TEMA 3

TÉCNICAS DE RECUENTO

Índice

3.1. Principios básicos

Entendemos por *técnicas de recuento* aquellas que nos permiten *contar o calcular* el número de situaciones posibles que se pueden dar al realizar ciertas tareas. Por ejemplo, si queremos desbloquear un dispositivo protegido con una clave de exactamente cuatro dígitos (es decir números de 0 a 9) ¿cuántos intentos aleatorios podríamos llegar a realizar? o bien ¿hasta cuántos mensajes distintos pueden convenirse entre dos veleros usando tres banderas de diferente color colgadas del mástil?

Podríamos decir que el primer principio básico para resolver ciertos problemas es el "sentido común" o algún método constructivo diseñado por nosotros mismos.

El primer ejemplo se resuelve fácilmente sabiendo que las distintas claves están entre los números 0000 y 9999, luego existen diez mil posibles claves.

El segundo ejemplo podría ser algo más complicado. Si usamos una sola bandera tenemos 3 mensajes (uno por cada color), usando dos banderas podemos establecer $3 \times 2 = 6$ mensajes, puesto que cada una de las tres banderas podemos combinarla con cada una de las otras dos y, del mismo modo, usando tres banderas disponemos de otros 6 posibles mensajes. A estos $3 + 6 + 6 = 15$ mensajes usando al menos una bandera, hay que añadir un mensaje más que se puede establecer cuando no hay ninguna bandera. Resumiendo, se pueden convenir hasta *16 mensajes* con tres banderas de diferente color.

¡Tan fácil como parece!

Ejercicio 3.1. *Usa el sentido común para calcular cuántos mensajes se pueden establecer con tres banderas iguales y del mismo color.*

Presentamos a continuación unos principios básicos clásicos.

3.1.1. Principio del palomar

Si consideramos dos conjuntos finitos, A y B, y una función entre ellos, $f : A \to B$, entonces

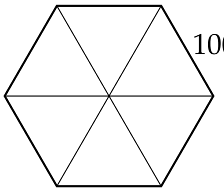
si $|A| > |B|$ entonces que f no es inyectiva.

Equivalentemente, si m objetos se reparten en n cajas, con $m > n$, entonces al menos una caja contiene dos o más objetos. La forma usual de enunciar este principio, que resulta mucho más fácil de recordar y que le da nombre, es la siguiente:

Si en un palomar hay más palomas que nidos, al menos en un nido debe encontrarse más de una paloma.

Este principio, que se conoce como *Principio de las cajas de Dirichlet* (1805-1859) o *Principio del palomar*, puede ayudar a resolver problemas aparentemente complejos.

Ejemplo 3.2. En un recinto con forma de hexágono regular de 100 metros de lado se encuentran siete robots que se desplazan independientemente y se comunican a través de señales de radio. Cada robot tiene una cobertura de al menos 100 metros. Demuestre que en todo momento hay al menos dos robots que se pueden comunicar entre sí.



SOLUCIÓN: Consideramos el hexágono regular de 100 metros de lado dividido en 6 triángulos conforme la figura anexa. Estos triángulos serían "los nidos" y los robots serían "las palomas". Evidentemente hay más palomas que nidos, por lo que, al menos, dos han de compartir nido. Eso nos asegura que dos robots están en el mismo triángulo (equilátero, de lado 100), luego su distancia será menor o igual a 100 metros.

Ejemplo 3.3. ¿Cuántos dígitos distintos de 1 a 9 tenemos que seleccionar para garantizar que hay dos que suman 10?

SOLUCIÓN: Existen 4 formas distintas de sumar 10 (con 2 dígitos distintos), que son: $[1+9]$, $[2+8]$, $[3+7]$ y $[4+6]$. Consideramos cada una de estas formas un "nido" al que incorporamos el "nido" $[5]$, que no suma diez, pero es un dígito que puede aparecer. Las "palomas" serán, entonces, los dígitos elegidos de 1 a 9 que ocuparán su correspondiente nido. Claramente, cuando dos palomas ocupan el mismo nido, su suma es diez, por tanto, necesitamos seleccionar *seis dígitos distintos* para garantizar que al menos dos de ellos suman 10.

Ejercicio 3.4. *En las condiciones del ejemplo 3.3, ¿cuántos dígitos tenemos que seleccionar para garantizar que dos de ellos suman 7?*

3.1.2. Principio de la suma

La propiedad sobre cardinalidad de conjuntos:

Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, $|A \cup B| = |A| + |B|$

es conocida como el Principio de la Suma.

Ejercicio 3.5. *Los alumnos del primer curso se encuentran distribuidos en tres grupos, A, B y C; con 130, 125 y 150 alumnos respectivamente. Calcule cuántos posibles representantes pueden haber en primero.*

3.1.3. Principio del producto

Del mismo modo, la propiedad:

Si A y B son conjuntos finitos, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

es conocida como Principio del Producto.

Ejemplo 3.6. Un Ayuntamiento decide matricular las bicicletas del pueblo. Al alcalde se le ocurre crear matrículas de la forma VCD, donde V es una vocal (5 posibles), C es una consonante (21 posibles) y D es un dígito (10 posibles). Así la primera matrícula es AB0 y la última sería UZ9. ¿Cuántas matrículas distintas pueden existir?

SOLUCIÓN: pueden haber $5 \times 21 \times 10 = 1050$ matrículas distintas.

Ejercicio 3.7. *Un comité de seis personas, A, B, C, D, E y F, debe escoger un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer la elección?*

Los principios de la suma y el producto se pueden combinar para resolver muchos problemas algo más complicados.

Ejercicio 3.8. *En la sitación del ejercicio 3.7, calcula el número de posibles elecciones si:*

1. *El presidente debe ser A o B.*
2. *E debe ocupar alguno de los cargos.*
3. *A y F deben ocupar cargos.*

(Cada apartado es independiente de los demás).

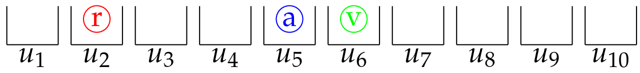
3.2. Permutaciones y combinaciones

Todos ellos son ejemplos de lo que llamaremos *permutaciones.*

Usa el principio del producto para resolver los siguientes ejercicios.

Ejemplo 3.9. Deseamos repartir tres bolas de colores rojo, verde y azul, en diez urnas con capacidad para una única bola. Las urnas están numeradas del uno al diez. ¿De cuántas formas distintas se puede llevar a cabo este experimento?

SOLUCIÓN: Al repartir primero la bola de un color disponemos de 10 cajas



para colocar. Para la segunda bola de color nos quedan 9 cajas (porque una está ocupada) y para la tercera disponemos de 8 colocaciones. El principio del producto nos dice que la solución es

$$\boxed{10 \times 9 \times 8}$$

Ejercicio 3.10. *Sean A y B conjuntos finitos de cardinales* 3 *y* 10 *respectivamente. ¿Cuántas funciones inyectivas se pueden definir de A en B?*

Ejercicio 3.11. *Si A es un conjunto con cardinal 10 y queremos construir una lista de tres elementos distintos de A, ¿de cuántas formas lo podemos hacer?*

3.2.1. Permutaciones ordinarias

En esta sección trabajamos con sucesiones ordenadas que llamamos listas y que representaremos entre los símbolos $\langle$ y $\rangle$. Así $\langle a, b, c\rangle \neq \langle b, a, c\rangle$. Como es usual, admitimos la existencia de la lista vacía $\langle\rangle$.

Definición 3.12. Dado un conjunto A de n elementos y r un número natural, llamaremos:

Denotaremos por $P(n)$ al número de permutaciones de un conjunto con n elementos y $P(n,r)$ al número de r-permutaciones de n elementos

- *permutación* de A a toda lista formada por sus n elementos.
- *r-permutación* (o r-variación) de A a cualquier lista formada por r elementos diferentes de A.

Se establecen las siguientes convenciones:

- $P(0) = 1$ y
- $P(n, 0) = 1$ para cada natural n.

Ejemplo 3.13. Consideramos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$.

- $\langle a, c, d, b, e\rangle$ es una permutación de A.
- $\langle d, b, a\rangle$ es una 3-permutación (o 3-variación) de A.

