

Théorie des ensembles

Applications

Vous connaissez déjà bien les fonctions. Mais les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$, ou sur $\mathbb{N}$ pour les suites, ça commence à vous lasser. Je sais. C'est pour cela que l'on va découvrir les fonctions ou applications sur des ensembles quelconques, pour que vous puissiez choisir ce que vous voulez ! Vous connaissez déjà beaucoup de choses, mais nous allons aussi voir des choses nouvelles, comme les définitions de surjection et d'injection.

Dans tout ce chapitre, E et F sont des ensembles.

1 GÉNÉRALITÉS

C'est parti ! Définissons une application une bonne fois pour toute !

Définition 1 : Application

Une **application** (ou fonction) est la donnée de deux ensembles E et F , et d'une relation binaire entre E et F notée, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $y = f(x)$ et telle que

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, y = f(x).$$

On appelle le **graphe de l'application** f de E dans F toute partie Γ de $E \times F$ telle que

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma.$$

L'ensemble E est appelé **l'ensemble de définition** (ou de départ) de f .

L'ensemble F est quant à lui appelé **un ensemble d'arrivée** de f .

Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est appelé **l'image** de x par f .

Pour tout $y \in F$, tout élément x de E pour lequel $y = f(x)$ est appelé **un antécédent** de y par f .

Unique image

La présence du pseudo-quantificateur « $\exists !$ » permet de noter $f(x)$ l'unique $y \in F$ de la définition.

Définition 2 : Image, restriction, prolongement

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Pour toute partie A de E , on appelle **image** (directe) de A par f , notée $f(A)$, l'ensemble

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists a \in A, y = f(a)\} = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

L'image de E est simplement appelée **l'image de f** et notée généralement $\text{Im} f$ ou $f(E)$.

Si $g : A \rightarrow F$ est une application, telle que pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, on dit que g est la **restriction de f à A** et on la note $g = f|_A$.

Soit $E' \supset E$ un ensemble. Si $h : E' \rightarrow F$ est une application, telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = h(x)$, on dit que h est un **prolongement de f à E'** .

⚠ ATTENTION Dernier avertissement : Si $f : E \longrightarrow F$ alors $f(E) \not\subset F$ mais seulement $f(E) \subset F$!

Vous n'écrirez donc plus JAMAIS : ~~$\forall y \in F, \exists x \in E, \text{ tel que } f(x) = y.$~~

Quand on dit que f est à valeurs dans F , en aucun cas ce la veut dire que f peut prendre toutes les valeurs de Y .

Vocabulaire Parce qu'il existe en général beaucoup de prolongements d'une application donnée, on parle d'un prolongement et non ~~du~~ prolongement.

Notation L'ensemble des applications de E dans F se note F^E ou encore $\mathcal{F}(E, F)$.

L'application f de E dans F se note généralement

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) . \end{aligned}$$

On remarquera que " $\longrightarrow$ " est entre les ensembles et " $\longmapsto$ " est entre les éléments.

Famille

On a déjà utilisé ce terme intuitivement, sans le définir. Une **famille** $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments x_i d'un ensemble E , indexée par un ensemble (d'indices) I , est une application définie sur I à valeurs dans E . Les éléments de I sont appelés **indices**. L'élément d'indice i de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est x_i .

L'ensemble des familles de E indexée par I est naturellement noté E^I .

Pourquoi la notation F^E ?

Prenons $E := \{a, b, c\}$ et $F := \{1, 2\}$. Quelles sont le nombre d'applications possibles qui vont de E dans F ? Il y a 2 possibilités d'images pour chaque élément de E . En effet, Si $f \in F^E$, alors $f(a)$ peut prendre les valeurs 1 ou 2, et de même pour $f(b)$ et $f(c)$.

Il y a donc $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = |F|^{|E|}$ applications de E dans F .

Exemple 1

Je ne vais pas vous donner d'exemples de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$. Vous en connaissez déjà beaucoup. Mais on peut définir, pour un ensemble E quelconque :

- L'application $E \longrightarrow E$ appelée identité de E , et notée Id_E est définie par

$$x \longmapsto x$$

- Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on peut définir l'application $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

$$X \longmapsto X \cap A$$

- Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on peut définir la fonction indicatrice de A est la fonction de E dans $\{0, 1\}$, notée $\mathbb{1}_A$ et définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in A \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin A.$$

Comment montrer que deux applications sont égales ?

C'est la même méthode que pour deux fonctions sur $\mathbb{R}$! Pour montrer l'égalité de deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$, il faut que :

- ① prouver l'égalité des ensembles de départ, c'est-à-dire $E = E'$,

- ② prouver l'égalité des ensembles d'arrivée, c'est-à-dire $F = F'$,
- ③ prouver que $\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$.

