

TD Dénombrement

EXERCICE 1 ■ ■ □ Comme dans le cours _____

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k . Soit X une partie à p éléments de E .

- ① Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?
- ② Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?
- ③ Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur un ensemble E ?
- ④ Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
- ⑤ Combien y a-t-il de couples (Y, Z) formés de parties disjointes de E ?
- ⑥ Combien y a-t-il de parties Y de E contenant X ?
- ⑦ Combien y a-t-il de parties Y de E à $m \in \{p, \dots, n\}$ éléments contenant X ?
- ⑧ Combien y a-t-il de couples (Y, Z) de parties de E tels que $Y \cap Z = X$?

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □ _____

Le codage RGB d'une couleur consiste à indiquer, par trois entiers entre 0 et 255, la quantité des trois couleurs primaires (rouge, vert, bleu) dont elle est constituée. Combien peut-on coder de couleurs différentes en RGB ?

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □ _____

Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.

- ① Combien y a-t-il de mains possibles ?
- ② Combien de ces mains comportent exactement un As ?

③ Combien de ces mains ne comportent aucun As ?

④ Combien comportent au moins un As ?

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □ _____

Quel est le nombre de façons de ranger p objets distincts dans n tiroirs, chaque tiroir pouvant recevoir autant d'objets que l'on veut ?

► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ □ □ _____

① En utilisant l'alphabet usuel de 26 lettres, combien peut-on former de mots de cinq lettres (ayant un sens ou pas) dans lesquels figurent dans l'ordre une consonne, une voyelle, deux consonnes et enfin une voyelle ?

② Même question si on impose que les cinq lettres soient distinctes.

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □ _____

Une puce se déplace sur un cube. Chaque déplacement la mène d'un sommet à un autre relié par une arête. Elle fait n déplacements en tout.

Combien y a-t-il de trajets possibles ?

► Indication ► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 7 ■ ■ □ Formule de Chu-Vandermonde _____

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in \llbracket 0, p + q \rrbracket$. Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■■■

Soit E un ensemble à n éléments. Calculer $\sum_{X \subset E} \text{Card}(X)$ et $\sum_{X, Y \subset E} \text{Card}(X \cap Y)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■■□

① Combien y a-t-il de suites strictement croissantes de p entiers choisis dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

② **Application 1.** Combien existe-t-il de suite $(x_1, \dots, x_p)$ avec

$$x_1 + \dots + x_p \leq n \text{ et } x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}^*$$

③ **Application 2.** Combien existe-t-il de suite $(x_1, \dots, x_p)$ avec

$$x_1 + \dots + x_p = n \text{ et } x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}^*$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■□□

Un groupe de $2n$ personnes comprend n hommes et n femmes.

① Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives? Deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite.

② Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme.

③ Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus Madame X soit à côté de Monsieur Y.

► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■■□

Étant donné un mot m , on appelle anagramme de m tout mot formé des mêmes lettres que m (un mot est simplement une liste de lettres).

① Quel est le nombre d'anagrammes du mot orange?

② Quel est le nombre d'anagrammes du mot ananas?

③ Quel est le nombre d'anagrammes d'un mot contenant n_1 fois la lettre ℓ_1, n_2 fois la lettre $\ell_2, \dots, n_p$ fois la lettre ℓ_p ?

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■■□

On se donne n points dans le plan, trois quelconques n'étant pas alignés. On considère toutes les droites joignant deux de ces points. On suppose que les droites obtenues ne sont jamais parallèles et que trois droites ne peuvent être concourantes qu'aux points initiaux. Calculer le nombre de points d'intersection ainsi obtenus (en plus des n points initiaux).

► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■■□ Partitions

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note π_n le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On rappelle qu'une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides et deux à deux disjointes, dont la réunion est E . On pose, de plus, $\pi_0 = 1$.

① Calculer π_1, π_2, π_3 .

② Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\pi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_k$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■■■

On considère n poteaux numérotés de 1 à n sur lesquels on veut répartir r drapeaux distincts. Chaque poteau peut accueillir un nombre quelconque de drapeaux entre 0 et r . Lorsqu'un poteau accueille plusieurs drapeaux, on tient compte de l'ordre dans lequel les drapeaux sont disposés sur ce poteau.

① On suppose $r = 2$ et $n = 2$. De combien de façons peut-on disposer les drapeaux sur les poteaux?

② Même question dans le cas général. On pourra raisonner par récurrence sur r .

