C_{10} = 25\,000\,(1 + 0{,}03)^{10} = 33\,597{,}91$

2.1.3. Tasas equivalentes en el interés compuesto

En el capítulo 1 se enunció el concepto de tasas equivalentes de la siguiente manera: *Dos tasas o dos conjuntos de tasas son equivalentes cuando en el mismo plazo generan iguales factores de capitalización y/o de descuento*.

Estamos ahora en condiciones de establecer otras aplicaciones de dicho concepto, a saber:

a) Si se desea conocer la tasa periódica de interés constante equivalente a un conjunto de tasas variables, se plantea la siguiente igualdad:

$$(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,\ldots\,(1 + i_h)\,\ldots\,(1 + i_n) = (1 + i)^n$$

Se suele decir que *la tasa «i» constante del segundo miembro es la tasa media equivalente al conjunto de tasas variables que produce el mismo valor final en el mismo tiempo o que en el mismo plazo genera igual factor de capitalización.* Debe aclararse que se trata de la *media geométrica* que se utiliza en casos en que las variaciones son acumulativas como ocurre en el interés compuesto. El mismo concepto se utiliza cuando se debe calcular una tasa media de inflación.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 3

Calcular la tasa de interés constante para 30 días equivalente al conjunto de tasas propuestas en el problema de aplicación Nº 1 para el plazo de 90 días.

SOLUCIÓN

$(1 + 0{,}008)\ (1 + 0{,}015)\ (1 + 0{,}005) = (1+i_{30})^{90/30} \Rightarrow i_{30} = 0{,}0093246$

La tasa hallada es equivalente ya que si se aplica al capital inicial se obtiene el mismo valor final:

$$C_{90} = 15\,000\ (1 + 0{,}0093246)^{90/30} = 15\,423{,}53$$

b) Si se desea conocer, para el tiempo t, la tasa de interés constante para una cierta unidad de tiempo U equivalente a la tasa de interés constante correspondiente a un subperíodo U´, o viceversa, surge otra relación. Así para dos tasas de interés correspondientes a distintas frecuencias resulta la siguiente igualdad:

$$(1+i_U)^{t/U} = (1+i_{U'})^{t/U'}$$

Puede observarse que al efectuar los correspondientes pasajes de términos, el tiempo representado por «*t*» se simplifica, lo que permite afirmar que cuando la equivalencia se plantea entre dos leyes constantes las tasas resultan equivalentes independientemente del plazo de la operación.

$$(1+i_U) = (1+i_{U'})^{U/U'}$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 4

Calcular la tasa de interés anual equivalente al 3 % para 45 días.

SOLUCIÓN

$(1 + i_{365})^{45/365} = (1 + 0{,}03)^{45/45}$

$(1 + i_{365}) = (1 + 0{,}03)^{365/45} \Rightarrow i_{365} = 0{,}270937$

Se dice que el 0,03 para 45 días y el 0,270937 para 365 días son tasas equivalentes porque resultará indistinto invertir un capital al 3 % para 45 días y renovarlo sucesivamente durante un año, que colocarlo al 27,0937 % durante todo el año.

En estas condiciones, se halla el valor final de un capital inicial de $ 12000, al cabo de 1 año.

$$\left.\begin{array}{l} C_{365} = 12\,000\,(1{,}03)^{365/45} \\ \\ \text{o bien} \\ \\ C_{365} = 12\,000\,(1{,}270937) \end{array}\right\} \quad C_{365} = 15\,251{,}2$$

Puede verse que aplicando las correspondientes tasas a un mismo valor inicial, generan un mismo valor final, como consecuencia de generar iguales factores de capitalización para el mismo plazo.

Es oportuno exponer al lector cómo se aplica esta relación de equivalencia de tasas en la práctica comercial y bancaria. Se sabe que se acostumbra a enunciar la tasa nominal anual y la unidad de tiempo a la cual está referida, correspondiendo entonces calcular proporcionalmente la tasa subperiódica para esa unidad a la cual se capitalizan los intereses.

A partir de ella y considerando lo que en el capítulo 1 se ha dado en llamar la frecuencia de capitalización U/U' o m se calcula la tasa equivalente para el período, resultando de la relación propuesta antes:

$$i_U = (1+i_{U'})^{U/U'} - 1$$

Y si simbolizamos con i a la tasa periódica, e i_m a la subperiódica, como se utiliza en la bibliografía tradicional y que en este material se propone cuando la frecuencia es un número entero m, será:

$$i = (1+ i_m)^m - 1$$

Esta tasa periódica equivalente resultante de capitalizar a la tasa subperiódica, proporcional a la nominal, tantas veces como el subperíodo está contenido en el período, es mayor que la nominal del mismo período y es una tasa efectiva.

Teniendo en cuenta que en la práctica comercial se toma generalmente como período el año, en la divulgación periodística financiera y bancaria aparecen expresiones tales como TNA para indicar la tasa nominal anual y TEA para referirse a la tasa efectiva anual, siendo ésta una tasa equivalente a la tasa del subperíodo. El manejo correcto de ambos conceptos es de mucha importancia para ahorristas y deudores en el momento de tomar decisiones, ya que la tasa nominal es un mero indicador proporcional, mientras que la tasa equivalente informa el rendimiento efectivo implícito en la correspondiente unidad de tiempo.

• *Observación: si se analiza la relación entre tasas nominales y tasas efectivas se puede afirmar que manteniendo una misma tasa nominal, a medida que aumenta la frecuencia de capitalización, aumenta el rendimiento efectivo y por lo tanto se obtienen mayores valores finales.*

Para verificar lo enunciado se brinda el siguiente cuadro comparativo, en el supuesto de anunciar una TNA del 24 % y aplicando $i = (1 + i_m)^m - 1$, se tiene:

Frecuencia		TNA	Cálculo	TEA
Anual	(1)	24 %	$i = (1,24)^1 - 1$	0,24
Semestral	(2)		$i = (1,12)^2 - 1$	0,2544
Trimestral	(4)		$i = (1,06)^4 - 1$	0,262477
Mensual	(12)		$i = (1,02)^{12} - 1$	0,268242

Se observa que sólo cuando la frecuencia de capitalización es igual a uno (U/ U´ = 1) la tasa nominal coincide con la tasa efectiva.

Si se propone realizar el cálculo inverso, o sea, si se busca obtener la tasa nominal anual J_m a partir de la efectiva anual i resulta la siguiente igualdad:

$$J_m = [(1 + \mathrm{i})^{1/m} - 1]\, m$$

A partir de la misma puede observarse que si se mantiene una misma tasa efectiva anual, a medida que crece la frecuencia de capitalización la tasa nominal anual implícita para las sucesivas frecuencias es decreciente.

Así si la TEA es el 18 % se obtiene:

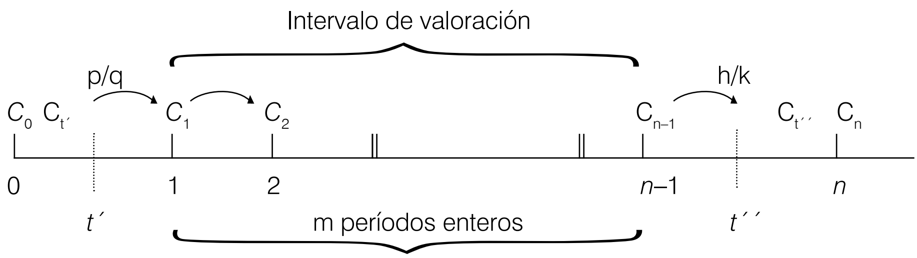
Frecuencia		TEA	Cálculo	TNA
Anual	(1)	18 %	$= [(1,18)^{1/1} - 1] \times 1$	0,18
Semestral	(2)		$= [(1,18)^{1/2} - 1] \times 2$	0,172556
Trimestral	(4)		$= [(1,18)^{1/4} - 1] \times 4$	0,168986
Mensual	(12)		$= [(1,18)^{1/12} - 1] \times 12$	0,166666

2.1.4. Valoración en fracciones de período

Los modelos obtenidos hasta aquí son de aplicación para la valoración en intervalos de tiempo que comprenden un número entero de períodos, para cada uno de los cuales se han fijado las correspondientes tasas de interés.

No obstante, y como suele ocurrir en la práctica, a veces se hace necesaria la valoración en puntos interiores de dichas unidades de tiempo, como ocurre cuando se realiza un depósito después de iniciado el período de capitalización o una extracción antes de finalizado el mismo. En estos casos el intervalo de tiempo considerado contiene fracciones de período.

Para resolver esta cuestión y a los efectos de dar una solución al problema planteado será necesario ampliar las condiciones sustanciales e informar el criterio a adoptar en casos como se grafica a continuación:



Plazo total: $t'' - t' = p/q + m + h/k$ contiene, además de m períodos enteros, una fracción al inicio p/q y una fracción al final h/k.

En estos casos, para evaluar en las fracciones se utilizan dos *convenciones* que se aplican tanto en operaciones de capitalización como de descuento y con tasas de interés o con tasas de descuento. Ellas son la *convención lineal* y la *convención exponencial*.

2.1.4.1. Convención lineal

Implica aceptar que para las fracciones de período, los intereses se calculan proporcionalmente al capital al inicio de la fracción, y a dicha fracción con un coeficiente de proporcionalidad igual a la tasa de rendimiento del período en el que está incluida la fracción. En el caso de haberse fijado para la valoración tasas de interés variables o constantes resulta para la fracción el siguiente factor de capitalización de tipo lineal:

$$(1 + i \times \frac{p}{q})$$

Resultando para el intervalo total $[t'; t'']$, en el caso de ser variables las tasas:

$$C_{t''} = C_{t'}\,(1 + i_1 \times \frac{p}{q})\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,...\,(1 + i_{n-1})\,(1 + i_n \frac{h}{k})$$

Si la tasa fuera constante:

$$C_{t''} = C_{t'}\,(1 + i_1 \frac{p}{q}) \times (1 + i)^m\,(1 + i \frac{h}{k})$$

Puede verse que el cálculo es proporcional sólo y exclusivamente en las fracciones de período, y queda perfectamente mostrado que los intereses se acumulan período tras período para generar nuevos intereses.

2.1.4.2. Convención exponencial

Implica utilizar para las fracciones de período un factor que es función exponencial con respecto al tiempo de capitalización resultando, si las tasas son variables:

$$C_{t''} = C_{t'}\ (1+i_1)^{p/q}\ (1+i_2)\ \ (1+i_3)\ ...\ (1+i_{n-1})\ (1+i_n)^{h/k}$$

O bien para i constante:

$$C_{t''} = C_{t'}\ (1+i)^{p/q}\ (1+i)^{m}\ \ (1+i)^{h/k}\ ,$$

aplicando la propiedad de producto de potencias de igual base, se obtiene:

$$C_{t''} = C_{t'}\ (1 + i)^{p/q+m+h/k}$$

Si la tasa i corresponde a una unidad U:

$$C_{t''} = C_{t'}\ (1 + i_U)^{\frac{[t'-t]}{U}}$$

que no es otra cosa que el factor de capitalización para el plazo total que mantiene la estructura exponencial del modelo del interés compuesto con tasa constante, aun para el tiempo fraccionario.

Adoptar la convención exponencial implica tomar para las fracciones de período una tasa de interés equivalente a la tasa del período en el que está incluida la fracción, manteniendo así el rendimiento previsto para el período.

Para verificar esta afirmación se hará el siguiente supuesto:

U es la amplitud del período y U' la amplitud de la fracción p/q, o sea que

$$U' = \frac{p}{q}U \quad \Rightarrow \quad q\,U' = p\,U;$$

esto permite considerar q períodos U' a la tasa $i_{U'}$ de la fracción y p períodos U a la tasa i_U del período, por lo que si se plantea la equivalencia entre dichas tasas, resulta:

$$(1 + i_{U'})^q = (1 + i_U)^p;$$

siendo

$$(1 + i_{U'}) = (1 + i_U)^{p/q},$$

relación que demuestra que la tasa de la fracción es equivalente a la tasa del período.

Debe destacarse que en nuestro país, por una resolución del Banco Central de la República Argentina, se utiliza la convención exponencial para la resolución de este problema.

2.1.5. Operaciones de capitalización en el regimen de los intereses simples

Se establece ahora como condición sustancial para la valoración de un capital inicial C_0, *una tasa de interés simple para la unidad U* a aplicar en una operación de capitalización a realizarse en un intervalo de tiempo que contiene un número *n* de períodos constantes.

A dicha tasa de interés simple se la simboliza como $i^{(s)}$ *p/U* para distinguirla de la tasa de interés utilizada hasta ahora, ya que, como se probará más adelante, es un simple coeficiente de proporcionalidad que no responde al concepto de tasa de variación relativa del valor capital.

De esta manera, planteando una regla de tres compuesta se dice que si una unidad de capital, en una unidad de tiempo genera un interés igual a $i^{(s)}$, por proporcionalidad directa entre la tasa y el tiempo se concluye que:

$$\begin{array}{llllll} \$\,1 & \rightarrow & 1U & \rightarrow & i^{(s)} \\ \$\,1 & \rightarrow & nU & \rightarrow & i^{(s)} \times n \\ \$\,C_0 & \rightarrow & nU & \rightarrow & C_0 \times i^{(s)} \times n \end{array}$$

donde $C_0 \times i^{(s)} \times n$ es el interés obtenido y resulta proporcional al capital invertido y al tiempo de capitalización con un coeficiente de proporcionalidad igual a $i^{(s)}$.

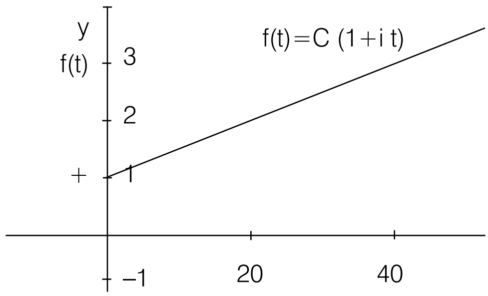
Sabiendo que el valor final o monto de un capital al cabo de un cierto tiempo es la suma del capital inicial más los intereses que en ese tiempo ha producido dicho capital, se tiene que

$$C_n = C_0 + C_0 \times i^{(s)} \times n$$

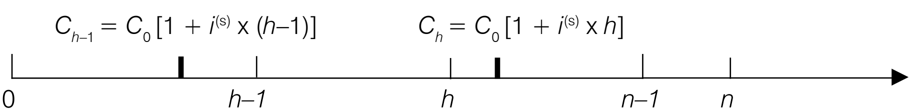
Y sacando factor común, C_0 resulta:

$$C_n = C_0\,(1 + i^{(s)}\,n)$$

En dicha igualdad puede observarse que la expresión $(1 + i^{(s)}\,n)$ constituye el factor de capitalización en el régimen del interés simple, resultando así una función lineal con respecto a la variable tiempo, como puede verse en la siguiente figura:



Para confirmar que la tasa de interés simple no es una tasa de interés indicadora del rendimiento por unidad de capital en unidad de tiempo, bastará con aplicar el concepto de variación relativa del valor capital a partir de conocer los valores del capital colocado a interés simple al inicio y al final de un período cualquiera, por ejemplo, el $h-$ésimo, y obtener de esta forma la expresión de la tasa efectiva para dicho período, a saber:



Capital al inicio del período «*h*»: $C_{h-1} = C_0 [1 + i^{(s)} \text{ x } (h-1)]$
Capital al final del período «*h*»: $C_h = C_0 [1 + i^{(s)} \text{ x } h]$;
y aplicando el concepto de variación relativa:

$$i_h = \frac{C_0 [1 + i^{(s)} \text{ x } h] - C_0 [1 + i^{(s)} \text{ x } (h-1)]}{C_0 [1 + i^{(s)} \text{ x } (h-1)]}$$

Como $C_0 \neq 0$, se puede simplificar en el numerador y denominador y luego operando entre los paréntesis

$$i_h = \frac{1 + i^{(s)} \text{ x } h - 1 - i^{(s)} \text{x } h + i^{(s)}}{1 + i^{(s)} \text{ x } (h-1)]}$$

$$i_h = \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)} \text{ x } (h-1)]}$$

Resulta así el modelo necesario para hallar la tasa efectiva del período «*h*», y que es aplicable a cualquier otro período incluido en el intervalo de valoración.

Esta relación permite interpretar el comportamiento de los rendimientos periódicos en el régimen de los intereses simples. Los mismos son decrecientes a medida que aumenta el número de orden del período de capitalización, o sea, a medida que aumenta el plazo de la operación. Puede observarse que cuanto mayor sea el valor de «h» mayor será el denominador y así, al dividir a la tasa de interés simple $i^{(s)}$ por un valor mayor, resulta, por dicho cociente, una tasa de interés efectiva menor para las sucesivas unidades de tiempo comprendidas en el plazo de valoración. Esto ocurre por la improductividad de los intereses, ya que a la tasa de interés simple pactada, los mismos no se acumulan al capital para generar nuevos intereses. Por este motivo no se aconsejan inversiones a largo plazo con este sistema de interés.

Por otra parte, a este régimen se lo puede asimilar a un sistema de interés compuesto con tasas variables según la relación obtenida antes y así calcular el valor final utilizando las tasas de interés efectivas de la siguiente manera:

$$C_n = C_0\,(1 + i^{(s)})\,\left(1 + \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)}}\right) \ldots \left(1 + \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)}(h-1)}\right) \ldots \left(1 + \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)}(n-1)}\right)$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 5

Supongamos que se realiza una inversión de \$ 10 000 durante 120 días a una tasa de interés simple del 3 % para 30 días. Se solicita:

a) Calcular el capital al vencimiento de la operación y el capital al vencimiento de cada uno de los períodos.

b) Explicar, fundamentando, si la tasa del 3 % para 30 días es efectiva.

SOLUCIÓN

a) $C_{120} = 10\,000 \times (1 + 0{,}03 \times 4) = 11\,200$

\$ 10 000	\$ 10 300	\$ 10 600	\$ 10 900	\$ 11 200
0	1	2	3	4

b) La tasa del 3 % es un coeficiente de proporcionalidad y sólo es efectiva en la primera unidad de tiempo por que es en el único período que se aplica sobre el capital al inicio del mismo, y en los períodos restantes la tasa efectiva decrece de acuerdo a lo afirmado teóricamente y según puede observarse en el siguiente cuadro de marcha de la operación:

Período	Capital inicio	Capital final	Interés	Tasas efectivas
1	10 000	10 300	300	$i_1 = 0{,}030000$
2	10 300	10 600	300	$i_2 = 0{,}029126$
3	10 600	10 900	300	$i_3 = 0{,}028302$
4	10 900	11 200	300	$i_4 = 0{,}027523$

En la tabla se observa también que el interés de cada período es siempre el mismo, y además puede verificarse que es indistinto calcularlo en cualquier período al 3 % sobre el capital al inicio de la operación, o a la tasa efectiva sobre el capital al inicio de cada período, lo que permite, como ya se dijo, asimilarlo a una capitalización compuesta cuyas tasas son variables decrecientes, como se comprueba al hacer:

$$C_{120} = 10\,000 \text{ x } (1 + 0{,}03) \text{ x } (1 + 0{,}029126) \text{ x } (1 + 0{,}028302) \text{ x } (1 + 0{,}027523)$$

$$C_{120} = 11\,200$$

Cada una de las tasas periódicas, además de obtenerse por el concepto de variación relativa, se pueden calcular a partir del modelo deducido para la tasa i_h en el punto anterior. Si se desea comprobar la validez de dicha relación, se aplica para un período cualquiera, por ejemplo, para $h = 3$ y se tiene:

$$i_3 = \frac{0{,}03}{1 + 0{,}03\ (3–1} = 0{,}028302$$

Coincidente con la resultante de hacer:

$$i_3 = \frac{10\,900 - 10\,600}{10\,600} = 0{,}028302$$

2.1.6. Tasas equivalentes con la tasa de interés simple

Si se desea calcular una tasa efectiva para una unidad de tiempo cualquiera, equivalente en un mismo plazo t a una tasa de interés simple para la misma unidad u otra (o equivalencia entre interés compuesto e interés simple), se proponen las siguientes relaciones:

$$(1 + i_u)^{t/u} = (1 + i_u^{(s)} \frac{t}{u})$$

y cuando el plazo contiene n unidades de tiempo: $(1 + i)^n = 1 + i^{(s)}\, n$

En ambas relaciones de igualdad se observa que el tiempo no se puede simplificar, de manera que al despejar se obtiene una relación que financieramente implica que la tasa a calcular depende del plazo en que se realice la operación. Esto permite advertir que cuando se utiliza una misma tasa de interés simple para distintos plazos, resultan tasas efectivas equivalentes distintas.

Es conveniente mencionar que en la bibliografía tradicional se acostumbra a decir que en el interés simple las tasas proporcionales son equivalentes. Esto se debe a que al calcular los intereses proporcionalmente al tiempo y a la tasa de interés simple es indistinto hacerlo con las tasas periódicas o con tasas subperiódicas proporcionales a la periódica ya que se obtiene el mismo valor final.

2.2. Operaciones de descuento en el campo discreto

En este punto se realizarán los análisis y las deducciones necesarias que posibiliten encontrar el modelo matemático para calcular el valor actual de un capital *Cn,* disponible en $t = n$, sometido a una operación de descuento en el intervalo[0; *n*].

Para ello se proponen a continuación las condiciones sustanciales más usuales en la práctica financiera, comercial y bancaria que permitirán encontrar las distintas fórmulas de cálculo, según las pautas establecidas.

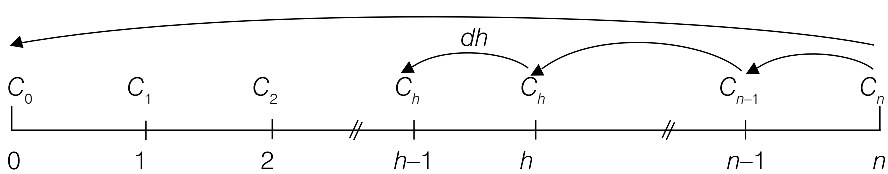
Así también, con el objetivo de facilitar los desarrollos e interpretación de los modelos a obtener, las demostraciones se fundamentarán teniendo en cuenta que el interés y el descuento no son sino dos caras de una misma moneda y que todo factor de capitalización tiene su recíproco que es el descuento o viceversa.

2.2.1. Descuento compuesto mediante una ley discreta definida por tasas periódicas de descuento y de interés variables

Encontraremos el modelo que permita calcular el valor C_0 como el valor actual o valor capital de descuento de C_n en el intervalo [0;n] si se fija como condición sustancial para la valoración de capitales las siguientes tasas periódicas de descuento para los respectivos períodos de descuento, a saber:

$$d_1\, p/U_1;\ d_2\, p/U_2\ ;...;\ d_h\, p/U_n\ ;...;\ d_n\, p/U$$

Gráficamente:



Con esta información se podrá entonces deducir el modelo correspondiente para la valoración del capital con anterioridad a su disponibilidad y calcular el valor en $t = 0$ como así también la obtención del factor de descuento para el plazo total. Para ello debe recordarse que en el capítulo 1 se obtuvo el factor periódico de descuento para el $h-$ésimo subintervalo contado a partir de «0», resultando que:

$$C_{h-1} = C_h\,(1 - d_h)$$

Si ahora se deseara obtener el capital C_{n-1} al inicio del primer período de descuento, en sentido retrospectivo del tiempo, a partir del capital C_n, con idéntico razonamiento se llega a la siguiente igualdad:

$$C_{n-1} = C_n (1 - d_n)$$

De esta forma, por aplicación sucesiva de los factores periódicos de descuento se logra:

$$C_{n-2} = C_{n-1} (1 - d_{n-1}) = C_n (1 - d_n) (1 - d_{n-1})$$

$$C_{n-3} = C_{n-2} (1 - d_{n-2}) = C_n (1 - d_n) (1 - d_{n-1}) (1 - d_{n-2});$$

el valor actual de C_n «*n*» períodos antes de su disponibilidad tiene como modelo el siguiente:

$$C_0 = C_n (1 - d_n) (1 - d_{n-1}) \ldots (1 - d_h) \ldots (1 - d_1)$$

Donde $(1 - d_n) (1 - d_{n-1}) \ldots (1 - d_h) \ldots (1 - d_1)$ *es el factor de descuento para el plazo total o sea para el intervalo* [0; *n*] *ya que es el valor por el cual se debe multiplicar al capital* C_n *para obtener su valor actual* C_0.

Este modelo es el que se obtiene cuando se establece como condición sustancial tasas de descuento variables o flotantes, y al descuento se lo denomina «compuesto» porque la tasa de descuento se aplica retrospectivamente, o sea, desde el vencimiento hasta el momento de calcular el valor actual sobre el capital al inicio del período de descuento, que está disminuido en el descuento practicado en el período anterior.

Por lo desarrollado debe decirse que el conjunto de tasas de descuento propuestas también constituye una ley discreta de valoración porque permite encontrar los valores capitales en los extremos de los períodos en los que se ha partido el intervalo de valoración.

Por otra parte, existe la posibilidad de calcular el valor actual utilizando las tasas de interés, de manera que si consideramos el conjunto de tasas dadas en el punto 2.1.1, por la reciprocidad con el factor de capitalización puede obtenerse el factor de descuento y así, a partir de la relación de valor final con tasas de interés variables, se tendrá el valor actual:

$$C_0 = C_n (1 + i_1)^{-1} (1 + i_2)^{-1} \ldots (1 + i_h)^{-1} \ldots (1 + i_n)^{-1}$$

2.2.2. Descuento compuesto mediante una ley discreta definida por tasas periódicas de descuento y de interés constantes

La propuesta es ahora encontrar el modelo matemático que permita calcular el valor C_0 como el valor actual de C_n en el intervalo [0; n] si para la valoración se fija la siguiente condición: *Para unidades de tiempo o períodos iguales las tasas de interés y de descuento periódicas serán constantes*.

Para lograr el propósito sólo basta con reemplazar en el factor de descuento con tasas de descuento variables del punto anterior por una tasa «d» constante, resultando:

$$C_0 = C_n\,(1 - d)\,(1 - d)\,(1 - d)\,...\,(1 - d);$$

y por la propiedad del producto de potencias de igual base se obtiene:

$$C_0 = C_n\,(1 - d)^n$$

El modelo obtenido corresponde al cálculo del valor actual cuando se pacta una tasa de descuento constante para toda unidad U y $(1 - d)^n$ *es el factor de descuento con tasa de descuento constante.*

También es posible verificar que el descuento en el intervalo [0; n] será:

$$D_n = C_n - C_0 = C_n - C_n\,(1 - d)^n$$

$$D_n = C_n\,[\,1 - (1 - d)^n\,]$$

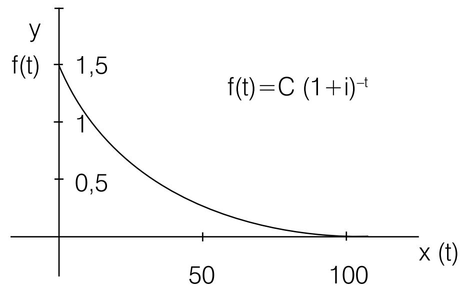
Además, y de acuerdo a lo visto en el punto anterior, si se suponen tasas de interés constantes, puede calcularse el valor actual de la siguiente manera:

$$C_0 = C_n\,(1 + i)^{-n}\text{; y}$$

$$D_n = C_n - C_n\,(1 + i)^{-n}$$

$$D_n = C_n\,[\,1 - (1 + i)^{-n}\,]\text{ es el descuento.}$$

Por otro lado, debe destacarse que $(1 + i)^{-n}$ es el factor de descuento para el plazo total con tasa de interés constante, y que es una función exponencial con respecto a la variable de capitalización, decreciente y convexa según la siguiente figura:



También debe tenerse en cuenta que la función «valor actual» es decreciente con respecto a la tasa, ya que si la misma aumenta también aumenta el descuento y por lo tanto disminuye el valor actual.

• *Observaciones:* es conveniente aquí señalar dos:

a) El descuento compuesto (racional o comercial) visto en este punto es muy poco utilizado en las operaciones comerciales a corto plazo, y menos aún con el uso de tasas variables. De los factores obtenidos para evaluar capitales con anterioridad a su disponibilidad es muy importante el de la forma $(1 + i)^{-n}$ por su aplicación en el ámbito de actuación del contador para la toma de decisiones en la teoría de inversión tal como se verá mas adelante.

b) Una aclaración muy relevante es con respecto al uso de distintas denominaciones para referirse al concepto de descuento. En efecto, se acostumbra a decir que el descuento es racional o matemático cuando para su cálculo se aplican tasas de interés sobre el valor actual, y se habla de descuento comercial cuando el mismo resulta de la aplicación de tasas de descuento (o adelantadas) sobre el valor nominal. Este autor sugiere no hacer distinciones ya que el concepto de descuento es único y sólo existen métodos de cálculo que implican el uso de tasas distintas que, si son equivalentes, arrojan el mismo resultado.

2.2.3. Tasas equivalentes en el descuento compuesto

Incorporados estos nuevos temas y sentado el concepto de equivalencia de tasas, se pueden proponer nuevas aplicaciones del mismo, por ejemplo:

a) Calcular la tasa media de descuento constante equivalente a un conjunto de n tasas de descuento variables para períodos constantes:

$$(1 - d)^n = (1 - d_1) \ \dots \ (1 - d_h) \ \dots \ (1 - d_{n-1}) \ (1 - d_n)$$

b) Calcular la tasa de descuento constante para una cierta unidad U equivalente a una tasa de interés constante para otra unidad U´, o viceversa resulta:

$$(1-d_U)^{t/U} = (1+i_{U'})^{-t/U'}$$

En esta igualdad, si ambas tasas están referidas a una misma unidad de tiempo para obtener una u otra, se aplicarán las siguientes relaciones ya expuestas en el capítulo 1:

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d}$$

c) Calcular la tasa de descuento para una unidad U equivalente a otra de descuento correspondiente a una unidad U´:

$$(1-d_U)^{t/U} = (1-d_{U'})^{t/U'}$$

Cabe aclarar que cuando se enuncia una tasa nominal de descuento para un período cualquiera correspondiente a una frecuencia de capitalización subperiódica, al igual que lo establecido con las nominales de interés, se debe determinar la de descuento para el subperíodo mediante un cálculo proporcional. Si luego se desea conocer la tasa de descuento para el período, se plantea la relación de equivalencia anterior.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 6

Sabiendo que se necesita evaluar un capital de $ 20000 tres meses antes de su disponibilidad, y que para ello las partes han convenido fijar tasas de descuento mensuales variables para cada uno de los meses comprendidos en el plazo, siendo las respectivas tasas: 3 %; 3,5 % y 4,5 %. Se solicita:

a) Calcular el valor actual del capital.

b) Determinar la tasa de descuento constante mensual equivalente a las tasas variables y su correspondiente de descuento anual.

c) Calcular la tasa de interés mensual equivalente a la de descuento mensual determinada en b.

Solución

a) $C_0 = 20000\ (1-0{,}03)\ (1-0{,}035)\ (1-0{,}045) = 17878{,}55$

b) $(1-d)^3 = (1-0{,}03)\ (1-0{,}035)\ (1-0{,}045) \Rightarrow d = 0{,}036687$

$1-d_{anual} = (1-0{,}036687)^{360/30} \Rightarrow d_{anual} = 0{,}361429$

c) $i = \dfrac{0{,}036687}{(1-0{,}036687)} = 0{,}0380842$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 7

Para operaciones de descuento, un banco de plaza anuncia una tasa nominal anual de descuento del 21 % para una frecuencia de 45 días.

Se solicita:

a) Calcular la tasa de descuento a aplicar para una operación a 45 días.

b) Si para el mismo plazo se desea aplicar tasa de interés, ¿cuál es la tasa nominal anual de interés que debería publicarse manteniendo las condiciones sustanciales iniciales?

c) Calcular la tasa efectiva anual de descuento a partir de la tasa efectiva de interés para 45 días.

Solución

a) $d_{45} = \dfrac{0{,}21 \text{ x } 45}{365} = 0{,}025890$

b) $i_{45} = \dfrac{0{,}025890}{(1 - 0{,}025890)} = 0{,}026579$; por lo tanto la TNA de interés para 45 días, será:

$j_{45} = 0{,}0265793 \text{ x } \dfrac{365}{45} = 0{,}215585$; o bien $\text{TNA}_{45} = 21{,}55$ %

c) $1 - d_{365} = (1 + i_{45})^{-365/45}$

$1 - d_{365} = (1 + 0{,}026579)^{-365/45}$

$d_{365} = 1 - 0{,}808342$

$d_{365} = 0{,}191658$

2.2.4. Operaciones de descuento en el régimen simple

Al tratar las operaciones de capitalización, cuando se establece como condición sustancial una tasa de interés simple, en el punto 2.1.5., se obtuvo como valor final:

$$C_n = C_0\,(1 + i^{(s)}\,n)$$

Donde la expresión entre paréntesis constituye el factor de capitalización en el régimen del interés simple y como ya se ha expresado repetidamente, todo factor de capitalización tiene su recíproco de descuento, por lo tanto si se quiere calcular el valor actual en esas condiciones corresponde hacer:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i^{(s)}n)}$$

o bien,

$$C_0 = C_n\,(1 + i^{(s)}n)^{-1}$$

por lo tanto el descuento será:

$$D_{[0;n]} = C_n - \frac{C_n}{(1 + i^{(s)}n)}$$

$$D_{[0;n]} = C_n \left(1 - \frac{1}{(1 + i^{(s)}n)}\right)$$

A este descuento se acostumbra denominarlo *descuento racional* o *matemático*, siendo una forma particular de cálculo que utiliza para ello una tasa de interés, en este caso una tasa de interés simple.

En cambio, se lo denomina *descuento comercial simple* cuando se fija una tasa de descuento para la unidad *U* como un coeficiente de proporcionalidad que se aplica sobre el valor nominal, y el cálculo se realiza en forma proporcional a ese valor y al tiempo. Para obtener los modelos correspondientes se simboliza con $d^{(s)}$ a la tasa de descuento simple, resultando:

$\$\,1 \rightarrow 1U \rightarrow d^{(s)}$
$\$\,1 \rightarrow nU \rightarrow d^{(s)} \times n$
$\$\,C_n \rightarrow nU \rightarrow C_n \times i^{(s)} \times n$

Donde $C_n \times d^{(s)} \times n$ es el descuento comercial simple, que por ser el más sencillo de todos en cuanto a su forma de cálculo, es el más utilizado en la práctica comercial.

Para obtener el valor actual se hace

$$C_0 = C_n - C_n \times d^{(s)} \times n$$

y se obtiene

$$C_0 = C_n\,(1 - d^{(s)}\,n)$$

En este modelo se debe cumplir una condición *para que la operación de descuento no pierda sentido financiero.* Puede observarse que cuando $d^{(s)} \times n$ es igual a 1 se anula el valor actual, hecho que puede ocurrir en el corto plazo cuando las tasas son muy elevadas o cuando el vencimiento del documento fuera de muy largo plazo. Si $d^{(s)} \times n$ fuera superior a 1 el valor actual sería negativo y significaría que el titular del documento al descontarlo, además de no recibir suma alguna, debería pagar una diferencia. Para que ello no ocurra debe ser:

$$1 - d^{(s)} \times n > 0$$
$$d^{(s)} \times n < 1$$
$$d^{(s)} < 1/n$$

es decir que la tasa de descuento simple tiene que ser menor a $1/n$ para que no anule el capital, o expresado de otra manera, el número de períodos debe ser menor a $1/d^{(s)}$.

Habiendo desarrollado los dos tipos de descuento simple, puede plantearse una nueva relación de equivalencia de tasas entre la de descuento simple y la de interés simple, a saber:

$$\frac{1}{1 + i^{(s)}n} = 1 - d^{(s)}n$$

de donde al despejar se tiene:

$$i^{(s)} = \frac{d^{(s)}}{1 - d^{(s)}n} \quad y \quad d^{(s)} = \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)}n}$$

• *Observación importante:* Si a partir del modelo de cálculo del descuento racional visto antes:

$$D_{[0;n]} = C_n \left(1 - \frac{1}{(1 + i^{(s)}n)}\right)$$

operando convenientemente se logra:

$$D_{[0;n]} = C_n \times \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)}n} \times n$$

y reemplazando por el valor $d^{(s)}$ obtenido en el punto anterior se llega a:

$$D_{[0;n]} = C_n \times d^{(s)} \times n$$

que no es otra cosa que el descuento comercial. Esto demuestra que si se cumple la relación de equivalencia entre las tasas $i^{(s)}$ y $d^{(s)}$ es indistinto el cálculo de una forma u otra. Por este motivo, y como ya se ha dicho, se sostiene que es innecesario dar distintas denominaciones a los descuentos.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 8

Para calcular el valor actual de un pagaré de \$ 13 500 que vence dentro de 120 días, se ha aplicado una tasa de descuento comercial simple del 36,50 % anual. Se solicita:

a) Calcular el valor actual y el descuento.

b) Calcular la tasa de interés simple anual equivalente a la de descuento simple.

c) Verificar que resulta indistinto el cálculo del descuento aplicando una u otra tasa sobre los valores capitales correspondientes.

Solución

a) $C_0 = 13\,500\ (1 - 0{,}365\ \frac{120}{365}) = 11\,880 \Rightarrow D = 13\,500 - 11\,880 = 1620$

b) $i^{(s)}_{anual} = \dfrac{0{,}365}{1 - 0{,}365\ \frac{120}{365}} = 0{,}4147727$

c) $D = 13\,500 \times 0{,}3650 \times \frac{120}{365} = 1620$

$D = 11\,880 \times 0{,}4147727 \times \frac{120}{365} = 1620$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 9

Dos empleados de una financiera han calculado el valor actual de un pagaré que vence en 180 días. Uno lo hizo aplicando descuento comercial simple y el otro descuento racional simple. Si la tasa aplicada en ambos casos es 0,018 para 30 días y han arribado a un valor actual que difiere en \$ 368,45, se solicita:

a) ¿Cuál es el valor nominal del pagaré?

b) Determinar el valor máximo que puede alcanzar una tasa de descuento comercial simple para 30 días para que en el plazo de 180 días no anule el valor actual.

Solución

a) VA Dto. Rac. – VA Dto. Com. = 368,45

$X\ (1 + 0{,}018 \times 6)^{-1} - X\ (1 - 0{,}018 \times 6) = 368{,}45$

$X = 35\,000$

b) $d^{(s)} < \frac{1}{6} \Rightarrow d^{(s)} = 0{,}1666667$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 10

A continuación se propone un problema que muestra una operación de descuento en la práctica bancaria:

Un banco otorga un préstamo de \$ 5000 a sola firma con vencimiento a los 122 días. En el comprobante de la operación que recibe el cliente figura que la tasa nominal anual es el 54,80 %, la tasa efectiva mensual el 5,1 % y que el monto de los intereses que le deducen el día del otorgamiento es de \$ 915,84. A los efectos de mostrar e interpretar la operatoria, se solicita:

a) Identificar la operación pactada.

b) Verificar si la TEM (tasa de interés para 30 días) es la que resulta de la operación.

c) Obtener la tasa de descuento o adelantada para 30 días aplicada al caso en cuestión.

d) Verificar si los intereses reclamados son correctos aplicando la tasa obtenida en b y c.

e) Justificar cómo procede el banco para llegar a la tasa nominal publicada.

f) Formular consideraciones con respecto al sentido financiero de la aplicación de tasa adelantada y el cobro de intereses anticipados.

Solución

a) Es un préstamo que se concreta a través de una operación de descuento.

b) Tiempo de descuento: 122 días.

Valor Actual: $5000 - 915{,}84 = 4084{,}16$

$$C_0 = 5000\,(1 + 0{,}051)^{-122/30} = 4084{,}16$$

Por lo tanto se aplica la tasa pactada.

c) $d_{30} = \dfrac{0{,}051}{1 + 0{,}051} = 0{,}048525$

d) Intereses: $5000\,[1 - (1 + 0{,}051)^{-122/30}] = 915{,}84$;

o Intereses: $5000\,[1 - (1 - 0{,}048525)^{122/30}] = 915{,}84$

e) La tasa nominal anual publicada es una tasa nominal de descuento correspondiente al plazo de la operación, que es de 122 días, y se obtiene de la siguiente manera:

Primero se debe buscar la tasa de descuento efectiva para 122 días:

$$1 - d_{122} = (1 - 0{,}048525)^{122/30} \;\Rightarrow\; d_{122} = 0{,}183137$$

Luego se busca la nominal proporcional a aquélla:

$$\text{TNA} = 0{,}183137 \times \frac{365}{122} = 0{,}5480 \text{ o } 54{,}80\ \%$$

Conocida esta tasa, que responde a la tasa efectiva vencida prefijada para 30 días y que el banco transcribe en tablas previamente construidas, el cálculo de los intereses es inmediato y sencillo:

$$\text{Intereses: } 5000 \times 0{,}5480 \times \frac{122}{365} = 915{,}84$$

Esta forma de cálculo sencilla hace aparecer el descuento de una manera tal que se lo confunde con el descuento comercial simple.

f) Los intereses anticipados constituyen un método de cálculo que no responde al sentido financiero del interés ya que el mismo se genera por el transcurso del tiempo y no se produce en forma espontánea. Carece de sentido hablar de intereses anticipados dado que es una arbitrariedad manifiesta, ya que los intereses deben ser vencidos y exigibles luego del uso y goce de un capital y además incoherente con el concepto de operación financiera como intercambio no simultáneo de capitales. Es una forma de cálculo engañosa, ya que en realidad se recibe o se da una suma menor, para luego devolver o percibir al vencimiento un capital que incluye el interés efectivo como lo demuestra el ejercicio práctico propuesto.

2.3. Valoración de las operaciones financieras simples en condiciones de inestabiliad monetaria

En los puntos anteriores se han evaluado las operaciones financieras simples en distintas condiciones substanciales y bajo el supuesto de estabilidad monetaria. Ahora se propone la valoración con un patrón moneda de poder adquisitivo cambiante. Los modelos obtenidos siguen teniendo validez porque constituyen la base para realizar las correcciones incorporando a ellos los conceptos correspondientes, y entonces hacer un análisis financiero válido cuando se producen variaciones en la unidad de moneda considerada para la valoración.

En el capítulo 1, puntos 1.8 y 1.9 se han introducido los conceptos de tasa de inflación y tasa real y se obtuvo el factor periódico de corrección monetaria. A partir de esos temas se efectuarán las consideraciones necesarias para poder realizar la valoración en un contexto de inestabilidad monetaria cuando el plazo contiene más de una unidad de tiempo.

Para ello se debe tener en cuenta que las tasas de inflación registran una variación continua, con un comportamiento acumulativo, similar a una tasa de interés efectiva, ya que el incremento de precios en un período se aplica sobre el precio del período anterior. Además son variables, ya que en términos relativos no permanecen constantes. Por otro lado debe observarse que las operaciones financieras son prospectivas, por lo que para comparar en el tiempo valores capitales expresados en un patrón moneda en constante pérdida de capacidad adquisitiva, se deberá recurrir a correcciones que utilicen una tasa de inflación correctamente calculada o aceptablemente estimada.

Es así que para cuantificar el fenómeno inflacionario se utilizan indicadores llamados «índices» que resumen precios de conjuntos de bienes y/o servicios, o cantidades de moneda necesarias para adquirir esos bienes y/o servicios. Las técnicas para la elaboración de los mismos las provee la Estadística por lo que este trabajo no se ocupará de analizar su construcción. Generalmente se utilizan índices del tipo Laspeyres, que expresan los valores de las cantidades Q adquiridas en el período base a los precios P del período h al cual se desea efectuar la corrección, con relación a su valor a los precios del período base, o sea:

$$I_{[0;h]} = \frac{\text{n}Q_0 P_h}{\text{n}Q_0 P_h}$$

Con respecto a los números índices debe tenerse en cuenta para su mejor interpretación algunas cuestiones, a saber: las razones que motivaron que un determinado año se tomara como base; que son ponderaciones que no permiten apreciar las variaciones generales de un conjunto económico; que ninguno es perfecto ni sirven para todo; que la información que brindan depende de la fuente que lo elabora, entre otras.

Al momento de escribir este material el índice vigente en nuestro país es el Coeficiente de Estabilización de Referencia conocido como CER y es elaborado por el INDEC.

Si se acepta que I denota el índice considerado y debe efectuarse una corrección monetaria entre dos fechas cualesquiera, por ejemplo, $t´$ y t'' siendo $t´ < t''$, el factor para corregir un capital disponible en $t´$ y expresarlo en moneda del momento t'', será:

$$1 + F_{[t´;t´´]} = \frac{I_{t´´}}{I_{t´}}$$

y la tasa de inflación para el mismo plazo

$$F_{[t´;t´´]} = \frac{I_{t´´} - I_t}{I_t}$$

Por otro lado, si se quiere determinar la tasa real en una operación financiera simple se aplicará el modelo conocido:

$$(1 + \text{i}) = (1 + \text{r})\ (1 + \text{F})$$

Expresión en la que las tasas deben estar referidas a una misma unidad de tiempo.

