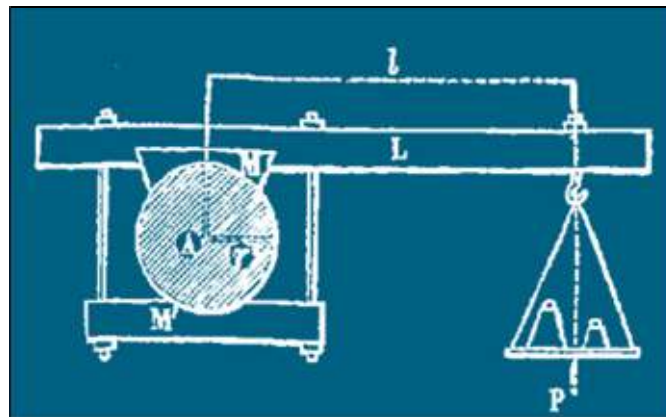


# COURS DE MECANIQUE GENERALE

ISAT - Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports  
Université de Bourgogne - Nevers

Année Universitaire 2002-2003



Paolo Vannucci



# **COURS DE MECANIQUE GENERALE**

Polycopies des cours de Mécanique Générale 1 et 2  
dispensés à l'ISAT (Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports),  
Université de Bourgogne, par P. Vannucci

Année universitaire 2002 – 2003

## PREFACE

Ces polycopiées sont destinées à être un support pédagogique pour les élèves de la première et de la deuxième année de l'ISAT, où je dispense le cours de Mécanique Générale depuis maintenant trois ans. Les sujets abordés dans ce cours sont ceux établis par le Conseil Pédagogique de l'ISAT, et approuvés par la Commission des Titres d'Ingénieur ; il s'agit de sujets typiques d'un enseignement de mécanique dans une école d'ingénieurs. Conformément à ces indications, le cours est articulé en trois grandes parties : cinématique, dynamique newtonienne et dynamique lagrangienne.

La cinématique se compose des chapitres 3 à 5, consacrés respectivement à la cinématique du point, à la cinématique relative et à celle du corps rigide. Différents thèmes sont développés dans cette partie, comme par exemple la décomposition de vitesse et accélération dans le trièdre de Frenet, ainsi que dans les repères sphériques et cylindriques, les lois fondamentales de la cinématique, les transformations galiléennes de repère, les angles d'Euler, la théorie des grandes et petites rotations, les théorèmes d'Euler et de Chasles.

La dynamique newtonienne est articulée sur six chapitres ; le numéro 6 est consacré à l'introduction des principes de Newton et des théorèmes fondamentaux de la dynamique du point, ainsi que des principaux types de forces conservatives. Successivement, on aborde dans le chapitre 7 l'étude classique du mouvement d'un point matériel dans un champ de force centrale, avec application à la mécanique céleste. Le chapitre 8 est consacré à l'étude d'un type particulièrement important de forces non conservatives, les forces dissipatives. Ensuite, dans les chapitres 9 et 11 on généralise, respectivement aux systèmes discrets et aux corps rigides, les résultats déjà acquis pour le point matériel. Pour la dynamique du corps rigide, les mouvements à la Poinsot sont brièvement introduits. Le chapitre 10 est consacré à l'étude des propriétés d'inertie des systèmes matériels, outil indispensable pour aborder la dynamique du corps rigide. Finalement, le chapitre 12 est consacré à la dynamique impulsive, où les lois propres à l'étude des chocs sont introduites, aussi bien pour un point matériel que pour un corps rigide, libre ou soumis à des liens.

Les chapitres 13 à 17 sont consacrés à une introduction à la mécanique lagrangienne. Plus en détail, le chapitre 13 est consacré au Principe des Travaux Virtuels, et le 14 aux équations de Lagrange. Successivement, ces résultats sont appliqués à l'étude de deux problèmes fondamentaux, et liés, en mécanique : la stabilité et bifurcation des configurations d'équilibre, dans le chapitre 15, et l'analyse des petites oscillations, dans le chapitre 16, où la théorie de l'analyse modale est montrée dans ses lignes essentielles. Le chapitre 17 termine cette partie et le cours avec l'étude d'un cas classique, celui de l'oscillateur simple.

Parmi les différentes approches possibles à l'étude de la mécanique générale, j'ai choisi celle qui me semble la plus honnête, lorsqu'on s'adresse à des élèves de niveau universitaire : une approche moderne qui fait appel à une certaine rigueur mathématique, qui seule permet d'analyser et de donner compte des lois de la nature. Galilée même, à l'aube difficile de la mécanique, avait déjà compris que la nature est un livre écrit avec des caractères mathématiques\*. J'ai quand même essayé de rendre cette approche la plus sobre et élégante possible, comme mes maîtres m'ont appris, et

---

\* "La philosophie est écrite dans ce grand livre, l'univers, qui ne cesse pas d'être ouvert devant nos yeux. Mais ce livre ne peut se lire si on ne comprends pas le langage et on ne connaît pas les caractères avec lesquels il est écrit. Or, la langue est celle des mathématiques, et les caractères sont triangles, cercles et d'autres figures géométriques. Si on ne les connaît pas, c'est humainement impossible d'en comprendre même pas un seul mot. Sans eux, on ne peut qu'aller à la dérive dans un labyrinthe obscur et inextricable". G. Galilei, "Il Saggiatore", Rome, 1623.

d'utiliser une notation qui rende le plus possible lisibles les formules et les passages analytiques, sans les aggraver d'indications non indispensables et lourdes. C'est pour cela que j'ai choisi sans hésitation la convention typographique moderne pour les textes des mathématiques.

Dans une époque où le progrès scientifique est rapide comme jamais auparavant, même la mécanique classique, science parmi les plus anciennes, se doit de se renouveler, évidemment non pas dans les contenus et les résultats, mais sans doute dans les méthodes. Je n'ai donc pas eu de doutes à utiliser l'algèbre tensorielle, outil mathématique moderne de si grande clarté et utilité dans les applications en mécanique, qu'un effort initial, nécessaire à sa maîtrise, est à mes yeux largement justifié et rémunéré dans la suite. C'est pour ça que le premier chapitre est consacré à une rapide introduction à l'algèbre tensorielle, qui n'est pas exhaustive, sans doute, mais qui a pour seul but celui d'introduire le formalisme tensoriel et les résultats dont on fera usage dans les chapitres suivants. Dans le même chapitre sont rappelés aussi des éléments d'analyse vectorielle et de géométrie différentielle qui seront eux aussi utilisés dans la suite du cours. Le chapitre 2 est consacré à un sujet particulier, à mi-chemin entre les mathématiques et la mécanique, celui des vecteurs appliqués.

Certaines connaissances des mathématiques sont bien sûr indispensables pour aborder l'étude de la mécanique, et ce cours n'échappe pas à cette règle : si, comme indiqué auparavant, certains sujets sont directement introduits dans le premier chapitre de ce cours, d'autres sont considérés appartenir au bagage de connaissances du lecteur, qui doit suffisamment maîtriser le calcul différentiel et intégral pour les fonctions d'une variable, l'algèbre linéaire, la géométrie analytique des courbes coniques et la solution d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants.

Pour terminer, je m'excuse à l'avance avec le lecteur si le style n'est pas excellent, et si la syntaxe n'est pas digne d'un texte écrit. J'ai essayé, sans être sûr d'avoir réussi, de faire de mon mieux et de ne pas trop maltraiter cette magnifique langue qui est le français, et qui n'est pas la mienne.

Nevers, 26 septembre 2002

Paolo Vannucci

## SYMBOLES UTILISES

$\forall$  : pour chaque  
 $\exists$  : existe au moins un  
 $\exists!$  : existe un seul  
 $\in$  : appartient  
/ ou ':' : tel que  
 $\alpha, \beta, k, v, u$  etc. : scalaires  
 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  etc. : vecteurs  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{L}$  etc. : tenseurs du deuxième ordre  
 $\mathcal{E}$  : espace euclidien  
 $\mathcal{V}$  : espace vectoriel des translations  
Lin : espace vectoriel des tenseurs du deuxième ordre  
 $\cdot$  : produit scalaire  
 $\wedge$  : produit vectoriel  
 $\otimes$  : produit dyadique  
 $|k|$  : valeur absolue d'un scalaire  
 $|\mathbf{v}|$  : norme d'un vecteur  
 $|\mathbf{L}|$  : norme d'un tenseur  
 $\dot{p}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{L}}$  : dérivation par rapport au temps  
 $\nabla$  : gradient  
 $\mathbf{I}_o$  : tenseur d'inertie relatif au point  $o$   
 $C$  : barycentre  
 $U$  : potentiel  
 $V$  : énergie potentielle  
 $T$  : énergie cinétique  
 $E$  : énergie mécanique totale  
 $\mathcal{L}$  : travail  
 $W$  : puissance  
 $\delta p$  : déplacement virtuel  
 $\delta \mathcal{L}$  : travail virtuel  
 $\delta W$  : puissance virtuelle  
 $\mathbf{Q}$  : quantité de mouvement  
 $\mathbf{K}_o$  : moment de la quantité de mouvement par rapport au point  $o$   
 $L$  : lagrangienne  
 $\omega$  : vitesse angulaire  
 $\varpi$  : fréquence  
 $\nu$  : fréquence circulaire, coefficient de frottement  
 $\tau$  : période  
 $\mathbf{I}$  : vecteur impulsion  
 $\mathbf{R}$  : résultante des forces impulsives  
 $\mathbf{M}$  : moment résultant des forces impulsives  
 $\mu$  : masse réduite, masse d'impact

## TABLE DES MATIERES

### Chapitre 1

#### ELEMENTS DE CALCUL VECTORIEL ET TENSORIEL

1.1	Espace euclidien	1
1.2	Points et vecteurs	1
1.3	Produit scalaire, distance, orthogonalité	3
1.4	Base de $\mathcal{V}$	4
1.5	Expression du produit scalaire	4
1.6	Tenseurs du deuxième ordre	5
1.7	Produit dyadique	5
1.8	Composantes cartésiennes d'un tenseur du deuxième ordre	5
1.9	Produit tensoriel	6
1.10	Transposé d'un tenseur	6
1.11	Tenseurs symétriques et antisymétriques	7
1.12	Trace d'un tenseur	7
1.13	Produit scalaire de tenseurs	8
1.14	Déterminant d'un tenseur	8
1.15	Valeurs et vecteurs propres d'un tenseur	9
1.16	Produit vectoriel	11
1.17	Orientation d'une base	12
1.18	Tenseur inverse	13
1.19	Changement de base	14
1.20	Repères	17
1.21	Courbes de points, vecteurs et tenseurs	19
1.22	Dérivée d'une courbe	20
1.23	Intégration d'une courbe, abscisse curviligne	21
1.24	Le trièdre de Frenet	23
1.25	Courbure d'une courbe	25
1.26	Formules de Frenet et Serret	26
1.27	Propriétés de la torsion	27
1.28	Sphère osculatrice et cercle osculateur	28
1.29	Champs	29
1.30	Gradient d'un champ scalaire	29

### Chapitre 2

#### VECTEURS APPLIQUES

2.1	Vecteurs appliqués, résultante, moment résultant, torseurs	31
2.2	Axe central	33
2.3	Systèmes équivalents	35
2.4	Systèmes équilibrés	35

## Chapitre 3

### **CINEMATIQUE DU POINT**

3.1	Trajectoire, vitesse et accélération	36
3.2	Vitesse scalaire et abscisse curviligne	37
3.3	Courbure, vitesse et accélération	37
3.4	Mouvement en coordonnées sphériques	38
3.5	Mouvement plan en coordonnées polaires	39
3.6	Mouvement en coordonnées cylindriques	40

## Chapitre 4

### **CINEMATIQUE RELATIVE**

4.1	Repères fixes et mobiles	43
4.2	Première loi de la cinématique	44
4.3	Formule de Poisson	45
4.4	Deuxième loi de la cinématique	45
4.5	Transformations galiléennes	46
4.6	Mouvements rigides	47

## Chapitre 5

### **CINEMATIQUE DES CORPS RIGIDES**

5.1	Transformations et degrés de liberté d'un corps rigide	48
5.2	Les angles d'Euler	49
5.3	Théorèmes fondamentaux sur le mouvement d'un corps rigide	52
5.4	L'axe de rotation globale	53
5.5	Amplitude d'une rotation	54
5.6	Vitesse et accélération dans un mouvement rigide	54
5.7	Rotations infinitésimales	55
5.8	L'axe d'instantanée rotation	58
5.9	Mouvements plans d'un corps rigide	59
5.10	Le centre d'instantanée rotation	60
5.11	Base et roulante	60
5.12	Mécanismes	61

## Chapitre 6

### **LES PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE**

6.1	Introduction	62
6.2	Les principes de Newton	62
6.3	Classifications des forces, énergie potentielle, travail mécanique	64
6.4	Principe de d'Alembert et forces d'inertie	67
6.5	Théorème de l'énergie cinétique	68
6.6	Intégrale première de l'énergie	69
6.7	Quantité de mouvement	70
6.8	Moment de la quantité de mouvement	71
6.9	Masse inertielle et masse gravitationnelle	72



## Chapitre 7

### **DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRALE**

7.1	Introduction	73
7.2	Intégrales premières	73
7.3	Orbites dégénérées	76
7.4	Orbites générales	79
7.5	Orbites circulaires	81
7.6	Forces répulsives	84
7.7	Le problème de Kepler	85
7.8	Les orbites dégénérées du problème de Kepler	85
7.9	Les orbites générales du problème de Kepler	87
7.10	La forme des orbites générales du problème de Kepler	89
7.11	Cinématique des planètes	91
7.12	La troisième loi de Kepler	93
7.13	La loi du temps	95
7.14	Le problème des deux corps	96
7.15	La loi de gravitation universelle	97

## Chapitre 8

### **FORCES DISSIPATIVES**

8.1	Introduction	99
8.2	Frottement	99
8.3	La résistance au roulement	103
8.4	L'amortissement	106

## Chapitre 9

### **DYNAMIQUE DES SYSTEMES DISCRETS**

9.1	Introduction	107
9.2	Forces internes	107
9.3	Les équations générales du mouvement pour un système discret	108
9.4	Quantité de mouvement	108
9.5	Moment de la quantité de mouvement	109
9.6	Equations fondamentales de la dynamique des systèmes	110
9.7	Théorème de l'énergie cinétique	111
9.8	Intégrale première de l'énergie	112
9.9	Théorème de König	113

## Chapitre 10

### **PROPRIETES D'INERTIE DES SYSTEMES**

10.1	Introduction	114
10.2	Barycentre	114
10.3	Propriétés du barycentre	115
10.4	Moment d'inertie	116
10.5	Tenseur d'inertie	116

10.6	L'ellipsoïde d'inertie	118
10.7	Le théorème de Huygens-Steiner	120

## Chapitre 11

### **DYNAMIQUE DES CORPS RIGIDES**

11.1	Introduction	123
11.2	Quantité de mouvement	123
11.3	Moment de la quantité de mouvement	124
11.4	Puissance	124
11.5	Energie cinétique	124
11.6	Dérivées temporelles	126
11.7	Les équations fondamentales pour un corps rigide	127
11.8	Le théorème de l'énergie cinétique pour un corps rigide	128
11.9	Les équations d'Euler	128
11.10	Mouvements autour d'un point	129
11.11	Mouvements à la Poinsot	130
11.12	Rotations permanentes	130
11.13	Précessions	131
11.14	Gyroscopes	132
11.15	Effet gyroscopique	133
11.16	La boussole gyroscopique	133

## Chapitre 12

### **DYNAMIQUE IMPULSIVE**

12.1	Introduction	136
12.2	L'équation fondamentale de la dynamique impulsive pour un point matériel	136
12.3	Les équations fondamentales de la dynamique impulsive pour les systèmes	137
12.4	Choc entre corps rigides	138
12.5	Variation de l'énergie cinétique d'un corps rigide à la suite d'un choc	139
12.6	Choc sans frottement entre corps rigides libres	140
12.7	L'hypothèse constitutive de Newton	141
12.8	Types de choc	142
12.9	Perte d'énergie	143
12.10	Choc contre une paroi immobile	144
12.11	Choc d'un corps rigide libre contre un corps ayant un point fixe	146
12.12	Choc dans un plan	147

## Chapitre 13

### **LE PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS**

13.1	Liens, systèmes holonomes et anholonomes	149
13.2	Déplacements, vitesses, travail et puissance virtuels	153
13.3	Classification énergétique des liens	154
13.4	Le principe des travaux virtuels	155
13.5	Equivalence du principe des travaux virtuels et de la loi du mouvement	156
13.6	Equivalence d'équations fondamentales et loi du mouvement pour un corps rigide	157
13.7	Passage à la statique	158

## Chapitre 14

### LES EQUATIONS DE LAGRANGE

14.1	Les équations de Lagrange dans le cas général	160
14.2	Les équations de Lagrange pour les systèmes conservatifs	162
14.3	Un exemple : le pendule composé	164

## Chapitre 15

### STABILITE ET BIFURCATION DE L'EQUILIBRE

15.1	Généralités	167
15.2	Configuration d'équilibre stable selon Lyapounov	167
15.3	Représentation géométrique : l'espace des phases	168
15.4	Un exemple : les oscillations libres	169
15.5	Le théorème de Lagrange-Dirichlet	170
15.6	Analyse de la qualité de l'énergie potentielle	173
15.7	Bifurcation de l'équilibre	174
15.8	Exemple 1 : le flambement	175
15.9	Exemple 2 : le snapping	177

## Chapitre 16

### MODES NORMAUX

16.1	Généralités	179
16.2	Lemme de diagonalisation simultanée	179
16.3	Le tenseur de transformation	180
16.4	Expression générale de l'énergie cinétique	180
16.5	Linéarisation et découplage des équations d'équilibre	182
16.6	Modes normaux	183
16.7	Description qualitative des modes normaux	184

## Chapitre 17

### L'OSCILLATEUR SIMPLE

17.1	Généralités	186
17.2	Oscillations libres non amorties	186
17.3	Oscillations libres amorties	187
17.4	Oscillations forcées amorties	190
17.5	La résonance	191
17.6	La phase	192

## ELEMENTS DE CALCUL VECTORIEL ET TENSORIEL

### 1.1 ESPACE EUCLIDIEN

Les événements de la mécanique classique se placent dans l'*espace euclidien* à trois dimensions, que nous définissons ainsi: on dit que  $\mathcal{E}$  est un espace euclidien tridimensionnel s'il existe un espace vectoriel  $\mathcal{V}$ , qui lui est associé, de dimension trois, dans lequel il est défini un produit scalaire, et tel que:

- les éléments  $\mathbf{v}$  de  $\mathcal{V}$ , qui sont des vecteurs, sont de transformations de  $\mathcal{E}$  en lui-même:

$$\mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{v} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E};$$

- la somme de deux éléments de  $\mathcal{V}$  est définie comme

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})(p) = \mathbf{u}(\mathbf{v}(p)) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ et } \forall p \in \mathcal{E};$$

- $\forall p \text{ et } q \in \mathcal{E}, \exists! \mathbf{v} \in \mathcal{V} : q = \mathbf{v}(p)$ .

Pour mieux comprendre tout cela, il faut d'abord introduire deux concepts assez importants.

### 1.2 POINTS ET VECTEURS

Nous choisissons une fois pour toutes un espace euclidien  $\mathcal{E}$ ; ses éléments sont appelés *points*.  $\mathcal{E}$  doit être identifié avec l'espace ordinaire où nous vivons.

L'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  sera appelé *espace des translations* de  $\mathcal{E}$  et les éléments de  $\mathcal{V}$  seront appelés *translations*.

Analysons donc les propriétés énoncées ci-dessus; on commence avec la dernière. Ecrire  $q = \mathbf{v}(p)$  signifie que  $\mathbf{v}$  est une transformation de  $\mathcal{E}$  en lui-même, c'est à dire, on part d'un point de  $\mathcal{E}$  pour arriver encore en un point de  $\mathcal{E}$ , et que cette transformation est intégralement déterminée par la valeur prise sur un point de  $\mathcal{E}$ . Graphiquement:

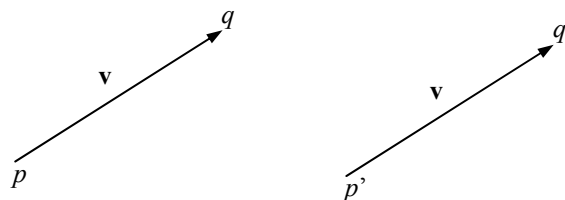


Figure 1.1

Remarque: le même vecteur peut opérer différentes transformations, en fonction du point d'application:  $q = \mathbf{v}(p)$ , mais aussi  $q' = \mathbf{v}(p')$ .

Nous utiliserons, à la place de l'écriture  $q = \mathbf{v}(p)$ , une écriture qui a un sens géométrique plus direct:

$$q = p + \mathbf{v}.$$

Elle définit la somme d'un point et d'un vecteur comme un point. De la relation ci-dessus on tire aussi la définition d'un vecteur de  $\mathcal{V}$  comme la différence de deux points de  $\mathcal{E}$ :

$$\mathbf{v} = q - p.$$

La somme de deux points, ainsi que la différence d'un point avec un vecteur, ne sont pas définies.