Definición 3.14 (Número factorial)**.** Para cualquier natural n definimos recursivamente el factorial de n como

- Si $n > 0$, $n! = n \cdot (n-1)!$
- $0! = 1$

Entonces, para un entero positivo, $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

Teorema 3.15. *Sean n y r números enteros tales que $0 \leq r \leq n$ entonces*

$$P(n) = n! \quad y \quad P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Demostración. Si $r = 0$ ya sabemos que $P(0) = 0!$ y $P(n,0) = \dfrac{n!}{(n-0)!}$.

Si $r > 0$, por el principio del producto

$$\begin{aligned} P(n,r) &= n(n-1)\cdots(n-r+1) = \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$P(n) = P(n,n) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

que prueba el teorema. □

Ejercicio 3.16. *¿Cuántas funciones biyectivas se pueden definir entre dos conjuntos de cardinal n?*

Ejercicio 3.17. *Plantea el ejemplo 3.9 haciendo uso de la definición de r-permutaciones.*

3.2.2. Permutaciones con repetición

Hemos visto que una r-permutación tiene todos sus elementos diferentes. Si admitimos que en las listas podemos hacer repeticiones, el concepto cambia.

Denotamos por $PR(n,r)$ al número de r-permutaciones con repetición de n elementos.

Definición 3.18. Dado un conjunto A no vacío de n elementos, llamamos *r-permutación con repetición (o r-variación con repetición)* de A a cualquier lista de r elementos, iguales o diferentes, de A.

Al igual que en el caso de las permutaciones ordinarias, admitimos la posibilidad $r = 0$. Convenimos, entonces, $PR(n,0) = 1$ para cada entero positivo n.

Ejemplo 3.19. Dado el conjunto $A = \{a,b,c,d,e\}$, entonces, $\langle d,a,b,d\rangle$ y $\langle e,a,c,b\rangle$ son 4-permutaciones con repetición de A.

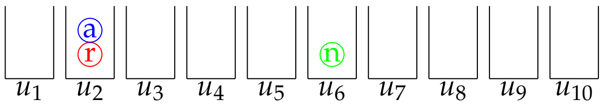
Ejercicio 3.20. *Da varios ejemplos de 4-permutaciones con repetición del conjunto $\{a,b\}$.*

Teorema 3.21. *Sean n entero positivo y r número natural, entonces*

$$\boxed{PR(n,r) = n^r.}$$

Demostración. Si $r = 0$, entonces $PR(n,0) = 1 = n^0$. Si $r > 0$, el resultado es evidente a partir del principio del producto. $\square$

Ejemplo 3.22. Disponemos de diez urnas diferentes, numeradas del uno al diez. Tenemos, por otro lado, una bola roja, una verde y una azul. Si en cada urna podemos colocar más de una bola, ¿de cuántas formas diferentes podemos repartir las bolas entre las urnas?



SOLUCIÓN: Apliquemos la regla del producto. Para la primera bola tenemos 10 urnas entre las que elegir, para la segunda siguen quedando 10 urnas, puesto que puedo repetir la que está ocupada. Igualmente para la tercera bola podemos elegir entre diez urnas. Así la solución es

$$\boxed{10 \times 10 \times 10 = PR(10,3) = 10^3}$$

Ejercicio 3.23. *¿Cuántas funciones se pueden definir desde un conjunto de r elementos a un conjunto de n elementos?*

3.2.3. Permutaciones con objetos repetidos

Definición 3.24. Sean $n_1, n_2, \ldots, n_t$ números naturales. Llamamos *permutación* con objetos repetidos del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ a cualquier lista que verifique que, para cada $1 \leq i \leq t$, el elemento x_i aparece n_i veces.

Denotamos $POR(n_1, n_2, \ldots, n_{t-1}, n_t)$ al número de permutaciones con objetos repetidos.

Si $n_1 = n_2 = \cdots = n_t = 0$, convenimos $POR(0,0,\ldots,0) = 1$.

Ejemplo 3.25. Consideramos el conjunto $A = \{a,b,c,d,e\}$. Entonces, la lista $\langle d,d,a,b,a,b,c,a\rangle$ es una $(3,2,1,2,0)$-permutación con objetos repetidos de A.

Teorema 3.26. *Sean n y $n_1, n_2, \ldots, n_t$ números naturales. Si $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ entonces*

$$\boxed{POR(n_1, n_2, \ldots, n_t) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_t!}.}$$

Demostración. Basta agrupar las permutaciones iguales entre las $n!$ del conjunto de n elementos. $\square$

Ejercicio 3.27. *¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra MISSISIPPI?*

Cuando en las listas obtenidas a partir de un conjunto prescindimos del orden de sus elementos obtenemos lo que se llaman *combinaciones*. Así, por ejemplo, las listas $\langle a, b, c\rangle$ y $\langle b, c, a\rangle$ son distintas consideradas como permutaciones, sin embargo, son la misma combinación.

3.2.4. Combinaciones ordinarias

El número de r-combinaciones de n elementos lo denotamos por $C(n,r) = \binom{n}{r}$ leído *número combinatorio n sobre r*.

Definición 3.28. Dado un conjunto X de n elementos, llamamos *r-combinación ordinaria* (o simplemente r-combinación) de X a cualquier selección no ordenada de r elementos de X, es decir, cualquier subconjunto de X de cardinal r.

Ejemplo 3.29. Si consideramos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$, el conjunto $\{a, b, e\}$ es una 3-combinación de A. En las combinaciones el orden no influye con lo que, por ejemplo, $\{e, b, a\} = \{a, b, e\}$.

Teorema 3.30. *Si n y r números enteros tales que* $0 \le r \le n$ *entonces*

$$\boxed{C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.}$$

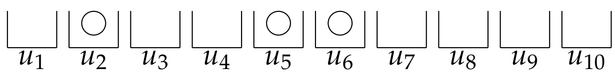
Demostración. Si un conjunto A tiene n elementos, entonces el número de r-permutaciones es $P(n,r)$. Si no tenemos en cuenta el orden, se pueden agrupar en grupos de $P(r)$ permutaciones que equivalen a la misma combinación. Entonces

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r)} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

□

Ejemplo 3.31. Deseamos repartir tres bolas iguales entre diez urnas numeradas. Si las urnas tienen capacidad para una única bola, ¿de cuántas formas podremos hacer el reparto?

SOLUCIÓN: Si las bolas fuesen de distinto color, habría $P(10, 3)$ formas de repartir. Ahora bien, puesto que las bolas son idénticas, el orden de colocación de las bolas, o lo que es equivalente, el orden de elección de las urnas, no influye a la hora de contar. Por tanto la solución es



$$\boxed{C(10,3) = \frac{10!}{3!7!}}$$

Ejercicio 3.32. *Un comité de seis personas A, B, C, D, E y F deben elegir tres representantes (sin ningún rango entre ellos). Calcule el número de formas diferentes de hacer la elección si:*

1. *No hay restricciones.*
2. *Deben figurar A y B.*
3. *Deben figurar A o B, pero no ambos.*
4. *Deben figurar A o B.*

Números combinatorios. Propiedades

Los llamados números combinatorios, por su utilidad, merecen un estudio algo más detallado.

Proposición 3.33. *Los números combinatorios tienen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada entero $n \geq 0$*
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

   Demostración. Trivial, teniendo en cuenta que $0! = 1$. □

2. *Para cada par de enteros $0 \leq r \leq n$,*
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

   Demostración. Aplicando el teorema 3.30 a cada una de las partes es evidente que son iguales. □

3. *Para cada par de enteros $0 < r \leq n$, se cumple*
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Demostración. Partimos de la parte derecha y la vamos a igualar a la izquierda.

$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} =$$
$$= \frac{r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)(n-r-1)!} =$$
$$= \frac{r(n-1)!+(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} =$$
$$= \binom{n}{r}$$
□

En la fila n-sima están todos los números combinatorios $\binom{n}{r}$.

Las propiedades anteriores nos permiten construir de forma recursiva la tabla conocida con el nombre de *triángulo de Tartaglia o de Pascal*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\iddots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \ddots
\end{array}$$

Figura 3.1: Triángulo de Tartaglia.

Ejercicio 3.34. *Completa tres filas más del triángulo de Tartaglia (figura 3.1).*

Una aplicación importante de los números combinatorios es el desarrollo de la potencia de un binomio, un conocido resultado debido a Newton.