Si las tasas de inflación tienen un comportamiento variable, es conveniente, en una operación que contiene *n* unidades de tiempo, calcular la tasa de inflación constante para luego incorporarla en el modelo anterior. La misma se calcula aplicando la media geométrica como se dijo al desarrollar el tema de equivalencia de tasas:

$$(1 + F_1)\,(1 + F_2)\,...\,(1 + F_h)\,...\,(1 + F_n) = (1 + F)^n$$

Con lo expuesto hasta aquí se está en condiciones de evaluar operaciones financieras simples en un contexto inflacionario. Los dos problemas más frecuentes que pueden presentarse son:

a) que conocida la variación en los precios haya que ajustar los capitales;

b) que definida la operación financiera y determinados los ingresos y egresos deba calcularse la tasa real de rendimiento implícita en el intercambio.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 11

Se prevé realizar un depósito a plazo fijo indexado de acuerdo a un determinado índice de precios. Dicho depósito de $ 20 000 se efectúa por 120 días y la tasa nominal anual para esa frecuencia de capitalización es del 5 % a aplicar sobre el capital ajustado, y se sabe que el índice de precios a la fecha de inicio es 1,03486 y a la fecha de finalización 1,29778.

Se solicita:

a) Calcular el capital a retirar el día del vencimiento.

b) Determinar la tasa de inflación resultante para el lapso de los 120 días y su correspondiente tasa media constante para 30 días.

c) Calcular la tasa efectiva anual aparente que debería anunciarse para que resulte indistinto invertir a esa tasa o mantener las condiciones iniciales.

Solución

a) $J_{\left(\frac{365}{120}\right)} = 0{,}05$

Debe destacarse que siendo el 0,05 una tasa nominal anual a partir de la cual se obtendrá la tasa para 120 que se aplicará sobre el capital ajustado la tasa resultante será real.

$$r_{120} = 0{,}05\ \frac{120}{365} = 0{,}016438$$

$C_{120} = 20\,000 \dfrac{1{,}29778}{1{,}03486} \times 1{,}016438 = 25\,493{,}5$

b) $F_{120} = \dfrac{1{,}29778}{1{,}03486} - 1 = 0{,}254063$; por lo que

$F_{30} = (1{,}254063)^{30/120} - 1 = 0{,}05823$

c) Partiendo de $(1 + ia) = (1 + f)\ (1 + r)$; tenemos que:

$(1 + i_{a120}) = (1 + 0{,}254063)\ (1 + 0{,}016438)$

$i_{a120} = 0{,}274677$ para 120 días y su equivalente anual será:

$i_{a365} = (1 + 0{,}274677)^{365/120} - 1 = 1{,}092148$ ó 109,2148 %

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 12

Un banco tiene que anunciar una tasa nominal anual aparente para ofrecer operaciones de crédito a 30 días. Para determinar la misma debe tener en cuenta las siguientes premisas:

–Prever una tasa de inflación anual del 22 %.

–Asegurarse una tasa real para 30 días del 1 %.

Se solicita:

a) Calcular la tasa de interés aparente para 30 días que debería cobrar el banco.

b) Calcular la TNA que debe publicitar en función de lo propuesto.

c) Calcular la tasa efectiva anual aparente resultante.

Solución

a) $(1 + F_{30})^{365/30} = 1{,}22$

$F_{30} = 0{,}0164782$

$(1 + i_a) = (1{,}0164782)\ (1+0{,}01)$

$i_a = 0{,}0266430$

b) $\text{TNA} = 0{,}0266430 \times \dfrac{365}{30}$

$\text{TNA} = 0{,}3241565$

c) $(1 + ia_{(365)}) = (1{,}0266430)^{365/30} \Rightarrow ia(365) = 0{,}3770$

2.4. Valoración de capitales mediante leyes continuas

En la introducción de esta unidad se dejó pautado que al final se trataría la valoración de capitales en el campo continuo. Para ello será necesario definir como condición sustancial para todo punto del intervalo de valoración la *tasa instantánea de rendimiento*.

2.4.1. Ecuación diferencial del rédito

Para obtener la ecuación diferencial del rédito debe tenerse en cuenta la expresión de esta tasa instantánea conforme a lo visto en el Capítulo 1:

$$p(t) = \frac{d(lnC_t)}{dt} \qquad \text{con} \quad \rho(t) > 0$$

$P^{(t)}$ es una medida indicadora de la fuerza del crecimiento del valor capital en operaciones de capitalización y del decrecimiento en operaciones de descuento.

Además, siendo

$$p_{(t)} = \frac{C_{t'}}{C_t}$$

puede escribirse C'_t utilizando la notación práctica a partir de la expresión analítica de la diferencial:

$$p_{(t)} = \frac{dC_t}{dt} \times \frac{1}{C_t}$$

resultando la ecuación:

$$dC_t = C_t \times p_{(t)} \times dt$$

Esta última es conocida como la *ecuación diferencial del rédito* porque permite encontrar un valor aproximado del rédito producido por el capital C_t en un intervalo infinitésimo d_t en función de la tasa instantánea.

Observando esta ecuación puede concluirse que:

El rédito es proporcional al tiempo *dt* con un coeficiente de proporcionalidad igual a la tasa instantánea y que el mismo se origina sobre el capital al inicio del intervalo infinitésimo considerado, el cual tiene acumulado los réditos generados por el capital C_0 hasta el momento *t* y los generados en ese intervalo se acumulan a *Ct* para producir nuevos intereses en el instante siguiente. Esto permite afirmar que la esencia del interés es compuesto porque la capitalización se produce en forma continua.

2.4.2. Fórmula general de capitalización y descuento

Interpretando la ecuación diferencial del rédito como indicadora del interés en un intervalo infinitésimo, se puede pensar en la posibilidad de determinar el rédito total para el intervalo [0; *n*] . Para ello se recurre al cálculo integral.

Integrando en ambos miembros en la ecuación diferencial del rédito, se tiene:

$$\int_0^n dC_t = \int_0^n C_t \times p_{(t)} \times dt$$

Al resolver el primer miembro resulta:

$$\int_0^n dC_t = C_t \Big|_0^n \Rightarrow C_n - C_0 = I_{[0;n]}$$

que es el interés para el plazo total.

Por otra parte, retomando la ecuación diferencial y siendo $C_t \neq 0$

$$\frac{dC_t}{C_t} = \rho(t)dt$$

e integrando en ambos miembros

$$\int_0^n \frac{dC_t}{C_t} = \int_0^n \rho(t) \times dt$$

donde el primer miembro de la igualdad se puede resolver, pero no así el segundo, puesto que depende de la expresión analítica que tome la tasa instantánea $\rho^{(t)}$ debiendo cumplir la condición de ser una *función positiva e integrable*. Operando convenientemente se obtiene:

$$\int_0^n d(lnC_t) = \int_0^n p(t) \times \mathrm{dt} \quad \Rightarrow \quad lnC_t \Big|_0^n = \int_0^n p(t) \times \mathrm{dt}$$

por lo tanto:

$$lnC_t - lnC_0 = \int_0^n p(t) \times dt$$

aplicando propiedad de logaritmos:

$$\ln\frac{Cn}{C_0} = \int_0^n p(t) \times dt$$

y para finalizar, por definición de logaritmo neperiano se tiene que:

$$\frac{Cn}{C_0} = e^{\int_0^n \rho(t) \times dt}$$

$$Cn = C_0 e^{\int_0^n \rho(t) \times dt}$$

De esta manera queda determinado el valor final C_n adquirido por el capital inicial C_0 en el intervalo $[0;n]$ en función de la tasa instantánea de rendimiento que define una *ley de capitalización continua*.

En la igualdad hallada, la expresión $e^{\int_0^n \rho(t) \times dt}$ constituye el factor de capitalización para el plazo total ya que permite calcular el valor en $t = n$ de cada unidad de capital disponible en $t = 0$.

Por otro lado, sabiendo que todo factor de capitalización tiene su recíproco que es el factor de descuento, se podrá aplicar para el cálculo del valor actual la siguiente relación:

$$C_0 = C_n e^{-\int_0^n \rho(t) \times dt}$$

Los modelos de valoración obtenidos permiten calcular los valores finales y actuales previa definición de la operación financiera mediante la tasa instantánea de rendimiento, y según el tipo de función positiva e integrable que se le asigne a $\rho(t)$ se tendrán los sistemas particulares de capitalización.

2.4.3. Sistemas particulares de capitalización en el campo continuo

Como se ha visto en este capítulo, existen dos sistemas de uso corriente en la práctica comercial y bancaria y ellos son, para nombrarlos como generalmente se los menciona, el interés compuesto a tasa constante y el interés simple. De este modo, según la expresión analítica que tome $\rho(t)$ definirá sendas leyes de capitalización.

2.4.3.1. Valoración a una tasa instantánea constante

Si para la valoración de capitales con posterioridad o anterioridad a su disponibilidad se le asigna a la tasa instantánea un valor constante al que se simboliza con δ, y sabiendo que debe ser positivo, resulta una ley de capitalización con validez en el intervalo de valoración $[0;n]$ siendo que $0 \leq t \leq n$, o sea que:

$$\rho(t) = \delta \ \text{ y } \delta > 0$$

si se reemplaza en el factor general, y siendo $\rho(t)=\delta$ que es una constante por propiedad de integrales, resulta:

$$C_n = C_0 e^{\int_0^n \delta dt}$$

$$C_n = C_0 e^{\delta \int_0^n dt} \quad \Rightarrow \quad C_n = C_0 e^{\delta \times t \Big|_0^n} \quad \Rightarrow \quad C_n = C_0 e^{\delta n}$$

Queda así determinado el valor final C_n adquirido por el capital inicial C_0 en el intervalo $[0;n]$ en función de la tasa instantánea de rendimiento, cuando la misma tiene una fuerza o intensidad constante. Por otra parte, teniendo nuevamente en cuenta la reciprocidad de los factores de capitalización y descuento, podrá calcularse el valor actual de la siguiente manera:

$$C_0 = C_n e^{-\delta . n}$$

2.4.3.2. Relación entre la ley continua a tasa instantánea constante y el interés compuesto a tasa periódica constante

Recordando que la tasa instantánea es la derivada de la función capital sobre la misma función sin derivar, y que la función capital por unidad de moneda en el interés compuesto con tasa periódica constante es $(1+i)^t$, haciendo:

$$\rho(t) = \frac{D\,(1+i)^t}{(1+i)^t}$$

Y teniendo presente que la derivada de una función exponencial es igual a la función por el ln de la base:

$$\rho(t) = \frac{(1+i)^t \ \ln(1+i)}{(1+i)^t}$$

Simplificando resulta:

$$\rho(t) = \ln (1+i)$$

que es un número constante y positivo.

A su vez, si se aplica el concepto de equivalencia entre leyes se tiene:

$$e^{\delta n} = (1+i)^n$$
$$\ln e^{\delta} = \ln (1 + i)$$
$$\delta \ln e = \ln (1 + i) \quad \text{y como el } \ln e = 1$$

$$\delta = \ln (1 + \mathrm{i})$$

Con lo expuesto se justifica que resulta indistinto evaluar un capital en el campo discreto a una tasa periódica «i» o hacerlo en el campo continuo a una tasa instantánea «δ» si las mismas son equivalentes.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 13

Sabiendo que se coloca un capital de $ 1200 a 120 días a una tasa instantánea constante para 30 días del 2 %, se solicita:

a) Calcular el capital al vencimiento.

b) Calcular la tasa de interés periódica equivalente a la tasa instantánea.

c) Verificar que utilizando la tasa de interés periódica se obtiene el mismo valor final.

Solución

a) $C_{120} = 1200 \times e^{0{,}02 \times \frac{120}{30}}$

$C_{120} = 1299{,}94$

b) $(1 + i_{30})^4 = e^{0{,}02 \times 4}$

$(1 + i_{30})^4 = 1{,}083287$

$i_{30} = 0{,}020201$

de donde se deduce que es $i = e^{\delta} - 1$

c) $C_{120} = 1200 \text{ x } (1 + 0{,}020201)^4$

$C_{120} = 1299{,}94$

2.4.3.3. Valoración a una tasa instantánea decreciente: ley continua de capitalización simple

Si ahora para la valoración de capitales con posterioridad o anterioridad a su disponibilidad se define a la tasa instantánea con la siguiente función:

$$\rho(t) = \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)}t}$$

reemplazando en el factor general de capitalización queda:

$$C_n = C_0 e^{\int_0^n \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)}t} dt}$$

y aplicando la derivada logarítmica de la función y resolviendo la integral:

$$C_n = C_0 e^{\int_0^n d[ln(1 + i^{(s)}t)]}$$

$$C_n = C_0 e^{ln(1 + i^{(s)}t\big|_0^n}$$

$$C_n = C_0 e^{ln(1 + i^{(s)}n) - ln(1 + i^{(s)}0)}$$

y como el ln 1 = 0

$$C_n = C_0 e^{ln(1 + i^{(s)}n)} \qquad \text{y} \qquad e^{ln(1 + i^{(s)}n)} = 1 + i^{(s)}n$$

resulta:

$$C_n = C_0 \,(1 + i^{(s)}\, n)$$

que corresponde al valor final expresado con el factor de capitalización en el interés simple visto al tratar la valoración en el campo discreto.

1. Una empresa metalúrgica obtiene de un banco un préstamo de $ 15 000 que se formaliza mediante la firma de un documento por ese monto con vencimiento a 120 días pactándose una tasa nominal anual de interés anticipado del 32 % para esa frecuencia de 120 días. En el día del otorgamiento le acreditan el monto resultante de descontar los intereses correspondientes y un 3% en concepto de gastos varios.

Se solicita:

1.a) Calcular el monto a acreditar por el banco.

1.b) Determinar la tasa nominal anual de interés vencido para la frecuencia de 120 días que debería publicitarse para que sea equivalente a la pactada.

1.c) Calcular tasa implícita para 30 días resultante para el deudor en la operación de préstamo dada.

1.d) Calcular la tasa real para 30 días indicadora del costo para el deudor si en los sucesivos períodos de 30 días que duró la operación se registraron las siguientes tasas de inflación: 0,7 %; 0,9 %; 1,2 % y 0,8 %.

Solución

1.a)

$$\alpha_{365} = 0{,}32 \;\Rightarrow\; \alpha_{120} = 0{,}32 \times \frac{120}{365} = 0{,}105205$$

Gastos: 15 000 x 3 % = 450

$$C_0 = 15\,000 \times (1 - 0{,}105205) - 450$$
$$C_0 = 12\,971{,}91$$

1.b)

$$(1 + i_{120}) = (1 - \alpha_{120})^{-1}$$
$$(1 + i_{120}) = (1 - 0{,}105205)^{-1}$$
$$i_{120} = 0{,}117575$$

$$\Rightarrow TNA_{120} = 0{,}117575 \times \frac{365}{120} = 0{,}357624$$

1.c)

$$15\,000 \times (1 + x)^{-4} = 12\,971{,}91$$
$$1 + x = (12\,971{,}91)^{1/4} \Rightarrow x = 0{,}036983$$

1.d)

$$(1 + i_a)^4 = (1 + i_r)^4 \times (1 + f_{[0;120]})$$
$$1{,}036983^4 = (1 + i_r)^4 \times \{(1{,}007) \times (1{,}009) \times (1{,}012) \times (1{,}008)\}$$

$$(1 + i_r)^4 = \frac{1{,}156343}{1{,}036482}$$

$$i_r = 0{,}0277351$$

2. Un ahorrista está analizando un corte de la hoja resumen de su caja de ahorros, según el siguiente detalle:

Fecha	Concepto	Débitos	Créditos	Saldo
18/10/06	Depósito en efectivo		20 300,00	20 300,00
01/11/06	Acreditación de intereses		24,89	20 324,89
01/11/06	Mantenimiento de cuenta	5,00		20 319,89
01/12/06	Acreditación de intereses		41,28	20 361,17
01/12/06	Mantenimiento de cuenta	5,00		20 356,17

Se sabe que la entidad acredita los intereses y debita los gastos a la 0 (cero) hora del primer día del mes siguiente al de su devengamiento.

Se pide:

2.a) Calcular las tasas efectivas anuales para cada uno de los meses de octubre y noviembre que aplicó el banco para determinar los intereses.

2.b) Calcular la tasa implícita en los meses de octubre y noviembre respectivamente.

2.c) Si la tasa de inflación para el mes de noviembre es del 0,9 % ¿Cuál ha sido el rendimiento real obtenido ese mes?

Solución

2.a)

Mes de octubre (para 13 días):

$$i_{13} = \frac{20\,324{,}89 - 20\,300}{20\,300} = 0{,}001226 \Rightarrow i_{365} = (1 + 0{,}001226)^{365/13} - 1 = 0{,}035002$$

Mes de noviembre:

$$i_{30} = \frac{20\,361{,}17 - 20\,319{,}89}{20\,319{,}89} = 0{,}002031 \Rightarrow i_{365} = (1 + 0{,}002031)^{365/30} - 1 = 0{,}024998$$

2.b)

Para octubre:

$$(1 + x_{13}) = \frac{20\,319{,}89}{20\,300} = 1{,}000979 \Rightarrow x_{13} = (1{,}000979)^{30/13} - 1 = 0{,}002262$$

Para noviembre:

$$(1 + x_{30}) = \frac{20\,356{,}17}{20\,319{,}89} = 1{,}001785 \Rightarrow x_{30} = 0{,}001785$$

2.c)

$(1 + i_r) \text{ x } (i + f) = (1 + i_a)$

$(1 + i_r) \text{ x } (i + 0{,}009) = 1 + 0{,}001785$

$i_r = -0{,}00715$

3. Un inversor depositó \$ 33 000 en una entidad que capitaliza los intereses a una tasa de interés constante cada 30 días, obteniendo al finalizar el plazo la suma de \$ 38 269,88. Se sabe que los intereses del último período fueron de \$ 933,41. Se solicita a Ud. que calcule:

3.a) La tasa de interés efectiva para 30 días pactada.

3.b) El plazo total de la operación.

3.c) La tasa efectiva de interés anual equivalente a la obtenida en el punto 3. a.

Solución

3.a)

$C_{n-1} = C_n - I_{[n-1;n]}$

$C_{n-1} = 38\,269{,}88 - 933{,}41$

$C_{n-1} = 37\,336{,}47$

$\Rightarrow C_n = C_{n-1} \text{ x } (1 + i_{[n-1;n]})$

$38\,269{,}88 = 37\,336{,}47 \text{ x } (1 + i_{[n-1;n]})$

$i_{[n-1;n]} = 0{,}025$

3.b)

$38\,269{,}88 = 33\,000 \text{ x } (1 + 0{,}025)^{n/30}$

$1{,}1596933 = (1 + 0{,}025)^{n/30}$

$log 1{,}1596 = \frac{n}{30} \, log 1{,}025$

$n = 180$ días

3.c)

$i_{365} = (1 + 0{,}025)^{365/30} - 1$

$i_{365} = 0{,}350435$

• PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Un matrimonio hace un año realizó una inversión de \$ 10 000 en un banco que le ofrecía dos alternativas:

a) plazo fijo ajustable por CER por un plazo mínimo de un año con pago de intereses sobre el capital ajustado;

b) plazos fijos tradicionales.

Ante esta situación el esposo optó por el plazo fijo ajustable colocando \$ 5000 a un año a una tasa nominal anual para esa frecuencia del 3 %, y la esposa colocó \$ 5000 en un plazo fijo tradicional durante el plazo de un año con una renovación semestral a una tasa nominal anual del 12,50 % correspondiente a una frecuencia semestral. Se solicita:

1.a) Calcular la suma que recibió el esposo si el índice a la fecha de la colocación fue 2,5892 y al vencimiento 2,8447. R: 5658,20.

1.b) Verificar si en estas condiciones el esposo logra la rentabilidad mínima anual garantizada por el banco que, a moneda heterogénea, es el 12 % efectivo. R: supera ese rendimiento y obtiene el 13,1639.

1.c) Calcular la suma que al final del año recibió la esposa si al momento de renovar el capital y los intereses ganados al vencimiento del primer semestre le dedujeron el 1 % de sellado provincial sobre el monto renovado. R: 5638,89.

1.d) Obtener la tasa nominal anual a publicitar por el banco si en la inversión realizada por la esposa la frecuencia de capitalización hubiera sido mensual. R: 12,1218 %.

2. Se ha realizado un depósito a plazo fijo indexado de acuerdo al índice de precios al consumidor proporcionado por el INDEC. Dicho depósito de $100 000 se efectuó a 180 días y la tasa nominal anual pactada fue del 3 % para la frecuencia de 180 días, a aplicar sobre el capital ajustado. Se sabe que los índices de precios fueron, a la fecha de inicio, 2,8447, y a la fecha de finalización, 2,9789.

Se solicita:

2.a) Calcular el capital a retirar el día del vencimiento. R: 106 266,79.

2.b) Determinar la tasa de inflación resultante para el lapso de los 180 días y su correspondiente tasa media equivalente para 30 días. R: 4,7175 % y 0,77123 %.

2.c) Luego de realizada la inversión lo consultan a usted a los efectos de analizar el resultado si el banco en que efectuó el depósito hubiera indexado con el IPEC– Santa Fe. Al indagar sobre la información correspondiente usted observa que para las mismas fechas los índices fueron, al inicio 304,20 y al vencimiento 343,20. Si la tasa pactada fuera la misma, se le solicita determinar la diferencia resultante en la tasa aparente para 180 días. R: 8,22451 % diferencia en los 180 días.

2.d) Calcular la tasa de interés efectiva para 30 días que debería obtener el inversor para que en el plazo de los 180 días pueda lograr el mismo resultado que si se hubiera utilizado como índice de ajuste el IPEC-Santa Fe, en una operación sin indexación. R: 2,28431.

3. Un comerciante está pensando en adquirir bienes de uso para su negocio, cuyo precio de contado es, en el día de la fecha, de $ 50 000 y tiene las siguientes alternativas:

a) realizar la compra de contado, en el día de la fecha;

b) postergar la compra por 120 días y durante este tiempo depositar dicha suma:

b.1) en una cuenta de ahorro al 14,6 % nominal anual de interés con capitalización cada 30 días, o

b.2) en un plazo fijo ajustado, estimando que la tasa de inflación se mantendrá en el 0,8 % para 30 días y que obtendrá un rendimiento real del 0,5 % cada 30 días.

Se solicita:

3.a) Calcular el valor que obtendría en cada una de las alternativas dadas en **b)**. R: b. 1) 52 443,54 y b. 2) 52 659,46.

3.b) Si se estima que dentro de 120 días los bienes de uso que necesita costarán $ 52 500: determinar la tasa de variación relativa de precios para 30 días que se estima sufrirá el valor de los bienes de uso. R: 1,227223 %.

3.c) Suponiendo que el comerciante opta por la alternativa **b.2)**, determinar el interés a moneda heterogénea y el interés a moneda homogénea resultantes de dicha operación. R: 2659,46 y 1040,16.

4. Suponiendo que en el sistema bancario se permiten constituir depósitos ajustables de acuerdo a un índice financiero resultante de aplicar una media geométrica de las tasas de interés para 30 días pagadas por una entidad oficial y sabiendo que las vigentes en las fechas que a continuación se detallan son:

01/03 al 15/03 2,0 % p/30 días
16/03 al 20/03 1,8 % p/30 días
21/03 al 31/03 2,2 % p/30 días
01/04 al 17/04 1,9 % p/30 días
18/04 al 30/04 1,4 % p/30 días

4.a) Determinar la tasa media del mes de marzo y la tasa media del mes de abril. R: 2,10727 % y 1,68303 %.

4.b) Elaborar el índice de ajuste correspondiente al 31/03 y al 30/04 si el índice al 28/02 es 100. R: I31/03: 102,10727 e I30/04 : 103,825766.

4.c) Si se realiza un depósito ajustable de acuerdo a ese índice por una suma de $ 30 000 el 01/03 y se retira el 01/05, siendo la tasa nominal anual de interés del 15 % para una frecuencia de capitalización de 30 días, calcular el capital a percibir al vencimiento. R: 31 933,53.

CAPÍTULO 3
Equivalencia de capitales. Aplicaciones en el análisis de inversión

Antes de abordar el concepto de *equivalencia de capitales* es necesario decir que para el tratamiento de este tema debe hacerse la introducción a las operaciones financieras complejas. El mismo supone siempre el intercambio de varios capitales por uno o varios por varios. Por este motivo, primero se aportarán las técnicas que faciliten la valoración de conjuntos de capitales para luego aplicarlas en la equivalencia de los mismos.

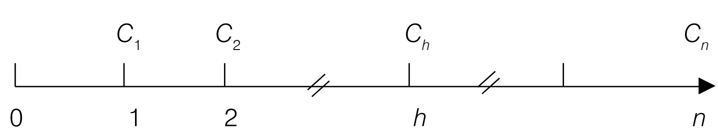
3.1. Valoración de un conjunto de capitales

Un conjunto de capitales *es una sucesión de fondos o cantidades disponibles o exigibles conforme a una sucesión de tiempos*.

En el lenguaje de la Matemática Financiera se lo llama genéricamente Rentas y su valoración se basa en los conocimientos adquiridos al estudiar las operaciones financieras simples.

En la actividad profesional del contador se presentan muchos problemas que requieren el conocimiento de técnicas para cuantificar dichos conjuntos, por ejemplo: valoración de flujos de caja, evaluación de proyectos de inversión, constitución de capitales, amortización de préstamos, son algunos de los tantos casos de aplicación.

En un gráfico temporal lo podemos representar de la siguiente manera:



Estos capitales pueden ser todos ingresos o todos egresos, o bien, algunos ingresos y otros egresos, por lo que en este caso deberán representarse con distintos signos.

Para evaluarlos es necesario saber que *valor de un conjunto de capitales en un momento dado es igual a la suma de los valores que dichos capitales tienen en ese momento de acuerdo a las condiciones de valoración fijadas o pactadas.*

Simbólicamente:

$$V_t = V_t^{(1)} + V_t^{(2)} + \dots + V_t^{(h)} + \dots + V_t^{(n)}$$

El conjunto de capitales propuesto está evaluado en un mismo momento «*t*». Puede ocurrir que dicho momento sea:

- anterior a todos los vencimientos → el valor será la suma de valores actuales o de descuento;
- posterior a todos los vencimientos → el valor será la suma de valores finales o capitalizados;
- intermedio a todos los vencimientos → el valor será la suma de valores finales por un lado y actuales por el otro.

En la práctica profesional del contador, el valor que más se considera es el primero de los mencionados ya que para hacer análisis de inversión es necesario evaluar los flujos futuros de fondos que los distintos proyectos u opciones implican.

Con respecto a las condiciones de valoración, las mismas pueden ser cualquiera de las condiciones substanciales conocidas y estudiadas en la unidad anterior; pero por las consecuencias sobre los resultados en la cuantificación de los capitales podría hacerse una clara distinción, similar a la propuesta por la profesora Blanca N. Quirelli en su libro *La valoración dinámica de capitales*.

• *Que la valoración se realice en una única ley de capitalización:* esto ocurre cuando se evalúa en interés o descuento compuesto, o cuando se fijan tasas de interés o de descuento constantes o variables aplicando en cada período la mima tasa.

• *Que la valoración se realice en distintas leyes de capitalización:* es el caso en que la valoración se realiza a una tasa de interés simple o de descuento simple o cuando en un mismo período se aplican distintas tasas de interés o descuento.

Así como se destacó que lo más usual es el cálculo del valor actual de los conjuntos de capitales es conveniente mencionar que por la índole de los valores que el contador o el licenciado en administración debe determinar en su profesión la condición substancial más utilizada en la práctica es la tasa de interés constante. Esto se debe a que en el mercado financiero cuando se habla de tasa de corte, tasa de oportunidad, tasa de retorno o tasa sobre saldos, siempre se refieren a la tasa de interés vencido. Como consecuencia de ello el factor de descuento a aplicar sobre cada flujo que más se usa en la disciplina de la administración financiera es $(1 + i)^{-t}$.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 1

Para modernizar equipos de trabajo una PyME prevé realizar una inversión de capital al cabo de la cual efectuará la adquisición de los mismos. Para ello deposita en la fecha $ 2500, 60 días más tarde $ 3000, y 90 días después de efectuado el depósito anterior $ 3200. Dichos depósitos fueron efectuados en una entidad que anuncia el 6,935 % nominal anual de interés para una frecuencia de capitalización por cada 30 días.Se solicita calcular la suma lograda a los 180 días de la fecha.

Solución

Este problema propone el cálculo del valor final de un conjunto de capitales con tasa de interés constante.

$$i_{30} = \frac{0{,}06935 \,.\, 30}{365} = 0{,}0057$$

$$V_{180} = 2500\,(1 + 0{,}0057)^{6} + 3000\,(1 + 0{,}0057)^{4} + 3200\,(1 + 0{,}0057)$$

$$= 2586{,}7277 + 3068{,}9871 + 3218{,}24$$

$$= 8873{,}95$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 2

Supóngase que el 16/10 de un determinado año un comerciante posee tres cheques diferidos por los siguientes importes y vencimientos, a saber:

$ 1200 con vencimiento el 31/10
$ 1500 con vencimiento el 15/11
$ 1700 con vencimiento el 10/12

Ante la necesidad de efectivo concurre a un banco de nuestro medio para negociarlos y le acreditan en su cuenta corriente, sin considerar gastos adicionales, el importe resultante de aplicar una tasa de descuento comercial simple para 30 días del 2,5 %. Se solicita calcular el valor acreditado.

Solución

Este problema propone el cálculo de valor actual de un conjunto de capitales con tasa de descuento comercial simple.

$$V_{16/10} = 1200\ (1 - 0{,}025 \times \frac{15}{30}) + 1500\ (1 - 0{,}025) + 1700\ (1 - 0{,}025 \times \frac{55}{30})$$

$$V_{16/10} = 1185 + 1462{,}50 + 1622{,}08$$

$$V_{16/10} = 4269{,}58$$

3.2. Valor de un conjunto de capitales en función de su valor en otro punto

Con respecto a este tema hay total coincidencia entre los distintos autores sobre las consecuencias resultantes de aplicar en la valoración de capitales, interés y descuento compuesto o interés y descuento simple. La diferencia entre ellos es la manera de expresar sus conclusiones. Algunos hablan del libre desplazamiento de capitales en el interés compuesto y no así en el interés simple; otros hablan de infinitos puntos de equivalencia en el interés compuesto y de un único punto en el interés simple; hay quienes sostienen que en el interés compuesto la equivalencia se puede plantear en cualquier momento mientras que en el interés simple el planteo sólo es válido en el momento de origen.

José López Urquía (1996:78) dice: «en régimen de capitalización compuesta la operación de calcular el valor de un capital en otro momento, se designa brevemente por "desplazamiento del capital en el tiempo" y se efectúa "capitalizando" (...) si el desplazamiento se hace a un tiempo posterior, o "descontando" (...) si el desplazamiento tiene lugar un tiempo anterior».

Oscar Murioni y Angel A. Trossero (2005:158), con respecto a la valoración en interés compuesto, expresan: «si tenemos varios capitales, una vez determinado el monto en cierto momento (...) no es necesario tratarlos como varios capitales, sino que su monto total puede llevarse a otro momento anterior o posterior con una simple multiplicación por el factor de actualización o capitalización como si se tratara de un capital único».

Mario Atilio Gianneschi (2005:79) describe que «en el interés simple o el descuento comercial, capitales que son equivalentes según sus valores actuales, no lo son si el momento de referencia cambia; en otras palabras, compromisos de pago que hoy resultan equivalentes, dejan de serlo mañana, cuando hemos cambiado la fecha de valuación. En el interés compuesto, continuo o discontinuo, se verifica que si los capitales tienen igual valor actual, son iguales en cualquier otro momento de referencia».

Teniendo en cuenta la distinción en las condiciones de valoración propuestas en el punto 3.1 de este capítulo, o sea, valorar en una única ley o en distintas leyes, este autor coincide con la interpretación que sobre este tema hace Blanca Quirelli (3), porque luego de una extensa demostración de sus proposiciones concluye con una síntesis que resume las ponencias expuestas antes, diciendo: «Si para la valoración de un conjunto de capitales (sea formado por uno o varios capitales) se fija una y sólo una ley de capitalización (discreta o continua), el valor de dicho conjunto en un punto *t”* puede obtenerse a partir de su valor en otro punto *t´*, multiplicando a este último valor, por el factor *F(t´; t”)* correspondiente a la ley dada».

Resumiendo se puede concluir diciendo que *conocido el valor de un conjunto de capitales en un momento dado, se puede hallar su valor en otro momento aplicando el correspondiente factor de capitalización o de descuento, según corresponda, si y sólo si la valoración se realiza en una única ley de capitalización o sea con tasas efectivas que no se superpongan en un mismo período*.

Aceptar esta conclusión significa que si la valoración se realiza en distintas leyes, como sucede cuando se evalúa con tasas de interés o descuento simple al capitalizar o descontar el valor de un conjunto de capitales en un punto, no se obtiene el mismo resultado que si se desplazan cada uno de los capitales que lo componen, excepto que la valoración se realice en el origen de la operación.

A continuación se verificarán estas conclusiones con un ejercicio práctico.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 3

Como resultado de un microemprendimiento se estima obtener en el corto plazo las siguientes utilidades: 12 000, 14 000 y 15 000 al final del primero, segundo y tercer mes respectivamente. Por razones de índole contable se desea evaluar las mismas en el día de la fecha tomando para ello las tasas que se le exige al proyecto, a saber: para el primer mes una tasa de interés del 4 %, para el segundo mes una tasa de interés del 4,3 % y para el tercer mes el 5 %. A estos efectos se solicita:

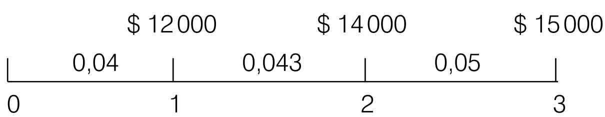
a) Calcular el valor de las utilidades en el día de la fecha.

b) Si por razones contables fuera necesario calcular el valor de las utilidades al final del tercer mes, calcular dicho valor y verificar las conclusiones teóricas obtenidas.

c) Determinar el valor en t = 50 días (1 2/3 meses) aplicando el concepto de valor de un conjunto de capitales a un momento dado, por equivalencia con el valor actual y por equivalencia con el valor final.

Solución

Si se realiza el gráfico temporal:



a)

$V_0 = 12\,000 \times (1{,}04)^{-1} + 14\,000 \times (1{,}043)^{-1} \times (1{,}04)^{-1} + 15\,000 \times (1{,}05)^{-1} \times (1{,}043)^{-1} \times (1{,}04)^{-1}$

$V_0 = 37\,614{,}97$

b) Si se aplica el concepto de valor de un conjunto a un momento dado, en este caso al final del 3er mes:

$V_3 = 12\,000 \times (1{,}043) \times (1{,}05) + 14\,000 \times (1{,}05) + 15\,000$

$V_3 = 42\,841{,}80$

Si se capitaliza el valor en $t = 0$ se obtiene el mismo valor final:

$V_3 = 37\,614{,}97 \times (1{,}04) \times (1{,}043) \times (1{,}05)$

$V_3 = 42\,841{,}80$

c) Aplicando el concepto de valor de un conjunto a un momento dado:

$V_{50} = 12\,000 \times (1{,}043)^{2/3} + 14\,000 \times (1{,}043)^{-1/3} + 15\,000 \times (1{,}05)^{-1} \times (1{,}043)^{-1/3} = 40\,233{,}11$

Por equivalencia con el valor actual:

$V_{50} = 37\,614{,}97 \times (1{,}04) \times (1{,}043)^{2/3} = 40\,233{,}11$

Por equivalencia con el valor final:

$V_{50} = 42\,841{,}80 \times (1{,}05)^{-1} \times (1{,}043)^{-1/3} = 40\,233{,}11$

De esta manera se verifica que en el interés compuesto, conocido el valor de un conjunto de capitales a un momento dado, se puede obtener su valor en cualquier otro momento.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 4

Resolver el problema anterior considerando para la valoración de las utilidades una tasa de interés simple del 5 % mensual y responder sólo los puntos a) y b).

a) $V_0 = 12\,000\ (1{,}05)^{-1} + 14\,000\ (1 + 0{,}05 \times 2)^{-1} + 15\,000\ (1 + 0{,}05 \times 3)^{-1}$

$V_0 = 11428{,}57 + 12\,727{,}27 + 13\,043{,}48$

$V_0 = 37\,199{,}25$

b) Si se aplica el concepto de valor de un conjunto a un momento dado, en este caso al final del 3er mes:

$V_3 = 12\,000\ (1 + 0{,}05 \times 2) + 14\,000\ (1{,}05) + 15\,000$

$V_3 = 13\,200 + 14\,700 + 15\,000$

$V_3 = 42\,900$

Si se capitaliza el valor en $t = 0$ no se obtiene el mismo valor final:

$V_3 = 37\,199{,}25\ (1 + 0{,}05 \times 3) = 42\,779{,}14$

3.3. Equivalencia entre conjuntos de capitales

Este concepto de gran aplicación en el uso de las finanzas y en la práctica del contador ya ha sido utilizado sin que se haya mencionado expresamente, dado que las operaciones financieras simples implican un intercambio equitativo entre dos conjuntos que son unitarios. Así también, en este capítulo, al evaluar un conjunto de capitales resulta un intercambio equitativo entre ese conjunto y el valor único al momento de su valoración.

Cuando se quiere cambiar un flujo de fondos por otro y se debe mantener la equidad de las contraprestaciones entre acreedores y deudores, refinanciar deudas sin que ninguna de las partes intervinientes se perjudique, o determinar la equidad entre los ingresos y los egresos de una inversión se emplea este concepto, a saber: Dos conjuntos de capitales son financieramente equivalentes en un momento dado, si y sólo si en las condiciones de valoración fijadas, sus respectivos valores en ese momento son iguales.

Cuando esto se verifica resultará indistinto disponer de un conjunto o del otro.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 5

Un comerciante debe cumplir con el pago de tres facturas cuyos importes y vencimientos son:

$ 1380 a 30 días fecha

$ 1700 a 45 días fecha

$ 2000 a 90 días fecha

Hoy, propone a su proveedor entregarle dos cheques de igual monto a 75 y 120 días; él acepta con la condición de pactar la refinanciación a una tasa de interés del 3 % para 30 días. Se solicita calcular el importe de cada uno de los valores.

• *Solución*

$1380\,(1 + 0{,}03)^{-1} + 1700\,(1+0{,}03)^{-1{,}5} + 2000\,(1 + 0{,}03)^{-3} = C\,[(1 + 0{,}03)^{-2{,}5} + (1 + 0{,}03)^{-4}]$

$1339{,}80 + 1626{,}27 + 1830{,}28 = C\,(0{,}9287673 + 0{,}8884870)$

$C = 2639{,}34$

Conviene aclarar que, tratándose de una valoración con tasa efectiva en interés compuesto, el planteo se podría realizar en cualquier otro momento y se obtendría el mismo resultado.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 6

Un profesional obtuvo de un banco un préstamo por el cual firmó dos documentos, uno de \$ 3200 con vencimiento a 3 meses y otro de \$ 4600 con vencimiento a 6 meses. Para la determinación del valor a acreditarles en su cuenta en la fecha del otorgamiento, el banco aplicó una tasa de descuento comercial simple del 48 % anual. Cuando transcurrieron 2 meses el profesional concurre al banco a solicitar reemplazar sus vencimientos por un pago de \$ 3000 a 2 meses de esta fecha y otro a 6 meses. Se pide:

a) Calcular el valor que le acreditaron el día del otorgamiento.

b) Calcular el valor del documento que debería entregar a los 8 meses de solicitado el préstamo si el banco aplica en esta refinanciación la tasa pactada originalmente.

Solución

a) $V_0 = 3200\,(1 - 0{,}48 \times \frac{3}{12}) + 4600\,(1 - 0{,}48\,\frac{6}{12})$

$V_0 = 6312$

b) En este punto hay que observar que, tratándose de una valoración con tasa de descuento simple, los resultados serán distintos según el momento de valoración. Por este motivo y dado que el reemplazo se propone a los 2 meses de iniciada la operación, corresponde plantear en esa fecha ya que en otra arrojaría otro valor. Por lo tanto, de acuerdo al enunciado del problema y conforme a las conclusiones antes obtenidas se sugiere calcular el valor actual a la fecha del reemplazo.

$$3200\,(1 - 0{,}48\,\frac{1}{12}) + 4600\,(1 - 0{,}48\,\frac{4}{12}) = 3000\,(1 - 0{,}48\,\frac{2}{12}) + C\,(1 - 0{,}48\,\frac{6}{12})$$

$$3072 + 3864 = 2760 + C \times 0{,}76$$

$$C = 5494{,}74$$

3.4. Capital único equivalente a varios otros. Vencimiento común y vencimiento medio

Dos problemas que se resuelven aplicando el concepto de equivalencia de capitales son los de vencimiento común y vencimiento medio. Los dos consisten en reemplazar varios capitales (generalmente documentos comerciales) por uno solo, respetando el principio de equidad financiera, de manera que el valor actual del capital único deberá ser igual a la suma de los valores actuales de los otros evaluados en las condiciones pactadas por las partes intervinientes. El vencimiento de este capital único es conocido como *vencimiento común* que se define como *el tiempo que debe transcurrir a partir del momento en que se plantea la equivalencia para que un capital único equivalente a varios otros sea exigible.*

Particularmente se lo llama vencimiento medio cuando el capital único que sustituye a los otros es igual a la suma de éstos:

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_h + \dots + C_n$$

La resolución de problemas radicará en determinar el valor del capital único o su vencimiento aplicando distintas condiciones substanciales.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 7

Sean tres documentos: uno de \$ 6800 con vencimiento a 40 días, otro de \$ 12 000 con vencimiento a 90 días y un tercero de \$ 8000 con vencimiento a 130 días. En el día de la fecha se decide reemplazarlos por uno solo con vencimiento a 150 días evaluando a una tasa de interés simple del 2 % para 30 días. Calcular el valor nominal del nuevo documento.

Solución

En este problema el vencimiento común es 150 días, mientras que la incógnita será determinar el capital único que en esa fecha mantiene la equivalencia:

$$VN\left(1+0{,}02\,\frac{150}{30}\right)^{-1} = 6800\left(1+0{,}02\,\frac{40}{30}\right)^{-1} + 12\,000\left(1+0{,}02\,\frac{90}{30}\right)^{-1} + 8000\left(1+0{,}02\,\frac{130}{30}\right)^{-1}$$

$$VN \times 0{,}90909 = 6623{,}38 + 11\,320{,}75 + 7361{,}96$$

$$VN = 27\,836{,}73$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 8

Se adeudan dos documentos, uno de los cuales es de $ 2800 y vence en el día de hoy. El segundo, de $ 4500 vence dentro de 75 días. A tales efectos se le presenta al deudor la alternativa de reemplazarlos por un único documento en una fecha que represente el vencimiento medio sabiendo que para la refinanciación se aplica descuento comercial compuesto con actualización cada 15 días a la tasa de descuento nominal anual del 18,25 %. Se solicita calcular el vencimiento del documento único.

Solución

$d = 0{,}1825 \times 15/365$

$2800 + 4500\,(1 - 0{,}0075)^{75/15} = (2800 + 4500)\,(1 - 0{,}0075)^{t/15}$

$0{,}977228 = 0{,}9925^{t/15}$

$t \cong 46$ días aprox.

3.5. Aplicación del concepto de equivalencia de capitales en el análisis de inversión: valor actual neto y tasa interna de retorno

Toda inversión lleva implícita una serie de flujos monetarios representados por costos o egresos y beneficios o ingresos, y el problema fundamental que se presenta en toda decisión de invertir consiste en evaluar dichos flujos y determinar la rentabilidad del proyecto.

La Matemática Financiera, a través de los conceptos y procedimientos vistos en este capítulo, provee las herramientas necesarias para efectuar el análisis correspondiente para establecer si un proyecto es conveniente económicamente y en caso de existir varias alternativas determinar el orden de preferencia.

De los criterios o métodos utilizados para determinar la conveniencia cuantitativa de un proyecto existen dos muy frecuentes y tradicionales que se basan en técnicas de la Matemática Financiera: Valor Actual Neto (VAN) o Valor Presente Neto (VPN) y Tasa Interna de Retorno (TIR).

3.5.1. Valor actual neto

Valor Actual Neto (VAN) o Valor Presente Neto (VPN) es la diferencia entre el valor actual de los ingresos futuros y el valor actual de los egresos previstos calculados a una tasa de interés representativa del rendimiento esperado.

La tasa que se utiliza para descontar es una tasa de interés vencido y es constante, y confirmando lo que se dijo antes, en el análisis de inversión el factor de descuento más utilizado a aplicar sobre cada flujo futuro de fondos es de la forma $(1 + i)^{-t}$. A dicha tasa se la suele denominar *coste de oportunidad del capital*. Se la llama así porque es la rentabilidad a la que se renuncia para invertir en el proyecto.

Con este criterio debe elegirse aquellas inversiones cuyo valor actual neto sea positivo, ya que esto significa que se incrementa la riqueza, y ante varias alternativas de inversión con resultados positivos se debe preferir aquellas cuyo VAN sea mayor.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 9

Dadas las inversiones propuestas en el cuadro y considerando que la tasa de interés periódica esperada es el 7 %, se desea conocer el VAN de cada una de las inversiones y el orden de preferencia de las mismas.