On revient maintenant à la deuxième propriété:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})(p) = \mathbf{u}(\mathbf{v}(p)) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ et } \forall p \in \mathcal{E}.$$

Soit  $q = \mathbf{v}(p)$ , ou  $q = p + \mathbf{v}$ , et soit  $r = \mathbf{u}(q)$ , ou  $r = q + \mathbf{u}$ . Alors,

$$r = p + \mathbf{v} + \mathbf{u} = p + \mathbf{w},$$

où  $\mathbf{w}$  est le vecteur formé par la somme de  $\mathbf{u}$  et de  $\mathbf{v}$ . Graphiquement tout cela correspond à la fameuse *règle du parallélogramme*:

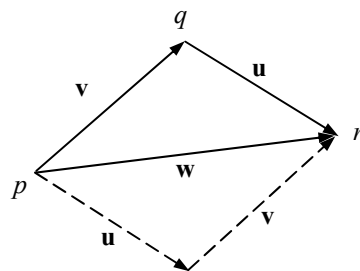


Figure 1.2

Remarque: par les propriétés générales d'un espace vectoriel, ou plus simplement géométriquement, à l'aide de la figure ci-dessus, on a:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

En particulier, faire  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  équivaut à faire le chemin pointillé indiqué sur la figure 1.2.

Le *vecteur nul*  $\mathbf{o}$  est défini comme la différence de deux points coïncidents. Le vecteur nul est unique, et il est le seul vecteur tel que

$$\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Ces deux propriétés du vecteur nul sont très facilement démontrables avec la propriété que l'on a expliquée ci-dessus.

Un vecteur  $\mathbf{w}$  tel que

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{u}_i, \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

est dit être une *combinaison linéaire* des  $n$  vecteurs  $\mathbf{u}_i$ , où les scalaires  $k_i$  sont les coefficients de la combinaison. Si, pour un  $\mathbf{w}$  et pour les  $n$   $\mathbf{u}_i$  donnés il n'existe aucun ensemble de  $k_i$  tel que la relation ci-dessus sera satisfaite, alors les  $n+1$  vecteurs  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{u}_i$  sont dits *linéairement indépendants*; cela signifie qu'il n'est pas possible d'exprimer  $\mathbf{w}$  comme somme des  $\mathbf{u}_i$ , où, ce qui est la même chose, que la combinaison linéaire des  $n+1$  vecteurs  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{u}_i$  peut avoir comme résultat le vecteur nul si et seulement si tous les coefficients de la combinaison sont des zéros. Dans le cas contraire les  $n+1$  vecteurs sont dits *linéairement dépendants*.

La somme de vecteurs ci-dessus peut être écrite en forme abrégée comme

$$\mathbf{w} = k_i \mathbf{u}_i, \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n ;$$

cette notation est dite aussi *somme d'Einstein* : dans une somme d'Einstein il faut additionner par rapport à l'*indice saturé*, qui est l'indice répété dans l'expression. L'utilisation de la somme d'Einstein permet d'alléger la notation et de la rendre plus compréhensible ; c'est pour cela qu'elle sera souvent employée dans la suite de ce cours.

### 1.3 PRODUIT SCALAIRE, DISTANCE, ORTHOGONALITE

Un *produit scalaire* est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Cette définition doit être bien comprise, parce qu'elle définit les propriétés, simples et de très grande importance, du produit scalaire. D'abord, on dit que le produit scalaire est une *forme*: en mathématique une forme  $\omega$  est une application qui opère sur les éléments d'un espace vectoriel, donc sur des vecteurs, pour donner comme résultat un scalaire. Une forme est *bilinéaire* si elle opère sur deux vecteurs et si elle est linéaire par rapport à chaque vecteur. Donc le produit scalaire est une forme  $\omega$  du type

$$\omega : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

Les propriétés de linéarité sont toujours les mêmes:

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

$$\omega(k \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega(\mathbf{u}, k \mathbf{v}) = k \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ et } \forall k \in \mathbb{R}.$$

Une forme est *symétrique* si elle commute par rapport aux deux éléments sur lesquels elle opère, c'est à dire si

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Finalement, une forme est *définie positive* si le scalaire résultant de l'application sur le même vecteur deux fois est toujours positif pour n'importe quel vecteur, sauf pour le vecteur nul, où le résultat est zéro:

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Les propriétés listées ci-dessus sont les propriétés essentielles d'un produit scalaire en mécanique classique; cela signifie que toute forme doit avoir ces propriétés pour être un produit scalaire et que toute forme qui a ces propriétés est un produit scalaire. Nous indiquerons les produit scalaire avec le symbole  $\cdot$  ; alors les propriétés ci-dessus prennent la forme plus commune suivante:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w},$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad \text{bilinéarité ;}$$

$$\mathbf{u} \cdot (k \mathbf{v}) = (k \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k \mathbf{u} \cdot \mathbf{v};$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \text{symétrie ;}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \text{définition positive.}$$

Deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont *orthogonaux* si et seulement si  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ . On prouve facilement que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

On sait de l'algèbre que l'on peut définir plusieurs normes pour un vecteur, et que dans un espace à dimension finie elles sont toutes équivalentes. Nous prendrons comme *norme* d'un vecteur  $\mathbf{u}$ , notée  $|\mathbf{u}|$  ou tout simplement  $u$  (lettre non en gras), sa *norme euclidienne*, définie comme:

$$|\mathbf{u}| = u = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

Il faut remarquer qu'une telle opération a toujours un sens grâce à la définition positive du produit scalaire. La norme a certaines propriétés générales:

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|, \text{ inégalité triangulaire ou de Minkowsky;}$$

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| |\mathbf{v}|, \text{ inégalité de Schwarz;}$$

$$|k\mathbf{u}| = |k| \|\mathbf{u}\|, k \in \mathbb{R}.$$

La *distance* entre deux points  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{E}$  est définie par  $d = |p - q|$ ; il faut aussi remarquer que grâce à la dernière des propriétés ci-dessus,  $d = |q - p|$ ;  $d$  est un scalaire toujours positif.

On appelle *sphère unitaire*, et on l'indique avec  $\mathcal{S}^2$ , l'ensemble de tous les vecteurs de  $\mathcal{V}$  dont la norme est égale à 1:  $\mathcal{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} / \|\mathbf{v}\| = 1\}$ .

#### 1.4 BASE DE $\mathcal{V}$

Une *base*  $e$  de  $\mathcal{V}$  est un ensemble quelconque de trois vecteurs  $e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  tels que

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Ici,  $\delta_{ij}$  est le *delta de Kronecker*:  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ , autrement  $\delta_{ij} = 0$ . Donc, par la définition ci-dessus, une base est composée de trois vecteurs de  $\mathcal{S}^2$  qui sont mutuellement orthogonaux. Une telle base s'appelle *base orthonormée*. Bien que l'on puisse introduire des bases de  $\mathcal{V}$  qui ne sont pas orthonormées (on sait de l'algèbre que la seule condition pour avoir une base d'un espace vectoriel  $n$ -dimensionnel est d'avoir  $n$  vecteurs linéairement indépendants), nous nous bornons à ce type de bases, car elles ont des avantages considérables en terme de simplicité.

Tout vecteur de  $\mathcal{V}$  peut être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la base choisie:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i;$$

dans la définition ci dessus on a utilisé la convention d'Einstein ; donc l'écriture ci-dessus signifie tout simplement que

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3.$$

Les scalaires  $u_i$  sont les *composantes cartésiennes* du vecteur  $\mathbf{u}$ .

#### 1.5 EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE

Le produit scalaire a une expression assez simple, qui nous permet de le calculer:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i \mathbf{e}_i \cdot v_j \mathbf{e}_j = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Il faut remarquer que cette expression, qu'on a obtenu en utilisant les propriétés de linéarité du produit scalaire, est valable seulement si la base est orthonormée : voici donc l'une des raisons pour choisir toujours une base orthonormée, ce qui sera toujours sous-entendu dans la suite.

Nous définissons les composantes cartésiennes d'un vecteur par la relation

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3;$$

elles sont la projection géométrique du vecteur  $\mathbf{u}$  sur les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  de la base choisie. On peut facilement montrer que le produit scalaire ainsi défini, équivaut exactement à l'opération

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u v \cos \theta,$$

formule qui définit aussi l'angle  $\theta$  entre les deux vecteurs. A remarquer que par l'inégalité de Schwarz,

$$|\cos \theta| \leq 1,$$

ce qui rend possible la dernière relation écrite ci-dessus.

## 1.6 TENSEURS DU DEUXIEME ORDRE

Un *tenseur du deuxième ordre*  $\mathbf{L}$  est une transformation linéaire de  $\mathcal{V}$  en lui-même:

$$\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} / \mathbf{L}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{L}(\mathbf{u}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Le concept de tenseur est général, et on peut parler de tenseurs de n'importe quel ordre. Toutefois, on se limitera ici à introduire les tenseurs du deuxième ordre.

Si on définit la somme de deux tenseurs comme

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

et le produit d'un scalaire par un tenseur comme

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{v}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

alors l'ensemble des tenseurs  $\text{Lin}(\mathcal{V})$  qui opèrent sur  $\mathcal{V}$  est un espace vectoriel, dont l'élément nul est le tenseur, unique,  $\mathbf{O}$ , dit *tenseur nul*, tel que

$$\mathbf{O}\mathbf{v} = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Le *tenseur identique*  $\mathbf{I}$  est le seul tenseur tel que

$$\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

On laisse aux élèves la démonstration du fait que

$$\mathbf{L}\mathbf{o} = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{L} \in \text{Lin}(\mathcal{V}).$$

## 1.7 PRODUIT DYADIQUE

Le *produit dyadique* de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de  $\mathcal{V}$  est le tenseur, noté  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ , défini par

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

L'application définie ci-dessus est en effet un tenseur du deuxième ordre: en fait, elle opère sur des vecteurs de  $\mathcal{V}$  pour donner encore des vecteurs de  $\mathcal{V}$ ; de plus il est facilement démontrable qu'elle est linéaire. C'est facile de voir que si  $\mathbf{a} \in \mathcal{S}^2$ , alors le tenseur  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$  est le tenseur qui, appliqué à  $\mathbf{v}$ , en donne la projection sur  $\mathbf{a}$ , et que le tenseur  $(\mathbf{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a})$  donne le vecteur perpendiculaire à  $\mathbf{a}$ .

## 1.8 COMPOSANTES CARTESIENNES D'UN TENSEUR DU DEUXIEME ORDRE

Si  $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  est une base de  $\mathcal{V}$ , alors  $\mathbf{e}^2 = \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, i, j = 1, 2, 3\}$  est une *base* de l'espace vectoriel  $\text{Lin}(\mathcal{V})$ . Elle est composée de neuf tenseurs distincts. Donc chaque tenseur du deuxième ordre peut être écrit comme une combinaison linéaire des éléments de  $\mathbf{e}^2$ ; les coefficients de cette combinaison linéaire sont les neuf *composantes cartésiennes du tenseur*. En général, on peut donc poser

$$\mathbf{L} = L_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

où les neuf quantités  $L_{ij}$ , sont les composantes cartésiennes de  $\mathbf{L}$  dans la base  $\mathbf{e}$  de  $\mathcal{V}$ , et sont définies par les relations

$$L_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$



Par exemple, pour les composantes d'une dyade on a

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{e}_j = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = a_i b_j.$$

Chaque tenseur  $\mathbf{L}$  peut être représenté dans une base par une matrice  $3 \times 3$ , dont les éléments sont les neuf composantes cartésiennes de  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}.$$

On peut maintenant spécifier les composantes d'un vecteur résultat de l'application d'un tenseur sur un autre vecteur:

$$\mathbf{L}\mathbf{v} = L_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(v_k \mathbf{e}_k) = L_{ij}v_k(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k = L_{ij}v_j \mathbf{e}_i.$$

Cette formule équivaut à l'application d'une matrice  $3 \times 3$  sur un vecteur colonne  $3 \times 1$ .

### 1.9 PRODUIT TENSORIEL

Pour tout couple de tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathcal{V})$ , on a

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{v} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Cette formule définit la composition de deux tenseurs, ou *produit tensoriel*. On peut facilement montrer que le produit tensoriel a la propriété suivante:

$$[\mathbf{A} (\mathbf{L} + \mathbf{M})] = \mathbf{A} \mathbf{L} + \mathbf{A} \mathbf{M}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{M} \in \text{Lin}(\mathcal{V}).$$

Un problème est le suivant: si  $\mathbf{L} = \mathbf{A} \mathbf{B}$ , quelles sont les composantes de  $\mathbf{L}$ , connaissant celles de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{B}$ ? Le résultat, dont on laisse au lecteur la simple démonstration, est le suivant:

$$L_{ij} = A_{ik} B_{kj},$$

c'est tout simplement la règle de multiplication lignes par colonnes de deux matrices carrées.

En outre, on a les propriétés suivantes, elles aussi laissées à démontrer au lecteur :

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ et } \mathbf{d} \in \mathcal{V},$$

$$\mathbf{A} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{A} \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V} \text{ et } \forall \mathbf{A} \in \text{Lin}(\mathcal{V}).$$

### 1.10 TRANSPOSE D'UN TENSEUR

Pour tout tenseur  $\mathbf{L}$ , il existe un et seulement un tenseur  $\mathbf{L}^T$ , appelé *transposé* de  $\mathbf{L}$ , tel que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{L}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

En outre

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{L}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{u} = (\mathbf{L}^T)^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{L}^T)^T \mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{L}^T)^T = \mathbf{L}.$$

Cherchons maintenant les composantes cartésiennes de  $\mathbf{L}^T$ :

$$(\mathbf{L}^T)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{e}_j = (\mathbf{L}^T)^T \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_i = L_{ji};$$

cette règle nous dit tout simplement que la matrice représentative de  $\mathbf{L}^T$  est la matrice transposée de la matrice représentante  $\mathbf{L}$ .

Un bon exercice est de montrer les propriétés suivantes du tenseur transposé ( $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathcal{V})$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned}(\alpha \mathbf{A})^T &= \alpha \mathbf{A}^T, \\(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \\(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \\(\mathbf{A} \mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \\(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{A} &= \mathbf{a} \otimes (\mathbf{A}^T \mathbf{b}).\end{aligned}$$

### 1.11 TENSEURS SYMETRIQUES ET ANTISYMETRIQUES

Un tenseur  $\mathbf{L}$  est *symétrique* si  $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ . Dans ce cas, on a que

$$L_{ij} = (\mathbf{L}^T)_{ij} \text{ et } (\mathbf{L}^T)_{ij} = L_{ji} \Rightarrow L_{ij} = L_{ji},$$

ce qui signifie que la matrice représentative du tenseur est, elle aussi, symétrique et qu'un tenseur symétrique n'a que six composantes distinctes.

Un tenseur  $\mathbf{L}$  est *antisymétrique* si  $\mathbf{L} = -\mathbf{L}^T$ . Dans ce cas, on a que

$$(\mathbf{L}^T)_{ij} = -L_{ij} \text{ et } (\mathbf{L}^T)_{ij} = L_{ji} \Rightarrow L_{ji} = -L_{ij}, \rightarrow L_{ii} = -L_{ii} \Rightarrow L_{ii} = 0$$

ce qui signifie que la matrice représentative du tenseur est, elle aussi, antisymétrique et qu'un tenseur antisymétrique n'a que trois composantes distinctes, étant nulles les composantes sur la diagonale.

Chaque tenseur  $\mathbf{L}$  peut être décomposé dans la somme de deux tenseurs,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2,$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \\ \mathbf{L}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T).\end{aligned}$$

On montre facilement que  $\mathbf{L}_1$  est symétrique et  $\mathbf{L}_2$  antisymétrique.

### 1.12 TRACE D'UN TENSEUR

Il existe une et une seule forme linéaire

$$\text{tr} : \text{Lin}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R},$$

appelée *trace*, telle que

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}.$$

La trace est donc un nombre réel "extrait" d'un tenseur; de plus, nous n'avons pas parlé de base lors de sa définition : la trace est donc un *invariant tensoriel*. Les invariants tensoriels sont des quantités, dépendantes du tenseur, qui ne changent pas si on change la base dans laquelle le tenseur est représenté. Il faut remarquer qu'on a défini la trace comme une forme linéaire; cela signifie que

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \operatorname{tr} \mathbf{A} + \operatorname{tr} \mathbf{B} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \operatorname{Lin}(\mathcal{V}), \\ \operatorname{tr}(\alpha \mathbf{A}) &= \alpha \operatorname{tr} \mathbf{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \mathbf{A} \in \operatorname{Lin}(\mathcal{V}).\end{aligned}$$

On laisse au lecteur la simple démonstration des propriétés suivantes de la trace:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} \mathbf{L} &= L_{ii}, \\ \operatorname{tr} \mathbf{L}^T &= \operatorname{tr} \mathbf{L}, \\ \operatorname{tr} \mathbf{W} &= 0 \quad \forall \mathbf{W} \in \operatorname{Lin}(\mathcal{V}) / \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T, \\ \operatorname{tr} \mathbf{I} &= 3, \\ \operatorname{tr} \mathbf{O} &= 0, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{BA}).\end{aligned}$$

### 1.13 PRODUIT SCALAIRE DE TENSEURS

Le *produit scalaire entre tenseurs* est la forme bilinéaire, symétrique et définie positive suivante:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}).$$

Grâce à la définition de trace et à ses propriétés, on peut aisément vérifier que l'opération définie ci-dessus est effectivement un produit scalaire, c'est-à-dire qu'il possède les propriétés énoncées:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \operatorname{Lin}(\mathcal{V}), \alpha \in \mathbb{R}, && \text{bilinéarité;} \\ (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \operatorname{Lin}(\mathcal{V}), && \text{symétrie;} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &\geq 0 \quad \forall \mathbf{A} \in \operatorname{Lin}(\mathcal{V}), \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}, && \text{définition positive.}\end{aligned}$$

Le lecteur est invité à démontrer les propriétés suivantes ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{L} \in \operatorname{Lin}(\mathcal{V})$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_{ij} B_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \\ \text{si } \mathbf{A} &= \mathbf{A}^T \text{ et } \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \text{ alors } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \text{si } \mathbf{A} &= \mathbf{A}^T \text{ alors } \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 \quad \forall \mathbf{L}, \\ \text{si } \mathbf{A} &= -\mathbf{A}^T \text{ alors } \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_2 \quad \forall \mathbf{L}, \\ \operatorname{tr} \mathbf{A} &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}, \\ \mathbf{AB} \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{CB}^T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{C}, \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ et } \mathbf{d} \in \mathcal{V}.\end{aligned}$$

On définit *norme* d'un tenseur  $\mathbf{L}$  le scalaire positif

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{L}^T \mathbf{L})} = \sqrt{L_{ij} L_{ij}}.$$

### 1.14 DETERMINANT D'UN TENSEUR

Il existe une façon intrinsèque de définir le *déterminant* d'un tenseur, qui nécessite de l'introduction des formes trilinéaires. Un résultat très important est que le déterminant d'un tenseur est un

invariant du tenseur même, et qu'il coïncide avec le déterminant de la matrice qui représente le tenseur dans une base quelconque. Comme le calcul du déterminant d'une matrice  $3 \times 3$  est une opération assez simple, le problème de la recherche du déterminant d'un tenseur peut se dire résolu.

Pour le déterminant, on a les propriétés suivantes, de simple démonstration:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{O} &= 0, \\ \det \mathbf{I} &= 1, \\ \det (\alpha \mathbf{L}) &= \alpha^3 \det \mathbf{L} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{L} \in \text{Lin}(\mathcal{V}), \\ \det \mathbf{A}^T &= \det \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Lin}(\mathcal{V}), \\ \det \mathbf{W} &= 0 \quad \forall \mathbf{W} \in \text{Lin}(\mathcal{V}) / \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T, \\ \det (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= 0 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Un autre résultat très important, dont la démonstration nécessite encore de l'introduction des formes trilineaires, est le

**Théorème de Binet:**  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathcal{V})$ , il est

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

### 1.15 VALEURS ET VECTEURS PROPRES D'UN TENSEUR

S'il existe un nombre  $\lambda \in \mathbb{R}$  et un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{o}\}$  tels que

$$\mathbf{L} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

alors  $\lambda$  s'appelle *valeur propre* et  $\mathbf{v}$  *vecteur propre*, relatif à  $\lambda$ , de  $\mathbf{L}$ . En fait, dans le cas d'un vecteur propre, la relation ci-dessus nous dit que le vecteur est transformé par le tenseur en un autre vecteur qui lui est toujours parallèle, avec rapport entre les normes, après et avant transformation, égale à  $|\lambda|$ . Il est évident que si  $\mathbf{v}$  est vecteur propre de  $\mathbf{L}$ , alors  $k\mathbf{v}$  l'est aussi,  $\forall k \in \mathbb{R}$ .

Les valeurs et vecteurs propres jouent un rôle fondamental dans plusieurs problèmes, et leur recherche est donc une opération très importante. Pour ce faire, on écrit la relation ci-dessus dans la forme équivalente

$$(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{o};$$

celui-ci est un système de trois équations scalaires dont les inconnues sont les trois composantes de  $\mathbf{v}$ . Le système est homogène, et donc la seule solution possible, si la matrice du système n'est pas singulière, est le vecteur nul (*solution triviale*). Mais si la matrice du système est singulière, c'est-à-dire si

$$\det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

alors d'autres solutions sont possibles. L'équation écrite ci-dessus est une équation algébrique de troisième degré, dite *équation de Laplace* ou *caractéristique*. Elle ne possède que trois solutions, réelles ou complexes, qui sont les trois valeurs propres de  $\mathbf{L}$ . Donc la recherche des valeurs propres d'un tenseur de deuxième ordre passe par la solution de l'équation de Laplace.