Teorema 3.35 (Binomio de Newton)**.** *Sean a, b elementos de una anillo conmutativo y n un número natural, entonces:*

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^n+\binom{n}{1}a^1b^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}a^nb^0 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.}$$

Demostración. Si aplicamos la propiedad distributiva a la expresión

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \overset{n \text{ veces}}{\dots\dots} (a+b)$$

aparece una suma de expresiones $aa \overset{i}{\dots} abb \overset{n-i}{\dots} b = a^ib^{n-i}$, y cada una de ellas aparece tantas veces como las formas de ordenarlas, que son

$$POR(i, n-i) = C(n,i) = \binom{n}{i}$$

□

Ejercicio 3.36. *Comprueba (a mano) la veracidad del teorema del binomio de Newton para* $n = 2, 3, 4$.

3.2.5. Combinaciones con repetición

Definición 3.37. Dado un conjunto A no vacío de n elementos, llamamos *r-combinación con repetición* de A a cualquier selección no ordenada de r elementos de A que pueden estar repetidos.

Al número de r-combinaciones con repetición de n elementos lo denotamos por $CR(n,r)$.

Las r-combinaciones con repetición las las representamos encerrando sus elementos entre los símbolos $\lceil$ y $\rceil$.

Ejemplo 3.38. Consideramos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$. Entonces la lista sin orden $\lceil a, a, a, b, b, d, d \rceil$ es una 7-combinación con repetición de A.

Teorema 3.39. *Sean n un entero positivo y r un número natural, entonces*

$$\boxed{CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r}.}$$

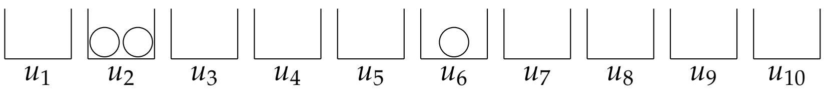
Demostración. Una r-combinación de los n objetos de un conjunto se puede representar como una $(r, n-1)$-permutación (con objetos repetidos) y viceversa. Pongamos un ejemplo, sobre el conjunto $\{a, b, c, d\}$, la 4-combinación con repetición $\lceil a, b, b, d \rceil$ se identifica con la $(4,3)$-permutación `x|xx||x` (de la cadena de caracteres `xxxx|||`).

Luego

$$CR(n,r) = POR(r, n-1) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

□

Ejemplo 3.40. Disponemos de 10 urnas diferentes (con capacidad para tres o más bolas), y tres bolas iguales que se desean repartir entre las urnas. ¿De cuántas formas diferentes se puede realizar este reparto?



SOLUCIÓN: Al colocar una bola en una urna realmente estamos seleccionando dicha urna (puesto que las bolas son idénticas). Por tanto, el problema equivale a elegir 3 urnas de entre las 10, con posibles repeticiones, siendo el orden intrascendente, esto es

$$\boxed{CR(10,3) = \binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}}$$

3.2.6. Números multinomiales

En la prueba de la fórmula del binomio de Newton, Teorema 3.35, hicimos uso del hecho de que

$$POR(i, n-i) = \binom{n}{i}$$

El ejemplo y el ejercicio que siguen nos muestran que, en general, existe una relación entre las combinaciones y las permutaciones de objetos repetidos.

Ejemplo 3.41. De cuántas formas podemos repartir tres bolas rojas, dos azules y una verde en 10 urnas con capacidad para una única bola.

r	r	a		a	v		r		
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}

SOLUCIÓN: Para resolverlo, descomponemos el reparto en tareas y aplicamos el principio del producto. Así, al repartir las bolas rojas tenemos $C(10,3)$ formas de hacerlo. Al repartir las azules, tenemos $C(7,3)$, puesto que 3 urnas ya están ocupadas, y, por último, la bola verde se puede hacer de $C(5,1)$ formas. Por tanto, la solución es

$$\boxed{\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{1}}$$

Ejercicio 3.42. *El problema del ejemplo anterior se ha resuelto por combinaciones. Otra forma distinta de resolverlo es permutar de todas las formas posibles la cadena de 10 caracteres*

$$RRRAAVSSSS$$

donde el carácter S representa las urnas sin ninguna bola. Expresa la solución y compáralo con la expresada en el ejemplo 3.41 anterior.

En general, si $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$

$$\begin{aligned}
POR(n_1, n_2, \ldots, n_t) &= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_t!} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\,\frac{(n-n_1)!}{n_2! \ldots n_t!} \\
&= C(n, n_1) POR(n_2, \ldots, n_t) \\
&= C(n, n_1) C(n-n_1, n_2) POR(n_3, \ldots, n_t) \\
&= \ldots\ldots\ldots \\
&= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_t}{n_t} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_t}
\end{aligned}$$

Definición 3.43. Las expresiones

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_t} = POR(n_1, n_2, \ldots, n_t).$$

reciben el nombre de *números multinomiales*.

3.3. Principio de inclusión y exclusión

El último, pero no menos importante, regla o principio para recuento es el principio de inclusión-exclusión. Éste se basa en el cardinal de la unión de conjuntos finitos.

Teorema 3.44. *Sean $A_1, A_2, ...A_n$ conjuntos finitos, entonces*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n+1}\alpha_n.$$

donde α_i es la suma de los cardinales de todas las intersecciones posibles de i conjuntos ($1 \leq i \leq n$).

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|, \\
\alpha_2 &= |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|, \\
&\ldots \\
\alpha_n &= |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Generalmente, este principio se usa en sentido negativo, es decir, si tenemos un conjunto universal $\mathcal{U}$, con $|\mathcal{U}| = N$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = N - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$

Ejercicio 3.45. *Calcula el número de palabras distintas que se pueden formar reordenando la palabra `MARINA` de forma que las vocales no aparezcan consecutivas.*

3.3.1. Desarreglos: nada en su lugar

Ejemplo 3.46. Un secretario (algo distraído) debe colocar cinco cartas en cinco sobres. Las cartas y los sobres tienen la dirección impresa. ¿De cuántas formas distintas puede lograr la hazaña de no acertar ninguna?

SOLUCIÓN: Sabemos que el número de todas las posibles formas de colocar las cartas en los sobres es $N = P(5) = 5!$. Si queremos contar las formas de “acertar ninguna”, pensamos en lo contrario, que es “acertar alguna”.

Vamos a contar las formas en que esto ocurre usando terminología de conjuntos. Numeremos las cartas y los sobres de 1 a 5. Llamamos A_i al conjunto de situaciones en que la carta i caiga de forma correcta en su sobre i y $|A_i|$ es su cardinal, o sea, el número de formas en que esto ocurre. Nuestra solución será, por tanto

$$N - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$$

y, por el Teorema 3.44

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5$$

siendo

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| = 5 \cdot 4! \\
\alpha_2 &= |A_1 \cap A_2| + \ldots |A_4 \cap A_5| = \binom{5}{2} \cdot 3! \\
\alpha_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots |A_3 \cap A_4 \cap A_5| = \binom{5}{3} \cdot 2! \\
\alpha_4 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \ldots |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = \binom{5}{4} \cdot 1! \\
\alpha_5 &= |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_5| = 1
\end{aligned}$$

luego, la solución es

$$\boxed{5! - (5! - 10 \cdot 3! + 10 \cdot 2! - 5 \cdot 1! + 1) = 60 - 20 + 5 - 1 = 44}$$

Ejercicio 3.47. *Generaliza el resultado del ejercicio anterior para n cartas y n sobres.*

3.3.2. Número de funciones sobreyectivas

Otra importante aplicación del principio de inclusión-exclusión es el cálculo del número de funciones sobreyectivas que existen sobre dos conjuntos finitos. Este cálculo, a su vez, nos da un método para "contar" situaciones, como veremos en el ejemplo 3.49.

Teorema 3.48. *El número de aplicaciones sobreyectivas diferentes que se pueden establecer de un conjunto A de cardinal n en otro conjunto B de cardinal r con $r \leq n$ es*

$$\boxed{\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (r-i)^n.}$$

Demostración. Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ y considermos como conjunto "universo", $\mathcal{U}$, el conjunto de todas las funciones de A en B.

$$\mathcal{U} = \{f : A \to B \mid f \text{ es una función}\} \qquad |\mathcal{U}| = r^n$$

Vamos a calcular el conjunto de funciones $f \in \mathcal{U}$ tales que $\operatorname{Img} f = B$ (funciones sobreyectivas). Se tiene que cumplir pues que $b_1 \in \operatorname{Img} f$, $b_2 \in \operatorname{Img} f, \ldots$ y $b_r \in \operatorname{Img} f$. Consideremos, para cada $1 \leq i \leq r$, los subconjuntos

$$X_i = \{f \mid b_i \in \operatorname{Img} f\} \subseteq \mathcal{U}$$

El conjunto de funciones sobreyectivas será $X_1 \cap X_2 \cap \ldots X_r$ y, para calcular su cardinal hacemos las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} |X_1 \cap X_2 \cap \ldots X_r| &= |\overline{\overline{X_1 \cap X_2 \cap \ldots X_r}}| = \\ &= |\overline{\overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \ldots \overline{X_r}}| = |\mathcal{U}| - \Big(\alpha_1 - \alpha_2 + \ldots + (-1)^{r+1}\alpha_r\Big) \end{aligned}$$

En el cálculo de α_1 precisaremos del cardinal de cada $\overline{X_i}$. El número de funciones de A en B que dejan a b_i sin ser imagen de ningún elemento es el mismo que el de funciones de A en $B - \{b_i\}$: $(r-1)^n$.