Proyecto	**Desembolso Inicial**	**Flujos Netos de Caja**					
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
A	(8000)	6000	4000	3000			
B	(10 000)	5000	7000				
C	(10 000)		(2000)			9000	17 000
D	(6000)	3000	3200				

Solución

Proyecto **A**

$\text{VAN} = -8000 + 6000\,(1 + 0{,}07)^{-1} + 4000\,(1 + 0{,}07)^{-2} + 3000\,(1 + 0{,}07)^{-3}$

$\text{VAN} = 3550{,}12$

Proyecto **B**

$\text{VAN} = -10\,000 + 5000\,(1 + 0{,}07)^{-1} + 7000\,(1 + 0{,}07)^{-2}$

$\text{VAN} = 786{,}96$

Proyecto **C**

$\text{VAN} = -10\,000 - 2000\,(1 + 0{,}07)^{-2} + 9000\,(1 + 0{,}07)^{-5} + 17\,000\,(1 + 0{,}07)^{-6}$

$\text{VAN} = 5997{,}82$

Proyecto **D**

$\text{VAN} = -6000 + 3000\,(1 + 0{,}07)^{-1} + 3200\,(1 + 0{,}07)^{-2}$

$\text{VAN} = -401{,}25$

A la empresa le conviene realizar las tres primeras inversiones porque le aseguran un VAN positivo. Esto significa que la inversión le devuelve el capital, le asegura el rendimiento previsto y le proporciona además un excedente. Sin embargo, no debe aceptar el Proyecto D ya que al ser negativo significa que los ingresos no son suficientes para recuperar la inversión a la tasa de oportunidad esperada.

Entonces, el orden de preferencia de estos proyectos es el siguiente:

Proyecto de Inversión	Valor Capital	Orden de preferencia
A	3550,12	2
B	786,96	3
C	5997,82	1

A este criterio del VAN se le atribuye la *ventaja* de tener en cuenta los diferentes vencimientos de los flujos de caja disponibles en diferentes momentos homogeneizados a la fecha de inicio, sirviendo para indicar si la inversión aumenta o no el valor de la empresa. Por otra parte se le cuestiona la *dificultad* de encontrar la tasa requerida y adecuada para evaluar un proyecto.

3.5.2. Tasa interna de retorno

Es muy frecuente que las empresas en lugar de calcular el valor actual neto prefieran determinar si la rentabilidad del proyecto es superior o inferior al coste de oportunidad y para ello se sugiere aplicar el criterio de la *tasa interna de retorno* que se define como: «*la tasa de interés vencido constante para la unidad de tiempo en que se efectúa la valoración que hace que al momento inicial el conjunto de ingresos sea equivalente al conjunto de egresos, o bien la tasa que hace igual a cero el VAN*».

Si en el problema anterior se propone calcular la TIR correspondiente a cada uno de los proyectos, se plantean entonces las mismas ecuaciones donde la incógnita será la tasa de interés.

Proyecto de Inversión	TIR	Orden de preferencia
A	33,496 %	1
B	12,321 %	3
C	15,575 %	2
D	2,19 %	4

Como puede observarse, los criterios del VAN y de la TIR se apoyan en supuestos diferentes y miden aspectos distintos de la inversión.

Para decidir si se realiza o no un proyecto de inversión se sugiere tener en cuenta estos dos criterios, sabiendo que:

- *El criterio del VAN*: hay que invertir en todo proyecto con VAN positivo si los flujos se descuentan a la tasa de coste de oportunidad del capital.

• *El criterio de la TIR*: hay que invertir en todo proyecto que ofrezca una tasa de rentabilidad mayor a la tasa de costo de oportunidad del capital.

VAN y TIR son dos formas de determinar la conveniencia o no de una inversión. Dichos conceptos se relacionan de tal manera que cuando el VAN disminuye es porque la TIR aumenta. Además, por definición de TIR, se sabe que ésta aparece cuando la tasa de valoración anula el VAN; entonces, cuando la tasa de oportunidad es menor que la TIR, el VAN resulta positivo, y si la tasa de oportunidad es mayor que la TIR, el VAN es negativo.

Estudios recientes revelan que un alto porcentaje de empresas utilizan tanto el VAN como la TIR para evaluar los proyectos, pero se aplican otros criterios que no son objeto de esta disciplina ya que se estudian en otras ramas de las ciencias económicas. El objetivo de este punto es mostrar la aplicación práctica de la equivalencia de capitales y facilitar herramientas y conceptos de la Matemática Financiera para ser utilizados en otras asignaturas.

3.5.2.1. Otras aplicaciones del concepto de tasa interna de retorno

Además de su aplicación en la teoría de la inversión es muy importante el rol que la TIR tiene en diversas operaciones financieras. Frecuentemente, las entidades que se dedican a la toma y colocación de fondos anuncian la tasa de interés para operaciones de inversión o de crédito sin considerar la incidencia de los gastos inherentes a toda operación. También existen comercios que ofrecen tasas engañosas para financiar la venta de sus productos originando confusión en los consumidores. En todos estos casos es muy útil la determinación de la tasa que contempla los ingresos y egresos efectivamente realizados. Esta tasa no es otra que la TIR; en el caso particular de créditos bancarios se la suele mencionar como el costo financiero total.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 10

Un cliente compra en una casa de artículos de vestir, una camisa cuyo precio de contado es de $ 100. El vendedor le ofrece como alternativa que podría hacer una entrega de $ 40 al momento de comprar la prenda, y dos cuotas de $ 35, una a los 30 y otra a los 60 días de la compra. Se solicita:

a) Calcular la tasa de interés implícita en la financiación.

b) Suponiendo que se trata de un crédito a sola firma y que para el otorgamiento se debió pedir informes que implicaron al comprador $ 3 de erogación al momento de la compra y adicionalmente se le cargó a cada cuota la suma de $ 1 en concepto de gastos administrativos, determinar la tasa indicadora del costo total (TIR) para 30 días.

Solución

a) $100 = 40 + 35\,(1 + i)^{-1} + 35\,(1 + i)^{-2} \Rightarrow i = 0{,}10922570$ p/30 días

b) $100 = 40 + 3 + (35 + 1)\,(1 + TIR)^{-1} + (35 + 1)\,(1 + TIR)^{-2}$

$\Rightarrow TIR = 0{,}17095$ p/30 días

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 11

Un profesional posee en cartera un documento de \$ 5000 que vence el 31 de marzo y decide descontarlo el 30 de enero del mismo año. Se solicita:

a) Calcular el descuento comercial simple que sufre ese documento si es descontado al 54,75 % anual.

b) Calcular la tasa interna de retorno anual que implica esta operación si el día en que efectúa el descuento le deducen en concepto de gastos administrativos e impuestos la suma de \$ 180.

Solución

a) $D_{[30/1;31/3]} = 5000 \times 0{,}5475 \times 60/365 = 450$

b) $4370 = 5000\,(1 + TIR)^{-60/365}$

$TIR = 1{,}2688$ o bien $126{,}88\ \%$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 12

Un individuo analiza la posibilidad de constituir un fondo depositando \$ 3000 en el día de la fecha, \$ 2000 dentro de 45 días y \$ 4000 dentro de 90 días. La entidad donde piensa efectuar la inversión le ofrece una tasa de interés del 2 % para 45 días.

a) Calcular el capital que lograría constituir a los 180 días de iniciada la operación.

b) Sabiendo que debe abonar \$ 200 en concepto de gastos administrativos al realizar el primer depósito y que en el vencimiento de la operación se le retiene el 2 % sobre los intereses ganados, determinar la TIR para 30 días resultante de su inversión.

Solución

a) $V180 = 3000\,(1 + 0{,}02)^4 + 2000\,(1 + 0{,}02)^3 + 4000\,(1 + 0{,}02)^2$

$V_{180} = 3247{,}30 + 2122{,}42 + 4161{,}60$

$V_{180} = 9531{,}32$

b) Corresponde desembolsar \$ 200 junto con el primer depósito y restar al valor final el 2 % sobre los intereses ganados, o sea 0,02 x 531,32 = 10,63

$$3200 + 2000\,(1 + TIR_{30})^{-1,5} + 4000\,(1 + TIR_{30})^{-3} = 9520{,}69\,(1 + TIR_{30})^{-6}$$

Efectuando el cálculo por tanteo, utilizando calculadora financiera o Excel se obtiene el resultado:

$TIR_{30} = 0{,}01205$ ó 1,205 %

• PROBLEMAS RESUELTOS

1. En el día de la fecha se desea evaluar un conjunto de capitales formado por \$ 22.000 disponibles a los 30 días, \$ 26 000 a los 60 días y \$ 28 000 a los 90 días. Quien debe efectuar la valoración decide hacerlo a una tasa de interés simple para 30 días del 2 %.

Se solicita:

1.1) Calcular el valor del conjunto de capitales en el día de la fecha.

1.2) Calcular el valor del conjunto de capitales a los 90 días:

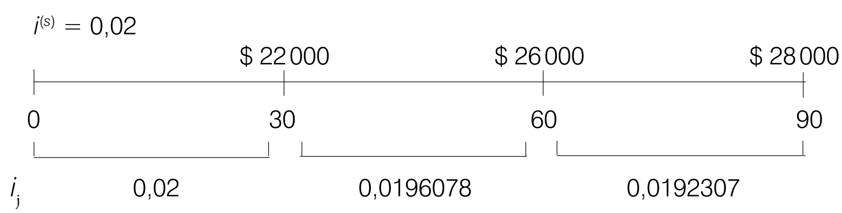
a) aplicando el concepto de valor de un conjunto de capitales a un determinado momento;

b) capitalizando el valor obtenido en 1.1.

1.3) Calcular las tasas efectivas para los sucesivos períodos de 30 días implícitas en el 2% de interés simple y analizar, justificándolo, su comportamiento.

1.4) Calcular el valor del conjunto de capitales en el $t = 90$ utilizando las tasas del punto 1.3.

Solución



1.1)

$$V_0 = 22\,000 \times (1 + 0{,}02 \times \frac{30}{30})^{-1} + 26\,000 \times (1 + 0{,}02 \times \frac{60}{30})^{-1} + 28\,000 \times (1 + 0{,}02 \times \frac{90}{30})^{-1}$$

$V_0 = 27\,586{,}62 + 25\,000 + 26\,415{,}09$
$V_0 = 72\,983{,}71$

1.2.a)

$$V_{90} = 22\,000 \text{ x } (1 + 0{,}02 \text{ x } \frac{60}{30}) + 26\,000 \text{ x } (1 + 0{,}02 \text{ x } \frac{30}{30}) + 28\,000$$

$V_{90} = 22\,800 + 26\,520 + 28\,000$
$V_{90} = 77\,400$

1.2.b)

$$V_{90} = 72\,983{,}71 \text{ x } (1 + 0{,}02 \text{ x } \frac{90}{30})$$

$V_{90} = 77\,362{,}73$

1.3)

$$i_j = \frac{i^{(s)}}{1 + i^{(s)} \text{ x } (j - 1)}$$

$$i_1 = \frac{0{,}02}{1 + 0{,}02 \text{ x } (1 - 1)} = 0{,}02$$

$$i_2 = \frac{0{,}02}{1 + 0{,}02 \text{ x } (2 - 1)} = 0{,}0192307$$

$$i_3 = \frac{0{,}02}{1 + 0{,}02 \text{ x } (3 - 1)} = 0{,}0188679$$

1.4)

$V_{90} = 22\,000 \text{ x } (1{,}0196078) \text{ x } (1{,}0192307) + 26\,000 \text{ x } (1{,}0192307) + 28\,000$
$V_{90} = 22\,862{,}72 + 22\,499{,}99 + 28\,000$
$V_{90} = 77\,362{,}72$

2. Un comerciante minorista efectúa una compra de mercaderías por \$ 7500 a un proveedor que le financia a una tasa de interés simple mensual del 3 % contra la entrega de 3 cheques diferidos a 30, 60 y 90 días, siendo el monto de los mismos los resultantes de dividir el valor de contado por 3 y cargar a cada uno los intereses por el plazo correspondiente a la tasa pactada. Se solicita:

2.a) Calcular el valor de cada uno de los cheques.

2.b) Determinar las tasas de interés efectivas implícitas en cada uno de los 3 períodos de 30 días incluidos en el plazo total.

2.c) Obtener el valor del último cheque aplicando las tasas obtenidas en el punto anterior.

2.d) Determinar la tasa de descuento comercial simple anual que debería obtener el proveedor para que, si decidiera descontar los cheques diferidos el mismo día que los recibe, obtenga el valor de contado de la venta efectuada.

Solución

2.a)

$C_{30} = 2500\ (1 + 0{,}03) = 2575$

$C_{60} = 2500\ (1 + 0{,}03 \text{ x } 2) = 2650$

$C_{90} = 2500\ (1 + 0{,}03 \text{ x } 3) = 2725$

2.b) $i_1 = 0{,}03 \qquad i_2 = \dfrac{0{,}03}{1 + 0{,}03} = 0{,}0291262 \qquad i_3 = \dfrac{0{,}03}{1 + 0{,}03 \text{ x } 2} = 0{,}0283019$

2.c) $C_{90} = 2500 \text{ x } 1{,}03 \text{ x } 1{,}0291262 \text{ x } 1{,}0283019 = 2725$

2.d) $7500 = 2575\ (1 - d^s \frac{30}{365}) + 2650\ (1 - d^s \frac{60}{365}) + 2725\ (1 - d^s \frac{90}{365})$

d^s anual $= 34{,}11215\ \%$

• PROBLEMAS PARA RESOLVER

---

1. En una cierta fecha un deudor tenía los siguientes compromisos cuyos vencimientos se detallan:

$ 3800 con vencimiento el 26/04

$ 5200 con vencimiento el 15/05

$ 11 000 con vencimiento el 30/06

El día 15/04 se presenta a su acreedor para reemplazar sus obligaciones por un único documento que represente el vencimiento medio:

1.a) Determinar dicho vencimiento si acuerdan para la sustitución una tasa de descuento comercial simple del 6 % anual. R: t $\cong$ 52 días

1.b) Calcular la tasa efectiva anual implícita en el plazo de vencimiento de cada documento si todos los documentos se firmaron el día 15/3. R: 6,2057; 6,2158 y 6,24037

2. Una empresa industrial, adquirió un terreno a $ 450.000 para construir nuevas instalaciones. Se acordó con el vendedor el siguiente plan de financiación:

- $ 80 000 en el momento de toma de posesión y escrituración;
- tres documentos de valores nominales iguales, con vencimiento a 90 días, 180 días y 270 días contados desde la escrituración.

Sabiendo que la valoración de los capitales se realizó al 3 % de interés simple para 60 días, se pide:

2.a) Determinar la cuantía de los documentos que deberá pagar la empresa para cumplir con sus compromisos. R: 134 280,49.

2.b) Para los 270 días de plazo calcular la tasa de descuento simple anual equivalente a la de interés simple dada. R: 16,0793 %.

2.c) Veinte días después de efectivizado el primer documento, la empresa solicita cambiar los dos restantes por un documento que represente el vencimiento medio: determinar la fecha de vencimiento de este documento único, si la valoración se realiza a una tasa efectiva de descuento del 2 % para 30 días. R: $t \cong 114$ días.

CAPÍTULO 4
Rentas ciertas

4.1. Introducción

Las rentas se encuadran dentro de las operaciones financieras complejas ya que implican el intercambio de varios capitales por uno o de un capital por varios. Las mismas se utilizan en un gran número de casos en la práctica bancaria, financiera, comercial, y hasta doméstica, ya que ejemplo de ellas son los alquileres mensuales, las cuotas de obras sociales, las cuotas de colegios, los sueldos personales, etcétera.

Específicamente en el ámbito de la activad profesional del contador y el licenciado en administración, constituyen una renta los flujos de fondos de un proyecto de inversión, las cuotas de amortización y renta de un título público, las cuotas de los préstamos que otorgan las entidades financieras y los depósitos tendientes a constituir un fondo de ahorro, entre otras alternativas.

En general se acostumbra a llamarlas *imposiciones* cuando las mismas tienen como objetivo la constitución de un capital y *amortizaciones* cuando se las utiliza para la cancelación de deudas.

En este capítulo se proveerán las herramientas para la valoración de las mismas, proponiendo, toda vez que sea factible, el modelo matemático necesario para determinar su valor en un momento determinado.

4.2. Concepto. Elementos. Clasificación

• *Definición*

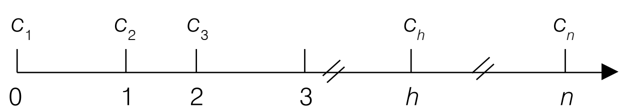
Se llama rentas a un conjunto de capitales disponibles o exigibles en distintos momentos, o bien, a toda sucesión de capitales con vencimientos en una sucesión de tiempos.

• *Elementos de las rentas:*

- Término de la renta: cada una de las prestaciones que se realizan en los diversos vencimientos (pagos, depósitos, cobros o cuotas).
- Período: intervalo de tiempo que media entre la disponibilidad de dos términos consecutivos.
- Origen de la renta: extremo inferior del período en el cual se efectiviza el primer término de la renta.
- Finalización de la renta: extremo superior del período en el cual se efectiviza el último término de la renta.
- Momento de valuación: es el momento al cual se calcula el valor de la renta.

Los vencimientos no necesariamente deben ser equidistantes, pero cuando ello ocurre, y además la tasa de valoración es constante, como así también si cada uno de los pagos o cobros son de igual cuantía o variables, siguiendo una determinada ley de formación, es posible obtener modelos matemáticos simplificados o fórmulas para el cálculo de los respectivos valores; éste será el objetivo del presente trabajo y la aplicación de las correspondientes funciones financieras a problemas concretos.

Gráficamente resulta:



Recordando que *valor de un conjunto de capitales en un momento dado es igual a la suma de los valores que dichos capitales tienen en ese momento de acuerdo a las condiciones de valoración fijadas o pactadas*, pueden determinarse distintos valores de la corriente de flujos de una renta como a continuación se propone:

- *Valor actual*: la suma de todos los términos al momento inicial, o sea, la suma de los valores actuales de cada uno de ellos.
- *Valor final*: la suma de todos los términos al momento de finalización, siendo igual a la suma de los valores finales de todos ellos al extremo superior del último período.
- *Valor a un momento* h *cualquiera* ($h < n$): es la suma de todos los términos a un momento comprendido entre el inicio y el final de la renta de manera que resulta igual a la suma de los valores finales de h términos más la suma de los valores actuales de $n-h$ términos.
- *Valor residual a un momento* h: es el valor actual de los $n-h$ términos pendientes de disponibilidad.

Luego de establecidas las condiciones sustanciales y formales será posible efectuar la valoración de las distintas rentas de acuerdo con la clasificación que surge teniendo en cuenta los elementos mencionados antes.

• *Clasificación:*

Las rentas se clasifican de acuerdo con:

a) La aleatoriedad en la disponibilidad de sus términos:

- *Ciertas*: cuando existe certeza en la cuantía y el vencimiento de los capitales.
- *Inciertas o contingentes*: cuando la disponibilidad de los pagos o cobros está sujeta a un hecho aleatorio.

b) Su duración:

- *Temporarias*: si el número de términos es finito:
- *Perpetuas*: si el número de términos tiende a infinito, entendiéndose en este caso que, al momento de definir la renta, no está determinada la fecha de finalización. Por lo tanto en estas rentas no se puede calcular su valor final.

c) La relación entre el momento de origen y el de valuación:

- *Inmediatas*: cuando el momento de origen coincide con el de valuación.
- *Diferidas*: cuando el momento de origen es posterior al de valuación.
- *Anticipadas*: cuando el momento de origen es anterior al de valuación.

En este punto es conveniente observar que generalmente el momento de valuación es la fecha en la que es exigible la contraprestación que da origen a la renta.

d) El momento en que es disponible cada término:

- *Pospagables o vencidas:* cuando son exigibles al final cada período.
- Prepagables o adelantadas: cuando son exigibles al principio de cada período.

e) La cuantía de sus términos:

- *Constantes*: cuando son todos iguales.
- Variables: cuando varían según una ley de formación geométrica o aritmética, o sin ley de formación en la variación (de términos cualesquiera).

f) La relación entre la frecuencia de los pagos y la capitalización de los intereses:

- *Sincrónicas*: cuando el período de capitalización de los intereses coincide con el período de la renta.
- *Asincrónicas*: cuando el período de capitalización de los intereses no coincide con el período de la renta.

4.3. Valoración de rentas

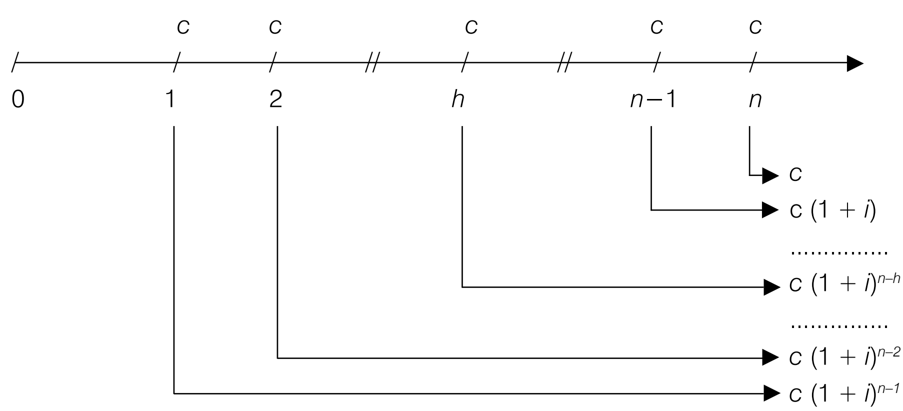
Para comenzar con la valoración de rentas se debe aclarar que la misma se realizará en el régimen de capitalización compuesta a una tasa de interés constante i correspondiente al período de la renta.

También es importante destacar que existen modelos básicos de rentas como los referidos a las rentas temporarias inmediatas, a partir de los cuales, teniendo una adecuada interpretación de los mismos, se puede arribar a los valores de otras rentas efectuando simples ajustes. Para ello es conveniente recordar en este punto lo establecido en el capítulo 3, a saber: *conocido el valor de un conjunto de capitales en un momento dado se puede hallar su valor en otro momento aplicando el correspondiente factor de capitalización o de descuento, según corresponda, si y sólo si la valoración se realiza en una única ley de capitalización o sea con tasas efectivas que no se superpongan en un mismo período*.

4.3.1. Valores finales de rentas temporarias constantes

4.3.1.1. Inmediatas y pospagables

Definida formalmente la renta, de acuerdo con las características enunciadas, resulta el siguiente gráfico:



Siendo n el momento de valuación, resulta genéricamente:

$$V_n = c\,[1+(1+i)+(1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-h} + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

Dentro del corchete resulta la suma de una sucesión de n términos variables en progresión geométrica creciente de razón $(1+i)$ que se resuelve haciendo:

$S = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ donde a_1 es el primer término de la sucesión, q es la razón y n la cantidad de términos de la sucesión. Adaptando dicha fórmula al presente caso se tiene $a_1 = 1$, $q = (1+i)$ y dado que el corchete está multiplicado por c, queda:

$$V_n = c\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \quad \Rightarrow \quad V_n = c\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

La función $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n|}\,i}$, expresada con la notación tradicional ($s_{\overline{n|}\,i}$), representa *el valor final de una renta de* n *términos vencidos iguales a una unidad de moneda evaluados en el extremo superior del último período a una tasa de interés i*.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 1

A los efectos de adquirir un bien de uso para su empresa usted se propone depositar cada mes vencido, a partir de la fecha, durante 10 meses, la suma de $ 5000 en una institución financiera que le asegura para todo el plazo una tasa de interés del 1 % mensual. Determinar el capital que reunirá al vencimiento.

Solución

$$V_{10} = 5000\,\frac{(1 + 0{,}01)^{10} - 1}{0{,}01} = 52\,311{,}06$$

4.3.1.2. Cuota de imposición

Cuando las rentas se constituyen con el objetivo de realizar un ahorro para reunir un cierto capital se las llama *imposiciones*, como se dijo en la introducción. Estas rentas pueden considerarse anticipadas, pues los depósitos o pagos se anticipan al momento de valuación que coincide con el momento final del último período, fecha en la cual se recibe la contraprestación que dio origen a la renta.

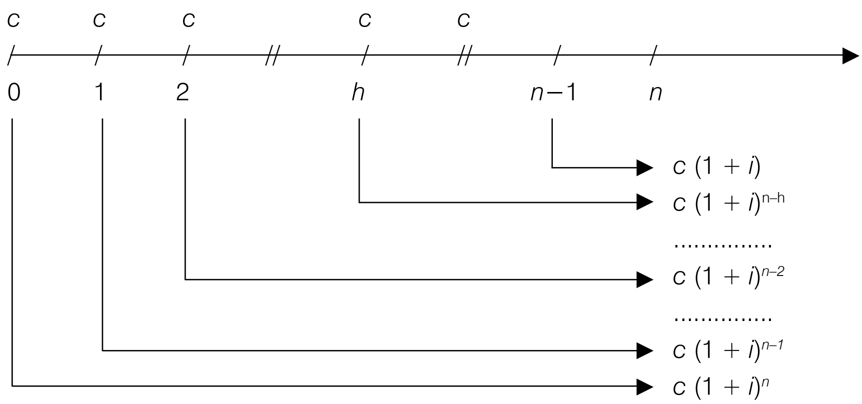
Si se desea conocer la cuota periódica necesaria para reunir un cierto valor final, se despeja c en la fórmula anterior y queda:

$$c = V_n\,\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

En dicha relación la función $\dfrac{i}{(1+i)^n - 1} = s^{-1}_{\overline{n|}\,i}$ recibe el nombre de *cuota de imposición* y se define como *la cuota que es necesaria depositar durante* n *períodos vencidos a la tasa* i *para reunir un capital unitario*.

La función cuota de imposición $S^{-1}_{\overline{n|}i}$ es recíproca a la función de valor final $S_{\overline{n|}i}$ y es conveniente destacar el comportamiento de las mismas con respecto a la tasa de interés, a saber: la función valor final crece si aumenta la tasa, ya que se ganan más intereses; la cuota de imposición decrece si aumenta la tasa, ya que deberá depositarse una suma menor para lograr el mismo valor final.

4.3.1.3. Inmediatas y prepagables



Aplicando el mismo razonamiento que se hizo para las pospagables, simbolizando al valor final con V'_n y teniendo en cuenta que su valuación se realiza un período después de efectivizar el último término, se tiene:

$$V_n = c\,[(1+i)+(1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-h} + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

Resolviendo la suma de la sucesión geométrica donde en este caso $a_1 = (1 + i)$ se obtiene:

$$V'_n = c\,(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Se puede apreciar que el valor final de una renta prepagable es igual al de su correspondiente pospagable multiplicada por $(1 + i)$. Esto se verificará en todas las rentas propuestas en la clasificación, tanto para el cálculo de los valores finales como de los valores actuales. Este modelo podría haberse obtenido aplicando el concepto de desplazamiento de un conjunto de capitales en un momento dado, ya que al quedar establecido que el último término es exigible en $(n - 1)$, para hallar el valor del conjunto en n sólo basta con capitalizarlo por un período.

Con respecto a los valores finales de otras rentas resultantes de la clasificación dada al comienzo de este capítulo, es conveniente destacar que *los valores finales de las rentas* *diferidas y anticipadas son iguales entre sí e iguales al valor final de una renta inmediata, ya que el tiempo de diferimiento o anticipación incide sólo en el cálculo del valor actual*.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 2

Suponiendo que un individuo abrió una cuenta para su propia jubilación a comienzo de un determinado mes y, a partir de esa fecha inclusive, depositó al inicio de cada mes una suma durante 10 años en un banco que le pagó el 0,8 % mensual de interés: calcular la suma mensual depositada si su cuenta, sin considerar los gastos de mantenimiento, arroja al vencimiento un saldo de \$ 214 458,90.

Solución

$$214\,458{,}90 = c\,\frac{(1+0{,}008)^{120}-1}{0{,}008}\,(1+0{,}008)$$

$$c = 214\,458{,}90\;\frac{0{,}008}{(1+0{,}008)^{120}-1}\,(1+0{,}008)^{-1}$$

$c = 214\,458{,}90 \times 0{,}00499457 \times 0{,}992063$
$c = 1062{,}62$

4.3.1.4. Cálculo del número de períodos conocido el valor final de una renta temporaria inmediata

Partiendo de la expresión de valor final de una renta temporaria inmediata pospagable:

$$V_n = c\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$(1+i)^n = \frac{V_n \cdot i}{c} + 1 \quad \text{utilizando logaritmo natural}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{V_n\, i}{c} + 1\right)}{\ln\,(1+i)}$$

• *Observación:* puede ocurrir que este número n no resulte entero sino que sea de la forma $n = h + f$, quedando comprendido entre dos enteros consecutivos h y $h + 1$ siendo $f < 1$ la fracción de período en que n excede a h. Con la finalidad de dar sentido a este resultado, ya que no puede fraccionarse el número de cuotas, se propone la siguiente solución: *plantear una equivalencia financiera resultante de capitalizar el valor final de una renta de* h *términos por la fracción correspondiente y efectuar, además, el pago en cualquier momento de una cuota complementaria evaluada a la fecha* h + f.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 3

Se desea constituir un capital de \$ 30 000 y para ello se sabe que quien desea hacer esta operación puede disponer de una suma bimestral de \$ 4600, realizando el primer depósito dentro de un bimestre. Se solicita: calcular el número de depósitos a realizar si los mismos los realiza en una entidad que le paga el 1,8 % bimestral y, en el caso que no resulte un número entero, determinar el monto de la cuota complementaria que debería abonarse conjuntamente con la última cuota para que el capital quede integrado en $h + f$.

Solución

$$n = \frac{\ln\left(\frac{30\,000 \times 0{,}018}{4600} + 1\right)}{\ln(1 + 0{,}018)} = \frac{\ln 1{,}1173913}{\ln 1{,}018} = \frac{0{,}11099678}{0{,}01783992} = 6{,}2218$$

Dado que no resulta un número entero, se plantea el pago de una cuota complementaria al final del sexto bimestre, junto sexta cuota:

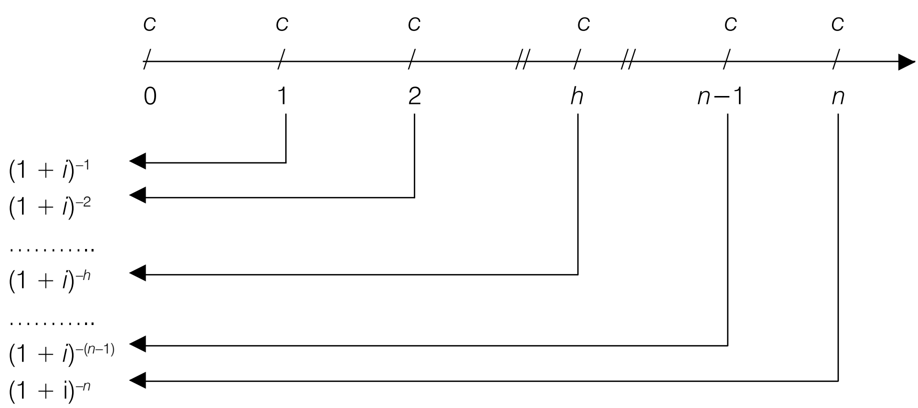
$$30\,000 = 4600\,\frac{(1 + 0{,}018)^6 - 1}{0{,}018}\,(1 + 0{,}018)^{0{,}2218} + CC\,(1 + 0{,}018)^{0{,}2218}$$

$$CC = 1009{,}31$$

4.3.2. Valores actuales de rentas temporarias constantes

4.3.2.1. Inmediatas y pospagables

El gráfico resultante de la renta definida queda expuesto de la siguiente manera:



Siendo cero el momento de valuación resulta:

$$V_0 = c\ [(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-h} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}]$$

Dentro del corchete resulta la suma de una sucesión de n términos variables en progresión geométrica decreciente de razón $(1 + i)^{-1}$ que se resuelve haciendo:

$S = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ donde a_1 es el primer término de la sucesión, q es la razón y n la cantidad de términos de la sucesión, por lo tanto, aplicando dicha fórmula, se obtiene:

$$V_0 = c\ (1+i)^{-1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = c\ (1+i)^{-1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{\dfrac{i}{(1+i)}}$$

donde, al simplificar, queda:

$$V_0 = c\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Si en la igualdad anterior se opera convenientemente resulta otro modelo equivalente:

$$V_0 = c\ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n\, i}$$

Las funciones $\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ ó $\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n\, i}$ son simbolizadas con la notación tradicional $a_{\overline{n|}\, i}$ y representan *el valor actual de una renta de* n *términos vencidos iguales a una unidad de moneda evaluados a una tasa de interés* i *en el extremo inferior del período en el que se efectiviza el primer término*.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 4

Una sociedad anónima estima que en los próximos 12 meses podrá distribuir entre cada uno de sus accionistas la suma de $ 37 000, cada mes vencido, a partir de la fecha. Se solicita a usted que determine el valor presente de esas utilidades si un accionista las evalúa a una tasa del 2 % mensual.

Solución

$$V_0 = 37\,000\ \frac{1-(1+0{,}02)^{-12}}{0{,}02} = 391\,287{,}62$$

4.3.2.2. Cuota de amortización

Como se dijo al comienzo de este capítulo, cuando a las rentas son utilizadas para la cancelación de deudas se acostumbra a llamarlas *amortizaciones*. Es así que, si el valor actual de la renta representa el monto de una suma solicitada en préstamo, la cuota destinada al pago del mismo recibe el nombre de cuota de amortización.

Por lo tanto, si se desea conocer la cuota se despejará c en la fórmula de valor actual y se obtendrá:

$$c = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \quad \text{ó} \quad c = V_0 \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}$$

A las relaciones $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ ó $\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}$ se las simboliza con $a^{-1}_{n\urcorner i}$ y reciben el nombre de *cuota de amortización* que se define como *la cuota que es necesario depositar durante n periodos vencidos a la tasa i para cancelar una deuda de un peso.*

La función cuota de amortización $a^{-1}_{n\urcorner i}$ es recíproca a la función de valor actual $a_{n\urcorner i}$, y el comportamiento de las mismas con respecto a la tasa de interés es el siguiente: la función cuota de amortización crece si aumenta la tasa, ya que se deberá pagar más intereses para cancelar una misma deuda; la función valor actual, al igual que el factor periódico de descuento, decrece si aumenta la tasa, ya que aumentan los descuentos periódicos. Este dato es importante de tener en cuenta para la obtención de la tasa de interés en las rentas, tema que se explicará más detalladamente en un próximo punto.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 5

Calcular la cuota mensual que deberá publicitar un banco por cada \$ 10 000 de préstamo si cobra una tasa del 2,5 % para una línea de créditos personales, a cuatro años de plazo y sin considerar los gastos inherentes a la operación.

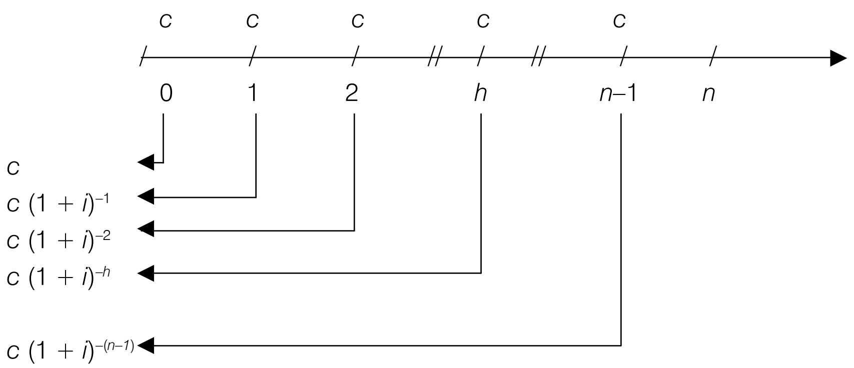
Solución

$$c = 10\,000 \frac{0{,}025}{1-(1+0{,}025)^{-48}} = 360{,}06$$

4.3.2.3 Inmediatas y prepagables

Existen en la práctica numerosos ejemplos de pagos adelantados, como los alquileres, las cuotas en instituciones educativas, las cuotas de artículos del hogar que exigen el pago de la primera cuota en el momento de la compra, etcétera.

Observando el eje del tiempo puede verse que el primer término es disponible en cero, su disponibilidad coincide con el momento de valuación, y el último término se encuentra en $(n - 1)$.



Realizando los mismos pasos que se hicieron para la deducción del valor actual de la renta temporaria, inmediata, de pagos vencidos:

$$V_n = c\,[1+(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-h} + \dots + (1+i)^{-(n-1)}]$$

Resolviendo la suma de la sucesión de n términos variables dentro del corchete se obtiene:

$$V_0 = c\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = c\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{i}{(1+i)}}$$

Resolviendo queda

$$V_0 = c\,(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Como ya se dijo, al igual que en el valor final, *el valor actual de toda renta prepagable es igual al de su correspondiente pospagable multiplicada por* $(1 + i)$.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 6

Ante la necesidad de renovar un contrato de arrendamiento, el explotador de un campo analiza la propuesta que le han efectuado y para ello calcula el valor actual, a saber: en el día de la fecha fijada para la renovación debe pagar la suma única de $ 200 000 y periódicamente $ 250 000 por año adelantado durante 5 años. Se pide a usted que determine ese valor actual si se considera una tasa de referencia del 9 % anual.

Solución

$$V_0 = 200\,000 + 250\,000\,(1 + 0{,}09)\,\frac{1 - (1+0{,}09)^{-5}}{0{,}09}$$

$$V_0 = 200\,000 + 1\,059\,929{,}96 = 1\,259\,929{,}96$$

4.3.2.4. Cálculo del número de períodos conocido el valor actual de una renta temporaria inmediata

A partir de la expresión más simplificada de valor actual de una renta temporaria inmediata pospagable, se despeja n:

$$V_0 = c\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$(1 + i)^{-n} = 1 - \frac{V_0 i}{c} \quad \Rightarrow \quad (1 + i)^{-n} = \frac{c - V_0 i}{c} \quad \Rightarrow \quad (1 + i)^{n} = \frac{c}{c - V_0 i}$$

y resulta:

$$n = \frac{ln\left(\frac{c}{c - V_0 i}\right)}{ln(1 + i)}$$

De la misma manera que se observó en el cálculo del número de períodos en el valor final de una renta, puede aquí también ocurrir que este número n no resulte entero, sino que sea de la forma $n = h + f$, quedando comprendido entre dos enteros consecutivos. En estos casos se propone *plantear una equivalencia financiera donde el valor actual dado sea igual a la suma del valor actual de una renta de h términos y de un término o capital complementario que puede hacerse efectivo en el momento h + f o en cualquier otro momento en que se reestablezca la equivalencia del intercambio.*

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 7

Con el objeto de cancelar una deuda de \$ 15 000 que vence en la fecha se propone el pago de un cierto número de cuotas mensuales, constantes y vencidas de \$ 1070 cada una conviniéndose la tasa de la financiación en el 3 % de interés mensual. Se solicita:

a) Calcular el número de cuotas a pagar.

$$n = \frac{ln\left(\frac{1070}{1070 - 15\,000 \times 003}\right)}{ln(1 + 0{,}03)} = \frac{\ln 1{,}7580645}{\ln 1{,}03} = \frac{0{,}54569445}{0{,}0295588}$$

$n = 18{,}4613$

b) Dado que no resulta un número entero se requiere a usted que determine el monto de una cuota complementaria que reestablezca la equivalencia entre los desembolsos, si la misma se abona:

b.1) Exactamente en el momento determinado en a)

$$15\,000 = 1070\,\frac{1-(1+0{,}03)^{-18}}{0{,}03} + CC\,(1+0{,}03)^{-18{,}4613}$$

$$15\,000 = 14\,716{,}26 + CC \times 0{,}57943956$$

$$CC = 489{,}68$$

b.2) Juntamente con el pago de la sexta cuota.

$$15\,000 = 1070\,\frac{1-(1+0{,}03)^{-18}}{0{,}03} + \mathrm{CC}\,(1+0{,}03)^{-6}$$

$$15\,000 = 14\,716{,}26 + \mathrm{CC} \times 0{,}83748426$$

$$CC = 338{,}80$$

4.3.3. Relación entre distintos valores de las rentas inmediatas

4.3.3.1. Relación entre el valor actual y el valor final

El valor final de una renta es igual al valor actual capitalizado por n períodos.

$$V_n = V_0\,(1+i)^n$$

Si se consideran las funciones para una renta unitaria, se tiene:

$$\frac{(1+i)^n-1}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i)^n$$

Lógicamente el valor actual será igual al valor final descontado por n períodos.

$$V_0 = V_n\,(1+i)^{-n}$$

o expresándolo con sus funciones:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}\,(1+i)^{-n}$$

4.3.3.2. Relación entre la cuota de imposición y la cuota de amortización

La diferencia entre la cuota de amortización y la cuota de imposición, cuando los pagos son vencidos, es la tasa de interés, a saber:

$$a^{-1}_{\overline{n|}\, i} - S^{-1}_{\overline{n|}\, i} = i$$

$$\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1} - \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{i\,[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n - 1} = i$$

De esta deducción surge entonces que

$$a^{-1}_{\overline{n|}\, i} = S^{-1}_{\overline{n|}\, i} + i$$

Relación que resulta importante por su aplicación en el próximo capítulo sobre préstamos.

4.3.4. Rentas temporarias en las que el momento de iniciación de los pagos no coincide con el momento de valuación

En este punto es conveniente recordar que generalmente el momento de valuación es la fecha en la que es exigible la contraprestación que da origen a la renta.

4.3.4.1. Diferidas de términos constantes

Las rentas son *diferidas cuando el momento de origen es posterior al de valuación*.

Existen numerosos ejemplos reales de aplicación de este tipo de rentas: financiación de electrodomésticos en las que el pago inicial es exigible luego de transcurridos un cierto número de meses; títulos públicos argentinos en los cuales el pago de la primera cuota de amortización se efectúa después de corrido un cierto número de años; etcétera.

ME	*MO*	*c*	*c*	//	*c*	//	*c*
0	d	$d+1$	$d+2$		$d+h$		$d+n$

En el eje de tiempo expuesto antes, puede observarse que, luego de transcurridos d períodos de diferimiento, es disponible la primera cuota en $d+1$, lo que permite interpretarla como diferida y pospagable. Por lo tanto, *el valor actual de esta renta es igual al de su correspondiente inmediata descontada por los* d *períodos de diferimiento*.

Simbolizando dicho valor actual con d/V_0 resulta:

$$d/V_0 = c\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\ (1+i)^{-d}$$

Debe aclararse que existe una tendencia a pensar que el diferimiento es $d + 1$. En este caso la renta se convierte en diferida prepagable por lo que al multiplicar por $(1 + i)$, simplificando, resulta una ecuación igual a la anteriormente propuesta:

$$d/V_0 = c\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\ (1+i)^{-(d+1)}(1+i)$$

$$d/V_0 = c\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\ (1+\mathrm{i})^{-d}$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 8

Una familia firma un contrato de locación de un departamento por 2 años y debe pagar por mes adelantado un monto de \$ 2500 es liberada del pago de los tres primeros alquileres por hacerse cargo de algunas reparaciones del inmueble. Calcular, al momento de contratación, el valor de las cuotas de alquiler, si la tasa de interés considerada para su valoración es del 1,5 % mensual.

Solución

$$d/V_0 = 2500\ \frac{1-(1+0{,}015)^{-21}}{0{,}015}\ (1+0{,}015)^{-3}\ (1+0{,}015)$$

Al ser prepagables y no exigibles los tres primeros meses de alquiler, queda una renta de 21 términos y diferida en 2 períodos:

$$d/V_0 = 2500\ \frac{1-(1+0{,}015)^{-21}}{0{,}015}\ (1+0{,}015)^{-2}$$

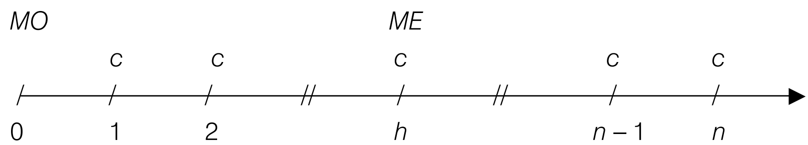
$$d/V_0 = 43\,437{,}44$$

4.3.4.2. Anticipadas de términos constantes

Las rentas son *anticipadas cuando el momento de valuación es posterior al momento de origen*.

La imposiciones tratadas anteriormente pueden considerarse un caso frecuente de rentas anticipadas ya que el momento de valuación es n, fecha en la cual se recibe el capital acumulado, que representa la contraprestación recibida por el plan de ahorro constituido.

Pero también existen rentas anticipadas en los que el momento de valuación puede ubicarse en un punto $h < n$, como ocurre en los círculos de ahorro previo, cuando por sorteo o licitación, se recibe el bien objeto de la formación de la renta. Gráficamente se tiene, si los términos son pagos por período vencido:



En estos casos la determinación de su valor en h se obtiene capitalizando por h períodos el valor actual de su correspondiente renta inmediata:

$$V_h = c\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i)^h$$

También, aplicando el concepto de valor de una renta un momento h cualquiera, se tiene el valor final de h términos más el valor actual de $(n-h)$ términos:

$$V_h = c\,\frac{(1+i)^h-1}{i} + c\,\frac{1-(1+i)^{-(n-h)}}{i}$$

Operando algebraicamente se llega al mismo modelo anterior. En ambos modelos corresponde capitalizar por $(1+i)$ si los pagos fueran por período adelantado.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 9

Se constituye una operación de ahorro y préstamo a los efectos de adquirir un determinado bien. Para ello el adquirente se compromete a pagar treinta cuotas mensuales vencidas de \$ 1000 y coincidentemente con el pago de la cuota número 8 se recibe el bien. Si la tasa pactada es del 2,5 % mensual, calcular el valor del bien al momento de su recepción.

