Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas

José Heber Nieto Said

2014

Combinatoria para Olimpíadas Matemáticas

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, Mayo 2014

Hecho el depósito de Ley.

Depósito Legal: If25220145101919

ISBN: 978-980-6195-37-0

Formato digital: 106 páginas

Diseño general: José H. Nieto

Índice general

Introducción **1**

1. Competencias Matemáticas **3**
1.1. Orígenes de las Olimpiadas Matemáticas 3
1.2. Olimpiada Internacional de Matemáticas 4
1.3. Olimpiadas regionales 4
1.4. Olimpiadas a distancia 5
1.5. Las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela 6
1.6. El entrenamiento para las Olimpiadas 7

2. Principios de la Combinatoria **10**
2.1. Número de elementos de un conjunto 10
2.2. Principio de biyección 11
2.3. Principio de la suma 12
2.4. Principio del producto 13
2.5. Probabilidades 14
2.6. Problemas propuestos 15

3. Configuraciones típicas **18**
3.1. Subconjuntos 18
3.2. Funciones 18
3.3. Variaciones o Arreglos 19
3.4. Permutaciones 19
3.5. Permutaciones circulares 20
3.6. Permutaciones con repetición 20
3.7. Combinaciones 21
3.8. Coeficientes binomiales 22
3.9. Combinaciones con repetición 23
3.10. Particiones 24
3.11. Problemas propuestos 26

4. Principio de las casillas **29**
4.1. Ejemplos 29
4.2. Problemas propuestos 31

5. Relaciones de recurrencia **34**
5.1. Números de Fibonacci 34
5.2. Solución de algunas recurrencias 36
5.3. División del plano por rectas 37
5.4. Problemas propuestos 39

6. Principio de inclusiones y exclusiones **41**
6.1. Función de Euler 42
6.2. Desarreglos 42
6.3. Problemas propuestos 43

7. Grafos **46**
7.1. Relación de Euler 47
7.2. Números de Ramsey 47
7.3. Problemas propuestos 48

8. Coloraciones **50**
8.1. Ejemplos 50
8.2. Problemas propuestos 54

9. Juegos de estrategia **56**
9.1. Juego de Bachet 57
9.2. Simetría 58
9.3. Problemas propuestos 59

10. Principio de invariancia **62**
10.1. Ejemplos 62
10.2. Problemas propuestos 64

11. Soluciones y sugerencias **67**

Siglas de algunas competencias matemáticas **99**

Bibliografía **100**

Índice alfabético **101**

Introducción

Las *Olimpiadas Matemáticas* son concursos de resolución de problemas que se realizan en todo el mundo a nivel local, nacional, regional e internacional. La participación en estas competencias, en las que se plantean problemas novedosos e interesantes, alejados de la rutina, puede estimular el interés de muchos estudiantes por la matemática y ayudarlos a descubrir aptitudes y hasta vocaciones ocultas.

Para los maestros y profesores las olimpiadas ponen al alcance de su mano un amplio material que puede ser usado para reorientar y enriquecer la enseñanza: problemas cuidadosamente diseñados, libros y revistas sobre resolución de problemas, juegos matemáticos y muchos otros recursos. Además, en torno a estas competencias generalmente se realizan seminarios y talleres para los educadores.

¿Porqué se insiste en la resolución de problemas y no en pruebas de conocimientos? Pues sencillamente porque hay un amplio consenso en que los problemas son el corazón de la matemática, y por lo tanto deben ser el punto focal de la enseñanza de esta disciplina.

Paul Halmos, quien fuera uno de los más importantes matemáticos del siglo XX, escribió en su famoso artículo *El corazón de la matemática* [3]:

> "La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que *realmente* consisten las matemáticas es en problemas y soluciones."

En el mismo sentido se pronunció el insigne matemático y educador George Pólya (1887–1985):

> "*Entender* la matemática significa ser capaz de *hacer* matemática. ¿Y qué significa hacer matemática? En primer lugar, significa ser capaz de resolver problemas matemáticos."

Ahora bien, la mayor dificultad que confrontan nuestros estudiantes al participar en olimpiadas matemáticas tiene su origen en que, en los cursos de matemática de enseñanza media, probablemente han tenido que resolver numerosos *ejercicios*, pero rara vez un verdadero *problema*. La diferencia consiste en que un *ejercicio* se resuelve más o menos mecánicamente, si se ha comprendido el material instruccional que lo precede. En cambio, ante un verdadero *problema*, el estudiante no tiene a mano un procedimiento que le permita resolverlo, sino que debe utilizar su imaginación, creatividad e ingenio. Y éstas son precisamente las capacidades intelectuales que le permitirán tener éxito en su vida profesional, hallando soluciones creativas a los innumerables problemas del mundo actual que carecen de soluciones prefabricadas.

Los problemas de las olimpiadas matemáticas preuniversitarias son de naturaleza muy variada, pero a grandes rasgos se pueden clasificar en cuatro categorías: Geometría, Teoría de Números, Álgebra y Combinatoria. Los problemas de geometría son básicamente de geometría euclidiana plana (rara vez se proponen problemas de geometría del espacio). Los de Teoría de Números giran alrededor de los números primos y la divisibilidad de números enteros. Los de Álgebra incluyen polinomios y raíces, ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas, ecuaciones funcionales y desigualdades. Los problemas de Combinatoria, de los cuales nos ocuparemos en este libro, son los más difíciles de caracterizar, ya que abarcan una gran variedad de temas.

En un sentido muy general, la *Combinatoria* es el estudio de las configuraciones formadas con un número finito de elementos. Uno de sus aspectos más básicos es la *combinatoria enumerativa*, que se ocupa de enumerar y contar dichas configuraciones. Otros problemas son la *existencia* de configuraciones con propiedades dadas, y la determinación de configuraciones que maximicen o minimicen determinadas funciones (*combinatoria extremal*). Algunos tipos especiales de configuraciones tienen gran importancia y su estudio ha dado origen a nuevas ramas de la matemática, como la *Teoría de Grafos*.

Este libro está dirigido a los profesores de matemática interesados en ayudar a sus alumnos a obtener mejores resultados en las Olimpiadas Matemáticas, y en particular a aquellos que eventualmente deseen convertirse en entrenadores de los equipos que participan en estas competencias. Para ello se analizan numerosos problemas olímpicos de combinatoria y se examinan algunas de las ideas y heurísticas que se han propuesto para desarrollar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas.

Capítulo 1

Competencias Matemáticas

Este capítulo trata sobre los diversos tipos de Olimpiadas Matemáticas existentes, con especial atención a aquellas en las que participa Venezuela. Finalmente se aborda el problema del entrenamiento para participar en ellas.

1.1. Orígenes de las Olimpiadas Matemáticas

Las competencias de resolución de problemas matemáticos son una vieja tradición en muchos países. Son famosas las competencias para resolver ecuaciones cúbicas que se realizaron en el siglo XVI en Italia. En Francia hubo competencias matemáticas en el siglo XVIII y Hungría comenzó a realizar en 1894 las competencias Eötvös, las cuales (con el nombre Kürschák a partir de 1947) han continuado hasta el día de hoy y son el más cercano antecedente de las modernas Olimpiadas Matemáticas. Las competencias Eötvös tuvieron enorme influencia en el desarrollo de la matemática húngara, gran parte de cuyos mejores matemáticos pasaron por ellas.

La primera Olimpiada Matemática, con ese nombre, tuvo lugar en Leningrado (actual San Petersburgo) en 1934, y la segunda en Moscú en 1935, organizadas por B. N. Delone y G. M. Frijtengolts. Las Olimpiadas Matemáticas se popularizaron en toda la (para entonces) Unión Soviética y luego se extendieron a países como Rumania, Polonia, Alemania, Bulgaria y Checoslovaquia.

En una conferencia Delone expresó:

> "Un alumno no es un recipiente que hay que llenar de conocimientos, sino una antorcha que hay que encender."

Este espíritu ha prevalecido hasta hoy en la preparación de los alumnos que participan en las olimpiadas. A diferencia de lo que ocurre en la enseñanza tradicional de la matemática, en la cual los alumnos realizan ejercicios mecánicamente sobre los temas especificados en el programa de estudios, dejando de lado el placer de entender y pensar por sí mismos, en las Olimpiadas Matemáticas se les presentan verdaderos problemas que no requieren del conocimiento de muchos contenidos, pero sí presentan un desafío tal que en la búsqueda de sus soluciones los alumnos construyen significados, redescubren conceptos básicos y adquieren habilidades y destrezas de gran utilidad para sus estudios posteriores.

1.2. Olimpiada Internacional de Matemáticas

La primera *Olimpiada Internacional de Matemáticas* (IMO) tuvo lugar en Rumania en 1959 y fue en realidad una competencia regional de Europa oriental: solamente participaron siete países. Esta competencia se fue extendiendo gradualmente hasta llegar a abarcar actualmente más de noventa países de los cinco continentes.

La IMO está dirigida a estudiantes que aún no hayan ingresado a la universidad y que no superen los 20 años de edad durante el año anterior al examen. Los problemas propuestos no requieren conocimientos matemáticos más allá de los cubiertos en los cursos de bachillerato, pero sí muchísimo ingenio y habilidad, hasta el punto de que son un enorme desafío para cualquier matemático profesional.

Los objetivos de la IMO son:

- Descubrir, estimular y apoyar a los jóvenes con talento matemático.
- Estimular relaciones amistosas entre las comunidades matemáticas de los diversos países.
- Crear una oportunidad para el intercambio de información sobre la educación matemática en todo el mundo.

Cada país puede enviar a la IMO un equipo de hasta seis estudiantes (como máximo) y dos delegados. Las pruebas se realizan en dos días consecutivos, en cada uno de los cuales se proponen tres problemas y se otorgan cuatro horas y media para resolverlos. Cada problema tiene un valor de siete puntos, así que el máximo puntaje que se puede obtener es 42 (correspondiente a una *prueba perfecta*).

La premiación consiste en medallas de oro, plata y bronce que se otorgan a quienes obtengan las mejores puntuaciones. A lo sumo la mitad de los participantes reciben medallas y la proporción entre oro, plata y bronce debe ser aproximadamente 1:2:3. A los participantes que no obtengan medalla pero que resuelvan un problema completo se les entrega un diploma de mención honorífica.

1.3. Olimpiadas regionales

La IMO ha servido de modelo para varias olimpiadas regionales. A continuación se reseñan aquellas en las que participa Venezuela.

Olimpiada Iberoamericana de Matemática (OIM)

Es una olimpiada en la que participan países de lengua española o portuguesa. Hasta el presente se han celebrado 26 olimpiadas iberoamericanas, dos de ellas en Venezuela (1992 y 2000).

Un aspecto interesante de la OIM es la *Copa Puerto Rico*, trofeo que se otorga cada año al país de mayor progreso relativo, tomando en cuenta los resultados de ese año y de los dos anteriores. Este trofeo tiene por objetivo estimular el desarrollo de los equipos, independientemente del nivel absoluto alcanzado por cada país.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC)

Es como una hermana menor de la OIM, dirigida a los países de Centroamérica y el Caribe, y dirigida a jóvenes menores de 17 años. Se realiza desde el año 1999. En el año 2007 se realizó en Mérida, Venezuela.

Como en la OIM, en esta olimpiada se otorga un trofeo al país de mayor progreso relativo, llamado *Copa El Salvador*.

1.4. Olimpiadas a distancia

La IMO, la OIM y la OMCC son olimpiadas presenciales, en las que todas las delegaciones de los países participantes se trasladan hasta el país sede para realizar las pruebas. Pero existen otras olimpiadas que se realizan a distancia, es decir que las pruebas se realizan en cada país participante más o menos simultáneamente (debido a las diferencias horarias la simultaneidad estricta no es posible) y luego se centralizan los resultados. El correo electrónico ha facilitado mucho este tipo de competencias. Venezuela participa en las que se mencionan a continuación.

Canguro Matemático

El *Canguro Matemático* es un concurso originado en Francia en 1991, inspirado en la primera fase del Concurso Nacional Australiano (de allí su nombre). Sus objetivos son diferentes a los de las Olimpiadas que hemos mencionado hasta ahora: en vez de buscar la excelencia a través de pruebas muy exigentes se trata más bien de popularizar la matemática mediante un concurso de masas, en el cual todos los participantes se diviertan resolviendo problemas. En 1993 este concurso se extendió a Europa mediante la creación de la Asociación Internacional Canguro sin Fronteras (KSF, *Kangourou sans Frontières*). Más tarde se fueron incorporando otros países no europeos, como Brasil, México, Paraguay, Egipto, Estados Unidos de América y Venezuela. Actualmente es el concurso internacional de matemática más popular del mundo, con una participación anual de alrededor de cinco millones de estudiantes.

El Canguro se estructura por niveles: Pre-ecolier, Ecolier, Benjamin, Cadet, Junior y Student. Los participantes deben responder 30 preguntas (los más pequeños sólo 24) en 75 minutos. Las diez primeras preguntas son fáciles y valen 3 puntos cada una; las diez siguientes son algo más difíciles y valen 4 puntos; las diez últimas son las más difíciles y valen 5 puntos cada una. Cada pregunta tiene 5 posibles respuestas, de las que solamente una es correcta. Los participantes marcan la respuesta que creen correcta en la hoja de respuestas. Las preguntas no contestadas no se toman en cuenta, pero las respuestas incorrectas se penalizan con $1/4$ de los puntos que vale la pregunta. Inicialmente cada participante tiene 30 puntos.

Todos los participantes reciben diplomas y regalos, que pueden ser publicaciones matemáticas dirigidas a la juventud, juegos, franelas, útiles escolares, etc. Los que obtienen mejores puntajes pueden recibir otros premios.

Olimpiada de Mayo

El Centro Latinoamericano de Matemática e Informática (Clami) y la Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas auspician y promueven la realización de la *Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática*, también conocida como *Olimpiada Matemática de Mayo* (OM). El concurso se lleva a cabo por correspondencia y está basado en el modelo que sigue la Olimpiada Matemática Asiático-Pacífica (APMO), concurso a distancia con gran tradición.

Esta competencia se desarrolla en dos niveles:

primer nivel para jóvenes que no hayan cumplido 13 años al 31 de diciembre del año anterior al de la celebración de la Olimpiada.

segundo nivel para jóvenes que no hayan cumplido 15 años al 31 de diciembre del año anterior al de la celebración de la Olimpiada.

1.5. Las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela

En Venezuela las Olimpiadas Matemáticas se realizan desde 1976, a partir de un proyecto del profesor Saulo Rada Aranda. Hasta el año 2001 fueron organizadas por el CENAMEC, alcanzando buenos niveles de participación. Sin embargo durante ese período la olimpiada se mantuvo bastante aislada de la comunidad matemática nacional y sólo esporádicamente se participó en competencias internacionales. En el año 2000 se creó la *Asociación de Competencias Matemáticas* (ACM), una asociación civil sin fines de lucro cuyo objetivo es promover las competencias matemáticas en Venezuela. Esta asociación organiza, desde el año 2002, la *Olimpiada Juvenil de Matemáticas* (OJM), para los alumnos de Enseñanza Media. También existe una olimpiada para alumnos de de tercer a sexto grado de primaria llamada *Olimpiada Recreativa de Matemáticas* (ORM).

La ACM, con el apoyo de la *Asociación Matemática Venezolana* (AMV) y el aval de la *Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, comenzó a desarrollar desde su fundación un amplio programa de selección y entrenamiento de estudiantes que ha traído al país un total de 118 premios internacionales en las distintas competencias en las cuales ha participado. Entre las más importantes cabe destacar las dos medallas de plata obtenidas por Adolfo Rodríguez en las IMO 42ª y 43ª, la Copa Puerto Rico en la XVI OIM (Uruguay, 2001) y la Copa El Salvador en dos ocasiones (VI OMCC, Nicaragua, 2004 y XII OMCC, Puerto Rico, 2010).

La ACM tiene también un programa editorial que incluye la edición anual del *Calendario Matemático* así como la de un libro que reúne todos los problemas de la OJM y los de las competencias internacionales en que participa Venezuela, con sus soluciones.

El ciclo olímpico en Venezuela se inicia con la Prueba Canguro, en la cual en el año 2013 participaron 156.000 estudiantes (entre primaria y enseñanza media). Los estudiantes con mejores resultados relativos en cada Estado clasifican para la Prueba Regional. Esta prueba se premia con medallas de oro, plata y bronce. Los estudiantes que obtienen medallas de oro clasifican para la Prueba Final, en la cual además de medallas de oro, plata y bronce se otorgan Menciones Honoríficas y Premios Especiales.

1.6. El entrenamiento para las Olimpiadas

Como saben bien los deportistas, para participar con posibilidades de éxito en cualquier competencia es fundamental un buen entrenamiento. Naturalmente que cuanto más exigente sea la competencia tanto más riguroso deberá ser el entrenamiento. A continuación haremos unos breves comentarios sobre los entrenamientos necesarios para los diversos niveles de olimpiadas que se realizan en Venezuela.

Canguro

Para los niños de primaria que van a participar en la Prueba Canguro, el entrenamiento debería ser mínimo. Es importante que los niños conozcan la *forma* de la prueba cue van a realizar: el número de preguntas, el tiempo de que disponen, la hoja de respuestas y cómo deben llenarla. También es conveniente entregarles una prueba de su mismo grado correspondiente a algún año previo, para que el que lo desee practique un poco con los problemas. Estas pruebas pueden hallarse en el sitio web de la ORM: `www.olimpiadarecreativa.com`.

Con los alumnos más interesados se puede hacer un simulacro de prueba, en las mismas condiciones de la real, pero teniendo cuidado de que esto no genere ansiedad. En particular se debe aclarar que los resultados no se toman en cuenta para la evaluación del curso formal. El profesor debe verificar que los alumnos llenen correctamente la planilla, proporcionando todos los datos solicitados. Una vez realizada, se analizará la prueba, identificando los problemas donde se presentaron mayores dificultades y tratando de superar esos escollos entre todos, con la ayuda del profesor.

En nuestra opinión, para este nivel no es necesario ni conveniente otro tipo de entrenamiento. En particular no se debe tratar de que los estudiantes memoricen resultados o que se fatiguen resolviendo muchos ejercicios. Recordemos que el objetivo del Canguro es popularizar la matemática y que todos se diviertan resolviendo problemas.

Para los estudiantes de enseñanza media, las pruebas de años anteriores se encuentran en la sección *Entrenamiento* del sitio web de la ACM:

`www.acm.ciens.ucv.ve`

Las pruebas de los años 2009, 2010 y 2011 se hallan publicadas, con soluciones, en [10], [5] y [4], respectivamente.

Pruebas Regional y Final

A diferencia de la Prueba Canguro, éstas dos son pruebas de desarrollo en las cuales deben darse soluciones completas a cada problema. Aquí el entrenamiento comienza a ser importante, entre otras cosas porque muchos estudiantes no están acostumbrados a *redactar* la solución a un problema.

Los estudiantes clasificados para participar en la Prueba Regional deberían tratar de resolver las pruebas regionales de años anteriores, primero individualmente y luego en grupo, con la ayuda de un profesor. Es importante que se acostumbren a escribir las soluciones. Es muy bueno realizar simulacros de prueba, en condiciones de competencia. De esta manera los estudiantes pueden aprender a administrar su tiempo.

Para la Final Nacional lo ideal sería que en cada Estado se realice un entrenamiento con los clasificados. Esto se hace actualmente en Caracas y en algunos Estados como Carabobo, Lara, Sucre y Zulia.

Las pruebas regionales y finales de los últimos años pueden hallarse, para primaria, en en el sitio web de la ORM (`www.olimpiadarecreativa.com`) y para enseñanza media en la sección *Entrenamiento* del sitio web de la ACM (`www.acm.ciens.ucv.ve`). Las pruebas con soluciones de los años 2009, 2010 y 2011 se hallan publicadas en [10], [5] y [4], respectivamente.

Pruebas Internacionales

Para estas pruebas la ACM organiza entrenamientos nacionales, tanto presenciales como por Internet, dirigidos a los alumnos que obtienen mejores resultados en la Olimpiada Juvenil. A estos estudiantes se les aplican también varias pruebas de selección para conformar los equipos que nos representarán en las olimpiadas Centroamericana (OMCC), Iberoamericana (OIM) e Internacional (IMO).

Para estas competencias los estudiantes deben estar familiarizados con varios temas que o bien no se encuentran en nuestros programas de enseñanza media o se encuentran pero no se tratan por falta de tiempo. Algunos de ellos son:

Aritmética Divisibilidad, números primos, congruencias, teoremas de Fermat y Euler, ecuaciones diofánticas.

Álgebra Polinomios y ecuaciones polinómicas, fórmulas de Vieta, polinomios simétricos, desigualdades (reordenamiento, medias, Cauchy-Schwarz, Schur, Muirhead, etc.), ecuaciones funcionales.

Geometría Puntos, rectas y circunferencias notables en el triángulo, cuadriláteros cíclicos, teorema de Tolomeo, cuadriláteros inscribibles, potencia de un punto respecto a una circunferencia, eje radical, centro radical, teorema de la bisectriz, teoremas de Ceva y Menelao, transformaciones geométricas (traslación, reflexión, rotación, homotecia, inversión), desigualdades geométricas, máximos y mínimos en geometría.

Combinatoria Variaciones, permutaciones y combinaciones (con y sin repetición), enumeración de varios tipos de funciones, binomio de Newton y coeficientes binomiales, principio de inclusiones y exclusiones, relaciones de recurrencia, juegos de estrategia.

Material sobre estos temas puede encontrarse en [6, 8, 9] y en las monografías que se encuentran en el sitio web de la ACM:

`www.acm.ciens.ucv.ve/material.php`

Además los estudiantes deben familiarizarse con varias estrategias y principios heurísticos para la resolución de problemas, tales como: examinar casos particulares y buscar patrones, explotar la paridad, explotar la simetría, trabajar hacia atrás, trabajar por contradicción, hacer diagramas, colorear, buscar invariantes, buscar extremos, etc.

Capítulo 2

Principios de la Combinatoria

En este capítulo se establecen los principios básicos en que se basa la *combinatoria* y se ilustra su aplicación en varios problemas.

2.1. Número de elementos de un conjunto

Recordemos que una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas, en otras palabras, si para todo par de elementos $x, y \in A$ con $x \neq y$ se cumple $f(x) \neq f(y)$. La función $f : A \to B$ es *sobre* si para cualquier $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Finalmente, una función es *biyectiva* si es inyectiva y sobre. A una función biyectiva se le llama también *biyección*.

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los *números naturales*. Denotaremos por $[k, n]$ a la *sección* de $\mathbb{N}$ formada por todos los números naturales desde k hasta n (ambos inclusive). Es decir,

$$[k, n] = \{x \in \mathbb{N} : k \leq x \leq n\}.$$

Poe ejemplo $[1, 3] = \{1, 2, 3\}$, $[4, 5] = \{4, 5\}$ y $[3, 3] = \{3\}$.

Definición 2.1. Dado un conjunto A, si existe una biyección $f : [1, n] \to A$ entre alguna sección $[1, n]$ y A, se dice que A es *finito* y que su *número de elementos* es n. Para denotar el número de elementos de un conjunto finito A se usa la notación $|A|$. El conjunto vacío $\varnothing$ también se considera finito y su número de elementos es 0.

Por ejemplo, si $X = \{\text{Ana, Bruno, Carlos}\}$ entonces la función $f : s(3) \to X$ definida como $f(1) = \text{Ana}$, $f(2) = \text{Bruno}$, $f(3) = \text{Carlos}$, es claramente una biyección. Por lo tanto X es finito y $|X| = 3$.

Observe que al *contar* objetos pronunciando los números uno, dos, tres, cuatro,... lo que hacemos es justamente establecer una biyección entre una sección de los números naturales y los objetos contados.

Es claro que entre $[1, n]$ y $[1, m]$ no puede haber una biyección a menos que $n = m$, por lo tanto el número de elementos de un conjunto finito está bien definido (es único).

La *combinatoria enumerativa*, que se ocupa de enumerar y contar configuraciones finitas, se puede desarrollar a partir de unos pocos principios fundamentales que se exponen a continuación.

2.2. Principio de biyección

> Si existe una biyección entre dos conjuntos A y B y A es finito, entonces B también es finito y ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos.

La prueba de este principio es inmediata: si $f : [1, n] \to A$ y $g : A \to B$ son biyecciones, entonces la composición $g \circ f : [1, n] \to B$ es también una biyección y entonces $|A| = |B| = n$.

A pesar de lo obvio de este principio, sus aplicaciones son muy importantes, ya que permite reducir la enumeración de configuraciones desconocidas a la de otras ya conocidas, estableciendo una biyección entre ambas.

Ejemplo 2.1. En un campeonato de béisbol jugado por el sistema de eliminatorias se enfrentan n equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y pasa a la ronda siguiente. Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato.

Solución: Aparentemente una forma de resolver este problema sería contar el número de juegos en cada ronda y sumar. Pero este cálculo se complica por la posibilidad de tener un número impar de equipos en algunas rondas, y un número par en otras. El caso más simple se da cuando el número de equipos participantes es una potencia de 2, digamos $n = 2^k$. Entonces evidentemente habrá k rondas, y el número total de juegos será $2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 1$, o sea $2^k - 1 = n - 1$. Usando el principio de correspondencia podemos demostrar que, en general, el número de partidos será siempre $n - 1$. En efecto, al finalizar el campeonato tendremos un equipo campeón y $n - 1$ equipos eliminados. Cada uno de ellos fue eliminado en algún partido (y sólo en uno), y en cada partido fue eliminado un equipo. Esto significa que la correspondencia que asigna a cada partido jugado el equipo eliminado en dicho partido, es biyectiva. Por lo tanto se jugaron tantos partidos como equipos resultaron eliminados, esto es $n - 1$.

2.3. Principio de la suma

Este principio afirma que si A y B son dos conjuntos finitos disjuntos entonces el número de elementos de la unión $A \cup B$ es la suma de los números de elementos de A y B. En símbolos:

$$\boxed{\text{Si } A \cap B = \varnothing \text{ entonces } |A \cup B| = |A| + |B|.}$$

Este principio tiene varias consecuencias importantes. Por ejemplo:

Proposición 2.1. *Si B es un subconjunto del conjunto finito A, entonces $|B| \leq |A|$.*

Demostración. Como $A \setminus B$ y B son disjuntos se tiene

$$|A| = |(A \setminus B) \cup B| = |A \setminus B| + |B| \geq |B|.$$

□

Proposición 2.2. *Si A y B son dos conjuntos finitos cualesquiera, entonces*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demostración. Observemos que $A \setminus B$ y $A \cap B$ son disjuntos y su unión es A. Por el principio de la suma se tiene entonces que

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|. \tag{2.1}$$

Además $A \setminus B$ y B son disjuntos y su unión es $A \cup B$, por lo tanto

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B|. \tag{2.2}$$

Substrayendo miembro a miembro (1) de (2) resulta

$$|A \cup B| - |A| = |B| - |A \cap B|,$$

de donde $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Una forma intuitiva de entender este resultado es la siguiente: si contamos los elementos del conjunto A y luego los del B, entonces los elementos de la intersección $A \cap B$ se cuentan dos veces. Por eso $|A| + |B|$ excede a $|A \cup B|$ en una cantidad igual al número de elementos de la intersección. □

Proposición 2.3. *Si A, B y C son tres conjuntos finitos cualesquiera, entonces*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Demostración. Aplicando la proposición anterior a $A \cup B$ y C se tiene

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|,$$

pero $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ y como $(A \cup B) \cap C = A \cap C) \cup (B \cap C)$ se tiene

$$\begin{aligned} |(A \cup B) \cap C| &= |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A \cap C| + |B \cap C)| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)| \\ &= |A \cap C| + |B \cap C)| - |A \cap C \cap C|. \end{aligned}$$

Sustituyendo resulta lo que queríamos probar. □

La generalización de las dos proposiciones anteriores se conoce como *Principio de inclusiones y exclusiones* y se estudiará más adelante.

2.4. Principio del producto

> Supongamos que se deben seleccionar dos objetos en forma consecutiva, que el primero puede escogerse entre m posibles y que, para cada selección del primero, hay n posibilidades para escoger el segundo. Entonces hay $m \cdot n$ maneras de realizar el par de selecciones.

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_m$ las m posibilidades para el primer objeto. Si en la primera selección se esgogió a_i, llamemos $b_{i1})$, b_{i2},..., b_{in} a las n posibilidades de escoger el segundo objeto (observe que las posibilidades para el segundo objeto pueden depender del primer objeto elegido, pero siempre deben ser n.). Todos los pares de selecciones posibles pueden representarse en el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_{11}) & (a_1, b_{12}) & \ldots & (a_1, b_{1n}) \\ (a_2, b_{21}) & (a_2, b_{22}) & \ldots & (a_2, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_m, b_{m1}) & (a_m, b_{m2}) & \ldots & (a_m, b_{mn}) \end{array}$$

y vemos que como hay m filas y cada una de ellas contiene n pares, el número total de pares es $m \cdot n$. □

Ejemplo 2.2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar y la segunda sea diferente de la primera?

Solución: En este problema la primera cifra puede seleccionarse de 5 maneras diferentes, a saber 1, 3, 5, 7 o 9. Una vez seleccionada la primera, la segunda cifra puede ser cualquier dígito excepto el escogido en primer lugar, es decir que hay 9 maneras de seleccionar la segunda cifra. Por el principio del producto la respuesta es $5 \cdot 9 = 45$.