Pour trouver le vecteur propre correspondant à une valeur propre, il suffit d'injecter dans le système

$$(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{o}$$

la valeur propre trouvée, à la place de  $\lambda$ . Naturellement, maintenant le système a une matrice singulière, ce qui signifie qu'une équation est superflue. Donc on peut trouver le vecteur propre  $\mathbf{v}$  à

une constante près, faute du fait qu'on a trois inconnues et deux équations. Mais on détermine cette constante par normalisation du vecteur, c'est-à-dire qu'on impose que le vecteur propre ait la norme égale à 1. Si la valeur propre est double (c'est-à-dire si elle est une solution de multiplicité deux de l'équation de Laplace), alors on a un système où deux équations sont superflues, et donc le vecteur propre est déterminé à deux constantes près; dans d'autres mots, il y a deux vecteurs propres linéairement indépendants pour la même valeur propre, mais la démarche ne change pas. Si une valeur propre a multiplicité trois, alors elle a trois vecteurs propres linéairement indépendants, chacun avec trois constantes à choisir librement, ce qui revient à dire que chaque vecteur de  $\mathcal{V}$  est vecteur propre. On laisse à l'élève de montrer que ce dernier c'est le cas d'un *tenseur sphérique*, c'est-à-dire d'un tenseur qui est proportionnel à  $\mathbf{I}$ .

Parmi tous les tenseurs de deuxième ordre, les tenseurs symétriques occupent une position particulière, grâce au

**Théorème spectral:** si  $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ , il existe une base de  $\mathcal{V}$  composée de seuls vecteurs propres de  $\mathbf{L}$ .

Ce théorème, dont on ne montrera pas la démonstration, est un théorème de très grande importance aussi bien en mathématique qu'en mécanique, et ses conséquences sont énormes:

- les valeurs propres d'un tenseur symétrique sont toutes réelles;
- les vecteurs propres constituent une base orthonormée de  $\mathcal{V}$ ; ceci signifie qu'il existe au moins une base de  $\mathcal{V}$  qui est transformée par  $\mathbf{L}$  en trois vecteurs encore orthogonaux entre eux et parallèles aux vecteurs d'origine; cette base est la *base normale*;
- dans sa base normale, chaque tenseur symétrique est représenté par

$$\mathbf{L} = \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

En fait, dans une base normale,

$$L_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \lambda_j \mathbf{e}_j = \lambda_j \delta_{ij} \Rightarrow \mathbf{L} = L_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \lambda_j \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i.$$

Donc, un tenseur symétrique dans sa base normale est diagonal, et ses composantes sont ses valeurs propres. On peut aussi remarquer que la trace d'un tenseur symétrique est égale à la somme des ses valeurs propres.

Lorsqu'on a dit qu'un tenseur symétrique a une base normale, on a sous-entendu que deux vecteurs propres  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  d'un tenseur symétrique, relatifs à deux valeurs propres distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , sont orthogonaux entre eux (cela parce que les vecteurs d'une base sont orthogonaux entre eux). Celle-ci est une circonstance assez importante, qu'on peut montrer ainsi:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{L} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{L} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$

et étant  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ceci est vrai  $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ .

Pour un tenseur  $\mathbf{L}$  donné, une expression du type

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{L} \mathbf{v}$$

s'appelle *forme quadratique définie par  $\mathbf{L}$* . Si

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{L} \mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\},$$

la forme et le tenseur sont dits *définis positifs*. Or, si  $\mathbf{L}$  est symétrique, on a une conséquence importante : en fait, si l'on considère  $\mathbf{L}$  représenté dans sa base normale, on voit immédiatement que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{L} \mathbf{v} = \lambda_i v_i^2 > 0 \quad \forall \mathbf{v}, \quad i = 1, 2, 3,$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{L}$  ; il est alors évident que l'inégalité ci-dessus est toujours satisfaite si et seulement si

$$\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

En outre, si l'on exprime  $\mathbf{L}$  par ses composantes dans la base normale on a aussi que

$$\det \mathbf{L} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

et donc un tenseur symétrique défini positif a non seulement les valeurs propres, mais aussi le déterminant, qui est invariant par rapport à la représentation du tenseur, positif.

Finalement, s'il existe au moins un vecteur  $\mathbf{u}$ , différent du vecteur nul, pour lequel

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}\mathbf{u} = 0,$$

alors que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{L}\mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}, \mathbf{u}\},$$

la forme et le tenseur sont dits *semi-définis positifs*.

### 1.16 PRODUIT VECTORIEL

On définit *produit vectoriel* de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de  $\mathcal{V}$  le vecteur

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{W}_a \mathbf{b},$$

où  $\mathbf{W}_a$  est un tenseur antisymétrique, appelé *tenseur axial* de  $\mathbf{a}$ ; si  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , alors les composantes de  $\mathbf{W}_a$  sont données par

$$\mathbf{W}_a = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le produit vectoriel se réduit donc à une simple opération tensorielle:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ -a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

Inversement, à chaque tenseur antisymétrique  $\mathbf{W}$  correspond un *vecteur axial*, défini encore par la relation ci-dessus; on montre facilement que ce vecteur est le vecteur propre relatif à la seule valeur propre réelle de  $\mathbf{W}$ , le zéro. A la rigueur, les vecteurs axiaux d'un tenseur antisymétrique sont deux, un l'opposé de l'autre, et il existe une façon intrinsèque de faire le choix entre eux ; ce choix correspond à fixer l'orientation de l'espace, voir le paragraphe suivant. Comme nous établirons une fois pour toutes l'orientation de l'espace, ce qui équivaut à dire que le vecteur axial d'un tenseur antisymétrique est fixé, on considérera qu'à chaque tenseur antisymétrique correspond un seul vecteur axial.

Le produit vectoriel a certaines propriétés, dont on laisse au lecteur la démonstration:

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w},$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w},$$

$$\mathbf{u} \wedge (k \mathbf{v}) = (k \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = k \mathbf{u} \wedge \mathbf{v},$$

bilinéarité ;

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, && \text{antisymétrie;} \\
\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \mathbf{a} = k \mathbf{b}, \quad k \in \mathbb{R} && \text{condition de parallélisme;} \\
\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0, && \text{orthogonalité du vecteur produit;} \\
\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}, && \text{double produit vectoriel;} \\
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}, && \text{produit mixte.}
\end{aligned}$$

La sixième propriété ci-dessus nous informe que le vecteur résultant d'un produit vectoriel est orthogonal au plan déterminé par les deux vecteurs d'origine. On laisse aussi au lecteur la vérification que le produit mixte équivaut au déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

En utilisant les formules ci-dessus, cherchons à présent la norme d'un produit vectoriel :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \\
&= [-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{a} + \mathbf{a}^2 \mathbf{b}] \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot [\mathbf{a}^2 \mathbf{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}] \mathbf{b} = \mathbf{a}^2 (\mathbf{b} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a] \mathbf{b}) = \\
&= \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 (\mathbf{e}_b \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_a] \mathbf{e}_b) = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 (1 - \cos^2 \theta) = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \sin^2 \theta;
\end{aligned}$$

dans la formule ci-dessus,  $\mathbf{e}_a$  et  $\mathbf{e}_b$  sont les vecteur unitaires de la direction de  $a$  et  $b$  respectivement, alors que  $\theta$  est l'angle formé par les deux vecteurs. Finalement,

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta,$$

Géométriquement, ce résultat montre que la norme du produit vectoriel est l'aire du parallélogramme délimité par les deux vecteurs du produit. La valeur absolue du produit mixte a alors une simple interprétation géométrique: elle est le volume du prisme délimité par les trois vecteurs.

Une propriété importante de tout tenseur antisymétrique  $\mathbf{W}$  est la suivante :

$$\mathbf{W}\mathbf{W} = -\frac{1}{2} |\mathbf{W}|^2 (\mathbf{I} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}),$$

où  $\mathbf{w}$  est le vecteur axial associé au tenseur  $\mathbf{W}$  ; à se rappeler que le tenseur  $\mathbf{I} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}$  est le tenseur qui donne la projection d'un vecteur sur le plan orthogonal au vecteur  $\mathbf{w}$ . On laisse au lecteur le soin de démontrer cette dernière proposition, avec la suggestion d'écrire  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{W}$  dans une base dont  $\mathbf{w}$  est l'un des éléments.

### 1.17 ORIENTATION D'UNE BASE

C'est immédiat de voir qu'une base de  $\mathcal{V}$  peut être orientée de deux façons différentes; on dira alors que la base  $e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  est *orientée positivement* (*right-handed* en anglais) si

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_{i+1} \cdot \mathbf{e}_{i+2} = 1;$$

naturellement,  $3+1=1$  etc. (répétition cyclique des trois indices 1, 2 et 3). Géométriquement, cela signifie qu'une base est orientée positivement si les axes sont comme ceux de la figure 1.3.

Si au contraire on a une base pour laquelle

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_{i+1} \cdot \mathbf{e}_{i+2} = -1,$$

alors elle est dite *orientée négativement* (*left-handed* en anglais); une telle base serait par exemple celle de la figure 1.3 avec l'axe  $\mathbf{e}_3$  pointillé. Nous considérerons toujours des bases orientées positivement.

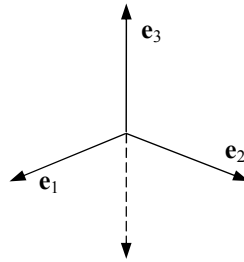


Figure 1.3

### 1.18 TENSEUR INVERSE

Un tenseur  $\mathbf{L}$  est *inversible* s'il existe un tenseur  $\mathbf{L}^{-1}$ , dit le *tenseur inverse* de  $\mathbf{L}$ , tel que

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{I}.$$

Démontrer que le tenseur inverse est unique est une tâche très simple, qu'on laisse au lecteur. Une propriété importante est qu'un tenseur inversible transforme trois vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  de  $\mathcal{V}$  linéairement indépendants en trois vecteurs  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{w}_1$  qui sont encore linéairement indépendants. En fait, supposons par l'absurde que ce soit  $\mathbf{u}_1 = k\mathbf{v}_1 + h\mathbf{w}_1$ ,  $k, h \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = \mathbf{L}^{-1}(k\mathbf{v}_1 + h\mathbf{w}_1) = k\mathbf{L}^{-1}\mathbf{v}_1 + h\mathbf{L}^{-1}\mathbf{w}_1 = k\mathbf{v} + h\mathbf{w},$$

ce qui est contre l'hypothèse, et donc  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{w}_1$  sont linéairement indépendants.

Grâce au théorème de Binet on montre aisément que

$$\det \mathbf{L}^{-1} = (\det \mathbf{L})^{-1};$$

et en s'appuyant sur ces deux derniers résultats, on peut montrer le

**Théorème d'inversibilité:** un tenseur  $\mathbf{L}$  est inversible  $\Leftrightarrow \det \mathbf{L} \neq 0$ .

Un tenseur symétrique défini positif est donc toujours inversible. Les propriétés qui suivent sont laissées à démontrer au lecteur:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$

$$(\mathbf{L}^{-1})^{-1} = \mathbf{L},$$

$$(\mathbf{L}^{-1})^T = (\mathbf{L}^T)^{-1} \quad (:= \mathbf{L}^{-T}),$$

$$(\alpha \mathbf{L})^{-1} = \alpha^{-1} \mathbf{L}^{-1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Une autre propriété, dont la démonstration nécessite de concepts qui n'ont pas été introduits ici, est la suivante:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} \wedge \mathbf{L}\mathbf{v} \cdot \mathbf{L}\mathbf{w} = \det \mathbf{L} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}).$$

Cette relation, avec l'interprétation géométrique qu'on avait donné du produit mixte, nous dit que la valeur absolue du déterminant d'un tenseur est comme un coefficient de variation volumique du prisme, coefficient qui mesure le rapport entre le volume après et avant la transformation tensorielle. Si  $\mathbf{L}$  n'est pas inversible, pour le théorème d'inversibilité on a que  $\det \mathbf{L} = 0$ , et alors après l'application de  $\mathbf{L}$  le prisme est transformé en un prisme de volume nul, c'est-à-dire en un parallélogramme (interprétation du fait que les trois vecteurs initialement linéairement indépendants ont été transformés en trois vecteurs linéairement dépendants).



Une conséquence immédiate de la dernière formule est que

$$\mathbf{L} \mathbf{u} \wedge \mathbf{L} \mathbf{v} = (\det \mathbf{L}) (\mathbf{L}^{-1})^T (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).$$

### 1.19 CHANGEMENT DE BASE

Souvent il faut changer la base de  $\mathcal{V}$ , et donc on se pose le problème de trouver les nouvelles composantes cartésiennes d'un vecteur ou d'un tenseur. D'abord, comment transformer une base en une autre base? Cette opération présuppose que dans la transformation la norme des vecteurs est conservée, ainsi que l'angle formé par deux vecteurs quelconques et l'orientation de l'espace. Les tenseurs qui conservent la norme sont appelés *unitaires*; parmi eux, les tenseurs *orthogonaux* conservent aussi les angles. Il faut donc aller chercher parmi les tenseurs orthogonaux un tenseur capable d'opérer la rotation d'une base. Si un tenseur est orthogonal, alors l'angle entre deux vecteurs quelconques  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  se conserve dans la transformation :

$$\mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

voire, par la définition de transposé,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

d'où la condition qui caractérise les tenseurs orthogonaux :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}.$$

Par l'unicité du tenseur inverse, les tenseurs orthogonaux sont les seuls pour lesquels transposé et inverse coïncident:

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}.$$

Du théorème de Binet et de l'avant-dernière relation on tire

$$\det \mathbf{Q} = \pm 1;$$

on voit bien alors, grâce à

$$\mathbf{L} \mathbf{u} \wedge \mathbf{L} \mathbf{v} \cdot \mathbf{L} \mathbf{w} = \det \mathbf{L} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}),$$

que pour avoir une transformation de base qui conserve l'orientation, il faut que ce soit

$$\det \mathbf{Q} = +1.$$

Les tenseurs orthogonaux qui ont le déterminant égale à 1 sont donc les seuls qui peuvent opérer une transformation de base; un tel tenseur est appelé *rotation propre*, ou tout simplement *rotation*, pour le distinguer d'un tenseur *rotation impropre*, qui correspond à un tenseur orthogonal avec déterminant égal à  $-1$ .

Cherchons donc le tenseur rotation  $\mathbf{Q}$  qui opère la transformation de la base  $e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  dans la base  $e' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ ; par définition,

$$\mathbf{e}'_j = \mathbf{Q} \mathbf{e}_j, \quad j=1, 2, 3,$$

et alors

$$Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{Q} \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j.$$

Cette dernière égalité nous dit que la  $j$ -ème colonne de  $\mathbf{Q}$  est le vecteur  $j$ -ème de la base  $e'$ , le tout exprimé dans la base  $e$ .

Revenons maintenant à la question originelle: comment changent-elles les composantes cartésiennes d'un vecteur ou d'un tenseur, lors d'un changement de base? Commençons avec les

vecteurs: on a les composantes  $v_i$  d'un vecteur  $\mathbf{v}$  dans la base  $e$ , on cherche les composantes  $v'_i$  dans la base  $e'$ . Alors:

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i,$$

et si on appelle  $\mathbf{v}'$  le vecteur  $\mathbf{v}$  "vu" dans la base  $e'$ , on a donc que

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}.$$

Si on veut expliciter les composantes  $v'_i$ , on trouve aisément que

$$v'_i = v_j \mathbf{e}'_{ij},$$

où  $\mathbf{e}'_{ij}$  est la  $j$ -ème composante du vecteur  $\mathbf{e}'_i$  de la base  $e'$ , exprimé dans la base  $e$  (par exemple,  $v'_1 = v_j \mathbf{e}'_{1j} = v_1 \mathbf{e}'_{11} + v_2 \mathbf{e}'_{12} + v_3 \mathbf{e}'_{13}$ ).

Pour les tenseurs on suit la même démarche:

$$L'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}'_j = \mathbf{Q} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{e}_j,$$

et donc si on appelle  $\mathbf{L}'$  le tenseur  $\mathbf{L}$  "vu" dans le nouveau repère, on a

$$\mathbf{L}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{L} \mathbf{Q}.$$

Pour expliciter les composantes  $L'_{ij}$ , on peut faire comme ça:

$$\begin{aligned} L'_{ij} &= \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}'_i \cdot (L_{hk} \mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}'_j = L_{hk} \mathbf{e}'_i \cdot (\mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}'_j = L_{hk} \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_h \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow \\ L'_{ij} &= L_{hk} \mathbf{e}'_{ih} \mathbf{e}'_{jk}. \end{aligned}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} L'_{12} &= L_{11} \mathbf{e}'_{11} \mathbf{e}'_{21} + L_{12} \mathbf{e}'_{11} \mathbf{e}'_{22} + L_{13} \mathbf{e}'_{11} \mathbf{e}'_{23} + \\ &+ L_{21} \mathbf{e}'_{12} \mathbf{e}'_{21} + L_{22} \mathbf{e}'_{12} \mathbf{e}'_{22} + L_{23} \mathbf{e}'_{12} \mathbf{e}'_{23} + \\ &+ L_{31} \mathbf{e}'_{13} \mathbf{e}'_{21} + L_{32} \mathbf{e}'_{13} \mathbf{e}'_{22} + L_{33} \mathbf{e}'_{13} \mathbf{e}'_{23}. \end{aligned}$$

Les relations de transformation des composantes d'un vecteur ou d'un tenseur par rotation de base sont des lois fondamentales, qui caractérisent les vecteurs et les tenseurs du deuxième ordre.

Une autre propriété des rotations est celle d'avoir la valeur propre +1 pour les rotations propres et -1 pour les impropres. En fait, si  $\mathbf{u}$  est un vecteur propre de la rotation  $\mathbf{Q}$  relatif à la valeur propre  $\lambda$ , il est, en considérant que  $\mathbf{Q}$  est aussi unitaire,

$$\mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1.$$

Donc les valeurs propres d'une rotation ont la norme égale à 1, mais on ne peut encore dire si ces valeurs propres sont réelles ou imaginaires. Toutefois, on peut sans doute affirmer qu'au moins une valeur propre est réelle. En fait, l'équation caractéristique est du type

$$f(\lambda) = \lambda^3 + k_1 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_3 = 0,$$

avec les coefficients  $k_i$  réels, parce que  $\mathbf{Q}$  a des composantes réelles. Mais on constate facilement que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} f(\lambda) = \pm\infty,$$

et alors par le théorème des zéros d'une fonction continue réelles, comme le polynôme  $f(\lambda)$ , il existe au moins une valeur  $\lambda_1$  réelle telle que

$$f(\lambda_1) = 0.$$

D'ailleurs, on a toujours que

$$\det \mathbf{Q} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres, réelles ou complexes, de  $\mathbf{Q}$ , et en plus on sait déjà que

$$\det \mathbf{Q} = \pm 1;$$

par conséquent, seulement deux sont les cas possibles :

- i.  $\lambda_1$  est réelle et les deux autres sont complexes conjuguées,  $\lambda_2 = \lambda_3^*$  ;
- ii. les trois valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles.

Considérons alors une rotation propre, pour laquelle

$$\det \mathbf{Q} = 1 :$$

alors, pour avoir un déterminant positif, dans le premier cas ci-dessus, la seule valeur propre réelle doit être positive. En fait

$$\det \mathbf{Q} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_3^* \lambda_3 = \lambda_1 [\operatorname{Re}^2(\lambda_3) + \operatorname{Im}^2(\lambda_3)],$$

quantité qui est positive si et seulement si  $\lambda_1$  est positive aussi. En plus, on a déjà montré que la norme d'une valeur propre d'un tenseur rotation est +1, et donc, étant la quantité entre crochets le carré de la norme du nombre complexe  $\lambda_3$ , elle vaut +1, ce qui comporte, pour avoir un déterminant égal à +1, que

$$\lambda_1 = +1.$$

Dans le deuxième cas, les trois valeurs propres sont soit toutes positives, soit une positive et les deux autres négatives ; la condition que la norme de chaque valeur propre soit égale à +1 nous amène alors à dire que même dans ce cas une valeur propre au moins est +1 (ou toutes les trois, ce qui implique  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ).