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{r} |X_i| = \sum_{i=1}^{r} (r-1)^n = r \cdot (r-1)^n$$

Para calcular α_2 debemos sumar los cardinales de todas las posibles intersecciones de dos conjuntos distintos. Sean $\overline{X_i}$ y $\overline{X_j}$ dos cualesquiera de estos conjuntos. La intersección de ellos la forman las funciones de A en B que dejan fuera del conjunto imagen a los elementos b_i y b_j. Con un razonamiento similar al anterior podemos afirmar que el número de aplicaciones con estas características es $(r-2)^n$.

$$\alpha_2 = \sum_{i \neq j} |\overline{X_i} \cap \overline{X_j}| = \sum_{i \neq j} (r-2)^n$$

Como todos los sumandos son iguales y tenemos tantos como formas de seleccionar dos conjuntos distintos de entre $\overline{X_1}, \ldots \overline{X_r}$, α_2 queda de la siguiente forma:

$$\alpha_2 = \binom{r}{2} (r-2)^n$$

Generalizando para un $h \in \mathbb{N}$ con $1 \leq h \leq r$ tenemos:

$$\alpha_h = \binom{r}{h} (r-h)^n$$

Y, por tanto, el número de funciones sobreyectivas de A en B es:

$$\begin{aligned} |X_1 \cap X_2 \cap .. \cap X_r| &= |\mathcal{U}| - (\alpha_1 - \alpha_2 + \ldots + (-1)^{r+1}\alpha_r) \\ &= r^n - \binom{r}{1}(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - \ldots + (-1)^r \binom{r}{r}(r-r)^n \\ &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (r-i)^n \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema □

Ejercicio 3.49. *El Ministerio de Defensa está interesado en siete proyectos distintos que pueden ser desarrollados por cuatro compañías diferentes. ¿De cuántas formas pueden concederse los contratos para que todas las compañías desarrollen, al menos, un proyecto?*

3.4. Particiones y números de Stirling

Al número de particiones (Definición 2.27) "diferentes" que se pueden establecer de un conjunto de cardinal n en r partes ($1 \leq r \leq n$) lo representamos por

$$S(n,r)$$

Estos números reciben el nombre de *números de Stirling de segunda especie*.

A la hora de calcularlos es importante tener en cuenta que el orden de las partes es irrelevante.

Teorema 3.50. *El número de particiones diferentes de un conjunto de cardinal n en r partes es:*

$$\boxed{S(n,r) = \frac{1}{r!}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}(r-i)^n}$$

Demostración. Si A es un conjunto de n elementos y $B = \{1,2,\ldots,r\}$ una función f sobreyectiva de A en B puede ser considerada como una partición de A en r partes, a saber $\{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(r)\}$. Obsérvese que hay exactamente $r!$ funciones sobreyectivas que dan lugar a la misma partición (correspondientes a permutar los elementos de B). Si F es el número de funciones sobreyectivas de A en B, el número de particiones en r partes son exactamente

$$S(n,r) = \frac{F}{r!}$$

que junto con la expresión de F dada en el teorema 3.48 nos determina la expresión buscada. □

Ejercicio 3.51. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq n$. Determina $S(n,0)$, $S(n,1)$, $S(n,n)$ y $S(n,r)$ si $r > n$.*

Ejercicio 3.52. *Sea A un conjunto con $n > 1$ elementos, sea $a \in A$ y sea $1 < r \leq n$. Justifica que $S(n-1,r-1)$ es el número de particiones de A en r partes que satisfacen que una de las partes es $\{a\}$.*

Ejercicio 3.53. *Sea A un conjunto con $n > 1$ elementos, sea $a \in A$ y sea $1 < r \leq n$. Justifica que $r \cdot S(n-1,r)$ es el número de particiones de A en r partes que satisfacen que $\{a\}$ no es una de las partes, es decir, que la parte que contiene al elemento a tiene más elementos.*

Como consecuencia directa de los resultados que acabas de probar, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.54. *Sea $S(n,r)$ el número de particiones de un conjunto A de cardinal n en r partes ($1 < r \leq n$). Entonces:*

1. $S(n,1) = 1$

2. $S(n,n)=1$
3. $S(n,r)=S(n-1,r-1)+r\cdot S(n-1,r)$

Utilizando este teorema se construye fácilmente un triángulo similar al de Pascal (o Tartaglia) que permite calcular los números de Stirling de segunda especie de forma recursiva.

Ejercicio 3.55. *Rellena la siguiente tabla de números de Stirling de segunda especie.*

$S(n,r)$		r					
		1	2	3	4	5	...
	1						
	2						
n	3						
	4						
	5						
	$\vdots$						

3.4.1. Números de stirling de primera especie

Como es natural, también existen los números de Stirling de primera especie. Para cada entero $n \leq 1$ consideramos el polinomio en x definido a partir de las permutaciones (ordinarias)

$$P(x,n)=\frac{x!}{(x-n)!}=x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

Los coeficientes de la expansión de este polinomio nos da los *números de Stirling de primer especie* $s(n,r)$, es decir,

Para $n=0$ se define, como es habitual, $s(0,0)=1$.

$$P(x,n)=\sum_{r=0}^{n} s(n,k)x^r$$

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
P(x,1) &= x\\
P(x,2) &= x(x-1) = -x+x^2\\
P(x,3) &= x(x-1)(x-2) = 2x-3x^2+x^3
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
&s(1,0)=0, s(1,1)=1\\
&s(2,0)=0, s(2,1)=-1, s(2,2)=1\\
&s(3,0)=0, s(3,1)=2, s(3,2)=-3, s(3,3)=1
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.56. *Rellena la siguiente tabla de números de Stirling de primera especie.*

$s(n,r)$		r						
		0	1	2	3	4	5	...
	1							
	2							
n	3							
	4							
	5							
	$\vdots$							

Observa que, si $r > 0$, los números $s(n,r)$ tienen signo, es decir, algunos son positivos y otros negativos. Habitualmente se usan los *números de Stirling de primera especie sin signo*,

$$c(n,r) = |s(n,r)|$$

Tanto los número $s(n,r)$ como $c(n,r)$ tienen interesantes propiedades que, en este curso, no vamos a estudiar.

3.4.2. Números de Bell

En combinatoria, topología, y otras ramas de las matemáticas, se usan los llamados (sucesión de) *números de Bell* $B(n)$, que se definen como el número de particiones distintas de un conjunto de n elementos. Por tanto,

$$B(n) = \sum_{r=0}^{n} S(n,r)$$

3.5. Ecuaciones de Recurrencia

Abreviadamente E.R.

Se entiende por *Ecuación de Recurrencia* a una expresión de la forma

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots)$$

donde $\{a_i\}$ es una sucesión de números reales y f es una función real de aridad[1] conveniente.

Ejemplos 3.57. Las ecuaciones de recurrencia aparecen, de distintas formas, en muchas de las ramas de las ciencias.

[1]Se entiende por aridad el número de entradas de la función (por ejemplo $f(x,y,z)$ se dice que es de aridad 3).

- En Análisis de algoritmos, aparece el llamado "Master Theorem", que nos proporciona la relación

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + g(n) \quad \text{donde } a \geq 1, b \geq 1$$

- La "función logística"

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

se usa frecuentemente para calcular modelos de crecimiento o bien como punto de partida para otros modelos.

Ejercicio 3.58. *Usa un programa de* hoja de cálculo *para encontrar los primeros 20 valores de la sucesión x_n de la "función logística" $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ siendo:*

1. $r = 4$ *y* $x_0 = 0,99$.
2. $r = 2$ *y* $x_0 = 0,01$.

Observa como en cada caso se comporta de modo distinto[2].