El principio del producto vale en realidad para cualquier número de selecciones consecutivas, es decir: si una primera selección puede realizarse de n_1 maneras, una segunda selección puede realizarse de n_2 maneras,. . . , y una k-sima selección puede realizarse de n_k maneras, entonces el conjunto de k selecciones puede realizarse de $n_1 n_2 \cdots n_k$ maneras.

Ejemplo 2.3. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?

Solución: Ahora la primera cifra puede seleccionarse de 5 maneras diferentes (1, 3, 5, 7, 9), la segunda también de 5 maneras diferentes (0, 2, 4, 6, 8), y la tercera puede ser cualquier dígito excepto los escogidos para las dos primeras cifras, lo cual deja 8 posibilidades. La respuesta es por lo tanto $5 \cdot 5 \cdot 8 = 200$.

Ejemplo 2.4. El poeta francés Raymond Queneau escribió un libro que tituló *Cien mil millardos de poemas* [12]. Cada poema es un soneto, que como se sabe consta de 14 versos. Pero el libro tiene sólo diez páginas. ¿Cómo lo logró?

Solución: Cada página contiene un soneto, pero está cortada en 14 tiras horizontales, cada una de las cuales contiene un verso. El lector puede formar un soneto escogiendo como primer verso cualquiera de los diez posibles (pasando las tiras hasta que quede visible el verso que desee). lo mismo puede hacer para el segundo, el tercero,..., hasta el último verso. En total puede formar entonces 10^{14} sonetos, es decir cien mil millardos.

Ejemplo 2.5. ¿Cuántos divisores tiene un entero positivo n que se descompone como $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, donde p_1, p_2,. . . , p_k son primos diferentes?

Solución: Los divisores de $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ son los números de la forma $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$, donde $0 \le b_i \le a_i$. Como b_1 se puede elegir de $a_1 + 1$ maneras (es decir 0, 1, 2,. . . , a_1), b_2 se puede elegir de $a_2 + 1$ maneras,. . . y b_k se puede elegir de $a_k + 1$ maneras, la respuesta es el producto $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$.

2.5. Probabilidades

Un *fenómeno aleatorio* es aquel que admite varios resultados posibles y no se puede predecir exactamente cuál de ellos ocurrirá. Un ejemplo típico consiste en lanzar una moneda al aire y ver si al caer muestra cara o sello. Para analizar matemáticamente los fenómenos aleatorios se le asigna a cada resultado posible un número que refleje su mayor o menor posibilidad de ocurrir y que nos resulte útil para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. De esto se ocupan la Probabilidad y la Estadística, dos disciplinas de gran importancia en el mundo moderno.

Un *experimento aleatorio* es un fenómeno aleatorio que se puede repetir a voluntad, en condiciones prácticamente idénticas. Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama *espacio muestral*. Por ejemplo si se lanza una moneda el espacio muestral es {cara, sello}. Si se lanza un dado y se observa el número de puntos en la cara superior, el espacio muestral es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A los subconjuntos del espacio muestral se les llama *eventos* o *sucesos*. En el ejemplo del dado, $\{1, 3, 5\}$ es un evento que se puede caracterizar en palabras diciendo «sale un número impar».

Si todos los resultados posibles de un experimento tienen la misma oportunidad de ocurrir, se dice que es *equiprobable*. Esto ocurre en el caso del dado, suponiendo que esté construido de un material homogéneo, ya que su forma simétrica no favorece a ninguna cara sobre las demás.

Si se tiene un experimento equiprobable con espacio muestral finito X, y si $A \subset X$, la definición clásica de la probabilidad $P(A)$ del evento A es:

$$P(A) = \frac{|A|}{|X|}.$$

En palabras, se dice a veces que $P(A)$ es el cociente entre el número de "casos favorables" y el número de "casos posibles". Por ejemplo si se lanza un dado, la probabilidad de obtener un número impar es $|\{1, 3, 5\}|/|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| = 3/6 = 1/2$.

2.6. Problemas propuestos

Problema 2.1. En una circunferencia se marcan 8 puntos. Pruebe que el número de triángulos que se pueden formar con vértices en esos puntos es igual al número de pentágonos que se pueden formar con vértices en esos puntos.

Problema 2.2. Sea X un conjunto finito no vacío. Pruebe que el número de subconjuntos de A con un número par de elementos es igual al número de subconjuntos de A con un número impar de elementos.

Problema 2.3. ¿Cuántos enteros del 1 al 100 no son múltiplos ni de 3 ni de 7?

Problema 2.4. (Canguro 2014, 1º y 2º) Hay 60 árboles en una fila, numerados de 1 a 60. Los que tienen números pares son apamates. Los que tienen números múltiplos de 3 son bucares o apamates. Los árboles restantes son samanes. ¿Cuántos samanes hay en la fila?

Problema 2.5. Sea X un conjunto finito y sean A y B subconjuntos de X. Pruebe que

$$|A \cap B| \geq |A| + |B| - |X|.$$

Problema 2.6. Sea X un conjunto finito y sean A B y C subconjuntos de X. Pruebe que

$$|A \cap B \cap C| \geq |A| + |B| + |C| - 2|X|.$$

Problema 2.7. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar cuatro cartas de un mazo de 52, de modo que haya una de cada palo?

Problema 2.8. ¿De cuántas maneras pueden colocarse una torre blanca y una torre negra en un tablero de ajedrez de 8×8 de modo que no se ataquen?

Problema 2.9. ¿Cuántos números de tres dígitos tienen el primer dígito impar, el segundo par y el tercero igual a la suma de los dos primeros?

Problema 2.10. En un acto deben hablar Luis, María, Pedro, Pablo y Luisa. ¿De cuántas maneras se puede confeccionar la lista de oradores? Y si se pone la condición de que se alternen oradores de distinto sexo? ¿Y si la condición es que María hable inmediatamente después que Luis? ¿Y si es que Luis hable antes que Pedro?

Problema 2.11. ¿Cuántos números naturales tienen exactamente k dígitos?

Problema 2.12. Para escribir todos los números naturales de k dígitos, ¿cuántos ceros se necesitan?

Problema 2.13. Para escribir todos los números naturales desde 1 hasta 1000000, ¿cuántos ceros se necesitan?

Problema 2.14. Los números naturales se escriben uno a continuación del otro:

$$1234567891011121314151617181920212223\ldots$$

¿Qué dígito se encuentra en la posición 2014?

Problema 2.15. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un tablero de ajedrez tres torres blancas idénticas de modo que no se ataquen?

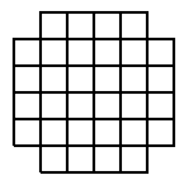
Problema 2.16. (OJM 2008, Final de 4º y 5º) El número 916238457 es un ejemplo de un número de nueve dígitos que contiene cada dígito del 1 al 9 exactamente una vez y cumple con la propiedad de que los dígitos del 1 al 5 aparecen en el orden natural creciente, mientras que los dígitos del 1 al 6 no. ¿Cuántos números existen con estas mismas características?

Problema 2.17. (OJM Regional 2011, 1º) Un lenguaje tiene alfabeto ABDEFGIJLMNOPRSTU (5 vocales pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PAS, INA, LUL y ONO son palabras, pero TRI, AAN, MIA y UGG no lo son.

(a) ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje?

(b) Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

Problema 2.18. (OJM 2009, Final, 3º)
Ana tiene seis monedas idénticas y desea poner cada una de ellas en una casilla del tablero de la figura, de tal manera que cada fila contenga exactamente una moneda y cada columna contenga exactamente una moneda. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?



Problema 2.19. (AIME 1988) Si se escoge al azar un divisor entero positivo de 10^{99}, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 10^{88}?

Problema 2.20. (OMCC 2003/5) Un tablero cuadrado de 8 cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1 cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2 cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Capítulo 3

Configuraciones típicas

En este capítulo se examinan varias configuraciones típicas que se presentan con gran frecuencia, se analiza su enumeración y se proponen problemas relacionados con ellas.

3.1. Subconjuntos

El principio del producto permite contar fácilmente el número de *subconjuntos* de un conjunto finito.

Proposición 3.1. *Un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos.*

Demostración. Para obtener un subconjunto de un conjunto A tenemos que decidir, para cada elemento $a \in A$, si lo incluimos o no en el subconjunto. Estas decisiones son elecciones entre dos posibilidades. Si $|A| = n$ tenemos que hacer esas elecciones n veces, una para cada elemento. Por el principio del producto esto nos da 2^n posibilidades. □

3.2. Funciones

El principio del producto nos permite asimismo contar el número de funciones de un conjunto finito en otro.

Proposición 3.2. *El número de funciones de un conjunto de $k$elementos en otro de n elementos es n^k.*

Demostración. Supongamos que $|A| = k$ y $|B| = n$. La imagen $f(a)$ de un elemento $a \in A$ puede ser cualquier elemento de B, es decir que se puede elegir de n maneras. Como para cada uno de los k elementos de A hay n elecciones posibles, el número total de funciones será igual al producto de k factores iguales a n, es decir n^k. □

Una variante del argumento anterior nos permite contar el número de funciones *inyectivas* de un conjunto finito en otro, es decir aquellas funciones tales que elementos diferentes tienen imágenes diferentes.

Proposición 3.3. *El número de funciones inyectivas de un conjunto de k elementos en otro de n elementos es $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.*

Demostración. Supongamos que $|A| = k$ y $|B| = n$. Si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ y queremos definir una función inyectiva de A en B, hay n maneras de elegir $f(a_1)$. Pero hecha esta elección, sólo quedan $n-1$ posibilidades para $f(a_2)$ (pues $f(a_2)$ debe ser distinto de $f(a_1)$). Continuando de este modo, hay $n-2$ maneras de elegir $f(a_3)$, ..., $n-k+1$ maneras de elegir $f(a_k)$. Por el principio del producto, el número de funciones inyectivas de A en B es entonces $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. □

3.3. Variaciones o Arreglos

Se llaman *variaciones* o *arreglos* de n objetos tomados de k en k a las sucesiones de k términos diferentes que pueden formarse con los n objetos. Por ejemplo los arreglos de las letras a, b y c tomadas de dos en dos son: ab, ac, ba, bc, ca y cb.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces los arreglos de los elementos de A tomados de k en k no son otra cosa que las funciones inyectivas de $s(k)$ en A. For lo tanto en vista de la Proposición 3.3 tenemos que:

Proposición 3.4. *El número de arreglos de n elementos tomados de k en k es $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.*

Se llaman *arreglos con repetición* de n elementos tomados de k en k a las sucesiones de k términos que pueden formarse con los n elementos, entendiendo que cada uno de ellos puede aparecer repetido. Por ejemplo los arreglos con repetición las letras a, b y c tomados de dos en dos son:

$$aa \; ab \; ac \; ba \; bb \; bc \; ca \; cb \; cc$$

Proposición 3.5. *El número de arreglos con repetición de n elementos tomados de k en k es n^k.*

Demostración. Los arreglos con repetición de n elementos a_1, a_2,..., a_n tomados de k en k no son otra cosa que las funciones de $s(k)$ en el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y por lo tanto su número es n^k por la Proposición 3.2). □

3.4. Permutaciones

Los arreglos de n objetos tomados de n en n son llamados *permutaciones* de los n objetos. En vista de (3.4) se tiene que:

Proposición 3.6. *El número de permutaciones de n objetos es $n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.*

El número $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n-1)$ se llama *factorial* de n y se denota $n!$. Por convención $0! = 1$.

3.5. Permutaciones circulares

Si cuatro niñas forman una fila, una detrás de otra, es claro que pueden ordenarse de $4! = 24$ maneras. Pero supongamos en cambio que quieren formar una ronda. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo? Podría pensarse que la respuesta es la misma que antes, pero no es así pues en una disposición en círculo no hay primero ni último. Para contar las configuraciones tomemos una cualquiera de las niñas. A su derecha se puede colocar cualquiera de las otras tres. A la derecha de la segunda se puede colocar cualquiera de las dos que quedan. Y a la derecha de la tercera ya sólo queda una posibilidad. Por lo tanto hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ configuraciones.

Otra forma de llegar a esto mismo consiste en observar que para cada permutación *abcd* de las cuatro niñas, al colocarlas en círculo se obtiene el mismo resultado que si se parte de *bcda*, *cdab* o *dabc*. Así las $4! = 24$ permutaciones de las cuatro niñas se pueden agrupar de cuatro en cuatro, en grupos que dan el mismo resultado al colocarlos en círculo. Por eso el número de rondas es $24/4 = 6$.

A las configuraciones que se obtienen colocando n objetos en círculo se les llama permutaciones circulares. El número de estas configuraciones es $(n-1)!$.

3.6. Permutaciones con repetición

Dados los elementos a_1, a_2,..., a_r y números naturales k_1, k_2,...,k_r, consideremos las sucesiones de $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ términos que se pueden formar con los a_i de modo que a_1 aparezca k_1 veces, a_2 aparezca k_2 veces,... y a_r aparezca k_r veces. A estas sucesiones se les llama *permutaciones con repetición* de los elementos dados (con multiplicidades k_1,..., k_r). Para contarlas consideremos un conjunto A de n elementos, particionado en clases disjuntas C_1, C_2,..., C_r tales que $|C_i| = k_i$. Digamos que dos permutaciones f y g de los elementos de A son equivalentes si los elementos $f(i)$ y $g(i)$ pertenecen a la misma clase en A para $i = 1, 2, \ldots, n$. Los elementos de C_i pueden permutarse entre sí de $k_i!$ maneras. Como esto ocurre para cada i desde 1 hasta r, es claro que para cada permutación de los elementos de A hay $k_1!\ k_2!\ \ldots k_r!$ permutaciones equivalentes. El número de clases de equivalencia será entonces el cociente entre el total de permutaciones de A y este número $k_1!\,k_2!\ \ldots k_r!$. Pero es claro que estas clases de equivalencia pueden ponerse en correspondencia biyectiva con las permutaciones con repetición, por lo tanto hemos establecido que:

Proposición 3.7. *El número de permutaciones con repetición de r elementos con multiplicidades $k_1, k_2, \dots, k_r$ es*

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!}$$

siendo $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$.

Ejemplo 3.1. Determinemos cuántas palabras diferentes pueden formarse permutando las letras de la palabra MATEMATICA. Tenemos diez letras, que se reparten en tres A, dos M, dos T , una E, una I y una C . Por lo tanto la respuesta se obtiene dividiendo $10!$ entre $3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!$ lo cual resulta ser 151200.

3.7. Combinaciones

Llamaremos *combinaciones* de n elementos a_1, a_2,..., a_n tomados de k en k a los subconjuntos de k elementos del conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Denotaremos el número de tales combinaciones mediante el símbolo $\binom{n}{k}$.

Ejemplo 3.2. Las combinaciones de los cuatro elementos a, b, c, d tomadas de dos en dos son : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ y $\{c, d\}$. Por lo tanto $\binom{4}{2} = 6$.

Para cada combinación de n elementos tomados de a k formemos las $k!$ permutaciones posibles con sus elementos. De este modo se obtendrán arreglos de n elementos tomados de a k. Es claro que todos los arreglos formados serán distintos, pues si provienen de combinaciones distintas difieren en algún elemento, y si provienen de la misma difieren en el orden de los elementos. Además es evidente que se obtendrán todos los arreglos de los n elementos tomados de k en k. Puesto que cada una de las $\binom{n}{k}$ combinaciones origina $k!$ arreglos, resulta que $\binom{n}{k}k! = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ y por lo tanto:

Proposición 3.8. *El número de combinaciones de n elementos tomados de k en k es:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Proposición 3.9 (Ley de Simetría)**.**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Demostración. Sea A un conjunto de n elementos. La correspondencia que a cada subconjunto X de A con k elementos le hace corresponder su complemento $A \setminus X$

(que tiene $n-k$ elementos) es una biyección. Listo. También se puede comprobar haciendo cuentas:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{m}{n}.$$

$\square$

3.8. Coeficientes binomiales

Los números $\binom{n}{k}$ son conocidos también como *coeficientes binomiales*, ya que aparecen como coeficientes al desarrollar la potencia n-sima de un binomio. Más precisamente:

Teorema 3.1 (Teorema del binomio)**.**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Demostración. $(x+y)^n$ es el producto de n factores $(x+y)$. Al desarrollar el producto se obtiene una suma de monomios de grado total n. El monomio $x^k \cdot y^{n-k}$ aparece tantas veces como formas haya de escoger k de los n paréntesis para seleccionar la x en ellos. Este número es justamente $\binom{n}{k}$. $\square$

Proposición 3.10 (Fórmula de Stifel)**.**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Demostración. Sea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Los subconjuntos de k elementos de A pueden dividirse en dos clases: la de los que no contienen al elemento n y la de los que sí lo contienen. La primera clase está formada por los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ y tiene $\binom{n-1}{k}$ elementos. En cuanto a los subconjuntos de la segunda clase, observemos que quitándoles el elemento n se convierten en subconjunto de $k-1$ elementos de $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Por lo tanto su número es $\binom{n-1}{k-1}$. Aplicando el principio de la suma queda demostrada la proposición.

Por supuesto que también se puede demostrar haciendo cuentas, como la ley de simetría. Incluso es posible una demostración algebraica: como

$$(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{m-1}{j} x^l y^{n-1-j} \right) (x+y),$$

calculando el coeficiente de $x^k y^{n-k}$ en esta última expresión resulta ser justamente $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. $\square$

Triángulo aritmético

La fórmula (3.10) permite calcular los coeficientes binomiales recursivamente: conocidos los coeficientes con índice superior $n-1$ se pueden calcular los de índice superior k mediante simples sumas. Si se disponen los coeficientes binomiales en una tabla triangular, como se indica a continuación, entonces cada uno de ellos es igual a la suma de los dos que están en la fila inmediata superior, a su izquierda y a su derecha. Esta tabla se conoce con el nombre de *triángulo aritmético* o *triángulo de Pascal* y posee muchas propiedades interesantes.

Observe que en los lados del triángulo sólo hay unos, puesto que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para todo $n \geq 0$.

En el siguiente triángulo hemos calculado todos los coeficientes binomiales con índice superior menor o igual que 5.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

3.9. Combinaciones con repetición

Las *combinaciones con repetición* de n elementos tomados de k en k son los grupos de k elementos que pueden formarse con los n dados, sin tomar en cuenta el orden y admitiendo elementos repetidos. Así por ejemplo las combinaciones con repetición de los elementos a, b y c tomados de dos en dos son las siguientes:

$$aa, ab, ac, bb, bc, cc$$

Una forma interesante de representar las combinaciones con repetición de n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es mediante una sucesión de ceros y unos, escribiendo para cada elemento a_i una hilera de tantos unos como veces aparezca dicho elemento en la combinación, y separando las hileras de unos mediante un cero. El resultado tendrá el siguiente aspecto:

$$\underbrace{1 \cdot \cdot \cdot 1}_{i_1} \; 0 \; \underbrace{1 \cdot \cdot \cdot 1}_{i_2} \; 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \; \underbrace{1 \cdot \cdot \cdot 1}_{i_n}$$

Si algún elemento no aparece en la combinación, la hilera correspondiente de unos será vacía, apareciendo por consiguiente dos o más ceros consecutivos. En cualquier caso habrá $n-1$ ceros y la longitud de la sucesión será $i_1 + i_2 + \cdots + i_n + n - 1 = k + n - 1$.

Veamos como ejemplo algunas combinaciones con repetición de cuatro objetos a, b, c, d tomados de 6 en 6 y las sucesiones de ceros y unos asociadas:

aabccd	1 1 0 1 0 1 1 0 1
bbbbdd	0 1 1 1 1 0 0 1 1
aaaaaa	1 1 1 1 1 1 0 0 0
dddddd	0 0 0 1 1 1 1 1 1

Es claro que la correspondencia establecida es biyectiva, y por lo tanto hay tantas combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k como sucesiones de $n+k-1$ términos, de los cuales k son unos y $k-1$ son ceros. El número de tales sucesiones es $\binom{n+k-1}{k}$, pues una vez elegidas las k posiciones donde se van a poner los unos, los $n-1$ puestos restantes deben llenarse con ceros. Queda probada entonces la proposición siguiente:

Proposición 3.11. *El número de las combinaciones con repetición de* n *elementos tomados de* k *en* k *es* $\binom{n+k-1}{k}$.

3.10. Particiones

Una *partición* de un conjunto X es una colección $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X, disjuntos dos a dos y tales que su unión sea X. A los miembros A_i de una partición se les llama *bloques*.

Ejemplo 3.3. $\{\{1,5\},\{2,3,6,7\},\{4\}\}$ es una partición de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Al número total de particiones que admite un conjunto de n elementos se le llama *número de Bell* de orden n. Lo denotaremos B_n. Aceptaremos por convención que $B_0 = 1$.

Al número de particiones de un conjunto de n elementos en exactamente k bloques se le llama *número de Stirling* (de segunda clase) con índices n y k. Lo denotaremos mediante el símbolo $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Es claro que si $n > 0$ entonces $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$. También es obvio que si $n < k$ entonces $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$. Por convención $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

No existen fórmulas cerradas para los números de Bell o los de Stirling, pero se pueden calcular mediante recurrencias.

Proposición 3.12. *Para todo* $n > 0$ *se cumple:*

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \ \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1, \ \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

Demostración: Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto con $n > 0$ elementos entonces la única partición de X con una sola clase es obviamente $\{X\}$. A su vez, la única partición de X con n clases es $\{\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}$ y así quedan probadas las dos primeras igualdades. En cuanto a la tercera hagamos corresponder a cada subconjunto A de X , no vacío y distinto del propio X, la partición $\{A, X \setminus A\}$. De este modo se obtienen todas las particiones de X en dos clases, pero cada una de ellas aparece dos veces puesto que A y $X\backslash A$ determinan la misma partición. Como X tiene 2^n subconjuntos, descontando $\emptyset$ y X y dividiendo entre dos resulta $(2^n-2)/2 = 2^{n-1}-1$. Por último, para probar la cuarta igualdad basta observar que cualquier partición de X en $n-1$ clases debe constar de una clase de dos elementos y $n-2$ clases de un elemento cada una. Pero una partición de este tipo queda determinada una vez que sabemos cual es la clase con dos elementos, para lo cual hay precisamente $\binom{n}{2}$ posibilidades. □

Proposición 3.13. *Para todo $n > 0$ y $k > 0$ se cumple:*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

Demostración: Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Las particiones de X en k clases pueden clasificarse en dos categorías: las que contienen la clase $\{x_n\}$ y las que no la contienen. Las primeras son $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$, puesto que si $\{x_n\}$ es una clase debe haber $k-1$ clases adicionales, cuya unión será $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. En las particiones de la segunda categoría el elemento x_n debe pertenecer a alguna de las k clases, que contendrá también algún otro elemento. Quitando x_n resultará una partición de $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ con k clases, de las cuales hay $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$. Sin embargo aplicando este procedimiento cada partición de $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ en k clases se obtiene k veces, pues x_n podría estar en cualquiera de las k clases. De este modo resulta que el número de particiones en la segunda categoría es $k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$. □

La relación que acabamos de demostrar, análoga a la fórmula de Stifel para los coeficientes binomiales, permite calcular los números de Stirling de segunda clase recursivamente y construir una tabla semejante al triángulo de Pascal.

Proposición 3.14. *Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son enteros no negativos tales que $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n$. Entonces el número de particiones de un conjunto de n elementos con λ_i clases de i elementos para $i = 1, \ldots, n$ es:*

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!}$$

Demostración: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el conjunto de n elementos es $[1, n]$. Escribamos las $n!$ permutaciones de los números del 1 al n en forma de sucesión y a cada una de ellas hagámosle corresponder una partición de $[1, n]$ de la siguiente manera: con los primeros λ_1 elementos formamos λ_1 clases de un elemento cada una; con los siguientes λ_2 pares de elementos formamos λ_2 clases de dos elementos cada una, y así sucesivamente. Es claro que de este modo se obtienen todas las particiones de $[1, n]$ con λ_i clases de i elementos para cada $i = 1, \ldots, k$, pero cada una de ellas aparece repetida $(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!$

veces. En efecto, para cada $k = 1, \ldots, n$ hay λ_k clases de k elementos, y los elementos de cada una de estas clases pueden permutarse entre sí de $k!$ maneras. Esto da cuenta del factor $(k!)^{\lambda_k}$. Por otra parte las λ_k clases de k elementos pueden permutarse entre sí de $\lambda_k!$ maneras. $\square$

3.11. Problemas propuestos

Problema 3.1. ¿Cuántos subconjuntos de $[1, n]$ tienen un número impar de elementos?

Problema 3.2. (Olimpiada Balcánica 1997) Sea S un conjunto con n elementos y sean A_1, A_2,..., A_k subconjuntos de S tales que, dados dos elementos cualesquiera de S, existe algún A_i que contiene a uno de ellos pero no al otro. Pruebe que $n \leq 2^k$.

Problema 3.3. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un número de tres cifras al azar las tres cifras sean diferentes?

Problema 3.4. (OJM Regional 2009, 4º y 5º) Considere todos los números posibles de 8 cifras diferentes no nulas (como, por ejemplo, 73451962).

(a) ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 5?

(b) ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 9?

Problema 3.5. ¿Cuántos triángulos se pueden formar que tengan como vértices los vértices de un decágono regular?

Problema 3.6. De un mazo de 52 naipes se extraen diez al azar. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar ningún as? ¿Y la de sacar al menos un as?

Problema 3.7. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? (Nota: una diagonal es un segmento que une dos vértices diferentes y no consecutivos del polígono.)

Problema 3.8. (Canguro 2010, 3º)
Un código de barras del tipo que se muestra a la derecha se compone de barras negras y blancas alternadas, comenzando y terminando con barras negras. Cada barra tiene ancho 1 ó 2, y el ancho total del código es 12. ¿Cuántos códigos diferentes son posibles, si siempre se leen de izquierda a derecha?

Problema 3.9. Pruebe que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Problema 3.10. Pruebe que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Problema 3.11. Pruebe que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$.

Problema 3.12. Para un valor dado de n, ¿cuál es el valor de k que hace máximo el valor de $\binom{n}{k}$?

Problema 3.13. (AIME 1983) Veinticinco caballeros están sentados alrededor de la mesa redonda del rey Arturo. Tres de ellos son escogidos al azar (de manera equiprobable) para ir a enfrentar a un dragón. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de los tres escogidos sean vecinos en la mesa?

Problema 3.14. (AIME 1990) Cinco equipos juegan un torneo de beisbol. Cada equipo juega exactamente una vez contra cada uno de los demás. Si cada equipo tiene probabilidad $1/2$ de ganar cada juego en que interviene, ¿cuál es la probabilidad de que al final del torneo cada equipo haya ganado al menos un juego y perdido al menos un juego?

Problema 3.15. (Canguro 2011, 3^o) Marcos juega un juego de computador en una cuadrícula de 4×4. Cada celda es roja o azul, pero el color sólo se ve si se hace clic en ella. Se sabe que sólo hay dos celdas azules, y que tienen un lado común. ¿Cuál es el menor número de clics que Marcos tiene que hacer para estar seguro de ver las dos celdas azules en la pantalla?

Problema 3.16. (OJM 2011, 1^o y 2^o) Se forma una larga lista de dígitos escribiendo los enteros del 1 al 2011 uno a continuación del otro:

$$12345678910111213\ldots200920102011.$$

¿Cuántas veces aparece la secuencia 12 en esa lista?

Problema 3.17. (OMCC 2011/1) En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

Problema 3.18. (OJM 2013, Regional, 1^o y 2^o) Un número es *capicúa* si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo 7, 33 y 252 son capicúas. ¿Cuántos capicúas hay desde 1 hasta 2013?

Problema 3.19. (OJM 2013, Regional, 1^o y 2^o) ¿Cuántos enteros positivos de 3 dígitos no son divisores de 2013?

Problema 3.20. (OJM 2013, Final, 1^o y 2^o) Determine la cantidad de números enteros positivos menores que 1000, que cumplen las dos condiciones siguientes:
a) El número es múltiplo de 3.
b) La suma de sus dígitos es divisible entre 7.

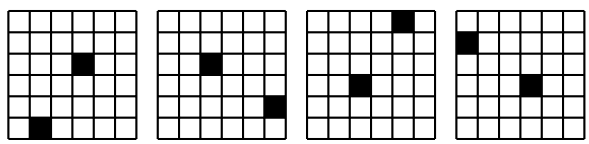
Problema 3.21. (OJM 2013 Final, 4^o y 5^o) Una pulga se halla en el suelo, al pie de una escalera de 30 escalones. La pulga sólo puede dar saltos de 3 escalones hacia arriba o de 4 escalones hacia abajo. ¿De cuántas maneras puede subir hasta el escalón 22 en el menor número posible de saltos?

Problema 3.22. (OJM Final 2011, 1º) Se forma una larga lista de dígitos escribiendo los enteros del 1 al 2011 uno a continuación del otro:

$$12345678910111213\ldots 200920102011.$$

¿Cuántas veces aparece la secuencia 12 en esa lista?

Problema 3.23. (OJM Final 2009, 4º y 5º) Juana tiene un tablero blanco de 6×6 y desea pintarle dos casillas de negro. Dos coloraciones que difieran en una rotación se consideran equivalentes, por ejemplo, las cuatro coloraciones que se ilustran en la figura son todas equivalentes:



¿De cuántas maneras *no equivalentes* puede Juana pintar su tablero?

Problema 3.24. Halle el número de monomios $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ en n variables x_1, x_2,..., x_n, con coeficiente unidad y grado total $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k$.

Problema 3.25. Halle el número de funciones crecientes (o decrecientes) de $[1, k]$ en $[1, n]$.
Nota: $f : [1, k] \to [1, n]$ es *creciente* si $f(i) \leq f(j)$ cada vez que $i < j$.