Définition 3 : Image réciproque d'une partie

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et B une partie de F . On appelle image réciproque de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

⚠ ATTENTION La notation $f^{-1}(B)$ peut prêter à confusion, mais ne doit surtout pas être confondu avec la notation $f^{-1}(B)$ de la fonction réciproque, lorsque f est bijective. Dans un cas c'est une notation, dans l'autre c'est l'image de la fonction réciproque.

Il n'y a pas d'ambiguïté car, dans le cas où f est bijective, et donc la fonction $f^{-1} : Y \rightarrow X$ existe,

$$\underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{image réciproque de } f} = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{image de la fonction } f^{-1}}.$$

Exemple 2

Soit $f \in F^E$. Par définition,

$$f^{-1}(\emptyset) = \{x \in E \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset \quad \text{et} \quad f^{-1}(F) = \{x \in E \mid f(x) \in F\} = E.$$

Car aucun élément n'appartient à $\emptyset$ et $f(x)$ est toujours un élément de F .

Exemple 3

Un exemple que vous connaissez bien. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ On a alors

$$x \longmapsto x^2.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{4\}) &= \{-2, 2\} \\ f^{-1}([0, 4]) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [0, 4]\} = [-2, 2] \\ f^{-1}([-2, 4]) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-2, 4]\} = [-2, 2] \\ f^{-1}([-2, -1]) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-2, -1]\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Définition 4 : Composée de deux applications

Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$ deux applications. On appelle composée de g et f l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Proposition 1

La composition est **associative**. Soient $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Preuve. Pour tout $x \in E$,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

□

⚠ ATTENTION La composition n'est pas commutative, ne confondez pas $g \circ f$ et $f \circ g$. Il arrive d'ailleurs souvent que l'une de ces fonctions soit définie sans que l'autre le soit.

Composition et identité

Pour $f \in F^E$,

$$\text{Id}_F \circ f = f \circ \text{Id}_E = f .$$

2 APPLICATIONS INJECTIVES

Définition 5 : Injection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **injective** sur E ou que c'est une **injection** sur E si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 .$$

Intuition

L'injectivité est facile à comprendre en terme d'antécédents. L'application f est injective lorsque tout élément de F possède au plus un antécédent par f , donc soit un antécédent, soit aucun. Les éléments de F ne possédant aucun antécédent par f sont alors exactement les éléments de $F \setminus f(E)$. On a alors la définition équivalente

$$f \text{ est injective si et seulement, si } \forall y \in \text{Im} f, \quad \exists ! x \in E, \quad y = f(x) .$$

De cette manière, on se rend compte que l'ensemble d'arrivée est "plus grand que ou égal à" l'ensemble de départ. C'est une bonne manière d'avoir de l'intuition sur les ensembles sur lesquels on travaille.

Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, son graphe (et oui, comme d'habitude, le dessin) nous permet de voir facilement si une même valeur sur l'axe des ordonnées est atteinte plusieurs fois ou non. Il est clair que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$!

En pratique

En fait, on a l'équivalence puisque

$$x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

est la définition d'une application. Donc une application injective est une application par laquelle on peut fonctionner par équivalence pour résoudre une équation ! Pour une telle application,

$$f(x) = f(x') \iff x = x' ,$$

pour x et x' dans l'ensemble de définition de f .

En pratique, on oubliera pas que l'on peut montrer qu'une application est injective, si

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) .$$

C'est la contraposée !

Une application $f \in F^E$ n'est pas injective, par négation de la définition, il faut montrer que

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2 \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \text{et} \quad x_1 \neq x_2 .$$

Donc, pour prouver que f n'est pas injective, il suffit donc d'exhiber deux éléments distincts de E ayant la même image par f !

Exemple 4

La fonction $z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ est injective sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

En effet, soient $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Si

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i},$$

alors $(z+i)(z'-i) = (z'+i)(z-i)$, donc $(1+i)z = (1+i)z'$ et donc $z = z'$.

Exemple 5

L'application

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

est une injection.

Exemple 6

L'application Id_E , définie dans l'exemple ??, est injective.

Proposition 2 : Composition et injectivité

Soient $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ deux applications.

- (1) Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective. (2) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

⚠ ATTENTION On n'invente pas de résultats qui n'existent pas ! Dans (2), g n'a aucune raison d'être injective en revanche. Par exemple pour

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \quad \quad \quad x \longmapsto e^x$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = e^{2x}$, qui est injective.

Preuve.