Solución

$$V_8 = 1000\,\frac{1-(1+0{,}025)^{-30}}{0{,}025}\,(1+0{,}025)^8 = 25\,501{,}53$$

ó

$$V_8 = 1000\,\frac{(1+0{,}025)^8-1}{0{,}025} + 1000\,\frac{1-(1+0{,}025)^{-22}}{0{,}025} = 8736{,}12 + 16\,765{,}41 = 25\,501{,}53$$

4.3.5. Rentas asincrónicas

Las rentas son *asincrónicas* cuando el período de capitalización de los intereses no coincide con el período de la renta.

Esta situación se resuelve calculando la tasa para el período de la renta que resulte equivalente a la tasa pactada cuando esta tasa está referida a otra unidad de tiempo.

Ejemplo: calcular el valor actual de una serie de pagos vencidos de $ 6000 exigibles trimestralmente durante 4 años si se evalúan a una tasa nominal anual del 12 % para una frecuencia de capitalización semestral.

Primero se calcula la tasa semestral, proporcionalmente a la nominal, y luego se calcula su equivalente trimestral.

$$i_{sen} = \frac{0{,}12}{2} = 0{,}06 \;\Rightarrow\; i_{trim} = 1{,}06^{0{,}5} - 1 = 0{,}029563$$

$$V_0 = 6000\,\frac{1 - (1 + 0{,}029563)^{-16}}{0{,}029563} = 75\,619{,}02$$

4.4. Cálculo de la tasa de interés implícita en las rentas

En la práctica financiera se presenta muchas veces la necesidad de calcular la tasa de interés que hace equivalentes la sucesión de capitales con la contraprestación recibida en un momento dado.

Actualmente no existen dificultades en la determinación de la misma ya que existen herramientas muy eficaces que brindan resultados muy exactos, como la utilización de planillas de cálculo tipo Excel y calculadoras financieras y científicas que incluyen programas para su valuación.

En caso de no contar con esos elementos se pueden aplicar otras alternativas como Baily, iteraciones sucesivas, interpolación lineal reiterada, que son métodos de prueba por ensayo y error.

Este autor sugiere el método de iteraciones o aproximaciones sucesivas, conocido también como «tanteo», ya que el mismo resulta sencillo y práctico, por no requerir memorización de fórmulas. Luego de encontrar dos valores entre los cuales se mueve la tasa puede combinarse con la interpolación lineal si no se desea seguir tanteando. Al utilizar interpolación lineal se obtiene un resultado aproximado de la tasa de interés, puesto que ese valor se encuentra en la recta que une los dos puntos de referencia, determinados por las dos tasas en las que se mueven las funciones de valor final o de valor actual y no sobre la curvas de dichas funciones. En el caso de las imposiciones el resultado que se obtiene es por defecto, y en las amortizaciones lo es por exceso.

Adaptando la fórmula de interpolación lineal al caso en cuestión se tiene que:

$$i = i_0 + \frac{f(i) - f(i_0)}{f(i_1) - f(i_0)}\,(i_1 - i_0)$$

En ambos métodos, iteración sucesiva e interpolación lineal, se presenta el inconveniente de determinar la tasa con la que se comienza a ensayar. Para ello debe considerarse el tipo de operación a la que pertenece la renta utilizada, ya que si se trata de imposiciones corresponde considerar el nivel de las tasas pasivas, mientras que si se trata de amortizaciones hay que relacionarlas con las tasas activas. En las dos situaciones, siempre existen parámetros en el mercado de capitales para tomar como referentes.

Se proponen a continuación dos ejemplos que permitirán interpretar lo expuesto.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 10

Con el objetivo de reunir un capital que le permita cambiar su auto, un individuo depositó durante 15 meses, al principio de cada mes, la suma de \$ 2300 de manera tal que al vencimiento del mes quince había acumulado la suma de \$ 36952. ¿Cuál será la tasa lograda en la inversión realizada?

Solución

Teniendo en cuenta que es una imposición, y conociendo que al momento de escribir este capítulo las tasas pasivas vigentes en el mercado no superan el 1% mensual, se comienza a ensayar con ese parámetro, resultando:

$$2300\,\frac{(1+0{,}01)^{15}-1}{0{,}01}\,(1+0{,}01) = 37\,393{,}09$$

Dado que se obtuvo un capital mayor a 36952 y, recordando el comportamiento de la función valor final de una renta, debe buscarse una tasa menor al 1 %. Probando con el 0,7 % se tiene:

$$2300\,\frac{(1+0{,}007)^{15}-1}{0{,}007}\,(1+0{,}007) = 36\,496{,}57$$

Con este resultado puede afirmarse que la tasa buscada está entre el 0,007 y el 0,01. Si se aplica interpolación lineal y se reemplazan sus valores en la fórmula dada, queda:

$i_0 = 0{,}007 \qquad f(i_0) = 36\,496{,}57$

$i = x \qquad f(i) = 36\,952{,}00$

$i_1 = 0{,}01 \qquad f(i_1) = 37\,393{,}09$

$$i = 0{,}007 + \frac{36\,952 - 36\,496{,}57}{37\,393{,}09 - 36\,496{,}57}\,(0{,}01 - 0{,}007)$$

$$i = 0{,}008524$$

El valor es aproximado por defecto ya que al reemplazar en la ecuación de la equivalencia del intercambio se obtiene un valor capital de \$ 36948,85. Si se calcula con máquina financiera la tasa que satisface la ecuación es igual a 0,0085345.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 11

Un ama de casa adquiere una heladera en una casa de artículos del hogar de su barrio. El precio de contado de la heladera es de \$ 3500 y la adquiere financiada en 24 cuotas mensuales, vencidas, calculadas a una tasa de interés del 2,8 % mensual. Se solicita:

a) Determinar la cuota de la financiación, sin gastos.

$$c = 3500 \frac{0{,}028}{1 - (1 + 0{,}028)^{-24}} = 202{,}24$$

b) Calcular la tasa implícita, si en el momento de la compra debió pagar \$ 50 en concepto de flete y le cargaron en cada cuota \$ 10 de gastos administrativos.

En este caso se plantea una ecuación incorporando los gastos correspondientes:

$$3550 = 212{,}24 \frac{1 - (1+i)^{-24}}{i}$$

Para determinar la tasa que satisface esta igualdad existe una referencia ya que la tasa de la financiación es el 2,8 %; por lo tanto, al considerar la incidencia de los gastos, se debe buscar una tasa mayor a ésta. Comenzando la prueba con una tasa del 3% se obtiene un valor actual igual a \$ 3594,40. Conocido el comportamiento de la función valor actual de una renta con respecto a la tasa de interés, se sabe que para bajar el valor actual hay que subir la tasa y probando con una tasa del 3,5 % se obtiene \$ 3408,23 de valor actual. De esta manera resulta:

$i_0 = 0{,}03 \qquad f(i_0) = 3594{,}40$
$i = x \qquad f(i) = 3550$
$i_1 = 0{,}035 \qquad f(i_1) = 3408{,}23$

$$i = 0{,}03 + \frac{3550 - 3594{,}40}{3408{,}23 - 3594{,}40}\,(0{,}035 - 0{,}03)$$

$$i = 0{,}031192$$

Este es un valor muy aproximado por exceso ya que la verdadera tasa, calculada con una máquina financiera es 0,031157. Estas calculadoras, lo mismo que la utilización de planillas Excel permiten determinar mucho más rápido y exacto la tasa implícita en las rentas.

4.5. Rentas perpetuas de términos constantes

Las rentas son *perpetuas* cuando el número de términos es infinito, entendiéndose en este caso que, al momento de definir la renta, no está determinado el momento de finalización. Por lo tanto en estas rentas no se puede calcular su valor final, pero sí se puede determinar el valor actual aplicando el límite a la correspondiente renta temporaria cuando *n tiende a infinito*.

4.5.1. Renta perpetua inmediata

En el gráfico se aprecia la corriente de pagos vencidos cuando el número de los mismos tiende a infinito:

Si se aplica el límite al valor actual de la renta inmediata temporaria pospagable, cuando $n \to \infty$, resulta:

$$lím_{n\to\infty} V_0 = lím_{n\to\infty} \text{q} c \; \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \text{r}$$

Sabiendo que $(1+i)^{-n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, realizando los reemplazos correspondientes y simbolizando al valor actual de la renta perpetua con V_∞, se obtiene:

$$V_\infty = \frac{c}{i}$$

4.5.2. Renta perpetua diferida

El valor actual de la renta diferida perpetua es igual al de su correspondiente renta inmediata de pagos vencidos descontados por los *d* períodos de diferimiento, como ocurre con las temporarias diferidas de acuerdo a lo fundamentado antes.

$$d/V_\infty = \frac{c}{i}(1+i)^{-d}$$

4.5.3. Renta perpetua anticipada

El momento de valuación de la renta anticipada es, como ya se dijo en las temporarias, un momento *h* cualquiera. Si es perpetua anticipada, el valor en *h* se obtiene capitalizando a ese momento el valor de la perpetua inmediata.

$$V_{h/\infty} = \frac{c}{i}\,(1 + i)^h$$

Los modelos expuestos corresponden a rentas perpetuas pospagables por lo tanto si fueran prepagables hay que multiplicarlos por $(1 + i)$.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 12

Al finalizar la construcción de una calle peatonal se estima que no necesitará ser reparada en el término de 2 años. Transcurrido dicho lapso deberá pagarse $ 1 000 000 por servicio de mantenimiento y a partir de allí por tiempo indeterminado, cada año vencido, $ 300 000 por igual concepto. A estos efectos el municipio desea conocer el valor presente de los egresos resultantes si se evalúan considerando una tasa de interés del 9 % anual.

Solución

Se trata de la entrega de un capital al vencimiento del segundo año y a partir del vencimiento del tercero una renta perpetua que resulta diferida por dos años.

$$V_0 = 1\,000\,000 \times (1 + 0{,}09)^{-2} + \frac{300\,000}{0{,}09}\,(1 + 0{,}09)^{-2}$$

$$V_0 = 841\,679{,}99 + 2\,805\,599{,}98 = 3\,647\,279{,}97$$

4.6. Rentas temporarias de términos variables

Los modelos obtenidos en los puntos anteriores se refieren a las rentas cuyos pagos o cobros son siempre una suma constante. En la práctica suelen presentarse casos en que dichas suman varían según una ley de formación matemática, en los cuales también es posible encontrar fórmulas simplificadas para los cálculos de valor actual y valor final.

4.6.1. Rentas variables en progresión geométrica

Son variables en progresión geométrica cuando cada término es igual al anterior multiplicado por un valor constante q, que constituye la razón de la progresión.

Si $q > 1$ será una renta variable en progresión geométrica creciente y si $q < 1$ será una renta variable en progresión geométrica decreciente.

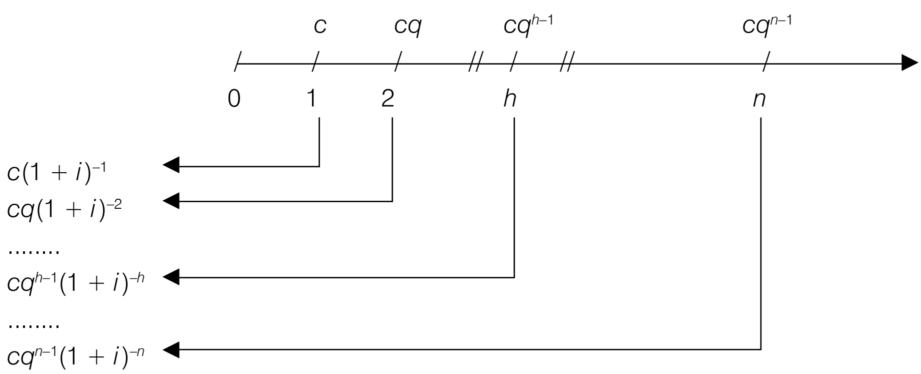
Entonces sus términos resultan:

$$\begin{gathered} c_1 = c \\ c_2 = c\,q \\ c_3 = c\,q^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_h = c\,q^{h-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_n = c\,q^{n-1} \end{gathered}$$

A continuación se realizarán las deducciones de los modelos correspondientes a las distintas rentas temporarias y perpetuas.

4.6.1.1. Valor actual de las rentas inmediatas, temporarias y pospagables

El gráfico de la renta definida queda expuesto de la siguiente manera:



Sumando los valores actuales y sabiendo que c es el primer término, se tiene:

$$V_0 = c\,(1 + i)^{-1} + c\,q\,(1 + i)^{-2} + \ldots + c\,q^{h-1}(1 + i)^{-h} + \ldots + c\,q^{n-1}\,(1 + i)^{-n}$$

Sacando factor común c:

$$V_0 = c\,[(1 + i)^{-1} + q\,(1 + i)^{-2} + \ldots + q^{h-1}(1 + i)^{-h} + \ldots + q^{n-1}\,(1 + i)^{-n}](1)$$

Dentro del corchete resulta la suma de una sucesión de n términos variables en progresión geométrica decreciente de razón $q(1 + i)^{-1}$ y la misma se resuelve aplicando el modelo ya conocido y propuesto para las rentas constantes. Sustituyendo los valores correspondientes en la fórmula de suma queda:

$$V_0 = c\left[(1+i)^{-1}\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1-q(1+i)^{-1}}\right] = c\left[(1+i)^{-1}\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{\frac{1+i-q}{(1+i)}}\right]$$

y realizando los procedimientos algebraicos correspondientes:

$$V_0 = c\,\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

Este modelo es aplicable cuando $q \neq (1+i)$ ya que si son iguales se produce una indeterminación que se resuelve reemplazando en (1):

$$V_0 = c\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{(1+i)}{(1+i)^2} + \dots + \frac{(1+i)^{h-1}}{(1+i)^h} + \dots + \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}\right]$$

y simplificando queda n sumandos de la forma $(1+i)^{-1}$

$$V_0 = c\,(1+i)^{-1}n \qquad \textit{cuando } q = (1+i)$$

• *Observación:* teniendo en cuenta el concepto de valoración de conjuntos de capitales y su equivalencia en distintos puntos, para no reiterar demostraciones ya conocidas se remite al lector a las relaciones ya fundamentadas. Por lo tanto, a las fórmulas de valores actuales obtenidas, corresponde:

– Si son *diferidas*: descontarlas por el tiempo de diferimiento.
– Si son *anticipadas*: capitalizarlas al momento de valuación.
– Si son *prepagables*: multiplicarlas por $(1+i)$

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 13

Por cuestiones contables y administrativas se necesita evaluar en la fecha una corriente de diez flujos anuales, que a partir del primero, de 1000 unidades de moneda, se incrementarán anualmente en un 20 %. Determinar el valor presente sabiendo que los flujos son vencidos y la tasa de valuación es el 8 % anual.

Solución

Si se incrementan en un 20 % entonces $q = 1{,}20$

$$V_0 = 1000\,\frac{1-1{,}20^{10}(1+0{,}08)^{-10}}{1+0{,}08-1{,}20} = 15\,566{,}43$$

4.6.1.2. Valor final de las rentas temporarias, inmediatas y pospagables

Conocido el valor actual de la renta variable en progresión geométrica, temporaria, inmediata y pospagable, su valor final resulta igual a dicho valor capitalizado por $(1 + i)^n$

$$V_n = c \; \frac{1 - q^n \, (1 + i)^{-n}}{1 + i - q} \; (1 + i)^n \quad \Rightarrow \quad V_n = c \; \frac{(1 + i)^n - q^n}{1 + i - q}$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 14

Un empleado de comercio se propuso realizar un ahorro y para ello deposita todos los meses una suma que, a partir de la primera de $ 600, estima podrá incrementarla mensualmente en un 2 %. Si el primer depósito lo hace en el día de la fecha, y suponiendo que la entidad financiera en la que realiza la imposición le asegura una tasa de interés del 1% mensual, ¿qué capital reunirá al cabo de 18 meses?

Solución

Dado que el primer depósito se realiza en el día de la fecha, resulta prepagable:

$$V_{18} = 600 \; \frac{(1 + 0{,}01)^{18} - 1{,}02^{18}}{1 + 0{,}01 - 1{,}02} \; (1 + 0{,}01) = 14\,065{,}18$$

4.6.1.3. Valor actual de las rentas perpetuas, inmediatas y pospagables

El valor actual de una renta variable perpetua resulta de aplicar el límite cuando n tiende a infinito a su correspondiente renta temporaria:

$$lím_{n\to\infty} V_0 = lím_{n\to\infty} \; c \left[\frac{1 - q^n \, (1 + i)^{-n}}{1 + i - q} \right]$$

y por lo tanto queda la siguiente expresión

$$\frac{c}{1 + i - q}$$

donde se puede observar que esta fórmula tiene una limitación que debe satisfacer la razón q de la progresión para que tenga sentido la perpetuidad, y es $q < (1 + i)$.

4.6.2. Rentas variables en progresión aritmética

Son variables en progresión aritmética cuando cada término se obtiene sumando o restando al anterior un valor constante ρ *que constituye la razón de la progresión.*

Si $\rho > 0$ será una renta variable en progresión aritmética creciente, y si $\rho < 0$ será una renta variable en progresión aritmética decreciente.

Entonces sus términos resultan:

$$
\begin{gathered}
c_1 = c \\
c_2 = c + \rho \\
c_3 = c + 2\,\rho \\
\dots\dots\dots \\
c_h = c + (h-1)\,\rho \\
\dots\dots\dots \\
c_n = c + (n-1)\,\rho
\end{gathered}
$$

En el caso que $\rho < 0$ hay que cuidar que los términos no se anulen. Para ello el último término debe cumplir la siguiente condición:

$$c + (n-1)\,\rho > 0$$

de donde se obtiene que $\rho > -\dfrac{c}{(n-1)}$, siempre teniendo en cuenta que c es el primer término de la renta.

A continuación se realizarán las deducciones de los modelos correspondientes a las distintas rentas temporarias y perpetuas.

4.6.2.1. Valor actual de las rentas inmediatas, temporarias y pospagables

Sumando los valores actuales, se tiene:

$$V_0 = c\,(1+i)^{-1} + (c+\rho)\,(1+i)^{-2} + \dots + (c+2\rho)(1+i)^{-3} + \dots + [c + (n-1)\,\rho]\,(1+i)^{-n}$$

Para simplificar la deducción se toma $v = (1+i)^{-1}$, por lo tanto:

$$V_o = c\,v + (c+\rho)\,v^2 + (c+2\rho)\,v^3 + \dots + [c + (n-2)\,\rho]\,v^{n-1} + [c + (n-1)\,\rho]v^n$$

Aplicando la distributiva y agrupando:

$$V_o = c\,[v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n] + [\rho v^2 + 2\rho v^3 + \dots + (n-2)\,\rho v^{n-1} + (n-1)\,\rho v^n$$

El primer corchete constituye el valor actual de una renta constante. En el segundo, la renta de términos variables se puede descomponer en la suma de rentas de términos constantes iguales a ρ, la primera de (n – 1) términos, la segunda de (n – 2) términos, y así sucesivamente hasta la última de 1 término, cada una de ellas descontadas al momento cero.

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i} + [\rho\, a_{\overline{n-1}|i}\, v + \rho\, a_{\overline{n-2}|i}\, v^2 + \dots + \rho\, a_{\overline{2}|i}\, v^{n-2} + \rho\, v^{n-1}]$$

Sacando factor común ρ y reemplazando por la expresión analítica, el valor actual de las rentas:

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i} + \rho \left[\frac{1 - v^{n-1}}{i}\, v + \frac{1 - v^{n-2}}{i}\, v^2 + \dots + \frac{1 - v^2}{i}\, v^{n-2} + v^{n-1} \right]$$

Sacando factor común 1/i , aplicando distributiva en cada término de la suma y operando en los numeradores:

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i} + \frac{\rho}{i} \left[v - v^n + v^2 - v^n + \dots + v^{n-2} - v^n + v^{n-1} - v^n \right]$$

Agrupando los términos positivos y los términos negativos dentro del corchete:

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i} + \frac{\rho}{i} [(v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}) - (v^n + v^n + \dots + v^n + v^n)]$$

Finalmente se obtiene:

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i} + \frac{\rho}{i} (a_{\overline{n}|i} - n v^n) \text{ o siendo } v = (1 + i)^{-1}$$

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i} + \frac{\rho}{i} [a_{\overline{n}|i} - n\,(1 + i)^{-n}]$$

Para no reiterar conclusiones ya justificadas, se propone al lector que realice las modificaciones correspondientes si la renta variable en progresión aritmética es diferida, anticipada y/o prepagable a partir de las consideraciones ya conocidas.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 15

Una pequeña empresa logra un préstamo por el cual se compromete a pagar inmediatamente y cada 60 días vencidos, 9 cuotas que decrecen periódicamente en \$ 556 a partir de la primera de \$ 16 112,75. Si la tasa de interés utilizada por la entidad crediticia es del 5 % constante para 60 días, se solicita a usted que determine el monto del capital recibido en préstamo.

Solución

$$V_0 = 16\,112{,}75\ \frac{1-(1+0{,}05)^{-9}}{0{,}05} - \frac{556}{0{,}05}\left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-9}}{0{,}05} - 9\,(1+0{,}05)^{-9}\right]$$

$$V_0 = 100\,000{,}00$$

4.6.2.2. Valor final de las rentas temporarias, inmediatas y pospagables

Conocido el valor actual de la renta variable en progresión aritmética, temporaria, inmediata y pospagable, su valor final resulta igual a dicho valor capitalizado por $(1+i)^n$

$$V_n = \left\{ c\, a_{\overline{n|}\,i} + \frac{\rho}{i}\left[a_{\overline{n|}\,i} - n\,(1+i)^{-n}\right] \right\} (1+i)^n$$

Recordando que capitalizando el valor actual de una renta constante se obtiene el valor final, resulta:

$$V_n = c\, s_{\overline{n|}\,i} + \frac{\rho}{i}\left(s_{\overline{n|}\,i} - n\right)$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 16

Una persona reunió $ 58 477 en un plan de ahorro de 12 cuotas mensuales. Si se sabe que la tasa de interés mensual que obtuvo fue el 0,6 % y que cada depósito superó al anterior en $ 500, se pide determinar el valor de la primera y la séptima cuota.

• *Solución*

$$58.477 = c\ \frac{(1+0{,}006)^{-12}-1}{0{,}006} + \frac{500}{0{,}006}\left[\frac{(1+0{,}006)^{-12}-1}{0{,}006} - 12\right]$$

$c = 2000$ y $c_7 = 2000 + 6 \times 500 = 5000$

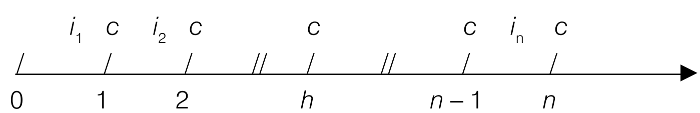
4.6.2.3. Valor actual de las rentas perpetuas, inmediatas y pospagables

El valor actual de una renta variable en progresión aritmética perpetua resulta de aplicar el límite cuando n tiende a infinito a su correspondiente renta temporaria. Conociendo ya que el límite de $a_{\overline{n|}i}$ cuando n tiende a infinito es igual a $1/i$, y que el producto nv^n que figura en el sustraendo adopta una indeterminación que es igual cero, resulta que el valor actual de la perpetuidad es

$$oc + \frac{\rho}{i} p \frac{1}{i}$$

4.7. Valoración de rentas con tasas variable

Suponiendo que se desea evaluar una renta de términos constantes, inmediata, temporaria y pospagable y que para su valoración se han fijado las tasas i_1 para el primer período, i_2 para el segundo y así sucesivamente hasta el último período que se ha fijado la tasa i_n , gráficamente se tiene:



Si en estas condiciones se desea determinar su valor actual, queda:

$$V_0 = c\,(1 + i_1)^{-1} + c\,(1 + i_2)^{-1}(1 + i_1)^{-1} + ... + c\,(1 + i_n)^{-1} ... (1 + i_2)^{-1}(1 + i_1)^{-1}$$

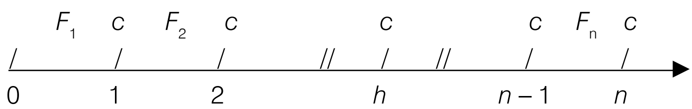
Mientras que su valor final será:

$$V_n = c\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,...\,(1 + i_n) + c\,(1 + i_3)\,...\,(1 + i_n) + ... + c\,(1 + i_n) + c$$

4.8. Valoración de rentas en un contexto inflacionario

No existe diferencia conceptual en la valoración de capitales en un contexto inflacionario ya sea que se trate de operaciones financieras simples o de operaciones financieras complejas. Si se convienen pagos o cobros mediante la utilización de rentas, se deben practicar los ajustes a cada prestación o contraprestación como si fueran varias operaciones financieras simples. La consigna es comparar siempre cantidades referidas a moneda de un mismo momento.

Suponiendo que se ha constituido una renta de n términos, inmediata, temporaria y pospagable, y que para su valuación se ha fijado una tasa i constante y que la misma será ajustada conforme a un índice de precios, siendo F_1, F_2, ...y F_n, las tasas de inflación para los respectivos períodos:



En estas condiciones la cuota base a moneda del origen es:

$$c = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \quad \text{y a partir de ella se obtienen:}$$

$$c_1 = c(1+F_1)$$
$$c_2 = c(1+F_1)\,(1+F_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = c\,(1+F_1)\,(1+F_2)\ \ldots\ (1+F_n)$$

En este caso la tasa i se convierte en tasa real porque se aplica sobre capitales ajustados, por lo tanto para verificar la equivalencia del intercambio se debe plantear:

$$V_0 = c_1(1+r)^{-1}\,(1+F_1)^{-1} + c_2(1+r)^{-2}\,(1+F_2)^{-1}\,(1+F_1)^{-1} + \ldots + c_n(1+r)^{-n}\,(1+F_n)^{-1} \ldots (1+F_1)^{-1}$$

Con respecto al valor final, si se lo quiere expresar a moneda del vencimiento sólo basta con aplicarle al modelo correspondiente el índice de corrección monetaria entre el origen y el vencimiento.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 17

Sea un crédito de \$ 10 000 al 2 % mensual de interés a pagar en 5 cuotas mensuales vencidas ajustables por inflación, siendo las tasas de inflación para los sucesivos períodos 0,9; 1,2; 1,2; 1 y 0,9 % respectivamente. Se pide:

a) Calcular el valor de las cuotas.

$$c = 10.000 \frac{0{,}02}{1-(1+0{,}02)^{-5}} = 2121{,}58$$

$c_1 = 2121{,}58 \times 1{,}009 = 2140{,}68$
$c_2 = 2140{,}68 \times 1{,}012 = 2166{,}37$
$c_3 = 2166{,}37 \times 1{,}012 = 2192{,}36$
$c_4 = 2192{,}36 \times 1{,}010 = 2214{,}28$
$c_5 = 2214{,}28 \times 1{,}009 = 2234{,}21$

b) Verificar la equidad del intercambio

$10000 = 2140{,}68 \times 1{,}02^{-1} \times 1{,}009^{-1} + 2166{,}37 \times 1{,}02^{-2} \times 1{,}012^{-1} \times 1{,}009^{-1} + 2192{,}36 \times 1{,}02^{-3} \times 1{,}012^{-2} \times 1{,}009^{-1} + 2214{,}28 \times 1{,}02^{-4} \times 1{,}01^{-1} \times 1{,}012^{-2} \times 1{,}009^{-1} + 2234{,}21 \times 1{,}02^{-5} \times 1{,}009^{-2} \times 1{,}01^{-1} \times 1{,}012^{-2}$

$10000 = 2079{,}99 + 2039{,}20 + 1999{,}21 + 1960{,}01 + 1921{,}59$

$10000 = 10000$

c) Calcular la tasa aparente implícita en esta operación.

Si se plantea la equivalencia del intercambio considerando los flujos efectivizados a moneda de la fecha de pago, los mismos son heterogéneos ya que tienen distinto poder adquisitivo, resultando entonces:

$10000 = 2140{,}68\ (1+i)^{-1} + 2166{,}37(1+i)^{-2} + 2192{,}36(1+i)^{-3} + 2214{,}28(1+i)^{-4} + 2234{,}21\ (1+i)^{-5}$

La tasa que satisface la ecuación, calculada con máquina financiera, es 0,030739. Esta tasa es la tasa aparente resultante de la financiación.

• PROBLEMAS

1. Por la compra de un bien cuyo precio de contado es de \$ 2500 se pacta el pago de un cierto número de cuotas mensuales de \$ 220 cada una aplicándose una tasa de interés mensual del 1,5 %. Se solicita:

1.a) Calcular el número de cuotas a pagar.

1.b) Dado que el valor anterior no es entero determinar el monto de las cuotas refuerzo que deberían pagarse conjuntamente con las cuotas 6 y 12 para cancelar la deuda.

Solución

1.a) $V_0 = c \times a_{\overline{n}|\,i}$

$$2500 = 220 \times \frac{1 - (1 + 0{,}015)^{-n}}{0{,}015}$$

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{c}{c - V_0 i}\right)}{\ln\,(1 + i)} \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\dfrac{200}{200 - 2500 \times 0{,}015}\right)}{\ln\,(1 + 0{,}015)}$$

$n = 12{,}55$

1.b) $2500 = 220 \times \frac{1-(1+0{,}015)^{-12}}{0{,}015}$ $CC \times (1{,}015)^{-6} + CC \times (1{,}015)^{-12}$

$2500 = 2399{,}65 + CC \times 1{,}750929$

$CC = 57{,}31$

2. El gerente de producción de una compañía industrial ha enviado al directorio un memo con el objeto de cambiar una maquinaria. El mismo considera que puede ser vendida valorizando los flujos de fondos que generará mensualmente en el año en curso. El primer flujo se estima en \$ 7500 a mes vencido, suma que decrece a partir del 2do mes inclusive en un 10 % como consecuencia del rendimiento operativo decreciente por desgaste. Se solicita:

2.a) Si la tasa es del 1,5 % mensual, calcular el valor de la maquinaria.

2.b) Determinar el flujo de fondos del 7mo mes.

Solución

2.a) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6750}{7500} = 0{,}9$

$V_0 = a_1 \times \frac{1-[q^n \times (1+i)^{-n}]}{1+i-q}$; si $(1+i) \neq q$

$V_0 = 7500 \times \frac{1-[0{,}9^{12} \times (1{,}015)^{-12}]}{1{,}015-0{,}9}$

$V_0 = 49811{,}70$

2.b) $a_n = a_1 \times q^{(n-1)}$

$a_7 = 7500 \times 0{,}9^{(7-1)} = 3985{,}80$

3. En el día de la fecha un comerciante adquirió mercaderías a su proveedor por \$ 20076,49 y se comprometió a pagar 6 documentos: el primero de \$ 4000 con vencimiento a los 45 días, el segundo de \$ 5000 con vencimiento a los 90 días y los cuatro restantes con vencimiento a los 120, 150, 180 y 210 días respectivamente, todos ellos del mismo valor nominal. Sabiendo que el acreedor aplica una tasa de interés del 2 % para 30 días se pide:

3.a) Calcular el valor nominal de los 4 documentos iguales que le permitirán cancelar la deuda utilizando, donde lo justifique el cálculo, el modelo de renta correspondiente.

3.b) Si a los 130 días de realizada la compra el comerciante decide reemplazar los documentos restantes por un único documento cuyo vencimiento común opera los 60 días de esa fecha, se solicita: determinar el nominal del documento único si la valoración se realiza en las condiciones sustanciales pactadas inicialmente.

• *Solución*

3.a) $20\,076{,}49 = 4000 \dfrac{1}{(1 + 0{,}02)^{45/30}} + 5000 \dfrac{1}{(1 + 0{,}02)^{90/30}} + c \dfrac{1 - (1 + 0{,}02)^{-4}}{0{,}02}$

$$\times \frac{1}{(1 + 0{,}02)^{3}}$$

$c = 3200$

3.b) $D \dfrac{1}{(1 + 0{,}02)^{60/30}} = 3200 \dfrac{1 - (1 + 0{,}02)^{-3}}{0{,}02} 1{,}02^{10/30}$

$D = 9664{,}84$

• PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Una persona se compromete a depositar 18 cuotas mensuales, vencidas, constantes y consecutivas en un banco que le asegura una tasa de interés del 3 % mensual. Las primeras 5 cuotas las deposita en tiempo y forma y las 13 restantes fueron depositadas regularmente después de transcurridos tres meses sin depósitos. Se pide:

1.a) Calcular el importe de la cuota mensual si al cabo de la operación la cuenta tiene un saldo de $ 65 000. R: 2692,92

1.b) Determinar el importe extraordinario que debería depositar al vencimiento del año de iniciada la inversión para lograr el mismo monto y en la misma fecha si sólo efectúa los primeros 5 depósitos. R: 32 233,49

2. Un hombre se propone constituir un fondo de $ 100 000 dentro de 25 meses depositando a partir de hoy una cierta suma a principio de cada mes en un entidad que le asegura para todo el plazo una tasa del 1,3 % mensual de interés. A estos fines se lo consulta a Ud. para que determine:

2.a) La suma mensual que deberá depositar a principio de cada mes para reunir el capital deseado. R: 3367,09

2.b) Si después de depositar la cuota 18 se viera imposibilitado de seguir cumpliendo con los depósitos establecidos, determinar la suma que le correspondería agregar un mes antes del vencimiento para lograr su objetivo. R: 24 509,10

3. Para cancelar una deuda de $ 7000 se conviene el pago de 12 cuotas constantes mensuales y vencidas exigibles luego de transcurridos 2 meses de diferimiento calculadas a una tasa del 2 % mensual. Se pide:

3.a) Calcular el valor de la cuota. R: 688,66

3.b) Si el deudor no paga las cuotas 8 y 9 determinar el valor de las cuotas 10, 11 y 12 para poder cancelar su deuda en el plazo fijado. R: 1171,02

CAPÍTULO 5
Sistemas de amortización de préstamos

5.1. Sistemas de amortización de préstamos. Concepto y generalidades

Cuando individuos o empresas necesitan efectuar consumos o realizar inversiones y no disponen de las sumas necesarias para su concreción, deben recurrir a personas físicas o entidades que se dedican a la toma y colocación de fondos a los efectos de solicitar préstamos de dinero o adquirir bienes financiados.

Es necesario dar una definición de préstamo y mencionar algunos aspectos a tener en cuenta para su estudio desde el punto de vista de la Matemática Financiera dejando de lado las consideraciones legales.

Todo *préstamo* es una operación financiera porque implica un intercambio no simultáneo de capitales y, según la cantidad de capitales que se intercambien, puede ser simple o compleja, dependiendo de las condiciones formales y sustanciales que se establezcan entre las dos partes intervinientes: el *acreedor* o *prestamista*, que es quien presta el dinero o entrega el bien y el *deudor* o *prestatario*, que es quien recibe el capital objeto del préstamo.

Habiendo efectuado estas consideraciones se puede decir que *préstamo es la cesión de un capital por un cierto tiempo, por parte de una persona (acreedor) a favor de otra que lo recibe (deudor) quien se compromete a reembolsarlo basado en determinadas condiciones pagando además, durante el tiempo de vigencia de la operación, un interés estipulado en el momento de contratación*.

Bajo dichas condiciones debe verificarse el principio de equidad financiera, o sea, la equivalencia entre los conjuntos de capitales intercambiados. Esto significa que el valor del préstamo o capital cedido por el acreedor tiene que ser igual al valor actual de los desembolsos que efectúe el deudor en función de las condiciones sustanciales que se hayan pactado.

La obligación por parte del acreedor generalmente es inmediata, ya que luego de aprobados los requisitos formales y acordado el crédito, debe entregar la suma objeto del mismo, mientras que la obligación del deudor reviste formas muy variadas para la devolución del capital, y esas formas constituyen los distintos *sistemas de amortización de deudas*, siendo éste el tema de estudio del presente capítulo.

Cabe observar que en el lenguaje financiero el término *amortizar* se refiere al proceso por el cual se extingue una deuda mediante el pago del capital, o proceso por el cual se devuelve el capital que originó el préstamo.

Los sistemas de amortización de deudas utilizados en la práctica comercial y bancaria se pueden sintetizar de la siguiente manera:

I) *Sistemas de reembolso mediante un pago único de capital*

* Con *pago acumulado* de intereses:

a) al vencimiento del plazo (como si se tratara una operación de capitalización);

b) al inicio del plazo (se deducen por adelantado como si fuera una operación de descuento).

* Con *pago periódico* de intereses:

a) al final de cada período;

b) al inicio de cada período.

II) *Sistemas de reembolso mediante pago periódico de capital*

En estos sistemas se utilizan rentas, de manera tal que cada término es constitutivo de una parte de capital y una parte de interés sobre el saldo de capital adeudado, y según la manera en que se calculen dichos importes, se conocen los siguientes:

• Sistema Francés
• Sistema Alemán
• Sistema Americano

III) *Sistema de tasa directa o cargada*

En nuestro país se acostumbra a utilizar una tasa que se aplica sobre el capital inicial para el cálculo de los intereses de todo el plazo y luego se divide por el número de cuotas pactado, resultando así una tasa ficticia que no responde al concepto de tasa de interés ya que no se aplica sobre los saldos adeudados.

Al estudiar cada uno de estos sistemas, se efectuará el análisis correspondiente en ocasión de producirse la modificación del plazo y/o la tasa, como así también los planteos que deben formularse cuando se desee refinanciar una deuda proponiendo los modelos matemáticos a aplicar en cada situación. En estos casos y en cualquier otro que implique un cambio en las condiciones substanciales pactadas *se debe plantear una equivalencia financiera entre dos conjuntos de capitales: el flujo de fondos que surge del contrato original debe ser equivalente al flujo de fondos resultante de modificar el mismo, evaluados a una tasa de referencia.*

Por lo expuesto, en cada préstamo se desarrollarán las siguientes situaciones:

1. *Cancelación anticipada*

Es el reembolso de la deuda antes del vencimiento estipulado y esto implica la modificación de una cláusula contractual como es el plazo de la operación de crédito. Generalmente esta situación está prevista en los contratos; en este caso no habría lugar a discusión, ya que las partes deben atenerse a lo pactado y habitualmente la suma que cancela el préstamo es igual al importe resultante de aplicar las condiciones contractuales hasta el momento de la cancelación.

En caso de no estar prevista en el contrato, la Matemática Financiera provee los métodos necesarios para calcular la suma que cancelaría la deuda para que, con base en el principio de equidad financiera, ninguna de las partes se vea perjudicada.

La cancelación anticipada puede no convenir al deudor o al acreedor, según la tasa de interés vigente en el mercado haya variado en más o en menos, respectivamente.

Esta discusión tiene sentido cuando se han pactado tasas de interés constantes, o variables, pero prefijadas contractualmente.

Si se pactó una tasa flotante o variable según el comportamiento que las mismas tengan en el mercado, la discusión no tiene sentido, ya que cuando varía la tasa de mercado también varía la del contrato.

Entonces, la propuesta del planteo de la equivalencia correspondiente a la cancelación anticipada adquiere relevancia cuando el contrato no se expide al respecto y depende de la variación que hayan sufrido las tasas en el mercado financiero al momento de cancelar con respecto a las existentes al momento de la contratación.

Particularmente en este punto, la suma que cancelaría la deuda en un momento anterior, debe ser una suma tal que reinvertida en el mercado a la tasa vigente y por el tiempo que resta para finalizar el contrato, permita reunir el mismo valor o valores que el acreedor hubiera obtenido si no se hubiera producido esta modificación contractual como es el reembolso antes de tiempo.

2. *Reembolso parcial*

El reembolso parcial es un pago a cuenta que puede efectuar el prestatario a los efectos de reducir su deuda; el problema que se presenta en este caso, consiste en determinar el saldo resultante luego de efectuar dicho desembolso. Para la determinación del mismo deben tenerse en cuenta las consideraciones desarrolladas en la cancelación total; ese saldo debe ser una suma tal que, a la tasa pactada, junto con el reembolso efectuado, reinvertido a la tasa de mercado, permitan al prestamista percibir al vencimiento del plazo original la misma cantidad que recibiría sin aceptar dicho reembolso parcial.

3. *Reconstrucción del capital*

Este concepto explica el problema que se presenta en los sistemas de préstamo de reembolso único de capital en los cuales el deudor, al tener que devolver el capital en forma íntegra, puede encontrarse con el inconveniente de no contar, en el vencimiento del plazo, con la suma a desembolsar. A estos efectos la solución que se sugiere al prestatario es la de efectuar una previsión que permita constituir el capital a reintegrar.

Esto se logra depositando, con cierta regularidad, sumas periódicas que constituyen las imposiciones o términos de una renta temporaria cualquiera que permitan lograr un valor final igual al capital que se desea constituir.

Esta operación es una operación paralela, al margen del contrato, que se realiza a una tasa de mercado y que, por tratarse de imposiciones, es una tasa pasiva, y no es una operación obligatoria sino una opción para el deudor a los efectos de prever y asegurar la devolución del capital.

4. *Valor de cesión*

La determinación de este valor es necesaria cuando el prestamista desea ceder o transferir los derechos que tiene sobre un crédito. Este valor de cesión está integrado por dos conceptos, a saber:

• *Nuda propiedad:* es el valor actual del capital o cuotas de capital pendientes de pago a un momento h, anterior al vencimiento n, evaluados a la tasa de mercado.

• *Usufructo:* es el valor actual a un momento h, anterior al vencimiento n de los intereses pendientes de pago, evaluados a la tasa de mercado.

La suma de ambos valores es el *valor de cesión* del préstamo o *plena propiedad*.

5. *Tasa interna de retorno*

El concepto de tasa interna de retorno ya ha sido introducido en el capítulo 3, cuya aplicación adquiere mucha importancia en este punto de préstamos. La determinación de la misma, al incorporar los gastos resultantes de cada crédito en particular, según la parte que corresponda, deudor o acreedor, permitirá conocer el verdadero costo o el verdadero rendimiento respectivamente. En el ámbito financiero, cuando se refiere a la tasa resultante para el deudor, se la suele publicitar como *costo financiero total* y es distinta con respecto a la tasa indicadora del rendimiento financiero del acreedor ya que en los gastos impositivos éste actúa como agente de retención y sus cargas son otras.

Existen también casos de préstamos en que la tasa contractual no es una tasa efectiva o es una tasa ambigua; para ello se hace necesaria la determinación de la *tasa implícita* aplicando el mismo concepto.

En ambos casos *se plantea la equivalencia financiera donde el valor del capital objeto del préstamo debe ser igual al valor actual de los desembolsos periódicos del deudor o de los ingresos del acreedor; la tasa que satisface esa ecuación es la tasa efectiva de la operación para cada una de las partes, según corresponda*.

Teniendo en cuenta lo expuesto y considerando que los gastos inherentes son muy versátiles, no se estima conveniente proponer un modelo teórico específico en los distintos sistemas de préstamos, ya que el lector puede interpretar que la ecuación propuesta sea la única forma de cálculo cuando en realidad son numerosas las relaciones posibles.

A estos efectos se formularán ejemplos prácticos adecuados que permitirán determinar la *tasa implícita* en cualquier operación de préstamo.

Nomenclatura: en este capítulo se incorporan nuevos conceptos por lo que es necesario asignar una simbología a los mismos. A tal fin, se aconseja utilizar la siguiente:

$V_0 \rightarrow$ valor de la deuda o capital objeto del préstamo
$A \rightarrow$ cancelación anticipada
$R \rightarrow$ reembolso parcial
$S_h \rightarrow$ saldo de deuda en el momento h
$c_h \rightarrow$ servicio o cuota total del préstamo en el momento h
$I_h \rightarrow$ intereses contenidos en la cuota h
$t_h \rightarrow$ cuota de amortización contenida en la cuota h
$T_h \rightarrow$ total amortizado hasta el momento h inclusive
$K \rightarrow$ nuda propiedad
$U \rightarrow$ usufructo

5.2. Sistema de reembolso único de capital y pago acumulado de intereses al vencimiento del plazo

5.2.1. Características del sistema

En este sistema el capital y los intereses se devuelven al vencimiento del plazo, por lo que se lo puede identificar como una operación simple de capitalización. Por lo tanto, luego de determinar las condiciones substanciales pactadas en la contratación, el intercambio resultante es inmediato. Así, siendo V_0 el capital recibido en préstamo, si se estipula que el plazo contiene n unidades de tiempo, resulta que el capital V_n a desembolsar al vencimiento será:

a) si se pacta una tasa de interés constante i para cada período o interés compuesto a tasa constante:

$$V_n = V_0 (1+i)^n$$

b) si se pacta tasa de interés flotante o interés compuesto a tasa variable:

$$V_n = V_0 (1+i) (1+i_2) (1+i_3) \ldots (1+i_n)$$

c) si se incluye cláusula de ajuste o corrección monetaria con indexación del capital y pago de intereses a una tasa constante sobre el capital ajustado:

$$V_n = V_0 (1+F_{[0;n]}) (1+i)^n$$

d) si se pacta una tasa de interés simple para la unidad de tiempo:

$$V_n = V_0\,(1+i^{(s)}\,n)$$

Como puede observarse, las relaciones expuestas corresponden a distintas condiciones de valoración estudiadas en el desarrollo de las operaciones financieras simples.

A continuación, y de acuerdo a lo propuesto en la introducción de este capítulo, se efectuará el análisis de las distintas situaciones que pueden acontecer en este préstamo. Para ello se toman en cuenta los conceptos ya vertidos; las relaciones matemáticas a obtener serán las resultantes de considerar sólo la ley financiera planteada en **a)** ya que en las restantes resulta muy improbable la necesidad de plantear otras equivalencias, puesto que los valores a determinar en el momento de modificar alguna de las condiciones substanciales son los provenientes de aplicar lo pactado contractualmente.