Problema 3.26. Pruebe que el número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ con k elementos y sin enteros consecutivos es $\binom{n-k+1}{k}$.

Problema 3.27. (IMO, 1987/1) Se dice que una permutación $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tiene a i $(1 \leq i \leq n)$ como *punto fijo* si $a_i = i$. Sea $p(n, k)$ el número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tienen exactamente k puntos fijos. Muestre que

$$\sum_{k=0}^{n} kp(n, k) = n!$$

Capítulo 4

Principio de las casillas

En este capítulo se examina un principio de extraordinaria sencillez pero que tiene innumerables aplicaciones, muchas de ellas sorprendentes, en problemas de olimpiadas.

Una primera versión de este principio es la siguiente:

Si $n + 1$ objetos se acomodan en n casillas, entonces en alguna de las casillas hay más de un objeto.

Este resultado se conoce como *Principio de las casillas*, Principio del palomar o Principio de Dirichlet. Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) fue el primero en utilizarlo en teoría de números en 1834.
Su validez es evidente, pero si desea uno convencerse, basta pensar qué pasaría si en cada casilla hubiese a lo más un objeto: entonces tendríamos que en las casillas habría a lo sumo n objetos, lo que es una contradicción si consideramos que se han repartido los $n + 1$ objetos.

De una manera más formal pero equivalente, este principio dice que una función de un conjunto de $n+1$ elementos en otro de n elementos no puede ser inyectiva.

Este principio garantiza que en ciertas circunstancias *existe* una configuración con propiedades determinadas. En general, no da indicaciones de cómo hallar la configuración en cuestión.

Reconocer cómo y cuándo deberá usarse el principio requiere de cierta práctica que intentaremos desarrollar a través de varios ejemplos y problemas. Detectar cuáles serán los objetos y cuáles las casillas es la principal dificultad.

4.1. Ejemplos

Ejemplo 4.1. En un grupo de tres personas hay dos del mismo sexo.

Ejemplo 4.2. En un grupo de 13 personas hay dos que nacieron el mismo mes.

En estos dos ejemplos los objetos son las personas. En el primer ejemplo las casillas son los dos sexos, y en el segundo los doce meses del año.

Ejemplo 4.3. Si se realizan doce tiradas con dos dados entonces en al menos dos de tales tiradas se obtiene la misma suma de puntos.

Las posibles sumas de puntos son 2, 3,..., 12. Cada uno de estos números corresponderá a una casilla. Los objetos son los doce números de las tiradas. Ahora es claro que habrá al menos dos tiradas con la misma puntuación.

Ejemplo 4.4. De entre cinco puntos del plano con coordenadas enteras hay dos cuyo punto medio también tiene coordenadas enteras.

Solución: Primero observemos que dos puntos de coordenadas enteras (a, b) y (c, d) cumplen que su punto medio $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$ tiene coordenadas enteras, si a y c tienen la misma paridad (esto es, si son ambos pares o ambos impares), y b y d también tienen la misma paridad.

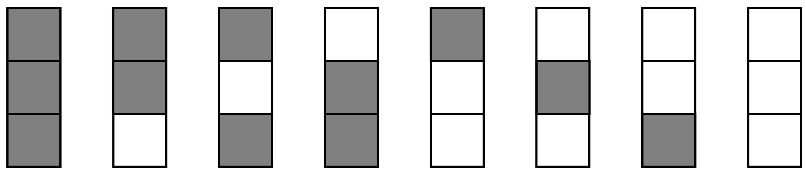
Dividamos a los puntos de coordenadas enteras de acuerdo a la paridad de sus coordenadas. Esto generará cuatro clases que representaremos así: (P, P), (P, I), (I, P), (I, I), y que son las clases de puntos de coordenadas enteras cuyas coordenadas son las dos pares, la primera par y la segunda impar, la primera impar y la segunda par, o las dos coordenadas impares, respectivamente. Estas clases serán las casillas. Desde luego todo punto de coordenadas enteras pertenece a una de las casillas. Por el *Principio de las casillas* hay dos puntos de los cinco en la misma casilla, por lo que dos de los puntos tienen la primera coordenada de la misma paridad y tiene la segunda coordenada de la misma paridad, por tanto su punto medio tendrá coordenadas enteras.

Ejemplo 4.5. (Erdös) En cualquier conjunto de $n + 1$ enteros positivos, todos ellos menores o iguales a $2n$, hay dos elementos tales que uno de ellos divide al otro.

Solución: Podemos escribir los $n + 1$ enteros en la forma $a_1 = 2^{m_1}b_1$, $a_2 = 2^{m_2}b_2$,..., $a_i = 2^{m_i}b_i$,... con $b_i \geq 1$ un número impar y $m_i \geq 0$. Como entre 1 y $2n$ solamente hay n números impares, y $\{b_1, b_2, \dots, b_{n+1}\}$ es un conjunto de $n+1$ números impares menores que $2n$, por el principio de las casillas hay dos de ellos iguales, digamos que $b_i = b_j$. Ahora si $m_i \leq m_j$ es claro que $a_i = 2^{m_i}b_i$ divide a $a_j = 2^{m_j}b_i$, y si $m_i > m_j$ tenemos que a_j divide a a_i.

Ejemplo 4.6. Cada cuadrito de un tablero de 3×7 se colorea con alguno de dos colores (digamos blanco y negro). Muestre que en cualquier coloración siempre hay un rectángulo del tablero que tiene los cuatro cuadritos de las esquinas del mismo color.

Solución: Cada columna queda coloreada de alguna de las siguientes ocho maneras:



Si hay dos columnas pintadas de la misma manera, podemos detectar en ellas los cuatro cuadritos coloreados del mismo color, esto es lo que buscaremos. Supongamos primero que una de las columnas es del tipo 1. Si alguna de las columnas restantes es coloreada de alguno de los tipos 1, 2, 3 ó 4, terminamos. Por lo que podemos suponer que las seis columnas restantes están coloreadas de los tipos 5, 6, 7 u 8. Por el principio de las casillas, dos de las seis columnas se colorean igual y entonces también terminamos. Si alguna de las columnas es coloreada del tipo 8, un argumento análogo nos lleva también a concluir el ejemplo.

Finalmente supongamos que no hay ninguna columna del tipo 1 o del tipo 8, esto es, que las siete columnas están pintadas sólo de seis tipos diferentes. Otra vez, por el principio de las casillas, hay dos columnas que se colorean de igual forma, y también terminamos en este caso.

La siguiente es una útil extensión del Principio de las casillas:

> Si $nk + 1$ objetos se acomodan en n casillas, en alguna casilla quedan más de k objetos.

4.2. Problemas propuestos

Problema 4.1. Dados 6 enteros diferentes del conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$, muestre que hay dos de ellos cuya suma es un número par.

Problema 4.2. (a) ¿Pueden las casillas de un tablero de 3×3 llenarse con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, de manera que la suma de los números en cada renglón, en cada columna y en cada diagonal sean diferentes?

(b) ¿Pueden llenarse las casillas de un tablero de 3×3 con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$ de manera que la suma de los números en cada renglón y en cada columna sean diferentes?

Problema 4.3. En el espacio de dan 9 puntos de coordenadas enteras de los cuales no hay tres colineales. Muestre que hay un punto de coordenadas enteras sobre el segmento determinado por algún par de ellos.

Problema 4.4. (a) (OM 1990/5) En el plano se dan 19 puntos de coordenadas enteras de manera que no hay tres de ellos colineales. Muestre que hay tres de ellos con la propiedad de que el centroide del triángulo que forman, también tiene coordenadas enteras.

(b) Muestre que si se dan 13 puntos de coordenadas enteras siempre hay tres cuyo centroide tiene coordenadas enteras.

(c) Muestre que con 9 puntos se puede concluir también que hay tres cuyo centroide tiene coordenadas enteras.

Problema 4.5. Sean a, b, c y d enteros. Muestre que

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

es divisible entre 12.

Problema 4.6. Dados tres o más enteros muestre que hay dos de ellos i, j tales que 10 divide a $ij(i+j)(i-j)$.

Problema 4.7. Dados ocho números enteros diferentes entre 1 y 15, muestre que hay tres pares de ellos que tienen la misma diferencia (positiva).

Problema 4.8. Considere 20 enteros $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} < 70$, y forme las diferencias $a_j - a_i$ para $1 \leq i < j \leq 20$. Muestre que al menos 4 de esas diferencias son iguales.

Problema 4.9. Muestre que no existe un conjunto de siete enteros positivos diferentes y menores o iguales a 24, tal que las sumas de los elementos de sus subconjuntos sean todas diferentes.

Problema 4.10. Todo conjunto de diez enteros entre 1 y 99, ambos inclusive, tiene dos subconjuntos disjuntos diferentes cuyas sumas de elementos son iguales.

Problema 4.11. En todo conjunto de enteros $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ siempre se puede encontrar un subconjunto cuya suma de elementos es divisible entre n.

Problema 4.12. Muestre que todo número entero tiene un múltiplo cuya representación en base 10 sólo tiene los dígitos 0 y 1.

Problema 4.13. (OM 1993/3) Dentro de un pentágono de área 1993 se encuentran 995 puntos. Considere estos puntos junto con los vértices del pentágono. Muestre que de todos los triángulos que se pueden formar con 3 de los 1000 puntos como vértices hay al menos uno de área menor o igual a 1.

Problema 4.14. (IMO, 1985/4) Se tienen 1985 enteros positivos tales que ninguno tiene un divisor primo mayor que 23. Muestre que hay 4 de ellos cuyo producto es la cuarta potencia de un entero.

Problema 4.15. Seis puntos son tales que las distancias entre ellos son todas diferentes. Considere todos los triángulos que tengan vértices dentro de esos seis puntos. Muestre que el lado más grande de uno de los triángulos es al mismo tiempo el lado más corto de otro de los triángulos.

Problema 4.16. (OIM, 1998/4) En una reunión hay representantes de n países, $n \geq 2$, sentados en una mesa redonda. Se sabe que si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha son de países diferentes. Encuentre el mayor número de representantes que puede haber.

Problema 4.17. (OM, 2003/3) Se tienen n niños y n niñas en una fiesta. A cada niño le gustan a de las niñas y a cada niña le gustan b de los niños. Encuentre todas las parejas (a, b) tales que forzosamente haya un niño y una niña que se gustan mutuamente.

Capítulo 5

Relaciones de recurrencia

En este capítulo se examina una técnica muy importante en combinatoria.

5.1. Números de Fibonacci

El siguiente problema fue planteado por Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci, , en el *Liber Abaci*, obra escrita a comienzos del siglo XIII y que compendia el conocimiento aritmético y algebraico de la época.

Ejemplo 5.1. En un patio cerrado se coloca una pareja de conejos para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y se supone que cada mes a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva.

Fibonacci resuelve el problema calculando el número de parejas mes a mes, y expone sus resultados en forma de tabla. Además de las condiciones expresas en el planteo del problema, supongamos que ningún conejo muere y que la pareja inicial acaba de nacer. Llamemos F_n al número de parejas de conejos existentes al comienzo del mes n. Entonces es claro que $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$. En el tercer mes la pareja inicial alcanza su madurez sexual y por lo tanto engendra una nueva pareja, así tenemos $F_3 = 2$. Es claro también que $F_4 = 3$. En el quinto mes, la pareja nacida en el tercer mes está también en condiciones de procrear, por lo cual nacerán dos nuevas parejas, y tendremos $F_5 = 5$. Así podríamos continuar analizando el número de nacimientos mes a mes. Observemos sin embargo que existe una manera muy sencilla de calcular el número de parejas en un mes determinado si se conoce el número de parejas existentes en los dos meses precedentes. En efecto, F_n será igual a F_{n-1} (debido a la suposición de que no hay decesos) más el número de los nuevos nacimientos, que serán F_{n-2} parejas, ya que ésas son las que en el mes n tendrán dos meses o más de edad y podrán procrear. Es decir que para todo $n \geq 2$ se cumplirá la igualdad

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Aplicando esta relación es fácil computar sucesivamente los términos de la sucesión $\{F_n\}$: $F_3 = F_1+F_2 = 1+1 = 2$, $F_4 = F_2+F_3 = 1+2 = 3$, $F_5 = F_3+F_4 = 2+3 = 5$, $F_6 = F_4 + F_5 = 3 + 5 = 8$, $F_7 = F_5 + F_6 = 5 + 8 = 13$, etc.

Los números F_n son llamados *números de Fibonacci* y tienen muchas propiedades matemáticas y aplicaciones interesantes. En la maturaleza aparecen, por ejemplo, en la disposición de las hojas en los tallos de las plantas, de los folículos en flores como la del girasol, de las escamas de la piña, etc.

A una relación como la $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, en la cual el término general de una sucesión se expresa como función de los anteriores, se le llama *relación de recurrencia* o simplemente *recurrencia*. Su importancia en Combinatoria se debe a que la mayoría de los problemas de conteo dependen de uno o más parámetros enteros, por lo cual la solución general consiste en una sucesión con esos parámetros como índices, y muchas veces resulta más fácil encontrar una recurrencia entre los términos de esa sucesión que una fórmula explícita para calcularlos. Además el conocimiento de la relación de recurrencia permite no solamente calcular cuántos términos se deseen de la sucesión, sino que muchas veces permite también deducir propiedades de la misma.

Es importante observar que una recurrencia, por sí sola, no determina de manera única una sucesión. Por ejemplo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, con las *condiciones iniciales* $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, determina la sucesión de Fibonacci, ya que $F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$, $F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$, y en general cada término queda determinado por los dos anteriores.

Pero si ponemos como condiciones iniciales $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, la misma recurrencia $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ determina otra sucesión, a saber la 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18,..., conocida como sucesión de Lucas.

Los números de Fibonacci aparecen en numerosos problemas combinatorios. Supongamos por ejemplo que se desea subir una escalera de n escalones, y que sólo se pueden dar pasos sencillos (subiendo un escalón) o dobles (subiendo dos escalones). ¿De cuántas maneras puede subirse la escalera? Llamemos E_n a la respuesta. Entonces obviamente $E_1 = 1$. Una escalera de dos escalones puede subirse con un solo paso doble o con dos pasos sencillos, luego $E_2 = 2$. Es fácil ver que la sucesión $\{E_n\}$ satisface la misma relación de recurrencia que los números de Fibonacci. En efecto, las maneras de subir una escalera de n escalones (con $n > 2$) son de dos tipos: (1) pisando el escalón $n - 1$, y (2) sin pisar el escalón $n-1$. Del tipo (1) hay obviamente E_{n-1} maneras. En las del tipo (2) debe llegarse al escalón $n - 2$ y luego dar un paso doble. Luego hay E_{n-2} maneras de tipo (2). Por el principio de la suma, se tiene entonces $E_n = E_{n-1} + E_{n-2}$. Esta sucesión no es idéntica a la de Fibonacci, ya que $E_2 = 2$ mientras que $F_2 = 1$. Sin embargo entre ambas hay una relación muy estrecha, a saber: $E_n = F_{n+1}$. Es decir que la sucesión E_n es la de Fibonacci trasladada un lugar.

Utilizaremos esta interpretación combinatoria para demostrar el siguiente resultado, del cual pueden deducirse interesantes propiedades aritméticas de los números de Fibonacci.

Proposición 5.1.

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$$

Demostración. F_{n+m} es el número de maneras de subir una escalera de $n+m-1$ escalones con pasos sencillos o dobles. Pero una tal escalera se puede subir o bien pisando el escalón número n o bien sin pisarlo. Hay E_n modos de llegar hasta el escalón n y E_{m-1} modos de subir los $m-1$ escalones restantes. Entonces, por el principio del producto, los modos de subir pisando el escalón n son $E_nE_{m-1} = F_{n+1}F_m$. Para subir la escalera sin pisar el escalón n hay que llegar hasta el escalón $n-1$ (lo cual puede hacerse de E_{n-1} modos), dar un paso doble para situarse en el escalón $n+1$ y luego subir los $m-2$ escalones restantes (lo cual puede hacerse de E_{m-2} modos). Entonces, por el principio del producto, el número de maneras de subir sin pisar el escalón n es $E_{n-1}E_{m-2} = F_nF_{m-1}$. Por el principio de la suma el número total de maneras de subir la escalera es entonces $F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$. □

5.2. Solución de algunas recurrencias

En algunos casos es posible encontrar una fórmula explícita para el término general de una sucesión dada por una relación de recurrencia.

Ejemplo 5.2. Hallar el término general de la sucesión x_n dada por $x_0 = a$, $x_n = rx_{n-1}$, donde a y r son constantes.

Solución: $x_0 = a$, $x_1 = rx_0 = ar$, $x_2 = rx_1 = r(ar) = ar^2$, $x_3 = rx_2 = r(ar^2) = ar^3$, y es evidente que $x_n = ar^n$ (una prueba formal puede hacerse por inducción).

Ejemplo 5.3. Hallar el término general de la sucesión x_n dada por $x_0 = a$, $x_n = rx_{n-1} + s$, donde a, r y s son constantes.

Solución: $x_0 = a$, $x_1 = ar + s$, $x_2 = rx_1 + s = r(ar + s) + s = ar^2 + sr + s$, $x_3 = rx_2 + s = r(ar^2 + sr + s) + s = ar^3 + s(r^2 + r + 1)$, y es evidente que $x_n = ar^n + s(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$. Recordando la suma de una progresión geométrica resulta $x_n = ar^n + s(r^n - 1)/(r - 1)$ si $r \neq 1$, $x_n = a + sn$ si $r = 1$.

Ejemplo 5.4. Hallar el término general de la sucesión de Fibonacci.

Solución: Consideremos la recurrencia $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ y preguntémonos si tendrá soluciones de la forma $x_n = r^n$ para algún $r \neq 0$. Para ello debe cumplirse $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$, que dividiendo por r^{n-2} equivale a $r^2 = r + 1$. Esto es una simple ecuación de segundo grado cuyas soluciones son

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Es decir que hemos encontrado dos soluciones de la recurrencia, a saber $\{r_1^n\}$ y $\{r_2^n\}$.

Estas dos soluciones nos permiten construir una infinidad de otras soluciones. En efecto, si A y B son dos números cualesquiera, la sucesión $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$ también es solución. En efecto: si se multiplican por A ambos miembros de $r_1^n = r_1^{n-1} + r_1^{n-2}$, se multiplican por B ambos miembros de $r_2^n = r_2^{n-1} + r_2^{n-2}$ y se suman las igualdades obtenidas, resulta

$$Ar_1^n + Br_2^n = Ar_1^{n-1} + Br_2^{n-1} + Ar_1^{n-2} + Br_2^{n-2},$$

o sea $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Observemos ahora que si se especifican los valores de x_0 y x_1, hay una única sucesión $\{x_n\}$ que satisface la recurrencia $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. En efecto, x_0 y x_1 determinan el valor $x_2 = x_1 + x_0$, luego queda determinado $x_3 = x_2 + x_1$ y así sucesivamente quedan determinados todos los términos de la sucesión. Tratemos entonces de hallar valores de A y B tales que $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$ satisfaga las condiciones iniciales de los números de Fibonacci, a saber $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. Esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ Ar_1 + Br_2 &= 1. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se tiene $B = -A$, y sustituyendo en la segunda y despejando A resulta

$$A = \frac{1}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Resulta así una fórmula cerrada para los números de Fibonacci, conocida como *Fórmula de Binet*:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

La técnica empleada puede utilizarse para resolver otras recurrencias lineales.

5.3. División del plano por rectas

El siguiente es otro ejemplo interesante de relación de recurrencia.

Ejemplo 5.5. En el plano se trazan n rectas en posición genérica (es decir, tales que no haya dos de ellas paralelas ni tres concurrentes en un punto). ¿En cuántas regiones queda dividido el plano?

Para comprender un problema en el cual aparecen muchos objetos suele ser útil considerar la situación análoga con pocos objetos. En este caso, antes de trazar la primer recta evidentemente el plano es una sola región. Al trazar una recta, el plano queda dividido en dos regiones. Con una segunda recta no paralela a la prumera, el plano queda dividido en cuatro regiones. Aquí vemos la importancia de la condición, ya que dos rectas paralelas dividen al plano en sólo tres regiones. Para tres rectas el problema comienza a complicarse. Si trazamos unos cuantos diagramas veremos que, para tres rectas paralelas, aparecen cuatro regiones, mientras que para tres rectas concurrentes o para dos paralelas y una transversal aparecen seis regiones. Si las rectas están en posición genérica, como establece el enunciado, entonces el plano queda dividido en siete regiones. En efecto, dos rectas dividen el plano en cuatro regiones y la tercera recta atraviesa siempre a tres de esas regiones, pero no a la cuarta.

Si se continúa trazando rectas en una hoja de papel, los dibujos se complican demasiado: hay que evitar que las rectas se cortan fuera de la hoja para poder contar correctamente las regiones, pero esto hace que aparezcan regiones muy pequeñas, dentro de las cuales se va haciendo cada vez más difícil contar sin equivocarse. Además, pareciera que la respuesta depende de cómo se trazan las rectas.

¿Puede imaginarse un problema análogo pero más accesible? Bueno, en vez de disminuir el número de rectas podemos disminuir la *dimensión*, es decir considerar en cuántas regiones queda dividida una recta por cierto número de puntos. Este problema es muy fácil: n puntos dividen a la recta en $n+1$ regiones (a saber $n-1$ segmentos y 2 semirrectas). ¿Podremos aprovechar este esultado para el problema en el plano? Veamos: si ya hemos trazado $n-1$ rectas, entonces, al trazar la n-sima, ésta cortará a las anteriores en $n-1$ puntos diferentes (por la hipótesis de genericidad). Por lo tanto la n-sima recta quedará dividida en n partes por esos puntos de intersección. Pero es claro que cada una de esas partes estará contenida por completo en una región de las determinadas por las primeras $n-1$ rectas, región que quedará dividida en dos por la n-sima recta. Por lo tanto hemos descubierto que al trazar la n-sima recta *el número de regiones aumenta en n unidades*. Si llamamos R_n al número de regiones en que queda dividido el plano por n rectas en posición genérica, hemos establecido entonces la siguiente recurrencia:

$$R_n = R_{n-1} + n.$$

La condición inicial es $R_0 = 1$, de donde se obtienen los valores ya obtenidos gráficamente: $R_1 = R_0 + 1 = 2$, $R_2 = R_1 + 2 = 4$ y $R_3 = R_2 + 3 = 7$. Además podemos calcular $R_4 = R_3 + 4 = 11$, $R_5 = R_4 + 5 = 16$, $R_6 = R_5 + 6 = 22$, etc.

¿Se podrá obtener una expresión cerrada para R_n? Sí, basta sumar miembro a miembro las igualdades:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + 1, \\ R_2 &= R_1 + 2, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ R_n &= R_{n-1} + n \end{aligned}$$

Luego de las cancelaciones y tomando en cuenta que $R_0 = 1$, se obtiene

$$R_n = R_0 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

5.4. Problemas propuestos

Problema 5.1. (OJM 2009, Regional, 1º y 2º) Simón escribe una lista de números. El primero es 25, y luego cada número es la suma de los cuadrados de los dígitos del anterior. Por ejemplo, el segundo en la lista es $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$, y el tercero es $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$. ¿Qué número aparece en la posición 2009?

Problema 5.2. (Canguro 2013) Una sucesión comienza 1, -1, y a partir del tercero, cada término es el producto de los dos que lo preceden. ¿Cuál es la suma de los primeros 2013 términos?

Problema 5.3. (Canguro 2010) De una sucesión x_n se sabe que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ y $x_n = x_{n-3} + x_{n-2} - x_{n-1}$ para $n > 3$. ¿Qué número ocupa el lugar 2010 en esta sucesión?

Problema 5.4. (OJM 2009, Final, 4º y 5º) Una sucesión de números reales a_1, a_2, a_3,... satisface la relación $(n + 2)a_{n+1} = na_n$ para todo entero positivo n. Si $a_1 = 1005$, ¿cuál es el valor de a_{2009}?

Problema 5.5. Pruebe que $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

Problema 5.6. Pruebe que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Problema 5.7. Pruebe que si $n|m$ entonces $F_n|F_m$.

Problema 5.8. Pruebe que números de Fibonacci consecutivos son coprimos.

Problema 5.9. Pruebe que si d es el máximo común divisor de n y m entonces el máximo común divisor de F_n y F_m es F_d.

Problema 5.10. Pruebe que el número de maneras en que un rectángulo de dimensiones $2 \times n$ se puede dividir en n rectángulos de dimensiones 2×1 es F_{n+1}.

Problema 5.11. Pruebe que el número de subconjuntos de $[1, n]$ que no contienen enteros consecutivos es F_{n+2}.

Problema 5.12. Halle el término general de la sucesión de Lucas $\{L_n\}$, definida por la relación $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ y las condiciones iniciales $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.

Problema 5.13. Pruebe que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Problema 5.14. Pruebe que el número de subconjuntos de $[1, n]$ que no contienen enteros consecutivos ni a 1 y n simultáneamente es L_n.

Problema 5.15. De las regiones en que queda dividido el plano por n rectas en posición genérica, ¿cuántas son acotadas?

Problema 5.16. ¿En cuántas regiones queda dividido el plano por n circunferencias secantes dos a dos y tales que no haya tres concurrentes en un punto?

Problema 5.17. ¿En cuántas regiones dividen el espacio n planos en posición genérica (es decir, tales que no haya dos paralelos ni tres que contengan una misma recta)? ¿Cuántas de esas regiones son acotadas?

Problema 5.18. ¿De cuántas maneras un rectángulo de $3 \times n$ se puede dividir en rectángulos de 2×1 ?

Capítulo 6

Principio de inclusiones y exclusiones

ESTE capítulo se dedica a un principio que generaliza la igualdad $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ al caso de una unión de n conjuntos A_1, A_2,..., A_n, y afirma lo siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}}$$

Esto se puede probar calculando el número de veces que está contado cada elemento de la unión en el miembro derecho de la igualdad. En efecto, si x pertenece a exactamente r de los n conjuntos dados, con $1 \le r \le n$, entonces x está contado r veces en $\sum_i |A_i|$, pero luego es descontado $\binom{r}{2}$ veces en $-\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$, luego contado $\binom{r}{3}$ veces en $\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ y así sucesivamente. El número de veces neto que es contado en el miembro derecho es

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \cdots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r}$$

pero este número es 1 ya que

$$\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} = (1-1)^r = 0.$$

Como cada x perteneciente al menos a un A_i (es decir cada $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$) es contado en el miembro derecho exactamente una vez, el principio de inclusiones y exclusiones queda demostrado.

6.1. Función de Euler

Para cada entero positivo n se define $\varphi(n)$ como el número de enteros positivos entre 1 y n que son primos relativos con n, esto es

$$\varphi(n) = |\{m : 1 \leq m \leq n \text{ y } \operatorname{mcd}(m, n) = 1\}|.$$

Por ejemplo para un número primo p, $\varphi(p) = p - 1$ ya que todo entero positivo menor que p no es divisible entre p. Para un número de la forma p^r con p primo y r entero positivo se tiene $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$, ya que hay exactamente p^{r-1} números menores o iguales a p^r que tienen al menos a p como factor común de hechos tales números son los elementos de $\{\ p \cdot a\ ;\ 1 \leq a \leq p^{r-1}\}$. Para saber en general el valor de $\varphi(n)$, ayuda el principio de inclusiones y exclusiones. Si $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ es la descomposición de n en factores primos, tendremos que m no es primo relativo con n si es divisible entre alguno de los primos p_i, por lo que si $A_i = \{m : 1 \leq m \leq n;\ p_i \mid m\}$, se tendrá que,

$$\begin{aligned} n - \varphi(n) &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s| \\ &= \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{s+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_s|. \end{aligned}$$

Necesitamos ahora encontrar $|A_i|$, $|A_i \cap A_j|$, etc. Pero los elementos en A_i son de la forma $p_i \cdot a$ con $a \geq 1$ y tales que $p_i \cdot a \leq n$, luego hay $\frac{n}{p_i}$. En $A_i \cap A_j$ hay $\frac{n}{p_i p_j}$ y así sucesivamente hasta $A_1 \cap \cdots \cap A_s$ que tiene $\frac{n}{p_1 \cdots p_s}$ elementos. Por lo que,

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \sum \frac{n}{p_i} + \sum \frac{n}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^s \frac{n}{p_1 \cdots p_s} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right). \end{aligned}$$

6.2. Desarreglos

Supongamos que se escriben n cartas dirigidas a n personas diferentes y que aparte se preparan n sobres con los nombres y direcciones de los destinatarios. Si cada carta se coloca en un sobre tomado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de las cartas vaya al sobre que le corresponde?

Para responder esta pregunta numeremos las cartas de 1 a n y numeremos el sobre correspondiente a cada carta con el mismo número de la carta. Poner cada carta en un sobre diferente equivale a establecer una biyección f del conjunto

$\{1,2,\ldots,n\}$ en sí mismo, es decir una permutación de los números de 1 a n. De estas permutaciones, aquellas tales que $f(i)\neq i$ para todo $i=1,2,\ldots,n$ se llaman *desarreglos* y su número se denotará D_n. Como en total hay $n!$ permutaciones de n elementos, la respuesta al problema de los sobres será $D_n/n!$. A continuación veamos cómo calcular D_n.

