Algunas cuestiones sobre particiones de enteros

Matemática Discreta
Tercero de Matemáticas, UAM (curso 2001/2002)
Pablo Fernández Gallardo

1 Cálculo de $p(n)$

Nota inicial: en los cálculos que haremos a continuación utilizaremos la notación y los argumentos que desarrollamos en clase (el 21 de mayo de 2002).

En su momento, y con la ayuda de los diagramas de Ferers, obtuvimos unas relaciones de recurrencia para los $p_k(n)$ (número de particiones de n con k partes): si $k > 1$,

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)\,.$$

Junto con los valores frontera $p_1(n) = 1 = p_n(n)$ para cada $n \geq 1$, podíamos calcular los $p_k(n)$ y, sumando en todos los valores de k, también $p(n)$, el número de particiones de n, para cada $n \geq 1$.

Nos ponemos en el contexto de las funciones generatrices. Ya vimos en clase que la función generatriz asociada a los números $p(n)$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}\,.$$

Necesitamos calcular la función generatriz asociada a un tipo particular de particiones.

Ejemplo 1.1 *Obtengamos la función generatriz de las particiones de n que tienen todas sus partes distintas.*

Si llamamos, como siempre, b_j al número de veces que aparece el símbolo j en la partición, contar esas particiones es lo mismo que contar el número de soluciones de

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} j\, b_j = n \\ 0 \leq b_j \leq 1 \end{array}\right. \qquad \text{o bien el de} \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j = n \\ a_j \in \mathcal{L}_j = \{0, j\} \end{array}\right.$$

(nótese que ahora cada conjunto $\mathcal{L}_j$ es finito, así que aparecerán polinomios). Con los argumentos habituales, llegamos a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p\left(n \,\middle|\, \begin{array}{c}\text{cada parte, a lo}\\ \text{sumo 1 vez}\end{array}\right) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + x^j\right)\,.$$

♣

Llamemos $P(x)$ a esta función generatriz, asociada a las particiones de n cuyas partes son todas distintas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \,|\, \text{partes distintas}) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + x^j) \equiv P(x)\,.$$

Es decir, cada partición de n cuyas partes sean todas distintas contribuye con un uno al coeficiente de x^n del desarrollo de la función $P(x)$. ¿Y si consideráramos la función

$$\widetilde{P}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j)\,?$$

(es como la función $P(x)$, pero cambiamos un signo). Ahora, cada partición de n con partes distintas sigue contribuyendo al coeficiente de x^n del desarrollo de $\widetilde{P}(x)$; pero la contribución es ahora $(-1)^s$, donde s es el número de partes que tenga la partición: si tiene un número impar de partes, contribuirá con un -1 y si tiene un número par, con un 1. Es decir,

$$\mathrm{Coef}_n \left[\prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j) \right] = p_{\mathrm{par}}(n) - p_{\mathrm{impar}}(n)\,,$$

donde llamamos

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{par}}(n) &= p(n \,|\, \text{número par de partes, todas distintas}) \\ p_{\mathrm{impar}}(n) &= p(n \,|\, \text{número impar de partes, todas distintas}) \end{aligned}$$

Se puede ver (si alguien está interesado en los detalles, que me lo haga saber) que esta diferencia es cero excepto cuando n coincide con

$$\frac{m}{2}(3m \pm 1) \quad \text{para cierto entero } m \geq 1\,,$$

en cuyo caso vale $(-1)^m$. Esto es,

$$\widetilde{P}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(x^{\frac{m}{2}(3m-1)} + x^{\frac{m}{2}(3m+1)} \right)\,.$$

Lo que explica el curioso comportamiento del desarrollo de $\widetilde{P}(x)$:

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \cdots\,,$$

un desarrollo con muchos coeficientes nulos y un patrón de signos aparentemente reconocible: dos signos más, dos signos menos, etc.