5.2.2. Cancelación anticipada

Si la cancelación es propuesta en un momento cualquiera o a la finalización de un período h ($h < n$) y la tasa vigente en el mercado es i', planteando en $t = n$:

$$A\,(1 + i')^{n-h} = V_0\,(1 + i)^n$$

entonces la suma que cancela la deuda en t = h será:

$$A = V_0\,\frac{(1 + i)^n}{(1 + i')^{n-h}}$$

Puede observarse que:

$$\text{Si } i = i' \Rightarrow A = V_0\,(1 + i)^h\,,$$

en este caso la suma que corresponde al capital más los intereses por el tiempo que se dispuso del mismo y, además, es la suma adeudada en razón del contrato.

$$\text{Si } i > i' \Rightarrow A > V_0\,(1 + i)^h\,,$$

en este caso le interesa cancelar al deudor ya que ese préstamo le está resultando más oneroso que si lo obtiene en el mercado por lo que el acreedor, para no verse perjudicado, debería recibir una suma mayor a lo efectivamente adeudado para que al volver a colocar los fondos en una operación similar pueda obtener el mismo valor.

$$\text{Si } i < i' \Rightarrow A < V_0 (1 + i)^h ,$$

en este supuesto, le interesa cancelar al acreedor, porque puede tomar los fondos y colocarlos a una tasa mayor, por lo que el deudor entregaría una suma menor a lo efectivamente adeudado para mantener la equidad del intercambio inicial.

5.2.3. Reembolso parcial

Si el prestatario ofrece entregar una suma R al vencimiento del período h, el saldo S_h que en ese momento arrojará el préstamo se obtiene planteando la siguiente equivalencia:

$$R_h (1 + i')^{n-h} + S_h (1 + i)^{n-h} = V_0 (1 + i)^n$$

de lo que se deduce:

$$S_h = V_0 (1 + i)^h - \frac{R_h (1 + i')^{n-h}}{(1 + i)^{n-h}}$$

Si se realizan las mismas consideraciones que se hicieron en la cancelación anticipada, podrá observarse que:

$$\text{Si } i = i' \Rightarrow S_h = V_0 (1 + i)^h - R_h ,$$

en este caso el saldo resulta igual a la diferencia entre la suma adeudada al monto h y el reembolso efectuado, y coincide con el valor resultante de aplicar las condiciones contractuales.

$$\text{Si } i > i' \Rightarrow S_h > V_0 (1 + i)^h - R_h ,$$
$$\text{Si } i < i' \Rightarrow S_h < V_0 (1 + i)^h - R_h ,$$

5.2.4. Reconstrucción del capital

En este sistema de amortización puede interesar constituir un fondo igual al capital y/o capital más intereses. Así, y sólo a modo de ejemplo, si se decide hacer depósitos vencidos coincidentes con los períodos y plazo del préstamo a una tasa pasiva de mercado que permita reunir el capital y los intereses resultará una cuota de imposición igual a:

$$c = V_0 (1 + i)^n \frac{i'}{(1 + i')^n - 1}$$

Como se dijo en el párrafo anterior, este caso es sólo un ejemplo, ya que las imposiciones pueden ser términos de una renta prepagable y/o variable o pueden ser pagos asincrónicos con respecto a los períodos del préstamo, resultando entonces otros modelos de rentas a aplicar para calcular la cuota a depositar.

5.2.5. Valor de cesión: Nuda propiedad y usufructo

Particularmente en este sistema de amortización para determinar el valor de cesión en un momento $h < n$ resulta:

$$K_h^{i'} = V_0\,(1 + i')^{-(n-h)},$$ la *nuda propiedad*.

$$U_h^{i'} = V_0\,[(1 + i)^n - 1]\,(1 + i')^{-(n-h)},$$ el *usufructo*.

Si se su~~man ambo~~s se obtiene el *valor de cesión*:

$$V_h^{i'} = V_0\,(1 + i')^{-(n-h)} + V_0\,[(1 + i)^n - 1]\,(1 + i')^{-(n-h)}$$

y al efectuar las operaciones correspondientes resulta

$$V_h^{i'} = V_0\,\frac{(1 + i)^n}{(1 + i')^{-(n-h)}}$$

valor que, ante igualdad de tasas, coincide con el de la cancelación anticipada.

Por tratarse del primer sistema de amortización se propone a continuación un ejemplo práctico que contempla todas las situaciones tratadas anteriormente.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 1

Sea un préstamo de \$ 100 000 reembolsable a los 10 meses juntamente con sus intereses al 2,5 % de interés mensual. Se pide calcular:

a) La suma que deberá desembolsar el deudor al vencimiento.

$$V^{10} = 100\,000\,(1 + 0{,}025)^{10} = 128\,008{,}45$$

b) La tasa interna de retorno mensual indicadora del costo para el deudor si tuvo que abonar \$ 1946 de gastos iniciales y 12 % de impuestos sobre los intereses abonados, al vencimiento de la operación.

Gastos iniciales: $ 1946

Gastos finales: 12 % sobre 28 008,45 resulta $ 3361,01

Ecuación para calcular la TIR:

$$100\,000 = 1946 + 131\,369{,}46\,(1 + tir)^{-10}$$

Donde la TIR mensual resulta ser 0,0296815 ó 2,96815 %

c) La suma que cancela la deuda a los 6 meses del otorgamiento.

c.1) bajo las condiciones contractuales:

$$A = 100\,000\,(1 + 0{,}025)^{6} = 115\,969{,}34$$

c.2) si la cancelación no está prevista en el contrato y la propone el deudor ya que la tasa en el mercado ha disminuido al 1,8 %:

$$\mathrm{A} = 100\,000\,\frac{(1 + 0{,}025)^{10}}{(1 + 0{,}018)^{4}} = 119\,192{,}11$$

d) El saldo resultante si en la misma fecha del punto c) el deudor propone efectuar un pago parcial de $ 40 000

d.1) bajo las condiciones contractuales:

$$S = 115\,969{,}34 - 40.000 = 75\,969{,}34$$

d.2) si el reembolso parcial no está previsto en el contrato y la tasa en el mercado es la propuesta en c).

$$S_{6} = 100\,000\,(1 + 0{,}025)^{6} - \frac{40\,000\,(1 + 0{,}018)^{4}}{(1 + 0{,}025)^{4}} = 77\,050{,}88$$

e) El importe de las 5 cuotas constantes bimestrales adelantadas que debería depositar el deudor para reunir el capital y los intereses a pagar al vencimiento si para ello logra una tasa de interés del 1,5 % bimestral.

$$c = 128\,008{,}45\;\frac{0{,}015}{(1 + 0{,}015)^{5} - 1}\;\frac{1}{(1 + 0{,}015)} = 24\,477{,}90$$

f) El valor de cesión si el acreedor deseara ceder sus derechos al vencimiento del séptimo mes cuando la tasa de mercado es del 2 % mensual.

$K_7^{0,02} = 100\,000\ (1 + 0{,}02)^{-3} = 94\,232{,}23$

$U_7^{0,02} = 28\,008{,}45\ (1 + 0{,}02)^{-3} = 26\,392{,}99$

$V_7^{0,02} = 94\,232{,}23 + 26\,392{,}99 = 120\,625{,}22$

5.3. Sistema de reembolso único de capital y pago acumulado de intereses al inicio del plazo

5.3.1. Características del sistema

Los intereses se deducen por adelantado como si se tratara de una operación de descuento. Como se dijo en el capítulo 2, los *intereses anticipados* constituyen un método de cálculo que no responde al sentido financiero del interés, ya que el mismo se genera por el transcurso del tiempo y no se produce en forma espontánea. Es un sistema de préstamo a través del cual el deudor recibe una suma menor al capital solicitado, resultante de descontar los intereses, para luego devolver al vencimiento el capital objeto del préstamo que, en realidad, incluye el interés que debe ser vencido y exigible luego del uso y goce del capital.

Así, siendo V_n el capital a desembolsar al vencimiento, si se estipula que el plazo contiene n unidades de tiempo, resulta que el capital V_0 a percibir por el deudor en la fecha de otorgamiento será, según las condiciones más usuales para este tipo de operaciones:

a) si se pacta una tasa de interés constante *i* para cada período o descuento racional compuesto:

$$V_0 = V_n\ (1 + i)^{-n}$$

b) si se pacta una tasa de descuento constante *d* para cada período o descuento comercial compuesto:

$$V_0 = V_n\ (1 - d)^{n}$$

c) si se pacta una tasa de interés simple *i(s)* para cada período o descuento racional simple:

$$V_0 = V_n\ (1 + i^{(s)} n)^{-1}$$

d) si se pacta una tasa de descuento simple *d(s)* para cada período o descuento comercial simple:

$$V_0 = V_n\ (1 - d^{(s)} n)$$

Con respecto a las distintas situaciones formuladas en el inicio de este capítulo y, dadas las características de este sistema en el cual los intereses fueron cobrados o deducidos al inicio, deben hacerse las siguientes observaciones:

• *Cancelación anticipada y reembolso parcial*: la discusión propuesta carece de sentido financiero.

• *Reconstrucción del capital*: tiene la misma finalidad enunciada oportunamente pero el propósito será constituir sólo el capital.

• *El valor de cesión*: está constituido exclusivamente por la nuda propiedad.

Como ejercicio de aplicación de este sistema de préstamo se sugiere al lector remitirse al problema de aplicación Nº 10 del capítulo 2, ya que el mismo es un caso concreto y real de la práctica bancaria.

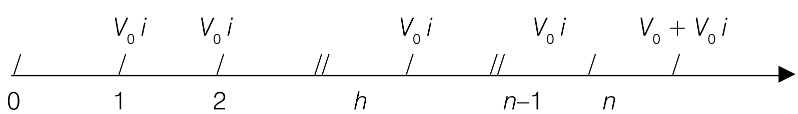
5.4. Sistemas de reembolso único de capital y pago periódico de intereses por vencido

5.4.1. Características del sistema

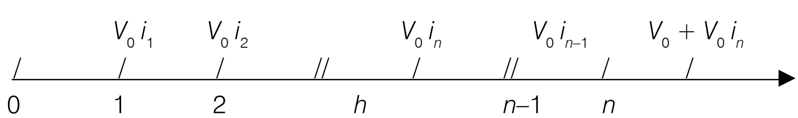
En este sistema el deudor deberá pagar periódicamente los intereses de acuerdo a las condiciones pactadas y reintegrar el capital al finalizar el plazo estipulado o sea al vencimiento del último período. Como la deuda se paga al vencimiento, el saldo de la misma durante toda la vigencia del contrato es siempre el monto del préstamo V_0.

Los desembolsos a efectuar por el deudor serán:

a) si se pacta una tasa de interés constante i para cada período:



b) si se pacta tasa de interés flotante:



c) si se incluye cláusula de ajuste o corrección monetaria con indexación del capital y el pago de intereses a una tasa constante sobre el capital ajustado, será:

$V_0\,[1 + F_{[0;\,h]}]\, i$ el importe correspondiente a los intereses de un período cualquiera, por ejemplo, en el h–ésimo y

$V_0\,[1 + F_{[0;\,n]}]$ el capital a reintegrar al vencimiento.

Cualesquiera sean las condiciones pactadas debe verificarse la igualdad entre el valor del capital recibido en préstamo y el valor actual de los pagos a efectuar por el deudor. La demostración de esta equivalencia es inmediata cuando se trata de tasas constantes, puesto que el importe periódico de los intereses son los términos de una renta constante inmediata, temporaria y pospagable, resultando:

$$V_0 = V_0\, i \quad \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} + V_0\,(1 + i)^{-n}$$

$$V_0 = V_0 - V_0\,(1 + i)^{-n} + V_0\,(1 + i)^{-n} \qquad \text{por lo que resulta } V_0 = V_0$$

Se comprueba así el principio de equidad financiera ya que, en las condiciones pactadas, el valor actual de los compromisos del deudor resulta igual al monto recibido en préstamo.

5.4.2. Cancelación anticipada

Dada la modalidad de este sistema de amortización y teniendo en cuenta los conceptos vertidos en la introducción resulta, planteando en $t = n$:

$$A\,(1 + i')^{n-h} = V_0\, i\, \frac{(1 + i')^{n-h} - 1}{i'} + V_0$$

y despejando se obtiene la suma que cancela la deuda en $h < n$:

$$A = V_0\, \mathrm{i}\, \frac{1 - (1 + i')^{-(n-h)}}{i'} + V_0\,(1 + i')^{-(n-h)}$$

Puede observarse que si la cancelación se efectuara en un momento t coincidente con el vencimiento de un período cualquiera, luego del pago de los intereses correspondientes a dicho período, la suma que cancelaría la deuda sería:

Si $i = i'$ $\quad\Rightarrow\quad$ $A = V_0$
Si $i > i'$ $\quad\Rightarrow\quad$ $A > V_0$
Si $i < i'$ $\quad\Rightarrow\quad$ $A < V_0$

5.4.3. Reembolso parcial

Se propone a continuación la igualdad que debe verificarse para que el reembolso sea aceptado:

$$R_h (1 + i')^{n-h} + S + S\, i\, \frac{(1 + i')^{n-h} - 1}{i'} = V_0 + V_0\, i\, \frac{(1 + i')^{n-h} - 1}{i'}$$

En la misma se observa la equivalencia financiera a plantear para que ninguna de las partes se vea perjudicada. En el primer miembro se tienen los desembolsos que deben efectuarse a partir del momento en que se produce la modificación contractual evaluados al vencimiento: el pago parcial reinvertido a la tasa de mercado, el saldo a entregar al vencimiento y los intereses periódicos que restan abonar hasta $t = n$ sobre el saldo que quedó en $t = h$. El valor de éstos debe ser igual a los importes que recibiría el deudor si se mantienen las condiciones iniciales evaluados al mismo momento, que son los valores del segundo miembro. Estos planteos se realizan siempre bajo el supuesto de que el acreedor se dedica a la toma y colocación de fondos por lo que a medida que va recibiendo los pagos los reinvierte en el mercado a la tasa i'.

Resolviendo la ecuación se tiene:

$$S = V_0 - R_h \frac{(1 + i)^{n-h}}{1 + i\, \frac{(1 + i)^{n-h} - 1}{i'}}$$

Por las consideraciones ya efectuadas se tiene que:

Si $i = i'$ $\Rightarrow$ $S = V_0 - R_h$
Si $i > i'$ $\Rightarrow$ $S > V_0 - R_h$
Si $i < i'$ $\Rightarrow$ $S < V_0 - R_h$

5.4.4. Reconstrucción del capital

Para este punto se sugiere remitirse al 5.2.4 ya que tiene las mismas características y fundamentos por tratarse de un sistema de amortización de reembolso único. No obstante es oportuno destacar que algunos autores (Murioni y Trossero; Casstegnaro) al tratar este sistema hacen la distinción entre «sin constitución de un fondo» y «con constitución de un fondo», llamándolo en este último caso *Sistema Americano*. En este trabajo se supone que la reconstrucción del capital en el sistema de reembolso único con pago periódico de intereses es una alternativa que tiene el deudor como previsión para reunir el capital adeudado, y si el depósito de la suma periódica que realiza para lograr ese fin lo hace en forma coincidente con la fecha de pago de los intereses periódicos, se asemeja al sistema americano que se desarrollará oportunamente. En ese sistema la constitución del fondo es una obligación contractual y no facultativa.

5.4.5. Valor de cesión: nuda propiedad y usufructo

En este caso, los modelos matemáticos para calcular la nuda propiedad $(K_h^{i'})$ y el usufructo $(U_h^{i'})$ son, si las tasas son constantes:

$$K_h^{i'} = V_0\,(1 + i')^{-(n-h)}$$

$$U_h^{i'} = V_0\, i \;\frac{1 - (1 + i')^{-(n-h)}}{i'}$$

$$V_h^{i'} = V_0\,(1 + i')^{-(n-h)} + \; V_0\, i \;\frac{1 - (1 + i')^{-(n-h)}}{i'}$$

Si las tasas son flotantes, para calcular el usufructo, no se puede usar el modelo de valor actual de una renta, debiendo descontarse cada uno de los montos de los intereses como capitales unitarios.

• *Observación:* si en este sistema de reembolso único de capital, el pago de los intereses se realiza por período adelantado, la renta que constituyen los mismos se convierte en prepagable y por lo tanto, en caso de tratarse de intereses constantes, en las ecuaciones antes planteadas sólo basta con aplicar el factor $(1 + i)$ a los modelos de las correspondientes rentas pospagables.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 2

Un comerciante obtiene un préstamo de \$ 10 000 a reintegrar a los 180 días mediante el pago de intereses cada 30 días vencidos a una tasa de interés del 2 % para 30 días.

a) Ubicar en un gráfico temporal los capitales intercambiados.

						–10 000
10 000	–200	–200	–200	–200	–200	–200
0	30	60	90	120	150	180

b) Dado que el deudor puede conseguir la suma para efectuar la cancelación anticipada a la tasa de mercado que, para ese tipo de operaciones ha disminuido al 1,3 % para 30 días, le propone a su acreedor cancelar su deuda inmediatamente después de pagar la segunda cuota de interés: calcular la suma que deberá entregar al prestamista para que no resulte perjudicado.

Si se plantea en $t = n$:

$$A\,(1{,}013)^{6-2} = 200 \text{ x } \frac{(1{,}013)^4 - 1}{0{,}013} + 10\,000$$

$A\,(1{,}013)^4 = 200 \text{ x } 4{,}0787 + 10\,000$
$A\ 1{,}053 = 10.815{,}74$
$A = 10\,815{,}74/1{,}053$
$A = \$\ 10\,271{,}13$

Si se plantea en $t = h$:

$$A = 200 \text{ x } \frac{1 - (1{,}013)^{-4}}{0{,}013} + 10\,000\,(1{,}013)^{-(6-2)}$$

$A = 200 \text{ x } 3{,}78733 + 10\,000\,(1{,}013)^{-4}$
$A = 774{,}66 + 9496{,}47$
$A = \$\ 10\,271{,}13$

Puede apreciarse que la suma determinada es mayor a \$ 10 000 ya que la tasa de mercado es menor a la pactada.

c) Determinar el saldo resultante si en lugar de cancelar totalmente, el deudor entregara la suma de \$ 4000 como reembolso parcial en la misma fecha y a la misma tasa de mercado del punto anterior.

$$4000\,(1{,}013)^4 + S + S\ 0{,}02\,\frac{(1{,}013)^4 - 1}{0{,}013} = 200\,\frac{(1{,}013)^4 - 1}{0{,}013} + 10\,000$$

$4212{,}08 + S\,(1 + 0{,}081574) = 815{,}74 + 10.000$
$1{,}081574\,S = 10.815{,}74 - 4212{,}08$
$S = \$\ 6105{,}60$

Igualmente a lo observado en el punto b), el saldo resultante es mayor a \$ 6000 por el mismo motivo.

Se formula a continuación un ejercicio práctico que propone como condición substancial el pago de intereses periódicos a tasas variables por período vencido.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 3

Un particular obtiene de otro particular la suma de \$ 8000 en préstamo conviniendo la devolución del capital a los 150 días y el pago de intereses periódicos cada 30 días vencidos a tasas variables, predeterminadas en el momento de contratación. Se solicita:

a) Ubicar en un gráfico temporal el flujo de fondos resultante si se sabe que las tasas de interés para los sucesivos períodos de 30 fueron respectivamente: 1,8; 2,5; 2,5; 2,7 y 3 %.

					–8000
8000	–144	–200	–200	–216	–240
0	30	60	90	120	150

b) Dado que a los 60 días de la contratación, y habiendo pagado los intereses correspondientes hasta esa fecha, la tasa de interés de mercado se posicionó en el 2 % para 30 días, el deudor prefirió proponer al acreedor la cancelación anticipada de la deuda, quien accede con la condición de que le entregue una suma tal que no lo perjudique; determinar dicha suma:

si se plantea en $t = 150 \rightarrow A\ (1 + 0{,}02)^{90/30} = 200\ (1 + 0{,}02)^2 + 216\ (1 + 0{,}02) + 8240$

si se plantea en $t = 60 \rightarrow A = 200\ (1 + 0{,}02)^{-1} + 216\ (1 + 0{,}02)^{-2} + 8240\ (1+0{,}02)^{-3}$

$A = 8168{,}43$

c) Calcular la tasa implícita para 30 días considerando que se concretó la cancelación anterior y sabiendo que en el momento del otorgamiento del préstamo le dedujeron \$ 230 en concepto de gastos.

$8000 - 230 = 144\ (1 + \mathrm{TIR})^{-1} + (200 + 8168{,}43)\ (1 + \mathrm{TIR})^{-2}$

TIR para 30 días $= 0{,}0471$

En el próximo ejemplo se propone la variante del otorgamiento de un préstamo por este sistema con cláusula de ajuste.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 4

Una entidad crediticia otorga préstamos personales con reembolso de capital ajustado a los 90 días y pago de intereses cada 30 días vencidos sobre capital ajustado a una tasa de interés nominal anual del 18,98 % para una frecuencia de capitalización de 30 días. A estos efectos se pide:

a) Determinar los desembolsos que deberá realizar un cliente que obtiene un préstamo de $ 4500, sabiendo que las tasas de inflación en los sucesivos tres períodos en que transcurrió su operación fueron 1,5; 1,2 y 0,7 %.

$$i_{30} = 0{,}1898\,\frac{30}{365} = 0{,}0156$$

En $t = 30 \;\rightarrow\; I = 4500 \times 1{,}015 \times 0{,}0156 = 71{,}25$
En $t = 60 \;\rightarrow\; I = 4500 \times 1{,}015 \times 1{,}012 \times 0{,}0156 = 72{,}11$
En $t = 90 \;\rightarrow\; I = 4500 \times 1{,}015 \times 1{,}012 \times 1{,}007 \times 0{,}0156 = 72{,}61$

Reembolso del capital ajustado: 4654,67

b) Calcular la tasa implícita aparente para 30 días resultante de la operación de préstamo.

$$4500 = 71{,}25\,(1 + i)^{-1} + 72{,}11\,(1 + i)^{-2} + (72{,}61 + 4654{,}67)\,(1 + i)^{-3}$$

$i = 0{,}02714664$

5.5. Sistemas de reembolso mediante pago periódico de capital e intereses sobre saldos

En estos sistemas se utilizan rentas en las que cada término o servicio de deuda es constitutivo de una parte de capital y una parte de interés sobre el saldo adeudado. Son sistemas de amortización periódica con intereses sobre saldos adeudados en los cuales los desembolsos efectuados por el deudor constituyen los términos de una renta temporaria presentándose con algunas variantes, a saber: de términos cualesquiera o constantes, exigibles por período vencido o adelantado, variables en progresión geométrica o aritmética y en algunos casos la aplicación de rentas diferidas. Cada uno de dichos términos está compuesto por dos conceptos: uno destinado a amortizar una parte del capital (amortización real) y el otro al pago de los intereses del período (cuota de interés). De acuerdo a la nomenclatura propuesta al comienzo de este capítulo se tiene que el servicio es:

$$c_h = t_h + I_h$$

Debe destacarse que para la determinación de los capitales que se intercambian se utiliza para su valoración tasas efectivas o sea una ley financiera de interés compuesto, y puede otorgarse a tasa fija o a tasa flotante. Otra alternativa que suele presentarse es la inclusión de cláusula de ajuste o indexación.

Los más utilizados son el Sistema Francés y el Sistema Alemán, mientras que el Sistema Americano es una modalidad poco frecuente en el mercado financiero argentino.

5.5.1. Sistema francés

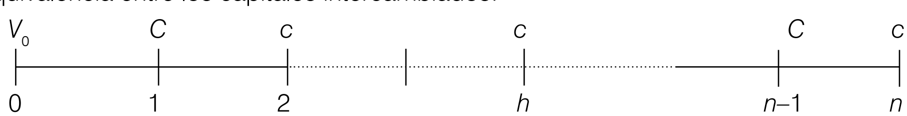
5.5.1.1. Características del sistema

Dadas las distintas variantes enunciadas se reservará en adelante la denominación de *sistema francés* cuando, además de ser constante la tasa, se utilice para el reembolso del préstamo una renta de términos constantes, inmediata, temporaria y pospagable. Dado que los intereses se calculan sobre saldos, éstos van decreciendo periódicamente por lo que la cuota de amortización deberá necesariamente ser creciente a los efectos de mantener constante el servicio. Por este motivo se lo llama también sistema de amortización progresiva.

Cuando ello sucede se evidencia un comportamiento particular en las distintas relaciones matemáticas que permite obtener modelos simplificados para el cálculo de los valores correspondientes.

5.5.1.2. Deducción de las fórmulas utilizadas en el sistema francés

Observando el siguiente gráfico temporal resulta sencillo el planteo de la relación de equivalencia entre los capitales intercambiados:



Si se pacta una tasa de interés i constante para la unidad de tiempo o período y sabiendo que el valor del préstamo debe ser igual al valor actual de los desembolsos a efectuar por el deudor, por tratarse de una renta de términos constantes, inmediata, temporaria y pospagable, la ecuación de equivalencia queda simplificada de la siguiente manera:

$$V_0 = c\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

o con la escritura de valor actual de una renta constante:

$$V_0 = c \times a_{\overline{n|}\,i}$$

Cuota del préstamo: despejando en la expresión anterior

$$c = V_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

o, expresando simbólicamente la cuota de amortización:

$$c = V_0 \times a_{\overline{n}|i}^{-1}$$

Cálculo del saldo del préstamo. Método retrospectivo y prospectivo: se entiende por saldo *el capital pendiente de amortización luego de efectivizar la cuota correspondiente al período al cual se desea calcularlo*. La determinación del mismo es de suma importancia por su utilización en la operatoria financiera cuando se desea cancelar el préstamo, rescindir el contrato o refinanciar la deuda. Para ello se utilizan dos métodos:

1. *Método retrospectivo:* consiste en calcular el saldo del préstamo a un momento $h<n$ en función de los servicios que fueron efectivizados desde la fecha de otorgamiento hasta el momento de su determinación.

Para deducir el modelo se procede teniendo en cuenta que el importe adeudado al cabo de un año será $V_0 (1 + i)$, y si en ese momento se efectiviza la cuota c del primer período, el saldo o deuda residual será:

$$S_1 = V_0 (1 + i) - c$$

Ese saldo genera intereses durante el segundo período y luego de abonar la segunda cuota resultará:

$$S_2 = S_1 (1 + i) - c$$
$$S_2 = [V_0 (1 + i) - c] (1 + i) - c$$
$$S_2 = V_0 (1 + i)^2 - c (1 + i) - c$$

y siguiendo con el mismo razonamiento:

$$S_3 = V_0 (1 + i)^3 - c (1 + i)^2 - c (1 + i) - c$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_h = V_0 (1 + i)^h - c (1 + i)^{h-1} - c (1 + i)^{h-2} - \dots - c$$
$$S_h = V_0 (1 + i)^h - [c (1 + i)^{h-1} + c (1 + i)^{h-2} + \dots + c]$$

Al ser las cuotas constantes, puede observarse que la suma de los valores entre corchetes constituyen el valor final de una renta de h términos, de tal manera que es posible obtener la deuda residual al finalizar el período h mediante la aplicación del siguiente modelo:

$$S_h = V_0 (1 + i)^h \quad - c \frac{(1 + i)^h - 1}{i}$$

De esta forma el cálculo del saldo por el *método retrospectivo* puede interpretarse como *la diferencia entre el valor del capital prestado evaluado en* h *y el valor final de la renta constituida por las cuotas pagadas hasta ese momento.*

2. *Método Prospectivo:* este método se denomina prospectivo porque permite calcular la deuda residual en función de las cuotas que faltan abonar y queda expresado de la siguiente forma:

$$S_h = c \frac{1 - (1 + i)^{-(n-h)}}{i}$$

Es decir que, *por el método prospectivo el saldo del préstamo después de efectivizada la* h−*ésima cuota es igual al valor actual de las* n−h *cuotas pendientes de pago*.

La tasa de interés: a partir del modelo para el cálculo del saldo por el método retrospectivo es posible analizar y concluir sobre la importancia de la tasa de interés pactada.

Si al efectivizar la última cuota la deuda debe quedar cancelada, será $S_n = 0$; no obstante ello, si se aplica dicho modelo para el cálculo del saldo en n será:

$$S_n = V_0 (1 + i)^n - [c (1 + i)^{n-1} + c (1 + i)^{n-2} + \ldots + c]$$

y sabiendo que $S_n = 0$ se tiene que:

$$V_0 (1 + i)^n = c (1 + i)^{n-1} + c (1 + i)^{n-2} + \ldots + c ,$$

relación que muestra la equivalencia del intercambio al vencimiento del plazo del préstamo.

Si se hace el pasaje de $(1 + i)^n$ del primer miembro, dividiendo en el segundo:

$$V_0 = \frac{c (1 + i)^{n-1}}{(1 + i)^n} + \frac{c (1 + i)^{n-2}}{(1 + i)^n} + \ldots + \frac{c}{(1 + i)^n}$$

y simplificando queda:

$$V_0 = c (1 + i)^{-1} + c (1 + i)^{-2} + \ldots + c (1 + i)^{-n}$$

resultando:

$$V_0 = c \frac{1 - (1 - i)^{-n}}{i} ,$$

igualdad que evidencia la equivalencia financiera en el momento de origen de la operación: *a la tasa de interés pactada, el capital prestado es igual al valor actual de la renta que lo amortiza*.

Esta es la importancia que tiene la tasa de interés en los préstamos de interés sobre saldos, ya que a esa tasa se verifica la equidad del intercambio, por lo cual puede concluirse que una tasa de interés que se aplica sobre saldos es una tasa efectiva y, de no existir gastos, coincide con la tasa implícita o TIR.

Con respecto al cálculo de la misma, si el flujo de fondos resultante de la operación es un conjunto constante, puede obtenerse utilizando cualquiera de los métodos estudiados en rentas ciertas.

Intereses periódicos: el cálculo de los intereses contenidos en un servicio cualquiera, por ejemplo, el correspondiente al $h-$ésimo período, se efectúa aplicando la tasa de interés sobre el saldo al inicio del mismo y, considerando el modelo para la determinación del saldo por el método prospectivo, se tiene:

$$I_h = S_{h-1} \times i$$

$$I_h = c \times \frac{1 - (1+i)^{-[n-(h-1)]}}{i} \times i$$

$$I_h = c\,[1 - (1+i)^{-(n-h+1)}]$$

Cuota de amortización: recordando que la cuota de amortización surge de la diferencia entre el valor del servicio y el interés contenido en ese servicio:

$$t_h = c - I_h$$
$$t_h = c - c\,[1 - (1+i)^{-(n-h+1)}]$$
$$t_h = c\,(1+i)^{-(n-h+1)}]$$

Comportamiento de las cuotas de amortización: si se igualan dos cuotas consecutivas y sabiendo que las mismas son iguales pero su composición es distinta se deduce:

$$c_{h+1} = c_h$$
$$S_h \times i + t_{h+1} = S_{h-1} \times i + t_h$$
$$t_{h+1} = S_{h-1} \times i + t_h - S_h \times i$$
$$t_{h+1} = t_h + (S_{h-1} - S_h) \times i$$
$$t_{h+1} = t_h + t_h \times i$$
$$t_{h+1} = t_h\,(1+i)$$

Esto permite concluir que *las cuotas de amortización crecen en progresión geométrica de razón* $(1 + i)$.

Fondo amortizante: luego de la conclusión obtenida antes, puede afirmarse que:

$$t_1 = t_1$$
$$t_2 = t_1\,(1 + i)$$
$$t_3 = t_1\,(1 + i)^2$$
$$t_h = t_1\,(1 + i)^{h-1}$$
$$t_n = t_1\,(1 + i)^{n-1}$$

Sumando miembro a miembro se tiene:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} + t_n = t_1 + t_1\,(1 + i) + t_1\,(1 + i)^2 + \ldots + t_1\,(1 + i)^{n-1}$$

donde el primer miembro es V_0 y el segundo es el valor final de una renta cuyo término es igual a t_1:

$$V_0 = t_1 \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

y despejando:

$$t_1 = V_0\,\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$$

Este valor t_1 o amortización real del primer período, recibe el nombre de *fondo amortizante* porque *depositando una suma igual a ese importe durante los* n *períodos que dura la operación y a la tasa pactada, se obtiene el valor del préstamo* V_0.

El fondo amortizante puede calcularse también como la diferencia entre la cuota y los intereses del primer período $t_1 = c - V_0\,i$

En este sistema la función $\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$ será además la *tasa de amortización* que se define como *la relación existente en tanto por uno entre la cantidad amortizada en el primer período y la deuda inicial.* En este material se simbolizará con la letra θ, resultando para $V_0 = \$\ 1$:

$$\theta = \frac{i}{(1 + i)^n - 1}$$

Conocida la tasa de amortización se simplifican algunos de los cálculos antes propuestos ya que en función de ella puede calcularse, entre otros valores, el importe de la cuota como:

$$c = V_0 (\theta + i)$$

Conocida la tasa de amortización y la tasa de interés, se puede determinar el plazo n de amortización del préstamo ya que al despejar en θ será:

$$n = \frac{\log(1 + \frac{i}{\theta})}{\log(1 + i)}$$

Total amortizado hasta el h−*ésimo período*: demostrado el comportamiento de las amortizaciones reales se puede expresar el total amortizado hasta el periodo h inclusive, de la siguiente manera:

$$T_h = t_1 \; \frac{(1 + i)^h - 1}{i}$$

Conocido este valor surge otra forma de calcular el saldo en h:

$$S_h = V_0 - T_h$$

Tiempo medio de reembolso: es *el tiempo que debe transcurrir desde el origen del préstamo para amortizar la mitad de la deuda*. En este sistema con amortizaciones progresivas la mitad de la deuda no se amortiza en la mitad del plazo sino después de ese momento. Para determinar ese momento que simbolizaremos con «p» se plantea:

$$1/2\, V_0 = T_p$$

efectuando los reemplazos correspondientes se tiene:

$$1/2\, t_1 \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = t_1 \frac{(1 + i)^p - 1}{i}$$

simplificando resulta:

$$\frac{(1 + i)^n - 1}{2} + 1 = (1 + i)^p$$

operando y aplicando logaritmo natural:

$$p = \frac{\ln \left[\frac{(1+i)^n + 1}{2}\right]}{\ln (1 + i)}$$

Cuadro de amortización: los cuadros de marcha o cuadros de amortización son de vital importancia a los efectos de observar la evolución del préstamo. La construcción de los mismos es similar en todos los sistemas de interés sobre saldos. Previa determinación del monto de los servicios se calcula el interés sobre el capital inicial, monto que se resta al primer servicio y queda así determinada la primera cuota de amortización real. Ésta se resta al capital inicial para así calcular el saldo al vencimiento del primer período. Sobre este valor se aplica la tasa de interés y esta segunda cuota de interés se resta al segundo servicio para determinar la amortización real del segundo período y obtener el saldo al vencimiento del mismo restándola al saldo del comienzo. Se repite el procedimiento en forma sucesiva hasta el final del plazo, momento en que queda cancelado el préstamo. Esta mecánica es resuelta en al práctica profesional y bancaria mediante planillas de cálculo que, incorporando los datos en ciertos programas de computación, son emitidas en forma inmediata.

Se muestra a continuación la evolución de un cuadro de amortización con símbolos, donde los valores correspondientes se obtienen aplicando los modelos deducidos en este punto:

h	c	I_h	t_h	S_h
0	–	–	–	Vo
1	c	$Vo\, i$	$c - Vo\, i$	$S_1 = Vo - t_1$
2	c	$S_1\, i$	$c - S_1\, i$	$S_2 = S_1 - t_2$
...	...	...	...	...
h	c	$S_{h-1}\, i$	$c - S_{h-1}\, i$	$S_h = S_{h-1} - t_h$
...	...	...	...	...
n	c	$S_{n-1}\, i$	$c - S_{n-1}\, i$	$S_{n-1} - t_n = 0$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 5

Un banco otorga préstamos personales a 6 meses de plazo a ser amortizado mediante el pago de 6 cuotas constantes mensuales y vencidas, compuestas de amortización progresiva e interés sobre saldos a una tasa de interés mensual del 1,55 %: construir el cuadro de marcha por cada $ 1000 de valor de préstamo.

Cálculo del servicio: $c = 1000 \dfrac{0{,}0155}{1 - (1 + 00155)^{-6}} = 175{,}82$

h	c	I_h	t_h	S_h
0	-	-	-	1.000,00
1	175,82	15,50	160,32	839,68
2	175,82	13,02	162,80	676,88
3	175,82	10,49	165,33	511,55
4	175,82	7,93	167,89	343,66
5	175,82	5,33	170,49	173,15
6	175,82	2,68	173,15	------

Se propone al lector verificar la obtención de algunos valores del cuadro aplicando las fórmulas establecidas, por ejemplo:

Intereses pagados en el cuarto servicio:

$$I_h = c\,[1 - (1 + i)^{-(n-h+1)}]$$
$$I_4 = 175{,}82\,[1 - (1 + 0{,}0155)^{-3}] = 7{,}93$$

Cuota de amortización del segundo servicio:

$$t_h = c\,(1 + i)^{-(n-h+1)}$$
$$t_4 = 175{,}82\,(1 + 0{,}0155)^{-5} = 162{,}80$$

El saldo luego de efectivizado el segundo servicio (por el método prospectivo):

$$S_h = c\,\frac{1 - (1 + i)^{-(n-h)}}{i}$$

$$S_2 = 175{,}82\,\frac{1 - (1 + 0{,}0155)^{-4}}{0{,}0155} = 676{,}88$$

5.5.1.2. Cancelación anticipada

Si la cancelación está prevista en el contrato de acuerdo a la tasa pactada, la misma será coincidente con el saldo de deuda a esa misma fecha. En caso de no estar contemplada, teniendo en cuenta los conceptos vertidos en la introducción de este capítulo, la suma que cancela el préstamo debe ser igual al valor actual de los n-h servicios pendientes de pago evaluados a la tasa de mercado i':

$$A = c\,\frac{1 - (1 + i')^{-(n-h)}}{i'}$$

5.5.1.3. Reembolso parcial

Si se efectúa un reembolso parcial, el nuevo saldo se calcula restando al monto resultante de evaluar el saldo de la deuda de acuerdo a las condiciones pactadas o a la tasa de mercado, según corresponda, el importe del pago parcial.

5.5.1.4. Reconstrucción del capital

En los sistemas de amortización periódica, el problema de la reconstrucción del capital deja de ser una preocupación del deudor ya que éste paga una cuota de amortización en forma habitual y se convierte en una preocupación para el prestamista que debe asegurarse la recuperación de su capital y lograr el mayor rendimiento posible, dado que los intereses van disminuyendo. A estos efectos algunos autores (Lóbez Urquía; López Dumrauf) plantean la necesidad de reinvertir las amortizaciones reales a medida que se van cobrando las cuotas, a la tasa contractual o a la tasa que pueda obtener en el mercado, a los efectos de incrementar su rendimiento.

5.5.1.5. Valor de cesión: nuda propiedad y usufructo

En este sistema de amortización la nuda propiedad a un momento $h < n$ queda expresada como el valor actual de las $n-h$ amortizaciones reales pendientes, y el usufructo como el valor actual de las cuotas de interés restantes a la tasa de mercado:

$$K_h^{i'} = t_{h+1}(1 + i')^{-1} + t_{h+2}(1 + i')^{-2} + \ldots + t_n(1 + i')^{-(n-h)}$$

$$U_h^{i'} = I_{h+1}(1 + i')^{-1} + I_{h+2}(1 + i')^{-2} + \ldots + I_n(1 + i')^{-(n-h)}$$

Sabiendo que la suma de la cuota amortización y de la cuota de interés es igual al servicio constante se obtiene como valor de cesión:

$$V_h^{i'} = c\,\frac{1 - (1 + i')^{-(n-h)}}{i}$$

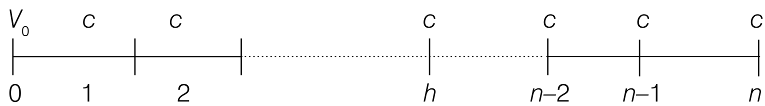
valor que, a igualdad de tasas, coincide con el de la cancelación anticipada.

5.5.1.6. Distintos supuestos de variación de las condiciones inicialmente pactadas

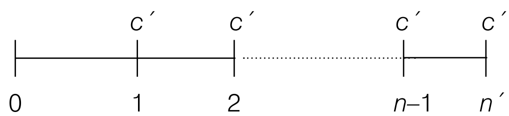
Es muy frecuente que durante la vigencia del contrato se presenten situaciones en las que se hace necesario recalcular el saldo del préstamo con motivo de la modificación de algunas de las condiciones pactadas. Cuestiones como atrasos en los pagos que debe efectuar el deudor, alargamiento del plazo y cambios en la tasa de interés implican una refinanciación que conlleva a la determinación de una nueva cuota. En todos estos casos, y cualquiera sea el sistema de amortización utilizado, debe respetarse el principio de equidad financiera: *la sustitución de una forma de pago por otra será indistinta cuando el valor actual de los compromisos pendientes a un momento dado* h *(el de modificación de las condiciones pactadas) sea igual al valor actual de los nuevos compromisos a ese mismo momento evaluados a una tasa de referencia*.

Cuando en particular se trata de la determinación de una nueva cuota o un nuevo plazo en un préstamo amortizable por sistema francés, gráficamente se tiene:

Según las *condiciones iniciales*:



Según las *condiciones del nuevo préstamo*:



y teóricamente debe verificarse la siguiente equivalencia de capitales:

$$c \times a_{\overline{n-h|}\,i'} = c' \times a_{\overline{n|}\,i'}$$

El valor actual de las $n-h$ cuotas (c) restantes del préstamo original debe ser igual al valor actual a ese mismo momento de las n' nuevas cuotas (c') evaluadas a la misma tasa implícita en la refinanciación.

No obstante lo expuesto, es conveniente observar que en la práctica financiera se acostumbra a calcular el saldo a refinanciar a la tasa original del préstamo y los nuevos compromisos se calculan a la tasa que se aplique en la refinanciación.

5.5.1.7. Otras modalidades en el otorgamiento de préstamos por el sistema francés

Variación en la tasa de interés: cuando en un mercado financiero se presentan situaciones de incertidumbre con respecto al futuro comportamiento de las tasas, este sistema es otorgado por las entidades crediticias con cláusula de tasa variable o flotante. En este contexto, para recalcular la cuota cuando varía la tasa, se adapta la relación matemática propuesta en el ítem anterior donde el primer miembro es el saldo calculado a la tasa vigente, y despejando c' se obtiene su importe que es la nueva cuota en función de la nueva tasa.

$$c \times a_{\overline{n-h}|i'} = c' \times a_{\overline{n}|i'}$$

Ejemplo: Supóngase un préstamo de \$ 10 000 otorgado a 18 meses al 3 % de interés mensual que luego de transcurridos 5 meses la tasa se incrementa al 4 %: calcular la nueva cuota si el plazo no se modifica.

Cuota original:

$$c = 10000 \; \frac{0{,}03}{1 - (1 + 0{,}03)^{-18}}$$

$$c = 727{,}09$$

Saldo de deuda a los 5 meses:

$$S_5 = 727{,}09 \, \frac{1 - (1 + 0{,}03)^{-13}}{0{,}03} = 7732{,}57$$

Nueva cuota:

$$c' = 7732{,}57 \, \frac{0{,}04}{1 - (1 + 0{,}04)^{-13}}$$

$$c' = 774{,}37$$

y este procedimiento se repite cada vez que se produce un cambio en la tasa de interés.

Indexación: en épocas de variación en el poder adquisitivo de la moneda suele incluirse en los contratos de préstamos cláusulas de ajustes que generalmente implican la corrección monetaria del monto de la cuota y sus componentes, cuota de amortización y cuota de interés. El principal inconveniente que puede surgir con la indexación en los préstamos es que los ingresos del deudor no se incrementen en la misma relación que las cuotas afectando así su capacidad de pago.

En esta modalidad se corrige el saldo periódicamente y se recalculan las cuotas restantes de la misma manera que se expuso cuando se trató la variación de la tasa de interés.

Para la construcción del cuadro de marcha, con respecto al realizado sin indexación, se aconseja agregar una columna que exprese el saldo al vencimiento de cada período con la inflación acumulada hasta el mismo. La técnica para su realización consiste en ajustar periódicamente el servicio base y luego restarle el interés calculado sobre el saldo ajustado, surgiendo así el valor de la amortización ajustada que se resta al saldo ajustado y así sucesivamente se repite la operatoria. Otra forma es realizar el cuadro a moneda del inicio de la operación y luego indexar cada columna con la inflación acumulada hasta cada período.

Ejemplo: Se otorga un préstamo de \$ 50 000 por el sistema francés con cláusula de ajuste de acuerdo a un determinado índice de precios mediante el pago de cuatro servicios semestrales a una tasa nominal anual del 12 % para una frecuencia de capitalización semestral. Construir el cuadro de marcha sabiendo que las tasas de inflación para los sucesivos semestres fueron 5; 7,5; 6 y 5,5 % respectivamente.