Para cada $i=1,2,\ldots,n$ llamemos A_i al conjunto de las permutaciones f de $\{1,2,\ldots,n\}$ tales que $f(i)=i$, es decir el conjunto de las permutaciones que dejan fijo al número i. Es claro que $|A_i|=(n-1)!$, puesto que A_i se puede identificar con las permutaciones de los $n-1$ números de 1 a n que son diferentes de i. Si $1\leq i<j\leq n$ la intersección $A_i\cap A_j$ consta de las permutaciones que dejan fijos tanto a i como a j, las cuales son $(n-2)!$. Análogamente si $1\leq i<j<k\leq n$ entonces $|A_i\cap A_j\cap A_k|=(n-3)!$, y así sucesivamente. Ahora bien, $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ son las permutaciones que dejan algún punto fijo, es decir las que no son desarreglos. Por lo tanto el número de desarreglos es

$$D_n=n!-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|.$$

Pero $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ se puede calcular usando el principio de inclusiones y exclusiones:

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| &= \sum_i|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots\\ &= \binom{n}{1}(n-1)!-\binom{n}{2}(n-2)!+\binom{n}{3}(n-3)!-\cdots\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

La probabilidad de que una permutación de los números de 1 a n escogida al azar sea un desarreglo es entonces

$$\frac{D_n}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!},$$

número que converge rápidamente a $1/e\approx 0{,}367879$ cuando n tiende a infinito.

6.3. Problemas propuestos

Problema 6.1. En una fiesta hay 6 chicos y 6 chicas.

(a) ¿De cuántas maneras se pueden formar 6 parejas de un chico y una chica para el primer baile?

(b) ¿De cuántas maneras se pueden formar parejas para bailar la segunda pieza, si todos deben cambiar de pareja?

Problema 6.2. (a) Los números de desarreglos $\{D_n\}$ satisfacen la relación de recurrencia

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

para $n \geq 3$. Dé una prueba combinatoria de esto.

(b) Usando la recurrencia dé otra prueba de la fórmula para D_n.

Problema 6.3. Encuentre el número de placas que se pueden formar con los números 1, 1, 2, 2, 3, 3,..., n, n, de manera que no estén dos números iguales juntos.

Problema 6.4. ¿De cuántas maneras se pueden sentar n parejas en una mesa redonda con $2n$ sillas de manera que ninguna persona quede sentada al lado de su pareja?

Problema 6.5. Muestre que para enteros positivos a, b, c se cumple:

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]} = \frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

Aquí $[a, b, \ldots]$ y $(a, b, \ldots)$ son el mínimo común múltiplo y máximo común divisor de los números $a, b, \ldots$, respectivamente.

Problema 6.6. En un grupo de 16 matemáticos, cada uno de ellos es amigo de al menos 11 de los otros. Muestre que hay un grupo de 4 matemáticos donde cada par de ellos son amigos.

Problema 6.7. Calcule el número de funciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en otro de m elementos.

Problema 6.8. (Fórmula de la criba de Jordan)

Dados n conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$ y un entero k, $0 \leq k \leq n$, pruebe que el número de elementos que pertenecen a exactamente k conjuntos es:

$$\sum_{\substack{F \subset N(n) \\ |F| \geq k}} (-1)^{|F|-k} \binom{|F|}{k} \left| \bigcap_{i \in F} A_i \right|.$$

(Este resultado generaliza la fórmula de Sylvester, la cual se obtiene como caso particular para $k = 0$.)

Problema 6.9. Dentro de un cuadrado de área 6 se colocan 3 triángulos de áreas 2, 3 y 4, respectivamente. Muestra que dos de los triangulos se traslapan en una región de área mayor o igual a 1.

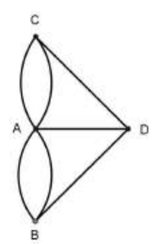
Problema 6.10. (IMO, 1989/6) Sea n un entero positivo. Diremos que una permutación $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ de $(1, 2, \ldots, 2n)$ tiene la propiedad P sí y solo si existe un número i en $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ tal que $|x_i - x_{i+1}| = n$. Muestre que hay más permutaciones con la propiedad P que permutaciones sin la propiedad P.

Problema 6.11. (IMO, 1991/3) Sea $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$. Encuentre el menor número natural n tal que para cualquier subconjunto de S con n elementos, el subconjunto contiene 5 números que son primos relativos por pares.

Capítulo 7

Grafos

La ciudad de Königsberg, capital de Prusia oriental en el siglo XVIII, era atravesada por el río Pregel, sobre el cual había siete puentes. Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible salir de su casa, dar un paseo y regresar al punto de partida, habiendo pasado una y sólo una vez por cada puente. En 1735 Euler demostró que tal paseo era imposible, dando origen a una rama de la matemática que se conoce como *Teoría de Grafos*. Para entender la prueba DE eULER representemos cada una de las 4 regiones en que estaba dividida la ciudad por un punto, uniendo dos puntos por una línea si y sólo las regiones correspondientes estaban unidas por un puente.



Así se obtiene un diagrama como el que se ve a la izquierda, que hoy en día llamamos *grafo*. En general, un grafo no es más que un diagrama compuesto por puntos (también llamados *vértices*) y líneas (también llamadas *aristas*) que unen pares de puntos. Si una línea a conecta dos puntos P y Q, se dice que P y Q son los *extremos* de a. También se dice que P y Q son *adyacentes*. La naturaleza de estos puntos y líneas es inmaterial. El número de líneas de las cuales un punto P es extremo se denomina *grado* de P y se denota $g(P)$. En el grafo de la izquierda se tiene $g(A) = 5$, $g(B) = g(C) = g(D) = 3$.

Supongamos ahora que se pueda recorrer un grafo pasando una y sola una vez por cada arista y finalizando en el mismo vértice P del cual se partió (en ese caso se dice que el grafo es *euleriano*). Entonces cada vez que se llegue a un vértice interior del recorrido por una arista, se debe salir de él por otra. Por lo tanto cada vértice interior debe tener grado par. Y lo mismo vale para P, pues la última arista del recorrido forma pareja con la primera, y cualquier otra llegada a P debe tener su salida correspondiente. Como en el grafo de los puentes de Königsberg hay cuatro vértices de grado impar, el problema que se planteaban los habitantes de la ciudad no tiene solución.

En general, se dice que un grafo es *conexo* si partiendo de un vértice se puede llegar a cualquier otro pasando de arista en arista. Puede probarse que un grafo es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

7.1. Relación de Euler

Si V y A son los conjuntos de vértices y aristas de un grafo, espectivamente, entonces se cumple la igualdad siguiente, conocida como *relación de Euler*:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|.$$

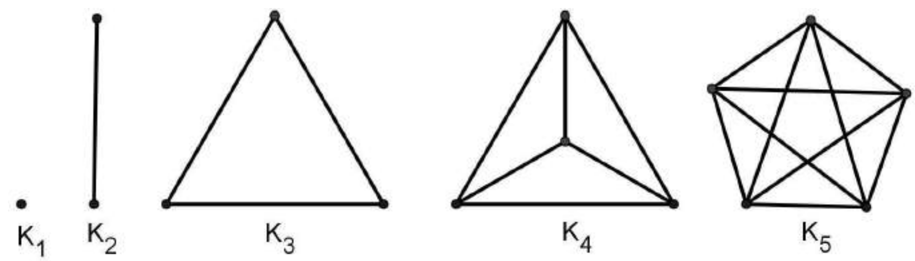
En palabras: la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas. La prueba es sencilla: cada arista contribuye en una unidad al grado de cada uno de sus extremos. Veamos una aplicación:

Ejemplo 7.1. En una reunión algunas personas se saludan dándose la mano. El número de personas que dieron un número impar de apretones de mano, ¿es par o impar?

Solución: Es siempre par. Si tomamos a las personas como vértices de un grafo, y los saludos como aristas, el número de saludos que dió cada persona es su grado. Como la suma de los grados es par, la cantidad de sumandos impares debe ser par.

7.2. Números de Ramsey

Si un grafo tiene n vértices y cada par de vértices está unido por una arista, se dice que el grafo es *completo* y se denota K_n. La figura siguiente muestra los grafos K_1, K_2, K_3 (triángulo), K_4 (que es el grafo formado por los vértices y aristas de un tetraedro) y K_5, que no se puede representar en el plano sin que las aristas se corten.



Ejemplo 7.2. Cada arista de K_6 se pinta o bien de rojo o bien de azul. Muestre que, no importa como se haga, siempre hay un triángulo rojo o un triángulo azul.

Solución: Sea P un vértice. De las 5 aristas que unen P a los vértices restantes, deben haber al menos 3 azules o 3 rojas. Supongamos que haya 3 rojas que unen P a Q, R y S. Si las tres aristas QR, RS y SQ son azules, tenemos un triángulo azul. Si en cambio alguna de ellas, digamos QR, es roja, entonces PQR es un triángulo rojo.

Este problema a veces se plantea así: Muestre que en una reunión donde hay 6 personas, siempre hay tres mutuamente conocidas o tres mutuamente desconocidas entre sí.

El resultado que se acaba de ver admite varias generalizaciones. La más sencilla es el siguiente teorema debido a Ramsey, :

Teorema 7.1. *Dado un par de enteros positivos* (r, s)*, existe un menor entero positivo* $n = R(r, s)$ *tal que, si las aristas de* K_n *se colorean con rojo y azul, se puede extraer un* K_r *completamente rojo o un* K_s *completamente azul.*

La demostración y otras generalizaciones pueden verse en [9]. El ejemplo visto más arriba muestra que $R(3, 3) \leq 6$, y de hecho se cumple la igualdad $R(3, 3) = 6$.

Calcular los *números de Ramsey* $R(r, s)$ es un problema de investigación. Por ejemplo, se sabe que $R(4, 4) = 18$ y $R(4, 5) = 25$, pero ya $R(5, 5)$ no se conoce: sólo se sabe que está entre 43 y 49.

7.3. Problemas propuestos

Problema 7.1. Muestre que en un grafo con dos o más vértices siempre hay dos vértices con el mismo grado.

Problema 7.2. Muestre, mediante una coloración de K_5, que $R(3, 3) > 5$ y por lo tanto $R(3, 3) = 6$.

Problema 7.3. Muestre que $R(3, 4) = 9$.

Problema 7.4. El matemático Paul Halmos y su esposa asistieron a una fiesta, junto con otras cuatro parejas. Algunas de las personas presentes se dieron la mano. Por supuesto que nadie se dio la mano a sí mismo, ni tampoco a su esposa o esposo, y ningún par de personas se dio la mano más de una vez. Halmos le preguntó a cada una de las otras nueve personas (incluida su esposa) cuántos apretones de mano habían dado, y le sorprendió que todas las respuestas fueron diferentes. ¿A cuántas personas le dio la mano la esposa de Halmos?

Problema 7.5. En una olimpíada hay 2012 participantes. Cada uno de ellos conoce a otros 1610. Demostrar que podemos encontrar 6 participantes tales que cada uno de ellos conoce a los otros 5.

Problema 7.6. En un grupo de n personas, cada dos de ellas son amigos o enemigos y cada una tiene exactamente 10 enemigos. Además se cumple la ley: «Los enemigos de mis amigos son mis enemigos». ¿Qué valores puede tener n?

Problema 7.7. Dado un grafo G con $2n + 1$ vértices y con la propiedad de que para cualquier conjunto de n vértices hay otro vértice adyacente a todos ellos, pruebe que hay un vértice de G adyacente a todos los demás.

Problema 7.8. (a) Sea G un grafo con 9 vértices, de manera que de cada vértice salen 5 aristas. Muestre que G contiene al menos un triángulo.

(b) Más generalmente, muestre que si un grafo G tiene $n \geq 4$ vértices y cada uno esta conectado a otros k, con $\frac{n}{2} < k < n$, entonces G contiene al menos un triángulo.

Problema 7.9. En una escuela hay n niñas y m niños, y se sabe que cada niño conoce al menos a una niña. Probar que hay un conjunto de al menos $(m + n)/2$ niños y niñas tal que cada niño conoce a un número impar de niñas en el conjunto.

Problema 7.10. (OMCC 2006/5) El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

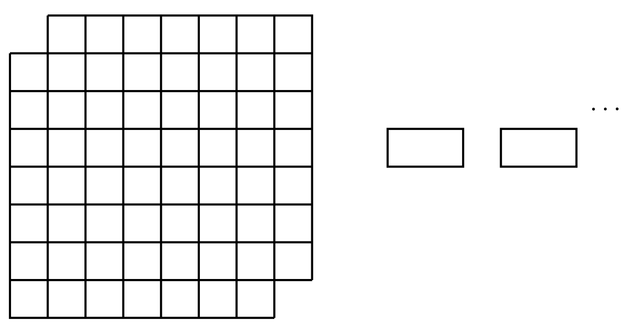
Capítulo 8

Coloraciones

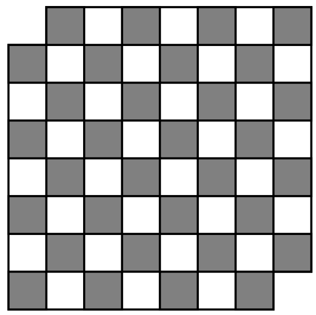
La estrategia de *colorear* consiste en asociar un color a cada elemento de un conjunto. Matemáticamente esto equivale a efectuar una partición del conjunto en subconjuntos disjuntos, cada uno de los cuales agrupa a los elementos pintados de un mismo color. Sin embargo hablar de colores resulta más sugestivo y propicia una visualización del problema que muchas veces contribuye a solucionarlo.

8.1. Ejemplos

Ejemplo 8.1. A un tablero cuadrado de 8×8 se le retiran dos casillas situadas en esquinas opuestas. ¿Puede cubrirse lo que queda con 31 dominós (fichas rectangulares de 2×1)?



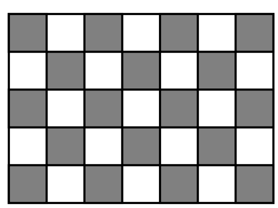
Solución: La respuesta es **no**. Para probarlo imaginemos el tablero coloreado como un tablero de ajedrez, esto es, con las casillas coloreadas de blanco y negro en forma alternada. En el tablero completo (con 64 cuadritos), quedan coloreadas 32 casillas de color blanco y las restantes 32 de color negro. Al retirar dos esquinas opuestas, se están retirando dos casillas de un mismo color (en nuestro caso blancas), quedando 32 de color negro y 30 de color blanco.



Por otro lado, un dominó cubre dos cuadritos: uno de cada color. Las 31 fichas de dominó solamente pueden cubrir 31 cuadritos de color negro, por lo que siempre faltará por cubrir un cuadrito de dicho color. Esto muestra que es imposible cubrir el tablero como se pide.

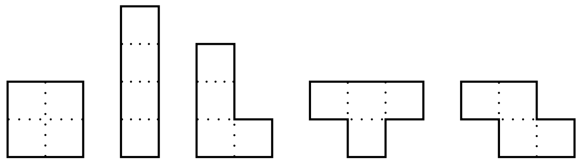
Ejemplo 8.2. En un salón de clase los alumnos están sentados formando un arreglo rectangular de 5×7. La maestra, que quiere hacer una dinámica, les pide a todos los alumnos que intercambien de lugar con un compañero vecino, moviéndose un lugar ya sea a la izquierda, a la derecha, adelante o atrás del que ocupan. Pepito, que sabe matemáticas, le dice a la maestra que esto es imposible ¿Tiene razón Pepito?

Solución: Sí, tiene razón. Una manera de convencerse es pensar en los lugares como las casillas de un tablero de 5×7. Al colorear las casillas de blanco y negro como un tablero de ajedrez, observamos que cuando un alumno se mueva ocupará un lugar de color diferente al que ocupaba.



Pero el tablero así coloreado tiene 18 casillas de color negro y 17 de color blanco, por lo que los alumnos que están en casillas de color negro no podrán pasar todos a casillas blancas.

Un *tetraminó* es una figura plana compuesta por cuatro cuadrados unitarios. Hay cinco tipos de tetraminós (a menos de congruencias) que se muestran en la figura siguiente. De izquierda a derecha se llaman cuadrado, I, L, T y Z.



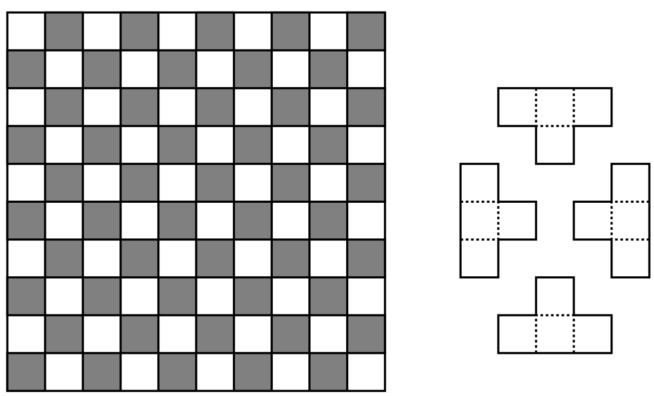
Observe que los tetraminós L y Z tienen versiones reflejadas, que no son directamente congruentes con ellos.

Ejemplo 8.3. (8ª OM/6) (a) ¿Se puede llenar un tablero de 10×10 cuadritos con 25 tetraminós I?

(b) ¿Se puede llenar un tablero de 10×10 cuadritos con 25 tetraminós T?

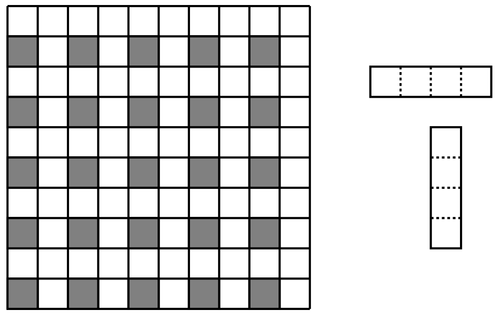
(c) ¿Se puede llenar un tablero de 10×10 cuadritos con 25 tetraminós L?

Solución: La respuesta en cada caso es *no*. Veamos primero el caso (b). Coloreamos el tablero con dos colores como tablero de damas.

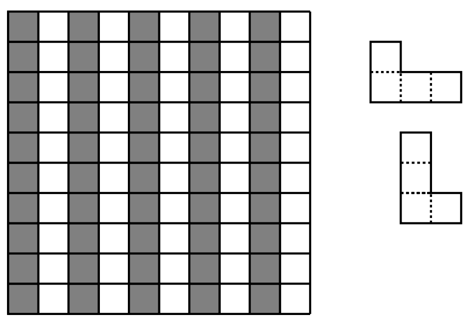


Ahora notemos que cada tetraminó T cubre 1 ó 3 cuadritos negros. El número de cuadritos negros cubiertos por 25 piezas será entonces la suma de 25 números impares, que es impar. Pero el tablero tiene 50 cuadritos negros, luego es imposible cubrirlo como se pregunta.

Ahora veamos el caso (a) La clave está en colorear el tablero de la siguiente forma:



Cada ficha cubre 0 ó 2 cuadritos negros, luego las fichas (las 25) cubren un número par de cuadritos negros, pero necesitamos cubrir 25. Luego no es posible cubrir el tablero como se pide.
Ahora veamos el caso (c). Considere la siguiente coloración del tablero; cada tetrominó L, no inporta cómo se coloque, cubre 1 ó 3 cuadritos negros. Ahora proceda como en el caso de las fichas en forma de T.



Ejemplo 8.4. En un tablero de ajedrez un caballo parte de una casilla y regresa a esa misma casilla después de varios saltos (de caballo). Muestre que el caballo realizó un número par de movimientos.

Solución: Para hacer el recorrido por todas las casillas necesita 63 saltos y en cada salto pasa de un cuadro de un color a un cuadro del otro color. Si parte de negro después de 63 movidas llega a un cuadro blanco; como los cuadros iníciales y finales son ambos negros es imposible hacer el recorrido.

Ejemplo 8.5. Un tablero de 8×8 está pintado de negro y blanco como tablero de ajedrez. Una *operación* consiste en intercambiar dos filas o dos columnas del tablero.
¿Se puede llegar, después de una sucesión de operaciones, a que el borde izquierdo del tablero sea blanco y el borde derecho sea negro?

Solución: No se puede, pues el número de cuadros negros y blancos en una columna no cambia después de hacer una operación.

8.2. Problemas propuestos

Problema 8.1. En un tablero de ajedrez un caballo parte de una casilla y regresa a esa misma casilla después de varios saltos (de caballo). Muestre que el caballo realizó un número par de movimientos.

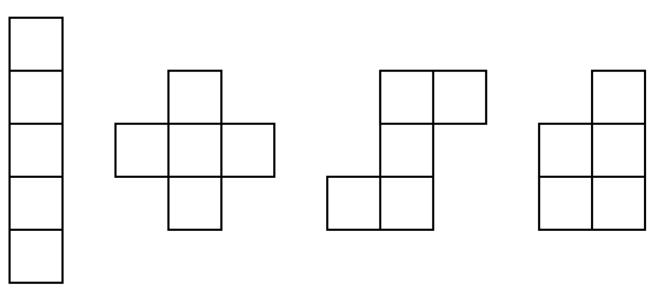
Problema 8.2. ¿En un tablero de ajedrez puede un caballo partir de la esquina inferior izquierda y llegar a la esquina superior derecha, visitando cada una de las casillas del tablero una y solamente una vez?

Problema 8.3. Un tablero de 8×8 está pintado de negro y blanco como tablero de ajedrez. Una *operación* consiste en intercambiar dos renglones o dos columnas del tablero.
¿Se puede llegar, después de una sucesión de operaciones, a que el borde izquierdo del tablero sea blanco y el borde derecho sea negro?

Problema 8.4. Un ratón se quiere comer un queso en forma de cubo de la siguiente manera: Lo parte en 27 cubitos iguales de lados paralelos al cubo original y quiere ir comiendo cada cubito iniciando por un cubito de la orilla y terminando en el cubito central. Además, cada vez que come un cubito, el siguiente cubito que se come es uno de los adyacentes (es decir, uno de los que tienen una cara común con el último comido). ¿Podrá el ratón comerse el queso de esta manera?

Problema 8.5. (a) Muestre que un rectángulo de $n \times m$ se puede llenar con cuadrados de 2×2 si y sólo si n y m son pares.
(b) Muestre que ningún rectángulo puede ser llenado con tetraminós Z.

Problema 8.6. Un *pentaminó* es una figura formada con cinco cuadritos unitarios que se pegan por un lado. Suponga que se dispone de suficientes pentaminós de las formas siguientes:



Muestre que un tablero de 8×8 al que se le han recortado sus 4 esquinas puede cubrirse con 12 pentaminós de las formas anteriores.

Problema 8.7. (10^{a} OM/3) Muestre que no es posible cubrir una cuadrícula de 6×6 con 18 rectángulos de 1×2 de tal manera que cada una de las rectas de longitud 6 que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por uno de los rectángulos. Muestre también que sí es posible cubrir la cuadrícula de 6×5 con 15 rectángulos de 1×2 de manera que cada una de las rectas de longitud 5 ó 6 que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos pequeños.

Problema 8.8. ¿Es posible cubrir una cuadrícula infinita de cuadritos de 1×1con dominós (rectángulos de 1×2), de tal manera que cada una de las rectas verticales y horizontales que siguen las líneas de la cuadrícula corte solamente a un número finito de dominós?

Problema 8.9. (a) En un tablero de 10×10 una ficha llamada *camello* salta tres lugares adyacentes en una dirección y uno en la dirección perpendicular (como el caballo del ajedrez que salta digamos 2-1, el camello salta 3-1). ¿Es posible que el *camello* pueda ir de un cuadrito a un cuadrito adyacente en varios saltos?
(b) ¿Es posible que en un tablero de $4 \times n$ un caballo de ajedrez salte pasando por todos los cuadritos y regresando al cuadrado inicial?

Problema 8.10. (21^{a} OM/5) En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos, ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa. Muestre que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

Problema 8.11. ¿Es posible cubrir una cuadrícula de 2003×2003 con rectángulos de 1×2 colocados horizontalmente y con rectángulos de 1×3 colocados verticalmente?

Capítulo 9

Juegos de estrategia

Los *juegos* a los cuales nos referimos en esta sección pueden verse como sistemas que pueden estar en cierto número de estados, también llamados *posiciones* del juego. Debe haber un estado *inicial* y uno o más estados *finales*. El estado del juego puede cambiar como consecuencia de las *jugadas* que realizan los contendientes, siguiendo las reglas específicas del juego. En los juegos *bipersonales* participan dos personas, convencionalmente llamadas A y B, o primer y segundo jugador. Una *partida* se inicia en el estado inicial, y su desarrollo consiste en que A y B realizan jugadas de manera alternada, comenzando por A. Cada jugador, en su turno, tiene a su disposición un número finito de jugadas posibles y puede elegir cualquiera de ellas. Cuando se llega a una posición final no hay jugadas disponibles, la partida finaliza y las reglas del juego determinan qué jugador es el ganador, o si hay empate. Por supuesto que hay juegos multipersonales, en los que participan varias personas, y unipersonales o *solitarios*, en los que juega una sola persona.

Una *estrategia* para uno de los jugadores, es un sistema de juego que, en cualquier situación que pueda presentarse, le indica qué jugada debe hacer. Una *estrategia ganadora* para uno de los jugadores, es un sistema de juego que le asegura la victoria, juegue lo que juegue el otro.

Un juego es *finito* si siempre se llega, en un número finito de jugadas, a una posición final, y es de *información perfecta* si ambos jugadores tienen pleno conocimiento del juego, de sus reglas y de las jugadas que cada uno ha realizado (es decir que no hay jugadas ocultas ni interviene para nada el azar).

El *Teorema de Zermelo* afirma que en un juego bipersonal finito de información perfecta sin posibilidad de empate, uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora. Este teorema no dice sin embargo cuál de los dos la tiene, y mucho menos cuál es. (Si el juego admite la posibilidad de empate, como el ajedrez, lo único que puede afirmarse es que uno de los dos jugadores tiene una estrategia *no perdedora*).

9.1. Juego de Bachet

Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638) fue un famoso matemático, poeta, lingüista y traductor francés. En 1612 publicó una interesante recopilación de problemas, acertijos, trucos matemáticos y juegos, que lo convirtió en un pionero de la matemática recreativa. El *Juego de Bachet* es un sencillo juego de estrategia que puede ser útil como recurso didáctico, ya que en él se aplican en un contexto lúdico los conceptos básicos de la división entera con cociente y resto.

El juego se inicia con un montón de 100 piedras. Ana y Bruno juegan a sacar piedras del montón según las siguientes reglas:

1. Cada jugador, en su turno, debe retirar del montón como mínimo una piedra y como máximo cinco piedras.
2. Primero juega Ana, luego Bruno, luego Ana, luego Bruno y así sucesivamente hasta que el montón quede vacío.
3. El jugador que retire la última piedra gana.

Obviamente en este juego no interviene para nada el azar, y su desenlace depende exclusivamente de la naturaleza del juego y de la habilidad de los jugadores. Luego de jugar varias partidas surge naturalmente la pregunta de cuál es la mejor manera de jugar. ¿Tendrá Ana una estrategia ganadora? ¿La tendrá Bruno?

Para responder esta pregunta es conveniente comenzar por estudiar un juego más sencillo que el original. En efecto, la dificultad de este juego se debe a que el número inicial de piedras es grande en comparación con el máximo que se puede retirar en cada jugada. Esto tiene como consecuencia que cada jugador debe jugar varias veces y el análisis de todas las jugadas posibles se complica bastante. Pero si inicialmente el montón contiene unas pocas piedras, el análisis es muy fácil. Por ejemplo si el montón contiene una sola piedra, el jugador que tenga el turno la retira y gana. Lo mismo ocurre si el montón contiene 2, 3, 4 o 5 piedras. En cambio si el montón contiene 6 piedras el jugador que deba jugar pierde. En efecto, si retira una piedra le deja 5 a su adversario, quien las retira todas y gana. Lo mismo ocurre si retira 2, 3, 4 o 5: su adversario gana retirando las piedras que queden en el montón (que serán 4, 3, 2 o 1, respectivamente). Diremos entonces que 1, 2, 3, 4 y 5 son *posiciones ganadoras* para el jugador que tenga el turno, mientras que 6 es una *posición perdedora*. Ahora bien, ¿qué ocurre si inicialmente el montón contiene 7 piedras? En este caso quien tenga el turno puede retirar una sola piedra dejándole 6, que es una posición perdedora, a su adversario. Por lo tanto 7 es una posición ganadora- También lo son 8, 9, 10 y 11, ya que retirando 2, 3, 4 o 5 piedras, respectivamente, se puede dejar al adversario en la posición perdedora de 6 piedras. Las cosas vuelven a cambiar si el montón contiene 12 piedras. En ese caso cualquier jugada que se efectúe le deja al adversario una posición ganadora. Por lo tanto 12 es una posición perdedora. Si se continúa este análisis se ve fácilmente que 13, 14, 15, 16 y 17 son posiciones ganadoras, mientras que 18 es una posición perdedora. En general, las posiciones perdedoras son 6, 12, 18 y cualquier múltiplo de 6, mientras que las demás son ganadoras.

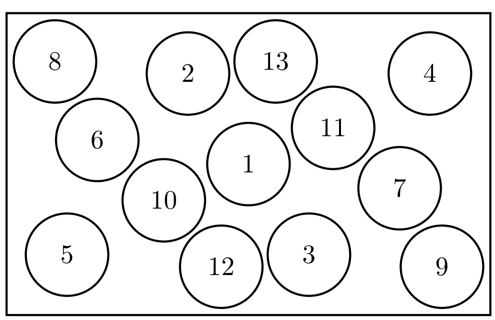
La posición inicial de 100 piedras se puede afirmar que es ganadora, ya que 100 no es múltiplo de 6. Es decir que en el juego planteado inicialmente Ana tiene una estrategia ganadora. Como 100 dividido entre 6 deja un resto de 4, en su primera jugada Ana debe retirar 4 piedras del montón. Esto le deja a Bruno 96 piedras, que es un múltiplo de 6. De aquí en adelante si Bruno retira x piedras, Ana retirará $6 - x$, de manera de volver a dejarle un múltiplo de 6.

