

SEMAINE DU 17/11 AU 23/11

SUITES NUMÉRIQUES

- ① Rappels : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, Sommes de ces suites
- ② Rappels : suites monotones, majorées, bornées,
- ③ Définition de limite d'une suite, Unicité de la limite, Toute suite convergente est bornée, opérations sur les limites (somme, produit, quotient, valeur absolue)
- ④ Rappel de la caractérisation séquentielle pour les limites de fonctions
- ⑤ Conservation de l'inégalité large par passage à la limite et $l > l' \implies u_n > v_n$ à partir d'un certain rang.
- ⑥ Théorème d'encadrement / de minoration / de majoration, Théorème de la limite monotone
- ⑦ Définition et propriétés des suites adjacentes
- ⑧ Suites extraites, théorème de Bolzano-Weierstrass.
- ⑨ Caractérisation séquentielle de la Borne supérieure, Caractérisation séquentielle de la densité, Exemple de $\mathbb{D}$
- ⑩ Définitions de Suites complexes, bornées, convergentes. Convergence ssi Re et Im convergent.
- ⑪ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : Résolution complète
- ⑫ Suite récurrente d'ordre 1 $u_{n+1} = f(u_n)$:
Vérification qu'une partie de $\mathbb{R}$ est stable,
Monotonie de u_n en fonction de celle de f ou de la position de f par rapport à la 1ère bissectrice,
 u_n converge toujours vers un point fixe de f

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Étude d'une ou deux des suites récurrente suivante
 - Ⓐ $\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, \quad u_0 = 3, u_1 = 5.$
 - Ⓑ $\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, \quad u_0 = 1, u_1 = 0.$
 - Ⓒ $\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n, \quad u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2.$
 - Ⓓ $u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1$

- ④ $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$
 - ⑤ $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.
 - ⑥ $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right)$, avec $\alpha, a \in \mathbb{R}_+^*$.
 - ⑦ $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$
- ② Définition de la densité dans $\mathbb{R}$. Enoncé et preuve de la caractérisation séquentielle de la densité dans $\mathbb{R}$.
- ③ Preuve de l'existence puis calcul des bornes supérieure et inférieure de $A := \left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$, grâce à la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.