Cálculo de la cuota base:

$$\text{Tasa de interés semestral} = \frac{0{,}12}{2} = 0{,}06$$

$$c = 50\,000 \frac{0{,}06}{1 - (1 + 0{,}06)^{-4}} = 14\,429{,}57$$

h	c aj.	$I_{h \text{ ajus.}}$	$t_{h \text{ ajus.}}$	S_h	S_h ajus. al final de h
0	–	–	–	50.000,00	52.500,00
1	15.151,05	3150	12.001,05	40.498,95	43.536,37
2	16.287,38	2612,18	13.675,20	29.861,17	31.652,84
3	17.264,62	1899,17	15.365,45	16.287,39	17.183,19
4	18.214,17	1030,99	17.183,18	-----	-----

Si se observa la tercera línea, resulta:

Cuota ajustada: 14 429,57 x 1,05 x 1,075 x 1,06 = 17 264,62
Interés ajustado: 31 652,84 x 0,06 = 1899,17
Cuota de amortización ajustada = 17 264,62 – 1899,17= 15 365,45
Saldo: 31 652,84 – 15 365,45= 16 287,39
Saldo ajustado al final: 16 287,39 x 1,055= 17 183,19

Amortización diferida: es otra modalidad muy usada en la práctica financiera que consiste en comenzar a realizar el reembolso del capital después de transcurridos d períodos de diferimiento. En este caso pueden darse dos situaciones:

1. Que se efectúe el pago periódico de intereses sobre el capital recibido en préstamo durante los d periodos de diferimiento. En consecuencia, al pagarse los intereses devengados permanece constante el valor V_0 de la deuda por lo tanto el valor de la cuota es igual al término de una renta inmediata, temporaria y pospagable como la de un sistema francés tradicional.

2. Que los intereses generados durante el plazo del diferimiento no se abonen de manera que se capitalizan y al vencimiento de ese plazo la deuda será $V_0 (1 + i)^d$. Considerando ese monto se calculan las cuotas y en el cuadro de marcha las amortizaciones comienzan a realizarse a partir de ese valor capitalizado. Otra forma de calcular la cuota es plantear la equivalencia en el momento del otorgamiento del préstamo utilizando el modelo de la correspondiente renta diferida.

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 6

Un particular obtiene un préstamo personal de \$ 1800 en una cooperativa que se lo financia a una tasa mensual del 2,5 % mediante el pago de 5 cuotas mensuales constantes vencidas siendo exigible la primera de ellas a los 3 meses de la compra. Se solicita:

a) Calcular el importe de la cuota

Si las cuotas son vencidas y la primera de ellas se paga a los 3 meses el diferimiento es 2 períodos:

$$1800 = c \, \frac{1 - (1 + 0{,}025)^{-5}}{0{,}025} \, (1 + 0{,}025)^{-2} \text{ y despejando:}$$

$$c = 1800 \, \frac{0{,}025}{1 - (1 + 0{,}025)^{-5}} \, (1 + 0{,}025)^{2} = 407{,}06$$

O capitalizando el valor de la deuda:

$$c = 1891{,}13 \, \frac{0{,}025}{1 - (1 + 0{,}025)^{-5}} = 407{,}06$$

b) Construir el cuadro de marcha hasta a la segunda cuota de amortización:

h	c	I_h	t_h	S_h
0	–	–	–	1800
1	–	–	–	1845
2	–	–	–	1891,13
3	407,06	47,28	359,78	1531,35
4	407,06	38,28	368,77	1162,57
5	407,06	29,06	378,00	784,57
6	407,06	19,61	387,45	397,12
7	407,06	9,93	397,13	-----

La única variante con respecto al cuadro tradicional es que en el primer servicio de amortización e intereses, estos intereses se calculan sobre la deuda capitalizada.

c) A los efectos de formular un ejemplo que permita determinar el costo financiero para el deudor, se propone suponer la existencia de $ 40 de gastos iniciales y $ 7 en concepto de gastos de seguro conjuntamente con el pago de cada cuota.

Resulta así la siguiente ecuación:

$$1800 = 40 + (407{,}06+7)\,\frac{1-(1+x)^{-5}}{x}\,(1+x)^{-2}$$

donde la tasa implícita o TIR es 0,033229 ó 3,3229 % mensual.

5.5.1.8. Amortización progresiva mediante rentas de términos variables

De acuerdo a lo estudiado en términos generales para un sistema francés tradicional de cuotas constantes, si los términos de la renta que constituyen los servicios que ha de satisfacer el prestatario son variables en progresión, el valor del préstamo debe ser igual al valor actual a la tasa contractual de la renta correspondiente, a saber:

a) si la renta es variable en progresión aritmética:

$$V_0 = c_1 \times a_{\overline{n}|i} + \frac{\rho}{i}\left[a_{\overline{n}|i} - n \times (1+i)^{-n}\right]$$

b) si la renta es variable en progresión geométrica:

$$V_0 = c_1 \times \frac{1 - r^n (1+i)^{-n}}{1+i-r}$$

Con estas consideraciones se obtienen los valores correspondientes, ya que una vez determinados los montos de cada cuota se construye el cuadro de marcha calculando los intereses sobre los saldos que se restan a cada servicio para obtener las cuotas de amortización que tienen un comportamiento distinto al de un sistema francés genuino. Cuando es necesario determinar el saldo a un momento $h < n$ se calcula el valor actual de las $n-h$ cuotas que restan efectivizar tomando como primera cuota la c_{h+1}.

5.5.2. Sistema alemán

5.5.2.1. Características del sistema

Es otro sistema de amortización que utiliza una renta en la que cada término o servicio es constitutivo de una parte de capital y una parte de interés sobre el saldo adeudado. La particularidad que tiene, y que lo diferencia del sistema francés, es que la amortización periódica es constante, resultante de dividir el importe de la deuda por el número de períodos constitutivos del plazo de la operación. Como los intereses se calculan sobre saldos, si la tasa pactada es constante, decrecen periódicamente en un importe fijo.

Al ser la amortización constante y los intereses decrecientes, la cuota total del préstamo también es decreciente, y como se demostrará más adelante, constituyen los términos de una renta variable en progresión aritmética. Utilizando el modelo correspondiente para el cálculo del valor actual de una renta de este tipo, se verifica la equidad del intercambio a la tasa contractual.

5.5.2.2. Deducción de las fórmulas más utilizadas en el sistema alemán

Cuota de amortización

$$t_2 = t_2 = t_3 = \ldots = t_h = \ldots = t_n = \frac{V_0}{n}$$

Intereses periódicos sobre saldos

$$I_1 = V_0\, i$$

$$I_2 = \left(V_0 - \frac{V_0}{n}\right) i$$

$$I_3 = \left(V_0 - 2\,\frac{V_0}{n}\right) i$$

$$\cdots\cdots$$

$$I_h = \left(V_0 - (h-1)\,\frac{V_0}{n}\right) i$$

Servicio del préstamo

$$c_1 = \frac{V_0}{n} + V_0 i$$

$$c_2 = \frac{V_0}{n} + \left(V_0 - \frac{V_0}{n}\right) i$$

$$c_3 = \frac{V_0}{n} + \mathrm{o}V_0 - 2\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}i$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$c_h = \frac{V_0}{n} + \mathrm{q}V_0 - (h-1)\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{r}\,i$$

o bien:

$$c_h = \frac{V_0}{n}\;\mathrm{q}1 + (n-h+1)\,i\mathrm{r}$$

Con esta información se puede mostrar simbólicamente la evolución de un préstamo obtenido por el sistema alemán mediante el siguiente cuadro:

h	t_h	I_h	c_h	S_h
0	**...**	**...**	**...**	**...**
1	$\frac{V_0}{n}$	$V_0\, i$	$\frac{V_0}{n} + V_0\, i$	$V_0 - \frac{V_0}{n}$
2	$\frac{V_0}{n}$	$\mathrm{o}V_0 - \frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}i$	$\frac{V_0}{n} + \mathrm{o}V_0 - \frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}i$	$V_0 - 2\,\frac{V_0}{n}$
3	$\frac{V_0}{n}$	$\mathrm{o}V_0 - 2\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}i$	$\frac{V_0}{n} + \mathrm{o}V_0 - 2\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}i$	$V_0 - 3\,\frac{V_0}{n}$
...	**...**	**...**	**...**	**...**
h	$\frac{V_0}{n}$	$\mathrm{o}V_0 - (h-1)\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}\mathrm{i}$	$\frac{V_0}{n} + \mathrm{o}V_0 - (h-1)\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}i$	$V_0 - h\,\frac{V_0}{n}$
...	**...**	**...**	**...**	**...**
n	$\frac{V_0}{n}$	$\mathrm{o}V_0 - (n-1)\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}i$	$\frac{V_0}{n} + \mathrm{o}V_0 - (n-1)\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}i$	**...**

Si se efectúa la diferencia entre dos términos consecutivos se demuestra el comportamiento que tienen los servicios, a saber:

$$c_{\mathrm{h}+1} - c_{\mathrm{h}} = \frac{V_0}{n} + \mathrm{o}V_0 - h\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{p}\,i - \mathrm{s}\frac{V_0}{n} + \mathrm{q}V_0 - (h-1)\,\frac{V_0}{n}\,\mathrm{r}i\,\mathrm{t}$$

y al realizar las operaciones indicadas queda:

$$c_{h+1} - c_h = \cancel{\frac{V_0}{n}} + \cancel{V_0 i} - \cancel{h\frac{V_0}{n}}\, i - \cancel{\frac{V_0}{n}} - \cancel{V_0 i} + \cancel{h\frac{V_0}{n}} - \frac{V_0}{n}\, i$$

$$c_{h+1} - c_h = -\frac{V_0}{n}\, i$$

De esta manera se puede afirmar que las cuotas que cancelan el préstamo son decrecientes y constituyen los términos de una renta variable en progresión aritmética de razón $-\frac{V_0}{n}\, i$. Por lo tanto, se puede plantear la equidad del intercambio aplicando el modelo para el cálculo del valor actual de dicha renta, donde reemplazando ρ por $-\frac{V_0}{n}\, i$ queda:

$$V_0 = c_1 \times a_{\overline{n}|\, i} + \frac{-\frac{V_0}{n}\, i}{i}\, [a_{\overline{n}|\, i} - n \times (1+i)^{-n}]$$

y simplificando:

$$V_0 = c_1 \times a_{\overline{n}|\, i} - \frac{V_0}{n}\, [a_{\overline{n}|\, i} - n \times (1+i)^{-n}]$$

Se verifica así que el intercambio resulta equitativo a la tasa contractual, y como el interés es sobre saldos la tasa de interés pactada resulta ser la tasa efectiva o implícita. Cuando se toman en cuenta los gastos, como recargos en las cuotas y deducciones en el monto recibido en préstamo, resulta la tasa indicadora del costo financiero total, que difiere de la tasa contractual y que en este texto se la designa como tasa interna de retorno de acuerdo a lo visto en el capítulo 3 y en los anteriores sistemas de amortización.

Capital total amortizado hasta el período h

$$T_h = \frac{V_0}{n} \times h$$

Saldo adeudado al finalizar el h−ésimo *período*

$$S_h = V_0 - T_h$$

$$S_h = V_0 - \frac{V_0}{n} \times h$$

Total de intereses pagados desde el inicio hasta el período h: como la sumatoria de las cuotas de interés constituyen una progresión aritmética se puede utilizar la fórmula de la suma de términos de dicha progresión (la semisuma de los extremos por el número de términos), obteniéndose entonces:

$$I_{[0,h]} = \frac{I_1 + I_h}{2}\, h$$

Adaptando la misma fórmula se pueden calcular los intereses totales desde el inicio hasta el vencimiento:

$$I_{[0,h]} = \frac{V_0 \ i + \left[V_0 - (n-1)\dfrac{V_0}{n}\right] i}{2} \times n$$

Tiempo medio de reembolso: dado que las cuotas de capital son constantes el tiempo medio de reembolso es la mitad del plazo o sea:

$$p = \frac{n}{2}$$

5.5.2.3. Comparación con el sistema francés

• Ambos sistemas calculan intereses sobre saldos, por lo tanto, si las tasas contractuales coinciden, tienen la misma tasa implícita. Esto significa que desde el punto de vista del costo financiero resulta indistinto optar por uno u otro.

• Si las condiciones sustanciales son las mismas, en el sistema alemán las primeras cuotas son mayores que la cuota constante del sistema francés, pero como son decrecientes, después de un cierto número de pagos pasan a ser menores.

• Debido a que en el sistema alemán el capital se amortiza más rápido que en el francés, se pagan menos intereses. Además esto lo hace más conveniente ante la eventualidad de realizar una cancelación anticipada, como así también en los casos que se otorgara con cláusula de ajuste por inflación.

• En el sistema alemán se amortiza la mitad del capital solicitado en préstamo en la mitad del plazo, mientras que en el francés, al tener amortización progresiva, la mitad de la deuda se cancela después de un número de períodos mayor a la mitad del plazo.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 7

Un individuo obtiene un préstamo de $ 10 000 a cancelar por el sistema alemán mediante el pago de cuatro servicios trimestrales a una tasa de interés sobre saldos del 6 % trimestral. Se solicita:

a) Construir el cuadro de amortización

h	t_h	I_h	c_h	S_h
0	–	–	–	10000,00
1	2500	600	3100	7500,00
2	2500	450	2950	5000,00
3	2500	300	2800	2500,00
4	2500	150	2650	------

b) Verificar la equidad del intercambio utilizando el modelo de renta variable en progresión aritmética:

$$10000 = 3100 \text{ x } \frac{1 - 1{,}06^{-4}}{0{,}06} - \frac{150}{0{,}06} \text{ x } [\frac{1 - 1{,}06^{-4}}{0{,}06} - 4 \text{ x } 1{,}06^{-4}]$$

$$10000 = 10741{,}8274 - 741{,}8273994$$

$$10000 = 10000$$

5.5.2.4. Cancelación anticipada

Si la cancelación está prevista en el contrato de acuerdo a la tasa pactada, la misma será coincidente con el saldo de deuda a la misma fecha. En caso contrario dicha suma puede calcularse como el valor actual de los $n-h$ servicios pendientes de pago evaluados a la tasa de mercado. Si son pocos términos se puede descontar cada uno de ellos, y en caso contrario, se adapta el modelo de renta variable en progresión aritmética de la siguiente manera:

$$V_0 = c_{h+1}\, a_{\overline{n-h}|\, i'} - \frac{V_0}{n}\, \frac{i}{i'}\, [a_{\overline{n-h}|\, i'} - (n-h)\,(1 + i')^{-(n-h)}]$$

5.5.2.5. Reembolso parcial

Si se efectúa un reembolso parcial, el saldo se calcula restando al monto resultante de evaluar la deuda calculada de acuerdo a lo propuesto en el punto anterior, el importe del pago parcial.

5.5.2.6. Reconstrucción del capital

Como se enunció al tratar este punto en el sistema francés, en los préstamos de amortización periódica, el problema de la reconstrucción del capital deja de ser una preocupación para el deudor y se transforma en un problema para el prestamista quien buscará obtener un mayor rendimiento, ya que al ser intereses sobre saldos, éstos van disminuyendo. Para lograr ese objetivo, a medida que va cobrando los servicios, deberá reinvertirlos total o parcialmente a los efectos de incrementar su rentabilidad.

5.5.2.7. Valor de cesión: nuda propiedad y usufructo

La nuda propiedad a un momento $h < n$ queda expresada como el valor actual de las $n-h$ amortizaciones reales pendientes y, como en este sistema las mismas son constantes, resulta:

$$K_h^{i'} = \frac{V_0}{n} \; a_{\overline{n-h}|\, i'}$$

y el usufructo:

$$K_h^{i'} = I_{h+1}\,(1+i')^{-1} + I_{h+2}\,(1+i')^{-2} + \ldots + I_n\,(1+i')^{-(n-h)}$$

La suma de ambos permite obtener el valor de cesión que, ante iguales tasas de valoración, coincide con el valor de la cancelación anticipada.

5.5.2.8. Refinanciación o sustitución de un préstamo otorgado por el sistema alemán

Las posibilidades de reemplazo o refinanciación son muy variadas dado los distintos sistemas de amortización conocidos, y teniendo en cuenta que la sustitución puede representar no sólo el cambio del sistema de amortización sino también la modificación del plazo y/o la tasa, son muy diversas las soluciones y modelos que se pueden suponer. Para resolver esta cuestión se remite al lector a lo dicho sobre el tema en el préstamo anterior en el punto 5.5.1.6.

Debe recordarse que si se desea reemplazar una forma de pago por otra, se calcula el saldo al momento del reemplazo y ese valor se convierte en una nueva deuda V_0 que se refinancia de acuerdo con el nuevo sistema y a las nuevas condiciones sustanciales. Si el préstamo que se refinancia fue otorgado originalmente por el sistema alemán, corresponde calcular el saldo de acuerdo al modelo formulado para el mismo, considerando la tasa contractual o la de mercado, según lo establecido en el contrato.

5.5.2.9. Otras modalidades en el otorgamiento de préstamos por el sistema alemán

• *Variación en la tasa de interés*: si se contrata un préstamo por el sistema alemán con tasa variable o flotante, la determinación de los intereses y los servicios es inmediata dada la simplicidad en el cálculo del saldo. Conocido el mismo, se aplica la tasa correspondiente a cada período sobre el saldo al inicio de dicho período. Es conveniente observar que en estos casos los servicios dejan de ser variables en progresión aritmética ya que se modifica la razón.

Ejemplo: Supóngase que en el problema de aplicación N° 7 propuesto anteriormente, la tasa del 6 % trimestral se mantiene en los dos primeros trimestres, posicionándose en el 7 % en el tercero y en el 7,5 % en el cuarto. Bajo estas premisas resulta el siguiente cuadro de amortización:

h	t_h	I_h	c_h	S_h
0	–	–	–	10 000,00
1	2500	600	3100	7500,00
2	2500	450	2950	5000,00
3	2500	350	2850	2500,00
4	2500	187,50	2687,50	------

• *Indexación*: corresponde aquí hacer similares consideraciones a las realizadas sobre la indexación en el sistema francés. Se ajusta periódicamente el saldo y se calcula el interés sobre el saldo ajustado. Las cuotas de amortización resultan de dividir el saldo ajustado por el número de cuotas restantes. Otra forma de practicar los ajustes es, como ya se dijo, construir el cuadro de marcha a moneda del origen de la operación y luego efectuar las correcciones monetarias sobre cada columna con la inflación acumulada hasta cada período.

Ejemplo: Se obtiene en préstamo la suma de $ 20 000 mediante el pago de cuatro cuotas mensuales por el sistema alemán con cláusula de ajuste de capital e intereses a tasa de interés mensual del 1 %. Construir el cuadro de marcha si el índice de precios considerado registra los siguientes valores:

$$I_0 = 1{,}1825$$
$$I_1 = 1{,}217975$$
$$I_2 = 1{,}252078$$
$$I_3 = 1{,}292145$$
$$I_4 = 1{,}321864$$

h	$t_{h\ ajus.}$	$I_{h\ ajus.}$	c_h *aj.*	S_h	S_h ***ajus. al final de h***
0	–	–	–	20 000,00	20 600,00
1	5150	206	5356,00	15 450,00	15 882,60
2	5294,20	158,82	5453,02	10 588,40	10 927,23
3	5463,61	109,27	5572,88	5463,62	5589,28
4	5589,28	55,89	5645,17	-----	-----

Si se tiene en cuenta que el cuarto servicio expresado en moneda del origen de la operación es:

$$a_4 = \frac{20\,000}{4} + 5000 \times 0{,}01 = 5050$$

si se le aplica el ajuste de acuerdo a los índices dados, entre el origen de la operación y al cuarto mes, es:

$$a_4 = 5050\,\frac{1{,}321864}{1{,}1825} = 5645{,}17$$

coincidente con el del cuadro de marcha que fue construido efectuando la corrección monetaria en forma periódica.

5.5.3. Sistema americano

5.5.3.1. Características del sistema

Este sistema ha sido ideado para lograr los dos objetivos fundamentales del prestamista: constancia en los intereses periódicos y recuperación del capital dado en préstamo. En los sistemas francés y alemán se asegura la devolución del capital por parte del deudor, pero debe prescindir de la obtención de intereses sobre el total de la deuda en cada período.

Para superar este inconveniente surge entonces este sistema, llamado también del *fondo de acumulación (Sinking found) o a dos tantos de interés.* Los servicios constantes que amortizan el préstamo constituyen los términos de una renta inmediata, temporaria, pospagable y están formados por la suma de dos conceptos:

1. La cuota necesaria para reconstruir el capital V0 que debe reembolsarse al vencimiento de los n períodos. La misma constituye una imposición periódica y constante a depositar en un fondo, en forma coincidente con la fecha de pago de los intereses, donde gana una tasa de interés que rige para operaciones de inversión (tasa pasiva).

2. Los intereses periódicos sobre el total de la deuda a una tasa de interés para préstamos (tasa activa).

Se puede interpretar como un caso particular en el que se da la coexistencia de dos operaciones: una de préstamo y otra de ahorro.

Este método se asemeja al de reembolso único de capital con pago periódico de intereses y en el cual el deudor decide realizar una previsión a los efectos de reunir el capital a devolver. En ese caso la reconstrucción es facultativa, mientras que en el americano la reconstrucción es contractual y por lo tanto es obligatoria.

Es un sistema que ha sido utilizado en la época del desarrollo industrial en países anglosajones pero, luego de consultas realizadas en diferentes fuentes bibliográficas y después de examinar la práctica financiera, se observa que el mismo tiene escasa, por no decir casi nula aplicación en nuestro país. Dice López Dumrauf: «algunas entidades como el Banco Mundial otorgaron créditos de este tipo a empresas argentinas en el pasado, tal el caso de Hidronor».

5.5.3.2. Deducción de las fórmulas utilizadas en el sistema americano

Cuota de la reconstrucción: si se recuerda que la cuota de imposición es

$$\frac{i}{(1+i)^n-1} = s^{-1}_{\overline{n|}\,i}$$

donde, al simbolizar con i_r a la tasa del fondo de acumulación resulta

$$\frac{i_r}{(1+i_r)^n-1} = s^{-1}_{\overline{n|}\,i_r}$$

y como el objetivo es la reconstrucción de V_0, la cuota del fondo será

$$t_h = V_0 \times s^{-1}_{\overline{n|}\,i_r}$$

Cuota de interés

$$I_h = V_0 \times i$$

• *Servicio del préstamo*: sumando los dos conceptos anteriores

$$c = V_0 \times s^{-1}_{\overline{n|}\,i_r} + V_0\, i$$

y al sacar factor común V_0 se obtiene entonces el servicio de la deuda en este sistema:

$$c = V_0\,(s^{-1}_{\overline{n|}\,i_r} + i)$$

• *Comparación del servicio de este sistema con el del sistema francés*: conocido el servicio del sistema francés como

$$c = V_0 \times a^{-1}_{\overline{n|}\,i}$$

y recordando que $a^{-1}_{\overline{n|}\,i} = s^{-1}_{\overline{n|}\,i} + i$, se observa que si la tasa del fondo de amortización es igual a la tasa de los intereses del préstamo, los servicios en ambos sistemas son iguales. Además, por lo dicho en el capítulo de rentas sobre el comportamiento de la cuota de imposición con respecto a la tasa de interés, se puede decir que:

–si $i_r < i \Rightarrow s^{-1}_{\overline{n}|\, i_r} > s^{-1}_{\overline{n}|\, i}$ e implica que el servicio en el sistema americano es mayor que en el francés;

–si $i_r > i \Rightarrow s^{-1}_{\overline{n}|\, i_r} < s^{-1}_{\overline{n}|\, i}$ e implica que el servicio en el sistema americano es menor que en el francés.

• *Total acumulado en el fondo a un momento* h < n: el total acumulado en el fondo a un momento cualquiera se puede calcular como el valor final, a la tasa del fondo, de una renta de *h* términos iguales a la cuota de reconstrucción. Si a dicho valor lo simbolizamos como $T.A_h$ es:

$$T.A_h = V_0 \times s^{-1}_{\overline{n}|\, i_r} \times s_{\overline{h}|\, i_r}$$

• *Valor residual o capital pendiente de reconstrucción a un momento* h < n: este valor resulta igual a la diferencia entre el capital V_0 y lo acumulado en el fondo hasta la finalización del h-ésimo período

$$S_h = V_0 - T.A_h$$

En el caso de rescindir el contrato y consecuentemente, cancelar anticipadamente la deuda, éste es el importe que debería entregar el deudor conjuntamente con lo acumulado en el fondo hasta ese momento.

• *Determinación de la tasa de interés implícita en el sistema americano*

Dada la existencia de dos tasas de interés no se puede decir que alguna de ellas sea la indicadora del costo. Por lo tanto, para conocer la tasa efectiva implícita en una operación de préstamo con estas características, debe plantearse la equivalencia financiera que permita igualar el valor del préstamo con la suma de los valores actuales de los servicios que debe pagar el deudor. Como los mismos son constantes, utilizando el modelo de la renta correspondiente y simbolizando con *x* a la tasa que satisface la ecuación, resulta la siguiente relación:

$$V_0 = \underbrace{V_0 \left(s^{-1}_{\overline{n}|\, i_r} + i \right)}_{c} \; \underbrace{\frac{1-(1+x)^{-n}}{x}}_{a_{\overline{n}|\, x}}$$

La tasa resultante tiene un comportamiento que puede resumirse de la siguiente manera:

–Si $i_r = i$ entonces $x = i$

–Si $i_r > i$ entonces $x < i$

–Si $i_r < i$ entonces $x > i$

La interpretación de lo expuesto se sustenta en la particularidad del sistema americano que implica la coexistencia de dos operaciones, una de préstamo por la que paga un interés y otra de ahorro por la que gana un interés. Es evidente que si las tasas del fondo de acumulación y de los intereses son iguales, el costo para el tomador es igual a la tasa de interés del préstamo, mientras que si la tasa que obtiene para reconstruir el capital es mayor que la del préstamo debe depositar una cuota de imposición menor, lo que le implica un menor costo y viceversa.

Si en la relación anterior se incorporan los gastos inherentes a la operación, se obtiene la tasa interna de retorno indicadora del costo financiero total.

• *Observación:* dadas las características particulares del sistema americano y su escasa aplicación en la práctica financiera, carece de sentido el tratamiento de la cancelación anticipada, el reembolso parcial y el valor de cesión.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 8

Se obtiene un préstamo de \$ 84 000 a cancelar en 20 meses por el sistema americano al 1,8 % de interés mensual para el pago de los intereses y al 1,5 % de interés mensual para la constitución del fondo de acumulación.

a) Calcular la cuota del préstamo original.

$$c = 84\,000 \left[\frac{0{,}015}{(1 + 0{,}015)^{20} - 1} + 0{,}018\right] = 5144{,}64$$

b) Determinar la tasa de interés implícita en la financiación.

$$84\,000 = 5144{,}64\,\frac{1 - (1 + x)^{-20}}{x} \qquad \text{donde } x = 0{,}0201507$$

c) Luego de calcular el total acumulado al pagar la cuota número trece, determinar el saldo pendiente de reconstrucción.

$$T.A_{13} = 84\,000\,\frac{0{,}015}{(1 + 0{,}015)^{20} - 1}\;\frac{(1 + 0{,}015)^{13} - 1}{0{,}015} = 51\,717{,}26$$

$$S_{13} = 84\,000 - 51\,717{,}26 = 32\,282{,}74$$

5.6. Sistema de préstamo con intereses directos o cargados

5.6.1. Características del sistema

Los sistemas tratados anteriormente calculan intereses sobre saldos y, aunque son los más aplicados en el ámbito financiero, existen otros tipos de préstamos que calculan los intereses directamente sobre el capital. La tasa utilizada en estos casos resulta ser una tasa ficticia ya que no representa el costo efectivo de la operación. Por este motivo a la tasa de interés utilizada se la simbolizará con i_d para distinguirla de la tasa de interés sobre saldos. Luego de explicar el sistema se comprenderán las razones por las cuales es conveniente proceder de esta manera.

Si para el período correspondiente al pago de los servicios se fija una tasa i_d, llamada *tasa directa cargada*, y el número de períodos es n, dichos servicios se calculan de la siguiente manera:

$$c = \frac{V_0 + V_0 \times id \times n}{n}$$

Interpretando dicha relación se observa que el servicio constante destinado a amortizar el préstamo se obtiene sumando a la deuda los intereses calculados proporcionalmente a ella y al número de períodos con un coeficiente de proporcionalidad i_d, de igual forma que en el régimen de interés simple, y ese valor se prorratea por el número n de cuotas, resultando:

$$c = \frac{V_0}{n} + V_0\, i_d \qquad \text{o} \qquad c = V_0 \left(\frac{1}{n} + i_d\right)$$

donde puede verse que el servicio está compuesto por cuota de capital constante y, cualquiera sea el período, la cuota de interés se calcula aplicando dicha tasa sobre el total de la deuda. Es evidente que dicha modalidad le implica al prestatario o deudor un elevado costo ya que a partir del segundo servicio pagará intereses sobre el capital adeudado y el ya amortizado.

Esto justifica que dicha tasa no es una tasa sobre saldos y por lo tanto no es efectiva, de allí que se aconseja simbolizarla de manera distinta. Por este motivo es muy importante saber encontrar la tasa de interés implícita equivalente a la tasa directa cargada.

Este tipo de financiación es muy utilizado en el ámbito comercial para la venta en cuotas de artículos electrónicos, electrodomésticos en general y automóviles.

5.6.2. Obtención de la tasa sobre saldos o implícita i a partir de la directa cargada i_d

Para obtener la tasa implícita se aconseja plantear la equivalencia financiera entre el valor del préstamo y los valores actuales de los servicios. Al tratarse de servicios constantes resulta la siguiente ecuación:

$$V_0 = V_0 \left(\frac{1}{n} + i_d\right) \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sobre esta ecuación pueden variar las incógnitas y resolverse problemas que respondan a distintas modalidades del mercado, a saber:

–Si las cuotas son adelantadas, en el segundo miembro se agrega el factor $(1 + i)$.

–Si la primer cuota es exigible al cabo de un número d de periodos, en el segundo miembro se agrega el factor $(1 + i)^{-d}$ correspondiente al tiempo de diferimiento.

–Si se financia sobre precio de lista o de contado se modifica el valor V_0.

5.6.3. Relación entre la tasa i_d e i según el número de períodos

Si en la ecuación anteriormente propuesta, que permite obtener la tasa implícita, se simplifica V_0 y se hace pasaje de términos, queda:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1}{n} + i_d$$

Esta relación es la igualdad entre la cuota de amortización del sistema francés (único sistema con interés sobre saldos y cuota constante) y la cuota del sistema de interés directo. Además de ser otra manera de calcular la tasa sobre saldos equivalente a la directa, permite efectuar el siguiente análisis:

Si $n = 1$

$$\frac{i}{1-\frac{1}{1+i}} = 1 + i_d \Rightarrow \frac{i(1+i)}{i} = 1 + i_d \Rightarrow (1+i) = 1 + i_d$$

por lo tanto la tasa sobre saldos es igual a la tasa directa.

Si $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \lim_{n\rightarrow\infty} \left(\frac{1}{n} + i_d\right)$$

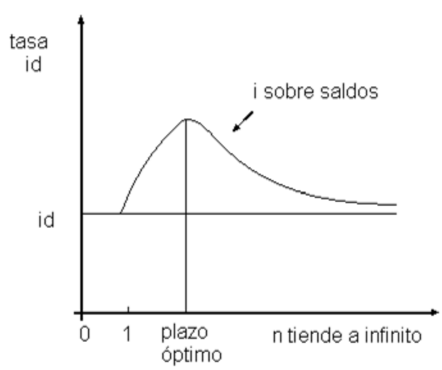
En esta igualdad ocurre entonces que $(1 + i)^{-n}$ y $\frac{1}{n}$ tienden a cero por lo tanto $i \rightarrow i_d$.

Esto sucede ya que cuando *n* tiende a infinito la amortización es tan pequeña que prácticamente no se cancela el capital lo cual permite interpretar que el interés sobre saldos pasa a ser casi interés sobre el total V_0.

Se efectúa a continuación una tabla donde se muestra que la tasa *i* sobre saldos es igual a la directa *id* cuando $n=1$ para luego ser mayor hasta un punto máximo que es el óptimo para el prestamista y el más oneroso para el deudor y luego tienden a igualarse cuando el número de períodos tiende a infinito. Ese valor máximo que alcanza la tasa sobre saldos es diferente y depende no sólo de los valores de la tasa directa sino también del valor de *n*. Cuanto más alta es esta tasa, menor es el plazo óptimo de financiación para el prestamista.

n/i_d	0,02	0,06	0,10
1	0,02	0,06	0,10
2	0,0266	0,079	0,131
3	0,0297	0,0876	0,144
4	0,0315	0,0920	0,1496
5	0,0326	0,0943	0,1523
6	0,0334	0,0956	0,15341
7	0,0339	0,0962	**0,15346**
8	0,0342	**0,0964**	0,15292
9	0,0345	0,0963	
10	0,0346		
11	0,0347		
12	0,03475		
13	**0,03478**		
14	0,03477		
15	0,03474		

En la siguiente figura puede verse gráficamente el comportamiento de la tasa de interés sobre saldos antes expuesto:



PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 9

Una empresa que comercializa electrodomésticos publicita la venta de televisores cuyo precio de contado es $ 6656 o financiado en 24 cuotas calculadas por el sistema de interés directo a una tasa directa para 30 días del 0,42 %. Se solicita:

a) Calcular el importe de la cuota.

$$c = \frac{6656}{24} + 6656 \times 0{,}0042 = 305{,}29$$

b) Calcular la tasa efectiva para 30 días si la primera cuota es exigible a los 30 días de la compra.

$$6656 = 305{,}29\ \frac{1-(1+i)^{-24}}{i}$$

i ≅ 0,0078 ó 0,78 % para 30 días.

c) Calcular la tasa efectiva para 30 días si la primera cuota es exigible a los 90 días de la compra.

$$6656 = 305{,}29\ \frac{1-(1+i)^{-24}}{i}\ (1+i)^{-2}$$

$i = 0{,}0067$ ó 0,67 % para 30 días.

• PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un prestamista privado presta a un cliente una cierta suma de dinero conviniendo la devolución mediante el pago de 10 cuotas, compuestas de capital e intereses sobre saldos, exigibles cada mes vencido, las cinco primeras de $ 2400 cada una, y las cinco últimas de $ 3000 cada una. Se sabe que para la financiación se aplicó una tasa efectiva anual del 42,5761 %.

Se solicita:

1.1. Calcular el monto del capital objeto del préstamo (en este punto se deben aplicar los modelos de rentas que correspondan).

1.2. Construir el cuadro de amortización hasta determinar el saldo después de pagar el cuarto servicio.

1.3. Aplicando el método retrospectivo verificar el saldo obtenido en el cuadro del punto 1.2.

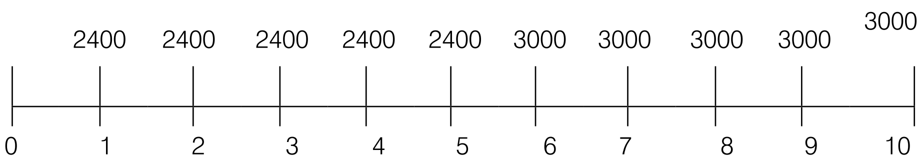
1.4. Si se resuelve refinanciar ese saldo (en $t = 120$) mediante el pago de 12 servicios compuestos por cuota de capital constante e interés directo:

a) calcular la tasa directa mensual que debería aplicarse si el prestamista desea mantener la tasa efectiva mensual resultante de las condiciones iniciales;

b) calcular el nuevo servicio de la refinanciación.

Solución

1.1.



$i_{30} = 1{,}425761^{1/2} - 1$

$i_{30} = 0{,}03$

$$V_0 = 2400 \text{ x } \frac{1 - (1 + 0{,}03)^{-5}}{0{,}03} + 3000 \text{ x } \frac{1 - (1 + 0{,}03)^{-5}}{0{,}03} \text{ x } (1 + 0{,}03)^{-5}$$

$V_0 = 10\,991{,}30 + 11\,851{,}48$

$V_0 = 22\,842{,}78$

1.2.

h	Cuota	t	Interés	Saldo
0	–	–	–	22 842,78
1	2400,00	685,28	1714,72	21 128,06
2	2400,00	633,84	1766,16	19 361,90
3	2400,00	580,86	1819,14	17 542,76
4	2400,00	526,28	1873,72	15 669,04

1.3.

$$V_4 = 22\,842{,}78 \text{ x } (1 + 0{,}03)^4 - 2400 \text{ x } \frac{(1 + 0{,}03)^4 - 1}{0{,}03}$$

$V_4 = 25\,709{,}75 - 10\,040{,}70$

$V_4 = 15\,669{,}05$

1.4.

a) $15\,669{,}04 = (\textit{cuota nueva}) \text{ x } a_{\overline{12|}\,0,03}$

$$15\,669{,}04 = 15\,669{,}04 \text{ x } \left(\frac{1}{12} + i_d\right) \text{ x } \frac{1 - (1 + 0{,}03)^{-12}}{0{,}03}$$

$$\frac{1}{12} + i_d = \frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-12}}$$

$i_d = 0{,}017129$

b) $c = 15\,669{,}04 \times \left(\frac{1}{12} + 0{,}017129\right)$

$c = 1574{,}14$

2. Una persona está estudiando permutar su propiedad por un nuevo departamento cuyo valor hoy es de \$ 70 000. La diferencia se pacta en 18 cuotas mensuales vencidas por el sistema francés a una tasa efectiva mensual constante del 0,015.

Se pide:

2.a) Calcular el valor por el que le reciben su propiedad actual, si la cuota del préstamo es de \$ 1595,14.

2.b) Calcular la deuda residual por el método retrospectivo inmediatamente después de pagar la cuota 4.

2.c) Realizar el cuadro de marcha por los meses 5, 6 y 7 del préstamo.

2.d) Suponga que al otorgar el préstamo deducen gastos de escritura y seguros del 4,5 % sobre el monto del préstamo: calcular la tasa indicadora del costo efectivo mensual que resultaría de esa situación.

Solución

2.a)

Valor del préstamo:

$$V_0 = 1595{,}14 \times \frac{1-1{,}015^{-18}}{0{,}015}$$

$V_0 = 25\,000$

$\Rightarrow$ Valor al que reciben su propiedad:

$x = 70\,000 - 25\,000$

$x = 45\,000$

2.b)

$$S_4 = 25\,000 \times 1{,}015^4 - 1595{,}14 \times \frac{1{,}015^4 - 1}{0{,}015}$$

$S_4 = 26\,534{,}08 - 6525{,}56$

$S_4 = 20\,008{,}53$

2.c)

h	Cuota	t	Interés	Saldo
4	–	–	–	20 008,53
5	1595,14	1295,01	300,13	18 713,51
6	1595,14	1314,44	280,70	17 399,08
7	1595,14	1334,15	260,99	16 064,93

2.d)

$$S_4 = 25\,000 - 1125 = 1595{,}14 \times \frac{1 - (1 + TIR)^{-18}}{TIR}$$

TIR mensual = 0,020187

3. Se otorga un préstamo de \$ 1000 amortizable mediante cuatro servicios mensuales crecientes en un 10 % a partir del primero a una tasa de interés sobre saldos del 2 %.

Se solicita:

3.a) Calcular el importe del primer servicio.

3.b) Construir el cuadro de amortización.

Solución

3.a)

$$1000 = c_1 \frac{1 - 1{,}1^4 \times 1{,}02^{-4}}{1 + 0{,}02 - 1{,}1} \Rightarrow c_1 = 226{,}88$$

3.b)

t	a_h	I_h	t_h	S_h
0	–	–	–	1000
1	226,88	20,00	206,89	793,12
2	249,57	15,86	233,71	559,40
3	274,53	11,19	263,35	296,06
4	301,98	5,92	296,06	0,00

4. Un señor acaba de abonar la cuota Nº 15 de un préstamo amortizable por sistema americano, habiendo reunido en el fondo de amortización la suma de \$ 18683,91. Se sabe que la cuota total es de \$ 2160,715 y que deberá pagar 21 cuotas más para terminar la operación, y la tasa del fondo de acumulación es del 1 %.

Se pide:

4.a) Calcular la cuota del fondo de amortización.

4.b) Calcular el monto del capital obtenido en préstamo y la tasa activa a aplicar para el cálculo de los intereses.

4.c) Suponiendo que el día de hoy el deudor decide entregar lo acumulado en el fondo y refinanciar el saldo en 30 cuotas calculadas a una tasa directa del 1,5 %. Determinar el nuevo servicio.

Solución

4.a)

$$T_{15} = t \times \frac{(1 + i)^{15} - 1}{i}$$

$$18683{,}91 = t \times \frac{(1 + i)^{15} - 1}{0{,}01}$$

$t = 1160{,}715$

4.b)

$$V_0 = t \times \frac{(1 + 0{,}01)^{15 + 21} - 1}{0{,}01}$$

$$V_0 = 1160{,}715 \times \frac{(1 + 0{,}01)^{36} - 1}{0{,}01}$$

$$V_0 = 50\,000$$

Por lo tanto, si el servicio es igual a \$ 2160,71 y la cuota de amortización es \$ 1160,75, por diferencia la cuota de interés es \$ 1000, obteniéndose la tasa del 2 % haciendo:

$$\frac{1000}{50\,000} = 0{,}02$$

4.c)

$S_{15} = 50\,000 - 18\,683{,}91$

$S_{15} = 31\,316{,}09$

$$c = V_0 \left(\frac{1}{n} + i_d\right) \Rightarrow c = 31\,316{,}09 \left(\frac{1}{30} + 0{,}015\right) \Rightarrow c = 1513{,}61$$

• PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Una entidad crediticia otorga préstamos personales con reembolso de capital ajustado a los 90 días y pago de intereses cada 30 días vencidos sobre capital ajustado a una tasa de interés nominal anual del 14,60 % para una frecuencia de capitalización de 30 días. Se pide:

1.1. Determinar los desembolsos que deberá realizar un cliente que obtiene un préstamo de \$ 15 000 sabiendo que las tasas de inflación en los sucesivos tres períodos en que transcurrió su operación fueron: 1,5, 1,2 y 0,9 %. R: 182,70; 184,89 y 15 732,11

1.2. Calcular la tasa aparente para 30 días resultante para el deudor sabiendo que le dedujeron un 2 % de gastos iniciales sobre el valor del préstamo y que debió pagar el 21 % de IVA sobre los intereses en cada vencimiento y no puede deducirlo. R: 3,3 %

1.3. Dado que al vencimiento el deudor no cuenta con la suma destinada a devolver el capital ajustado, luego del pago de los intereses correspondientes, la financiera le ofrece refinanciarlo a una tasa del 2,5 % para 30 días mediante el pago de 12 cuotas calculadas por el sistema alemán: determinar el monto de las cuotas 1, 7 y 12. R: 1684,19; 1489,86; 1327,92

2. Un banco de plaza otorga créditos personales a clientes que tienen cuenta sueldo en su entidad. Los mismos son por distintos montos y amplios plazos de financiación pero todos se amortizan por el sistema francés. La tasa nominal anual es del 27 % y las cuotas se pagan mensualmente. Suponiendo que un individuo opta por el plazo de 60 meses y solicita $ 40 000:

2.1. Calcular el monto de la cuota mensual que deberá pagar sin considerar gastos. R: 1221,413

2.2. Si el folleto que publicita esta financiación informa que el costo financiero total (o TIR) anual es del 42,96 % incluyendo los gastos de otorgamiento del 3 % sobre el capital prestado y otras erogaciones periódicas como impuestos y seguros a pagar en cada cuota: determinar el monto de la cuota que incluye los gastos, sabiendo que éstos son todos de igual monto. R: 1408,90

2.3. Calcular la suma que cancelaría la deuda correspondiente a la financiación, en las condiciones contractuales, 12 días después de efectivizar la cuota 27. R: 28 488,48

3. En la revista mensual de un comercio de artículos de electrónica se promociona la venta de una *notebook* por el sistema de amortización de interés directo mediante un plan de pago de cuotas fijas, mensuales y consecutivas calculadas considerando el precio de contado y el número de cuotas a pagar. Para el caso de este artículo se anuncia el pago de 24 cuotas de $ 299,90 calculadas sobre el precio de $ 4799. Se solicita:

3.1. Calcular la tasa directa mensual aplicada. R: 2,08255 %

3.2. Si en la misma revista se publica que todos los casos incluyen la primera cuota de entrega y además, para clientes con tarjeta de la casa la notebook vale $ 4499, verificar que, mediante la financiación anunciada, el costo financiero implícito anual que le resulta a un comprador común es del 71,6978 % (cuando corresponda considerar año de 360 días ó 12 meses).

4. Un prestamista privado presta a un cliente una cierta suma de dinero conviniendo la devolución mediante el pago de 18 cuotas mensuales constantes de $ 980 cada una, compuestas de capital e intereses sobre saldos y exigibles cada mes vencido. Se sabe que para la financiación se aplicó una tasa efectiva anual del 42,5761 %.