C'est immédiat que la même démarche appliquée à un tenseur rotation impropre amène à affirmer qu'un tel tenseur a toujours au moins une valeur propre réelle égale à -1, car dans ce cas il est

$$\det \mathbf{Q} = -1.$$

Une rotation impropre particulière, qui a toutes les valeurs propres égales à -1, est le tenseur *inversion* ou *réflexion* :

$$\mathbf{S} = -\mathbf{I}.$$

C'est évident que l'effet de  $\mathbf{S}$  est celui de transformer une base dans une base qui a les axes changés d'orientation, ou, ce qui est la même chose, de changer le signe des composantes d'un vecteur, et donc l'orientation de l'espace, comme tout tenseur rotation impropre. En effet, si on a une rotation impropre  $\mathbf{Q}_i$ , on peut toujours la décomposer, grâce au théorème de Binet, en une rotation propre plus une réflexion:

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{S} \mathbf{Q}_p,$$

où  $\mathbf{Q}_p$  est une rotation propre. Considérons alors une rotation impropre, et comment le produit vectoriel entre deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  se modifie à la suite de l'application de la transformation : par les relations ci-dessus, la dernière équation du paragraphe précédent et les formules d'inversion et transposition d'un produit tensoriel, ainsi que le théorème de Binet et les propriétés des tenseurs orthogonaux, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_i \mathbf{u} \wedge \mathbf{Q}_i \mathbf{v} &= \mathbf{S} \mathbf{Q}_p \mathbf{u} \wedge \mathbf{S} \mathbf{Q}_p \mathbf{v} = \det(\mathbf{S} \mathbf{Q}_p) [(\mathbf{S} \mathbf{Q}_p)^{-1}]^T (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \\ &= \det \mathbf{S} \det \mathbf{Q}_p [\mathbf{Q}_p^{-1} \mathbf{S}^{-1}]^T (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -[-\mathbf{Q}_p^{-1} \mathbf{I}]^T (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{Q}_p (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Or, si on considère le transformé d'un vecteur quelconque, il est

$$\mathbf{Q}_i \mathbf{u} = \mathbf{S} \mathbf{Q}_p \mathbf{u} = -\mathbf{I} \mathbf{Q}_p \mathbf{u} = -\mathbf{Q}_p \mathbf{u},$$

d'où on voit que le vecteur produit vectoriel de deux vecteurs ne change pas de signe à la suite d'une rotation impropre, comme au contraire tous les vecteurs. Cela signifie que le produit vectoriel est insensible à l'opération de réflexion ; c'est pour ça qu'un produit vectoriel, à la rigueur, n'est pas un vecteur, mais ce qu'on appelle *pseudovecteur*, à signifier qu'il se comporte comme tous les vecteurs, sauf pour une transformation particulière, celle de réflexion. Le produit mixte s'appelle alors *pseudoscalaire*, parce que lui aussi change de signe, pour les mêmes raisons, à la suite d'une opération de réflexion sur les trois vecteurs (d'ailleurs, si on se rappelle que le produit mixte équivaut au déterminant de la matrice ayant par lignes les trois vecteurs, un changement de signe des vecteurs entraîne immédiatement le changement de signe du déterminant, voir aussi les propriétés du déterminant, paragraphe 1.14).

Toutefois, les transformations physiquement possibles d'un corps solide, comme il sera expliqué au chapitre 5, sont seulement les rotations propres ; c'est pour cela qu'on continuera à traiter le résultat d'un produit vectoriel comme un vecteur à part entière, parce qu'on ne considérera jamais la possibilité d'une transformation de réflexion.

## 1.20 REPERES

Une base nous permet d'identifier un vecteur de  $\mathcal{V}$ , mais lorsqu'on doit repérer un point  $p$  de  $\mathcal{E}$ , il faut utiliser un *repère*: un repère  $\mathcal{R}$  est un ensemble formé par un point  $o$ , dit *origine*, et trois vecteurs, appliqués à ce point, qui forment une base orthonormée orientée positivement:

$$\mathcal{R} = \{o ; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}.$$

On remarquera donc que dans le cas d'une base, les trois vecteurs sont des vecteurs libres, alors que pour un repère il s'agit de trois vecteurs appliqués (pour le concept de vecteur appliqué, voir le chapitre suivant).

Une fois un repère établi, on peut fixer la position d'un point  $p$  de  $\mathcal{E}$  par rapport à ce repère grâce à ses *coordonnées*. Toutefois, il y a plusieurs façons de faire cela, c'est-à-dire qu'une fois qu'un repère est fixé, on peut choisir plusieurs type de coordonnées, voire de *repérage*.

Le type le plus simple et connu de repérage est le *cartésien*: la position d'un point  $p$  est déterminée à l'aide des composantes du vecteur  $(p-o)$  dans la base associée au repère choisi; ces composantes prennent le nom de *coordonnées cartésiennes*, voir la figure 1.4:

$$p - o = (p_1, p_2, p_3).$$

Un autre type de repérage est le *cylindrique*: le point  $p$  est repéré par la norme  $\rho$  de la projection du vecteur  $(p-o)$  sur le plan des vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , par l'angle  $\theta$ , dit *anomalie*, que cette projection forme

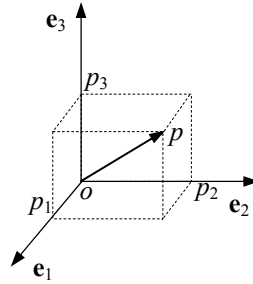


Figure 1.4

avec la direction  $e_1$ , et par la projection  $z$  de  $(p-o)$  sur  $e_3$ , voir figure 1.5. Les trois *coordonnées cylindriques*  $\rho$ ,  $\theta$  et  $z$  sont donc liées aux coordonnées cartésiennes par les relations,

$$\rho = \sqrt{p_1^2 + p_2^2},$$

$$\theta = \arctan \frac{p_2}{p_1},$$

$$z = p_3.$$

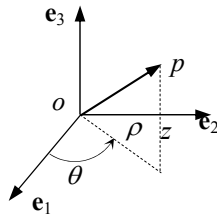


Figure 1.5

Les relations inverses sont évidemment

$$p_1 = \rho \cos \theta,$$

$$p_2 = \rho \sin \theta,$$

$$p_3 = z.$$

A remarquer que les coordonnées cylindriques sont bornées par les inégalités suivantes :

$$\rho \geq 0,$$

$$0 \leq \theta < 2\pi.$$

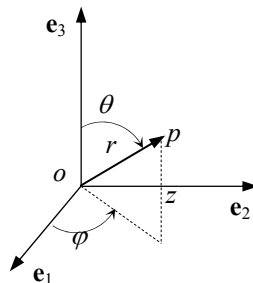


Figure 1.6

Un autre type de repérage est le *sphérique*: un point  $p$  est repéré par la norme  $r$  du vecteur  $(p-o)$ , par l'angle  $\varphi$  que la projection de  $(p-o)$  sur le plan des vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  forme avec  $e_1$  (*longitude*), et par l'angle  $\theta$  formé par  $(p-o)$  et  $e_3$  (*colatitude*), voir la figure 1.6. Les trois *coordonnées sphériques*  $r$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  sont donc liées aux coordonnées cartésiennes par les relations,

$$r = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

$$\varphi = \arctan \frac{p_2}{p_1},$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{p_3}.$$

Les relations inverses sont évidemment

$$p_1 = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$p_2 = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$p_3 = r \cos \theta.$$

Les coordonnées sphériques sont bornées par les limitations suivantes:

$$r \geq 0,$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

### 1.21 COURBES DE POINTS, VECTEURS ET TENSEURS

Soit  $\mathcal{R} = \{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  un repère de  $\mathcal{E}$ , et considérons un point  $p = (p_1, p_2, p_3)$ ; si les trois coordonnées sont des fonctions  $p_i(t)$  continues sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$  de  $\mathbb{R}$ , alors l'application  $p(t): [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{E}$  est une *courbe* de  $\mathcal{E}$ . La variable indépendante  $t$  est le *paramètre* et l'équation de la courbe

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \rightarrow \begin{cases} p_1 = p_1(t) \\ p_2 = p_2(t) \\ p_3 = p_3(t) \end{cases}$$

est dite *équation paramétrique en forme ponctuelle*: à chaque valeur de  $t$  en  $[t_1, t_2]$  correspond en  $\mathcal{E}$  un point de la courbe, figure 1.7. Si les fonctions  $p_i(t)$  sont de classe  $C^1$ , la courbe est dite *régulière* (*smooth* en anglais). On peut considérer aussi le vecteur  $\mathbf{r}(t)$  tel que  $p(t) = o + \mathbf{r}(t) \forall t$ ; le vecteur  $\mathbf{r}(t) = p(t) - o$  est le *vecteur position*, et l'équation

$$\mathbf{r}(t) = r_1(t)\mathbf{e}_1 + r_2(t)\mathbf{e}_2 + r_3(t)\mathbf{e}_3 \rightarrow \begin{cases} r_1 = r_1(t) \\ r_2 = r_2(t) \\ r_3 = r_3(t) \end{cases}$$

est l'*équation paramétrique en forme vectorielle* de la même courbe: à chaque valeur de  $t$  en  $[t_1, t_2]$  correspond en  $\mathcal{V}$  un vecteur position qui détermine en  $\mathcal{E}$  un point de la courbe par le biais de l'opération  $p(t) = o + \mathbf{r}(t)$ , figure 1.7.

L'expression  $p = p(t)$  est dite aussi *courbe de points*, alors que l'expression  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  est une *courbe de vecteurs*. De la même façon on peut introduire une *courbe tensorielle*: si les composantes d'un tenseur, dans une base choisie, sont fonctions continues d'un paramètre  $t$ , alors l'application  $\mathbf{L}(t): [t_1, t_2] \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V})$  définie comme

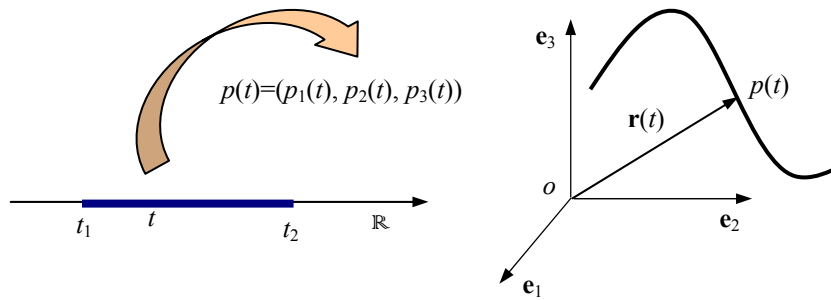


Figure 1.7

$$\mathbf{L}(t) = L_{ij}(t) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

est une courbe tensorielle. Souvent, en mécanique, le paramètre  $t$  est le temps de déroulement d'un certain événement; nous verrons dans les chapitres suivants plusieurs exemples de courbes de points, vecteurs et tenseurs dont le paramètre est le temps, et leur signification mécanique.

Il faut aussi remarquer qu'une courbe peut avoir plusieurs représentations paramétriques : en fait, si  $t$  est le paramètre choisi pour représenter une courbe, par exemple une courbe de points, l'équation

$$p(t) = p[\tau(t)]$$

décrit la même courbe, étant  $\tau$  lié à  $t$  par le *changement de paramètre*

$$\tau = \tau(t).$$

### 1.22 DERIVÉE D'UNE COURBE

Considérons une courbe de points  $p = p(t)$ ; on définit *dérivée* en  $t = t_0$  de la courbe  $p(t)$  par rapport au paramètre  $t$  la limite

$$\left. \frac{dp(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p(t_0 + \varepsilon) - p(t_0)}{\varepsilon};$$

la dérivée d'une courbe de points, étant définie comme différence de points, est un vecteur, voir la figure 1.8.

D'une façon analogue on peut définir la dérivée d'une courbe vectorielle,

$$\left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \varepsilon) - \mathbf{r}(t_0)}{\varepsilon},$$

et tensorielle

$$\left. \frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{L}(t_0 + \varepsilon) - \mathbf{L}(t_0)}{\varepsilon}.$$

Encore, étant définies comme différences respectivement de vecteurs et de tenseurs, la dérivée d'un vecteur est un vecteur, voir encore la figure 1.8, et celle d'un tenseur un tenseur. Souvent, on indique les dérivées comme

$$\frac{dp}{dt} = p', \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}', \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L}'$$

et si le paramètre  $t$  est le temps, comme

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{L}}.$$

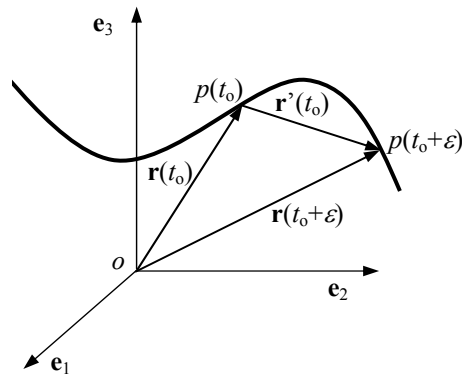


Figure 1.8

Si on applique les opérations de limite aux composantes, on reconnaît immédiatement que

$$\frac{dp}{dt} = p'_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r'_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = L'_{ij}(t) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

c'est-à-dire que la dérivée d'une courbe a comme composantes les dérivées des composantes de la courbe donnée. Sur la base de cette considération, c'est facile de comprendre les formules suivantes, qui généralisent aux courbes les règles de dérivation d'une fonction d'une variable réelle:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v})' &= \mathbf{u}' + \mathbf{v}'; \\ (\alpha \mathbf{v})' &= \alpha' \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v}', \quad \alpha(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' &= \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'; \\ (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})' &= \mathbf{u}' \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}'; \\ \mathbf{v}[\alpha(t)]' &= \mathbf{v}'[\alpha(t)]\alpha'(t), \quad \alpha(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \\ (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})' &= \mathbf{u}' \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}'; \\ (\mathbf{L} \mathbf{u})' &= \mathbf{L}' \mathbf{u} + \mathbf{L} \mathbf{u}'; \\ (\mathbf{L} \mathbf{M})' &= \mathbf{L}' \mathbf{M} + \mathbf{L} \mathbf{M}'. \end{aligned}$$

Un cas particulier, et important dans les applications, est celui d'un vecteur variable mais constant en module ; dans ce cas la dérivée est toujours orthogonale au vecteur donné. En fait, soit  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ , avec  $|\mathbf{v}(t)| = v \in \mathbb{R}$ . Cherchons la dérivée de la norme au carré, qui est sans doute nulle parce que la norme est constante par hypothèse :

$$(\mathbf{v}^2)' = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = 0,$$

donc les deux vecteurs sont orthogonaux ; on constate immédiatement que le contraire est vrai aussi.

Pour terminer, on peut introduire la dérivée seconde d'une courbe tout simplement en considérant que celle-ci n'est que la dérivée première de la courbe "dérivée première" de la courbe donnée, et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.

### 1.23 INTEGRATION D'UNE COURBE, ABSCISSE CURVILIGNE

L'intégrale d'une courbe de vecteurs est définie comme le vecteur qui a par composantes les



intégrales de chaque composante du vecteur donné :

$$\mathbf{w}(t) = \int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left( \int_a^b r_1(t) dt, \int_a^b r_2(t) dt, \int_a^b r_3(t) dt \right).$$

Si la courbe  $\mathbf{r}(t)$  est régulière, on peut généraliser le deuxième théorème fondamental du calcul intégral :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a) + \int_a^t \mathbf{r}'(t^*) dt^*.$$

Si on considère que

$$\mathbf{r}(t) = p(t) - o,$$

$$\mathbf{r}(a) = p(a) - o,$$

$$\mathbf{r}'(t) = (p(t) - o)' = p'(t),$$

l'équation ci-dessus peut être réécrite comme

$$p(t) = p(a) + \int_a^t p'(t^*) dt^*.$$

L'intégrale d'une fonction vectorielle est, d'une certaine façon, la généralisation de la somme vectorielle, voir la figure 1.9.

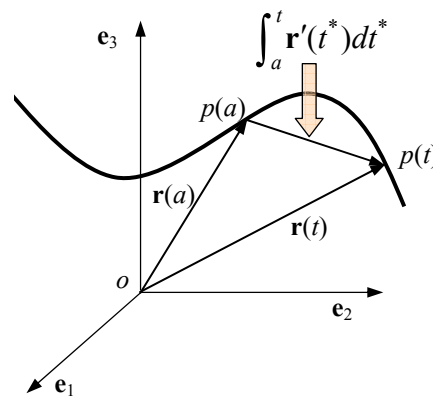


Figure 1.9

Une façon simple d'établir la position d'un point  $p(t)$  sur une courbe donnée, est celle de fixer un point quelconque  $p_o$  sur la courbe, et de mesurer la longueur de l'arc de courbe compris entre  $p_o = p(t_o)$  et  $p(t)$  ; cette longueur est appelée *abscisse curviligne*  $s(t)$ , et on peut démontrer que

$$s(t) = \int_{t_o}^t |(p(t^*) - o)'| dt^* = \int_{t_o}^t |\mathbf{r}'(t^*)| dt^*.$$

La longueur totale d'une courbe  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , avec  $t \in [a, b]$ , sera

$$\ell = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

De la formule de  $s(t)$ , on a

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_3}{dt}\right)^2} > 0$$

et donc  $s(t)$  est une fonction croissante avec  $t$  ; de la formule précédente on tire la longueur d'un arc

infinitésimal de courbe,

$$ds = \sqrt{dr_1^2 + dr_2^2 + dr_3^2},$$

formule souvent écrite comme

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Dans le cas d'une courbe plane  $y=f(x)$ , on peut toujours poser  $t=x$ , ce qui donne l'équation en forme paramétrique

$$p(t) \equiv (t, f(t)) \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases},$$

ou si l'on préfère en forme vectorielle

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{e}_1 + f(t) \mathbf{e}_2,$$

d'où on tire

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'^2(t)},$$

ce qui donne la formule de la longueur d'une courbe plane entre  $t=x_0$  et  $t=x$ , en fonction de l'abscisse  $x$ :

$$s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'^2(t)} dt.$$

#### 1.24 LE TRIEDRE DE FRENET

On définit *vecteur tangent*, à une courbe régulière  $p=p(t)$  le vecteur  $\boldsymbol{\tau}$  défini comme

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{p'(t)}{|p'(t)|}.$$

On remarque que le vecteur tangent a toujours norme constante et égale à 1, et que, par la définition de dérivée, ce vecteur est toujours orienté selon les valeurs croissantes de  $t$ . La droite tangente à une courbe en  $p_0=p(t_0)$  a donc équation

$$q(t^*) = p(t_0) + t^* \boldsymbol{\tau}(t_0).$$

Par changement de paramètre, il est toujours possible d'utiliser l'abscisse curviligne  $s=s(t)$  comme paramètre, et donc  $p=p[s(t)]$ . Dans ce cas, en se souvenant de l'expression de  $s'(t)$ , on a

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{p'(t)}{|p'(t)|} = \frac{1}{s'(t)} \frac{dp(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = \frac{dp(s)}{ds},$$

voire, si le paramètre est  $s$ , on a tout simplement

$$\boldsymbol{\tau} = p'(s),$$

c'est-à-dire que  $p'(s)$  est déjà un vecteur de norme unitaire.

Comme  $\boldsymbol{\tau}$  a norme constante, sa dérivée lui est toujours orthogonale, voir le paragraphe 1.22. C'est pour cela qu'on appelle *vecteur normal principal* à une courbe donné le vecteur  $\mathbf{v}$  défini comme

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\tau}'(t)}{|\boldsymbol{\tau}'(t)|}.$$

Il s'agit encore d'un vecteur de norme unitaire. Il faut remarquer que  $\mathbf{v}$  est défini seulement sur les points de la courbe où la dérivée  $\boldsymbol{\tau}'(t)$  n'est pas nulle. Dans le cas, par exemple, d'une droite,  $\mathbf{v}$  n'est donc pas défini; cela ne signifie pas qu'une droite n'a pas un vecteur normal, en effet elle en a infinis, mais aucun d'entre eux ne peut se distinguer d'un autre, donc aucun ne peut se dire principal.

On peut démontrer que, si on change de paramétrage de la courbe,  $\mathbf{v}$  ne change pas son orientation, alors que  $\boldsymbol{\tau}$  change d'orientation si on inverse le sens de parcours de la courbe à la suite d'un changement de paramètre. Le vecteur normal principal est donc, lorsqu'il existe, une caractéristique intrinsèque de la courbe, alors que le vecteur tangent ne l'est pas, parce qu'il dépend du paramétrage.

Le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  défini par le produit vectoriel

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \wedge \mathbf{v}(t)$$

s'appelle *vecteur binormal*; il est immédiat de vérifier que ce vecteur aussi a norme unitaire.

Les trois vecteurs introduits ci-dessus sont évidemment orthogonaux deux à deux et de norme unitaire; en outre c'est évident que

$$\boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1,$$

et donc  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}\}$  est une base orthonormée directe, nommée *trièdre de Frenet*, définie en chaque point de la courbe, et qui change avec la position, figure 1.10; c'est pour cela que ce trièdre est appelé aussi *trièdre local*. Le plan  $\boldsymbol{\tau}$ - $\mathbf{v}$  s'appelle *plan osculateur*, le plan  $\mathbf{v}$ - $\boldsymbol{\beta}$  *plan normal* et le plan  $\boldsymbol{\beta}$ - $\boldsymbol{\tau}$  *plan rectifiant*.

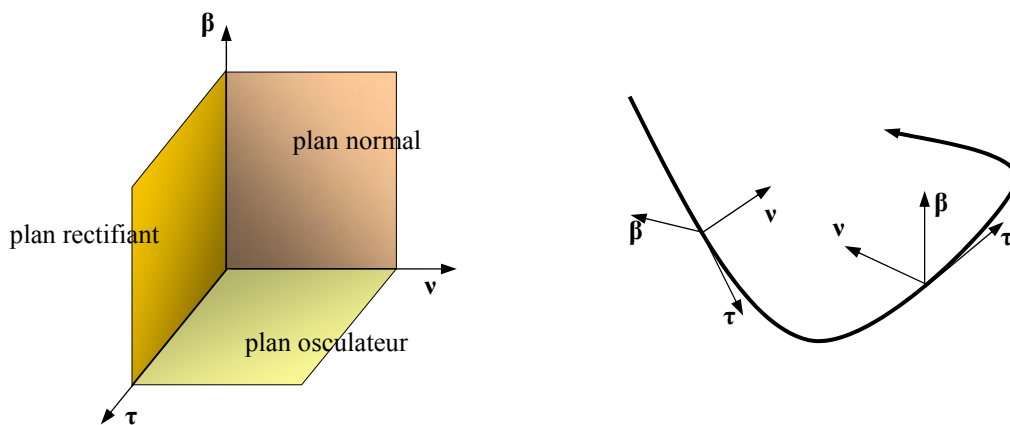


Figure 1.10

Le plan osculateur est particulièrement important : si on considère un plan qui passe par trois points quelconques, non alignés, de la courbe, ce plan tend vers le plan osculateur lorsque ces trois points se rapprochent l'un à l'autre tout en restant sur la courbe. En effet, on peut démontrer que le plan osculateur en un point donné de la courbe est le plan qui se rapproche mieux à la courbe au voisinage de ce point. Si la courbe est plane, le plan osculateur est le plan qui contient la courbe.