Interludio. Los números

$$\omega(m) = \frac{m}{2}(3m-1)$$

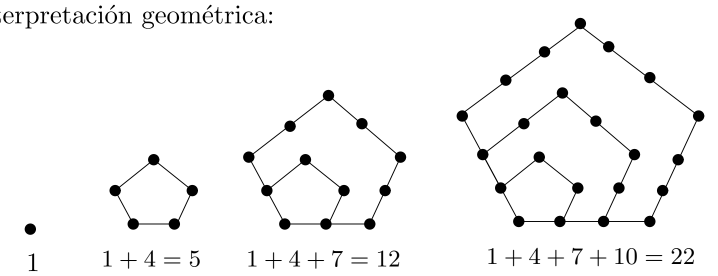
reciben un nombre especial: son los **números pentagonales**, cuyos primeros valores son

m	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$m/2\,(3m-1)$	1	5	12	22	35	51	70	$\cdots$

La explicación de este nombre reside en la casi inmediata identidad

$$\omega(m) = \sum_{k=0}^{m-1} (3k+1)\,,$$

y su interpretación geométrica:



Esta sorprendente identidad tiene su aplicación, como ya viera Euler, al cálculo de $p(n)$. Porque la función generatriz de los $p(n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}$$

es precisamente la recíproca de la función $\widetilde{P}(x)$. Es decir, que

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n\right)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(x^{\frac{m}{2}(3m-1)} + x^{\frac{m}{2}(3m+1)}\right)\right) \end{aligned}$$

Así que el coeficiente n-ésimo de este producto de series es cero para cada $n \geq 1$. Utilizando la regla habitual de multiplicación de series de potencias, se obtiene que, para cada $n \geq 1$,

$$0 = p(n) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[p\left(n - \frac{m}{2}(3m-1)\right) + p\left(n - \frac{m}{2}(3m+1)\right)\right]\,.$$

O, escrito de otra manera,

$$p(n)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[p\left(n-\frac{m}{2}(3m-1)\right)+p\left(n-\frac{m}{2}(3m+1)\right)\right].$$

Observemos que la suma es en realidad finita, porque sólo aparecen términos $p(n-k)$ en los que $n-k\geq 0$:

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)-\dots$$

Es decir, es una auténtica recurrencia que nos permitirá calcular el valor de $p(n)$, para cada n. Para ello, será siempre útil tener la tabla de los números pentagonales (en realidad, los pentagonales son los números de la primera fila):

m	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\frac{m}{2}(3m-1)$	1	5	12	22	35	51	70	92	$\cdots$
$\frac{m}{2}(3m+1)$	2	7	15	26	40	57	77	100	$\cdots$

Podemos calcular los primeros valores (conviene asignar $p(0)=1$):

$$\begin{aligned}
p(1) &= [p(1-1)]=p(0)=1\\
p(2) &= [p(2-1)+p(2-2)]=p(1)+p(0)=2\\
p(3) &= [p(3-1)+p(3-2)]=p(2)+p(1)=3\\
p(4) &= [p(4-1)+p(4-2)]=p(3)+p(2)=5\\
p(5) &= [p(5-1)+p(5-2)]-[p(5-5)]=p(4)+p(3)-p(0)=7\\
p(6) &= [p(6-1)+p(6-2)]-[p(6-5)]=p(5)+p(4)-p(1)=11\\
p(7) &= [p(7-1)+p(7-2)]-[p(7-5)+p(7-7)]\\
&= p(6)+p(5)-p(2)-p(1)=15\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Y obtener así una tabla de los valores de $p(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	$\cdots$

2 ¿Cómo crece $p(n)$?

Observemos la regla de recurrencia para $p(n)$:

$$p(n)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[p\left(n-\frac{m}{2}(3m-1)\right)+p\left(n-\frac{m}{2}(3m+1)\right)\right].$$

Cada $p(n)$ es la suma de los dos anteriores, $p(n-1)$ y $p(n-2)$, y luego hay unas correcciones (más pequeñas que los dos primeros términos, por cierto), a veces con signo positivo, otras con negativo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
p(7) &= p(6) + p(5) - \big(p(2) + p(1)\big) \\
&\vdots \\
p(15) &= p(14) + p(13) - \big(p(10) + p(8)\big) + p(3) \\
p(16) &= p(15) + p(12) - \big(p(11) + p(9)\big) + \big(p(4) + p(1)\big)
\end{aligned}$$