Ejemplo 3.59. A veces aparecen sistemas de ecuaciones de recurrencia. Por ejemplo, en teoría de la señal se usa la llamada *ecuación de Hénon* que ofrece un desarrollo altamente irregular:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = 1 - 1{,}4x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = 0{,}3x_n \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

y que está relacionada con la denominada *"teoría del caos"*.

Ejercicio 3.60. *Igual que en el ejercicio 3.58 anterior, rellena en el cuadro siguiente un resumen de los resultados obtenidos en una* hoja de cálculo *al calcular los 20 primeros valores de la ecuación de Hénon cuando $(x_0, y_0) = (0, 0)$.*

Ejemplo 3.61. Ecuaciones de recurrencia que todos conocéis son las *progresiones aritméticas y geométricas*.

Progresión Aritmética $a_n = a_{n-1} + d$, siendo d un número real constante llamado *diferencia* de la progresión.

Progresión Geométrica $a_n = r \cdot a_{n-1}$, siendo r un número real constante llamado *razón* de la progresión.

Ejercicio 3.62. *Pon ejemplos de progresiones aritméticas y de progresiones geométricas expresadas de la forma $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$.*

Por ejemplo la sucesión $\{0.5, 2, 3.5, 5, 6.5, \dots\}$.

[2] La primera situación se comporta de modo "caótico", en cambio la segunda la sucesión aparece como convergente.

3.5.1. Objetivo

Dada una ecuación de recurrencia junto con algunos valores iniciales

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots), \quad a_0 = a, a_1 = b, \dots$$

se pretende encontrar las sucesiones del tipo

$$a_n = g(n) \text{ (Solución General)}$$

donde g es una función real, que verifican la ecuación y, entre ellas, las que verifican los valores iniciales.

Ejemplo 3.63. La E.R. $a_n = a_{n-1} + 3$ con valor inicial $a_0 = 1$ tiene por

$$\text{Solución General: } \boxed{a_n = 3n + k}$$

si bien, entre ellas, la única que verifica también el valor inicial dado es

$$a_n = 3n + 1$$

Ejercicio 3.64. *Busca en tus "viejos" libros de texto, utiliza internet o bien cualquier otro método para dar las fórmulas de las* soluciones generales *de las progresiones aritméticas $a_n = a_{n-1} + d$ y de las geométricas $a_n = r \cdot a_{n-1}$.*

Ecuaciones de recurrencia lineales de coeficientes constantes

Vamos a estudiar (y resolver) un tipo concreto de E.R. que tienen su utilidad garantizada porque aparecen en muchos planteamientos de problemas aplicados (tanto de las telecomunicaciones, de la informática y de otras áreas de conocimientos) y en cambio tienen una solución bastante fácil. Este tipo de ecuaciones las denominaremos *ecuaciones de recurrencia lineales de coeficientes constantes*.

Abreviadamente E.R.L.

Son las que se pueden expresar de la siguiente forma:

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = f(n)$$

donde:

- $f(n)$ es una función que no depende de las a_i.
- Los coeficientes C_i son números reales *constantes* (no dependen de n).
- Llamamos *orden* k de la ecuación a la mayor diferencia entre los lugares de la sucesión que intervienen en la ecuación.

Ejemplo 3.65. Observa que las progresiones aritméticas y geométricas son casos particulares de E.R.L. ¿De que orden son cada una de ellas?

Ejemplo 3.66. A veces, las E.R.L. vienen expresadas, aparentemente, de "otra forma". Por ejemplo $a_{n+2} - a_{n-2} = a_n$ es una E.R.L. de orden 4, concretamente

$$a_n - a_{n-2} - a_{n-4} = 0$$

Clasificación de las E.R.L.

Las E.R.L. las vamos a clasificar en dos tipos:

$$\begin{cases} \textit{E.R.L. Homogéneas}\text{: en las que } f(n) = 0 \\ \textit{E.R.L. No Homogéneas}\text{: en las que } f(n) \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.67. *Según la clasificación anterior, ¿cómo son las progresiones aritméticas (con $d \neq 0$) y las geométricas (con $r \neq 0$)?*

3.5.2. Ecuaciones de Recurrencia Lineales Homogéneas

Son las que se pueden expresar de la siguiente forma

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = 0 \qquad (3.2)$$

Teorema 3.68. *El conjunto de soluciones de (3.2) forman un subespacio vectorial del espacio vectorial de las sucesiones (reales).*

Demostración. Figura al final del tema. Se considera un trabajo voluntario. □

Ejemplo 3.69. La siguiente ecuación (con valores iniciales) tiene por solución la llamada sucesión de Fibonacci

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; \quad a_0 = 1, a_1 = 1$$

es un ejemplo típico de 2º orden.

Ejercicio 3.70. *Calcula los 8 primeros términos de la sucesión de Fibonacci. Usa una* hoja de cálculo *o escribe un programa (o lo que se te ocurra) para calcular el término a_{30} de dicha sucesión.*

Resolución

Puesto que las soluciones de la E.R.L. homogénea es un subespacio vectorial, únicamente tenemos que encontrar una base –formada por sucesiones reales– de dicho subespacio. Cualquier otra solución será combinación lineal de dicha base.

A continuación damos un método para encontrar dicha base.

Polinomio característico

Dada una ecuación de recurrencia (3.2) de orden k llamamos *polinomio característico* de dicha ecuación al polinomio de grado k formado por los coeficientes de la ecuación, del siguiente modo:

$$x^k + C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + \cdots + C_k$$

Ejercicio 3.71. *¿Podrías escribir el polinomio característico de la ecuación que define la sucesión de Fibonacci del ejemplo 3.69?*

Ejercicio 3.72. *El polinomio característico nunca puede tener* 0 *por raiz. ¿Por qué?*

Las raíces de este polinomio nos permitirá construir una base para las soluciones según el siguiente teorema.

Teorema 3.73. *Si x_1 y x_2 son raíces (complejas) distintas del polinomio característico, entonces*

Puede verse una justificación (aunque no demostración completa) al final de este tema.

1. *Las sucesiones $a_n = x_1^n$ y $b_n = x_2^n$ son* soluciones linealmente independientes *de la ecuación homogénea (3.2).*

2. *Si x_1 es una raíz de multiplicidad t entonces las t sucesiones siguientes*

$$x_1^n, \quad nx_1^n, \quad n^2x_1^n, \quad \ldots \quad , n^{t-1}x_1^n$$

son soluciones linealmente independientes.

Todo polinomio de grado k tiene exactamente k raíces en el cuerpo de los números complejos, iguales o distintas. Por tanto este teorema nos dice que podemos encontrar exactamente k sucesiones linealmente independientes que son solución de una ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden k.

Dejando en el tintero la comprobación de que estas k sucesiones son un sistema generador del subespacio vectorial de las soluciones, deducimos el siguiente corolario de los teoremas anteriores.

Corolario 3.74. *El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea (3.2) es un subespacio vectorial de dimensión k. Podemos encontrar una base de dicho subespacio a partir de las raíces del polinomio característico.*

Resolución cuando todas las raíces son reales

Ejemplo 3.75. La ecuación que determina la sucesión de Fibonacci del ejemplo 3.69

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ con } a_0 = 1, a_1 = 1$$

tiene el siguiente polinomio característico:

$$x^2 - x - 1$$

que tiene dos raíces distintas: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Por tanto tenemos un *subespacio vectorial* de soluciones de dimensión 2 definido por la siguiente

$$\boxed{\textit{Solución general}: a_n = K_1\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

De las infinitas soluciones que describe esta solución general, sólo una verifica los valores iniciales $a_0 = a_1 = 1$. Calculémosla:

$$\left.\begin{array}{l} K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \\ K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} K_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ K_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{array}$$

Sustituyendo en la solución general nos da el término general de la sucesión de Fibonacci que tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}}$$

Ejercicio 3.76. *Comprueba que el término general antes expresado da las mismas soluciones que las halladas en el ejercicio 3.70.*

Resolución cuando tiene raíces complejas no reales

Puesto que el polinomio característico de una ERL homogénea es real, si $z = a + ib$ es una raíz compleja del mismo, por proposición 2.79 su conjugado $\overline{z} = a - ib$ también es una raíz. Siguiendo el corolario 3.74 tenemos entonces que

$$K_1 z^n + K_2 \overline{z}^n = K_1(a+ib)^n + K_2(a-ib)^n$$

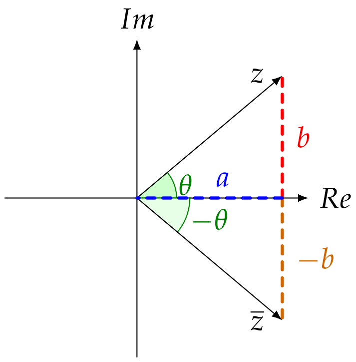
es la solución general de la ecuación de recurrencia.