On peut aussi démontrer que le vecteur normal  $\mathbf{v}$  est toujours dirigé du côté du plan rectifiant dans lequel se trouve la courbe, voire, pour les courbes planes,  $\mathbf{v}$  est toujours dirigé vers la concavité de la courbe.

## 1.25 COURBURE D'UNE COURBE

Il est important, dans plusieurs cas, de pouvoir évaluer de combien une courbe s'éloigne d'une ligne droite au voisinage d'un point. Pour cela, on calcule le vecteur tangent en deux points proches l'un de l'autre, l'un à l'abscisse curviligne  $s$ , et l'autre à  $s+\varepsilon$ , et on mesure l'angle  $\chi(s, \varepsilon)$  qu'ils forment, voir la figure 1.11. On définit alors *courbure* de la courbe en  $s$  la limite

$$c(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\chi(s, \varepsilon)}{\varepsilon} \right|.$$

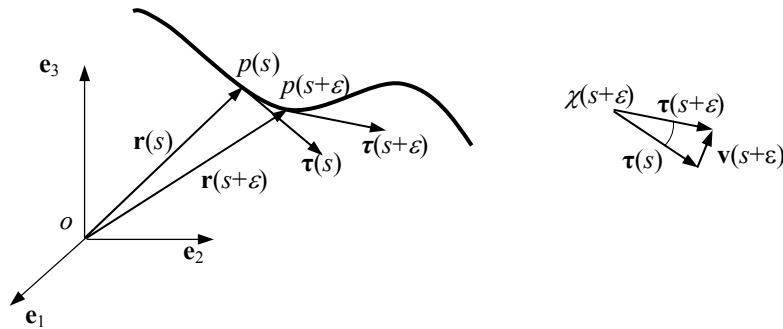


Figure 1.11

La courbure est donc un scalaire positif qui mesure la rapidité de variation de direction de la courbe par unité de parcours sur la courbe même ; c'est évident que pour une ligne droite la courbure est toujours nulle.

Démontrons que la courbure est liée à la dérivée seconde de la courbe :

$$\begin{aligned} c(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\chi(s, \varepsilon)}{\varepsilon} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \chi(s, \varepsilon)}{\varepsilon} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{2}{\varepsilon} \sin \frac{\chi(s, \varepsilon)}{2} \right| = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{v}(s, \varepsilon)}{\varepsilon} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\boldsymbol{\tau}(s + \varepsilon) - \boldsymbol{\tau}(s)}{\varepsilon} \right| = |\boldsymbol{\tau}'(s)| = |p''(s)|. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}[s(t)]}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} |p'(t)| \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{|p'(t)|} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt},$$

et donc

$$c(s) = |\boldsymbol{\tau}'(s)| = \frac{1}{|p'(t)|} \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right| = \frac{|\boldsymbol{\tau}'(t)|}{|p'(t)|},$$

qui est une autre formule de calcul de la courbure. On obtient une formule encore meilleure si l'on considère que

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} &= \frac{1}{|p'(t)|} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{1}{|p'(t)|} \frac{d}{dt} \frac{p'(t)}{|p'(t)|} = \frac{1}{|p'|} \frac{p''|p'| - p' \frac{p'' \cdot p'}{|p'|}}{|p'|^2} = \\ &= \frac{p'' - \boldsymbol{\tau} p'' \cdot \boldsymbol{\tau}}{|p'|^2} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}) \frac{p''}{|p'|^2}; \end{aligned}$$

par conséquent

$$c(s) = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} \right| = \frac{1}{|p'|^2} |(\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau})p''|.$$

Or, si  $\mathbf{W}$  est un tenseur antisymétrique on peut démontrer, grâce à la formule

$$\mathbf{W}\mathbf{W} = -\frac{1}{2}|\mathbf{W}|^2(\mathbf{I} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{w})$$

écrite pour  $\mathbf{w} = \boldsymbol{\tau}$ , ainsi que par la définition de produit vectoriel, que

$$|(\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau})p''| = |\boldsymbol{\tau} \wedge (\boldsymbol{\tau} \wedge p'')| = |\boldsymbol{\tau} \wedge p''| = \frac{|p' \wedge p''|}{|p'|},$$

et donc finalement

$$c = \frac{|p' \wedge p''|}{|p'|^3},$$

formule d'usage fréquent dans les calculs. Pour une courbe plane  $p(t) = (x(t), y(t))$ , on a, en utilisant la dernière formule,

$$c = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}};$$

si la courbe est explicitée comme  $y = f(x)$ , alors, en choisissant l'abscisse  $x$  comme paramètre  $t$ , on trouve immédiatement

$$c = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

cette dernière formule montre que la courbure d'une courbe plane est fonction de la dérivée seconde de la courbe faite par rapport à l'abscisse  $x$ ; si la dérivée première est toujours petite, de telle sorte qu'on puisse négliger son carré par rapport à l'unité, la courbure coïncide avec la valeur absolue de la dérivée seconde : c'est l'hypothèse fondamentale utilisée pour l'étude de la flexion dans la théorie classique des poutres.

Finalement on remarque que la courbure est une caractéristique intrinsèque de la courbe, parce qu'on peut démontrer qu'elle ne dépend pas du paramétrage choisi.

## 1.26 FORMULES DE FRENET ET SERRET

Le trièdre de Frenet introduit au paragraphe 1.24 est un trièdre qui varie avec le point considéré sur la courbe; les formules de Frenet et Serret qu'on va trouver maintenant donnent une décomposition des dérivées relatives à l'abscisse curviligne de  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\boldsymbol{\beta}$ , de telle sorte à avoir un système d'équations différentielles qui décrivent l'évolution du trièdre de Frenet le long de la courbe.

Des relations

$$\mathbf{v}(s) = \frac{\boldsymbol{\tau}'(s)}{|\boldsymbol{\tau}'(s)|}$$

et

$$c(s) = |\boldsymbol{\tau}'(s)|$$

on a

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = c(s) \mathbf{v}(s),$$

qui est la *première formule de Frenet et Serret* ; elle donne la variation du vecteur tangent par unité de  $s$  : cette variation est un vecteur de norme égale à la courbure et dirigé comme le vecteur normal.

La deuxième formule donne la variation de  $\boldsymbol{\beta}$  par unité de  $s$  : cette variation est encore un vecteur parallèle à  $\mathbf{v}$ . En fait, comme  $\boldsymbol{\beta}$  a norme constante, il est

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0,$$

et en outre, étant  $\boldsymbol{\beta}$  orthogonal à  $\boldsymbol{\tau}$ ,

$$\frac{d}{ds} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0$$

et grâce à la première formule de Frenet et Serret et au fait que  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\mathbf{v}$  sont orthogonaux, on a

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} = -c \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ce qui prouve que le vecteur dérivé de  $\boldsymbol{\beta}$  par rapport à  $s$  doit être parallèle à  $\mathbf{v}$ . On pose alors

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \mathcal{G}(s) \mathbf{v}(s),$$

qui est la *deuxième formule de Frenet et Serret* ; elle donne la variation du vecteur binormal par unité de  $s$  : cette variation est un vecteur proportionnel au vecteur normal, étant  $\mathcal{G}(s)$  le facteur de proportionnalité. La fonction scalaire  $\mathcal{G}(s)$  est nommée *torsion* de la courbe.

La troisième formule de Frenet et Serret concerne la variation de  $\mathbf{v}$  par unité de  $s$  :

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{d(\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\tau})}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} \wedge \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mathcal{G} \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\tau} + c \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{v},$$

et donc

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = -c(s) \boldsymbol{\tau}(s) - \mathcal{G}(s) \boldsymbol{\beta}(s),$$

qui est la *troisième formule de Frenet et Serret* : la variation de  $\mathbf{v}$  par unité de parcours est un vecteur du plan rectifiant.

### 1.27 PROPRIETES DE LA TORSION

La torsion est un scalaire qui mesure la déviation d'une courbe de la planéité : si une courbe est plane, elle appartient au plan osculateur, et le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$ , qui lui est perpendiculaire, est donc constant. Par conséquent la dérivée de  $\boldsymbol{\beta}$  est nulle et donc, par la deuxième formule de Frenet et Serret, la torsion aussi. Le contraire est évidemment vrai aussi : si la torsion d'une courbe est nulle en tout point, alors la courbe est plane. Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit plane est que sa torsion soit nulle en tout point.

La torsion, contrairement à la courbure qui est toujours positive, peut être négative. En particulier, une fois établi un sens de parcours sur la courbe, c'est-à-dire une fois choisie une abscisse curviligne, on peut démontrer que si, en suivant ce sens, la courbe sort du plan osculateur du côté de

$\beta$ , alors la torsion est négative, elle est positive dans le cas contraire, voire figure 1.12. Ce résultat est invariant: on peut démontrer que le signe de la torsion est une caractéristique intrinsèque de la courbe, et ne dépend pas du paramétrage choisi.

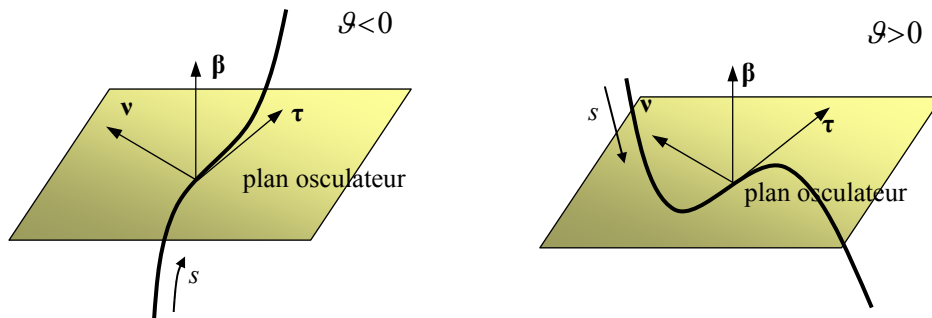


Figure 1.12

Ainsi que pour la courbure, on a une formule de calcul de la torsion :

$$g = -\frac{p' \wedge p'' \cdot p'''}{|p' \wedge p''|^2},$$

formule qu'on trouve en appliquant les formules de Frenet et Serret à l'expression de la dérivée troisième ; on remarque que, alors que la courbure dépend de la dérivée deuxième, la torsion est fonction de la dérivée troisième aussi.

### 1.28 SPHERE OSCULATRICE ET CERCLE OSCULATEUR

La *sphère osculatrice* à une courbe en un point  $p$  donné, est une sphère à laquelle la courbe tend à s'adapter, à adhérer, localement, au voisinage de  $p$  ; d'un point de vue mathématique, cela signifie que, si  $q_s$  est le centre de la sphère relative au point  $p(s)$ , alors

$$|p(s + \varepsilon) - q_s|^2 = |p(s) - q_s|^2 + o(\varepsilon^3).$$

On peut démontrer, sur la base de cette définition, que le centre  $q_s$  est déterminé par l'équation

$$q_s = p + \rho \nu - \frac{\rho'}{g} \beta,$$

et donc il se trouve toujours sur le plan normal ; si la courbe est plane, la sphère osculatrice n'est pas définie. La quantité  $\rho$  est le *rayon de courbure* de la courbe, défini comme

$$\rho = \frac{1}{c}.$$

Le rayon  $\rho_s$  de la sphère osculatrice est donnée par

$$\rho_s = |p - q_s| = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho'^2}{g^2}}.$$

L'intersection entre la sphère osculatrice et le plan osculateur au même point d'une courbe, est le *cercle osculateur*. Ce cercle a les propriétés d'avoir la même tangente que la courbe au point  $p$  de contact et rayon égal au rayon de courbure. De l'équation du centre de la sphère osculatrice on tire la position du centre  $q$  du cercle osculateur :

$$q = p + \rho \mathbf{v}.$$

Le cercle osculateur est cercle maximum de la sphère osculatrice si et seulement si  $q$  et  $q_s$  coïncident, et donc si et seulement si

$$\frac{\rho'}{\mathcal{G}} = -\frac{c'}{c^2 \mathcal{G}} = 0,$$

voire quand la courbure est constante.

## 1.29 CHAMPS

Une fonction définie sur une région  $\Omega$  de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  est un *champ* ; en particulier :

- une fonction  $f(p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est un *champ scalaire* ; un champ scalaire est donc une fonction qui prends des valeurs réelles sur les points de  $\Omega$  ; un exemple de champ scalaire est le champ de température ;
- une fonction  $q(p) : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$  est un *champ ponctuel* ; un champ ponctuel est donc une fonction qui fait correspondre des points de  $\mathcal{E}$  aux points de  $\Omega$  ; un exemple de champ ponctuel est la déformation d'un corps solide ;
- une fonction  $\mathbf{v}(p) : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$  est un *champ vectoriel* ; un champ vectoriel est donc une fonction qui fait correspondre un vecteur à chaque point de  $\Omega$  ; un exemple de champ vectoriel est le champ des vitesses des points d'un corps solide ;
- une fonction  $\mathbf{L}(p) : \Omega \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{V})$  est un *champ tensoriel* ; un champ tensoriel est donc une fonction qui fait correspondre un tenseur à chaque point de  $\Omega$  ; un exemple de champ tensoriel est le champ des tenseurs d'inertie d'un corps solide.

## 1.30 GRADIENT D'UN CHAMP SCALAIRE

A chaque champ scalaire  $f(p)$  on peut associer un champ vectoriel, appelé *gradient du champ*, et défini comme

$$\nabla f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 ;$$

le gradient est donc le vecteur qui a par composantes les dérivées partielles de la fonction faites par rapport aux coordonnées de  $p$ .

Dans le cas d'un champ scalaire, on peut toujours définir les *surfaces de niveau* du champ : ce sont les surfaces où la fonction  $f(p)$  est constante, d'une valeur donnée. Or, le gradient a l'importante propriété d'être un vecteur qui est orthogonal aux surfaces de niveau en tout point. Les lignes qui ont la direction du vecteur gradient en tout point sont les *ligne de flux* du champ ; elles sont donc orthogonales aux surfaces de niveau. Le gradient permet de calculer la variation du champ dans une direction quelconque : si  $\mathbf{n}$  est un vecteur de norme unitaire, alors la variation du champ par unité de longueur dans la direction  $\mathbf{n}$  est donnée par

$$\frac{df}{d\mathbf{n}} = \nabla f(p) \cdot \mathbf{n}(p).$$

Celle-ci est la formule de la *dérivée directionnelle*. On remarque qu'on a la plus grande valeur de la dérivée directionnelle lorsque  $\mathbf{n}$  a la direction du gradient : le gradient est donc le vecteur qui



donne la direction de variation maximale du champ en tout point ; la norme du gradient est la valeur de cette variation.

Le gradient est un vecteur qui a une grande importance en physique : en particulier, les champs vectoriels qui coïncident avec le gradient d'un champ scalaire ont des propriétés importantes, et notamment cela distingue le cas d'une force conservative, voir le chapitre 6.

## VECTEURS APPLIQUES

### 2.1 VECTEURS APPLIQUES, RESULTANTE, MOMENT RESULTANT, TORSEUR

On appelle *vecteur appliqué* un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  associé à un point  $p \in \mathcal{E}$ , point d'application du vecteur ; il sera indiqué avec  $\mathbf{v}_p$ .

La *résultante*  $\mathbf{R}$  d'un système de  $n$  vecteurs appliqués est le vecteur

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{p_i} .$$

Il faut remarquer que  $\mathbf{R}$  n'est pas un vecteur appliqué.

On dénomme *moment* relatif au point  $p_o$  d'un vecteur appliqué  $\mathbf{v}_p$  le vecteur, non appliqué,

$$\mathbf{M}_{p_o} = (p - p_o) \wedge \mathbf{v}_p .$$

Le point  $p_o$  est dit aussi *pôle du moment* ; il faut remarquer que, grâce à la propriété d'antisymétrie du produit vectoriel, l'ordre de l'opération ci-dessus est bien défini, et on ne peut pas l'inverser. Si le vecteur  $\mathbf{v}_p$  est parallèle au vecteur  $p - p_o$ , le moment est nul : c'est le cas d'un vecteur appliqué dont la droite d'action passe par le pôle.

Voyons maintenant quelle est la relation entre les moments d'un même vecteur calculés par rapport à deux pôles différents. Supposons pour cela de connaître le moment  $\mathbf{M}_{p_o}$ , fait par rapport au pôle  $p_o$  ; le but est de calculer le moment par rapport à un autre point  $p_1$ . Alors, voire aussi la figure 2.1, on a

$$\mathbf{M}_{p_1} = (p - p_1) \wedge \mathbf{v}_p = (p - p_o) \wedge \mathbf{v}_p + (p_o - p_1) \wedge \mathbf{v}_p \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}_{p_1} = \mathbf{M}_{p_o} + (p_o - p_1) \wedge \mathbf{v}_p .$$

Celle-ci est la *formule de changement de pôle*.

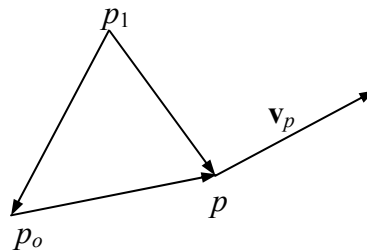


Figure 2.1

On tire directement de la formule de changement de pôle que si le vecteur  $\mathbf{v}_p$  est parallèle au vecteur  $p_o - p_1$ , alors  $\mathbf{M}_{p_1} = \mathbf{M}_{p_o}$  ; ceci implique que le moment d'un vecteur ne change pas si fait par rapport aux points d'une droite parallèle au vecteur en question ou, ce qui est la même chose, que le moment d'un vecteur par rapport à un pôle donné ne change pas si on déplace le vecteur le long de sa droite d'action.

Le *moment résultant* relatif à un point  $p_o$  de  $n$  vecteurs appliqués est le vecteur, non appliqué,

$$\mathbf{M}_{p_o} = \sum_{i=1}^n (p_i - p_o) \wedge \mathbf{v}_{p_i}$$

Comme déjà fait pour un seul vecteur, on peut trouver la formule de changement de pôle pour le moment résultant ; la démarche est exactement la même, et on trouve facilement que

$$\mathbf{M}_{p_1} = \mathbf{M}_{p_o} + (p_o - p_1) \wedge \mathbf{R}.$$

Encore, si la résultante  $\mathbf{R}$  est parallèle au vecteur  $p_o - p_1$ , alors  $\mathbf{M}_{p_1} = \mathbf{M}_{p_o}$  ; mais dans ce cas, il faut remarquer que cette circonstance est vérifiée aussi dans le cas d'un système à résultante nulle ; donc, pour les systèmes à résultante nulle le calcul du moment résultant est invariant par rapport au choix du pôle.

Un cas particulier, et assez important, de système à résultante nulle est celui d'un *couple* : un couple est un système formé par deux vecteurs appliqués tels que

$$(\mathbf{v})_{p_1} = (-\mathbf{v})_{p_2} ;$$

c'est donc immédiat, d'après sa définition, de voir qu'un couple a résultante nulle. Donc le moment résultant d'un couple est invariant par changement de pôle, et il en représente la grandeur caractéristique. C'est pour ça que, lorsqu'on parle du moment d'un couple, on ne met pas l'indice pour indiquer le pôle. Cherchons donc le moment d'un couple, en utilisant comme pôle un point  $p_o$  quelconque, voir fig. 2.2:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (p_1 - p_o) \wedge \mathbf{v}_{p_1} + (p_2 - p_o) \wedge (-\mathbf{v})_{p_2} = [(p_1 - p_o) - (p_2 - p_o)] \wedge \mathbf{v} \Rightarrow \\ \mathbf{M} &= (p_1 - p_2) \wedge \mathbf{v}. \end{aligned}$$

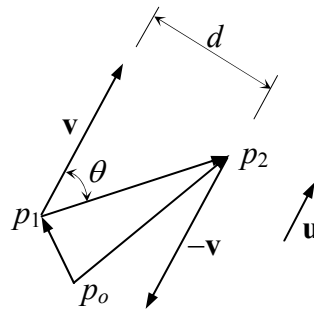


Figure 2.2

Si on appelle

$$d = |[\mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}](p_2 - p_1)| = |p_2 - p_1| \sin \theta, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

normalement dénommée *bras de levier*, alors on a

$$M = |p_2 - p_1| |\mathbf{v}| \sin \theta = d |\mathbf{v}|.$$

On appelle *torseur* la quantité de nature vectorielle

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_p \end{pmatrix};$$

il faut remarquer, toutefois, qu'un torseur n'est pas une grandeur homogène, ayant ses deux composantes des dimensions différentes.

## 2.2 AXE CENTRAL

Si un système de vecteurs appliqués a la résultante  $\mathbf{R}$  non nulle, on peut trouver une droite, appelée *axe central* du système des vecteurs donnés, telle que le moment résultant, fait par rapport aux points de l'axe soit parallèle à  $\mathbf{R}$ . Nous indiquerons avec le symbole  $\mathcal{A}$  l'axe central.