► Indication ► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 Comme dans le cours

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Un nombre pour R puis pour G puis pour B.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Des combinaisons et encore des combinaisons.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Imaginer une application.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

On dénombre lettre par lettre.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Intéressez-vous aux nombre de déplacements possibles de la puce à chaque étape.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 Formule de Chu-Vandermonde

Prenez un ensemble à $p + q$ éléments que vous séparez en 2 ensembles à p et q éléments. Regardez alors le nombre de parties à n éléments dans E .

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

Décomposer les sommes en fonction des cardinaux des ensembles. Combien y a t il d'ensembles X de cardinal k ?

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

- ① Trouver une suite de nombres distincts donne une unique suite strictement croissante.
- ② $x_i > 0$, alors la somme des x_i est strictement croissante !?
- ③ Utiliser le dénombrement de la question précédente.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

Dénombrement "à la main". Faites un dessin !

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Il faut dénombrer le de mots qui s'écrit avec n lettres. Il y a n possibilité pour la première, $n - 1$ pour la deuxième, Attention aux mots qui se répètent.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

On considère un point d'intersection, et on regarde le nombre de points qui sont nécessaires pour l'obtenir.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 **Partitions** _____

Décomposer les partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, en fonction du nombre d'éléments dans la partition.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 _____

On essaie d'avoir une relation de récurrence entre $u_{n,r}$, le nombre de dispositions possibles et $u_{n,r-1}$ en fonction

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1 Comme dans le cours

- ① Si $n > p$, il n'y a pas d'injections possibles.
Si $n = 0$, il y a une injection, l'application vide.
Si $0 < n \leq p$, il y a $\frac{p!}{(p-n)!}$ choix, qui correspond au nombre d'arrangements.
- ② Une application $f : E \rightarrow F$ strictement croissante est entièrement déterminée par son image qui est une partie formée de n éléments de F . Il y a $\binom{p}{n}$ parties à n éléments dans F et donc autant d'applications strictement croissantes de E vers F .
- ③ Une relation d'ordre total sur E permet de définir une bijection de $\{1, \dots, n\}$ vers E et inversement. Par suite, il y a exactement $n!$ relations d'ordre total possibles.
- ④ Autant que de parties de $E \setminus X$, soit 2^{n-p} .
- ⑤ $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n$.
- ⑥ Autant que de parties de $E \setminus X$, soit 2^{n-p} .
- ⑦ Autant que de parties de $E \setminus X$ à $m-p$ éléments, soit $\binom{n-p}{m-p}$.
- ⑧ Une fois Y à m éléments contenant X déterminé il y a 2^{n-m} choix de Z possibles et donc

$$\sum_{m=p}^n \binom{n-p}{m-p} 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} 2^{n-p-k} = (1+2)^{n-p} = 3^{n-p}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

L'ensemble des couleurs possibles est en bijection avec $\llbracket 0, 255 \rrbracket^3$, ce qui donne $256^3 = 2^{24}$ couleurs.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

- ① Une main se comprend comme une partie à 5 éléments d'un ensemble à 52 éléments.

$$\binom{52}{5}$$

- ② On choisit l'As et les cartes le complétant

$$\binom{4}{1} \times \binom{48}{4}$$

- ③ On choisit uniquement des cartes qui ne sont pas des As

$$\binom{48}{5}$$

- ④ Par complément

$$\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$$

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

Il s'agit de compter le nombre d'applications de l'ensemble des objets dans l'ensemble des tiroirs. Il y en a n^p .

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

- ① L'alphabet contient 20 consonnes et 6 voyelles. Pour la première lettre x_1 , on a le choix entre 20 consonnes. Pour chaque choix de x_1 , on peut choisir la seconde lettre x_2 parmi 6 voyelles, etc. Le nombre total de mots de cinq lettres, c'est-à-dire de quintuplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ vérifiant les conditions souhaitées est donc $20 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 6$, c'est-à-dire 288000.

- ② Pour x_1 , on a le choix entre 20 consonnes; pour x_3 (resp. x_4) on a le choix entre 19 (resp. 18) consonnes. En raisonnant de la même façon pour les voyelles, on trouve que le nombre cherché est $20 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 5 = 205200$.

↪ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

Quelle que soit sa position sur le cube, la puce a, après k déplacements, le choix pour le déplacement suivant entre 3 sommets. Il y a donc au total 3^n trajets possibles.