Este juego admite numerosas variantes, algunas de las cuales han sido propuestas en concursos matemáticos. Las más sencillas consisten en cambiar el número inicial de piedras y el número máximo de piedras que se pueden retirar en cada jugada. Otra variante consiste en cambiar la regla según la cual «el que retira la última piedra gana» por «el que retira la última piedra pierde». Es fácil equivocarse y creer que para ganar en esta variante basta con jugar para perder en el juego original. En realidad las cosas son algo más complicadas. También se pueden modificar las condiciones sobre el número de piedras que se pueden retirar, el número de montones, etc.

9.2. Simetría

En algunos juegos la simetría permite muchas veces hallar estrategias ganadoras.

Ejemplo 9.1. Ana y Bernardo, de manera alternada y comenzando por Ana, juegan a poner monedas idénticas sobre una mesa rectangular (inicialmente vacía) de modo que las monedas no se superpongan unas a otras ni sobresalgan de la mesa. El primero que no pueda colocar una moneda respetando esas condiciones pierde. ¿Tiene alguno de los dos una estrategia ganadora?



Solución: La mesa tiene simetría central respecto al punto de intersección de sus diagonales. Si Ana coloca su primer moneda exactamente en ese centro, a cualquier jugada que haga Bernardo ella puede replicar con la jugada simétrica.

De este modo, Ana tiene una estrategia ganadora. La figura anterior muestra el desarrollo de un posible juego.

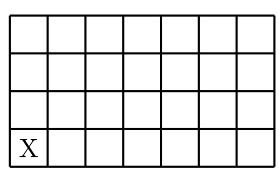
9.3. Problemas propuestos

Problema 9.1. (OJM Regional 2009, 3º) Ana y Bruno juegan del siguiente modo: Ana tiene inicialmente 7 barajitas, de las cuales debe descartar al menos una y a lo sumo la mitad, y pasarle las que queden a Bruno. Bruno hace lo mismo, es decir, descarta al menos una y no más de la mitad de las barajitas que recibió, y le pasa las que queden a Ana. Continúan jugando alternadamente de la misma manera hasta que uno de los dos reciba una sola barajita, en cuyo caso no puede continuar el juego y pierde. Pruebe que Bruno puede ganar siempre este juego, haga lo que haga Ana.

Problema 9.2. En un montón hay n piedras. Ana y Bruno sacan piedras del montón alternadamente, comenzando por Ana. Cada jugador, en su turno, debe retirar del montón como mínimo una piedra y como máximo k piedras. El jugador que retire la última piedra gana. Determine qué jugador tiene una estrategia ganadora, en función de n y k.

Problema 9.3. El mismo juego anterior, pero ahora el jugador que retire la última piedra pierde.

Problema 9.4. (OJM Final 2011, 3º) Una barra de chocolate tiene forma de cuadrícula de 4×7, con un cuadrito en una esquina marcado con X. Andrés y Berta juegan de la siguiente manera: cada uno en su turno, comenzando por Andrés, debe partir la barra en dos por una de las líneas rectas de la cuadrícula, comerse el trozo que no contiene a la X y pasarle lo que queda al otro jugador. El que no pueda partir la barra (lo que ocurrirá cuando reciba solamente un cuadrito) pierde el juego. Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, y explique cuál es.



Problema 9.5. (OJM Final 2013, 1º y 2º) Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A, a poner fichas en un tablero de 4×4. Cada jugador, en su turno, elige una casilla vacía, coloca allí una ficha y se anota un número de puntos igual al de fichas ubicadas en casillas vecinas a la que seleccionó. Cuando se llena el tablero cada jugador suma sus puntos, y A se suma tres puntos adicionales. El que obtenga más puntos gana, o empatan si quedan igualados. Muestre que uno

de los dos jugadores tiene una estrategia que le permite ganar, juegue como juegue su adversario, y descríbala.

Nota: Dos casillas son vecinas si son diferentes pero tienen al menos un vértice en común.

Problema 9.6. (OMCC 2003) Dos jugadores A y B juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Problema 9.7. (Cuba, 2004-2005) Se tienen dos pilas de cartas, una con n cartas y otra con m cartas. A y B juegan alternadamente, realizando en cada turno una de las siguientes operaciones: (i) Quitar una carta de una pila, (ii) Quitar una carta de cada pila, (iii) Mover una carta de una pila a la otra. El jugador A comienza el juego y gana el que coja la última carta. Determine si alguno de los jugadores tiene estrategia ganadora, en función de m y n, y descríbala.

Problema 9.8. (OMCC 2005) Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla: Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul. Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

Problema 9.9. (OIM 2011) En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana, de la siguiente manera: cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene multiplicándolo por 2, por 3, o sumándole 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual que 2011 gana. Muestre que uno de los dos tiene una estrategia ganadora y descríbala.

Problema 9.10. (OJM 2013) Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A, a poner fichas en un tablero de 4×4. Cada jugador, en su turno, elige una casilla vacía, coloca allí una ficha y se anota un número de puntos igual al de fichas ubicadas en casillas vecinas a la que seleccionó. Cuando se llena el tablero cada jugador suma sus puntos, y A se suma tres puntos adicionales. El que obtenga más puntos gana, o empatan si quedan igualados. Muestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia que le permite ganar, juegue como juegue su adversario, y descríbala.

Nota: Dos casillas son vecinas si son diferentes pero tienen al menos un vértice en común.

Problema 9.11. (OIM 1998/1) Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre si anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que realiza el último trazo. Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

Problema 9.12. (IMO, 1993/3) Se tiene un tablero cuadriculado infinito. Inicialmente, cada casilla de un cuadrado de $n \times n$ está ocupada por una ficha. Un movimiento consiste en saltar de manera horizontal o vertical una ficha sobre otra, a una casilla desocupada. La ficha sobre la que se salta se retira del tablero. Encuentre todos los valores de n para los que es posible acabar con una sola ficha en el tablero.

Problema 9.13. Demuestre el Teorema de Zermelo mencionado al comienzo de este capítulo.

Capítulo 10

Principio de invariancia

En Física se llama *Principio de invariancia* a cualquier principio que afirme la invariabilidad de una magnitud o una ley física bajo ciertas transformaciones. En matemática esta noción tiene también una gran importancia. Muchos problemas plantean situaciones cambiantes, por ejemplo se realizan operaciones matemáticas sobre algunos números en forma reiterada, se aplican transformaciones geométricas o de otro tipo, se reemplazan unos objetos por otros, se mueven fichas en un tablero, etc. En este tipo de problemas resulta útil preguntarse qué cosas (objetos, variables, configuraciones, etc.) no cambian, es decir, qué aspectos o características de la situación permanecen *invariantes*. Detectar esto muchas veces resuelve el problema o al menos da indicios de por donde debería buscarse la solución.

Si su problema se refiere a una situación cambiante, trate de hallar alguna característica de la misma que no cambie.

10.1. Ejemplos

Ejemplo 10.1. En cada uno de los 10 escalones de una escalera hay una rana. Cada rana puede dar un salto para llegar a cualquiera de los otros escalones, pero cuando lo hace, al mismo tiempo otra rana salta la misma cantidad de escalones pero en sentido contrario (una rana sube y la otra baja). ¿Podrán, en algún momento, quedar todas las ranas juntas en un mismo escalón?

Solución: Numeremos los escalones del 1 al 10 y asociemos a cada rana el número del escalón que ocupa. La suma inicial de estos valores es $R = 1+2+\cdots+10 = 55$. Esta suma no cambia después de cada salto de dos ranas, ya que si una rana salta m escalones la otra salta también m pero en sentido inverso por lo que la suma no se altera. Si las ranas, en algún momento, ocupan un mismo escalón, digamos el n, los números asignados a las 10 ranas serian el mismo y la suma sería $10n$. Entonces se debería tener $10n = 55$, lo cual es imposible con n entero.

Ejemplo 10.2. (Torneo de las Ciudades 1984) En la isla Camaleón hay 13 camaleones de color amarillo, 15 de color verde y 17 de color rojo. Si se encuentran dos camaleones de diferente color, cambian ambos simultáneamente al tercer color (por ejemplo si se encuentran uno amarillo y otro verde, ambos se vuelven rojos). ¿Es posible que en algún momento todos los camaleones lleguen a ser del mismo color?

Solución: Consideremos las ternas (a, v, r) que representan en cierto instante las cantidades de camaleones por color: a los que hay de color amarillo, v los de color verde y r los de color rojo. Un invariante obvio es $a+v+r = 45$, pero no es suficiente para resolver el problema. Analicemos lo que ocurre después del encuentro de dos camaleones. Las cantidades cambian a:

$(a-1, v-1, r+2)$, si se encuentran un camaleón amarillo y uno verde,
$(a-1, v+2, r-1)$, si se encuentran un camaleón amarillo y uno rojo,
$(a+2, v-1, r-1)$, si se encuentran un camaleón verde y uno rojo.

La diferencia de las cantidades a y v cambia, según el caso, a $(a-1)-(v-1) = a-v$, $(a-1)-(v+2) = a-v-3$ o $(a+2)-(v-1) = a-v+3$. Por lo tanto, $a-v$ mód 3 es un invariante. Si todos los camaleones en algún momento llegaran a ser del mismo color, la diferencia $a-v$ sería 0, 45 ó -45, es decir 0 mód 3. Pero originalmente $a-b = 13-15 = -2 \equiv 1 \pmod 3$, por lo tanto es imposible que lleguen a ser todos del mismo color.

Otra forma de verlo: inicialmente el conjunto de restos módulo 3 es $R = \{a \bmod 3, v \bmod 3, r \bmod 3\} = \{1, 0, 2\}$. En cada encuentro dos de los números disminuyen en 1 y el otro aumenta en 2. Pero módulo 3 aumentar en 2 es lo mismo que disminuir en 1, por lo tanto podemos decir que los tres números, tomados módulo 3, disminuyen en 1. Por lo tanto el conjunto R es un invariante. Los camaleones no pueden llegar a ser todos del mismo color, pues en ese caso dos de los restos serían iguales a 0.

Ejemplo 10.3. En el tablero de la figura está permitido cambiar de signo a todos los números de una misma fila, columna, diagonal o paralela a una diagonal. ¿Podrá llegarse a obtener un tablero sin elementos negativos?

-1	1	1	1
1	1	1	-1
-1	1	-1	1
1	-1	1	1

Solución: El producto de los elementos en las casillas marcadas con x es un invariante. Como inicialmente es -1, no es posible obtener un tablero sin elementos negativos.

	x	x	
x			x
x			x
	x	x	

10.2. Problemas propuestos

Problema 10.1. Sobre la circunferencia de un parque hay una hilera de árboles y en cada uno de ellos hay un loro. De vez en cuando dos loros em árboles diferentes vuelan simultáneamente hacia árboles vecinos, pero en direcciones opuestas. Decida en qué caso es posible que todos los loros, en algún momento, se encuentren sobre un mismo árbol.

Problema 10.2. Un árbol magico tiene 25 limones y 30 naranjas. El jardinero corta dos frutas cada día, pero a la noche siguiente crece una fruta nueva, una naranja (respectivamente limón) si las frutas cortadas durante el día fueron ambas limones o ambas naranjas (respectivamente diferentes). ¿Qué fruta es la última que crece en el árbol?

Problema 10.3. Juan corta una hoja de papel en 10 partes iguales, después una de las partes es cortada en 10 partes iguales más pequeñas y así sucesivamente. ¿Es posible que en algún momento tenga exactamente 3000 partes?

Problema 10.4. En un pizarrón hay varios números 1, 2 y 3 escritos, al menos uno de cada clase. Un proceso permite quitar dos números diferentes y agregar un número igual al dígito diferente a los retirados. Muestre que el proceso permite llegar a uno de los siguientes arreglos: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(2,0,0)$.

Problema 10.5. En un parlamento, cada miembro tiene a lo más 3 enemigos. Muestre que el parlamento se puede dividir en 2 comisiones, de manera que cada miembro tenga a lo más un enemigo en la comisión en que quede.

Problema 10.6. A un banquete se invitaron a $2n$ embajadores. Cada embajador tiene a los más $n-1$ enemigos. Muestre que los embajadores pueden ser sentados alrededor de una mesa redonda, de manera que cada embajador no tenga enemigos a sus lados.

Problema 10.7. Un dragón tiene 100 cabezas. Un caballero tiene una espada que puede cortar 5, 11 ó 21 cabezas de un golpe, pero en cada uno de estos casos le crecen inmediatamente al dragón 2, 17 ó 15 cabezas respectivamente, salvo cuando se cortan todas, en cuyo caso el dragón desaparece. ¿Puede el caballero hacer que el dragón desaparezca?

Problema 10.8. Si cada uno de los números a_1, a_2,..., a_n son 1 ó -1 y cumplen con

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0,$$

pruebe que n es múltiplo de 4.

Problema 10.9. Considere los puntos del plano cartesiano con ambas coordenadas naturales. A partir de un punto (a, b) está permitido moverse a $(a - b, b)$ si $a > b$ o a $(a, b - a)$ si $a < b$. Por ejemplo la siguiente es una trayectoria válida partiento de $(12, 7)$:

$$(12, 7) \to (5, 7) \to (5, 2) \to (3, 2) \to (1, 2) \to (1, 1).$$

Partiendo de $(86415, 69118)$, ¿será posible llegar hasta $(1, 1)$?

Problema 10.10. En el tablero de la figura está permitido cambiar de signo a todos los números de una misma fila, columna, diagonal o paralela a una diagonal. ¿Podrá llegarse a obtener un tablero sin elementos negativos?

-1	1	1	1
1	1	1	-1
-1	1	-1	1
1	-1	1	1

Problema 10.11. En una pizarra están escritos los números 3, 4 y 12. Las operaciónes permitidas consisten en escoger dos de los tres números, digamos a y b, y reemplazarlos por $0{,}6a - 0{,}8b$ y $0{,}8a + 0{,}6b$. ¿Es posible, aplicando estas operaciones, llegar a tener los números 4, 6 y 12?

Problema 10.12. Se tiene un tablero de ajedrez con las casillas coloreadas de la manera usual. Las operaciónes permitidas consisten en escoger una fila o columna e invertir los colores de todas sus casillas.

a) ¿Es posible llegar a obtener un tablero con todas las casillas blancas?

b) ¿Es posible llegar a obtener un tablero con exactamente una casilla negra?

Problema 10.13. En cada casilla de un tablero de ajedrez está escrito un entero positivo. Las operaciones permitidas son: (a) duplicar cada número de una fila horizontal; b) restar 1 a cada número de una columna. Aplicando repetidamente estas operaciones, ¿será posible llegar a obtener 0 en todas las casillas?

Problema 10.14. Suponga que el número 7^{2010} está escrito en una pizarra con todas sus cifras. Entonces se borra la primera cifra (a la izquierda) y se suma al número que quedó. Este proceso se repite hasta obtener un número N de diez cifras. Pruebe que N no puede tener todos sus dígitos diferentes.

Problema 10.15. (OMCS, 2000) En el plano cartesiano, considere los puntos con ambas coordenadas enteras y las rotaciones de 90 grados en sentido antihorario con centro en esos puntos. ¿Es posible, mediante una sucesión de esas rotaciones, transformar el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1) en el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1)?

Problema 10.16. En 1878 Sam Loyd propuso un rompecabezas que ha mantenido su popularidad hasta nuestros días. En una caja hay 15 fichas cuadradas, numeradas del 1 al 15, dispuestas como se ve en el siguiente diagrama.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

La casilla inferior derecha está vacía, y si los números se leen de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo entonces están ordenados en forma creciente, excepto por el 15 y el 14 que aparecen transpuestos. Un *movimiento válido* consiste en deslizar una de las fichas adyacentes a la casilla vacía hasta ocuparla. ¿Es posible, mediante una secuencia de movimientos válidos, intercambiar el 14 y el 15 dejando a los demás números en su posición inicial?

Problema 10.17. (MMO 1995) Se tienen inicialmente 4 triángulos rectángulos congruentes. En un movimiento se puede tomar cualquier triángulo y partirlo en dos por la altura desde su ángulo recto. Muestre que siempre se tiene al menos un par de triángulos congruentes.

Capítulo 11

Soluciones y sugerencias

Capítulo 2

2.1 (pág. 15) Si a cada triángulo con vértices en 3 de los 8 puntos se le hace corresponder el pentágono cuyos vértices son los 5 puntos restantes, se tiene una biyección.

2.2 (pág. 15) Como X no es vacío, existe un elemento $x \in X$. A cada subconjunto A de X con un número par de elementos hagámosle corresponder el conjunto $f(A) = A \triangle \{x\}$, es decir

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{x\} & \text{si } x \notin A \\ A \setminus \{x\} & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Claramente f es una biyección entre la familia de los subconjuntos de X con un número par de elementos y la familia de los subconjuntos de X con un número impar de elementos.

2.3 (pág. 15) Sea $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Sean T y S los subconjuntos de X formados por los múltiplos de 3 y 7, respectivamente. Entonces ¿Cuántos enteros del 1 al 100 no son múltiplos ni de 3 ni de 7?

2.4 (pág. 15) De 1 a 60 hay 30 múltiplos de 2, 20 múltiplos de 3 y 10 múltiplos de ambos 2 y 3, luego hay $30 + 20 - 10 = 40$ bucares o apamates. Los restantes $60 - 40 = 20$ son samanes.

2.5 (pág. 16) Como $A \cup B \subset X$ se tiene

$$|X| \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

de donde

$$|A \cap B| \geq |A| + |B| - |X|.$$

2.6 (pág. 16) Por el problema anterior

$$|A \cap B \cap C| = |(A \cap B) \cap C| \geq |A \cap B| + |C| - |X|,$$

pero $|A \cap B| \geq |A| + |B| - |X|$, de donde

$$|A \cap B \cap C| \geq |A| + |B| + |C| - 2|X|.$$

2.8 (pág. 16) La torre blanca puede colocarse en cualquiera de las 64 casillas del tablero, y una vez ubicada, la torre negra se puede colocar en cualquiera de las $64 - 15 = 49$ casillas que no se hallan ni en la misma fila ni en la misma columna de la torre blanca, luego la respuesta es $64 \times 49 = 3136$.

2.7 (pág. 16) La carta de corazones se puede seleccionar de 13 maneras, y lo mismo ocurre con la de diamante, la de trébol y la de picas. La respuesta es 13^4.

2.9 (pág. 16) Este problema es muy parecido al último ejemplo visto en el capítulo, pero sin embargo no se puede resolver aplicando el mismo método ya que, luego de elegidos los dos primeros dígitos, el número de posibilidades para el tercero no es fijo sino que depende de las dos primeras elecciones. En efecto, si los dos primeros dígitos son, por ejemplo, 3 y 4, entonces para el tercero hay una única posibilidad, a saber $3 + 4 = 7$. Pero si los dos primeros dígitos son 5 y 8, para el tercero no hay ninguna posibilidad (pues $5 + 8 = 13$ no es un dígito).

Una forma de resolver el problema consiste en observar que el tercer dígito sólo puede ser 1, 3, 5, 7 ó 9. Si es 1, los dos primeros sólo pueden ser 1 y 0. Si es 3, los dos primeros pueden ser 3 y 0 ó 1 y 2. Si es 5, los dos primeros pueden ser 5 y 0, 3 y 2 ó 5 y 4. Si es 7, los dos primeros pueden ser 7 y 0, 5 y 2, 3 y 4 ó 1 y 6. Si es 9, los dos primeros pueden ser 9 y 0, 7 y 2, 5 y 4, 3 y 6 ó 1 y 8. Por el principio de la suma, la respuesta es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Este problema puede resolverse también construyendo la siguiente tabla de sumas de un primer dígito impar y un segundo dígito par (en la cual sólo hemos indicado las sumas menores que 10):

	0	2	4	6	8
1	1	3	5	7	9
3	3	5	7	9	
5	5	7	9		
7	7	9			
9	9				

Es obvio que la respuesta es 15.

2.10 (pág. 16) El primer orador puede ser cualquiera de las 5 personas, el segundo cualquiera de las 4 personas restantes, el tercero cualquiera de las 3 que quedan, el cuarto cualquiera de las 2 restantes y el quinto la única persona que queda. Por el principio del producto la respuesta es $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Si se alternen oradores de distinto sexo entonces Luis, Pedro y Pablo deben hablar en los lugares 1, 3 y 4, mientras que María y Luisa deben hablar en los lugares 2 y 4. Los varones se pueden ordenar de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneras y las mujeres de 2 maneras, para un total de $6 \times 2 = 12$ maneras.

Si María debe hablar inmediatamente después que Luis, podemos considerar el par Luis-María como una unidad, y la respuesta es $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneras.

Finalmente, por simetría hay tantas ordenaciones en las que Luis habla antes que Pedro como ordenaciones en las que Luis habla después que Pedro. luego la respuesta es la mitad del total de ordenaciones, es decir $120/2 = 60$.

2.11 (pág. 16) Para el primer dígito hay 9 posibilidades (del 1 al 9) y 10 posibilidades para cada uno de los $k-1$ dígitos restantes. Por el principio del producto, la respuesta es $9 \cdot 10^{k-1}$.

2.12 (pág. 16) En la primera posición (a la izquierda) no hay ningún 0. En cada una de las $k-1$ posiciones restantes hay tantos ceros como unos, doses o cualquier otrp dígito, es decir $(9 \cdot 10^{k-1})/10 = 9 \cdot 10^{k-2}$. Por lo tanto se necesitan $9(k-1) \cdot 10^{k-2}$ ceros.

2.13 (pág. 16) Como para escribir los números de k cifras se necesitan $9(k-1) \cdot 10^{k-2}$ ceros (ver problema anterior), para entonces los números desde 1 hasta 1000000 se necesitan $9(1+2\times10+3\times100+4\times1000+5\times10000)+6 = 9\times54321+6 = 488895$.

2.14 (pág. 16) Los números del 1 al 9 ocupan 9 posiciones. Los del 10 al 99 ocupan $90 \times 2 = 180$ posiciones. Los del 100 al 199 ocupan $100 \times 3 = 300$ posiciones. Lo mismo ocurre para los del 200 al 299, 300 al 399, 400 al 499, 500 al 599 y 600 al 699. Así, los números desde el 1 hasta el 699 ocupan $9+180+300\times6 = 1989$ poaiciones. A partir de la posición 1990 se tendrá entonces 7007017027037047057067077 08..., de donde se ve fácilmente que en la posición 2014 hay un 7.

2.15 (pág. 16) Si las tres torres fuesen de diferentes colores, con el mismo método del problema 2.8 hallaríamos que hay $64 \times 49 \times 36 = 112896$ maneras. Pero si las torres son indistinguibles, este número debe dividirse entre 6 (el número de formas de permutar las torres entre ellas) y la respuesta es $112896/6 = 18816$.

2.16 (pág. 16) Comencemos por escribir 12345. El 6 puede colocarse a la izquierda del 1, entre el 1 y el 2, entre el 2 y el 3, entre el 3 y el 4, o entre el 4 y el 5 (pero no a la derecha del 5). Es decir que hay 5 posibilidades de ubicación. Una vez ubicado el 6 se tienen 7 posibilidades para ubicar el 7. Luego habrá 8 posibilidades para ubicar el 8 y 9 posibilidades para ubicar el 9. Por el principio del producto, la respuesta es $5 \times 7 \times 8 \times 9 = 2520$.

2.17 (pág. 17) (a) Hay dos clases de palabras: las del tipo vocal-consonante-vocal y las del tipo consonante-vocal-consonante. Las del primer tipo son $5 \cdot 12 \cdot 5 = 300$, ya que la primer vocal se puede escoger de 5 maneras, la consonante de 12 maneras y la segunda vocal de 5 maneras. del mismo modo las palabras del segundo tipo son $12 \cdot 5 \cdot 12 = 720$. por lo tanto en total hay $300 + 720 = 1020$ palabras.

(b) Para cada letra hay 60 palabras que comienzan por ella, y como la letra del medio es la L, la respuesta será la palabra 31 que comience con L. Hay 12 palabras que comienzan con LA, 5 con LB y 5 con LD. Las palabra que siguen son LEB, LED, LEF, LEG, LEJ, LEL, LEM, LEN y LEP, que es la respuesta.

2.18 (pág. 17) Se puede comenzar por poner una moneda en cualquiera de las 4 casillas de la primera fila. Como no se pueden repetir columnas, en la sexta fila quedarán entonces 3 casillas disponibles donde colocar una segunda moneda. Quedan ahora cuatro columnas libres: la primera, la sexta y dos intermedias. Luego, en cada fila de la segunda a la cuarta hay que poner una moneda de modo que quede una en cada una de las cuatro columnas libres, lo cual se puede hacer de $4! = 24$ maneras (ya que para la segunda fila se puede escoger una de 4 columnas, para la tercera fila se puede escoger una de las 3 columnas restantes, para la cuarta fila una de las 2 columnas restantes, y para la quinta fila se escoge la única columna que queda disponible). La respuesta es entonces $4 \cdot 3 \cdot 4! = 12 \cdot 24 = 288$.

2.18 (pág. 17) Como $10^{99} = 2^{99} \cdot 5^{99}$, sus divisores enteros positivos son de la forma $2^n \cdot 5^k$, con $0 \le n \le 99$, $0 \le k \le 99$. Luego hay 100 valores posibles para n, que se pueden combinar con 100 valores posibles para k. Entonces por el principio del producto 10^{99} tiene $100 \cdot 100 = 10000$ divisores. Uno de ellos $2^n \cdot 5^k$ es múltiplo de $10^{88} = 2^{88} \cdot 5^{88}$ si y sólo si $88 \le n \le 99$, $88 \le k \le 99$, es decir que los casos favorables son $12 \cdot 12 = 144$. La probabilidad buscada es entonces $144/10000 = 9/625$.

2.20 (pág. 17) La primera fila se puede colorear de $2^8 = 256$ maneras. Si una de esas coloraciones tiene dos casillas consecutivas del mismo color, entonces las dos casillas que están debajo de ellas en la segunda fila deben recibir el color opuesto, y es fácil ver que hay una única manera admisible de colorear las casillas restantes de la segunda fila, a saber, con el color opuesto al de la casilla de la primera fila que está en la misma columna. Este razonamiento se repite para las filas tercera, cuarta... hasta la octava.

En cambio si en la primera fila no hay casillas consecutivas del mismo color, es decir si la coloración es BNBNBNBN o NBNBNBNB, entonces la segunda fila admite cualquiera de esas dos coloraciones alternadas, y lo mismo la tercera y las filas restantes.

En resumen, cada una de las dos coloraciones alternadas de la primera fila se puede extender de 2^7 maneras, mientras que cada una de las $2^8 - 2$ coloraciones no alternadas de la primera fila se extiende de manera única. En total se obtienen entonces $2 \cdot 2^7 + 2^8 - 2 = 2^9 - 2 = 510$ coloraciones.

Capítulo 3

3.1 (pág. 26) El número total de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es 2^n, y como hay tantos con número par de elementos como con número impar (ver Problema 2.2), la respuesta es $2^n/2 = 2 * n - 1$.

3.2 (pág. 26) Hagámosle corresponder a cada $x \in S$ el arreglo de unos y ceros $a_1 a_2 \ldots a_k$, donde a_i es 1 si $x \in A_i$ y 0 en caso contrario. La condición del problema nos asegura que esta correspondencia es inyectiva, y como el número de arreglos de k ceros y unos es 2^k, está listo.

3.3 (pág. 26) Hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números de tres cifras, y $9 \cdot 9 \cdot 8$ números de tres cifras diferentes, luego la respuesta es

$$\frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{72}{100} = \frac{18}{25}.$$

3.4 (pág. 26) (a) Deben terminar en 5, y las primeras siete cifras pueden ser cualquier arreglo de 7 elementos tomados de $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, de los cuales hay $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40320$.

(b) Como $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, las únicas 8 cifras diferentes no nulas cuya suma es múltiplo de 9 son las del 1 al 8. Por lo tanto, la respuesta es $8! = 40320$.

3.5 (pág. 26) $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

3.6 (pág. 26) Diez cartas se pueden extraer de $\binom{52}{10}$ maneras. Los conjuntos de diez cartas que no contienen ningún as son $\binom{48}{10}$. Luego la probabilidad de no sacar ningún as es

$$\frac{\binom{48}{10}}{\binom{52}{10}} = \frac{48!}{10!38!} \frac{10!42!}{52!} = \frac{48!42!}{38!52!} = \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{246}{595}.$$

La probabilidad de sacar al menos un as es la complementaroa de la anterior, $1 - \frac{246}{595} = \frac{349}{595}$.

3.7 (pág. 26) El número total de segmentos determinados por los n puntos es $\binom{n}{2}$, de los cuales n son lados, luego la respuesta es $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$. Otra solución: cada uno de los n vértices se puede unir con otros $n - 3$ para formar una diagonal, pero en $n(n-3)$ cada diagonal está contada dos veces, luego la respuesta es $n(n-3)/2$.

3.8 (pág. 26) El número de barras debe ser impar. Con 7 barras, cinco deben tener ancho 2 y dos ancho 1; hay $\binom{7}{2} = 21$ códigos de este tipo. Con 9 barras, tres deben tener ancho 2 y seis ancho 1; hay $\binom{9}{3} = 84$ códigos de este tipo. Con 11 barras, una debe tener ancho 2 y diez ancho 1; hay $\binom{11}{1} = 11$ códigos de este tipo. El total es $21 + 84 + 11 = 116$.