Démontrons donc l'existence de l'axe central. Soit  $p_o$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$  ; on sait calculer le moment résultant par rapport à  $p_o$ . On cherche un point  $p_1$  tel que

$$\mathbf{M}_{p_1} = \alpha \mathbf{R}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{M}_{p_1} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{o}.$$

Alors, si on multiplie vectoriellement à droite par  $\mathbf{R}$  les deux membres de la formule de changement de pôle pour le moment résultant, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{p_1} \wedge \mathbf{R} &= \mathbf{M}_{p_o} \wedge \mathbf{R} + [(p_o - p_1) \wedge \mathbf{R}] \wedge \mathbf{R} = \\ &= \mathbf{M}_{p_o} \wedge \mathbf{R} - \mathbf{R}^2(p_o - p_1) + [\mathbf{R} \cdot (p_o - p_1)]\mathbf{R}. \end{aligned}$$

Si à la place du vecteur  $p_o - p_1$  on injecte la quantité

$$p_o - p_1 = \frac{\mathbf{M}_{p_o} \wedge \mathbf{R}}{\mathbf{R}^2},$$

on voit bien que la condition est respectée, c'est-à-dire on obtient  $\mathbf{M}_{p_1} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{o}$ . La dernière relation définit donc le point

$$p_1 = p_o - \frac{\mathbf{M}_{p_o} \wedge \mathbf{R}}{\mathbf{R}^2}$$

qui respecte la condition imposée, et donc  $p_1 \in \mathcal{A}$ . Mais on a déjà vu que le moment, dans ce cas  $\mathbf{M}_{p_1}$ , ne change pas si on le calcule par rapport à des points qui appartiennent à la droite par  $p_1$  et qui est parallèle à  $\mathbf{R}$ . Donc  $\mathcal{A}$  est cette droite, et son équation vectorielle est

$$p = p_1 + t \mathbf{R} = p_o - \frac{\mathbf{M}_{p_o} \wedge \mathbf{R}}{\mathbf{R}^2} + t \mathbf{R},$$

$t$  étant le paramètre de l'équation.

$\mathcal{A}$  est unique ; en fait, s'il existait une autre droite  $\mathcal{A}'$ , forcément parallèle à  $\mathcal{A}$ , pour laquelle,  $\forall q \in \mathcal{A}'$  on avait  $\mathbf{M}_q \wedge \mathbf{R} = \mathbf{o}$ , alors grâce à la formule de changement de pôle, on aurait

$$\mathbf{M}_q \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_{p_1} \wedge \mathbf{R} + [(p_1 - q) \wedge \mathbf{R}] \wedge \mathbf{R};$$

dans cette quantité le premier membre est nul à cause de l'hypothèse faite, et le premier terme du deuxième membre est nul parce que  $p_1 \in \mathcal{A}$ . Comme  $\mathbf{R}$  est perpendiculaire au vecteur  $(p_o - p_1) \wedge \mathbf{R}$  et  $\mathcal{A}$  est défini seulement pour les systèmes avec  $\mathbf{R} \neq \mathbf{o}$ , le terme restant peut être nul seulement si  $p_1 - q = \mathbf{o}$ , c'est-à-dire si  $q$  coïncide avec  $p_1$ , ce qui revient à dire que  $\mathcal{A}'$  coïncide avec  $\mathcal{A}$ .

L'axe central a une autre propriété ; pour la montrer il faut d'abord introduire une invariance classique de la mécanique : si on multiplie scalairement par  $\mathbf{R}$  les deux membres de la relation de changement de pôle pour le moment résultant, on trouve immédiatement que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{p_0} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{p_1}$$

ce qui nous dit que la projection sur  $\mathbf{R}$  du moment résultant est indépendante du pôle.

On a vu que si fait par rapport à un point  $p_1 \in \mathcal{A}$ , le moment est parallèle à  $\mathbf{R}$ , c'est à dire qu'il n'a pas des composantes orthogonales à  $\mathcal{A}$ . Mais si on change de pôle, et on considère un point  $p$  quelconque, qui n'appartient pas à  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{M}_p$  aura en général des composantes parallèles et orthogonales à  $\mathbf{R}$ . Alors, en vertu de la dernière invariance écrite, qui établit que la composante du moment parallèle à  $\mathbf{R}$  est invariante, il en résulte que le moment fait par rapport aux points de  $\mathcal{A}$  est le plus petit possible. Donc  $\mathcal{A}$  est le lieu géométrique des pôles qui minimisent le moment résultant.

Sur l'axe central on peut dire encore quelque chose, en particulier pour les systèmes pour lesquels

$$\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{R} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{E};$$

c'est notamment le cas de systèmes de vecteurs coplanaires ou des systèmes de vecteurs parallèles.

Considérons d'abord un système de vecteurs coplanaires, et soient  $q$  un pôle qui appartient au plan des vecteurs, et  $p$  un pôle quelconque. C'est immédiat de voir que  $\mathbf{M}_q \cdot \mathbf{R} = 0$ ; en fait, chaque vecteur, ainsi que chaque  $p_i - q$ , appartient au même plan, ce qui signifie que le moment de chaque vecteur est orthogonal au plan même; donc aussi le moment résultant est perpendiculaire à ce plan.  $\mathbf{R}$ , au contraire, appartient au dit plan, et donc moment et résultante sont orthogonaux. Par la formule de changement de pôle,

$$\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_q \cdot \mathbf{R} + (p - q) \wedge \mathbf{R} \cdot \mathbf{R},$$

et on reconnaît immédiatement que cette quantité est nulle, ce qui nous dit que  $\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{R} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{E}$ .

Venons maintenant à un système de vecteurs parallèles; si  $\mathbf{e}$  est un vecteur unitaire auquel tous les vecteurs sont parallèles, on peut écrire

$$\mathbf{v}_{p_i} = \alpha_i \mathbf{e}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors, si  $p$  est un point quelconque de  $\mathcal{E}$ , on a que

$$\mathbf{R} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \mathbf{e},$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i (p_i - p) \wedge \mathbf{e}.$$

Donc  $\mathbf{R}$  est parallèle et  $\mathbf{M}_p$  orthogonal à  $\mathbf{e}$ , ce qui donne  $\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{R} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{E}$ .

Alors pour un système de vecteurs coplanaires ou pour un système de vecteurs parallèles, si  $p \in \mathcal{A}$ , il faut qu'il soit, au même moment,

$$\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{R} = 0,$$

$$\mathbf{M}_p \wedge \mathbf{R} = \mathbf{o}.$$

La seule possibilité est donc qu'il soit

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{o} \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

En fin de comptes, pour un système de vecteurs coplanaires ou pour un système de vecteurs parallèles,  $\mathcal{A}$  est le lieu des pôles par rapport auxquels le moment résultant est nul.

### 2.3 SYSTEMES EQUIVALENTS

Deux systèmes de vecteurs appliqués sont dits *équivalents* s'ils ont la même résultante et le même moment résultant  $\mathbf{M}_{p_o}$ , relatif à un pôle  $p_o$  quelconque. Donc, deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même torseur.

La relation d'équivalence ne dépend pas du pôle choisi; en fait,

$$\mathbf{M}_{p_1} = \mathbf{M}_{p_o} + (p_o - p_1) \wedge \mathbf{R};$$

c'est clair alors que si deux systèmes ont mêmes  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{M}_{p_o}$ ,  $\mathbf{M}_{p_1}$  sera le même.

Sur la base de cette importante définition, on a le

**Théorème de réduction des systèmes:** un système de vecteurs appliqués est équivalent au système composé par la résultante appliquée en un point  $p$  et par un couple de moment  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_p$ , moment résultant du système par rapport à  $p$ .

En fait,  $\mathbf{R}$  est par hypothèse la même, et pour le système équivalent (résultante plus couple) on a

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{M} + (p - p) \wedge \mathbf{R},$$

et donc, étant  $p - p = \mathbf{o}$ , si le couple a moment  $\mathbf{M}_p$ , l'équivalence est assurée. Ce théorème nous dit donc que tout système peut être réduit à un vecteur appliqué et un couple, et donc à deux vecteurs, si on a le soin de choisir un couple avec un des deux vecteurs qui est appliqué au même point de la résultante. On peut dénombrer quelques cas particuliers:

- $\mathbf{R} = \mathbf{o}$ , le système équivaut à un couple;
- système de vecteurs qui passent tous par  $p$ : il est équivalent à  $\mathbf{R}$  appliquée en  $p$ ;
- $\mathbf{M}_p = \mathbf{o}$ , le système est équivalent à  $\mathbf{R}$  appliquée en  $p$  (c'est le cas, très important, des systèmes plans ou des systèmes de vecteurs parallèles, si  $p \in \mathcal{A}$ ).

Il faut enfin remarquer que l'équivalence de deux systèmes n'est pas altérée par le transport d'un vecteur le long de sa droite d'action; en fait, ni  $\mathbf{R}$  ni  $\mathbf{M}_p$  changent à cause de ça.

### 2.4 SYSTEMES EQUILIBRES

Un système de vecteurs appliqués est dit *équilibré* s'il a  $\mathbf{R} = \mathbf{o}$  et  $\mathbf{M}_p = \mathbf{o} \forall p \in \mathcal{E}$ . Il faut remarquer que pour un système équilibré, comme  $\mathbf{R} = \mathbf{o}$ , le pôle par rapport auquel on calcule le moment résultant n'as pas d'importance, c'est-à-dire que si  $\mathbf{M}_p = \mathbf{o}$ , alors il est aussi  $\mathbf{M}_q = \mathbf{o} \forall q \in \mathcal{E}, q \neq p$ .

Les affirmations suivantes sont des conséquences de cette définition :

- un système est équilibré si et seulement si tout système équivalent l'est aussi;
- deux vecteurs appliqués peuvent s'équilibrer si, et seulement si, ils forment un couple de bras de levier nul, c'est-à-dire s'ils sont égaux et opposés;
- un système plan est équilibré si les vecteurs passent par un même point et si  $\mathbf{R} = \mathbf{o}$ .

## CINEMATIQUE DU POINT

### 3.1 TRAJECTOIRE, VITESSE ET ACCELERATION

Si l'on considère une courbe de classe  $C^2$

$$p = p(t),$$

elle peut être considérée comme la *trajectoire* suivie par un point  $p$  durant son mouvement si le paramètre  $t$  est le temps, mesuré à partir de l'instant où le mouvement commence. La même trajectoire, qui est donc l'ensemble des points de  $\mathcal{E}$  successivement occupés par  $p$ , peut être représentée par la fonction  $q(s)$ , où  $s = s(t)$  est l'abscisse curviligne :

$$p(t) = q[s(t)].$$

Le *vecteur vitesse*  $\mathbf{v}$  est défini comme la dérivée temporelle de la trajectoire :

$$\mathbf{v} = \frac{dp}{dt} = \dot{p};$$

il s'agit donc d'un vecteur toujours orienté comme la tangente à la trajectoire, à chaque point. Si  $p(t) = q[s(t)]$  on a, par la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\mathbf{v} = \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \boldsymbol{\tau}.$$

En se souvenant que le vecteur  $\boldsymbol{\tau}$  a norme unitaire, on a que la norme  $v$  de  $\mathbf{v}$  est  $\dot{s}$ , appelée aussi *vitesse scalaire* ; physiquement, elle représente la longueur de trajectoire parcourue dans l'unité de temps.

Le *vecteur accélération*  $\mathbf{a}$  est défini comme la dérivée temporelle de  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{p}.$$

Considérons encore pour  $\mathbf{v}$  l'expression

$$\mathbf{v} = \dot{s} \boldsymbol{\tau};$$

si on la dérive par rapport au temps, on trouve

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \dot{s} \dot{\boldsymbol{\tau}} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \dot{s} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt},$$

et par la première formule de Frenet et Serret on a

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{v},$$

où  $\rho$  est le rayon de courbure ; si on pose  $\dot{s} = v$ , on peut réécrire la dernière formule comme

$$\mathbf{a} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{v}.$$

Le vecteur accélération est donc toujours contenu dans le plan osculateur; en particulier,  $\mathbf{a}$  n'a jamais de composantes sur le vecteur binormal. On remarque que  $\mathbf{a}$  est composée de deux termes :

- $v\boldsymbol{\tau}$ , dit *accélération tangentielle*, c'est un vecteur toujours tangent à la trajectoire ; son effet est celui de faire varier la vitesse scalaire  $v$ , et il est nul si celle-ci est constante ;
- $\frac{v^2}{\rho}\mathbf{v}$ , dit *accélération normale*, c'est un vecteur toujours orthogonal à la trajectoire ; son effet est celui de varier la direction de la trajectoire, et il est nul si la courbure  $c=1/\rho$  est nulle, comme sur une trajectoire rectiligne.

Il faut remarquer que  $v^2/\rho$  est toujours positif, et donc l'accélération normale est toujours orientée comme  $\mathbf{v}$ , donc du côté du plan rectifiant qui contient la courbe, voire, pour les courbes planes, vers la concavité de la courbe. En plus,  $v^2/\rho$  est la projection de  $\mathbf{a}$  sur  $\mathbf{v}$ , et donc, par la positivité de  $v^2/\rho$ ,  $\mathbf{a}$  forme toujours un angle aigu avec  $\mathbf{v}$ .

### 3.2 VITESSE SCALAIRE ET ABSCISSE CURVILIGNE

On avait vu que l'abscisse curviligne  $s$  est donnée par

$$s(t) = \int_0^t |p'(\bar{t})| d\bar{t} ;$$

or, si le paramètre  $t$  est le temps,  $s(t)$  donne la distance parcourue sur la courbe, et

$$p'(t) = \dot{p}(t) = \mathbf{v}(t) .$$

La norme dans l'intégrale ci-dessus est alors la vitesse scalaire, et donc

$$s(t) = \int_0^t v(\bar{t}) d\bar{t} ,$$

ce qui signifie que la distance parcourue à partir de l'instant initial est l'intégrale de la vitesse scalaire.

### 3.3 COURBURE, VITESSE ET ACCELERATION

On avait vu que la courbure d'une courbe est donnée par la formule générale

$$c = \frac{|p' \wedge p''|}{|p'|^3} .$$

Alors, si  $t$  est le temps,

$$p'(t) = \dot{p}(t) = \mathbf{v}(t)$$

et

$$p''(t) = \ddot{p}(t) = \mathbf{a}(t) ;$$

donc

$$c = \frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|}{v^3} .$$

Cette formule met en relation la courbure avec la vitesse et l'accélération au même point.



### 3.4 MOUVEMENT EN COORDONNEES SPHERIQUES

Parfois, il est utile d'écrire l'équation de la trajectoire en coordonnées sphériques: si

$$p(t) = p_1(t) \mathbf{e}_1 + p_2(t) \mathbf{e}_2 + p_3(t) \mathbf{e}_3$$

est l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes, par les relations générales entre celles-ci et les coordonnées sphériques, figure 3.1,

$$\begin{aligned} p_1(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \sin \theta(t), \\ p_2(t) &= r(t) \sin \varphi(t) \sin \theta(t), \\ p_3(t) &= r(t) \cos \theta(t), \end{aligned} \quad \begin{aligned} 0 \leq \varphi(t) < 2\pi \\ 0 \leq \theta(t) \leq \pi \end{aligned} \quad \forall t \geq 0$$

on a

$$p(t) = r(t) [\cos \varphi(t) \sin \theta(t) \mathbf{e}_1 + \sin \varphi(t) \sin \theta(t) \mathbf{e}_2 + \cos \theta(t) \mathbf{e}_3].$$

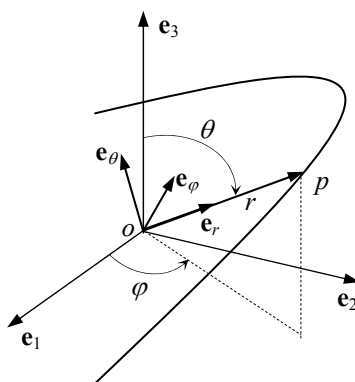


Figure 3.1

Toutefois, souvent il vaut mieux écrire les vecteurs dans une autre base, la *base locale sphérique*:  $\{\mathbf{e}_r(t), \mathbf{e}_\varphi(t), \mathbf{e}_\theta(t)\}$ . Les trois vecteurs de cette base, qui, on le souligne, est locale, et donc se transforme avec le changement de position du point  $p$ , sont déterminés de la façon suivante (on omet la dépendance du temps pour simplifier l'écriture, mais cette dépendance est toujours sous-entendue):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3; \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2; \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\varphi = -\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = -\cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

On peut aisément vérifier que les trois vecteurs ainsi définis forment effectivement une base orthonormée orientée positivement; en outre, le vecteur  $\mathbf{e}_\varphi$  est toujours orthogonal à  $\mathbf{e}_3$ . Le tenseur rotation qui transforme la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  dans la base locale  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta\}$  est donc

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & -\cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Dans la base locale, la position du point  $p$  est donnée à chaque instant par

$$p(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t);$$

calculons donc les vecteurs vitesse et accélération dans la base locale:

$$\mathbf{v} = \dot{p} = (\dot{r} \mathbf{e}_r) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r.$$

D'ailleurs,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\varphi} \sin \theta (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) - \dot{\theta} (-\cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3) = \\ &= \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi - \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi - r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta;$$

la vitesse scalaire sera donc

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)}.$$

Pour l'accélération on a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + (\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ r \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\mathbf{e}}_\varphi - (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta - r \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta; \end{aligned}$$

d'ailleurs

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_\theta &= \dot{\theta} (\cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3) + \\ &+ \dot{\varphi} \cos \theta (\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2) = \dot{\theta} \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= (\mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_r) = \dot{\mathbf{e}}_\theta \wedge \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \wedge \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} (\cos \theta \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \mathbf{e}_r), \end{aligned}$$

et donc l'expression de  $\mathbf{a}$  devient

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ (r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} - r \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta; \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où un point se déplace sur une sphère de rayon  $r_0$ , les expressions de vitesse et accélération se simplifient et deviennent

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= r_0 (\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi - \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta); \\ v &= r_0 \sqrt{\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2}; \\ \mathbf{a} &= r_0 [-(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ (\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta]. \end{aligned}$$

On remarque que dans ce cas, vitesse et accélération sont proportionnelles au rayon  $r_0$  de la sphère.

### 3.5 MOUVEMENT PLAN EN COORDONNEES POLAIRES

Considérons à présent le cas où le point se déplace sur un plan, soit le plan  $z=0$ . Les équations du mouvement en coordonnées sphériques se simplifient, parce que dans ce cas particulier il est constamment  $\vartheta = \pi/2$ , et donc non seulement  $\cos \vartheta = 0$  et  $\sin \vartheta = 1$ , mais aussi

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques prennent alors le nom de *coordonnées polaires*. L'équation de la trajectoire en coordonnées polaires est donc

$$p(t) = r(t) [\cos\varphi(t) \mathbf{e}_1 + \sin\varphi(t) \mathbf{e}_2],$$

alors que l'équation de la même courbe dans la base locale mobile ne change évidemment pas. L'expression de la vitesse en coordonnées polaires devient ainsi

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi,$$

celle de la vitesse scalaire

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$$

et celle de l'accélération

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi.$$

Les composantes de  $\mathbf{v}$  et de  $\mathbf{a}$  sur  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\varphi$  sont appelées respectivement *composante radiale* et *transversale* de  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{a}$  (à ne pas confondre avec les composantes normale et tangentielle).

Dans un mouvement, l'accélération est dirigée toujours vers le point fixe  $o$ , origine du repère, si sa composante transversale est constamment nulle, donc seulement si

$$r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi} = 0.$$

Dans un tel cas, le mouvement est dit *central*; on remarque que la condition ci-dessus est identique à la suivante

$$r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \Leftrightarrow r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{constant}.$$

Cette condition a une signification physique bien précise, qu'on verra dans le chapitre 7, lors de l'étude dynamique des mouvements centraux.