- (1) Soient $x, x' \in E$. Supposons que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, c'est à dire que $g(f(x)) = g(f(x'))$,
or g est injective donc $f(x) = f(x')$,
or f étant aussi injective, $x = x'$.
- (2) Soient $x, x' \in E$. Supposons que $f(x) = f(x')$, donc, en appliquant la fonction g , on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$, or
 $g \circ f$ est injective, donc $x = x'$.

□

Fonctions réelles injectives

Soit $X \subset \mathbb{R}$. Supposons $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante. On va montrer que f est injective. Soient $x, x' \in X$.
On suppose que $f(x) = f(x')$. Supposons par l'absurde que $x < x'$ ou $x > x'$.
Alors $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, par croissance stricte de f , ce qui est absurde.
Donc $x = x'$. On a donc le résultat suivant

Si f est strictement monotone, alors f est injective.

⚠ La réciproque est fausse ! Pensez à la fonction inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

3 APPLICATIONS SURJECTIVES

Définition 6 : Surjection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est surjective de E sur F ou que c'est une surjection de E sur F si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

Intuition

On est en train de dire que pour une application surjective, tout élément de l'ensemble d'arrivée, a un antécédent. Cela revient à dire que $\text{Im } f = F$!

De cette manière, on se rend compte que l'ensemble d'arrivée est "plus petit que ou égal à" l'ensemble de départ. C'est une bonne manière d'avoir de l'intuition sur les ensembles sur lesquels on travaille.

Pour la surjectivité, on ne dit pas que f est surjective de E dans F mais bien qu'elle est surjective de E sur F , car f atteint tous les éléments de F .

Donc, par définition de l'image,

Toute application est surjective de son ensemble de définition **sur son image** !

En pratique

Une application $f \in F^E$ n'est pas surjective si, et seulement si

$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad y \neq f(x).$$

Pour prouver que f n'est pas surjective, il suffit donc de trouver un seul élément ne possédant pas d'antécédent par f !

Exemple 7

L'application de l'exemple ??

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

est une surjection.

Proposition 3 : Surjectivité et composition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

① Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ l'est aussi.

② Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.

⚠ ATTENTION On n'invente pas de résultats qui n'existent pas ! Dans ②, f n'a aucune raison d'être surjective en revanche. Par exemple, pour

$$g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{et} \quad f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto 2x^2 - 1 \quad \quad \quad x \longmapsto \frac{x+1}{2}$$

alors pour tout $x \in [-1, 1]$, $g \circ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$, qui est l'expression d'une fonction surjective, de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$. En effet, le minimum de ce polynôme est atteint en $-\frac{1}{2 \times 1/2} = -1$ et $g \circ f(-1) = -1$. Donc $g \circ f$ est croissante sur $[-1, 1]$ et $g \circ f(1) = 1$, D'où $g \circ f([-1, 1]) = [-1, 1]$.

Preuve.

- ① Soit $y \in G$. On sait que g est surjective, donc $\exists t \in F$, tel que $y = g(t)$. Mais f est aussi surjective, donc $\exists x \in E$, tel que $t = f(x)$. Pour cet $x \in E$ on a $y = g(t) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.
- ② Soit $y \in G$. On sait que $g \circ f$ est surjective, donc $\exists x \in E$, $y = g \circ f(x)$. Donc il existe bien un élément de F , ici $f(x)$, tel que $g(f(x)) = y$.

□

4 APPLICATIONS BIJECTIVES

Vous avez déjà vu la notion de *fonctions bijectives* pour les fonctions réelles dans le chapitre

FONCTIONS RÉELLES - RAPPELS ET COMPLÉMENTS

Si on suit la définition donnée dans ce chapitre, une fonction bijective est une fonction qui admet, pour tout élément dans l'ensemble d'arrivée, exactement un antécédent. On a alors le parallèle suivant

Injective sur E	$\Leftrightarrow$	tout élément de F possède au plus un antécédent dans E
Surjective de E sur F	$\Leftrightarrow$	tout élément de F possède au moins un antécédent dans E
Bijjective de E sur F	$\Leftrightarrow$	tout élément de F possède exactement un antécédent dans E

ET VOILÀ, RIEN DE PLUS SIMPLE !

Ici on étend cette notion aux applications définies sur et à valeurs dans des ensembles quelconques. Certaines preuves ne seront donc pas données.

Définition 7 : Bijection

Soit $f \in F^E$ une application. On dit que f est **bijjective** de E sur F ou que c'est une **bijection** de E sur F

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x).$$

Exemple 8

L'application de l'exemple ??

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

est une bijection.