Este problema se puede resolver también mediante una recurrencia. Sea x_n el número de códigos de longitud n. Es claro que $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ y $x_4 = 3$. Además $x_n = x_{n-4} + 2x_{n-3} + x_{n-2}$ para $n > 4$, de donde se obtienen los primeros 12 términos de la sucesión: 1, 1, 1, 3, 4, 6, 11, 17, 27, 45, 72, 116.

3.9 (pág. 26) $k\binom{n}{k} = \dfrac{kn!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3.10 (pág. 26) Esa suma es el desarrollo de $(1+1)^n$. Otra forma: es la suma de la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos, para $k = 0, 1, \ldots, n$, que es igual al número total de subconjuntos 2^n.

3.11 (pág. 26) Esa suma es el desarrollo de $(1-1)^n = 0$. Otra forma: es la diferencia entre la cantidad de subconjuntos con número par de elementos y la de subconjuntos con número impar de elementos (de un conjunto de n elementos), que ya sabemos que es 0 por el problema 2.2.

3.12 (pág. 26) $\binom{n}{k}/\binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k} \geq 1$ si y sólo si $k \leq \frac{n+1}{2}$. Luego el mayor $\binom{n}{k}$ se obtiene para $k = \frac{n}{2}$ si n es par, o para $k = \frac{n-1}{2}$ y $\frac{n+1}{2}$ si n es impar.

3.13 (pág. 27) Se pueden escoger 3 de 25 de $\binom{25}{3} = 25 \cdot 24 \cdot 23/6 = 25 \cdot 4 \cdot 23$ maneras. Las ternas que cumplen la condición son de dos tipos:

a) Las de 3 caballeros sentados rn puestos consecutivos. Éstas son 25.

b) Las compuestas por dos caballeros sentados juntos y un tercero separado de ellos. Los dos vecinos se pueden escoger de 25 maneras, y una vez esgogidos quedan 21 posibilidades para el tercero. Luego hay $25 \cdot 21$ ternas de este tipo.

En total hay $25 + 25 \cdot 21 = 25 \cdot 22$ ternas que cumplen la condición-

La probabilidad buscada es entonces $25 \cdot 22/(25 \cdot 4 \cdot 23) = 11/46$.

3.14 (pág. 27) Hay $\binom{5}{2} = 10$ juegos. Como en cada juego hay dos posibilidades para el ganador, el espacio muestral X (posibles resultados del torneo) tiene $2^{10} = 1024$ elementos. Los torneos en que hay un invicto (evento I) pueden contarse así: el invicto se puede escoger de 5 maneras, y los demás deben jugar $10 - 4 = 6$ juegos entre ellos, que pueden resultar de 2^6 maneras. Luego $|I| = 5 \cdot 2^6 = 320$. Del mismo modo si P es el evento en que un equipo pierde todos sus juegos, $|P| = 320$. Pero I y P no son disjuntos. $|I \cap P|$ puede calcularse así: el equipo invicto puede ser cualquiera de los 5, el que pierde todos sus juegos cualquiera de los 4 restantes, y entre los 3 que quedan se realizan 3 juegos que pueden resultar de 2^3 maneras. Luego $|I \cap P| = 5 \cdot 4 \cdot 2^3 = 160$. El evento que nos interesa es $X \setminus (I \cup P)$, y

$$|X \setminus (I \cup P)| = |X| - |I \cup P| = |X| - (|I| + |P| - |I \cap P|) = 1024 - (320 + 320 - 160) = 544.$$

Finalmente la probabilidad pedida es $544/1024 = 17/32$.

3.15 (pág. 27) La respuesta correcta es la (A). Si se agrupan las 16 casillas en 8 pares de casillas adyacentes, resulta claro que se requieren al menos 8 clics para encender con certeza una casilla azul, y al menos 2 más para encender la otra. Diez clics siempre son suficientes. Para ello hagamos clic sucesivamente en las casillas marcadas 1, 2, 3, ... en la figura, hasta ver una casilla azul.

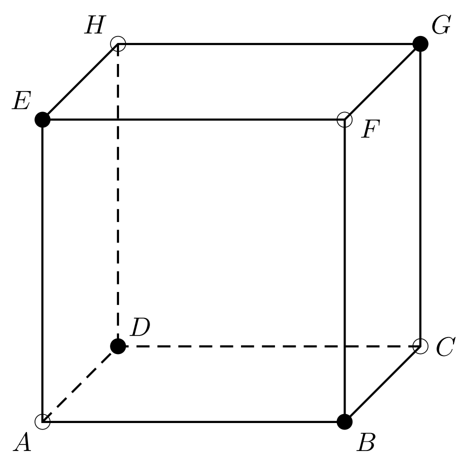
1		2	
	3		4
5		6	
	7		8

Si la primera que se ve es la 8, haciendo clic en las 2 adyacentes se descubre la otra azul. Si la primera que se ve es la 7, haciendo clic en las 3 adyacentes se descubre la otra. Y si es alguna de la 1 a la 6, haciendo clic en las adyacentes (que son a lo sumo 4) se descubre la otra.

3.16 (pág. 27) La secuencia 12 puede aparecer como los dos últimos dígitos de los enteros 12, 112, 212,..., 912, 1012, 1112,..., 1912 (20 veces). También como cifras de las centenas y las decenas de los enteros 120, 121, ..., 129 (10 veces) y de 1120, 1121, ..., 1129 (10 veces). También como cifra de las unidades de 1000 y cifra de las centenas en los enteros 1200, 1201,..., 1299 (100 veces).

Además puede aparecer como última cifra de un número y primera del siguiente, en los casos 1–2, 21–22, 201–202, 211–212, 221–222, 231–232, 241–242, 251–252, 261–262, 271–272, 281–282, 291–292 y 2001–2002 (13 veces). En total la secuencia 12 aparece $10 + 10 + 10 + 10 + 100 + 13 = 153$ veces.

3.17 (pág. 27) Observemos primero que los vértices del cubo se pueden particionar en dos conjuntos disjuntos $\{A, C, F, H\}$ y $\{B, D, E, G\}$, tales que cada mosca puede volar solamente a vértices pertenecientes al mismo conjunto del vértice en el cual se encuentra.



Por lo tanto basta calcular el número de maneras en que pueden volar las moscas ubicadas en cada conjunto y luego multiplicar. Una mosca ubicada en A tiene 3 destinos posibles (C, F y H). Supongamos que vuela hacia C. Si la mosca de C vuela hacia A, entonces también deben intercambiar posiciones kas que estaban en F y H. Si en cambio la de C vuela hacia F, la de F debe volar hacia H y ésta hacia A (si la de F volase hacia A la de H no tendría adonde ir). Análogamente si la de C vuela hacia H, la de H debe volar hacia F y ésta hacia A. Hay entonces 3 posibilidades si A vuela hacia C, y por supuesto otras 3 si vuela hacia F y otras 3 si vuela hacia H, para un total de 9. Las moscas en B, D, E y G pueden volar también de 9 maneras, y por el principio del producto la respuesta al problema es $9 \times 9 = 81$.

Nota: las maneras en que pueden volar las moscas ubicadas en A, C, F y H son los *desarreglos* de $ACFH$, es decir las permutaciones de 4 elementos sin puntos fijos. Su número se calcula en el Capítulo 6.

3.18 (pág. 27) Los 9 números de una cifra son capicúas. De dos cifras también hay 9, a saber 11, 22, 33,..., 99. De tres cifras hay 90, pues la primera cifra se puede escoger de 9 maneras (del 1 al 9), la del medio de 10 maneras y la tercera debe ser igual a la primera. Los de 4 cifras que comienzan con 1 son 10, a saber los de la forma $1aa1$ con $a = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Y finalmente se tiene el 2002, para un total de $9 + 9 + 90 + 10 + 1 = 119$.

3.19 (pág. 27) Como $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, sus divisores son 1, 3, 11, 61, $3 \times 11 = 33$, $3 \times 61 = 183$, $11 \times 61 = 671$ y 2013. De éstos, sólo 183 y 671 son de tres dígitos. Como hay en total 900 enteros positivos de 3 dígitos, los que no son divisores de 2013 son $900 - 2 = 898$.

3.20 (pág. 27) La suma de los dígitos de un múltiplo de 3 es múltiplo de 3, por lo tanto la suma de los dígitos de los números buscados es múltiplo de 21. Por otra parte la suma de los dígitos de cualquier número menor que 1000 es a lo sumo $9 + 9 + 9 = 27$. Entonces en nuestro caso esta suma es 21. Para uno de los números buscados el menor dígito posible es cuando los otros dos dígitos son iguales a 9, y entonces el dígito buscado es 3. Con esta información los únicos dígitos posibles, escritos en ternas, son: $(3, 9, 9)$, $(4, 8, 9)$, $(5, 7, 9)$, $(5, 8, 8)$, $(6, 6, 9)$, $(6, 7, 8)$ y $(7, 7, 7)$. Para cada terna con tres dígitos diferentes hay 6 números que satisfacen lo pedido. Si la terna tiene dos números iguales, entonces habrá tres números diferentes y si los tres números de la terna son iguales, solo hay un número con las condiciones pedidas. En total hay $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 1 = 28$ números con las propiedades pedidas.

3.21 (pág. 27) Ascendiendo sólo llega a los escalones múltiplos de 3. Si desciende una vez sólo llega a los escalones de la forma $3n-4 = 3(n-2)+2$. Así nunca llegará al 22 pues 22 deja resto 1 al dividirlo entre 3. Usando dos descensos sí puede llegar, si asciende 10 veces: $10 \times 3 - 2 \times 4 = 22$. Es claro que si usa más descensos debe aumentar también el número de ascensos y por lo tanto el número total de pasos. Ahora se trata de contar las posibles ubicaciones de los dos saltos descendentes entre los 12 saltos. Como ni el primer salto ni el segundo pueden ser descendentes, los dos descendentes se ubican entre los 10 últimos. Hay $\binom{10}{2} = 45$ maneras de escogerlos, pero como el tercer y cuarto salto no pueden ser ambos descendentes quedan $45 - 1 = 44$ posibilidades. Todas ellas son realizables, ya que hacia arriba se llega a lo sumo al escalón $10 \cdot 3 = 30$, el primer salto descendente está precedido de al menos dos ascendentes (y $3 + 3 > 4$) y el segundo salto descendente está precedido de al menos tres ascendentes (y $3 + 3 + 3 - 4 - 4 \geq 1$). Es decir que la respuesta es $\binom{10}{2} - 1 = 44$.

3.22 (pág. 28) La secuencia 12 puede aparecer como los dos últimos dígitos de los enteros 12, 112, 212,..., 912, 1012, 1112,..., 1912 (20 veces). También como cifras de las centenas y las decenas de los enteros 120, 121, ..., 129 (10 veces) y de 1120, 1121, ..., 1129 (10 veces). También como cifra de las unidades de 1000 y cifra de las centenas en los enteros 1200, 1201,..., 1299 (100 veces).

Además puede aparecer como última cifra de un número y primera del siguiente, en los casos 1–2, 21–22, 201–202, 211–212, 221–222, 231–232, 241–242, 251–252, 261–262, 271–272, 281–282, 291–292 y 2001–2002 (13 veces). En total la secuencia 12 aparece $10 + 10 + 10 + 10 + 100 + 13 = 153$ veces.

3.23 (pág. 28) El tablero tiene 36 casillas, y las dos que se van a pintar se pueden escoger de $\binom{36}{2} = 630$ maneras. La mayoría de las 630 coloraciones posibles se pueden poner en grupos de a cuatro equivalentes (que se obtienen rotando una de ellas 90°, 180° y 270°), excepto las que tienen las dos casillas simétricas respecto al centro del tablero, que sólo son equivalentes a otra más (pues la rotación de 180° las deja invariantes, y las de 90° y 270° dan lo mismo). Como hay 18 pares de casilas simétricas respecto al centro del tablero, el número de coloraciones no equivalentes es $18/2 + (630 - 18)/4 = 9 + 153 = 162$.

3.24 (pág. 28) Ese número es evidentemente igual al de combinaciones con repetición de x_1, x_2,..., x_n tomadas de k en k, es decir $\binom{n+k-1}{k}$.

3.25 (pág. 28) A cada función creciente $f : [1, k] \to [1, n]$ hagámosle corresponder $f(1)$, $f(2)$,..., $f(k)$, que es una combinación con repetición de 1, 2,..., n. Esta correspondencIa es biyectiva. En efecto, obviamente es inyectiva y es sobre pues la combinación con repetición $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}$ con $i_1 + i_2 + \dots + i_r = k$ proviene de la función dada por $f(1) = f(2) = \dots = f(i_1) = a_1$, $f(i_1 + 1) = f(i_1 + 2) = \dots = f(i_1 + i_2) = a_2$,..., $f(i_1 + \dots + i_{r-1} + 1) = \dots = f(i_1 + \dots + i_r) = a_r$. Por lo tanto el número de funciones crecientes de $[1, k]$ en $[1, n]$ es $\binom{n+k-1}{k}$.

3.26 (pág. 28) Asociemos a cada subconjunto A de $[1, n]$ la sucesión $a_1 \dots a_n$ de ceros y unos tal que a_i es 1 si $i \in A$ y 0 en caso contrario (esta sucesión no es otra cosa que la función característica del subconjunto A). Las sucesiones asociadas con los subconjuntos que nos interesan son aquellas que constan de k unos y $n-k$ ceros, y que no contienen unos consecutivos. Todas ellas se pueden obtener escribiendo una sucesión de $n - k$ ceros e intercalando luego k unos en los puestos que quedan entre los ceros, o al principio o al fin de la sucesión. Ya que los puestos posibles para los k unos son $n - k + 1$, el número de tales sucesiones es $\binom{n-k+1}{k}$.

3.27 (pág. 28) Si $p(n, k)$ es el número de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ con k puntos fijos, entonces $F_n = \sum_{k=0}^{n} kp(n,k)$ cuenta el número de puntos fijos que hay en todas las permutaciones. Contemos los puntos fijos de otra manera, cada $j \in \{1,\ldots,n\}$ es punto fijo de $(n-1)!$ permutaciones y como hay n maneras de elegir el j, se tiene que hay entonces $n \cdot (n-1)! = n!$ puntos fijos entre todas las permutaciones.

Capítulo 4

4.1 (pág. 31) En $\{1,2,\ldots,10\}$ hay 5 números pares y 5 impares, por lo que entre los 6 hay un par y un impar, la suma de estos dos números es impar.
Otra manera. Formemos las 5 casillas: $\{1,10\}$, $\{2,9\}$, $\{3,8\}$, $\{4,7\}$ y $\{5,6\}$. Por el *Principio de casillas* en alguna de las casillas hay 2 números de los 6, estos dos números suman 11 que es impar.

4.2 (pág. 31) (a) Sumas posibles hay siete: -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3. Por lo tanto no es posible acomodar los números para tener las 8 sumas diferentes.
(b) No es posible. Sugerencia: Como la suma de los tres renglones es igual a la suma de las tres columnas, al sumar las seis sumas obtenemos un número par; luego, de los siete valores posibles, se deberá dejar fuera uno, que debe ser par, ya que la suma de los siete valores es par, de hecho cero. Por lo que 3 y -3 están presentes, suponga que son la suma de los dos primeros renglones, ahora busque una contradicción.

4.3 (pág. 31) Mostremos que el punto medio de algún par también tiene coordenadas enteras. El punto medio de (a,b,c) y (d,e,f) es $\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+e}{2}, \frac{c+f}{2}\right)$ y tendrá coordenadas enteras si son de la misma paridad las parejas a y d, b y e, c y f. Dividamos los puntos reticulares del espacio en clases, poniendo a (a,b,c) y (d,e,f) en la misma clase si y sólo si a y d, b y e, c y f tienen la misma paridad. Tenemos así 8 clases, representadas por:

$$(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,0), (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1).$$

Alguna clase contiene dos de los 9 puntos, y éstos resuelven el problema.

4.4 (pág. 32) El centroide de (a_1,b_1), $(a_2,b_2$ y (a_3,b_3) es $(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3})$ y será entero si 3 divide tanto a $a_1+a_2+a_3$ como a $b_1+b_2+b_3$. Una condición suficiente para que esto suceda es que: $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \pmod 3$ y $b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \pmod 3$.
Si se divide a los puntos reticulares en clases de modo que (a,b) y (c,d) están en la misma clase si y sólo si $a \equiv c \pmod 3$ y $b \equiv d \pmod 3$, tenemos que hay 9 clases con representantes

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) \end{array}$$

(a) Al distribuir los 19 puntos en las 9 clases, hay una clase donde quedan 3 o más puntos; éstos son los buscados.

(b) Si hay puntos en todas las casillas de una misma fila de la tabla anterior, éstos también cumplen la condición. Si no los hay entonces al menos 3 casillas quedan vacías, y alguna de las 6 restantes debe contener al menos 3 de los 13 puntos.

(c) Llamemos *diagonal generalizada* de la tabla anterior a un conjunto de tres casillas para las cuales tanto las 3 abscisas como las 3 ordenadas son permutaciones de $\{0,1,2\}$. Si hay puntos en todas las casillas de una misma fila, columna, o diagonal generalizada, éstos cumplen la condición. Si no los hay, entonces al menos 5 casillas quedan vacías, y alguna de las 4 restantes debe contener al menos 3 de los 9 puntos.

4.5 (pág. 32) Primero recordemos que la diferencia de dos pares o de dos impares es par. Ahora consideremos dos casillas: la de números pares y la de números impares. Al acomodar los números a, b, c y d pueden quedar $(4,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$ ó $(0,4)$ y en cada caso el producto tiene de factor a 2^6, 2^3, 2^2, 2^3 y 2^6, respectivamente.
Para ver que es divisible entre 3, consideremos tres casillas: los números que al dividirse entre tres dejan residuos 0, 1 y 2. De los números a, b, c y d hay dos con el mismo residuo, luego su deferencia es divisible entre 3.

4.6 (pág. 32) Recuerde primero que un número es divisible entre 10 si y sólo si 2 y 5 dividen a tal número. Para cualesquiera i, j enteros, si alguno es par entonces 2 divide a $ij(i+j)(i-j)$, y si ambos son impares entonces su suma es divisible entre 2. Basta entonces probar que, dados tres números, existen dos de ellos i, j tales que $ij(i+j)(i-j)$ es divisible entre 5. Desde luego si alguno de los tres números dados es múltiplo de 5, la afirmación es cierta. Supóngase entonces que ninguno de los tres es divisible entre 5, luego serán de la forma $5n \pm 1$ ó $5n \pm 2$. Como éstos cumplen que sus cuadrados dejan residuo 1 ó 4 al dividirse entre 5, por el *Principio de las casilllas* dos de ellos cumplen que sus cuadrados dejan el mismo residuo al dividirse entre 5, es decir que existen i, j tales que 5 divide a $i^2 - j^2$ y por lo tanto 5 divide a $ij(i+j)(i-j)$.

4.7 (pág. 32) Las diferencias (distintas) entre los números son a lo más $15-1=14$. Entre los 8 números hay $\binom{8}{2} = 28$ parejas. Como la diferencia igual a 14 solamente puede ocurrir una vez (con 15 y 1), entonces, por el *Principio de las casillas* hay una diferencia que ocurre tres veces.

4.8 (pág. 32) Sean $d_i = a_{i+1} - a_i$ las diferencias con $i = 1,\ldots, 19$. Por un lado tenemos que: $d_1 + d_2 + \cdots + d_19 = a_{20} - a_1 \leq 69 - 1 = 68$. Ahora, si $d'_1 \leq d'_2 \leq \cdots \leq d'_{19}$ son las diferencias ordenadas y suponemos que no hay cuatro iguales, entonces d'_1, d'_2 y d'_3 son al menos 1, d'_4, d'_5 y d'_6 son al menos 2,..., d'_{16}, d'_{17} y d'_{18} son al menos 6 y d'_{18} es al menos 7, de donde $d_1 + d_2 + \cdots + d_{19} = d'_1 + d'_2 + \cdots + d'_{19} \geq 3(1+2+3+4+5+6)+7 = 70$, lo que da una contradicción.

4.9 (pág. 32) Supongamos que los números son $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_7 \leq 24$. Como hay $2^7 - 1 = 127$ subconjuntos no vacíos de $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$, se pueden realizar 127 sumas positivas. La mayor suma que se puede obtener con cinco números es $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 \leq 20+21+22+23+24 = 110$. Una suma mayor se obtendrá al sumar a $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ ya sea a_1 o a_2 o $a_1 + a_2$ o bien cuando se sume $a_1 + a_2$ y se reste alguno de a_3, a_4, a_5, a_6, a_7. Entonces tendremos quizás otras 8 sumas más, luego a lo más habrá 118 sumas diferentes. Por el *Principio de las casillas,* hay dos de las 127 sumas que son iguales.

4.10 (pág. 32) Sea A el conjunto de diez elementos. Hay $2^{10} = 1024$ subconjuntos de A, mientras que la suma de elementos de un subconjunto puede variar desde 0 hasta $10 \cdot 99 = 990$. Como hay más subconjuntos que sumas posibles, hay dos subconjuntos A_1 y A_2 de A que tienen la misma suma de elementos. Si A_1 y A_2 son ajenos, terminamos. En caso contrario, retiramos los elementos comunes a ambos subconjuntos y los nuevos subconjuntos siguen teniendo sumas iguales y son disjuntos.

4.11 (pág. 32) Sean $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2, \ldots$, $b_n = a_1 + \cdots + a_n$. Si ninguna de estas sumas es divisible entre n, entonces dos de ellas deberán tener el mismo residuo al dividirlas entre n (ya que sólo hay $n-1$ residuos diferentes de 0). Si éstas son b_j y b_i son $j > i$ entonces el subconjunto $\{b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_j\}$ tiene la propiedad deseada.

4.12 (pág. 32) Es suficiente considerar los enteros $n > 1$. Sean $a_0 = 10^0$, $a_1 = 10^0 + 10^1, \ldots$, $a_n = 10^0 + 10^1 + \cdots + 10^n$. Como hay a lo más n clases de residuos módulo n, dos de esos números, digamos a_i y a_j con $i < j$, tienen el mismo residuo módulo n. Luego $a_j - a_i$ es un múltiplo de n cuyo desarrollo decimal solamente usa ceros y unos.

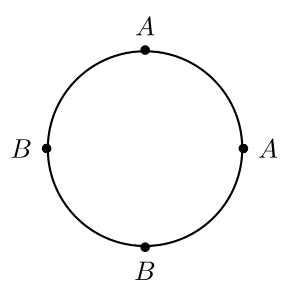
4.13 (pág. 32) Con los 995 puntos interiores haga una triangulación del pentágono, es decir una división del mismo en triángulos ajenos. No importa como se haga esta triangulación, tendrá 1993 triángulos. Como el área del pentágono es 1993, alguno de los triángulos en la triangulación deberá tener área menor o igual a 1.

4.14 (pág. 32) Los primos menores o iguales a 23 son $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$, $p_9 = 23$. Si el conjunto de los 1985 enteros es E, los elementos de E son de la forma $n_j = \prod_{i=1}^{9} p_i^{\alpha_{ji}}$ con $\alpha_{ji} \geq 0$. Ahora el producto $n_j n_k$ es un cuadrado si y sólo si $\alpha_{ji} + \alpha_{ki} \equiv 0 \pmod 2$ para toda $i = 1, \ldots, 9$. Como hay 2^9 diferentes colecciones de 9 enteros módulo 2, un conjunto con más de $2^9 + 1 = 513$ enteros de la forma $n_j = \prod_{i=1}^{9} p_i^{\alpha_{ji}}$, contiene por *el principio de las casillas* dos cuyo producto es un cuadrado. Así en E hay dos números a_1 y b_1 cuyo producto es un cuadrado. Se retiran estos dos números de E y quedan más de 513 enteros, de nuevo hay dos, a_2 y b_2, cuyo producto es un cuadrado. Este proceso se puede repetir varias veces hasta obtener $\frac{1985-513}{2} = 736$

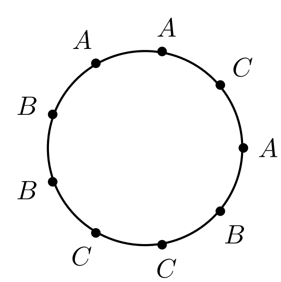
parejas de enteros diferentes cuyo producto es un cuadrado. Consideremos ahora los números enteros $c_1 = \sqrt{a_1 b_1}$, $c_2 = \sqrt{a_2 b_2}, \ldots$, $c_{736} = \sqrt{a_{736} b_{736}}$, de nuevo estos son de la forma $\prod_{i=1}^{9} p_i^{\alpha_{ji}}$ con $\alpha_{ji} \geq 0$, y entonces aplicando el razonamiento anterior hay dos de ellos c_j y c_k cuyo producto es un cuadrado. Y ahora tenemos que $a_j b_j a_k b_k$ es una cuarta potencia.

4.15 (pág. 33) Se colorea de rojo el lado más corto de cada triángulo (algunos de los segmentos pueden colorearse varias veces). Los segmentos restantes se colorean de negro. Luego la gráfica completa que se forma con los 6 puntos y los segmentos que los unen se ha coloreado de rojo y negro, pero sabemos que en este caso hay un triángulo monocromático. Este triángulo debe ser rojo, ya que su lado más corto tiene ese color. El lado más grande de este triángulo es también rojo, por lo que debe ser el lado más corto de algún otro triángulo.
Otra solución. Se colorea de cada triángulo el lado más corto de rojo y el lado más largo de negro. Los segmentos se pueden colorear varias veces. Si un segmento se coloreo con los dos colores terminamos, en caso contrario se ha coloreado K_6 de rojo y negro luego, tendrá un triángulo monocromático, pero esto es imposible pues su lado más corto es rojo y el más largo es negro.

4.16 (pág. 33) Las parejas de representantes consecutivos pueden ser de n^2 tipos diferentes (n posibilidades del país de un representante y otras n posibilidades del representante a su derecha). Si hay $n^2 + 1$ o más personas entonces hay al menos $n^2 + 1$ parejas de representantes, pero como sólo hay n^2 tipos diferentes, se tiene por el *principio de las casillas* que hay dos parejas del mismo tipo, lo cual es contrario a la hipótesis del problema.
Ahora veamos por inducción que para cada $n \geq 2$ hay un acomodo de n^2 representantes (de hecho n representantes de cada uno de los n países) en la mesa, como señala el problema.
Para $n = 2$ y $n = 3$ se muestra en las siguientes figuras,



$n = 2$



$n = 3$

Ahora haremos el paso inductivo a partir de una mesa con n^2 representantes, con n de cada país. Para el país i, los n vecinos de la derecha de sus n representantes son de países diferentes, en particular para el país i hay un representante que tiene por vecino de su derecha a una persona del mismo país i. Entre estos dos representantes del mismo país i colocamos a un representante del país $n+1$ y una persona más , al $(n+1)$-ésimo representante del país i. Al hacer esto para cada país i, con $i = 1, \ldots, n$, la cantidad de representantes aumenta en $2n$ personas. Cada país de los primeros n tiene ya acomodados a sus $n+1$ representantes y del país $n+1$ ya se acomodaron n de sus representantes, en este nuevo acomodo los $n+1$ vecinos de la derecha e las personas de un mismo país $i = 1, \ldots, n$ son de países diferentes, y los vecinos de la derecha de las n personas del país $n+1$ son de los países $i = 1, \ldots, n$. Falta agregar una persona más del país $n+1$. Esto se puede hacer a la derecha de un representante de su mismo país. Tenemos ahora acomodados a $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ en la mesa y son $n+1$ de cada uno de los $n+1$ países, que cumplen las condiciones del problema.

4.17 (pág. 33) Las parejas (a, b) son todas las que cumplen con $a + b > n$. Numeremos las niñas y los niños de 1 a n y hagamos una tabla de $n \times n$ en la que el cuadro del renglón i y la columna j se pinta de rojo si a la niña i le gusta el niño j, de azul si al niño j le gusta la niña i, y se queda sin pintar en otro caso. Habrá un niño y una niña que se gusten mutuamente si y sólo si hay un cuadrito coloreado con los dos colores. Veamos primero que si $a + b > n$ entonces hay un niño y una niña que se gustan mutuamente: en cada renglón hay a casillas rojas y en cada columna hay b casillas azules, por lo que hay $(a + b)n$ casillas pintadas y como $(a+b)n > n^2$ se tiene por el *principio de las casillas* que un cuadrito se pintó dos veces. Ahora veamos que si $(a + b) \leq n$ podemos tener una niña y un niño que no se gusten mutuamente, en términos de la cuadrícula veremos que podremos colorearla de rojo y azul sin encimar color, de manera que en cada renglón hay a cuadritos rojos y en cada columna b cuadritos azules. Coloreamos primero de rojo los primeros a cuadritos del primer renglón, del segundo renglón coloreamos de rojo a cuadritos seguidos iniciando en la columna 2 y así sucesivamente del renglón i coloreamos a seguidos iniciando en la columna i (las columnas módulo n). Con esta coloración se han dejado de pintar $n - a$ cuadritos de cada columna, y como $n - a \geq b$ podemos escoger b de tales cuadritos y pintarlos de azul, así obtenemos una coloración sin cuadritos de los dos colores.