Figura 1: Ramanujan

Así que uno podría suponer que en realidad esas correcciones no alteran mucho el comportamiento asintótico de $p(n)$ (son correcciones más pequeñas y alternan el signo), y que, por tanto, $p(n)$ debería crecer como los números de Fibonacci, como C^n para cierta constante C. Sin embargo, no es así: $p(n)$ crece mucho más lentamente. Se sabe que

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2\,n}{3}}\right) \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Éste es un resultado muy profundo, debido a Hardy y Ramanujan[1], y luego completado por Rademacher. Lo que esto nos dice es que el crecimiento de $p(n)$ no es exponencial, como el de los números de Fibonacci, sino, esencialmente, como $e^{\sqrt{n}}$.

Aquí nos limitaremos a obtener una estimación por arriba, del siguiente tipo: si $n > 2$,

$$p(n) < \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) ,$$

[1]Srinivasa Ramanujan (1887-1920), nacido en la ciudad india de Madrás, es quizás el personaje más fascinante de la Historia de las Matemáticas: un genio en estado puro, prácticamente autodidacto, pues apenas recibió educación matemática formal. En 1913 escribió a Hardy pidiéndole que examinara una serie de teoremas que adjuntaba. El impacto que causaron en Hardy aquellos resultados, sin demostraciones rigurosas, a veces no convenientemente escritos, pero sin duda profundos, fue tal que éste consiguió que en 1914 Ramanujan se trasladara al Trinity College, en Cambridge. Allí comenzaría una fructífera relación entre Hardy y Ramanujan, de la que la estimación asintótica de $p(n)$ es, quizás, el resultado más sobresaliente. Ramanujan murió en 1920, tras regresar a su país, ya gravemente enfermo. No podemos dejar de mencionar una famosa anécdota que quizás ilustra el talento del personaje: Hardy visita en el hospital a Ramanujan y comenta despreocupadamente que ha llegado en un taxi cuyo número es 1729. Un número bastante insípido, añade Hardy. Ramanujan le responde:

> *No, no, señor Hardy. Es un número muy interesante: es el menor número que se puede escribir como suma de dos cubos de dos maneras diferentes.*

Y es que $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$.

que, en fin, tampoco está nada mal; al menos nos dice que el crecimiento no es exponencial. Recordemos la función generatriz de los $p(n)$:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}\,.$$

En este caso, las técnicas habituales, basadas en el análisis de los polos no se pueden aplicar (hay infinitos polos en $|z| = 1$). Pero vamos a continuar con este enfoque analítico de estudiar la función generatriz en sí, como función, aunque en este caso nos restringiremos a los valores que toma en el intervalo $(0, 1)$ de la recta real y no en un disco alrededor del origen en el plano complejo; en otras palabras, no necesitamos considerar a la función generatriz como de variable compleja sino, sólo, como función de variable real.

Vale la pena describir un argumento asintótico más general, como hacemos a continuación.

Consideremos una serie de potencias,

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) x^n$$

donde los $q(n)$ son una sucesión *creciente* de número reales *positivos* y con $q(0) = 1$ (esto último es sólo una normalización). Obsérvese que usamos x como variable, y no z, para indicar que sólo nos interesan ahora los valores que Q toma en número reales. De hecho, consideraremos a $Q(x)$ como función en el intervalo $(0, 1)$.

Nos interesa obtener una buena estimación superior del tamaño de $q(n)$, cuando n es grande, utilizando el comportamiento de $Q(x)$ cuando x se aproxima a 1.