Se solicita:

4.1. Calcular el monto del capital objeto del préstamo. R: 13 478,44

4.2. Si a los 10 días de haber efectuado el pago de la séptima cuota y, no estando previsto en el contrato, el deudor decide realizar un reembolso parcial de $ 5000, momento en que la tasa de mercado es del 28,80 % nominal anual para una frecuencia mensual: determinar el saldo resultante para que ninguna de las partes se perjudique. R: 4450,90

4.3. Si se resuelve refinanciar ese saldo mediante el pago de 12 servicios mensuales compuestos por cuota de capital constante e interés directo:

a) Calcular la tasa directa mensual que debería aplicarse si el prestamista desea asegurarse una tasa efectiva de interés mensual del 2,7 %. R: 1,53381 %

b) Calcular el nuevo servicio de la refinanciación. R: 439,18

5. Un Banco de la ciudad otorgó a una empresa constructora un crédito de $ 240 000 en las siguientes condiciones:

- Pago de cuatro cuotas cada 60 días vencidos, luego de un diferimiento de 150 días, destinadas a la amortización constante del capital y a pagar intereses sobre saldos adeudados.
- La primera cuota incluía los intereses correspondientes al tiempo transcurrido desde el otorgamiento del préstamo hasta la fecha de pago de la misma.
- Tasa de interés: 36,5 % nominal anual de interés con capitalización cada 30 días.

5.1. Calcular los desembolsos a realizar por la empresa para cumplir con sus obligaciones. R: $\mathbf{a}_1 = 115\,169{,}72$; $\mathbf{a}_2 = 70.962$; $\mathbf{a}_3 = 67.308$ y $\mathbf{a}_4 = 63.654$

5.2. Treinta días después de efectivizado el primer pago, la empresa solicitó realizar una entrega de $ 40 000 y refinanciar el saldo mediante el pago de una cierta cantidad de cuotas, inmediatas, cada 30 días vencidos, de $ 15 826,61 cada una, calculadas mediante el sistema americano. La entidad bancaria aceptó inmediatamente con la condición de que las nuevas cuotas fueran calculadas teniendo en cuenta para el pago de los intereses la tasa pactada originalmente, y una tasa del 1 % para la constitución del fondo: determinar la cantidad de cuotas que debió desembolsar la empresa para cancelar su deuda. R: 12

CAPÍTULO 6
Empréstitos

6.1. Generalidades. Condiciones. Modalidades de colocación y rescate

• *Generalidades*

Antes de comenzar a desarrollar el tema de empréstitos, es conveniente aclarar que este texto proporciona una propuesta metodológica diferente en su tratamiento que permitirá al lector valuar cualquier tipo de bonos e interpretar los conceptos utilizados en el mercado y la información que se publica sobre los mismos para la toma de decisiones.

Al tratar el problema de la amortización de capitales indivisos se ha visto que el capital objeto del préstamo (deuda) es proporcionado por un único acreedor, mientras que aquí analizaremos el caso de préstamos divisos.

En efecto, los empréstitos constituyen una operación financiera de préstamo con la particularidad que por la parte acreedora intervienen varios prestamistas. Cuando ciertas empresas, sean públicas o privadas, concurren al mercado financiero para obtener fondos en grandes cantidades y a largo plazo, es difícil que se encuentre un prestamista único dispuesto a conceder el capital necesario, por lo que dicho capital se fracciona entre diversos acreedores.

De esta manera, el importe global del préstamo aparece dividido en cuotas partes, cada una de las cuales recibe el nombre de *obligaciones* en general, ya sean bonos gubernamentales o públicos como así también las denominadas «obligaciones negociables» cuando sean emitidos por empresas. Cada acreedor adquirente de una de esas partes acredita como derecho un documento probatorio denominado *título*, utilizándose también otras denominaciones como *cédulas*, *bonos*, etcétera.

Los *títulos* o *bonos* son instrumentos de deuda que una entidad pública o privada emite con el objeto de financiarse. Son certificados a través de los cuales el emisor se compromete a devolver al inversor en una fecha determinada, el monto recibido en préstamo y a retribuir dicho préstamo con el correspondiente pago de intereses que se establecen en el momento de la emisión.

Cada título tiene estampado el importe de la obligación y a ese valor se lo llama *valor nominal* del título; también lleva adheridos los cupones correspondientes al pago de los intereses y la efectivización de éstos se realiza contra el retiro o sellado de dichos cupones.

En adelante al acreedor de una obligación se lo designará *obligacionista* o *inversor*, y a la empresa deudora tomadora de los fondos, *ente emisor*.

Normalmente las obligaciones son transferibles dando lugar a numerosas negociaciones, de tal modo que mientras el ente emisor obtiene una financiación cuantiosa a largo plazo, los obligacionistas pueden hacer transacciones no muy voluminosas y obtener rendimientos importantes en el corto y mediano plazo.

Esto hace que sea de mucho interés el problema de la determinación de la tasa efectiva implícita o tasa interna de retorno (TIR). Esta tasa permitirá al obligacionista, conocer el rendimiento obtenido por la adquisición, tenencia y posterior venta o rescate de su título, y al ente emisor, el costo del crédito tomado bajo estas características. Este problema será analizado al estudiar técnicamente cada tipo de empréstito.

• *Condiciones*

Teniendo en cuenta que un empréstito no es sino un préstamo y por lo tanto una operación financiera, deberán determinarse perfectamente las condiciones formales y substanciales, siendo fundamentales las que se refieren a la cuantía y pago de los intereses, el plazo y la forma de reembolso del capital.

Es aquí donde se observará una gran similitud entre los distintos sistemas de amortización de deudas indivisas desarrollados en el capítulo anterior y las distintas maneras en que el ente emisor cancelará sus compromisos mediante el rescate de los títulos y pago de los cupones de interés.

Las condiciones del préstamo son fijadas por el ente emisor que debe tener en cuenta la situación del mercado para poder ofrecer un título que brinde confiabilidad y encuentre suscriptores.

En el programa de emisión de un empréstito se deberán indicar las condiciones de emisión, a saber:

a) Fecha de emisión: momento en que entra en vigencia el comienzo de la obligación.

b) Fecha de vencimiento: momento en que se extingue la obligación del emisor para con el inversor.

c) El plazo o la duración del préstamo que está determinado por la modalidad del reembolso y es el tiempo que transcurre desde la fecha de emisión hasta la fecha de vencimiento.

d) Número de obligaciones a emitir.

e) Valor Nominal de las obligaciones: es el valor impreso en la lámina.

f) Valor de emisión de cada obligación, o sea el valor al cual los títulos serán colocados en el mercado. Este valor, llamado también valor de suscripción, puede coincidir con el nominal y entonces se dice que son emitidos a la par, mientras que si se colocan en el mercado con una *prima de emisión* tendremos que son emitidos sobre la par o bajo la par, según el valor de emisión sea mayor o menor que el nominal, respectivamente. Prima de emisión es la diferencia entre el valor de emisión y el nominal.

La emisión bajo la par es lo más frecuente, ya que esta modalidad permite atraer suscriptores, mientras que la emisión sobre la par encuentra pocas aplicaciones concretas ya que esta condición aparece como desfavorable para el obligacionista. No obstante se han dado casos de este tipo de empréstitos en economías deterioradas para facilitar su recuperación, como ha ocurrido en muchos países de Europa después de la guerra.

g) Valor de rescate, o sea el valor al cual el emisor sacará de circulación las obligaciones, o dicho de otra manera, el valor al cual amortizará cada título. Cuando este valor de rescate coincide con el valor nominal se dice que el rescate es a la par, mientras que si los rescates se efectúan con una *prima de rescate* o *amortización* corresponde a los que son rescatados sobre la par o bajo la par según este valor sea mayor o menor que el nominal, respectivamente. Prima de rescate es la diferencia entre el valor de rescate y el valor nominal.

h) La tasa de interés para una cierta unidad de tiempo. Esta es una tasa de interés o rendimiento efectivo para esa unidad y aunque algunos autores la llamen tasa nominal del empréstito, por aplicarse sobre el valor nominal del título, debe quedar sentado que no corresponde al concepto de tasa de variación relativa media, visto oportunamente.

Los intereses se calculan sobre los saldos nominales de las obligaciónes a esa tasa que puede ser constante o variable, según se establezca en las condiciones.

i) La frecuencia con que se pagarán los cupones de interés. Algunas veces éstos se pagan en forma acumulada o periódica como en los casos de rescate en bloque, y cuando la amortización es periódica pueden pagarse conjuntamente con las cuotas de rescate (pago sincrónico de cupones y rescates) o en forma no coincidente con el pago de las amortizaciones, como ocurre cuando se abonan intereses entre dos cuotas de rescate consecutivas (pago asincrónico de cupones y rescate).

Debe observarse también que a veces se estipula un *período de gracia* en el que el título no amortiza y sólo paga servicios de interés entre el momento de emisión y el pago de la primera cuota de rescate.

j) La modalidad del reembolso, o sea la forma en que el ente emisor procederá a rescatar las obligaciones.

Además de las mencionadas, en épocas anteriores, solían incluirse algunas condiciones en la emisión que definían otros tipos de empréstitos, a saber:

- *Empréstitos con obligaciones que pierden el cupón a su reembolso o con pérdida del último cupón*: en este tipo de empréstitos las obligaciones, al ser amortizadas, reciben solamente el valor de rescate pero no el cupón que vence en el momento del reembolso.

- Empréstitos con lotes: son aquellos en los que se incluye la cláusula de la concesión de premios (lotes) que se adjudican a un número limitado de obligaciones, designadas por azar (lotería). La suma que periódicamente destina la entidad emisora a premios o lotes puede ser una suma constante o variable y, según la modalidad que se adopte, el lote puede incluir o no el valor de rescate.

• *Características de la emisión y suscripción:*

Generalmente, el empréstito se ofrece a la suscripción pública mediante la intervención de uno o más bancos que actúan como intermediarios entre la empresa que necesita los fondos y los inversionistas dispuestos a adquirir las obligaciones. En nuestro país deben ser agentes autorizados nucleados dentro del Mercado Abierto Electrónico y las Sociedades de Bolsa.

Dichos bancos se encargan de su colocación en el mercado, es decir, de hacer la publicidad del préstamo y recoger las suscripciones.

En función de las condiciones de mercado y previo estudio del mismo, hecho por el ente emisor, se fija el precio de emisión que es el precio que deben pagar los suscriptores por cada obligación.

Una vez fijado el precio de emisión, se determina la tasa de interés a ofrecer y otros datos de las obligaciones, aunque a veces se fijan todas las otras condiciones y en función de ellas se maniobra el precio de emisión.

Este valor de emisión no siempre es fijado arbitrariamente por el ente emisor, ya que si se trata de títulos que se colocan a través de la Bolsa de Comercio, dependerá de la confiabilidad que brinden en el mercado bursátil y de las condiciones imperantes en el mismo.

• *Características del reembolso*

Las formas más comunes a través de las cuales el ente emisor reembolsa las obligaciones son las siguientes:

a) Rescate en bloque o reembolso global de todas las obligaciones al cabo de un cierto tiempo.

b) Rescate periódico progresivo de una parte o de un porcentaje de capital de cada obligación emitida.

La mayoría de los títulos emitidos en los últimos tiempos por diferentes gobiernos se encuadran dentro de estos dos tipos de amortización.

c) Rescate progresivo de un *cierto número de títulos*, reembolsando periódicamente algunas de las obligaciones emitidas con el *pago del capital entero*. En este tipo de rescate el número de títulos que periódicamente se reembolsan puede ser un número constante o variable y, para quien posee una obligación, el reembolso es siempre en forma total. Este tipo de amortización fue utilizada en el pasado y no tiene vigencia en la actualidad.

Cuando el reembolso reviste estas características, se debe proceder al sorteo o licitación para determinar cuáles serán las obligaciones a rescatar. Este sorteo se realiza basado en un número de orden o de serie que lleva cada título y la fecha de rescate es incierta.

Existe otra forma de reembolso que en el presente carece de importancia debido a que no se practica y es el caso de los *empréstitos irredimibles* (deudas perpetuas) en los que el ente emisor no asume obligación de reembolso a determinado vencimiento.

Según las formas de reembolso propuestas, el mismo puede ser de vencimiento cierto (casos a y b) o de vencimiento aleatorio (caso c). Esta distinción es de especial interés para el obligacionista, para quien la obligación es un título que le da derecho a cobrar los cupones de interés y el precio de reembolso y por lo tanto le interesará conocer la fecha en que se efectuará dicho reembolso.

Para encarar el estudio de los distintos tipos de empréstitos se enfocará el análisis de los mismos teniendo en cuenta esta clasificación, debiendo antes introducir algunos conceptos que facilitarán su comprensión.

6.2. Conceptos a aplicar para el análisis y valoración de un título

6.2.1. Vida y edad de una obligación

Como se dijo en el punto anterior, al obligacionista le interesará conocer la fecha de reembolso, ya sea para determinar el rendimiento a obtener con su inversión como así también para precisar el valor de cesión de su obligación cuando desee transferirla.

Por lo tanto, para calcular cualquiera de esos valores, el poseedor de un título necesitará conocer la *vida* del mismo.

Vida de una obligación es el tiempo transcurrido desde el momento de emisión hasta el momento de su rescate o extinción.

La vida residual de una obligación depende de la edad de la misma, para lo cual debemos tener presente que *edad de una obligación* es el intervalo de tiempo que media desde la emisión o puesta en circulación y el momento en que se evalúa dicha obligación, sin que haya sido rescatada. Entonces podemos decir que *vida residual de una obligación* de determinada edad es el tiempo que todavía permanecerá en circulación.

Como podrá apreciarse, cuando el reembolso es global o en bloque, la vida es siempre una variable cierta. También lo es en el caso de rescate periódico progresivo de un cierto porcentaje de cada obligación emitida, ya que dicho porcentaje permitirá determinar el número de períodos en que cada título tardará en extinguirse.

Por el contrario, cuando se trata de rescate periódico progresivo de un cierto número de títulos y teniendo en cuenta que los mismos se eligen por sorteo, o sea que están dependiendo del azar, la vida constituye una variable aleatoria. En estos se presenta, sólo para los obligacionistas, un problema de probabilidad y existen ciertas características (y promedios) que permiten estimar la vida residual de una obligación, como son la vida media, la vida mediana y la vida matemática en un momento dado. Estos conceptos serán definidos cuando se trate el caso de empréstitos con reembolso de vencimiento aleatorio.

6.2.2. Usufructo y nuda propiedad de un título

Todo título da derecho a un flujo futuro de fondos que se forma con los intereses y las amortizaciones. Cuando un obligacionista desea ceder su título, puede determinar el *valor de cesión* teniendo en cuenta esos dos componentes perfectamente caracterizados: el usufructo y la nuda propiedad. Recordando lo enunciado para este punto en los préstamos indivisos, se puede decir:

- *Usufructo:* es el valor actual de todos los intereses que corresponden a la obligación y que restan satisfacer, evaluados al momento de cesión a la tasa vigente en el mercado.
- *Nuda propiedad:* es el valor actual a la tasa de mercado de las sumas correspondientes a los rescates o amortizaciones pendientes.

La suma de los dos valores anteriores es el precio que se paga por una obligación en un momento dado efectuando la valoración a la tasa vigente en el mercado conveniente para el tipo de obligación a transferir.

Como la época en que una obligación determinada habrá de ser reembolsada es a veces desconocida, no es posible calcular directamente el valor de cesión de un título. En estos casos se calcula el usufructo y la nuda propiedad de todo el empréstito y a este valor actual total se lo divide por el número de obligaciones vivas al momento de valoración, obteniéndose así el valor que puede atribuirse a cada obligación. Otras veces se estima la fecha de rescate utilizando alguna ponderación y esa estimación se toma para efectuar el cálculo correspondiente como si fuera de vencimiento cierto.

6.2.3. Valor residual

Es el monto de capital que no ha sido pagado por el emisor, es decir, el porcentaje del valor del título que no se ha amortizado. Si la amortización es en una sola cuota el valor residual va a ser durante toda la vida del bono igual a su valor total. En el caso de que el capital sea amortizado en cuotas parciales el valor residual irá disminuyendo en función del porcentaje de amortización periódica que establezcan las condiciones de emisión. Este dato es de relevancia para el cálculo del valor técnico de un título.

6.2.4. Intereses corridos

Son los intereses devengados durante el período en curso, entre la fecha de pago del último cupón y la fecha de valoración, y que no se han percibido por no ser exigibles hasta el vencimiento del período. Por lo tanto al inicio de cada período de renta los intereses corridos son iguales a cero.

6.2.5. Valor técnico

Es el valor que un título tiene en un momento determinado de acuerdo a las condiciones estrictas de emisión. Indica el valor que el ente emisor debería pagar para efectuar el rescate en ese momento y es igual al valor residual más los intereses corridos.

$$\textit{Valor técnico} = \textit{Valor residual} + \textit{Intereses corridos}$$

Para el caso de títulos ajustables por algún índice de precios, el cálculo se hace sobre el capital ajustado, o sea:

$$\textit{Valor técnico} = \textit{Valor residual} \times \textit{Coeficiente de ajuste} + \textit{Intereses corridos}$$

6.2.6. Paridad

Debe observarse que la costumbre financiera ha llevado a utilizar el término paridad en dualidad de concepto.

Tradicionalmente se llama paridad de un título con respecto a otro a su valor calculado al tanto efectivo de ese otro. Este concepto de paridad implica calcular el valor efectivo de un empréstito y en función de esa tasa, calcular el valor de un título de otro empréstito.

Actualmente, la mayoría de los diarios y revistas financieros y los más recientes trabajos efectuados sobre títulos públicos hablan de *paridad de un título* refiriéndose *a la relación o cociente entre el precio de mercado y el valor técnico*.

Es conveniente aclarar que cuando se habla del precio de mercado de una obligación se refiere al precio que la misma tiene en las cotizaciones bursátiles o lo que se paga para adquirir un título en el Mercado Abierto Electrónico como resultado del libre juego de la oferta y la demanda:

$$\textit{Paridad} = \frac{\textit{Precio Mercado}}{\textit{Valor técnico}}$$

Si ese cociente es mayor que 1 implica «cotización sobre la par», si es igual a 1 implica «cotización a la par», y si es menor que 1 implica «cotización bajo la par».

Este concepto de paridad no mide el rendimiento sino que es sólo una relación, y para completar el análisis se requiere determinar la TIR.

6.2.7. Valor actual neto (VAN) y Tasa interna de retorno (TIR)

Dado que una obligación o título da derecho con su compra a un flujo futuro de fondos que se forma con los intereses y las amortizaciones, es muy importante la determinación de estos conceptos vertidos en el capítulo 3 de este texto, ya que permitirán analizar la inversión realizada por el obligacionista y conocer el rendimiento de su inversión.

El *VAN* representa el valor actual de los flujos de fondos resultante del pago de cupones de interés y amortización a una tasa de interés exigida o esperada por el inversor.

La *TIR* será aquella tasa de interés que iguale el valor presente de los flujos de fondos de intereses y amortizaciones con el precio al que se adquirió el bono en el momento inicial o con el precio de mercado si se lo adquirió después de la emisión. En el caso de vender el bono antes de su vencimiento, el rendimiento final no necesariamente será igual al prometido al momento de realizar la inversión ya que el precio de los mismos es sensible a las variaciones en las tasas de interés de los mercados financieros.

6.2.8. *Duration* (duración) de un bono

Es una medida representativa de la vida ponderada de la corriente de pagos que genera un bono que tiene en cuenta para su determinación todos los pagos intermedios y no sólo la fecha de vencimiento en la cual se recibe la amortización final.

Es un promedio ponderado de cada uno de los flujos que genera un bono, donde el factor de ponderación es el valor presente (a la fecha de valuación) de los pagos de amortización e intereses descontados a la TIR y divididos por el precio de mercado.

Si se simboliza con *f* a cada flujo y con *PM* al precio de mercado, resulta:

$$Duration = \frac{1\,\dfrac{f1}{(1+TIR)} + 2\,\dfrac{f2}{(1+TIR)^2} + 3\,\dfrac{f3}{(1+TIR)^3} + \ldots + n\,\dfrac{fn}{(1+TIR)^n}}{PM}$$

De esta manera se obtiene un indicador de la madurez y riesgo de un título ya que informa sobre el tiempo promedio en que el inversor tarda en recuperar el capital de su inversión. La *duration* es inversamente proporcional a la TIR del bono. Cuando la TIR aumenta la *duration* disminuye ya que al descontar los flujos a una tasa más alta se asigna menores ponderaciones a los flujos más lejanos y mayores a los flujos más cercanos.

Luego de introducir los conceptos necesarios para la valoración de títulos públicos y privados, se desarrollarán los distintos tipos de empréstitos, previa aclaración de la notación a utilizar para representar los elementos principales de este capítulo.

6.2.8.1. Nomenclatura

N	Número de obligaciones emitidas.
N_h	Número de obligaciones rescatadas en el $h-$ésimo rescate.
N_h^v	Número de obligaciones vivas o pendientes de reembolso a la finalización del $h-$ésimo rescate.
N_h^e	Número de obligaciones extinguidas o rescatadas hasta el momento h inclusive.
C	Valor nominal de cada obligación.
E	Valor de emisión de cada obligación.
R	Valor de rescate o reembolso de cada obligación.
NC	Valor nominal del empréstito.
NE	Valor de emisión del empréstito.
NR	Valor de rescate del empréstito.
i	Tasa de rendimiento pactada.
Ci	Importe del cupón.
n	Número de períodos o plazo total del empréstito.
U	Usufructo de todo el empréstito.
K	Nuda propiedad de todo el empréstito.
VC	Valor de cesión del empréstito a un momento dado.
VR	Valor residual.
PM	Precio de mercado de un título.
VP	Valor paridad o paridad.
VT	Valor técnico de un título.
X	Tasa interna de retorno.

6.3. Empréstitos con reembolso de vencimiento cierto

Como ya se dijo, dentro de este tipo de empréstitos se encuadran todos aquellos en los que la vida residual de un título es una variable cierta, o sea que el obligacionista al momento de adquirir una obligación conoce cuándo la misma le será rescatada.

Ahora bien, en la actualidad hay casos que pertenecen a este tipo de reembolso en los que el ente emisor incluye cláusulas que le dan derecho a sacar de circulación los títulos antes del plazo previsto (cancelación anticipada), por lo que la vida dejaría de ser totalmente cierta.

Dentro de los que revisten estas características tenemos los siguientes tipos:

6.3.1. Bonos de cupón cero

Son aquellos que no pagan cupón de interés y el emisor se compromete a devolver el capital al vencimiento del bono. La tasa de interés que se pacta en la emisión permite determinar el valor actual del título como si se tratara de una operación de descuento, motivo por el cual también se los llama *bonos de descuento*.

El valor de compra o suscripción para un inversor se determina de la siguiente manera:

$$E = C\,(1 + i)^{-n}$$

y al vencimiento recibe el valor C que incluye los intereses implícitos en esa forma de operatoria.

El ente emisor recibe NE en la emisión y al vencimiento debe desembolsar NC.

Generalmente son títulos emitidos a corto plazo por la tesorería de los distintos gobiernos. Ejemplo de éstos son los bonos del tesoro de los EE. UU. que son tomados como referentes para evaluar distintas calidades crediticias que ofrecen otros emisores, por ser considerados inversión sin riesgo. En nuestro país son de este tipo las LEBAC (Letras del Banco Central).

6.3.2. Rescate en bloque con pago único de cupones (cupón único)

En el momento de suscripción se emite un cierto número de obligaciones que serán reembolsadas en su totalidad al cabo de un cierto número de períodos y, conjuntamente con el rescate, se pagan los intereses de todas las obligaciones generados durante el lapso transcurrido desde la emisión hasta el rescate.

Este tipo de reembolso global es asimilable a la amortización de deudas indivisas con el nombre de reembolso único y pago acumulado de intereses.

• *Observación:* se informa al lector que en adelante se indicará con R el valor del título a la fecha de rescate para facilitar la interpretación conceptual, sin que ello signifique que existe prima de rescate, ya que la mayoría de las veces las obligaciones son rescatadas a su valor nominal C.

6.3.2.1. Estudio desde el punto de vista del ente emisor

Teniendo en cuenta las condiciones propuestas, y suponiendo la colocación inmediata y simultánea de todos los títulos, el ente emisor recibe en el momento de emisión una suma igual a NE.

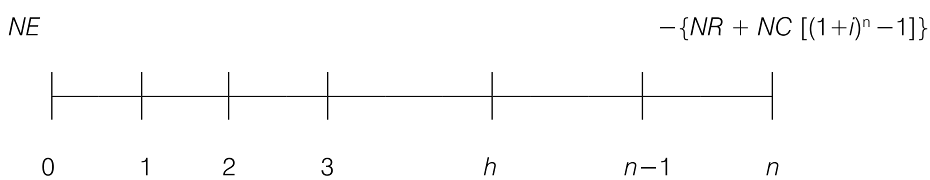
Transcurridos los n períodos estipulados para el reembolso, deberá disponer de la cuota rescate y la cuota destinada al pago de los intereses.

El servicio único de rescate será igual a NR, ya que tiene que sacar de circulación la totalidad de los títulos a un valor R cada uno. Como se dijo antes, usualmente se rescatan a la par o sea al valor C. Es importante notar aquí que el número de títulos vivos o en circulación en cualquier punto del intervalo $[0; n]$ es igual a N.

En cuanto al servicio de interés, éste será igual a $NC\ [(1 + i)^n - 1]$, en el caso de que la tasa i pactada sea constante. Esto teniendo en cuenta que los intereses se calculan sobre el valor nominal de cada título y que se pagan a todos los títulos en forma acumulada, por lo que el resultado no es más que la diferencia entre el valor final de NC evaluado en la ley fijada y el capital inicial como una operación simple de capitalización.

Si se realiza el gráfico temporal de la operación, representando los ingresos con signo positivo y los egresos con signo negativo, se tendrá:

Gráfico Nº 1



Este puede interpretarse como un modelo básico a partir del cual se obtienen otros más específicos según las distintas modalidades que se puedan presentar.

Es evidente que si se presenta el caso de emisión a la par, basta con reemplazar NE por NC; y si se tuviera rescate a la par, resulta que el ente emisor deberá disponer en n de la suma $NC\ (1 + i)^n$, al reemplazar R por C.

No debe descartarse también la alternativa de considerar que la tasa pactada sea flotante o variable periódicamente; bajo esta premisa, en el momento n se deberá entregar un importe equivalente a:

$$NR + NC\ [(1 + i_1)\ (1 + i_2)\ ...\ (1 + i_n) - 1]$$

Otra posibilidad es que los títulos sean emitidos con cláusula de ajuste o indexación (títulos ajustables); en este caso, y suponiendo que el factor de corrección monetaria a aplicar en $(0; n)$ sea igual a $(1 + F_{[0;\,n]})$ se tendrá que disponer en n de la suma:

$$NC\ (1 + F_{[0;\,n]})\ (1 + i)^n$$

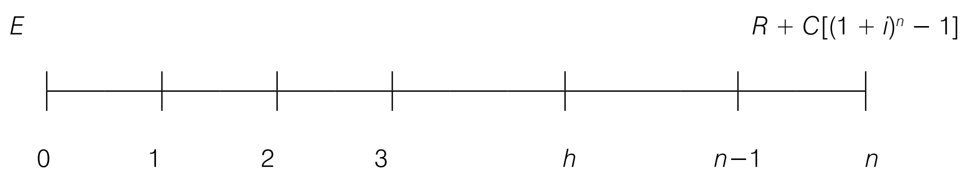
si se rescatan al valor nominal ajustado y los cupones se calculan sobre saldos nominales ajustados.

Como puede observarse, a partir del modelo básico propuesto inicialmente, siempre es factible adaptar el mismo a las distintas situaciones que pueden plantearse en el mercado financiero, siendo estas propuestas algunas de las modalidades posibles.

6.3.2.2. Estudio desde el punto de vista del obligacionista

Si analizamos esta forma de reembolso desde el punto de vista de un obligacionista adquirente de un título, éste deberá entregar en el momento de la suscripción, el valor de emisión E, y al vencimiento recibirá el valor de rescate R y un cupón único en concepto de intereses. El valor residual es siempre el valor total del título ya que no hay amortización periódica. Gráficamente será:

Gráfico Nº 2



Análogamente a lo visto cuando se trató esta forma de reembolso desde el punto de vista del ente emisor, sobre el intercambio de capitales propuesto gráficamente, pueden presentarse distintas variantes:

- Si la emisión y el rescate fueran a la par, el obligacionista (acreedor) entregará C en $t = 0$ y al vencimiento recibirá $C(1 + i)^n$.
- Si entre las condiciones del empréstito se hubiera previsto tasa variable para las distintas unidades U, el adquirente de un título recibirá al vencimiento la suma:

$$R + C[(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,...\,(1 + i_n) - 1]$$

- Si incluyera cláusula de ajuste y tasa de interés constante, el obligacionista percibirá en $t = n$:

$$C(1 + F_{[0;\,n]})\,(1 + i)^n$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 1

Una empresa del Estado emitió 10 000 obligaciones en las siguientes condiciones:

- Valor nominal de cada obligación: 100 u.m.
- Emisión a la par.

• Rescate en bloque y a la par de todos las obligaciones emitidas al cabo de 3 años contados desde la emisión.

• Pago de intereses acumulados conjuntamente con el rescate a una tasa de interés anual del 10 %.

Se pide:

1. *Para la empresa*:

a) Determinar, mediante un gráfico temporal los ingresos y los egresos efectuados para el cumplimiento del compromiso con los obligacionistas.

NE = 1 000 000 $\qquad\qquad$ 1 000 000 x $1{,}10^3$ = 1 331 000

0 $\qquad$ 1 $\qquad$ 2 $\qquad$ 3

b) Sabiendo que debió soportar un costo técnico y administrativo en el momento de la emisión del 5 % de lo que ingresó por la venta de las obligaciones, calcular la TIR indicadora del costo total de su empréstito.

$$1\,000\,000\ (1 - 0{,}05) = 1\,331\,000\ (1 + x)^{-3}$$
$$x = 0{,}118969$$

2. *Para un obligacionista*, portador de una obligación que adquirió en el momento de emisión:

a) Determinar mediante el gráfico temporal los egresos e ingresos resultantes de las condiciones pactadas.

−100 $\qquad\qquad$ 133,10

0 $\qquad$ 1 $\qquad$ 2 $\qquad$ 3

b) Determinar el valor paridad luego de transcurridos dos años desde la emisión y sabiendo que el título en ese momento se cotizaba en el mercado a 118 u.m.

$$VT = 100 \text{ x } 1{,}10^2 = 121$$

$$VP = \frac{118}{121} = \frac{118}{121} = 0{,}9752066$$

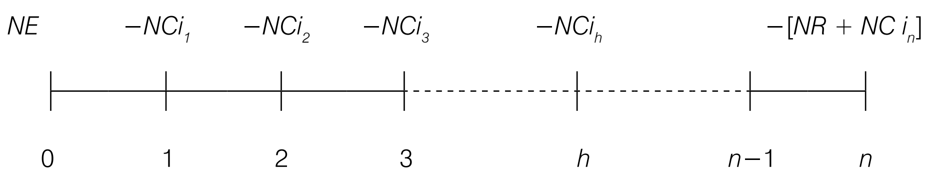
c) Suponiendo que el obligacionista cedió su título en la fecha y al valor de mercado considerado en b), determinar la TIR anual resultante de la inversión así realizada.

$100 = 118\ (1 + x)^{-2}$ donde resulta $x = 0{,}086278$

6.3.3. Rescate en bloque con pago periódico de cupones

Comparándolo con el sistema de amortización de préstamos de reembolso único con pago periódico de interés, podemos decir que se trata de un empréstito en el cual los títulos son rescatados en bloque, globalmente, al cabo de n períodos U (vencimiento cierto de la obligación) con pago periódico de cupones al final de cada período a una tasa fija o variable (servicios de renta). A este tipo de bonos se los llama bullet (bala).

Dado que en el intervalo $[0; n]$ no hay rescates, excepto al vencimiento, el número de títulos vivos en cualquier punto de dicho intervalo es N, por lo tanto la empresa deberá pagar a los N títulos el interés periódico y en el momento n la suma NR para destinar al rescate de los mismos. Suponiendo tasa de interés flotante, resulta la corriente de flujos que se grafica a continuación:



En dicho gráfico E y R pueden coincidir o no con C y si la tasa fuese constante, las cuotas de interés constituirían los términos de una renta constante iguales a NCi.

Para cualquier obligacionista portador de un título, en el eje temporal anterior, debe suprimirse N e invertir los signos de los flujos correspondientes recordando que el valor residual es siempre el valor total del título ya que no hay amortización periódica.

En el mercado actual, pertenecen a este tipo de rescate algunos títulos públicos emitidos en dólares como los BONAR (VII y X) y los GLOBALES (Par, Discount, Cuasi Par) y algunas obligaciones negociables emitidas por algunas empresas argentinas.

Con la finalidad de afianzar los conceptos vertidos, se efectuará a continuación el estudio de un bono en circulación a la fecha de la redacción de este tema. Para ello es necesario obtener las condiciones de emisión del empréstito elegido para su análisis, y luego verificar la información periodística suministrada en las tablas de cotizaciones de un diario financiero aplicando los conceptos estudiados.

En esta oportunidad se toma como referencia el cuadro de Títulos Públicos del suplemento bursátil del diario *Ámbito Financiero* de fecha 23/04/2012, el cual se adjunta a continuación.

Títulos Públicos (Nación, provincias y BCRA)

Títulos públicos en moneda extranjera: precios, paridades y TIR

Títulos	Amortización final	Cupón corriente			Capital residual	Renta del período en curso	Valor actualizado c/100 V.N.	Mercado de Valores			Mercado Internacional	Mercado Abierto				Paridad %	Tasa Interna de Retorno Efectiva Anual (TIREA)			Promedio ponderado de vida (días)
		Nº	De Renta o de Amortización y Renta	Fecha de vencimiento del cupón				Cierre		Volumen Negociado		Precio ($)	Variación				Proyectando LIBOR actual		Total proyectando tasa de Treasury Strips	
								($)	Dólar transf.				Diaria %	Semanal %	Mensual %		S/normas de emisión	Total		
BONAR VII 2013	12-sep-13	12	R	12/09/12	100,00	7,0000	100,80	547,00	S/C	5.598	100,00	554,00	1,21	-0,99	-1,96	99,21	7,10	7,74	** —.—	489
BONAR X 2017	17-abr-17	11	R	17/10/12	100,00	7,0000	100,12	449,95	80,75	7.609.003	80,75	447,25	2,41	-3,87	-8,57	80,66	7,12	12,68	** —.—	1531
BODEN 2012	3-ago-12	21	Am+R	03/08/12	12,50	0,7850	12,52	543,20	S/C	3.858.413	12,32	68,25	0,33	-0,24	-0,65	98,39	0,79	6,81	6,81	102
BODEN 2013	30-abr-13	19	Am+R	30/04/12	25,00	0,6290	25,08	535,50	S/C	1.603.875	24,45	135,50	0,62	0,00	-0,61	97,50	0,80	5,92	5,53	184
BODEN 2015	3-oct-15	14	R	03/10/12	100,00	7,0000	100,39	492,00	S/C	2.821.210	88,90	492,50	1,95	-3,89	-7,59	88,56	7,12	11,40	** —.—	1126
PAR u$s Leg local	31-dic-38	17	R	30/09/12	100,00	2,5000	100,16	168,00	S/C	278.500	* 30,00	167,00	0,67	-8,26	-15,97	30,11	3,53	12,89	** —.—	4096
DISC u$s Leg local	31-dic-33	17	R	30/06/12	100,00	8,2800	136,85	478,00	S/C	864	* 64,95	497,00	-0,84	-3,35	-11,03	65,57	8,44	13,87	** —.—	2855
PAR u$s Leg extr,	31-dic-38	17	R	30/09/12	100,00	2,5000	100,16	183,00	S/C	26.361	* 33,50	186,50	4,36	-2,90	-12,76	33,61	3,53	11,82	** —.—	4308
DISC u$s Leg extr,	31-dic-33	17	R	30/06/12	100,00	8,2800	136,85	522,00	S/C	128.043	* 70,50	538,50	3,52	-2,08	-11,60	71,02	8,44	12,73	** —.—	2975
PAR Euro	31-dic-38	17	R	30/09/12	100,00	2,2600	100,14	S/C	S/C	—	* 28,75	192,75	2,68	-1,71	-11,54	28,85	3,20	12,56	** —.—	4252
DISC Euro	31-dic-33	17	R	30/06/12	100,00	7,8200	134,50	S/C	S/C	—	* 58,00	527,00	4,50	-5,69	-13,43	58,70	7,96	14,80	** —.—	2790
Global 2017 (N)	2-jun-17	4	R	02/06/12	100,00	8,7500	103,43	0,00	S/C	4.999	* 91,00	523,13	2,25	-4,21	-9,90	91,30	8,93	11,40	** —.—	1472
PAR u$s Leg local (N)	31-dic-38	5	R	30/09/12	100,00	2,5000	100,16	S/C	S/C	—	* 30,50	169,75	0,00	-2,09	-13,96	30,61	3,53	12,73	** —.—	4128
DISC u$s Leg local (N)	31-dic-33	5	R	30/06/12	100,00	8,2800	136,85	S/C	S/C	—	* 64,30	492,25	0,00	-2,58	-12,34	64,93	8,44	14,01	** —.—	2840
PAR u$s Leg extr, (N)	31-dic-38	5	R	30/09/12	100,00	2,5000	100,16	S/C	S/C	—	* 34,50	192,00	0,00	0,00	0,00	34,60	3,53	11,54	** —.—	4363
DISC u$s Leg extr, (N)	31-dic-33	5	R	30/06/12	100,00	8,2800	136,85	S/C	S/C	—	* 69,75	532,75	7,72	-3,13	-11,15	70,28	8,44	12,88	** —.—	2960
PAR Euro (N)	31-dic-38	5	R	30/09/12	100,00	2,2600	100,14	S/C	S/C	—	* s/c	S/C	—	—	—	—	3,20	—	** —.—	—
DISC Euro (N)	31-dic-33	5	R	30/06/12	100,00	7,8200	134,50	S/C	S/C	—	* 58,00	527,00	0,00	-3,33	-12,91	58,70	7,96	14,80	** —.—	2790
Cupon PBI u$s Local	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	64,40	S/C	4.005.366	11,70	64,75	6,36	-5,65	-14,60	—	—	—	—.—	—
Cupon PBI u$s extr,	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	65,00	S/C	22.665.313	11,70	64,75	5,88	-6,02	-14,60	—	—	—	—.—	—
Cupon PBI Euro	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	78,00	S/C	20.159	10,80	72,00	6,40	-6,49	-11,11	—	—	—	—.—	—
Cup, PBI u$s extr, (N)	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	64,50	S/C	449.466	11,70	64,75	6,36	-5,26	-13,65	—	—	—	—.—	—

(*) cotización ´clean´ (N) Bonos del canje 2010 ** Bonos de renta fija (X) ex-cupón S/C = Sin Cotización Tasa Libor Anual Proyectada: 0,7304

Fuente: Arpenta SA

Títulos Públicos (Nación, provincias y BCRA)

Títulos públicos en pesos: precios, paridades y TIR

Títulos	Amortización final	Cupón corriente			Capital residual	Renta anual del período en curso	Valor actualizado $ / 100 V.N.	Mercado de Valores			Mercado Abierto				Paridad %	Tasa Interna de Retorno Efectiva Anual (TIREA)			Promedio ponderado de vida
		Nº	De Renta o Amortización y Renta	Fecha de vencimiento del cupón				Cierre ($)	Cierre Dólar transf.	Volumen negociado	Precio ($)	Variación Diaria %	Variación Semanal %	Variación Mensual %		Según normas de emisión	Total sin proyectar tasas	Total proyectando tasas (A)	
BODEN 2014	30-sep-14	16	Am+R	30/09/12	62,50	2,0000	122,04	182,00	S/C	16.938	113,75	-0,22	-1,64	-0,13	93,21	2,01	7,24	** 7,24	509
BOCON PRE 9	15-mar-14	50	Am+R	15/05/12	33,85	2,0000	74,07	210,50	S/C	85.400	71,25	1,21	-0,35	0,31	96,19	2,04	5,95	** 5,95	374
BOCON PRE 10	15-mar-14	10	R	04/07/12	100,00	13,0156	100,68	97,00	S/C	51.021	97,00	0,00	0,26	1,80	96,35	12,73	3,45	15,22	621
BOCON PRO 7	1-ene-16	76	Am+R	01/05/12	37,00	0,0199	43,23	S/C	S/C	—	31,30	0,00	0,00	-0,06	72,41	0,24	20,75	21,11	585
BOCON PRO 12	3-ene-16	76	Am+R	03/05/12	37,00	2,0000	118,55	291,00	S/C	49.512	107,70	1,13	-0,09	-0,22	90,85	2,02	7,78	** 7,78	627
BOCON PRO 13	15-mar-24	1	Am+R	15/04/14	100,00	2,0000	237,42	102,50	S/C	1.458.110	102,50	1,74	-1,68	-5,62	43,17	2,02	17,12	** 17,12	2027
BOCON PRO 14	4-ene-16	10	R	04/07/12	100,00	13,0156	100,68	92,00	S/C	1.209.591	92,00	-1,08	-2,49	-2,35	91,38	12,69	3,64	16,44	996
BOCON PRO 15	4-oct-22	1	R	04/07/14	100,00	13,0156	130,43	82,00	S/C	427.184	82,00	-1,20	-1,20	-4,65	62,87	12,64	5,61	20,93	2301
BOGAR 2018	4-feb-18	116	Am+R	04/05/12	60,40	2,0000	181,42	233,50	S/C	530.238	141,65	0,78	-1,46	-1,20	78,08	2,02	10,92	** 10,92	1039
BONAR AR12	12-jun-12	10	R	12/06/12	100,00	10,5000	103,82	103,65	S/C	109.954	103,65	0,00	0,10	0,83	99,84	10,50	11,83	** 11,83	50
BONAR 13 $	4-abr-13	17	·R	04/04/13	100,00	15,5625	100,81	S/C	S/C	—	s/c	—	—	—	—	16,46	—	—	—
BONAR 14 $	30-ene-14	13	R	02/05/12	100,00	16,4698	103,78	105,25	S/C	4.354.369	105,50	0,76	-0,19	0,29	101,66	15,67	1,93	14,43	561
BONAR 15 $	10-sep-15	11	R	11/06/12	100,00	15,4424	125,82	128,35	S/C	4.736.233	128,40	0,71	-0,23	0,63	102,05	15,94	2,15	14,64	658
PAR $+CER	31-dic-38	17	R	30/09/12	100,00	1,1800	203,54	40,00	S/C	2.512.974	40,00	0,00	-6,98	-15,34	19,65	1,71	12,17	** 12,17	5018
DISC $+CER	31-dic-33	17	R	30/06/12	100,00	5,8300	253,91	127,00	S/C	590.274	127,50	2,41	-3,04	-6,93	50,22	5,91	13,67	** 13,67	3087
CUASI PAR	31-dic-45	1	R	30/06/14	100,00	3,3100	267,21	S/C	S/C	—	64,00	0,00	0,00	-3,76	23,95	3,33	13,41	** 13,41	4118
PAR $ (n)	31-dic-38	5	R	30/09/12	100,00	1,1800	203,54	S/C	S/C	—	40,50	0,00	-1,94	-1,95	19,90	1,71	12,07	** 12,07	5039
DISC $ (N)	31-dic-33	5	R	30/06/12	100,00	5.8300	253,91	S/C	S/C	—	125,00	0,00	-1,57	-1,57	49,23	5,91	13,93	** 13,93	3057
Cupon PBI Pesos	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	—.—	13,02	S/C	226.874.870	12,99	2,06	2,76	-4,40	—.—	—	—	—	—

(N) Bonos del canje 2010 **Renta fija S/C = Sin Cotización (X) ex-cupón (A) Tasa Caja de Ahorro: 0,02%; Badlar 12,00%

Fuente: Arpenta SA

6.3.3.1. Estudio de un caso real de bonos argentinos

Antes de comenzar el análisis debe observarse que toda la información financiera se expone para un título de valor nominal $C = 100$.

ESTUDIO DEL BONAR VII − 2013

Condiciones de emisión del bono

Emisor	Gobierno Nacional
Moneda de emisión	dólares
Monto de emisión original	u$s 2 000 000 000 *
Monto de circulación	u$s 2 000 000 000 *
Fecha de emisión	12/09/2006
Fecha de vencimiento	12/09/2013
Plazo	7 años
Amortización	Integra la totalidad del vencimiento
Intereses	Tasa fija del 7 % nominal anual, calculada sobre la base de un año de 360 días. Las fechas de pago serán el 12 de marzo y el 12 de septiembre de cada año. El primer servicio seráel 12/03/07

Para el análisis debe tenerse en cuenta la fecha de la publicación que es el 23/04/2012 y que por lo tanto se convierte en la fecha de valuación del bono. A tal efecto se verificarán los valores expresados en la primera fila de los títulos en moneda extranjera y observando la información que se expone.

Intereses periódicos

De acuerdo con el enunciado, la tasa del 7 % es nominal anual para año de 360 días, por lo tanto la tasa semestral a aplicar es

$$i_{sem} = \frac{0{,}07}{2} = 0{,}035$$

Entonces por cada 100 unidades de valor nominal el interés periódico es 3,5.