↪ retour à l'EXERCICE 6

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 7 Formule de Chu-Vandermonde

Soit E un ensemble à $p + q$ éléments séparé en deux parties disjointes E' et E'' de cardinaux p et q . Il y a exactement $\binom{p+q}{n}$ parties à n éléments dans E . Or pour former une partie à n élément de E , on peut pour chaque $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ commencer par choisir k éléments dans E' avant d'en choisir $n - k$ dans E'' . Il y a $\binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$ possibilités pour chaque $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ puis au total $\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$ possibilités d'où l'identité.

↪ retour à l'EXERCICE 7

Correction de l'EXERCICE 8

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties X à un k éléments dans E . Par suite

$$\sum_{X \subset E} \text{Card}(X) = \sum_{k=0}^n \sum_{\text{Card}(X)=k} k = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties Z à k éléments dans E . Pour une telle partie Z , les parties X contenant Z ont $\ell \in \{k, \dots, n\}$ éléments. Il y a $\binom{n-k}{\ell-k}$ parties X à ℓ éléments contenant Z . Pour une telle partie X , une partie Y telle que $X \cap Y = Z$ est une partie Y déterminée par $Z \subset Y \subset Z \cup C_E X$. Il y a $2^{n-\ell}$ parties Y possibles. Il y a

$$\sum_{\ell=k}^n \binom{n-k}{\ell-k} 2^{n-\ell} = (1+2)^{n-k} = 3^{n-k}$$

couples (X, Y) tels que $X \cap Y = Z$. Par suite

$$\sum_{X, Y \subset E} \text{Card}(X \cap Y) = \sum_{k=0}^n \sum_{\text{Card } Z=k} \sum_{X \cap Y=Z} \text{Card}(X \cap Y) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 3^{n-k}$$

Or

$$((3+x)^n)' = n(3+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 3^{n-k} x^{k-1}$$

donc

$$\sum_{X, Y \subset E} \text{Card}(X \cap Y) = n4^{n-1}$$

↪ retour à l'EXERCICE 8

Correction de l'EXERCICE 9

- ① Une suite strictement croissante de p entiers dans $\{1, \dots, n\}$ est entièrement déterminée par le choix de ses éléments qu'il suffit alors d'ordonner. Il y en a donc

$$\binom{n}{p}$$

- ② À chaque suite $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant $x_1 + \dots + x_p \leq n$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}^*$ on peut associer une suite strictement croissante $(y_1, \dots, y_p)$ d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ en posant

$$y_k = x_1 + \dots + x_k$$

Inversement, à une suite $(y_1, \dots, y_p)$ comme au dessus correspond une unique suite $(x_1, \dots, x_p)$ comme voulue avec

$$x_1 = y_1, x_k = y_k - y_{k-1} \text{ pour } k \geq 2$$

Il y a donc autant de suites $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant $x_1 + \dots + x_p \leq n$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}^*$ que de suite strictement croissantes de p éléments dans $\{1, \dots, n\}$, soit

$$\binom{n}{p}$$

- ③ La condition $x_1 + \dots + x_p = n$ est remplie quand $x_1 + \dots + x_p \leq n$ mais pas $x_1 + \dots + x_p \leq n - 1$. Le nombre de suite cherché est donc

$$\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1}$$

↪ retour à l'EXERCICE 9

Correction de l'EXERCICE 10

- ① On a $(2n - 1)!$ dispositions différentes. En effet, une des personnes étant fixée, il y en a autant que de manières de placer les personnes restantes dans les $2n - 1$ autres places.
- ② On reprend le même raisonnement. Imaginons qu'on ait choisi la place d'une femme. Cela détermine les places où il faudra mettre les $n - 1$ femmes restantes et les n hommes. On obtient $(n - 1)!n!$ dispositions.
- ③ Fixons la place de Madame X. Il y a deux places possibles pour Monsieur Y. Ensuite, on place les $n - 1$ femmes et les $n - 1$ hommes restants. On obtient $2((n - 1)!)^2$ dispositions.