Para tener una mejor expresión de las soluciones se usa la llamada forma trigonométrica de los números complejos. Sabemos que el módulo de z y $\overline{z}$ coinciden,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\overline{z}|$$

y los argumentos de z y de $\overline{z}$ son opuestos (ver Figura 3.2),

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\frac{b}{a} = \theta \Rightarrow \operatorname{Arg}\overline{z} = -\theta$$



Llamamos $\arg(z)$ al ángulo θ cuya tangente es

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

Llamamos módulo de z a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Figura 3.2: Representación gráfica del complejo $z = a + ib$ y su conjugado.

luego las formas trigonométricas

$$z = |z|\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \;\text{ y }\; \overline{z} = |z|\,(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))$$

junto con la fórmula de De Moivre en proposición 2.74 transforma la solución

$$\begin{aligned} K_1 z^n + K_2 \overline{z}^n =& (|z|^n (K_1 + K_2)) \cos(n\theta) + (|z|^n i (K_1 - K_2)) \operatorname{sen}(n\theta) \\ =& \boxed{M_1 |z|^n \cos(n\theta) + M_2 |z|^n \operatorname{sen}(n\theta)} \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo de ésto:

Ejemplo 3.77. Vamos a resolver la ecuación $(a_{n+1} + 4a_{n-1})^2 = 12a_n^2$ con valores iniciales $a_1 = 0$ y $a_2 = -1$.

SOLUCIÓN: Transformando la ecuación anterior (que no es lineal) tenemos dos posibles ecuaciones de recurrencia lineales: $a_{n+1} - 2\sqrt{3}a_n + 4a_{n-1} = 0$ y $b_{n+1} + 2\sqrt{3}b_n + 4b_{n-1} = 0$ que nos dará, cada una de ellas, una solución.

Resolvamos la primera de ellas, que tiene por polinomio característico

$$p(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$$

que tiene como raíces complejas $z = \sqrt{3} + i$ y $\overline{z} = \sqrt{3} - i$, ambas de módulo $|z| = 2$ y argumentos $\theta = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$ y $-\theta = -\frac{\pi}{6}$, respectivamente. Por lo anterior la solución general será

$$a_n = M_1\, 2^n \cos\frac{n\pi}{6} + M_2\, 2^n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}$$

y, aplicando los valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= M_1 2\cos\frac{\pi}{6} + M_2 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0 \\ a_2 &= M_1 4\cos\frac{\pi}{3} + M_2 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -1 \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{4} \\ M_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}\right\}$$

y por tanto la solución a nuestro problema se puede expresar de la forma

$$a_n = 2^{n-2}\left(\cos\frac{n\pi}{6} - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{6}\right)$$

Resolviendo la segunda ecuación de recurrencia (ejercicio 3.78) nos da como solución

$$b_n = 2^{n-2}\left(\cos\frac{5n\pi}{6} + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{5n\pi}{6}\right)$$

y, conjuntamente, ambas son soluciones de la ecuación de recuerrencia que nos piden.

Ejercicio 3.78. *Resuelve la ecuación de recurrencia* $b_{n+1} + 2\sqrt{3}b_n + 4b_{n-1} = 0$ *con los valores iniciales* $b_1 = 0$ *y* $b_2 = -1$ *resultante del problema del ejemplo anterior.*

Ejemplos 3.79.

1. Resuelve $a_{n+2} + a_{n-2} = 2a_n$.

   Determina también la única solución para la que $a_0 = a_2 = 1$ y $a_1 = a_3 = 0$.

   SOLUCIÓN:

   General $\quad a_n = k_1 + K_2 n + k_3(-1)^n + k_4 n(-1)^n$

   Con v.i. $\quad a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

2. Resuelve la ecuación de recurrencia $a_{n+2} + a_n = \sqrt{3}a_{n+1}$ con valores iniciales $a_0 = 0$ y $a_3 = 1$.

   SOLUCIÓN:

   General $\quad a_n = k_1 \cos\frac{n\pi}{6} + k_2\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{6}$

   Con v.i. $\quad a_n = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{6}$

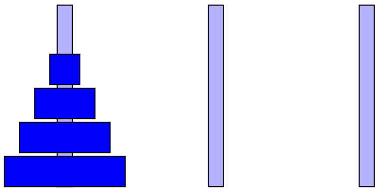
3.5.3. E.R.L. No Homogéneas

Ejemplo 3.80 (Las Torres de Hanoi)**.** Según una leyenda[3] india, en el Templo de Benarés, bajo el domo que marca el centro del mundo, hay una placa de latón con tres agujas de diamante. Durante la creación, Dios puso sesenta y cuatro discos de oro puro de distinto tamaño en una de las agujas, formando una torre. Los bramanes llevan generaciones cambiando de lugar, uno a uno, los discos de la torre entre las tres agujas de forma que en ningún momento un disco mayor descanse sobre otro más pequeño.

Cuando hayan conseguido trasladar todos los discos a otra aguja su trabajo estará terminado, y la torre y el templo se derrumbarán, y con un gran trueno, el mundo se desvanecerá.

En el dibujo representamos una versión más simple del problema: se trata de pasar una torre de solamente cuatro discos.

[3] En realidad no existe ninguna leyenda. Este problema fue inventado por el matemático francés Édouard Lucas a finales del XIX.



Es necesaria la torre de ayuda para poner los discos que hay que apartar provisionalmente para llegar al disco más grande. Si lo hiciéramos por computadora, una posible orden para resolverlo podría ser:

$$\texttt{MOVER-TORRE}(4, 0, 2, 1)$$

que quiere decir "`mueva una torre de tamaño 4 tomando como torre de origen la número 0, como torre de destino la número 2 y como ayuda la número 1`". En el cuadro 3.1 damos un posible pseudocódigo de este problema.

Por lo anterior, si a_n representa el número de movimientos necesarios para mover completamente n discos, para estos 4 discos será $a_4 = 2a_3 + 1$, pero $a_3 = 2a_2 + 1$ y por último $a_2 = 2a_1 + 1$. Obviamente $a_1 = 1$ puesto que con un solo disco necesitamos únicamente un movimiento.

Así que reconstruyendo los cálculos anteriores (a la inversa) tenemos $a_2 = 3$, $a_3 = 7$ y $a_4 = 15$.

Si queremos resolver el problema de forma más general tendríamos la siguiente ecuación de recurrencia con valor inicial

$$a_n = 2a_{n-1} + 1; \qquad a_1 = 1$$

Resolución de la Ecuación de Recurrencia Lineal

Todas las E.R.L. no homogéneas se expresan de la forma

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = f(n) \tag{3.3}$$

donde $f(n) \neq 0$.

Cuadro 3.1: Torres de Hanoi. Pseudocódigo.

```
define MOVER-TORRE(n,origen,destino,ayuda)
si (n >0)
      MOVER-TORRE(n − 1,origen,ayuda,destino)
      MOVER-UN-DISCO origen destino
      MOVER-TORRE(n − 1,ayuda,destino,origen)
```

Llamaremos ecuación homogénea asociada a (3.3) a la que resulta de hacer $f(n) = 0$, es decir,

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = 0$$

y al conjunto de soluciones (o solución general) de la homogénea se representa por $a_n^{(h)}$

Estas sucesiones $a_n^{(h)}$ no son solución de la ecuación no homogénea (3.3), pero combinadas con una única sucesión que sí lo sea nos resuelve el problema. A esta solución la llamaremos *solución particular* que representaremos por $a_n^{(p)}$.