### 3.6 MOUVEMENT EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

Comme on a fait pour le cas des coordonnées sphériques, on peut écrire l'équation de la trajectoire en coordonnées cylindriques: si

$$p(t) = p_1(t) \mathbf{e}_1 + p_2(t) \mathbf{e}_2 + p_3(t) \mathbf{e}_3$$

est l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes, par les relations générales entre celles-ci et les coordonnées cylindriques, figure 3.2,

$$\begin{aligned}p_1(t) &= \rho(t) \cos\theta(t), \\ p_2(t) &= \rho(t) \sin\theta(t), \\ p_3(t) &= z(t),\end{aligned} \quad \begin{aligned} &\rho(t) \geq 0 \\ &0 \leq \theta(t) < 2\pi \quad \forall t \geq 0\end{aligned}$$

on a

$$p(t) = \rho(t) [\cos\theta(t) \mathbf{e}_1 + \sin\theta(t) \mathbf{e}_2] + z(t) \mathbf{e}_3.$$

Comme pour le cas sphérique, souvent il vaut mieux écrire les vecteurs dans la *base locale*

cylindrique:  $\{\mathbf{e}_\rho(t), \mathbf{e}_\theta(t), \mathbf{e}_z\}$ . Dans ce cas, les trois vecteurs de cette base, qui se transforme encore avec le changement de position du point, sauf que le vecteur  $\mathbf{e}_z$ , qui reste toujours identique au vecteur  $\mathbf{e}_3$ , sont déterminés de la façon suivante:

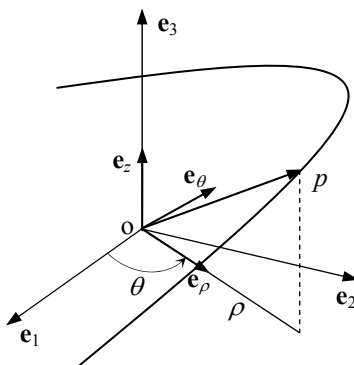


Figure 3.2

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2;$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2;$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3.$$

On peut aisément vérifier que ces trois vecteurs forment effectivement une base orthonormée orientée positivement. Dans cette base l'équation de la trajectoire est évidemment, voir figure 3.2,

$$\mathbf{p}(t) = \rho(t) \mathbf{e}_\rho + z(t) \mathbf{e}_z,$$

et le tenseur rotation qui transforme la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  dans la base locale  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  est donc

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculons à présent la vitesse dans le repère local cylindrique :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = (\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + z \dot{\mathbf{e}}_z) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z + z \dot{\mathbf{e}}_z = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \dot{z} \mathbf{e}_z,$$

et donc

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z ;$$

la vitesse scalaire est

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}.$$

Pour l'accélération on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= (\dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z} \dot{\mathbf{e}}_z) = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \\ &+ \rho \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z + \dot{z} \dot{\mathbf{e}}_z, \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\rho &= \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \mathbf{e}_\rho,\end{aligned}$$

il est finalement

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z.$$

Dans le cas particulier d'un point qui se déplace sur un cylindre circulaire de rayon  $\rho_0$ , les expressions de vitesse et accélération se simplifient et deviennent

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \rho_0 \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z ; \\ v &= \sqrt{\rho_0^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} ; \\ \mathbf{a} &= \rho_0 \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_\rho + \rho_0 \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Finalement, nous remarquons que, si on considère le mouvement d'un point qui se déplace dans le plan  $z = 0$ , nous retrouvons exactement les mêmes formules des coordonnées polaires, qui donc sont à la fois un cas particulier des coordonnées sphériques et cylindriques.

## CINEMATIQUE RELATIVE

### 4.1 REPERES FIXES ET MOBILES

Considérons deux repères en  $\mathcal{E}$  : un repère  $\mathcal{R} = \{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , où la position d'un point  $p$  est donnée par le vecteur  $\mathbf{r} = p - o = x_i \mathbf{e}_i$ , et un repère  $\mathcal{R}' = \{o'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ , où la position du même point  $p$  est déterminée par le vecteur  $\mathbf{r}' = p - o' = x'_i \mathbf{e}'_i$ . Soit  $\mathbf{r}_o$  le vecteur position du point  $o'$ , origine du repère  $\mathcal{R}'$ , par rapport au repère  $\mathcal{R}$ , voir la figure 4.1. Considérons le repère  $\mathcal{R}$  comme *fixe* et le repère  $\mathcal{R}'$  comme *mobile*.

Il faut préciser le sens de ce qui a été affirmé ci-dessus : la distinction entre repère fixe et mobile est arbitraire et conventionnelle, comme la *relativité galiléenne* nous assure, voir le paragraphe 6.2 : on ne peut pas privilégier, en nature, aucun repère en le qualifiant de "fixe", voire, il n'existe rien en nature qu'on puisse considérer comme absolument immobile, de telle sorte que tout autre mouvement soit mesuré par rapport à cet observateur. Au contraire, chaque observateur peut être considéré comme conventionnellement immobile, et ainsi faisant on évaluera les mouvements *relatifs* à cet observateur, sans jamais pouvoir les qualifier de mouvements absolus. Souvent, on dit que Galilée a abattu le concept, lié à la cosmologie de Ptolémée, d'espace absolu, en introduisant le concept d'espace relatif. On verra dans le chapitre 6 que les lois de la dynamique postulent l'existence d'observateurs privilégiés, les observateurs *galiléens*, mais eux non plus peuvent être considérés comme fixes, absolus.

Dire que  $\mathcal{R}'$  est en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  signifie deux choses :

- le point origine  $o'$  décrit une courbe en  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire que sa position, par rapport à  $o$ , est donnée à chaque instant par une relation du type  $o' - o = o'(t) - o = \mathbf{r}_o(t)$ , où  $t$  est le temps ; on considère que cette courbe soit régulière ;
- la base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  est, à tout instant, une transformation de la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir par rotation de cette dernière base. Donc, à tout instant, il existe un tenseur rotation  $\mathbf{Q}(t)$  tel que

$$\mathbf{e}'_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i \quad \forall t, \quad i=1, 2, 3.$$

La relation  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$  décrit une courbe tensorielle, qu'on admet régulière à tout instant.

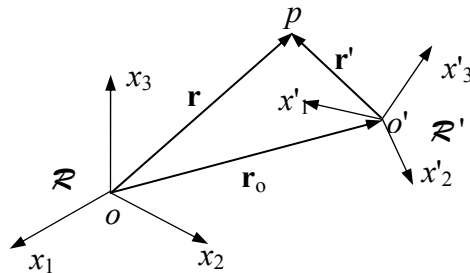


Figure 4.1

## 4.2 PREMIERE LOI DE LA CINEMATIQUE

Soit le point  $p$  en mouvement avec la loi

$$p-o = p(t) - o = \mathbf{r}(t).$$

On appelle *vitesse absolue* le vecteur

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{p} = \frac{dp}{dt}.$$

A remarquer que  $\mathbf{r}$  est le vecteur qui détermine la position de  $p$  dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . D'ailleurs,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}',$$

et donc

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_o + \mathbf{r}')' = \dot{\mathbf{r}}_o + \dot{\mathbf{r}}';$$

on appelle alors *vitesse d'entraînement* le vecteur

$$\mathbf{v}_o = \dot{\mathbf{r}}_o,$$

qui est la vitesse de déplacement du point  $o'$ . Ensuite

$$\dot{\mathbf{r}}' = (x'_i \mathbf{e}'_i)' = \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i + x'_i \dot{\mathbf{e}}'_i;$$

dans cette dernière relation, la quantité

$$\mathbf{v}' = \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i$$

exprime la vitesse de  $p$  par rapport au repère  $\mathcal{R}'$ , et on l'appelle *vitesse relative*. Voyons maintenant comment transformer le terme  $x'_i \dot{\mathbf{e}}'_i$ ; on sait que

$$\mathbf{e}'_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i \quad \forall t, \quad i=1, 2, 3.$$

Si on dérive par rapport au temps on a alors

$$\dot{\mathbf{e}}'_i(t) = [\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i]' = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_i + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_i,$$

parce que  $\mathbf{e}_i$  est un vecteur constant  $\forall t$ . D'ailleurs, on a aussi que

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}'_i,$$

et comme  $\mathbf{Q}$  est un tenseur rotation, pour lequel donc  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ , on peut écrire

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^T\mathbf{e}'_i.$$

Si on injecte ce résultat dans l'expression de  $\dot{\mathbf{e}}'_i$ , on a alors

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{e}'_i.$$

Le tenseur

$$\mathbf{S} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$$

est appelé *tenseur de spin*; on montre facilement que  $\mathbf{S}$  est antisymétrique : en fait, par être  $\mathbf{Q}$  une rotation,

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)' = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)' = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{0},$$

et alors

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = -\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T,$$

ce qui comporte

$$\mathbf{S}^T = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^T = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = -\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = -\mathbf{S}.$$

Finalement on peut écrire

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{S}\mathbf{e}'_i$$

et donc

$$x'_i \dot{\mathbf{e}}'_i = x'_i \mathbf{S}\mathbf{e}'_i = \mathbf{S}x'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{S}\mathbf{r}' ;$$

d'ailleurs, comme vu ci-dessus,  $\mathbf{S}$  est antisymétrique, et cela, comme on sait déjà, implique qu'il existe un vecteur axial  $\boldsymbol{\omega}$  tel que

$$\mathbf{S}\mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' \quad \forall \mathbf{r}'.$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$ , vecteur axial du tenseur de spin, est la *vitesse de rotation* ou *angulaire*, du repère  $\mathcal{R}'$  ; il est le vecteur propre de  $\mathbf{S}$  relatif à la seule valeur propre réelle de  $\mathbf{S}$ , le zéro. Finalement on peut écrire

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}',$$

qui est la *première loi de la cinématique*.

#### 4.3 FORMULE DE POISSON

En généralisant ce qu'on a vu avec la vitesse, si on a un vecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ , dans le repère  $\mathcal{R}'$  il est

$$\mathbf{u} = u'_i \mathbf{e}'_i \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}'_i \mathbf{e}'_i + u'_i \dot{\mathbf{e}}'_i = \dot{u}'_i \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u},$$

comme on a vu pour la vitesse. Alors  $\dot{\mathbf{u}}$  est la *dérivée absolue*,

$$\dot{\mathbf{u}}_R = \dot{u}'_i \mathbf{e}'_i$$

est la *dérivée relative* et

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_R + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$$

est la *formule de Poisson*. Il est évident que

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}'_R.$$

#### 4.4 DEUXIEME LOI DE LA CINEMATIQUE

Le vecteur

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{p}}$$

s'appelle *accélération absolue* du point  $p$  ; l'accélération absolue s'obtient donc par double dérivation temporelle de la position du point dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . Par la première loi de la cinématique on a donc

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v}_o + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')' = \dot{\mathbf{v}}_o + \dot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}' ;$$



on appelle alors *accélération d'entraînement* le vecteur

$$\mathbf{a}_o = \dot{\mathbf{v}}_o = \ddot{\mathbf{r}}_o,$$

qui est l'accélération absolue du point  $o'$ . Ensuite,

$$\dot{\mathbf{v}}' = (\dot{x}'_i \mathbf{e}'_i)' = \ddot{x}'_i \mathbf{e}'_i + \dot{x}'_i \dot{\mathbf{e}}'_i;$$

on appelle alors *accélération relative* le vecteur

$$\mathbf{a}' = \ddot{x}'_i \mathbf{e}'_i = \dot{\mathbf{v}}'_{R'},$$

qui est l'accélération du point  $p$  mesurée dans le repère  $\mathcal{R}'$ . En outre

$$\dot{x}'_i \dot{\mathbf{e}}'_i = \dot{x}'_i \mathbf{S} \mathbf{e}'_i = \mathbf{S} \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{S} \mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}',$$

et, par la formule de Poisson,

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{\mathbf{r}}'_{R'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'),$$

et donc finalement on a la *deuxième loi de la cinématique* :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}'.$$

Le tout dernier terme de la somme ci-dessus est appelé *accélération de Coriolis*.

La formule de transformation du double produit vectoriel, voir le paragraphe 1.16, nous permet d'écrire que

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}' = -\omega^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \mathbf{r}',$$

où  $\mathbf{e}$  est le vecteur de  $\mathcal{S}^2$  qui donne la direction de  $\boldsymbol{\omega}$ ,

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}.$$

En se rappelant ce qui a été dit au paragraphe 1.7 à propos du tenseur  $(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})$ , on voit bien que le vecteur  $\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')$  est, à tout instant, contenu dans le plan de  $\boldsymbol{\omega}$  et  $\mathbf{r}'$ , orthogonal à  $\boldsymbol{\omega}$  et orienté vers ce vecteur, voire vers l'axe d'instantanée rotation, comme on verra dans le paragraphe 5.8. C'est pour cela que le vecteur  $\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')$  s'appelle *accélération centripète* (qui veut dire dirigée vers le centre, entendu comme le centre de rotation). C'est en outre immédiat de voir que la norme de l'accélération centripète est

$$|\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')| = \omega^2 r'_{\perp},$$

où  $r'_{\perp}$  est la composante de  $\mathbf{r}'$  perpendiculaire à  $\boldsymbol{\omega}$ .

#### 4.5 TRANSFORMATIONS GALILEENNES

Une transformation d'un repère  $\mathcal{R}$  à un repère  $\mathcal{R}'$  est *galiléenne* si l'accélération de  $p$  en  $\mathcal{R}$  est identique à celle en  $\mathcal{R}'$ . Pour cela il faut qu'il soit

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \Rightarrow \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' = \mathbf{0},$$

ce qui implique

$$\mathbf{a}_o = \dot{\mathbf{v}}_o = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_o = \text{constante},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}.$$

Donc  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont en relation galiléenne si, et seulement si, le repère  $\mathcal{R}'$  se déplace par rapport au repère  $\mathcal{R}$  avec un mouvement rectiligne uniforme. Dans le cas d'une transformation galiléenne on a donc

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}';$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'.$$

On remarque que pour une telle transformation le tenseur rotation est évidemment, étant  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{I} \quad \forall t .$$

#### 4.6 MOUVEMENTS RIGIDES

Le mouvement d'un système est dit *rigide* s'il existe un repère  $\mathcal{R}'$  pour lequel tout point du corps est immobile.  $\mathcal{R}'$ , dit *repère solide*, se déplace avec le même mouvement du système. Si un système, comme par exemple un corps, est tel qu'il existe un repère solide pour tout mouvement possible pour le système, alors le système même est dit *rigide*.

Dans le cas d'un mouvement rigide, vitesse et accélération relatives sont identiquement nulles, parce que chaque point du système ne se déplace pas par rapport au repère  $\mathcal{R}'$ ; les deux lois de la cinématique deviennent alors

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}',$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}').$$

## CINEMATIQUE DES CORPS RIGIDES

### 5.1 TRANSFORMATIONS ET DEGRES DE LIBERTE D'UN CORPS RIGIDE

Le concept de *corps continu rigide* est une abstraction, un modèle mathématique, et en nature aucun corps ne peut être considéré, à la rigueur, ni continu ni rigide. La notion de corps est primitive pour nous ; la seule chose qu'on peut dire est qu'un corps occupe une région de  $\mathcal{E}$ .

Avec le modèle abstrait de corps rigide on peut décrire tout phénomène pour lequel les déplacements relatifs entre les points du corps peuvent être considérés négligeables par rapport aux déplacements d'ensemble du corps même. On définit alors comme rigide un corps  $\mathcal{C}$  pour lequel il existe au moins un observateur, dit *solidaire*, pour lequel le seul mouvement du corps observé est toujours le repos. Par rapport à cet observateur, les points du corps ne se déplacent donc pas, ce qui implique que

$$|p(t) - q(t)| = \text{const.} \quad \forall t \text{ et } \forall p, q \in \mathcal{C},$$

où  $t$  est le temps. Imaginons donc qu'un mouvement rigide commence à l'instant  $t=0$ , où on peut toujours choisir le repère  $\mathcal{R}'$ , solidaire et mobile avec le corps, de telle sorte qu'il coïncide avec un repère fixe  $\mathcal{R}$ ; après le début du mouvement, à un instant quelconque, les deux repères ne coïncideront plus :  $o'$  se sera déplacé par rapport à  $o$ , et les axes de  $\mathcal{R}'$  auront tourné par rapport à la configuration originelle, et donc à ceux de  $\mathcal{R}$ . La seule chose qui reste inchangée, par définition, c'est la position du corps par rapport à  $\mathcal{R}'$ . Cela signifie que la position du corps par rapport à  $\mathcal{R}$  est totalement connue une fois connue celle de  $\mathcal{R}'$  au même instant.

Le problème qui se présente est donc le suivant : comment déterminer la position de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ? Considérons la position de  $\mathcal{R}'$  à un certain instant  $t$ , et les opérations qui opèrent les transformations entre  $t=0$  et  $t$ , c'est-à-dire les transformations qui changent  $\mathcal{R}'$  à  $t=0$  en  $\mathcal{R}'$  à l'instant  $t$  considéré. D'abord il faut considérer que  $o'$  se déplace, et donc il faut connaître les trois composantes du vecteur  $\mathbf{r}'_o = o' - o$ , voir fig. 5.1.

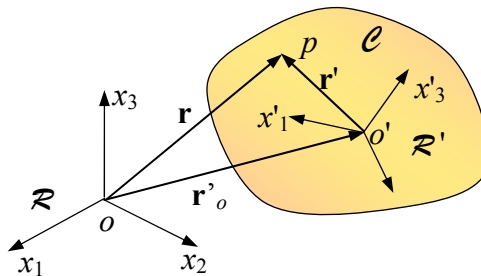


Figure 5.1

Mais en même temps, il faut déterminer la rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Or, nous savons, voir paragraphe 1.19, que toute rotation de base, et donc même de la base d'un repère, est opérée par un tenseur rotation propre  $\mathbf{Q}$ . Donc, les seules transformations possibles pour un corps rigide sont les rotations propres, alors qu'une rotation impropre ne correspond pas à un déplacement physique d'un corps rigide : c'est pour cela qu'au paragraphe 1.19 on a exclu la possibilité d'avoir des rotations impropres, c'est-à-dire de transformations de rotation et de réflexion.

Chaque tenseur rotation, n'étant ni symétrique ni antisymétrique, dépend de neuf composantes, et donc apparemment même la transformation par rotation de  $\mathcal{R}'$  dépend de neuf paramètres. Toutefois, les neuf composantes de  $\mathbf{Q}$  ne sont pas toutes indépendantes. En fait, on a vu au paragraphe 1.19 que les composantes de  $\mathbf{Q}$  sont les composantes des vecteurs directeurs de  $\mathcal{R}'$  exprimés dans  $\mathcal{R}$ , et rangés par colonne. Mais, étant la base associée à  $\mathcal{R}'$  orthonormée, il est

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 ;$$

celles-ci sont six relations indépendantes entre les neuf composantes de  $\mathbf{Q}$ , ce qui réduit à trois le nombre de paramètres indépendants. Donc, la transformation la plus générale possible d'un repère est déterminée à l'aide de six paramètres : trois composantes de translation et trois composantes de rotation. Dans d'autres termes, un corps rigide a six *degrés de liberté* dans  $\mathcal{E}$ . Avec le terme degré de liberté on indique un paramètre capable de déterminer la position d'un corps. On reconsidérera la notion de degré de liberté dans la suite ; ce qui est important de remarquer ici c'est qu'un général il est nécessaire de préciser un certain nombre de degrés de liberté, afin de complètement déterminer la configuration d'un système ; ce nombre est égal à six pour un corps rigide libre de se déplacer en  $\mathcal{E}$ , mais il sera en général différent pour un système soumis à des liens. En plus, il y a plusieurs possibilités de choisir les degrés de liberté indépendants, pourvu qu'ils soient en nombre suffisant. Même pour un corps rigide libre, il existe plusieurs possibilités de choisir les six paramètres indépendants; par exemple, le choix du point  $o'$ , origine de  $\mathcal{R}'$ , est arbitraire, et donc les trois composantes de  $\mathbf{r}'_o$  aussi. Mais, encore plus important, c'est le fait qu'il existe plusieurs façons de choisir les trois paramètres de rotation : par exemple, on pourrait prendre les angles de rotation autour des trois axes. Toutefois, traditionnellement on fait un choix particulier, parmi les différents possibles, et c'est celui des *angles d'Euler*. Ces trois angles sont introduits dans le paragraphe suivant, avec le tenseur rotation qui les concerne. Avant de continuer, il faut préciser que les six degrés de liberté en  $\mathcal{E}$  se réduisent à trois pour les transformations planes, parce qu'un déplacement, celui hors plan, et deux rotations, celles autour des axes contenus dans le plan de la transformation, sont impossibles, par définition même de mouvement plan.

## 5.2 LES ANGLES D'EULER

Toute rotation peut être considérée comme la suite de trois rotations élémentaires, autour de trois axes particuliers, et d'amplitudes égales aux angles d'Euler. Ceux-ci sont montrés en fig. 5.2 ; l'angle  $\theta$  s'appelle *nutation*, l'angle  $\psi$  *précession* et l'angle  $\varphi$  *rotation propre*.

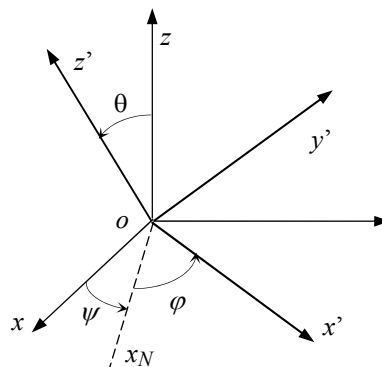


Figure 5.2

Pour effectuer le passage dont on parle, on peut penser amener  $z$  sur  $z'$ , et puis avec une rotation on arrange les deux autres axes. Pour faire ça, une première rotation est nécessaire pour se placer sur l'axe qui est perpendiculaire à  $z$  et à  $z'$ . Un tel axe doit passer par  $o$ , et appartenir au plans  $xy$  et  $x'y'$ :

c'est exactement la droite par  $o$  intersection de  $xy$  et  $x'y'$ , et s'appelle *ligne des nœuds*,  $x_N$ .