Fijemos un $n > 2$ (y recordemos que $x \in (0, 1)$). El primer paso consiste en partir la serie de potencias infinita que define a $Q(x)$ en el índice n:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} q(k)\, x^k + \sum_{k=n}^{\infty} q(k)\, x^k\,.$$

En la primera suma, vamos, simplemente, a olvidarnos de los $q(k)$; los sustituiremos por 1. Y en la segunda, como los $q(k)$ son una sucesión creciente, los sustituiremos por el primer valor, $q(n)$. Así obtenemos una cota inferior para el valor de $Q(x)$. En ella aparecen series de potencias que sabemos sumar, así que operamos un poco:

$$\begin{aligned}
Q(x) &> \sum_{k=0}^{n-1} x^k + q(n) \sum_{k=n}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + q(n) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k \Big) \\
&= (1-q(n)) \sum_{k=0}^{n-1} x^k + q(n) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-q(n)) \frac{1-x^n}{1-x} + \frac{q(n)}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x} \big[1 - x^n + q(n)\, x^n \big] > \frac{x^n}{1-x}\, q(n)
\end{aligned}$$

(en el último paso hemos desechado la cantidad $1-x^n$, que es positiva). De aquí deducimos que

$$q(n) < \frac{1-x}{x^n}\, Q(x)\,.$$

En suma, obtenemos que

$$q(n) \le \inf_{x \in (0,1)} \left(\frac{1-x}{x^n}\, Q(x) \right)\,.$$

Queremos aplicar esta estimación a $P(x)$, la función generatriz de las particiones. Para ello, nos vendrá bien disponer de una estimación (por arriba) del tamaño de $P(x)$, y es lo que vamos a obtener en un momento.

Vamos a utilizar la versión de $P(x)$ que utiliza el producto infinito; y, escrito de esta manera, es casi obvio que conviene usar logaritmos (vamos a utilizar el desarrollo en serie de potencias de $\log(1-x)$):

$$\begin{aligned}
\log \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j} &= -\sum_{j=1}^{\infty} \log(1-x^j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{jk}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \big(x^k\big)^j \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1-x^k} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{x^k}{1-x^k}
\end{aligned}$$

Todavía no hemos conseguido una expresión que sepamos sumar. Vamos a eliminar los exponentes k con el siguiente truco: es la suma de la serie geométrica finita, pero "leída al revés":

$$(1-x^k) = (1-x)\,(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}) \ge (1-x)\,k\,x^{k-1}$$

(como $x \in (0,1)$, sustituimos todos los términos $1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}$ por el menor de todos ellos, x^{k-1}). Ah, buen truco, porque con él tenemos que

$$\log P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{x^k}{1-x^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{x^k}{(1-x)\,k\,x^{k-1}} = \frac{x}{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

Y esta última suma es bien conocida (al menos Euler sabía calcularla): su valor es $\pi^2/6$.

Reunamos toda la información (escrito todo en términos logarítmicos):

$$\begin{aligned}\log p(n) &< \log\left(\frac{1-x}{x^n}\,P(x)\right) = \log(1-x) - n\,\log x + \log\big(P(x)\big)\\ &\leq \log(1-x) - n\,\log x + \frac{\pi^2}{6}\,\frac{x}{1-x}\,.\end{aligned}$$

Ya tenemos unas funciones razonables, ahora sólo queda elegir convenientemente el valor de x. En realidad conviene cambiar de variable, pasar de x a t, donde

$$x = \frac{1}{1+t} \quad \text{o bien} \quad t = \frac{1-x}{x}$$

(nótese que la nueva variable está en el rango $0 < t < \infty$). Con esa nueva variable,

$$\begin{aligned}\log p(n) &< \log(1-x) - n\,\log x + \frac{\pi^2}{6}\,\frac{x}{1-x}\\ &= \log\left(\frac{t}{1+t}\right) - n\,\log\left(\frac{1}{1+t}\right) + \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{t}\\ &= \log t + (n-1)\,\log(1+t)\,\frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{t} < \log t + (n-1)\,t + \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{t}\end{aligned}$$

(en el último paso hemos utilizado que $\log(1+t) < t$). De manera que

$$p(n) < \frac{1}{t}\,\exp\left((n-1)\,t + \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{t}\right)\,.$$

Una elección adecuada de t, concretamente

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{\sqrt{n-1}}\,,$$

lleva al resultado buscado. Así que el crecimiento de $p(n)$ es menor que el de $\exp(\pi\,\sqrt{2n/3})$ (hay un factor $\sqrt{n}$ en el denominador). Mejorar la estimación y situar un n en el denominador, y de hecho probar que es una fórmula asintótica, son, como ya hemos comentado, otra historia.