Si se realiza un gráfico temporal y en el mismo se ubican los fondos de renta y amortización final que, según las condiciones de emisión, restan percibir a partir de la fecha de valuación, se tiene:

Valor actualizado o valor técnico

$$VT = VR + \textit{Intereses corridos}$$

El valor residual es 100, ya que la amortización es íntegra al vencimiento y los intereses corridos, devengados desde el pago del último cupón (12/03) hasta la fecha de análisis (23/04), corresponden a 42 días sobre el total de los 180 días del semestre.

$$VT = 100 + 100\,[(1 + 0{,}035)^{\frac{42}{180}} - 1] = 100 + 0{,}80 = 100{,}80$$

- *Valor paridad*

$$VP = \frac{PM}{VT} = \frac{100}{100{,}80} = 0{,}99206$$

- *Tasa interna de retorno efectiva anual (TIREA)*

Según normas de emisión: al no tomar en cuenta gastos y siendo emitidos y rescatados a la par, la tasa según las condiciones de emisión debe coincidir con la anunciada, o sea que si la tasa nominal anual es el 7 % para una frecuencia de capitalización semestral, la anual efectiva debe ser la equivalente a la tasa del 3,5 % semestral:

$$\text{TIREA} = 1{,}035^2 - 1 = 0{,}0712 \text{ ó } 7{,}12\ \%$$

Otra manera de determinar esta tasa es igualando el valor actual de los flujos de fondos restantes con el valor técnico, donde la incógnita sea la tasa que verifica la equivalencia entre los capitales.

Si se plantea esa equivalencia y se toma como valor actual el precio de mercado, se obtiene la tasa total proyectada. Dado que el cálculo de la misma requiere de métodos que resultan más complejos, si se acepta la información del cuadro de cotizaciones puede proponerse la siguiente ecuación:

$$100 = 3{,}5\,\frac{1}{(1 + 0{,}0774)^{\frac{142}{360}}} + 3{,}5\,\frac{1}{(1 + 0{,}0774)^{\frac{323}{360}}} + 103{,}5\,\frac{1}{(1 + 0{,}0774)^{\frac{507}{360}}}$$

En dicha ecuación el numerador de los exponentes representa la cantidad de días que existen entre la fecha de valuación y cada vencimiento, y se verifica que efectivamente la TIREA es el 7,74 % al obtener el precio de mercado. Esta relación permite interpretar que si se adquiere un bono al precio vigente en esa fecha y se lo mantiene en cartera hasta el vencimiento, se obtiene ese rendimiento.

• Duration *o promedio ponderado de vida*

Aplicando el concepto de *Duration*, resulta:

$$\textit{Duration} = 142\,\frac{3{,}5}{(1+0{,}0774)^{\frac{142}{360}}} + 323\,\frac{3{,}5}{(1+0{,}0774)^{\frac{323}{360}}} + 507\,\frac{103{,}5}{(1+0{,}0774)^{\frac{507}{360}}}$$

$$\textit{Duration} = \frac{483 + 1059 + 47\,312}{100} = 488{,}54 \cong 489$$

De esta manera quedan comprobados los valores correspondientes al BONAR VII – 2013 de la primera línea de la tabla de cotizaciones adjunta.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 2

Un banco oficial emite 10 000 obligaciones de valor nominal \$ 1000, las que serán rescatadas a un valor de \$ 1025 en su totalidad, al cabo de cuatro años contados desde su colocación en el mercado, o sea, desde la emisión. El precio de emisión de cada título es 950. Todas las obligaciones tienen adheridos 4 cupones con vencimiento al final de cada año, que le darán derecho al obligacionista a los intereses a una tasa anual que se incrementará periódicamente en 1/2 punto a partir del 8 % fijado para el primer año.

Se pide:

a) Determinar los egresos a efectuar por la empresa emisora para el cumplimiento del compromiso con los obligacionistas, realizando el correspondiente gráfico temporal.

10 000 000	−800 000	−850 000	−900 000	−(950 000 + 10 250 000)
0	1	2	3	4

b) Si el suscriptor de 10 títulos desea transferirlos, determinar el valor de cesión de las mismos, teniendo presente que la tasa de mercado es del 11 % anual, sabiendo que los colocará a la venta cuando faltan 2/3 de período para cobrar el 3er cupón.

−9500	800	850		900	950 + 10 250
0	1	2	2 1/3	3	4
			Valor de cesión		

$$\text{Valor de cesión} = 900\ 1{,}11^{-2/3} + 11\,200 \times 1{,}11^{-5/3} = 839{,}51 + 9411{,}95 = 10\,251{,}46$$

c) Suponiendo que el suscriptor de los 10 títulos lograra venderlos de acuerdo a lo propuesto en b), determinar la TIR resultante de su inversión.

$$9500 = 800\,(1 + \text{TIR})^{-1} + 850\,(1 + \text{TIR})^{-2} + 10.251{,}46\,(1 + \text{TIR})^{-7/3}$$

Efectuando el cálculo correspondiente resulta la TIR = 0,107176

6.3.4. Rescate periódico de un porcentaje de cada título

Este método de rescate puede asimilarse al sistema alemán en cuanto a que periódicamente el ente emisor rescata un porcentaje de cada título, resultando una *cuota de amortización* constante igual a:

$$\left(\frac{\alpha}{100}R\right)N \quad \text{ó} \quad \frac{R}{n}N$$

Al ente emisor le resulta indistinto rescatar un porcentaje del número de títulos emitidos, no así al obligacionista, ya que éste recibiría el total del valor de rescate en un momento que puede no haberse determinado con anterioridad.

En cuanto a los *cupones*, éstos se calculan sobre los saldos nominales adeudados, de manera que para cualquier momento $h/0 < h < n$, la empresa emisora deberá disponer de la siguiente suma:

$$N\left(C - (h-1)\frac{\alpha}{100}C\right) \times i \quad \text{ó} \quad N\left(C - (h-1)\frac{C}{n}\right) \times i$$

Puede ocurrir que el pago de la amortización y cupones se haga conjunta o asincrónicamente.

El inversor portador de un título recibirá periódicamente las sumas anteriores divididas por N, puesto que N representa, como ya se sabe, el total de títulos.

Corresponden a este tipo, entre otros, los BODEN 2013, emitidos en dólares y los BODEN 2014 emitidos en pesos y ajustados por el CER (Coeficiente de Estabilización de Referencia).

A continuación se propone el análisis de los BODEN 2013.

6.3.4.1. Estudio de un caso real de bonos argentinos

Estudio del BODEN 2013

• *Condiciones de emisión del bono*

Emisor	Gobierno Nacional
Moneda de emisión	dólares
Monto de emisión original	u$s 1 941 810 000 *
Monto de circulación	u$s 970 907 000 *
Fecha de emisión	30/10/2002
Fecha de vencimiento	29/04/2013
Plazo	10 años y seis meses
Amortización	En 8 cuotas anuales, iguales y consecutivas, equivalentes cada una al 12,50 % del monto emitido. Primer vencimiento: 30/04/2006.
Intereses	Devengan interés sobre saldos a partir de la fecha de emisión, a la tasa para depósitos en eurodólares a 6 meses de plazo en el mercado interbancario de Londres (LIBOR), con un tope del 3 % anual, pagaderos por semestre vencido los 30/04 y loa 30/10. La tasa LIBOR será ajustada a un año calendario de 365 ó 366 días, según corresponda, teniendo en cuenta los días efectivamente transcurridos.

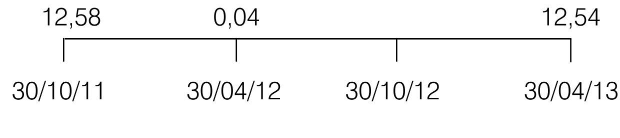
El análisis, al igual que en el BONAR VII, se realizará teniendo en cuenta como fecha de valuación el 23/04/2012 y se verificarán los valores correspondientes a la cuarta línea del cuadro de cotizaciones recordando que toda la información financiera se muestra para un título de $C = 100$.

• *Intereses periódicos*

De acuerdo al enunciado la tasa de interés es variable. Sólo se conoce que la tasa del período en curso es del 0,629 % nominal anual, por lo tanto la semestral resulta:

$$i_{sem} = \frac{0{,}00629}{2} = 0{,}003145$$

Para realizar el gráfico temporal debe tenerse en cuenta que, según las condiciones de emisión, a la fecha de evaluación (23/04/2012) ya se efectuaron seis cuotas de amortización del 12,5 % cada una, resultando un capital residual de 25 y que la única tasa cierta es la del período en curso ya que las restantes se desconocen. Si se proyecta esta tasa para el cálculo de los flujos que faltan percibir, se obtiene:



Flujo del 30/04/12 formado por amortización y renta: 12,50 + 25 x 0,003145 = 12,5786

Flujo del 30/10/12 formado por renta: 12,50 x 0,003145 = 0,03931

Flujo del 30/04/13 formado por amortización y renta: 12,50 + 12,50 x 0,003145= 12,54

• *Valor actualizado o valor técnico*

$$VT = VR + \text{Intereses corridos}$$

El valor residual es 25 y los intereses devengados a la tasa contractual por los 175 días corridos desde el último vencimiento sobre el total de 182 días que contiene el semestre en curso, es:

$$VT = 25 + 25 \left[(1 + 0{,}003145)^{\frac{175}{182}} - 1\right] = 25 + 0{,}0755 = 25{,}0755$$

• *Valor paridad*

$$VP = \frac{PM}{VT} = \frac{24{,}45}{25{,}0755} = 0{,}9750$$

• *Tasa interna de retorno efectiva anual (TIREA)*

Como ya se ha dicho en reiteradas oportunidades, la determinación de la TIR requiere de métodos de cálculo que resultan complejos. Por eso, si se acepta la información del cuadro de cotizaciones, igualmente a lo propuesto para el análisis del BONAR VII, se puede validar la misma calculando el precio de mercado. Considerando los días que median entre la fecha de valuación y el vencimiento de cada flujo, se verifica que:

$$24{,}45 = 12{,}58\,(1 + 0{,}0592)^{-\frac{7}{365}} + 0{,}04\,(1 + 0{,}0592)^{-\frac{191}{365}} + 12{,}54\,(1 + 0{,}0592)^{-\frac{371}{365}}$$

Esta relación permite interpretar que si se adquiere un bono al precio vigente en la fecha de valuación y se lo mantiene en cartera hasta el vencimiento rinde el 5,92 %.

• Duration *o promedio ponderado de vida*

Aplicando el concepto de *Duration*, resulta:

$$Duration = \frac{7\,\dfrac{12{,}58}{(1 + 0{,}0592)^{\frac{7}{365}}} + 191\,\dfrac{0{,}04}{(1 + 0{,}0592)^{\frac{191}{365}}} + 371\,\dfrac{12{,}54}{(1 + 0{,}0592)^{\frac{371}{365}}}}{24{,}45}$$

$$Duration = \frac{88{,}06 + 7{,}64 + 4385{,}22}{24{,}45} = 183{,}27 \cong 184$$

De esta manera quedan comprobados los valores correspondientes al BODEN – 2013 de la cuarta línea de la tabla de cotizaciones adjunta.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 3

Los BODEN 2014 son títulos emitidos en pesos el 30/09/2004 con vencimiento el 30/09/2014 cuya amortización se realiza mediante 8 cuotas semestrales, iguales y consecutivas equivalentes al 12,50 % del monto de cada bono y ajustado por el CER. La primera cuota de amortización venció el 31/03/2011. Los intereses se calculan al 2 % nominal anual sobre saldos ajustados a partir de la fecha de emisión y son abonados por semestre vencido los 31/03 y 30/09 de cada año. Sabiendo que la fecha de valuación es el 18/05/2012, se solicita:

a) Determinar el valor residual.

Si las amortizaciones son semestrales del 12,5 % y la primera de ellas venció el 31/03/2011, a la fecha de valuación se realizaron tres amortizaciones incluyendo las del 30/09/2011 y 31/03/2012, por lo tanto el capital residual es 62,50.

b) Calcular el valor técnico.

Para determinar este valor debe tenerse en cuenta que se trata de bonos ajustados por el CER y que los intereses se calculan sobre saldos ajustados, por lo tanto corresponde buscar la información sobre el índice del CER a la fecha de emisión y el índice a la fecha de valuación. Indagando sobre este coeficiente se obtiene:

CER al 30/09/2004 1,52
CER al 18/05/2012 2,9939

De esta manera, aplicando el factor de ajuste o corrección monetaria sobre el capital residual más los intereses corridos por los 48 días transcurridos desde el pago del último cupón (31/03/2012) hasta la fecha de valuación (18/05/2012), resulta:

$$VT = 62{,}50\,(1+0{,}01)^{\frac{48}{180}}\ \frac{2{,}9939}{1{,}52} = 123{,}43$$

siendo el 0,01 la tasa semestral proporcional al 2 % nominal.

• *Observación:* de la misma manera se determinan los flujos resultantes en cada vencimiento, aplicando el factor de ajuste como el cociente entre el CER al día de cobro del cupón de renta o amortización y renta, sobre el CER al día de la emisión.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 4

Se emite un empréstito en las siguientes condiciones:

- N° de títulos: $N = 10000$
- Valor nominal de cada título: $C = 150$
- Rescates anuales sucesivos del 25 % del valor nominal de cada título.
- Todos los títulos tendrán derecho a un interés anual efectivo del 7,5 % sobre los saldos nominales adeudados.
- La emisión se efectúa a la par.

Se pide: calcular los servicios que debe disponer el ente emisor.

$c_1 = 10000 \times 0{,}25 \times 150 + 10000 \times 150 \times 0{,}075 = 487500$
$c_2 = 10000 \times 0{,}25 \times 150 + 10000 \times 112{,}50 \times 0{,}075 = 459375$
$c_3 = 10000 \times 0{,}25 \times 150 + 10000 \times 75 \times 0{,}075 = 431250$
$c_4 = 10000 \times 0{,}25 \times 150 + 10000 \times 37{,}50 \times 0{,}075 = 403125$

6.4. Empréstitos con reembolso de vencimiento aleatorio

Cuando se rescata periódicamente un cierto número de títulos y la selección de los mismos se efectúa por sorteo, la vida residual de cada obligación es una variable aleatoria. El poseedor de títulos con estas características tiene certeza con respecto a la fecha de cobro de los intereses pero la fecha de reembolso de cada obligación es aleatoria.

En estos casos, si el inversor quiere conocer en un determinado momento el rendimiento probable de su inversión, o si desea ceder su título y determinar el valor de cesión, no puede hacerlo ya que se desconoce la vida restante del mismo. Para ello existen algunos promedios que permiten estimar esa vida residual, a saber:

6.4.1. Vida media de una obligación

Es la media aritmética ponderada de la vida de los títulos calculada en un momento cualquiera de la vigencia del empréstito como el cociente entre el tiempo en que estarán con vida todos los títulos en circulación y el total de los títulos vivos a ese momento.

$$\text{Vida media} = \frac{1 \times N_{h+1} + 2 \times N_{h+2} + 3 \times N_{h+3} + \ldots + (n-h) \times N_n}{N_h^v}$$

6.4.2. Vida mediana o probable (Mediana del tiempo de vida)

Se llama así al tiempo que debe transcurrir para que el número de obligaciones en circulación se reduzca a la mitad. Su cálculo, en el momento de emisión, se asimila al concepto de período medio de reembolso e indica que, al momento de su cálculo, cada título tiene igual probabilidad de estar vivo que de haberse extinguido.

Si la llamamos *p*, debe verificarse:

$$N^{v}_{h+p} = \frac{1}{2} \times N^{v}_{h}$$

6.4.3. Vida matemática

Es el tiempo *z* que debe transcurrir para que un rescate en bloque de todas las obligaciones en circulación sea equivalente a la serie de rescates pendientes, tomando para la valoración una tasa *i´* de mercado.

$$N^{v}_{h} R\,(1 + i´)^{-z} = N_{h+1} R\,(1 + i´)^{-1} + N_{h+2} R\,(1 + i´)^{-2} + \dots + N_{n} R\,(1 + i´)^{-(n-h)}$$

Introducidos estos conceptos se pasa a desarrollar dos casos de empréstitos de vida aleatoria.

6.4.4. Rescate periódico de un número constante de títulos

Este método, al igual que el tratado anteriormente, se asimila al sistema alemán de amortización. La diferencia con aquél es que si el número de títulos a rescatar depende de un sorteo, la vida de los mismos es una variable aleatoria, diferencia que incide en el inversor pero no para el ente emisor. Por lo tanto, los desembolsos para el ente emisor son coincidentes con los vistos en el punto 6.3.4.

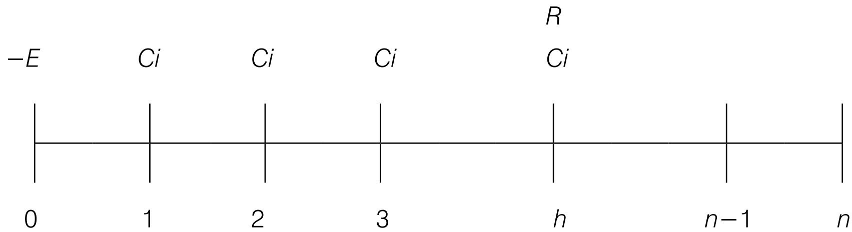
- *Cuota de amortización*

$$\mathrm{o}\frac{\alpha}{100} N\mathrm{p}\, R \quad \text{ó} \quad \frac{N}{n} R$$

- *Cuota de interés*

$$\mathrm{q}N - (h - 1)\,\frac{\alpha}{100} N\mathrm{r} \times Ci \quad \text{ó} \quad \mathrm{q}N - (h - 1)\,\frac{N}{n}\mathrm{r} \times Ci$$

En cuanto al inversor, éste desembolsará el valor E en la suscripción y durante la tenencia percibirá periódicamente el cupón Ci hasta su rescate, momento en el que además recibirá el valor R. Si la vida del título es h ($h < n$) resulta el siguiente gráfico:



Si éste desea efectuar un análisis de rentabilidad *a priori* o si desea ceder su título, para poder calcular la TIR o el valor de cesión, deberá previamente estimar la vida utilizando algunos de los promedios propuestos en el punto anterior y adaptar dichos modelos matemáticos a este caso concreto. Dado que el número de títulos que se recata es un número constante se tiene:

- *Vida media*

$$\text{Vida media} = \frac{1\frac{N}{n} + 2\frac{N}{n} + 3\frac{N}{n} + \dots + (n-h)\frac{N}{n}}{N - h\frac{N}{n}}$$

- *Vida mediana*

$$p = \frac{n-h}{2} \text{ y particularmente si } h = 0 \Rightarrow p = \frac{n}{2}$$

- *Vida matemática*

$$\left(N - h\frac{N}{n}\right) R\,(1 + i')^{-z} = \frac{N}{n} R\,(1 + i')^{-1} + \frac{N}{n} R\,(1 + i')^{-2} + \dots + \frac{N}{n} R\,(1 + i')^{-(n-h)}$$

$$\left(N - h\frac{N}{n}\right) R\,(1 + i')^{-z} = \frac{NR}{n}\, a_{\overline{n-h}|\,i}$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN Nº 5

Se efectúa la emisión de un empréstito destinado a la financiación de proyectos de inversión para pequeñas empresas.

La emisión se realiza en las siguientes condiciones:

- Total de títulos emitidos y suscriptos: 10 000

- Valor nominal de cada obligación: $ 1000
- Valor de suscripción: $ 950
- Rescate a la par cada 180 días vencidos del 25 % de las obligaciones emitidas, a partir de la emisión.
- Pago de intereses por vencido sobre las obligaciones en circulación, cada 90 días al 10,5328 % efectivo anual de interés.

Se pide:

a) Construir el cuadro que permita a la entidad realizar el seguimiento periódico de la operación.

Rescate cada 180 días de un número constante de títulos y pago de cupones a los títulos vivos cada 90 días.

Se trata de pago asincrónico de intereses, y para la determinación de los mismos previamente corresponde calcular la tasa de interés para 90 días.

$$i_{(365/90)} = 1{,}105328^{90/365} - 1 = 0{,}025 \text{ (cada 90 días)}$$

Días	Período	Servicio rescate	Servicio interés	Servicio total	Títulos vivos
0	0	0	0	0	10 000
90	1	0	250 000	250 000	10 000
180	2	2 500 000	250 000	2 750 000	7500
270	3	0	187 500	187 500	7500
360	4	2 500 000	187 500	2 687 500	5000
450	5	0	125 000	125 000	5000
540	6	2 500 000	125 000	2 625 000	2500
630	7	0	62 500	62 500	2500
720	8	2 500 000	62 500	2 562 500	0

b) Calcular la vida matemática al momento de emisión siendo la tasa de mercado el 5 % para 180 días.

$$10\,000\,000 \times 1{,}05^{-z} = 2\,500\,000 \; \frac{1 - 1{,}05^{-4}}{0{,}05}$$

$z = 2{,}4695$ (períodos de 180 días)

$z \cong 444$ días

c) Usando como aproximación la estimación anterior calcular la TIR trimestral resultante para un obligacionista, portador de un título, redondeando la fecha de su rescate en 450 días.

Teniendo en cuenta que lo compra en la emisión a $ 950 y que durante su tenencia percibe 5 cupones de $ 25 cada uno, resulta:

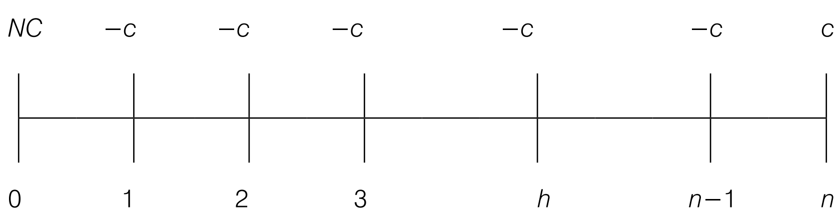
$$950 = 25\,\frac{1 - (1 + TIR)^{-5}}{TIR} + 1000\,\frac{(1 + TIR)^{-5}}{TIR} \text{ donde TIR}_{\text{trim}} = 0{,}036109$$

6.4.5. Rescate periódico de un número creciente de títulos

6.4.5.1. Empréstito normal

Se dice que un empréstito es normal cuando, además de ser emitido y rescatado a la par, *el ente emisor* debe disponer de un servicio teórico constante por período vencido, destinado a efectivizar los cupones a los títulos vivos o en circulación, al principio de cada período y al rescate de un cierto número de obligaciones.

Gráficamente resulta una renta temporaria, pospagable, inmediata, cierta, sincrónica y de términos constantes:



Es evidente que si no hay prima de emisión ni prima de rescate y los cupones se pagan a la tasa *i*, se debe verificar la igualdad entre el valor nominal del empréstito al momento de emisión y el valor actual de las cuotas o servicios destinados a extinguirlo, evaluados a dicha tasa:

$$NC = c \times a_{\overline{n|}\,i}$$

Cada uno de los términos está compuesto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
En\ h = 1 & c_1 = N_1\,C + N\,Ci \\
En\ h = 2 & c_2 = N_2\,C + N_1^v\,Ci \\
En\ h = 3 & c_3 = N_3\,C + N_2^v\,Ci \\
 & \ldots \\
En\ h = n & c_h = N_h\,C + N_{h-1}^v\,Ci \\
 & \ldots \\
En\ h = n & c_n = N_n\,C + N_{n-1}^v\,Ci
\end{array}$$

Siendo los servicios teóricamente constantes, al disminuir la suma destinada al pago de cupones ya que disminuye el número de títulos en circulación, crece el número de títulos a rescatar en cada período. Esto permite ver la similitud de este sistema de rescate con el sistema francés de amortización de deudas indivisas, por lo que al igualar dos servicios consecutivos, resulta:

$$c_h = c_{h+1}$$

$$N_h C + N^v_{h-1} Ci = N_{h+1} C + N^v_h Ci$$

donde despejando N_{h+1} se verifica que:

$$N_{h+1} = N_h (1 + i)$$

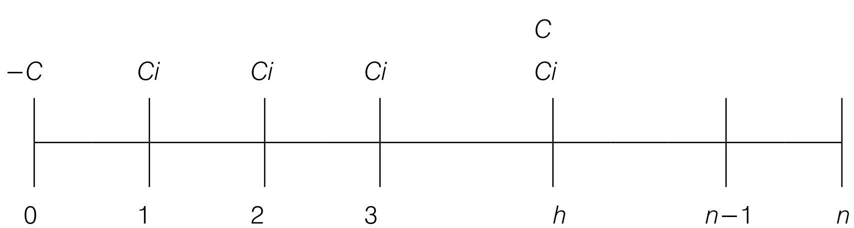
De esta manera se demuestra que las amortizaciones (o rescates) crecen en progresión geométrica de razón $(1 + i)$.

Dado que el número de títulos a rescatar en cada período tiene que ser un número entero, es necesario redondear dicha cantidad de manera tal que al multiplicar por el valor nominal, resulta un servicio que es sensiblemente variable con respecto al original.

Para la construcción del cuadro de marcha, este autor propone la realización del mismo por el método de redondeo. El mismo consiste en determinar el número de títulos a rescatar en cada período aplicando la razón de la progresión resultante y redondeando al entero más próximo. Se dejan de lado los métodos de residuos y residuos capitalizados desarrollados en la bibliografía tradicional ya que en la actualidad tienen escasa o casi nula aplicación.

• *Desde el punto de vista del inversor*

Debe tenerse en cuenta que la vida del título es una variable aleatoria que puede estimarse aplicando los promedios definidos antes, y que si el mismo fuera rescatado en h, le significaría el siguiente flujo de fondos:



Para calcular las vidas se recomienda la utilización de los modelos propuestos en la introducción de empréstitos de vencimiento aleatorio, sin realizar la deducción de fórmulas más simplificadas dado que en la actualidad no se utilizan estos sistemas de rescate. En cuanto a la vida mediana corresponde la aplicación de la fórmula para calcular el tiempo medio de reembolso del sistema francés de amortización de deudas indivisas.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 6

Con el objeto de reunir una cierta cantidad de moneda para la realización de una obra pública, se emite y rescata a la par un empréstito de 10 000 obligaciones de nominal \$ 100 cada uno, amortizable mediante 5 servicios anuales constantes destinados a la atención simultánea de los rescates y pago de cupones a las obligaciones que están en circulación al principio de cada año a una tasa de interés anual del 5,5 %.

Se pide:

a) Calcular el servicio que deberá disponer el ente emisor.

$$c = N\,C\,a^{-1}_{\overline{n}|\,i} \;\Rightarrow\; c = 1\,000\,000 \frac{0{,}055}{1 - 1{,}055^{-5}} = 234\,176{,}44$$

b) Determinar el número de títulos a rescatar en cada año aplicando la progresión correspondiente.

$N_1C = 234\,176{,}44 - 1\,000\,000 \times 0{,}055 = 179\,176{,}44$

$N_1 = 179\,176{,}44 \div 100 = 1791{,}76 \cong 1792$

$N_2 = 1890{,}31 \cong 1890$

$N_3 = 1994{,}28 \cong 1994$

$N_4 = 2103{,}96 \cong 2104$

$N_5 = 2219{,}68 \cong 2220$ Total rescate $= 10\,000$ títulos

c) Construir el cuadro de evolución utilizando los datos del punto anterior.

h	c	$N^v_{h-1}C\,i$	N_hC	N^v_hC
0	–	–	–	1 000 000
1	234 200	55 000	179 200	820 800
2	234 144	45 144	189 000	631 800
3	234 149	34 749	199 400	432 400
4	234 182	23 782	210 400	222 000
5	234 210	12 210	222 000	-

d) Calcular la vida media, la vida mediana y la vida matemática para un título que ha sobrevivido al segundo rescate. Para la vida matemática considerar una tasa de mercado del 6 % anual.

$$\text{Vida media} = \frac{1 \times 1994 + 2 \times 2104 + 3 \times 2220}{6318} = 2{,}035 \cong 743 \text{ días}$$

Para la vida probable o mediana, se adapta el modelo para el cálculo de tiempo medio de reembolso del sistema francés y, sabiendo que faltan 3 rescates, se tiene:

$$\text{Vida probable} = \frac{ln \left[\frac{(1+i)^n + 1}{2}\right]}{ln\,(1+i)} = \frac{ln \left[\frac{(1+0{,}055)^3 + 1}{2}\right]}{ln\,(1+0{,}055)} = 1{,}56 \Rightarrow 569 \text{ días}$$

Vida matemática:

$$631\,800 \times 1{,}06^{-z} = 199\,400 \times 1{,}06^{-1} + 210\,400 \times 1{,}06^{-2} + 222\,000 \times 1{,}06^{-3}$$

$$1{,}06^{-z} = \frac{188\,113{,}207 + 187\,255{,}25 + 186\,395{,}48}{631800}$$

$$1{,}06^{-z} = 0{,}889148 \Rightarrow 1{,}06^{z} = 1{,}124672 \Rightarrow z = \frac{\log 1{,}124672}{\log 1{,}06} = 2{,}01636$$

$z \cong 736$ días

6.4.5.2. Empréstitos normalizables

Son normalizables todos aquellos empréstitos que, aunque el valor de emisión y/o rescate sea distinto al nominal, o cuando, incluyendo otras cláusulas como pérdida del último cupón o lotes, siempre es posible mediante transformaciones algebraicas, simular un normal equivalente y obtener un servicio constante.

Esto implica que la equidad del intercambio se verifica a una tasa efectiva o TIR distinta a la nominal del empréstito.

A continuación se exponen los dos casos más frecuentes:

• *Con prima de emisión:* cuando la entidad emisora emite un empréstito cuyo rescate se hará mediante la utilización de servicios constantes e incluye entre las condiciones de emisión la colocación de las mismas a un valor distinto del nominal, tal proceder le implica una modificación sensible en la tasa indicadora del costo. Esta tasa será superior a la tasa pactada para el pago de los cupones si los títulos son emitidos a un precio menor al nominal, que es lo más corriente para atraer suscriptores, e inferior si se ofrecen a un precio mayor.

Para determinar el precio de emisión debe tenerse en cuentea que si los cupones Ci se efectivizan en forma coincidente con los rescates de los títulos y los mismos se reembolsan a la par, el valor del servicio teórico constante que deberá disponer el ente emisor para amortizar el empréstito será:

$$c = N\,C\,a^{-1}_{n\urcorner i}$$

y sabiendo que el ente emisor recibe en el momento de la emisión un valor igual a NE, resulta la equivalencia del intercambio a una tasa efectiva i'

$$NE = c \times a_{n\urcorner i'}$$

y reemplazando el valor de la cuota:

$$NE = NC\, a^{-1}_{\overline{n}|\, i}\, a_{\overline{n}|\, i'}$$

de donde se obtiene:

$$E = C\, a^{-1}_{\overline{n}|\, i}\ a_{\overline{n}|\, i'}$$

Expresión que permite determinar el valor de emisión conociendo la tasa para el pago de los cupones y el tanto efectivo, o bien determinar el tanto efectivo conociendo el valor de emisión.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 7

Un empréstito que ha de ser emitido a 5 años mediante servicios anuales sensiblemente constantes destinados al pago de cupones a los títulos vivos a una tasa del 7 % anual y siendo el valor nominal de cada título de $ 1000, determinar el valor mínimo al que podrían colocarse las obligaciones si la entidad emisora está dispuesta a soportar por la emisión bajo la par un costo del 7,5 %.

El precio de emisión será: $E = 1000\, a^{-1}_{\overline{5}|\, 0{,}07}\ a_{\overline{5}|\, 0{,}075}$

$E = 986{,}75$

• *Observación:* Si hubiera que construir un cuadro de amortización será semejante al efectuado en un empréstito normal, ya que los títulos se rescatan al valor nominal y el precio de emisión no incide en la determinación del número de títulos a rescatar en cada período.

• *Con prima de rescate constante:* también puede estipularse que el reembolso de los títulos se efectúe a un importe distinto del valor nominal. Este proceder modifica lógicamente el rendimiento para el obligacionista y a su vez el costo para el ente emisor, resultando ambos superiores a la tasa del empréstito cuando el valor de rescate es superior al nominal.

Si esto ocurre, el servicio constante que el ente emisor deberá disponer en un momento h cualquiera estará compuesto de la siguiente manera:

$$c_h = N_h R + N^v_{h-1} Ci$$

Para interpretar la ley que rige la amortización en este tipo de empréstitos se igualan dos servicios consecutivos ya que los mismos son constantes, por ejemplo el h y el $h + 1$.

$$c_h = c_{h+1}$$

$$N_h R + N^{v}_{h-1} Ci = N_{h+1} R + N^{v}_{h} Ci$$

donde despejando N_{h+1} se obtiene que:

$$N_{h+1} = N_h \left(1 + \frac{Ci}{R}\right)$$

Esto indica que el número de títulos rescatados en los sucesivos períodos siguen una progresión geométrica de razón $(1 + \frac{Ci}{R})$.

Si se designa a $\frac{Ci}{R} = i' \Rightarrow Ci = R \times i'$, lo que permite afirmar que es indistinto calcular el cupón periódico a la tasa i sobre el valor nominal que a la tasa ficticia sobre el valor de rescate.

De esta manera, los servicios constantes que debe pagar el ente emisor podrían asimilarse a un empréstito normal cuyos títulos se rescatan a un valor R y los cupones se calculan sobre dicho valor a la tasa i', resultando para el período h:

$$c_h = N_h R + N^{v}_{h-1} R i'$$

Esto evidencia que en cuanto a la cuantía numérica de sus elementos, un empréstito con prima de amortización es asimilable a uno reembolsable a la par cuyos títulos son de valor R y devengan un interés a la tasa i', por lo tanto los términos teóricamente constantes de la renta que amortiza el empréstito pueden calcularse aplicando el siguiente modelo:

$$c = N\, R\, a^{-1}_{n \urcorner i'}$$

PROBLEMA DE APLICACIÓN N° 8

Se emite un empréstito en las siguientes condiciones:

- Valor nominal de cada obligación: 100 u.m.
- Precio de emisión de cada obligación: 97 u.m.
- Valor de rescate de cada obligación: 105 u.m.
- Número de obligaciones emitidas: 10 000
- Tasa de interés anual para el pago de los cupones: 5,25 %
- Gastos iniciales del ente emisor: 4 % del nominal de los títulos.

Por otra parte, se reparten 2000 u.m. en concepto de lotes entre 10 obligaciones. Los rescates se realizan por año vencido durante 20 años a contar desde la emisión. El servicio anual a disponer por el ente emisor implica un desembolso constante que incluye el rescate, los intereses sobre las obligaciones vivas a principio del año correspondiente y los lotes.

Se pide:

a) Dar, para un momento h cualquiera la composición del servicio, fundamentando toda proposición.

Se trata de un empréstito normalizable con rescate sobre la par, pago de cupones a los títulos en circulación y con lotes periódicos, mediante servicios anuales sensiblemente constantes:

$$c_h = N_h\, R + N_{h\text{-}1}\, Ci + L$$

b) Calcular el valor del servicio a disponer por el ente emisor.

$$c = N\, R\, a_n^{-1} + L$$

$$R\, i' = C\, i \Rightarrow i' = \frac{Ci}{R} = \frac{100 \times 0{,}0525}{105} = 0{,}05$$

$$a = 1\,050\,000 \; \frac{0{,}05}{1 - 1{,}05^{-20}} + 2000 \; = 86\,254{,}716$$

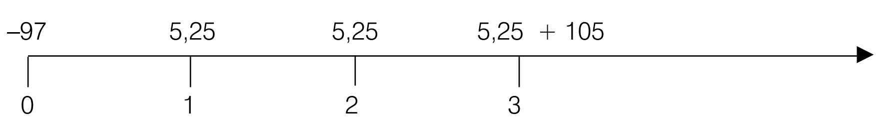
c) Calcular la tasa efectiva anual que resulta para el ente emisor en el momento de la emisión.

$$970\,000 - 40\,000 = 86\,254{,}716 \; \frac{1 - (1 + TIR)^{-20}}{TIR}$$

$x = 0{,}0677478$ anual

d) Calcular la tasa interna de retorno anual para un obligacionista cuya obligación es rescatada en el 3er año, si no es beneficiado en el sorteo de los lotes y si es beneficiado en el sorteo de los lotes.

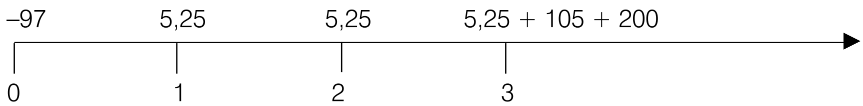
Sin lotes*:*



$97 = 5{,}25\,(1 + \mathrm{TIR})^{-1} + 5{,}25\,(1 + \mathrm{TIR})^{-2} + 110{,}25\,(1 + \mathrm{TIR})^{-3}$

$x = 0{,}07954$

Con lotes:



$95 = 5{,}25\ (1 + \text{TIR})^{-1} + 5{,}25\ (1 + \text{TIR})^{-2} + 310{,}25\ (1 + \text{TIR})^{-3}$

$x = 0{,}5043$

• PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un agente de bolsa ha invertido \$ 25 000 hace exactamente 20 meses en la adquisición a la par al momento de su emisión de 250 títulos públicos cuyo rescate del 100 % está previsto dentro de un cierto tiempo a su valor nominal de \$ 100 ajustado de acuerdo con un determinado índice de precios. Con los mismos tiene derecho al cobro de intereses sobre capital ajustado, por semestre vencido, a tasa del 2 % semestral.

Se solicita:

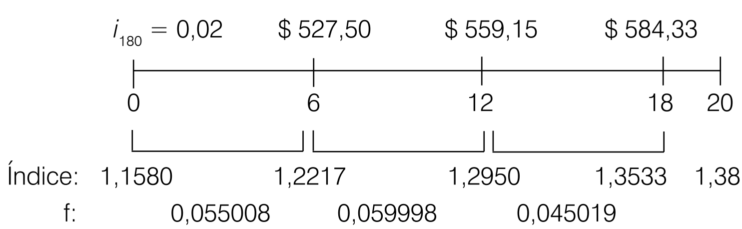
1.a) Ubicar en un gráfico temporal los ingresos que a la fecha ha percibido el agente de bolsa sabiendo que el índice de precios estipulado registra los siguientes valores:

En el momento de emisión y compra	1,1580
Al vencimiento del primer semestre	1,2217
Al vencimiento del segundo semestre	1,2950
Al vencimiento del tercer semestre	1,3533

1.b) Calcular el valor técnico de cada título al día de la fecha sabiendo que el índice de precios al día de hoy es 1,38.

Solución

1.a)



$I_6 = 25\,000 \times \dfrac{1{,}2217}{1{,}1580} \times 0{,}02 = 57{,}50$

$I_{12} = 25\,000 \times \dfrac{1{,}2950}{1{,}1580} \times 0{,}02 = 559{,}15$

$$I_{18} = 25\,000 \text{ x } \frac{1{,}3533}{1{,}1580} \text{ x } 0{,}02 = 584{,}33$$

1. b)

$$VT = 100\,\frac{1{,}38}{1{,}1580}\text{ x } 1{,}02^{\frac{60}{180}} = 119{,}96$$

2. Se emiten 100 000 títulos públicos de valor nominal $ 100 cada uno siendo el rescate anual y a la par del 25 % del número de títulos y pago de cupones conjuntamente con las cuotas de rescate a una tasa anual del 7 % sobre los saldos nominales adeudados. Se desea conocer:

2.a) El monto de los servicios que deberá disponer el ente emisor para cumplir con sus compromisos.

2.b) El valor técnico para un título inmediatamente después del primer rescate, justificando su respuesta.

2.c) La vida media de una obligación para un título de este empréstito que ha sobrevivido al primer rescate.

Solución

2.a)

$a_1 = 2\,500\,000 + 10\,000\,000 \text{ x } 0{,}07 = 3\,200\,000$

$a_2 = 2\,500\,000 + 7\,500\,000 \text{ x } 0{,}07 = 3\,025\,000$

$a_3 = 2\,500\,000 + 5\,000\,000 \text{ x } 0{,}07 = 2\,850\,000$

$a_4 = 2\,500\,000 + 2\,500\,000 \text{ x } 0{,}07 = 2\,675\,000$

2.b) El valor técnico de un título inmediatamente después del primer rescate es de $ 100 ya que coincide con el pago del cupón, por lo tanto no hay intereses devengados.

2.c)

$$\text{Vida media} = \frac{1 \text{ x } 25\,000 + 2 \text{ x } 25\,000 + 3 \text{ x } 25\,000}{75\,000} = 2 \text{ años}$$

3. Con fecha 20/01 se emitió un título de valor nominal u$s 1500 que se amortizará mediante 3 cuotas trimestrales, cuya amortización es constante y el servicio de interés trimestral se pagará a una tasa de interés del 1,3 % trimestral. El primer servicio de interés y amortización operó el 20/4. Si el 20/06 del mismo año usted toma la decisión de adquirir ese bono al precio de mercado conociendo que la paridad a ese día es del 82 %, determinar, considerando trimestres de 90 días y meses de 30 días:

3.a) El valor técnico.

3.b) El precio de mercado.

3.c) El flujo de fondos pendientes a la fecha en que usted toma la decisión de comprar.

3.d) Si aplicando el criterio del VAN, y esperando una tasa de rentabilidad del 0,6 % mensual, compraría ese título al precio de mercado en la fecha de su decisión. Justifique su respuesta.

Solución

3.a)

$VT = 1000\ (1 + 0{,}03)^{2/3} = 1008{,}65$

3.b)

$$0{,}82 = \frac{\text{PM}}{1008{,}65} \Rightarrow PM = 827{,}09$$

3.c)

El 20/07	500 + 1000 x 0,013= 513
El 20/10	500 + 500 x 0,013 = 506,50

3.d)

$\text{VAN} = -827{,}09 + 513\ (1 + 0{,}006)^{-1} + 506{,}50\ (1 + 0{,}006)^{-4}$

$\text{VAN} = 177{,}37$

Conviene comprar ya que se obtiene un VAN positivo y, a la tasa esperada, el valor del título da un valor mayor al de mercado:

$513\ (1 + 0{,}006)^{-1} + 506{,}50\ (1 + 0{,}006)^{-4} = 1004{,}46$

• PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. En la fecha se adquiere un bono de valor nominal $ 10 000 cuya amortización es íntegra al vencimiento exactamente dentro de 3 años y los cupones se pagan semestralmente a una tasa del 3,5 % semestral. De acuerdo a la información periodística se sabe que adquiriéndolo hoy, al precio de mercado, la TIR semestral proyectada es del 4,35 %. Se solicita a usted determinar:

1.a) el valor de mercado. R: 9559,45

1.b) el valor técnico, habiéndose pagado el cupón que vence en la fecha. R: 10 000

1.c) la paridad. R: 95,59 %

2. Supóngase la existencia en circulación de títulos públicos de valor nominal u$s 100 cada uno emitidos el 30 de junio de 2005 a 8 años de plazo con vencimiento el 30 de junio de 2013 en las siguientes condiciones:

- Amortización mediante ocho cuotas anuales, iguales, vencidas y consecutivas, cada una al 12,50 % del valor nominal los días 30/06 de cada año.

- Tasa fija del 7 % nominal anual, calculada sobre la base de un año de 360 días y pago semestral de intereses sobre saldos los 30/12 y los 30/06. Considerar semestres de 180 días.

Se solicita, al día 30/11/11:

2.a) Determinar el capital residual. R: 25

2.b) El valor técnico. R: 25,727

2.c) Su paridad si en el mercado abierto se cotiza a u$s 23,80. R: 92,509 %

2.d) Calcular el precio al que un inversionista debería comprarlo el 30/11/11 para que, manteniéndolo hasta el vencimiento, le rinda el 10 % anual. R: 25,01

3. Un inversor adquiere hoy un título a su valor nominal de $ 1000 cuyo rescate del 100 %, al valor nominal ajustado, está previsto dentro de 4 años. Con el mismo tiene derecho al cobro de cupones por año vencido a una tasa del 3 % anual sobre capital ajustado y se estiman para los sucesivos años las siguientes tasas de inflación: 8,3; 9,5; 10,8 y 9,3 %.

Se solicita:

3.a) Determinar los ingresos que recibirá el inversor. R: 32,49; 35,58; 39,42 y 1479,24 en los sucesivos cuatro años.

3.b) Calcular el valor técnico de este título luego de transcurridos 2 años y medio, si al inicio del tercer año el índice considerado era 1,8996 y a la mitad de ese año 2,0136. R: 1275,77

3.c) Calcular el valor paridad a esa fecha si el precio de mercado es de $ 1,07. R: 84,5763 %

3.d) Determinar la tasa media anual aparente que resultaría si se mantienen los niveles de inflación previstos. R: 12,7555 %

Bibliografía

Quirelli, B. (1986). *Valoración dinámica de capitales*. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Levi, E. (1973). *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Barcelona: Editorial Bosch.

Murioni y Trossero, O. (1981). *Tratado de Álgebra Financiera*. Buenos Aires: Tesis.

——— (2005) *Manual de Cálculo Financiero. Buenos Aires:* Fondo Editorial–Consejo Profesional de Cs. Es. de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Gianneschi, M. A. (1996). *Curso de Matemática Financiera.* Resistencia: Universidad Nacional del Nordeste.

——— (2005). *Manual de Cálculo Financiero. Buenos Aires:* Fondo Editorial–Consejo Profesional de Cs. Es. de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Yasukawua, A. (2000). *Matemática Financiera.* Córdoba: Despeignes Editora.

López Dumrauf, G. (2006). *Cálculo Financiero Aplicado.* Buenos Aires: La Ley.

Castegnaro, A. B. (2006). *Curso de Cálculo Financiero*. Buenos Aires: La Ley.

Suarez, A. S. (1995). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa.* Madrid: Ediciones Pirámide S.A.

Cicero, F. (1998). *Matemática Financiera.* Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Tomas, N. (2000). *La Matemática Financiera como herramienta del Contador Público.* Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Lobez Urquía, J. (1966). *Matemática Financiera con nociones de cálculo actuarial.* Barcelona: Bosch.