Définition 8 : Réciproque

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application. On appelle *réciproque* de f toute application $g: F \longrightarrow E$ pour laquelle

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

Unicité de la réciproque

Supposons qu'il y ait 2 réciproques $g, g' \in F^E$. On aurait alors $g' \circ f = \text{Id}_E$. En composant par g à droite, on obtient

$$(g' \circ f) \circ g = \text{Id}_E \circ g = g.$$

Mais par associativité, $(g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ \text{Id}_F = g'$. D'où $g = g'$. Donc

La réciproque est unique !

⚠ ATTENTION On a besoin des deux égalités ! Si l'on considère f la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$! alors l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

est telle que $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(f(x)) = g(\exp x) = \ln(\exp x) = x$.

Mais g n'est pas une réciproque de f , puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Proposition 4

L'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement, si

- f est injective sur E et surjective de E sur F ,
- f possède une réciproque appelée la réciproque de f et notée f^{-1} .

Cela donne trois définitions équivalentes d'une bijection

Preuve.

- Supposons que $\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x)$. Alors f est injective et surjective par définition.
- Supposons f est injective et surjective. Comme f est injective, $\forall y \in \text{Im} f, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x)$. Mais f étant surjective sur F , on a $\text{Im} f = F$, ce qui prouve la bijectivité de f sur F .
- Supposons que $\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x)$. On peut alors définir la fonction f^{-1} par

$$f^{-1} : F \longrightarrow E \\ y \longmapsto f^{-1}(y) = x = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f.$$

Par définition, $f^{-1} \circ f$ est une application de E dans E . De plus, pour tout $x \in E$, l'élément $f(x) \in F$ possède, par f , un unique antécédent qui ne peut être que x . On a donc $f^{-1}(f(x)) = x$. D'où $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

De même, $f \circ f^{-1}$ est une application de F dans F . De plus, pour tout $y \in F$, l'élément $f^{-1}(y)$ est, par définition, l'antécédent de y par f . On a donc $f(f^{-1}(y)) = y$. D'où $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

- Supposons qu'il existe une fonction f^{-1} , telle que,

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F.$$

Soit $y \in F$. On a $f(f^{-1}(y)) = y$, donc $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y par f .

Supposons $x \in E$, un autre antécédent de y par f . alors $f(x) = y$ et donc $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$. Ce qui prouve l'unicité et donc la bijectivité de f .

□

Proposition 5 : Bijectivité, réciproque et composition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

- ① Si f est bijective de E sur F , f^{-1} est bijective de F sur E et

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

- ② Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ l'est aussi et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

⚠ ATTENTION Ce n'est pas ~~$(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$~~ . Il est facile de vérifier que l'on ne sait pas tromper

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1}$$

et on est bloqué, contrairement à ce qu'il se passe dans la preuve !

Preuve.

① Si f est bijective, les égalités $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ donne directement la bijectivité de f^{-1} et cela montre que $(f^{-1})^{-1} = f$.

② Si f et g sont bijectives, on a

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

et de même

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G.$$

Cela montre que $g \circ f$ est bijective de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Exemple 9

L'application $A \mapsto \bar{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{P}(E)$, est bijective, de réciproque elle-même.

On dit qu'elle est **involutive** ou que c'est une **involution**.

En pratique

Comment montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est bijective ? En ordre décroissant de priorité,

- ① Si on connaît spontanément une expression explicite de f^{-1} , on appelle g la fonction en question et on vérifie simplement que : $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.
- ② Si on ne connaît pas spontanément f^{-1} , on peut essayer d'en trouver une expression explicite via l'équivalence : $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.
- ③ Si on ne se sent pas capable de trouver une expression explicite de f^{-1} , on montre en deux temps que f est à la fois injective et surjective.

Illustration dans l'exemple suivant.

Exemple 10

① Pour montrer que la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective, on exhibe son inverse $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln(y)) = y.$$

② Pour montrer que l'application $f : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ est bijective, on résout l'équation

$$z' = \frac{z+i}{z-i}, \text{ et on trouve } z = i \frac{z'+1}{z'-1}.$$

Donc f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ si et seulement si $g : z \mapsto i \frac{z+1}{z-1}$ est sa réciproque. On vérifie, et on conclut.

③ Pour montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (n, p) & \longmapsto & 2^n(2p+1) \end{array}$$

est une bijection, on montre qu'elle est injective et surjective !

Proposition 6 : Bijectivité et composition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si $g \circ f$ est bijective, alors g est surjective et f est injective.

⚠ ATTENTION Et c'est tout ! On ne peut rien dire sur la bijectivité de g ou de f !

Preuve. Ce sont les propositions ?? et ??. $\square$

Fonctions réelles continue bijectives

On rappelle le **théorème de la bijection** pour une fonction f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

f réalise une bijection de I sur un intervalle $J := f(I)$.
De plus, la réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est également continue et de même stricte monotonie que f .