Teorema 3.81. *La solución general de la E.R.L. no homogénea (3.3) queda determinada por la expresión*

$$\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}.}$$

Demostración. Basta sustituir $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ en la parte derecha de (3.3) y comprobar que resulta $f(n)$. Completa los detalles como ejercicio. □

Ejemplo 3.82. Vamos a resolver la ecuación de recurrencia de las Torres de Hanoi

$$a_n = 2a_{n-1} + 1; \qquad a_1 = 1 \tag{3.4}$$

SOLUCIÓN: La ecuación homogénea asociada (de primer orden)

$$a_n - 2a_{n-1} = 0$$

tiene como polinomio característico $x - 2$, con raíz $x = 2$, luego

$$a_n^{(h)} = k2^n$$

Por otro lado, si suponemos que la ecuación (3.4) admite como solución particular una constante $a_n^{(p)} = A$ al sustituir debe verificar la ecuación, es decir:

$$a_n^{(p)} = 2a_{n-1}^{(p)} + 1 \iff A = 2A + 1 \iff A = -1$$

de donde la solución general será:

$$\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = k2^n - 1}$$

Nos queda encontrar la solución que resuelve el valor inicial $a_1 = 1$. Sustituyendo a_1 en la solución general obtenemos

$$a_1 = k2^1 - 1 \iff 1 = 2k - 1 \iff k = 1$$

luego

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

Método para encontrar una solución particular $a_n^{(p)}$

En el ejemplo 3.82 para encontrar una solución particular $a_n^{(p)}$ hemos probado con una constante, es decir, del mismo tipo que $f(n) = 1$, que es también constante. Este método va a ser lo habitual.

La buscamos del "mismo tipo" que $f(n)$. Ajustaremos unos valores reales $A, B, \dots$ para que sean solución de la ecuación[4].

	$f(n)$	$a_n^{(p)}$
Constante	K	A
Polinomio	$P(n) = K_1 + K_2 n + \dots$	$Q(n) = A + Bn + \dots$
Polinomio · Exponencial	$P(n)K^n$	$Q(n)K^n$

Siendo $P(n)$ y $Q(n)$ polinomios del mismo grado (excepto en ocasiones que hay subir un grado).

Ejercicio 3.83. *Encuentra la solución general de las siguientes relaciones de recurrencia lineales:*

1. $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = n^3\, 2^n$
2. $a_n - a_{n-1} = 2n^2 - n$
3. $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = \dfrac{n^2}{3^n}$

Ejercicio 3.84. *Sea una escalera con n escalones. Juanito puede subir la escalera de diferentes modos. Usando un paso para subir un escalón, o dos escalones o tres escalones. Combinando todos estos pasos para subir la escalera ¿de cuántas formas puede hacerlo?*

Observa que si a_n es el número de formas de subir una escalera con n escalones, tenemos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ \dots$$

Ejercicio 3.85. *Juanita se ha propuesto ahorrar. Los meses pares guarda 2 euros en una hucha y los meses impares sólo 1 euro. ¿Qué dinero tendrá pasados n meses?*

Observa que si a_n es la cantidad de dinero que posee en el mes n, tenemos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ \dots$$

Ejercicio 3.86. *Un banco nos presta una cantidad a devolver en cinco años (60 meses) con un interés anual de 5 %. ¿Cuál es la amortización mensual A para pagar por cada 100 euros prestados para cancelar el crédito en el tiempo previsto?*

Observa que si a_n es el capital que se le debe al banco, tenemos:

$$a_0 = 100,\ a_1 = a_0 + \frac{5a_0}{1200} - A,\ a_2 = a_1 + \frac{5a_1}{1200} - A,\ \dots,\ a_{60} = 0$$

[4] Sin que intervengan los valores iniciales.

Complemento al tema. Pruebas de teoremas.

Teorema 3.68 *El conjunto de soluciones de una ecuación de recurrencia lineal homogénea del tipo (3.2) forman un subespacio vectorial del espacio vectorial de las sucesiones (reales).*

Demostración. Ya sabemos que el conjunto de todas las sucesiones reales forman un espacio vectorial real (con las operaciones usuales de suma y producto por escalar).

Para probar que las soluciones de (3.2) son subespacio vectorial, consideremos dos soluciones cualesquiera s_n y s'_n y comprobemos:

1. Que $x_n = s_n + s'_n$ sigue siendo solución de (3.2).
2. Que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $y_n = \lambda \cdot s_n$ sigue siendo solución.

Completa la demostración en el cuadro siguiente, sustituyendo, respectivamente, x_n e y_n en (3.2) y comprobando que se sigue cumpliendo la igualdad. □

Teorema 3.73 *Si x_1 y x_2 son raíces distintas del polinomio característico de una ERL Homogénea (3.2), entonces*

1. *$a_n = x_1^n$ y $b_n = x_2^n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.2).*
2. *Si x_1 es una raíz de multiplicidad t entonces las t sucesiones siguientes*

$$x_1^n, \quad nx_1^n, \quad n^2x_1^n, \quad \dots \quad , n^{t-1}x_1^n$$

son soluciones linealmente independientes

Justificación La demostración completa sería tediosa e innecesaria. Veamos los aspectos más importantes que justifican este resultado.

1. En este punto hay que probar dos cosas: primero que son solución de la ecuación homogénea y, segundo, que son independientes.
   - Para ver que $a_n = x_1^n$ es solución tenemos que sustituir en (3.2) y comprobar que es 0.

$$\begin{aligned} x_1^n + C_1x_1^{n-1} + C_2x_1^{n-2} + \dots + C_kx_1^{n-k} &= \\ &= x_1^{n-k} \cdot (x_1^k + C_1x_1^{k-1} + \dots + C_k) = \\ &= x_1^{n-k} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

   por ser x_1 raíz del polinomio. Igualmente para $b_n = x_2^n$.

- Para comprobar que son linealmente independientes, consideramos una combinación lineal igualada a cero, es decir

$$\alpha x_1^n + \beta x_2^n = 0$$

y, como esta igualdad es verdad para todo natural n, lo es para $n = 0$ y $n = 1$, que al sustituir nos da el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que se simplifica como $\alpha(x_1 - x_2) = 0$. Como, por hipótesis x_1 y x_2 son diferentes, se deduce que $\alpha = 0$ y, por tanto, $\beta = 0$. Esto prueba que son linealmente independientes.

2. Vamos a hacer la prueba en el caso (más fácil) de $t = 2$. Igual que en el punto 1. anterior hay que probar que x_1^n y nx_1^n son soluciones y además son linealmente independientes.

 - Ya hemos visto que x_1^n es solución. Para ver que nx_1^n es también solución, usamos que x_1 es solución doble del polinomio característico esto implica que es raiz del polinomio y de su derivada[5]. Por tanto tenemos las dos igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} x_1^k + C_1 x_1^{k-1} + C_2 x_1^{k-2} + \cdots + C_{k-1}x_1 + C_k &= 0 \\ kx_1^{k-1} + C_1(k-1)x_1^{k-2} + \cdots + C_{k-1} &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

multiplicando la primera igualdad por k y la segunda por x_1 nos queda

$$\begin{aligned} kx_1^k + C_1kx_1^{k-1} + C_2kx_1^{k-2} + \cdots + C_{k-1}kx_1 + C_kk &= 0 \\ kx_1^k + C_1(k-1)x_1^{k-1} + C_2(k-2)x_1^{k-2} + \cdots + C_{k-1}x_1 &= 0 \end{aligned}$$

y restando ambas igualdades nos da la igualdad siguiente que usaremos más adelante:

$$C_1x_1^{k-1} + 2C_2x_1^{k-2} + \cdots + (k-1)C_{k-1}x_1 + kC_k = 0 \tag{3.7}$$

Sustituyamos, ahora, nx_1^n en la ecuación de recurrencia homogénea

$$\begin{aligned} nx_1^n + C_1(n-1)x_1^{n-1} + C_2(n-2)x_1^{n-2} + \cdots + C_k(n-k)x^{n-k} &= \\ = nx_1^{n-k}(x_1^k + C_1x_1^{k-1} + C_2x_1^{k-2} + \cdots + C_k) + \ldots \\ + x^{n-k}(C_1x_1^{k-1} + 2C_2x_1^{k-2} + \cdots + (k-1)C_{k-1}x_1 + kC_k) = 0 \end{aligned}$$

que es 0 usando las igualdades (3.6) y (3.7).

[5]La afirmación de esta llamada es muy conocida, pero si no la sabes piensa que una raíz doble x_1 hace que un polinomio se pueda expresar $p(x) = (x - x_1)^2 q(x)$. Basta derivar para hacer la comprobación.

- Para ver que x_1^n y nx_1^n son linealmente independientes, partimos de una combinación lineal igualada a 0,

$$\alpha x_1^n + \beta n x_1^n = 0$$

y comprobamos que $\alpha = \beta = 0$, Dejamos los detalles como ejercicio.

Ejercicios Propuestos

Ej. 3.1 — ¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEF$ contienen las letras DEF juntas en cualquier orden?