↪ retour à l'EXERCICE 10

Correction de l'EXERCICE 11

- ① Une anagramme du mot orange résulte de la permutation de ses lettres. Comme elles sont distinctes, ces permutations donnent des mots distincts. Il y a donc $6! = 720$ anagrammes.
- ② Il y a trois a et deux n , donc les permutations ne conduisent pas à des mots différents. Voici deux manières de compter.
- Il y a $6!$ permutations possibles de l'ensemble des lettres. Mais à chaque anagramme correspond $3! 2!$ permutations, car on peut permuter les trois a et les deux n . On obtient $\frac{6!}{3!2!} = 60$ anagrammes.
 - Pour construire une anagramme, c'est-à-dire une 6-liste, on place d'abord les trois a . Il y a $\binom{6}{3} = 20$ choix possibles. On place ensuite les n parmi les places restantes. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ choix possibles. Le s est la lettre restante. Il y a donc $20 \times 3 = 60$ anagrammes.

- ③ En appliquant la première des deux méthodes de la question 2, on obtient $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_p!}$, où $n = n_1 + \dots + n_p$. Si l'on appliquait la deuxième méthode, on trouverait :

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{p-1}}{n_p}$$

En écrivant les coefficients binomiaux sous forme de factorielles, on voit qu'on peut simplifier $(n - n_1)!$, $(n - n_1 - n_2)!$, $\dots$, $(n - n_1 - \dots - n_{p-1})!$ pour obtenir le même résultat que par la première méthode.

↪ retour à l'EXERCICE 11

Correction de l'EXERCICE 12

Première méthode Un tel point s'obtient comme intersection des droites (AB) et (CD) , où A, B, C et D sont quatre points initiaux distincts. Il y a $\binom{n}{4}$ choix de $\{A, B, C, D\}$, puis trois façons de les apparier (si on fixe un des points, on lui adjoint un des trois autres points). On obtient $3\binom{n}{4}$ points.

Seconde méthode On choisit une première droite (AB) , il y a $\binom{n}{2}$ choix, puis une seconde droite (CD) ne passant ni par A , ni par B , il y a $\binom{n-2}{2}$ choix. On obtient $\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}}{2}$ points (il faut diviser par deux car on introduit un ordre entre les deux droites (AB) et (CD)). On trouve le même résultat que dans le premier cas : $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

↪ retour à l'EXERCICE 12

Correction de l'EXERCICE 13 Partitions

- ① On trouve $\pi_1 = 1, \pi_2 = 2$ et $\pi_3 = 5$.
- ② On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Pour tout élément de $\mathcal{P}$, on nomme A la partie contenant $n+1$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $\mathcal{P}_k$ les éléments de $\mathcal{P}$ tels que A contienne k éléments en plus de $n+1$. Alors $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$ forment une partition de $\mathcal{P}$. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour déterminer un élément de $\mathcal{P}_j$, on choisit A , c'est-à-dire $A \setminus \{n+1\}$; il y a $\binom{n}{j}$ choix possibles. Puis A étant choisie, les $n-j$ éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$ peuvent être partitionnés de π_{n-j} façons. On a donc $\text{card}(\mathcal{P}_j) = \binom{n}{j} \pi_{n-j}$. On en déduit :

$$\pi_{n+1} = \text{card}(\mathcal{P}) = \sum_{j=0}^n \text{card}(\mathcal{P}_j) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \pi_{n-j} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_k$$

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)**Correction de l'EXERCICE 14**

- ① Soit on met un drapeau par poteau, ce qui peut se faire de 2 façons différentes, soit on met les deux drapeaux sur le même poteau, ce qui peut se faire de $2 \cdot 2$ façons (choix du poteau et de l'ordre des drapeaux). En tout, il y a 6 possibilités.
- ② Notons $u_{n,r}$ le nombre cherché. Supposons que $r-1$ drapeaux soient déjà placés et qu'il y ait d_i drapeaux sur le i -ème poteau (où $1 \leq i \leq n$). Si l'on place le r -ième drapeau sur le i -ème poteau, il y a $d_i + 1$ emplacements possibles. Donc le nombre total de choix pour le r -ième drapeau est $\sum_{i=1}^n (d_i + 1) = \sum_{i=1}^n d_i + n = r-1 + n$. On voit que ce nombre est indépendant de la disposition initiale des $r-1$ premiers drapeaux. D'où la relation

$$u_{n,r} = (n + r - 1)u_{n,r-1}$$

Il est clair que $u_{n,1} = n$. En appliquant la relation de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} u_{n,r} &= (n + r - 1)(n + r - 2) \cdots (n + 1)u_{n,1} \\ &= (n + r - 1)(n + r - 2) \cdots n = \frac{(n + r - 1)!}{(n - 1)!} \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)