Capítulo 5

5.1 (pág. 39) Los primeros números de la lista son 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145,... El 89 aparece en cuarto lugar y también en la posición 12, por lo tanto, la sucesión es periódica de período 8: los números del cuarto al undécimo (89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58) se repiten a partir de la posición 12, y luego a partir de las posiciones 20, 28, 36,... Como en las posiciones divisibles entre 8 siempre va un 4, en la posición 2008 va un 4 y en la 2009 va el 16.

5.2 (pág. 39) Los primeros términos de la sucesión son 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1,... y se observa que se repite la terna 1, -1, -1. Como $2013 = 3 \times 671$ y cada grupo de tres consecutivos suma -1, la respuesta es -671.

5.3 (pág. 39) Al escribir los primeros términos de la sucesión 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, $-6, \ldots$, se ve que en las posiciones impares van los impares del 1 en adelante, mientras que en las posiciones impares van enteros pares, comenzando por el 2 y decreciendo de 2 en 2. Por lo tanto en la posición 2010 estará el -2006. Esto se puede probar rigurosamente por inducción, observando que $a_{2k-1} = 2k-1$ y $a_{2k} = 4-2k$ se cumplen para $k=1$ y $k=2$, y suponiendo que se cumplen para $k = 1, \ldots, n-1$ se tiene $a_{2n-1} = a_{2n-4} + a_{2n-3} - a_{2n-2} = 4-(2n-4)+(2n-3)-(4-(2n-2)) = 2n-1$ y $a_{2n} = a_{2n-3}+a_{2n-2}-a_{2n-1} = 2n-3+4-(2n-2)-(2n-1) = 4-2n$. Por lo tanto $a_{2010} = 4 - 2010 = -2006$.

5.4 (pág. 39) Como $1^k = 1 \neq 2 = 1^m + 1^n$, debe ser $a \geq 2$. Si $m > n$ y $a^k = a^m + a^n$, entonces $a^{k-n} = a^{m-n} + 1$ y a dividiría a $a^{k-n} - a^{m-n} = 1$, absurdo pues $a \geq 2$. Análogamente no puede ser $n > m$. Si $m = n$ entonces $a^k = 2a^n$, es decir $a^{k-n} = 2$, que se cumple si y sólo si $a = 2$ y $k - n = 1$. Por lo tanto, las cuaternas buscadas son las de la forma $(2, n+1, n, n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

5.5 (pág. 39) Sume miembro a miembro las igualdades $F_i = F_{i+2} - F_{i+1}$, para $i = 0, 1, \ldots, n$.

5.6 (pág. 39) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - (F_{n-1} + F_{n-2})F_n$
$= -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) = \cdots = (-1)^{n-1}(F_2F_0 - F_1) = (-1)^n$

5.7 (pág. 39) Probaremos que $F_n | F_{kn}$ por inducción en k. El caso $k = 1$ es trivial. Si se cumple para un cierto k, entonces $F_{kn} = tF_n$ para algún entero t. Usando la Proposición 5.1 se tiene:

$$F_{(k+1)n} = F_{kn+1}F_n + F_{kn}F_{n-1} = (F_{kn+1} + tF_{n-1})F_n.$$

5.8 (pág. 39) Si $d|F_n$ y $d|F_{n+1}$ entonces $d|(F_{n+1} - F_n) = F_{n-1}$. Del mismo modo se ve que $d|F_{n-2}$, y por recursión se llega a que $d|F_1 = 1$.

5.9 (pág. 39) Por el algoritmo de Euclides se tiene que:

$$\begin{array}{lll}
m & = q_0 n + r_1 & 0 \leq r_1 < n \\
n & = q_1 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{k-2} & = q_{k-1} r_{k-1} + r_k & 0 \leq r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} & = q_k r_k & \text{con } r_k = d
\end{array}$$

Entonces por (5.1) se tiene:

$$\operatorname{mcd}(F_m, F_n) = \operatorname{mcd}(F_{q_0n-1}F_{r_1} + F_{q_0n}F_{r_1+1}, F_n)$$

pero como $F_n | F_{q_0n}$ (Ejercicio 3) lo anterior es igual a $\operatorname{mcd}(F_{q_0n-1}F_{r_1}, F_n)$. Pero por el Ejercicio 4 se tiene que:

$$\operatorname{mcd}(F_n, F_{q_0n-1}) | \operatorname{mcd}(F_{q_0n}, F_{q_0n-1}) = 1$$

Por lo tanto $\text{mcd}(F_{q_0 n-1}F_{r_1}, F_n) = \text{mcd}(F_{r_1}, F_n)$. Prosiguiendo de esta manera obtenemos:

$$\text{mcd}(F_m, F_n) = \text{mcd}(F_n, F_{r_1}) = \cdots = \text{mcd}(F_{q_k d}, F_d) = F_d.$$

5.10 (pág. 39) Sea X_n el número de maneras de descomponer un rectángulo de $2\times n$ en n rectángulos de 2×1. Verifique que X_n satisface la relación de recurrencia de los números de Fibonacci, pero con condiciones iniciales $X_1 = 1 = F_2$, $X_2 = 2 = F_3$.

5.11 (pág. 39) Sea X_n el número buscado. Los subconjuntos de $[1, n]$ sin elementos consecutivos se pueden clasificar en dos clases disjuntas:

1. Los que no contienen a n. Estos obviamente son X_{n-1}.
2. Los que contienen a n. Estos no pueden contener a $n-1$, por lo cual son tantos como los subconjuntos de $[1, n-2]$ sin elementos consecutivos, es decir X_{n-2}.

De allí que $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$, y dado que $X_1 = 2 = F_3$ y $X_2 = 3 = F_4$ se deduce inmediatamente que $X_n = F_{n+2}$.

5.12 (pág. 39) Con la notación del Ejemplo 5.4, busquemos una solución $L_n = Ar_1^n + Br_2^n$. Las condiciones iniciales $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ nos dan el sistema $A+B = 2$, $Ar_1 + Br_2 = 1$, de donde $B = 2-A$ y $Ar_1 + (2-A)r_2 = 1$, es decir $A(r_1 - r_2) + 2r_2 = 1$ y por tanto $A = (1-2r_2)/(r_1 - r_2) = \sqrt{5}/\sqrt{5} = 1$ y $B = 2 - A = 1$. En conclusión $L_n = r_1^n + r_2^n$.

5.13 (pág. 39) Basta observar que $F_{n-1} + F_{n+1}$ es solución de la recurrencia $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ para $n \geq 1$, y que $F_0 + F_2 = 0 + 1 = 1 = L_1$ y $F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3 = L_0 + L_1 = L_2$.

5.14 (pág. 39) Sea X_n el número buscado. Es claro que $X_1 = 1 = L_1$. Si $n > 1$, los subconjuntos de $[1, n]$ que no contienen elementos consecutivos ni a 1 y n simultáneamente se pueden clasificar en dos clases disjuntas:

1. Los que no contienen a n. Estos son tantos como los subconjuntos de $[1, n-1]$ sin elementos consecutivos, que por el problema 5.12 son F_{n+1}.
2. Los que contienen a n. Estos no pueden contener ni a 1 ni a $n-1$, por lo cual son tantos como los subconjuntos de $[2, n-2]$ sin elementos consecutivos, que por el problema 5.12 son F_{n-1}.

De allí que $X_n = F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$, por el problema 5.13.

5.15 (pág. 40) La primera recta crea dos regiones no acotadas, y cada recta subsiguiente aumenta el número de regiones no acotadas en 2, por lo tanto con

$n \geq 1$ rectas en posición general se tienen $2n$ regiones no acotadas y $\frac{1}{2}(n^2+n)+1-2n = \frac{1}{2}(n^2-3n)+1$ regiones acotadas.

5.16 (pág. 40) Para que el número de regiones sea máximo cada circunferencia debe cortar a cada una de las restantes en 2 puntos. Haga una tabla para los primeros valores y después encuentre una recurrencia como en el problema P1. La respuesta es n^2-n+2.

5.17 (pág. 40) Sea P_n el número de regiones en que n planos en posición general (es decir, tales que no haya dos paralelos, ni tres que pasen por una misma recta, ni cuatro concurrentes en un punto) dividen el espacio. Entonces $P_0 = 1$ y $P_1 = 2$. Para $n > 1$, el n-ésimo plano intersecta a los otros $n-1$ planos en $n-1$ rectas en posición general, que lo dividen en $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ regiones planas, cada una de las cuales divide en dos partes una de las P_{n-1} regiones en que los primeros $n-1$ planos dividen al espacio. Por lo tanto se satisface la relación de recurrencia $P_n = P_{n-1}+1+n+\frac{n(n+1)}{2}$. Sumando estas igualdades para 1,2,…,n se llega a la solución $P_n = \frac{1}{6}(n^3+5n+6)$.

Capítulo 6

6.1 (pág. 43) (a) Hay $6! = 720$ maneras de formar las parejas en el primer baile.

(b) Hay $D_6 = 6!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!} = 360-120+30-6+1 = 265$ maneras de elegir parejas para el segundo baile.

6.2 (pág. 44) (a) Considere un desarreglo; el 1 deberá ir a un número $i \neq 1$, hay $n-1$ posibilidades. Ahora pueden suceder dos cosas: que i no regrese a 1 o que sí regrese. Si no regresa, el desarreglo da una biyección de $\{2,3,\ldots,n\}$ en $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i\}$ sin puntos fijos, de las cuales hay D_{n-1}. Si en cambio i va a dar a 1, los otros $n-2$ dan un desarreglo entre ellos, de los que hay D_{n-2}.

(b) Considere $A_n = \frac{D_n}{n!}$ y vea como es $A_n - A_{n-1}$. O también puede usar $B_n = D_n - nD_{n-1}$ e intentar con $B_n - B_{n-1}$.

6.3 (pág. 44) El número de placas sin la restricción es $\frac{(2n)!}{(2!)^n} = \frac{(2n)!}{2^n}$. Si P_i es el conjunto de placas donde el número i está en dos lugares consecutivos, el número que se busca es $\frac{(2n)!}{2^n} - |P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n|$. Usando el principio de inclusión-exclusión, bastará encontrar $|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_m}|$ para índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ con $m \leq n$. Ahora si los números iguales i_j los juntamos en uno, para $1 \leq j \leq m$, las placas donde $i_1, i_2, \ldots, i_m$ aparecen una sola vez y los restantes números dos veces son en total $\frac{(2n-m)!}{2^{n-m}}$. Y como hay $\binom{n}{m}$ maneras de elegir los m números iguales se tiene que,

$$\frac{(2n)!}{2^n} - |P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n| = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(2n-m)!}{2^{n-m}}.$$

6.4 (pág. 44) Numeremos las parejas de 1 a n, y las sillas alrededor de la mesa desde 1 hasta $2n$. Sea A_i el conjunto de disposiciones de los comensales en las cuales la pareja i está junta. Pruebe que

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = 2n \cdot (2n - k - 1)! \cdot 2^k$$

(para ello suponga que primero se sienta junta la pareja i_1, para lo cual obviamente hay $2n \cdot 2$ posibilidades, y considere a las parejas $i_2, \ldots, i_k$ como "unidades" que junto con los $2n - 2k$ comensales restantes pueden permutarse de $(2n - k - 1)!$ maneras, agregando el factor 2^{k-1} para dar cuenta de las dos maneras en que se puede ordenar cada pareja. Finalmente aplique el principio de inclusión-exclusión para obtener la respuesta

$$2n \sum_{k=0}^{n} (-2)^k (2n - k - 1)! \binom{n}{k}$$

Observación: Si se considerasen equivalentes las distribuciones que difieren solamente en una rotación, entonces hay que dividir el resultado anterior entre $2n$.

6.5 (pág. 44) Muestre que $[a, b](a, b) = ab$ y $[a, b, c] = \frac{abc}{(a,b)(b,c)(c,a)}(a, b, c)$, después use estas identidades.

6.6 (pág. 44) Sean A y B dos de las personas que son amigos. Sean P_A los amigos de A diferentes de B y P_B los amigos de B diferentes de A. Entonces $|P_A| \geq 10$, $|P_B| \geq 10$ y $|P_A \cap P_B| = |P_A| + |P_B| - |P_A \cup P_B| \geq 2 \cdot 10 - 14 = 6 > 0$. Luego hay un amigo común a A y B, digamos que es C. Sean P_C los amigos de C diferentes de A y B, tenemos que $|P_C| \geq 9$ y también que $14 \geq |(P_A \cap P_B) \cup P_C| = |P_A \cap P_B| + |P_C| - |P_A \cap P_B \cap P_C|$, por lo que $|P_A \cap P_B \cap P_C| \geq |P_A \cap P_B| + |P_C| - 14 \geq 6 + 9 - 14 = 1$, lo que garantiza que hay un amigo común a A, B y C.

6.7 (pág. 44) Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, B^A el conjunto de todas las funciones de A en B y $\text{Sobre}(A, B)$ el conjunto de las funciones sobreyectivas de A en B. Sea $G_i = \{f : A \to B \setminus \{b_i\}\}$ el conjunto formado por las funciones de A en B que no toman el valor b_i. Es claro que $\text{Sobre}(A, B) = B^A \setminus \bigcup_{i=1}^m G_i$. Observemos también que si F es un conjunto de k índices entre 1 y m entonces $\bigcap_{i \in F} G_i$ son las funciones de A en B que no toman ningún valor b_i con $i \in F$. Es decir que $\bigcap_{i \in F} G_i$ son las funciones de A en $B \setminus \{b_i : i \in F\}$, y por lo tanto su número es $(|B| - |F|)^n = (m - k)^n$. Sea $N(m) = \{1, 2, \ldots, m\}$, Recordemos que para cada k entre 0 y m hay $\binom{m}{k}$ subconjuntos de $N(m)$ con k elementos. Entonces por el Principio de inclusión-exclusión se tiene

$$|\text{Sobre}(A, B)| = \sum_{F \subset N(n)} (-1)^{|F|} |\bigcap_{i \in F} G_i| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m - k)^n$$

En esta última sumatoria podemos hacer variar k desde 0 hasta $m - 1$, puesto que el sumando correspondiente a $k = m$ es nulo, y efectuando el cambio de variable $h = m - k$ se obtiene la expresión alternativa $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+m} \binom{m}{k} k^n$.

6.8 (pág. 44) Sea $K \subset N)()$ un conjunto de k índices. Sean $X = \cap_{i\in K} A_i$ y $B_j = A_j \cap X$, para $j = 1, \ldots, n$. Aplicando la fórmula de Sylvester (y tomando complementos respecto a X) se tiene:

$$\left|\bigcap_{j\in K} B_j^c\right| = \sum_{H\subset \mathbb{N}(n)\setminus K} (-1)^{|H|} \left|\bigcap_{i\in H} B_i\right| = \sum_{K\subset F\subset N(n)} (-1)^{|F|-k} \left|\bigcap_{i\in F} A_i\right|$$

Por lo tanto el número de los elementos que pertenecen a exactamente k conjuntos es:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{K\subset N(n)\\ |K|=k}} \sum_{K\subset F\subset N(n)} (-1)^{|F|-k} \left|\bigcap_{i\in F} A_i\right| \\ &= \sum_{\substack{F\subset N(n)\\ |F|\geq k}} \sum_{\substack{K\subset F\\ |K|=k}} (-1)^{|F|-k} \left|\bigcap_{i\in F} A_i\right| \end{aligned}$$

y puesto que para cada $F \subset N(n)$ el número de sus subconjuntos con k elementos es $\binom{|F|}{k}$ se llega a la fórmula que se quería demostrar.

6.9 (pág. 45) Si Q es el cuadrado y T_1, T_2 y T_3 los triángulos, tenemos

$$6 = |Q| \geq |T_1| + |T_2| + |T_3| - |T_1 \cap T_2| - |T_2 \cap T_3| - |T_3 \cap T_1|,$$

por lo que $|T_1 \cap T_2| + |T_2 \cap T_3| + |T_3 \cap T_1| \geq 2+3+4-6 = 3$, luego algún sumando de la izquierda es mayor o igual a 1.

6.10 (pág. 45) Si $|x_i - x_{i+1}| = n$ entonces uno de x_i o x_{i+1} deberá ser menor a $n+1$. Para $k = 1, 2, \ldots, n$ se A_k el conjunto de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ que tienen a k y $k+n$ uno seguido del otro. Es fácil ver que, $|A_k| = 2 \times (2n-1)!$, los números k y $k+n$ pueden considerarse juntos para contar las permutaciones y el 2 porque entre ellos pueden permutarse. También $|A_k \cap A_h| = 2^2 \times (2n-2)!$, para $1 \leq k < h \leq n$, ahora hay que agrupar a k y $k+n$ y también a h y $h+n$. El número de permutaciones con la propiedad P es por el principio de inclusión-exclusión igual a:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &\geq \textstyle\sum_{k=1}^n |A_k| - \sum_{1\leq k<h\leq n} |A_k \cap A_h| \\ &= 2 \times (2n-1)! \times n - \binom{n}{2} \times 2^2 \times (2n-2)! \\ &= 2n \times (2n-2)! \times n \\ &= (2n)! \times \tfrac{n}{2n-1} > (2n)! \times \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego las permutaciones con la propiedad P son más que las permutaciones sin ella.

6.11 (pág. 45) Primero con el principio de inclusión-exclusión veamos que $n \geq 217$. Sean A_2, A_3, A_5, A_7, los subconjuntos de S que son múltiplos de $2, 3, 5, 7$ respectivamente. Entonces $|A_2| = 140$, $|A_3| = 93$, $|A_5| = 56$, $|A_7| = 40$, $|A_2 \cap A_3| = 46$,

$|A_2 \cap A_5| = 28$, $|A_2 \cap A_7| = 20$, $|A_3 \cap A_5| = 18$, $|A_3 \cap A_7| = 13$, $|A_5 \cap A_7| = 8$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 9$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = 6$, $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 4$, $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 2$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 1$. Luego $|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 140 + 93 + 56 + 40 - 46 - 28 - 20 - 18 - 13 - 8 + 9 + 6 + 4 + 2 - 1 = 216$ y entre cualesquiera 5 elementos de tal conjunto siempre hay 2 que pertenecen a uno de los conjuntos A_2, A_3, A_5 o A_7, y desde luego estos no son primos relativos, por lo que $n \geq 217$.
Ahora veamos que todo conjunto con 217 elementos o más deberá tener 5 que son primos relativos. Sea A un conjunto con $|A| \geq 217$. Sean $B_1 = \{$los primos en S, junto con el 1$\}$, $|B_1| = 60$, $B_2 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$, $|B_2| = 6$, $B_3 = \{2 \times 131, 3 \times 89, 5 \times 53, 7 \times 37, 11 \times 23, 13 \times 19\}$, $|B_3| = 6$, $B_4 = \{2 \times 127, 3 \times 87, 5 \times 47, 7 \times 31, 11 \times 19, 13 \times 17\}$, $|B_4| = 6$, $B_5 = \{2 \times 113, 3 \times 79, 5 \times 43, 7 \times 27, 11 \times 17\}$, $|B_5| = 5$, $B_6 = \{2 \times 109, 3 \times 73, 5 \times 41, 7 \times 23, 11 \times 13\}$, $|B_6| = 5$. Claramente los $B's$ son ajenos y $|B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6| = 88$. Al quitar estos 88 elementos de S quedan 192 números. Como A tiene mas de 217 elementos, entonces hay $217 - 192 = 25$ elementos que deberán estar entre los $B's$, pero no pueden haber solamente 4 en cada B_i (son 25 que hay que colocar en los 6 conjuntos B_i) luego existen 5 elementos de A que necesariamente están en algún B_i desde luego estos 5 son primos relativos.

Capítulo 7

7.1 (pág. 48) Si el grafo tiene n vértices y los grados fuesen todos diferentes, entonces deberían ser 0, 1, 2, ..., $n-1$. Pero el vértice de grado $n-1$ sería adyacente a todos los demás, y no podría haber un vértice de grado 0.

7.2 (pág. 48) Sean A, B, C, D y E los vértices de K_5. Pintemos las aristas AB, BC, CD, DE y EA de rojo y todas las demás de azul. Entonces no hay ningún triángulo monocromático.

7.3 (pág. 48) Supongamos que cada arista de K_9 se pinta de rojo o de azul. Consideremos tres casos. (a) Si de algún vértice P parten 4 aristas azules PA, PB, PC y PD, entonces si algún par de puntos de $\{A, B, C, D\}$ está unido por una arista azul, se forma un triángulo azul y listo. Si no, se tiene un K_4 rojo. (b) Si de algún vértice P parten 6 aristas rojas, el subgrafo generado por los otros 6 extremos contiene un triángulo azul (y listo) o un triángulo rojo, que con p forman un K_4 rojo. (c) No se da ni (a) ni (b); entonces de cada vértice parten 3 aristas azules y 5 aristas rojas. Pero esto es imposible, pues el grafo formado por las aristas azules tendría los 9 vértices de grado impar.

7.4 (pág. 49) Observemos que las nueve respuestas diferentes obtenidas por Halmos sólo pueden ser los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Consideremos los extremos: la persona A que dio 8 apretones de mano y la persona A' que no dio ninguno. Como A le dio la mano a todos los demás excepto a su pareja, y como A' no le dio la mano a nadie, A y A' deben ser pareja. Consideremos ahora la persona B

que dio 7 apretones de mano y la persona B' que dio exactamente uno. B no se dio la mano a sí mismo ni a su pareja, ni a A' (pues A' no le dio la mano a nadie), pero se la dio a todos los demás. Por su parte B' le dio la mano solamente a una persona, que debió ser A. Entonces B' es la pareja de B. Del mismo modo se ve que las personas que dieron 6 y 2 apretones de mano son pareja, y también lo son las que dieron 5 y 3 apretones de mano. Así todas las personas que respondieron la pregunta de Halmos están emparejadas, excepto la que dio 4 apretones de mano, que debe ser la esposa de Halmos. Es decir que la respuesta es 4. Aunque el problema no lo pide, es fácil ver que Halmos también dio 4 apretones de mano.

7.5 (pág. 49) Consideremos el grafo cuyos vértices son los participantes, con una arista uniendo a cada par de participantes que se conocen. Consideramos un vértice arbitrario v_1. Entre los 1610 vértices adyacentes elijamos uno cualquiera que llamamos v_2. Como v_2 no es adyacente a otros 401 vértices, de los otros 1609 vértices a los que v_1 es adyacente, v_2 es adyacente al menos a $1609 - 401 = 1208$ vértices. De esos vértices elijamos uno y llamémoslo v_3. De los 1207 restantes, al menos $1207 - 401 = 806$ deben ser adyacentes a v_3. Entre esos 806 elijamos v_4. De los 805 restantes, al menos $805 - 401 = 404$ deben ser adyacentes a v_4. Entre esos 404 elijamos v_5. De los 403 restantes, al menos $403 - 401 = 2$ deben ser adyacentes a v_5. Sea v_6 uno de esos dos. Es claro que v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 se conocen todos entre sí.

Nota: El Teorema de Turán afirma que si un grafo de n vértices no contiene subgrafos completos de orden k, entonces su número de aristas es a lo sumo $\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}$. En este problema el número de aristas es $2012 \cdot 1610/2 = 2012 \cdot 805$. Pero $\frac{6-2}{6-1} \cdot \frac{2012^2}{2} = \frac{2}{5}2012^2 < 2012 \cdot 805$, luego hay un subgrafo completo de orden 6.

7.6 (pág. 49) Condideremos el grafo cuyos vértices son las personas y la amistad la relación de adyacencia. Si hay n personas, entonces el grado de vada una es $(n-1) - 10 = n - 11$. Onservemos que si u es amiga de v y w, entonces v y w deben ser amigas. En efecto, si no lo fuesen entonces w sería enemiga de v, que es amiga de u, pero w es amiga de u, y se violaría la regla. Entonces u y sus $n - 11$ amigas forman un subgrafo completo de $n - 10$ vértices, ninguno de los cuales es adyacente a otros vértices. El grafo es entonces la unión disjunta de k grafps completos de $n - 10$ vértices cada uno. Como debe cumplirse $k(n-10) = n$ resulta $n = 10k/(k-1)$ y $k - 1$ debe dividir a 10, es decir que k puede ser 2, 3, 6 u 11 y los respectivos n serían 20, 15, 12 y 11.

7.7 (pág. 49) Llamemos $P(k)$ a la propiedad "para cualquier conjunto de k vértices hay otro vértice adyacente a todos ellos". G tiene la propiedad $P(n)$, y es claro que también tiene la propiedad $P(j)$ para $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Entonces si se toma un vértice v_1 en G, por $P(1)$ existe v_2 adyacente a v_1, y por $P(2)$ existe v_3 adyacente a v_1 y v_2, y así sucesivamente existen v_4,..., v_n, v_{n+1}, cada uno adyacente a todos los anteriores (y por lo tanto todos adyacentes entre sí). Además por la propiedad $P(n)$ aplicada a los n vértices restantes, debe haber un v_i $(1 \le i \le n+1)$ adyacente a todos ellos. Y como v_i es adyacente también a todos los v_j con $1 \le j \le n+1$, ya está.

7.8 (pág. 49) (a) Sean A y B dos vértices conectados por una arista. Sean V_A, V_B los conjuntos de vértices que se conectan a A y a B, respectivamente. $|V_A| \ge 4$, $|V_B| \ge 4$, por lo que $7 \ge |V_A \cup V_B| = |V_A| + |V_B| - |V_A \cap V_B| \ge 8 - |V_A \cap V_B|$. Luego, $|V_A \cap V_B| \ge 1$, lo que asegura que hay un vértice que se conecta tanto a A como a B.

(b) El mismo razonamiento funciona, sólo que ahora tenemos que, $|V_A| \ge k-1$, $|V_B| \ge k-1$ y

$$n-2 \ge |V_A \cup V_B| = |V_A| + |V_B| - |V_A \cap V_B| \ge 2k-2-|V_A \cap V_B|\,,$$

por lo que $|V_A \cap V_B| \ge 2k-n > 0$.

7.9 (pág. 49) Sea X el conjunto de las niñas y sea Y el conjunto de los niños. Para cada $A \subset X$ sea A' el subconjunto de Y formado por los niños que conocen a un número impar de niñas de A. Hay que probar que hay un par (A, A') tal que $|A| + |A'| \ge (m+n)/2$.

Ahora bien, cada niña x pertenece a 2^{n-1} subconjuntos de X (los que resultan de agregar x a cada subconjunto de $X \setminus \{x\}$), por lo tanto

$$\sum_{A \subset X} |A| = n2^{n-1}, \tag{*}$$

ya que cada niña se cuenta en la suma tantas veces como subconjuntos $A \subset X$ la contengan.

Del mismo modo cada y en Y pertenece a 2^{n-1} conjuntos A'. En efecto, sea x una niña conocida por y. Entonces la función f que a cada subconjunto A de X le hace corresponder la diferencia simétrica $A \triangle \{x\}$ (es decir $A \cup x$ si $x \notin A$ y $A \setminus \{x\}$ si $x \in A$) es biyectiva (ella es su propia inversa) y pone en correspondencia los subconjuntos de X en los que y tiene un número impar de conocidas con aquellos en los cuales y tiene un número par de conocidas. Es decir que tanto unos como otros son la mitad del total de subconjuntos de X, es decir 2^{n-1}. Esto implica que

$$\sum_{A \subset X} |A'| = m2^{n-1}, \tag{**}$$

De (*) y (**) se deduce que

$$\sum_{A \subset X} |A| + |A'| = 2^n \frac{m+n}{2},$$

y como hay 2^n sumandos, alguno de ellos debe ser $\ge (m+n)/2$.

7.10 (pág. 49) Sean I_1, I_2, $\ldots$, I_n las islas de Olimpia en orden decreciente de población (I_1 es Panacentro). Afirmamos que para cada isla I_k, con $2 \le k \le n$, existe un único $j < k$ tal que I_j e I_k están conectadas por un puente. En efecto, el enunciado del problema nos dice que que hay un camino c que va de I_1 a I_k, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que no pasa más de una vez por el mismo puente. Si la última isla visitada antes de llegar a I_k es I_j, por la segunda condición del problema debe ser $j < k$. Supongamos ahora por absurdo que hubiese un puente de otra isla I_i a I_k, con $i < k$. Si c no pasa por I_i entonces podríamos prolongar c hasta llegar a I_i, lo cual es absurdo pues I_i tiene menos población que I_k. Si en cambio c pasa por I_i debe ser $i < j < k$ y el camino c debe ser de la forma $I_1 \dots I_i \dots I_j I_k$. Pero entonces podríamos construir un nuevo camino recorriendo el tramo inicial $I_1 \dots I_i$ de c, pasando de allí directamente a I_k y luego a I_j, lo cual nuevamente es absurdo.

Ahora bien, I_2 debe estar directamente unida a I_1. A I_3 debe llegar un puente o bien desde I_1 o bien desde I_2. A I_4 debe llegar un puente desde I_1, I_2 o I_3, y así sucesivamente. Por el principio del producto el número total de maneras posibles para conformar los puentes está dado por $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!$.

Capítulo 8

8.1 (pág. 54) Un caballo al saltar en el tablero de ajedrez, pasa de una casilla de un color a otra de diferente color, así, si parte de una blanca, luego de una movida impar estará en negro y luego de una mopvida par estará en blanco. Entonces, si regresa a la casilla de la cual partió, deberá hacer un número par de movimientos.

8.2 (pág. 54) Para hacer el recorrido por todas las casillas necesita 63 saltos y en cada salto pasa de un cuadro de un color a un cuadro del otro color. Si parte de negro después de 63 movidas llega a un cuadro blanco; como los cuadros íniciales y finales son ambos negros es imposible hacer el recorrido.