Ej. 3.2 — Un comité de seis personas A, B, C, D, E, F debe escoger un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas se puede hacer la elección? ¿De cuántas si el presidente debe ser A ó B?
¿De cuántas si E debe ocupar uno de los cargos? ¿De cuántas si A y F deben ocupar un cargo?

Ej. 3.3 — Se ha recibido un paquete de 100 discos compactos con cinco discos defectuosos. ¿De cuántas maneras se puede elegir una muestra de cuatro discos que contenga más discos defectuosos que no defectuosos?

Ej. 3.4 — Un autobús de 32 plazas numeradas (16 a la derecha y 16 a la izquierda) transporta a 28 alumnos de la E.T.S. Ingeniería Informática en su viaje de fin de carrera. ¿De cúantas formas pueden sentarse si tres de ellos sólo pueden ir a la derecha y cinco de ellos sólo a la izquierda?

Ej. 3.5 — ¿Cuántas cadenas de ocho bits hay? ¿Cuántas de ellas comienzan por 101? ¿Cuántas de ellas comienzan por 101 o tienen el cuarto bit igual a 1?

Ej. 3.6 — ¿Cuántos números de teléfono (de 9 cifras) tienen al menos un dígito repetido?

Ej. 3.7 — ¿Cuántas soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots x_6 = 20$ satisfacen $1 \leq x_i \leq 9$? (Utiliza incl. y excl.)

Ej. 3.8 — (Feb. 2012) Se tienen 6 alumnos de 1^{er} curso, 5 de 2^o, 4 de 3^o, 3 de 4^o, 2 de 5^o y 1 de 6^o, como candidatos a recibir 5 premios de la Facultad de Medicina, uno al alumno menos charlatán, otro al más atento, otro al de mejor letra, otro al que más asiste a tutorías y otro al que mejor aparca el coche. Suponiendo que ningún alumno puede recibir más de un premio, se pide:

1. ¿De cuántas formas se pueden distribuir los premios?

2. A la persona encargada se le olvidó de grabar el nombre del premio en las copas. ¿De cuántas formas se pueden repartir ahora las copas si cada alumno puede recibir más de una?

Ej. 3.9 — (Dic. 2012) Se quieren formar cadenas de longitud 10 con los números 0, 1, 2 y 3. Se pide:

1. ¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar?
2. ¿Cuántas cadenas tienen peso 3 (es decir, la suma de sus cifras es 3)?

Ej. 3.10 — Calcula el número de formas en que pueden ordenarse los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$ de modo que el primer dígito es mayor que 1, el último es menor que 8 y el tercero es distinto de 5. (Usa inclusión y exclusión)

Ej. 3.11 — Se ha producido un robo y la policía interroga a dos testigos sobre la matrícula del vehículo utilizado para la huida (cuatro dígitos y dos letras de un alfabeto de 26). El primer testigo asegura que la segunda letra de la matrícula era una O o una Q y que el último dígito era un 3 o un 8. El segundo testigo asegura que la primera letra era una C o una G y el primer dígito era definitivamente un 7.

1. ¿Cuántas placas diferentes tendrá que verificar la policía?
2. Si en investigaciones posteriores la policía obtiene además que la matrícula no termina en 53 ni empieza en 78, ¿cuántas comprobaciones se tendrán que hacer en este caso?

Ej. 3.12 — Calcula cuántos números enteros hay entre 1000 y 9999 que cumplan las siguientes condiciones (independientes entre ellas):

1. La suma de sus dígitos es exactamente 9.
2. La suma de sus dígitos es exactamente 9 y son todos distintos de 0.
3. Ser impar y tener todos los dígitos diferentes.
4. Alguno de sus dígitos es 9.

Ej. 3.13 — Supongamos 7 pelotas de distintos colores y 4 recipientes numerados 1,2,3,4. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las pelotas para que no haya ningún recipiente vacío? Siendo una de las pelotas azul, ¿De cuántas formas la podemos distribuir si obligamos a la pelota azul a estar en el recipiente número 2, y que no haya ninguno vacío?

Ej. 3.14 — Los Reyes Magos traen n juguetes diferentes a n niños. En el camino deciden dejar a exactamente un niño sin juguete y repartir todos los juguetes entre los restantes niños. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

Ej. 3.15 — Completa la tabla siguiente indicando el número de maneras de distribuir nueve objetos en cinco recipientes:

Objetos (9)	Recipientes (5)	Posibilidad recipientes vacíos	Número de distribuciones
Indistinguibles	Distinguibles	Si	
Distinguibles	Distinguibles	No	
Distinguibles	Indistinguibles	No	

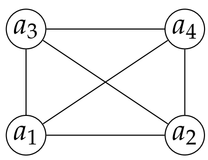
Ej. 3.16 — (Dic. 2011) Calcula el número de formas en que pueden ordenarse los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$ de modo que el primer dígito es mayor que 1, el último es menor que 8 y el tercero es distinto de 5. (Usa inclusión y exclusión).

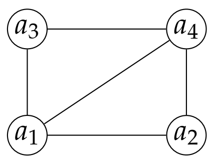
Ej. 3.17 — (Sept. 2012) Se tienen 4 bolas de golf y 10 cajas distintas. Determine de cuántas maneras diferentes pueden distribuirse las bolas en las cajas si:

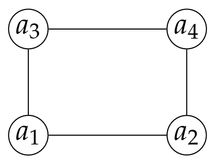
1. Todas las bolas son distintas y en ninguna caja cabe más de una bola.

2. Todas las bolas son iguales y en ninguna caja cabe más de una bola.
3. Todas las bolas son iguales y en cada caja caben cuantas bolas se quieran poner.
4. Todas las bolas son distintas y en cada caja caben cuantas bolas se quieran poner.

Ej. 3.18 — Para cada uno de los siguientes grafos: ¿De cuantas formas puede asignarse un color a cada vértice a_i de la figura, con n colores, de modo que dos vértices con una arista común deben tener necesariamente colores distintos?

1. 

2. 

3. 

Ej. 3.19 — Resuelve las siguientes ecuaciones de recurrencia

1. $a_{n+2} = a_n$ con $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.
2. $a_n = a_{n-1} + (n-1)$ con $a_0 = 1$.
3. $a_n = 2a_{n-1} + 2$ con $a_1 = 1$.
4. $a_n = a_{n-1} + (-1)^{n+1}$ con $a_1 = 1$.
5. $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n$ con $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
6. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 7a_n$ con $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
7. $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = n^2$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.
8. $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Ej. 3.20 — Resuelve las ecuaciones de recurrencia:

1. $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0$, con $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$.
2. $a_{n+1} + 4a_{n-1} = 2(a_n + 4a_{n-2})$ con $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$

Ej. 3.21 — Una pareja de conejos se reproduce mensualmente. Los meses pares tienen dos conejos y los impares uno. Encuentra un modelo de recurrencia para el número de conejos hijos a_n habidos hasta el n-ésimo mes. Resuélvela.

Ej. 3.22 — El número a_n de euros de activo de una compañía se incrementa cada año cinco veces lo que se incrementó el año anterior. Si $a_0 = 3$ y $a_1 = 7$ calcula a_n.

Ej. 3.23 — Un rumor se difunde vía telefónica entre n personas. El rumor está totalmente difundido cuando todas las personas han hablado entre sí. Sea u_n el número de llamadas realizadas con n personas ($n \geq 2$).

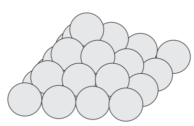
1. Define recursivamente la sucesión $\{u_n\}$.
2. Da una fórmula general de dicha sucesión.

Ej. 3.24 — Halla y resuelve la relación de recurrencia de la sucesión a_n que da el número de sucesiones ternarias (los términos de la sucesión pertenecen al conjunto $\{0, 1, 2\}$) de longitud n que no tienen dos ceros consecutivos.

Ej. 3.25 — Cada partícula en un reactor nuclear produce, sin destruirse, dos nuevas partículas cada segundo. Además cada segundo (desde $t = 0$) es inyectado al reactor una nueva partícula.

1. ¿Cuántas partículas hay en el reactor en el n-ésimo segundo?
2. Si el reactor estalla a partir de 10^{24} partículas ¿cuánto tiempo tarda en estallar?

Ej. 3.26 —
En un supermercado, las naranjas se encuentran apiladas en una pirámide de base cuadrada de forma que



cada naranja está en contacto con cuatro naranjas de la capa inferior. Si la pirámide tiene n capas, ¿cuántas naranjas la forman?