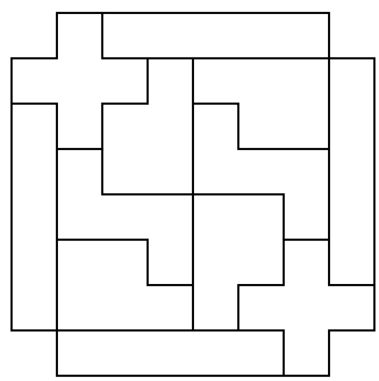
8.3 (pág. 54) No se puede, el número de cuadros negros y blancos en una columna no cambia después de hacer una operación.

8.4 (pág. 54) A los 27 cubitos los coloreamos de blanco y negro de manera tal que cubitos adyacentes sean de diferente color. Si el cubo central es blanco, habrá 13 cubitos blancos y 14 negros. La forma en que el ratón está obligado a comer los cubitos hace que cada vez que se come uno de un color el siguiente que se come es de color diferente. Si inicia comiendo un cubito negro, el último que come es también negro y entonces no es el del centro. Si inicia comiendo un cubito blanco, sólo podrá comer 26 cubitos y entonces no terminará de comer todo el queso.

8.5 (pág. 54) (a) El cuadrito de la esquina superior izquierda solamente se puede llenar de una forma y queda obligado como llenar los dos renglones superiores y las dos columnas de la izquierda. Luego el rectángulo de $n \times m$ es posible llenarlo con cuadrados de 2×2 si y sólo si el rectángulo $(n-2) \times (m-2)$ es posible llenarlo. Otra manera si n es impar coloree los renglones de negro y blanco en forma alternada, si m es impar entonces coloree las columnas, si inicia con negro habrá mas cuadritos negros que blancos, pero un cuadrado de 2×2 cubre 2 negros y 2 blancos.

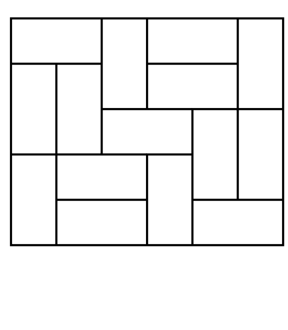
(b) Supongamos que el rectángulo es de lados $n \times m$. El cuadrito de la esquina superior izquierda solamente se puede llenar dos formas y queda obligado como llenar los dos renglones superiores o las dos columnas de la izquierda en cada caso. Pero entonces el cuadrito de la esquina superior derecha en el caso m impar (o los dos últimos cuadritos del primer renglón en el caso m par) o el de la esquina inferior izquierda en el caso n impar (o los dos últimos cuadritos de la primera columna en el caso n par) no podrán llenarse.

8.6 (pág. 54) (a) Una manera es la siguiente:

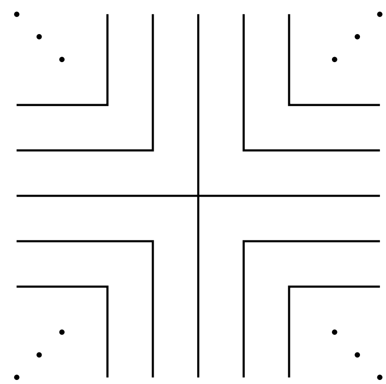


8.7 (pág. 55) Si la cuadrícula de 6×6 se cubre, cada recta interior vertical deberá ser atravesada por un número par de rectangulitos horizontales; esto porque cada rectangulito vertical abarca dos cuadritos. De igual manera cada recta interior horizontal deberá se atravesada por un número par de rectangulitos verticales. El número de rectas interiores es 10 (5 verticales y 5 horizontales) y cada uno de los 18 rectangulitos solamente corta a una de ellas, luego no es posible cubrir la cuadrícula como se pide.

Una forma de cubrir la cuadrícula de 6×5 con las condiciones pedidas se muestra en la siguiente figura:



8.8 (pág. 55) Si es posible, divida el plano de la siguiente manera y acomode los dominós de manera natural.



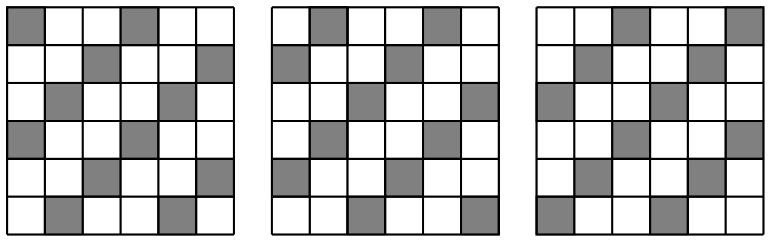
8.9 (pág. 55) (*a*) No es posible. Se colorea el tablero de blanco y negro como tablero de ajedrez. Si el camello está en cuadrito de un color después del salto deberá quedar en un cuadrito del mismo color, entonces el camello cuando salta no cambia de color y las casillas adyacentes al cuadrito de origen son de diferente color.

(*b*) No es posible. Se colorea el tablero con 4 colores siguiendo el siguiente patrón,

1	2	1	2	1	2	1	2	⋯
3	4	3	4	3	4	3	4	⋯
4	3	4	3	4	3	4	3	⋯
2	1	2	1	2	1	2	1	⋯

Un caballo que se encuentre en un lugar de color 1 (respectivamente 2), salta a un cuadrito de color 3 (respectivamente a uno de color 4). Y uno que este en cuadrito de color 3 (respectivamente 4) salta a uno de color 1 (respectivamente 2). Luego el caballo irá saltando intercalando colores 1 y 3 (o bien 2 y 4), pero nunca por los cuatro y entonces no podrá pasar por todos los cuadritos.

8.10 (pág. 55) Como en cada movida cambian de estado tres luciérnagas, la cantidad de luciérnagas encendidas cambia de paridad cada movida y como al inicio hay una encendida es necesario una cantidad impar de movidas. Escojamos una de las siguientes coloraciones del cuadrado de manera que la luciérnaga encendida no quede en un cuadrito coloreado.



En cada movida cambia de estado sólo uno de los cuadrados coloreados, luego la paridad de los cuadrados coloreados encendidos cambia cada movida. Al inicio hay cero cuadrados coloreados encendidos entonces sólo al aplicar una cantidad par de movidas la cantidad de cuadrados coloreados encendidos es par. Por el primer argumento, necesitamos un número impar de movidas y por el segundo argumento es necesario aplicar un número par de movidas, lo cual no es posible.

8.11 (pág. 55) No es posible. Pintemos las columnas alternadamente de negro y blanco, iniciando con negro. Cada rectángulo de 1×2 cubre un cuadríto negro y uno blanco y los rectángulos de 1×3 cubren tres cuadritos del mismo color. Si d es el número de rectángulos de 1×2, faltan por cubrir $2003 \times 1002 - d$ cuadritos negros y $2003 \times 1001 - d$ cuadritos blancos, estos que faltan se deben cubrir con rectángulos de 1×3, luego son necesarios $\frac{2003 \times 1002 - d}{3}$ rectángulos de 1×3 negros y $\frac{2003 \times 1001 - d}{3}$ rectángulos de 1×3 blancos. Estos dos números deberán ser enteros, la diferencia de ellos $\frac{2003}{3}$ también deberá ser entero, pero es no es posible.

Capítulo 9

9.1 (pág. 59) Bruno tiene una estrategia ganadora. En efecto, inicialmente Ana puede descartar 1, 2 ó 3 barajitas, pasándole 6, 5 ó 4 a Bruno. Si Bruno recibe 6 descarta 3, si recibe 5 descarta 2 y si recibe 4 descarta 1, pasándole en cualquier caso 3 barajitas a Ana. Ahora Ana sólo puede descartar una y pasarle 2 a Bruno, quien descarta una, le pasa la otra a Ana, y gana.

9.2 (pág. 59) Si k no divide a n, Ana tiene una estrategia ganadora, que consiste en dejarle siempre a Bernardo un número de piedras múltiplo de k. Si k divide a n, Bernardo es quien tiene una estrategia ganadora.

9.3 (pág. 59) Si n dividido entre $k+1$ deja un resto diferente de 1, Ana tiene una estrategia ganadora, que consiste en dejarle siempre a Bernardo un número de piedras que deje resto 1 al ser dividido entre $k+1$. En caso contrario, Bernardo es quien tiene una estrategia ganadora.

9.4 (pág. 59) Andrés tiene una estrategia ganadora, que consiste en partir la barra dejándole siempre un cuadrado a Berta. En su primera jugada le dejará un cuadrado de 4×4. En lo sucesivo, si Berta recibe un cuadrado de $k \times k$ con $k > 1$, deberá partirlo dejando un rectángulo de $k \times h$, con $h < k$, el cual Andrés partirá dejando un cuadrado de $h \times h$. Así eventualmente Berta recibirá un cuadrado de 1×1 y perderá.

9.5 (pág. 59) Sea r la mediana horizontal del tablero, es decir la línea horizontal que pasa por los puntos medios de los dos lados verticales y divide el tablero a la mitad. Entonces B tiene una estrategia ganadora que consiste en hacer siempre la jugada simétrica respecto a r de la que hizo A. Si A pone una ficha en la casilla X y B lo hace en la simétrica X', es claro que B anotará tantos puntos como A y posiblemente uno más, cuando X sea vecina de X'. Esto ocurrirá cuatro veces, cuando A coloque una ficha en una casilla que tenga un lado sobre r. Por lo tanto al final B sumará al menos cuatro puntos más que A, los cuales le permitirán ganar a pesar de los tres puntos de ventaja con los que cuenta A.

9.6 (pág. 60) B tiene estrategia ganadora. Al inicio, A recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a Bun número par de piedras (la diferencia de dos impares es par). Si le deja 0 piedras, listo, B gana. Si en cambio le deja un número par de piedras mayor que 0, B retira cualquier divisor impar de ese número (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un número impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

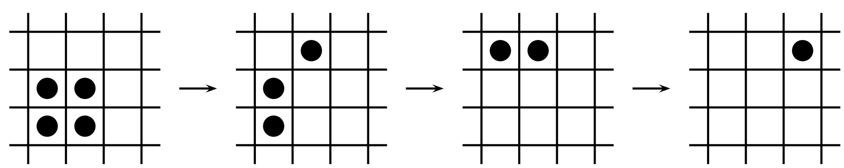
9.7 (pág. 60) Si al menos uno de los números m y n es impar, A tiene una estrategia ganadora que consiste en retirar una carta de cada pila impar, de manera tal que en ambas pilas quede un número par de cartas. Si m y n son ambos pares entonces B tiene una estrategia ganadora.

9.8 (pág. 60) Rojo tiene una estrategia ganadora, que consiste en seleccionar, cada vez que le toca jugar, una línea del tablero perpendicular a la seleccionada por Azul en su jugada previa. Para probar que esta estrategia es ganadora observemos que cada casilla del tablero es pintada exactamente dos veces, una cuando uno de los jugadores selecciona la fila en la cual se encuentra la casilla, y otra cuando alguno selecciona su columna. Luego de las dos primeras jugadas una sola casilla alcanza su color final, y éste es rojo. Luego de las jugadas 3 y 4, tres nuevas casillas alcanzan su color final, y de ellas dos quedarán rojas y 2 azul. En general luego de las jugadas $2k-1$ y $2k$ hay $2k-1$ nuevas casillas que alcanzan su color final, de las cuales $k-1$ quedarán azules y k quedarán rojas. Como cada dos jugadas el número de casillas rojas aumenta en uno, al final Rojo tendrá una ventaja de 10 casillas sobre Azul y ganará el juego.

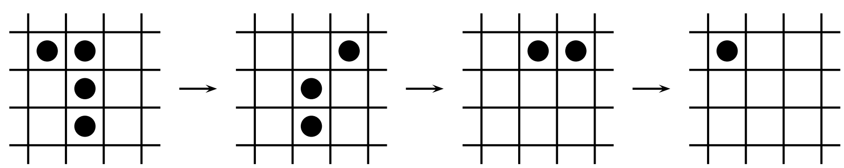
9.10 (pág. 60) Sea r la mediana horizontal del tablero, es decir la línea horizontal que pasa por los puntos medios de los dos lados verticales y divide el tablero a la mitad. Entonces B tiene una estrategia ganadora que consiste en hacer siempre la jugada simétrica respecto a r de la que hizo A. Si A pone una ficha en la casilla X y B lo hace en la simétrica X', es claro que B anotará tantos puntos como A y posiblemente uno más, cuando X sea vecina de X'. Esto ocurrirá cuatro veces, cuando A coloque una ficha en una casilla que tenga un lado sobre r. Por lo tanto al final B sumará al menos cuatro puntos más que A, los cuales le permitirán ganar a pesar de los tres puntos de ventaja con los que cuenta A.

9.11 (pág. 61) Es claro que el primero que al jugar deje menos de 3 puntos aislados (es decir, que no sean extremo de ningún segmento) pierde, ya que su contrario puede jugar de manera de conectar el punto o los dos puntos que estén aislados. Ahora bien, 95 puntos se pueden conectar por medio de $\binom{95}{2} = 95 \cdot 94/2 = 4465$ segmentos. Como este número es impar, José (el que inicia el juego) tiene una estrategia ganadora. En efecto, cuando queden 3 puntos aislados José debe jugar trazando segmentos entre los 95 que ya están conectados. Como José comienza y 4465 es impar, él será también quien trace el último de estos segmentos. Entonces María al jugar dejará uno o dos puntos aislados y José gana. Si habiendo 4 puntos aislados María conecta dos de ellos, para evitar que haya 95 puntos conectados, José gana de inmediato conectando los otros dos.

9.12 (pág. 61) Obviamente se puede para $n = 1$ y también para $n = 2$:



La siguiente maniobra permite eliminar una hilera de tres fichas si hay una ficha a un lado de un extremo y una casilla vacía del otro lado:



Si $n > 4$ la aplicación reiterada de la maniobra anterior permite eliminar las fichas de una banda de $3 \times n$ en un borde del cuadrado inicial de $n \times n$, y luego las fichas de otra banda de $3 \times (n-3)$, dejando fichas solamente en un cuadrado de $(n-3) \times (n-3)$. De esta manera se puede reducir el caso n al caso $n-3$. Por tanto, siempre se puede dejar una ficha en el tablero si n no es múltiplo de 3.

Si $n = 3k$ lo anterior no es posible. Para verlo asignemos coordenadas enteras a las casillas, de modo que las ocupadas inicialmente tengan coordenadas (i, j) para $i, j = 1, 2, \ldots, 3k$. Definamos el *tipo* de una casilla (i, j) como $i + j$ mód 3, es decir como 0, 1 ó 2 según sea el resto de la división de $i+j$ entre 3. Sea f_i el número de fichas en casillas de tipo i. Inicialmente $f_0 = f_1 = f_2 = 3k^2$. Con cada movimiento dos de los f_i disminuyen en 1 y el otro aumenta en 1, es decir que los tres cambian de paridad. Por lo tanto los tres tendrán siempre la misma paridad. Si llegase a quedar una sola ficha en el tablero entonces un f_i sería 1 y los otros dos 0, lo cual es imposible.

9.13 (pág. 61) Hay varias formas de probar este resultado, pero la idea básica es que si ninguno de los dos jugadores tuviese una estrategia ganadora (ega en lo sucesivo) entonces podría producirse un juego infinito, contradiciendo las hipótesis. Supongamos que en un juego J ni el primer jugador A ni el segundo B tengan una ega. Observemos que A debe tener alguna jugada disponible, pues de lo contrario la posición inicial sería también final y las reglas determinarían quién es el ganador. Así A o B tendrían una ega sin necesidad de hacer nada. Sea J_x el juego que resulta después que A ha realizado una jugada x de las que dispone en su primer turno. Si B tuviese una ega en J_x para toda x, entonces es claro que B tendría una ega en J, absurdo. Luego existe una jugada a para la cual B no tiene ega en J_a. Pero A tampoco tiene ega en J_a, pues de tenerla también la tendría en J. Así se tiene un juego J_a que cumple las mismas hipótesis que J, sólo que ahora B es quien juega primero. El mismo razonamiento nos dice que B tendría una jugada b tal que en J_{ab} ni A ni B tienen ega, luego A tendría una jugada c tal que en J_{abc} ni A ni B tienen ega, y continuando de esta forma se generaría una partida infinita.

Capítulo 10

10.1 (pág. 64) Si el número de árboles es impar, digamos $2n+1$, puede lograrse que todos los loros terminen en un mismo árbol. Para ello basta que cada par de loros en árboles ubicados simétricamente respecto al árbol $n+1$ vuelen hacia él. Por ejemplo para 5 árboles vuelan $2 \to 3$ y $4 \to 3$, $5 \to 4$ y $1 \to 2$, $2 \to 3$ y $4 \to 3$. Si el número de árboles es par, digamos $m = 2n$, no puede lograrse que todos los loros estén en un mismo árbol en algún momento. Supongamos que en cierto momento hay l_j loros en el árbol j y consideremos la siguiente suma:

$$S = 1 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2 + \cdots + m \cdot l_m.$$

Cuando un loro vuela en sentido horario, S se incrementa en 1 o decrece en $m-1$, pero como hay un loro que vuela en dirección contraria la suma decrece en 1 o se incrementa en $m-1$. El resultado es que la suma cambia en 0, m ó $-m$. Luego el residuo de la suma al dividir entre m no cambia. La suma al inicio es

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \cdots + m \cdot 1 = \frac{m(m+1)}{2}$$

que no es divisible entre m, ya que $m+1$ es impar. Pero si todos los loros quedaran juntos al final, digamos en el árbol a, la suma sería $a \cdot m$ que es divisible entre m.

10.2 (pág. 64) La paridad del número de limones es invariante, por lo tanto la última fruta que crece en el árbol es un limón.

10.3 (pág. 64) No. El número de partes es siempre congruente con 1 módulo 9.

10.4 (pág. 64) En cada paso la cantidad $p+q+r$ decrece en 1. Puede ir cambiando las cantidades cuidando de no llegar a una posición $(n, 0, 0)$ con $n \geq 3$. Cuando $p + q + r$ sea 3, haga un análisis de casos.

10.5 (pág. 64) Distribuya las personas en dos comités A y B de cualquier manera. Si una persona tiene más de un enemigo en el comité en que está, cámbiela al otro comité, donde tendrá a lo sumo un enemigo. La suma del número de pares de enemigos en cada comité disminuye en cada operación. Cuando llegue a su valor mínimo se habrá logrado el objetivo.

10.6 (pág. 64) Distribúyalos alrededor de la mesa. Si hay una pareja mal sentada AB cámbiela así: a la derecha de A están sus n amigos; los embajadores sentados a la derecha de cada uno de esos amigos no pueden ser todos enemigos de B, luego hay una pareja $A'B'$, donde A' es amigo de A y B' es amigo de B. Invierta el orden de todo el arco BA'; de este modo quedan juntos AA' y BB' y no se agrega ningún par de enemigos nuevo. Prosiga de esta manera hasta que no queden pares de vecinos enemigos.

10.7 (pág. 64) El número de cabezas siempre es congruente con 100 módulo 3. Como ninguno de los números 5, 11 y 21 es congruente con 1 módulo 3, no es posible lograr que el dragón desaparezca.

10.8 (pág. 64) Se puede introducir un proceso en este problema considerando que, partiendo de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, se llega a $(1, 1, \ldots, 1)$ cambiando los signos de los elementos negativos uno a uno. Analice cómo se modifica el valor de la suma $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3$ cuando se cambia de signo un a_i y pruebe que S mód 4 es un invariante.

10.9 (pág. 65) Si $a > b$ entonces $\text{mcd}(a - b, b) = \text{mcd}(a, b)$ y si $a < b$ entonces $\text{mcd}(a, b-a) = \text{mcd}(a, b)$, es decir que el máximo común divisor de las coordenadas es un invariante. Como $\text{mcd}(86415, 69118) = 7$ y $\text{mcd}(1, 1) = 1$, le respuesta es que no es posible. De hecho, las trayectorias que parten de (a, b) siempre terminan en (d, d), donde $d = \text{mcd}(a, b)$.

10.10 (pág. 65) El producto de los elementos en las casillas marcadas con x es un invariante. Como inicialmente es -1, no es posible obtener un tablero sin elementos negativos.

	x	x	
x			x
x			x
	x	x	

10.11 (pág. 65) Como

$$(0{,}6a - 0{,}8b)^2 + (0{,}8a + 0{,}6b)^2 = a^2 + b^2,$$

la suma de los cuadrados de los tres números es un invariante. Su valor inicial es $3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$, mientras que $4^2 + 6^2 + 12^2 = 196$, por lo tanto no es posible llegar a tener los números 4, 6 y 12.
Si los tres números se interpretan como las coordenadas (x, y, z) de un punto en el espacio, las operaciones permitidas corresponden a rotaciones alrededor de los ejes coordenados, las cuales no alteran la distancia $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ del punto al origen.

10.12 (pág. 65) (a) Sí. Basta invertir los colores de las filas 1, 3, 5 y 7 y luego los de las columnas b, d, f y h. (b) No, porque la paridad del número de esquinas negras es un invariante.

10.13 (pág. 65) Sí. Si una columna sólo contiene ceros, la dejamos así (como las duplicaciones de filas no la afectan, quedará llena de ceros hasta el final). Si una columna tiene todos sus elementos iguales, digamos a x, restando 1 a esa columna x veces se llena de ceros. Si los elementos de la columna j no son todos iguales, sea m el menor de ellos. Podemos suponer que $m = 1$, ya que de lo contrario basta restar 1 a la columna $m - 1$ veces. Multipliquemos ahora por 2 todas las filas con un 1 en la columna j, restando luego 1 a la columna. Loos unos siguen siendo unos, pero los demás elementos de la columna disminuyen en 1. Repitiendo este proceso si es necesario se llegará eventualmente a una columna j con puros unos, la cual se transforma en una columna de ceros restando 1. Repitiendo el proceso con las columnas no nulas que queden, se llegará eventualmente a una matriz con puros ceros.

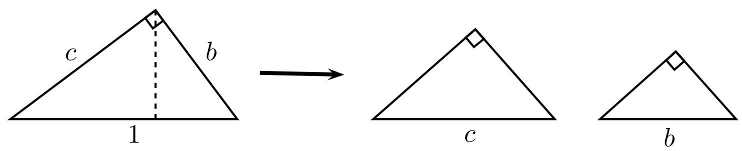
10.14 (pág. 65) La operación indicada deja invariante la suma de las cifras módulo 9. Si repitiendo el proceso se obtuviese un número N de diez cifras diferentes, la suma de sus cifras sería $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \equiv 0 \pmod{9}$. Pero esto es imposible pues 7^{2010} no es múltiplo de 9.

10.15 (pág. 65) Luego de algunos intentos fallidos, uno comienza a pensar que es imposible. Si aplicamos las rotaciones permitidas al punto (0,0) vemos que se obtienen los puntos (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1), (2,0), (0,2), etc., pero en cambio no pueden obtenerse (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (2,1), (1,2),... Esto nos sugiere que sólo pueden obtenerse puntos con suma de coordenadas par, como el origen. De hecho, la paridad $I(P) = x + y \bmod 2$ de la suma de ambas coordenadas de un punto $P = (x, y)$ es un invariante. En efecto, si se aplica a P la rotación R de centro (a, b) se obtiene $R(P) = (a+b-y, b-a+x)$. La diferencia entre la suma de coordenadas de $R(P)$ y P es $(a+b-y)+(b-a+x)-(x+y) = 2(b-y)$ que es par, luego $I(P) = I(R(P))$. Ahora bien, para el primer triángulo se tiene $I(0, 0) = 0$, $I(1, 0) = I(0, 1) = 1$, es decir que I es 0 en un vértice y 1 en los dos restantes, mientras que para el segundo $I(0, 0) = I(1, 1) = 0$, $I(1, 0) = 1$. Inmediatamente se concluye que es imposible transformar uno en otro.

10.16 (pág. 66) No es posible. Esto es consecuencia de que la suma módulo 2 del número de fila en que se encuentra la casilla vacía y la paridad (par = 0, impar

= 1) de la permutación de los números en las fichas (al leerlos de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha) es un invariante.

10.17 (pág. 66) Tomemos la hipotenusa de los triángulos iniciales como unidad y sean a y b las longitudes de los catetos. Cada división produce triángulos semejantes al que se divide con razón a ó b.



Por lo tanto cada triángulo generado será semejante a los iniciales, con razón $a^i b^j$ para ciertos enteros $i, j \geq 0$. Cada triángulo de este tipo se puede asociar con una ficha colocada en el punto de coordenadas (i, j) del plano cartesiano. Inicialmente hay cuatro fichas en el punto $(0, 0)$. Asignemos ahora a cada ficha ubicada en (i, j) un *peso* igual a 2^{-i-j}. La división de un triángulo de tipo (i, j) genera un triángulo de tipo $(i + 1, j)$ y otro de tipo $(i, j + 1)$. Esta operación no cambia el peso total de las fichas, que es por lo tanto un invariante y su valor es el inicial, es decir 4. Ahora bien, si en un número finito de pasos se logra que en ningún punto (i, j) haya más de una ficha, el peso total sería menor que 4, lo cual es imposible. En efecto, el conjunto de todas las fichas puede encerrarse dentro de un rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, m)$ y (n, m) y el peso de las fichas en ese rectángulo es a lo sumo

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} 2^{-i-j} = \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} \sum_{j=0}^{m} 2^{-j} = (2 - 2^n)(2 - 2^m) < 4.$$

Siglas de algunas competencias matemáticas mencionadas en esta obra.

AIME Examen Invitacional Americano de Matemática (USA)

Canguro Canguro Matemático

IMO Olimpiada Internacional de Matemática

OIM Olimpiada Iberoamericana de Matemática

OJMV Olimpiada Juvenil de Matemáticas (Venezuela)

OM Olimpiada de Mayo

OMCC Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

ORM Olimpiada Recreativa de Matemáticas (Venezuela)

Bibliografía

[1] Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.

[2] Gómez Ortega, J. A. y Nieto, J. H., *Heurísticas y Principios para Resolver Problemas de Concursos de Matemáticas* (en preparación).

[3] Halmos, P. R., *The Heart of Mathematics*, American Mathematical Monthly, **87**(7), 1980, 519–524.

[4] Nieto, J. H., Sánchez, R., Vielma, L., *Olimpiada Juvenil de Matemática 2011*, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas, 2012.

[5] Nieto, J. H., Sánchez, R., Vielma, L., *Olimpiada Juvenil de Matemática 2010*, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas, 2011.

[6] Nieto, J. H., *Resolución de Problemas Matemáticos*, AFAMac, Mayagüez, Puerto Rico, 2010. Disponible en `http://www.jhnieto.org/libros.htm`

[7] Nieto, J. H., *Resolución de Problemas Matemáticos*, XI Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática, Mérida, 2006 y 2007.

[8] Nieto, J. H., *Olimpiadas Matemáticas - El arte de resolver problemas*, Los Libros de El Nacional, Caracas, 2005.

[9] Nieto, J. H., *Teoría Combinatoria*, EDILUZ, Maracaibo, 1996. Disponible en `http://www.jhnieto.org/libros.htm`

[10] Martínez, H., Nieto, J. H., Sánchez L., R., Sarabia, E., Vielma, L., *Olimpiada Juvenil de Matemática 2009*, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas, 2010.

[11] Polya, G., *How to solve it; a new aspect of mathematical method*, Princeton University Press, Princeton, 1945. Hay traducción: *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1965.

[12] Queneau, R., *Cent Mille Milliards de Poèmes*, Gallimard, Paris, 1961.

Índice alfabético

ACM, 6
AIME, 17, 27
algoritmo de Euclides, 81

biyección, 10

Calendario Matemático, 7
Canguro, 5, 15, 26, 27
colorear, 50
combinaciones, 21
    con repetición, 23
combinatoria, 2, 10
    enumerativa, 11
condiciones iniciales, 35
contar, 11

desarreglos, 43
Dirichlet, P. G. L., 29

ejercicio, 1
entrenamiento, 7
Erdös, P., 30
espacio muestral, 15
estrategia, 56
Euler, L., 42
experimento aleatorio, 15

fórmula
    de Binet, 37
    de la criba de Jordan, 44
    de Stifel, 22
Fibonacci, Leonardo, 34
finito, 10
función, 18
    biyectiva, 10
    creciente, 28
    de Euler, 42
    inyectiva, 10, 19, 29
    sobre, 10

grafo, 46
    completo, 47
    conexo, 47
    euleriano, 47

Halmos, P. R., 1, 49

IMO, 4, 28, 32, 61
invariante, 62

Jordan, C., 44
juegos, 56

Liber Abaci, 34

MMO, 66

número
    de elementos, 10
números
    de Bell, 24
    de Fibonacci, 34
    de Lucas, 35, 39
    de Ramsey, 48
    de Stirling, 24

OIM, 5, 33, 60, 61
OJM, 6, 16, 17, 26–28, 39, 59, 60
olimpiadas matemáticas, 1, 3
OM, 6, 32, 33, 52, 55

OMCC, 5, 17, 27, 49, 60
OMCS, 65

partición, 24
pentaminó, 54
permutaciones, 19
    circulares, 20
Pisa, Leonardo de, 34
principio
    de biyección, 11
    de inclusiones y exclusiones, 41
    de invariancia, 62
    de la suma, 12
    de las casillas, 29
    del producto, 13
probabilidad, 14
problema, 1

Queneau, R., 14

Ramsey, F. P., 48
recurrencia, 34, 35
relación
    de recurrencia, 35

subconjuntos, 18

teorema
    de Turán, 87
    de Zermelo, 56, 61
tetraminó, 51
triángulo aritmético, 23