La première rotation est alors faite autour de  $z$ , pour amener  $x$  sur  $x_N$ ; l'angle nécessaire est  $\psi$ . Le tenseur rotation qui transforme la base  $\{x, y, z\}$  en  $\{x_N, \bar{y}, z\}$  est (dans la figure 5.3 une vue depuis l'axe  $z$ )

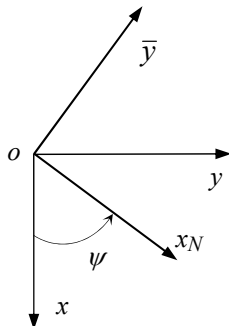


Figure 5.3

$$\mathbf{Q}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La deuxième rotation, d'ampleur  $\theta$ , on la fait autour de  $x_N$  pour amener  $z$  sur  $z'$ ; le tenseur rotation qui transforme la base  $\{x_N, \bar{y}, z\}$  en  $\{x_N, \bar{y}, z'\}$  est donc, dans la base  $\{x_N, \bar{y}, z\}$  (dans la figure 5.4 une vue depuis la ligne des nœuds)

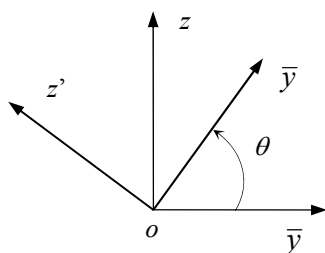


Figure 5.4

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

alors que dans la base  $\{x, y, z\}$  il sera, voir le paragraphe 1.19,

$$\mathbf{Q}_\theta^* = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\psi^T.$$

Finalement, on fait une troisième rotation autour de  $z'$ , d'ampleur  $\varphi$ , pour amener  $x_N$  sur  $x'$  et  $\bar{y}$  sur  $y'$ ; le tenseur rotation dans ce cas est, dans la base  $\{x_N, \bar{y}, z'\}$  (dans la figure 5.5 une vue depuis l'axe  $z'$ )

$$\mathbf{Q}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

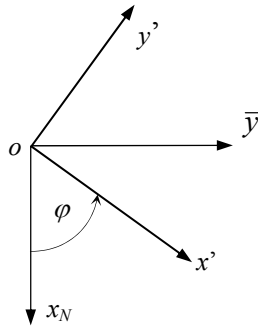


Figure 5.5

alors que dans la base  $\{x, y, z\}$  il est

$$\mathbf{Q}_\varphi^* = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{Q}_\theta^T \mathbf{Q}_\psi^T.$$

Si  $\mathbf{u}$  est un vecteur quelconque, et s'il est transformé en  $\mathbf{u}'$  par la rotation globale  $\mathbf{Q}$ , alors

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Q}_\varphi^* \bar{\mathbf{u}},$$

où  $\bar{\mathbf{u}}$  est le vecteur transformé par la rotation  $\mathbf{Q}_\theta^*$ ,

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}_\theta^* \mathbf{u},$$

alors que  $\mathbf{u}$  est à son tour le vecteur transformé par la rotation  $\mathbf{Q}_\psi$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{u}.$$

Finalement,

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Q} \mathbf{u} = \mathbf{Q}_\varphi^* [\mathbf{Q}_\theta^* (\mathbf{Q}_\psi \mathbf{u})],$$

voire le tenseur global de rotation est (il est immédiat de démontrer que la combinaison de plusieurs tenseurs rotation est encore un tenseur rotation)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\varphi^* \mathbf{Q}_\theta^* \mathbf{Q}_\psi.$$

Donc, si tous les tenseurs sont exprimés dans la même base, le tenseur global est la composition des trois tenseurs, mais dans l'ordre contraire à celui d'exécution. Toutefois, par les relations précédentes, on peut toujours écrire que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\varphi^* \mathbf{Q}_\theta^* \mathbf{Q}_\psi = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\varphi \mathbf{Q}_\theta^T \mathbf{Q}_\psi^T \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\varphi^T \mathbf{Q}_\psi = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\varphi.$$

Cette dernière relation nous donne un résultat surprenant: le tenseur rotation est, dans la base  $\{x, y, z\}$ , la composition, dans l'ordre d'exécution, des rotations composantes, mais chacune exprimée dans sa base particulière.

Les composantes du tenseur rotation final en fonction des angles d'Euler sont alors

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\theta & -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\theta & \sin\psi \sin\theta \\ \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta & -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi \cos\theta & -\cos\psi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \cos\varphi \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les axes  $z$  et  $z'$  coïncident, la ligne des nœuds est indéterminée, ainsi que  $\varphi$  et  $\psi$ .

Toutefois, leur somme est connue, voir fig. 5.6, et  $\theta = k\pi$ ,  $k=0,1$  ; ceci est suffisant à déterminer la position de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

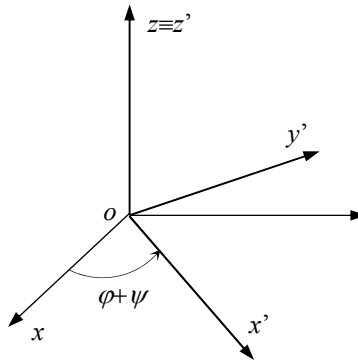


Figure 5.6

Si on connaît les composantes d'un vecteur  $\mathbf{v}$  dans le repère  $\{x, y, z\}$ , dans le repère  $\{x', y', z'\}$  on aura, voir le paragraphe 1.19,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{v} = \mathbf{Q}_\varphi^T \mathbf{Q}_\theta^T \mathbf{Q}_\psi^T \mathbf{v}.$$

### 5.3 THEOREMES FONDAMENTAUX SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS RIGIDE

Si un corps rigide se déplace autour d'un point fixe, on peut toujours faire coïncider l'origine  $o$  du repère solide  $\mathcal{R}'$  avec ce point fixe. C'est évident, alors, qu'un tel mouvement est complètement déterminé par la rotation  $\mathbf{Q}$ , et donc par trois seuls degrés de liberté, par exemple les trois angles d'Euler. Ceci est énoncé dans le

**Théorème d'Euler** : tout mouvement d'un corps rigide avec un point fixe est une rotation propre.

Pour démontrer ce théorème, remarquons d'abord que toute rotation physique a deux caractéristiques fondamentales : la première est qu'il existe une droite, l'*axe de rotation*, qui reste inchangée dans l'opération de rotation. La deuxième caractéristique est que dans une rotation rigide distances et angles se conservent.

Or, dire qu'il existe une droite qui n'est pas affectée par l'opération de rotation, signifie dire qu'il existe, au moins, un vecteur  $\mathbf{u}$  tel que

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{u} ;$$

celle-ci est la définition de vecteur propre de  $\mathbf{Q}$  relatif à la valeur propre +1. Démontrer le théorème d'Euler revient donc à montrer que le tenseur  $\mathbf{Q}$ , qui décrit la transformation de rotation physique, possède la valeur propre +1, et qu'il laisse inaltérés les distances et les angles. Mais on a vu au paragraphe 1.19 que tout tenseur rotation est un cas particulier des tenseurs orthogonaux, qui justement conservent distances et angles, et qu'une rotation propre a toujours la valeur propre +1. Le théorème d'Euler peut donc se dire démontré.

Le théorème d'Euler a un corollaire :

**Théorème de Chasles** : le mouvement le plus général d'un corps rigide peut être considéré comme la somme d'une translation plus une rotation.

Nous ne donnerons pas une démonstration détaillée de ce théorème ; nous nous limitons à remarquer que, si on renonce à l'hypothèse que le corps a un point fixe, l'origine du repère solide sera déterminée par trois paramètres, voire elle a trois degrés de liberté. Dans d'autres mots, on peut toujours analyser le mouvement d'un corps rigide en étudiant les déplacements d'un point

quelconque et les rotations autour de ce point (qui sont, par le théorème d'Euler, les seuls mouvements possibles d'un corps rigide autour d'un point).

Le mouvement d'un corps rigide peut se composer de différentes rotations effectuées en succession ; on a fait ça lorsqu'on a introduit les angles d'Euler, et ce même procédé montre que, si  $\mathbf{Q}_1$  et  $\mathbf{Q}_2$  sont deux rotations appliquées en succession, et exprimées dans la même base, la rotation globale sera donnée par

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1.$$

A ce propos, il faut remarquer qu'en général une rotation composée n'est pas commutative ; en fait, on sait de l'algèbre tensorielle que la composition de deux tenseurs ne commute pas, voir paragraphe 1.9. Donc, par exemple, dans la composition qui amène à exprimer  $\mathbf{Q}$  par les angles d'Euler, changer l'ordre des tenseurs correspond à décrire une autre rotation. On peut montrer cela avec un exemple : on soumet un solide à deux rotations successives, mais on les exécute dans deux ordres différents : le résultat n'est pas le même, voir la figure 5.7, et donc les deux séquences ne sont pas équivalentes.

#### 5.4 L'AXE DE ROTATION GLOBALE

Le théorème d'Euler assure que tout mouvement d'un corps rigide avec un point fixe est une rotation, et on sait que toute rotation se produit autour de l'axe de rotation,  $\mathcal{A}_r$  ; on se propose ici de déterminer cet axe. Il faut préciser qu'il s'agit d'un axe autour duquel le solide peut tourner, d'une amplitude qu'on déterminera dans le paragraphe qui suit, en arrivant à occuper la même position

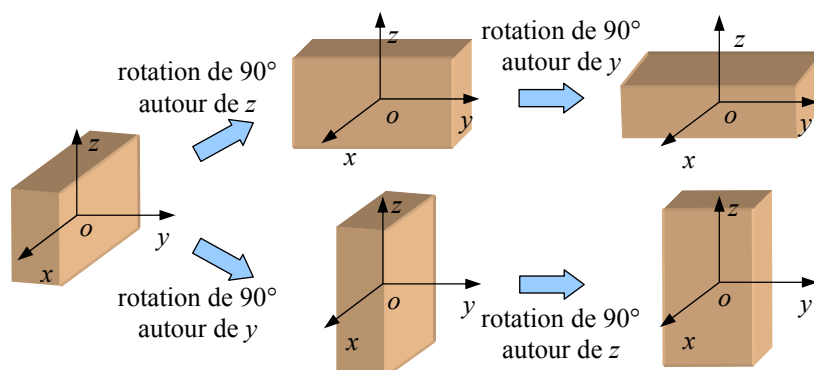


Figure 5.7

finale dans laquelle le solide se porte éventuellement avec une suite de transformations données: c'est pour cela que cet axe on l'appellera *axe de rotation globale*.

Par définition, l'axe de rotation est le lieu géométrique des points qui ne sont pas mutés par la transformation de rotation. Un de ces points est naturellement le point fixe, qu'on fait coïncider avec l'origine  $o$  du repère solide  $\mathcal{R}'$ . Pour trouver l'axe il ne reste donc plus qu'à en déterminer la direction. Cette direction demeure évidemment inchangée lors de la rotation, et donc, si on appelle  $\mathbf{a}$  un vecteur unitaire de direction de  $\mathcal{A}_r$ , il doit être

$$\mathbf{Q} \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Donc la direction de  $\mathcal{A}_r$  est celle de  $\mathbf{a}$ , vecteur propre de  $\mathbf{Q}$  relatif à la valeur propre +1. L'équation ci-dessus donne la direction de l'axe de rotation globale, à une constante près ; celle-ci peut être déterminée, comme d'habitude, en imposant que la norme de  $\mathbf{a}$  soit unitaire. Finalement, l'équation vectorielle de l'axe de rotation globale est



$$p = o' + s \mathbf{a},$$

avec  $s$  paramètre réel. Il faut remarquer que lors d'un mouvement qui se développe dans le temps, l'axe de rotation globale ainsi déterminé est variable en général à chaque instant, et il correspond à l'axe autour duquel on pourrait effectuer une rotation pour amener le solide de la configuration initiale à celle occupée à l'instant considéré, et cela indépendamment de la transformation effectivement suivie par le solide même.

### 5.5 AMPLITUDE D'UNE ROTATION

On a vu que toute transformation avec un point fixe peut être ramenée à une rotation autour d'un seul axe. On se propose alors de déterminer l'amplitude de cette rotation, c'est-à-dire la valeur de l'angle  $\alpha$  dont il faut tourner le solide autour de  $\mathcal{A}_r$  pour le ramener à la configuration finale. Pour cela, il suffit de penser qu'on peut toujours transformer, par changement de base,  $\mathbf{Q}$  en un autre tenseur rotation  $\mathbf{Q}^*$ , qui décrit la même rotation par rapport à un repère qui ait l'axe  $z$  coïncident avec  $\mathcal{A}_r$ . Dans ce cas il est, voir les paragraphes 1.19 et 5.2,

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

mais, paragraphe 1.12, la trace d'un tenseur est invariante par changement de base, et donc

$$\text{tr } \mathbf{Q} = \text{tr } \mathbf{Q}^* \Rightarrow Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 1 + 2 \cos \alpha.$$

Par conséquent on a la relation qui donne la valeur de l'angle  $\alpha$  de rotation,

$$\cos \alpha = \frac{\text{tr } \mathbf{Q} - 1}{2},$$

une fois connues les composantes sur la diagonale du tenseur rotation dans une base quelconque. A remarquer que pour connaître  $\alpha$  ce n'est pas nécessaire de connaître au préalable l'axe de rotation. En outre, considérons encore le cas d'une rotation composée par deux rotations faites en succession : si l'on considère la propriété de la trace

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}),$$

on reconnaît que pour une rotation composée seulement l'axe de rotation globale change par variation de l'ordre d'application des rotations composantes, pas l'amplitude de la rotation globale.

### 5.6 VITESSE ET ACCELERATION DANS UN MOUVEMENT RIGIDE

On a déjà vu, paragraphe 4.6, que lors d'un mouvement rigide il est

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p &= \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (p - o'), \\ \mathbf{a}_p &= \mathbf{a}_{o'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (p - o') + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (p - o')]. \end{aligned}$$

Ces deux formules donnent vitesse et accélération de tout point  $p$  qui appartient au corps rigide. Il faut rappeler que  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur axial du tenseur de spin, et on sait que  $\mathbf{S}$  est antisymétrique et que son déterminant est nul ; donc  $\mathbf{S}$  n'est pas un tenseur rotation. Cela signifie que rotations et vitesses de rotation sont gérées par des lois qui sont mathématiquement différentes.

Cherchons à ce propos la vitesse de rotation dans le cas d'un mouvement composé de plusieurs

rotations, en particulier considérons le procédé utilisé lors de la définition des angles d'Euler: alors

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\varphi) \cdot (\mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\varphi)^T = (\dot{\mathbf{Q}}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\varphi + \mathbf{Q}_\psi \dot{\mathbf{Q}}_\theta \mathbf{Q}_\varphi + \\ &+ \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \dot{\mathbf{Q}}_\varphi) \mathbf{Q}_\varphi^T \mathbf{Q}_\theta^T \mathbf{Q}_\psi^T = \dot{\mathbf{Q}}_\psi \mathbf{Q}_\psi^T + \mathbf{Q}_\psi \dot{\mathbf{Q}}_\theta \mathbf{Q}_\theta^T + \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \dot{\mathbf{Q}}_\varphi \mathbf{Q}_\varphi^T \mathbf{Q}_\theta^T \mathbf{Q}_\psi^T = \\ &= \mathbf{S}_\psi + \mathbf{Q}_\psi \bar{\mathbf{S}}_\theta \mathbf{Q}_\psi^T + \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \hat{\mathbf{S}}_\varphi \mathbf{Q}_\theta^T \mathbf{Q}_\psi^T = \mathbf{S}_\psi + \mathbf{S}_\theta + \mathbf{S}_\varphi, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{S}_\psi$ ,  $\mathbf{S}_\theta$  et  $\mathbf{S}_\varphi$  sont les trois tenseurs de spin pour les trois rotations, tous les trois exprimés dans la base  $\{x, y, z\}$ , alors que  $\bar{\mathbf{S}}_\theta$  est exprimé dans la base  $\{x_N, \bar{y}, z\}$  et  $\hat{\mathbf{S}}_\varphi$  dans la base  $\{x_N, \bar{y}, z'\}$ .

Il apparaît donc évident que, tandis que les rotations ne sont pas commutatives, les tenseurs de spin oui, c'est à dire que  $\mathbf{S}$  est le même tenseur de spin pour toutes les combinaisons possibles des trois rotations ; il en suit que même la vitesse de rotation globale  $\boldsymbol{\omega}$ , vecteur axial de  $\mathbf{S}$ , ne change pas si on change l'ordre dans lequel on effectue les trois rotations composantes. En effet, pour chaque vecteur  $(p - o)$ , il est

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \wedge (p - o) &= \mathbf{S}(p - o) = (\mathbf{S}_\psi + \mathbf{S}_\theta + \mathbf{S}_\varphi)(p - o) = \\ &= \mathbf{S}_\psi(p - o) + \mathbf{S}_\theta(p - o) + \mathbf{S}_\varphi(p - o) = \\ &= \dot{\boldsymbol{\psi}} \wedge (p - o) + \dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge (p - o) + \dot{\boldsymbol{\phi}} \wedge (p - o) = \\ &= (\dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}) \wedge (p - o), \end{aligned}$$

où  $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\phi}}$  sont les trois vitesses des rotations composantes. Cette dernière relation, qui est une somme vectorielle, confirme que les vitesses de rotation, contrairement aux rotations, commutent, et que

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\phi}},$$

voire que la vitesse de rotation est la somme des trois vitesses de rotation autour des trois axes des rotations d'Euler; ainsi pour toute autre composition possible de rotations.

Considérons encore la première loi de la cinématique pour les corps rigides : si on projette les deux membres de l'équation sur la droite qui passe par  $p$  et  $o'$ , on trouve facilement que

$$\mathbf{v}_p \cdot (p - o') = \mathbf{v}_{o'} \cdot (p - o') ;$$

cela nous dit que pour un corps rigide est constante la projection des vitesses de deux points quelconques sur la droite qui passe par les deux points mêmes : c'est la *propriété d'équi-projectivité* des vitesses des points d'un corps rigide.

## 5.7 ROTATIONS INFINITESIMALES

En général, on sait que pour un point quelconque il est

$$\mathbf{v}_p = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

et que

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt},$$

où l'on peut considérer que  $d\boldsymbol{\alpha}$  est une quantité qui a un caractère vectoriel, avec norme

proportionnelle à l'angle de rotation et direction égale à celle de  $\omega$ . Alors la première loi de la cinématique pour les corps rigides peut être réécrite comme

$$\frac{dp}{dt} = \frac{do'}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \wedge (p - o').$$

Celle-ci est, naturellement, encore une relation entre vitesses, donc des quantités finies ; toutefois, si on ne considère, par passage à la limite, que les déplacements dans l'intervalle de temps  $dt$ , ceux-ci sont infinitésimaux, et la loi

$$dp = do' + d\alpha \wedge (p - o')$$

est la *loi des déplacements infiniment petits*. Si en particulier  $do'$  est nul, alors on a la *loi des rotations infinitésimales*,

$$dp = d\alpha \wedge (p - o'),$$

qu'on peut réécrire, comme tout produit vectoriel,

$$dp = d\mathbf{S}(p - o'),$$

où avec  $d\mathbf{S}$  on a indiqué le tenseur axial, et donc antisymétrique, correspondant au vecteur  $d\alpha$ . Or, voir la figure 5.8,  $dp$  est un vecteur qui est orthogonal au vecteur  $p - o'$ , comme dans tout produit vectoriel. Un tel vecteur peut représenter non seulement la vitesse de  $p$ , mais son déplacement infinitésimal aussi, déplacement qui ramène  $p$  en  $p'$ . Le vecteur  $p - o'$  se transforme donc en  $p' - o'$  donné par

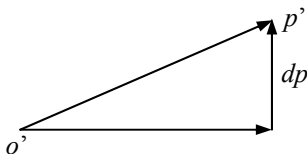


Figure 5.8

$$p' - o' = (p - o') + dp = (p - o') + d\mathbf{S}(p - o') = (\mathbf{I} + d\mathbf{S})(p - o').$$

Ceci signifie que les rotations infinitésimales ne sont pas gérées par un tenseur rotation, mais par un tenseur qui est la somme d'un tenseur antisymétrique plus l'identité :

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{I} + d\mathbf{S}.$$

Ce tenseur, on peut le démontrer facilement, n'a pas les caractéristiques d'un tenseur rotation ; cela implique, entre autres, que les longueurs ne sont pas conservées. A titre d'exemple, considérons le cas d'une rotation d'amplitude  $\alpha$  autour de l'axe  $z$  ; le tenseur rotation est bien connu,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et un vecteur quelconque  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , est transformé par la rotation dans le vecteur

$$\mathbf{v}' = (v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha; v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, v_3),$$

qui a la même norme  $v$  que  $\mathbf{v}$ , c'est facile à vérifier. Supposons maintenant que la rotation soit d'amplitude infinitésimale, voir que  $\alpha$  tend vers une valeur  $d\alpha$  petite. Dans le cas considéré, si on pose  $d\alpha = (0, 0, d\alpha)$ , il est

$$\mathbf{dQ} = \mathbf{I} + \mathbf{dS} = \begin{bmatrix} 1 & -d\alpha & 0 \\ d\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ce qui donne

$$\mathbf{v}' = (v_1 - v_2 d\alpha, v_1 d\alpha + v_2, v_3).$$

Ce vecteur est différent de celui trouvé avec le tenseur  $\mathbf{Q}$ , mais surtout pour la norme de  $\mathbf{v}'$  on a

$$\|\mathbf{v}'\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2)d\alpha^2},$$

ce qui signifie que le vecteur transformé a toujours une norme majeure de celle du vecteur original ; toutefois, cette variation de longueur varie avec  $d\alpha^2$ , et si  $d\alpha$  est très petit, une telle variation est tout à fait négligeable. Donc, la loi des déplacements infinitésimaux est une approximation, évidemment acceptable seulement dans l'hypothèse de rotations infiniment petites. D'ailleurs, si dans l'expression ci-dessus de  $\mathbf{Q}$  on remplace  $\alpha$  par  $d\alpha$ , et si on considère que pour  $d\alpha$  infinitésimal

$$\sin d\alpha \cong d\alpha,$$

$$\cos d\alpha \cong 1,$$

alors on voit bien que

$$\mathbf{Q} \cong \mathbf{dQ}.$$

Géométriquement, il faut remarquer que le vecteur déplacement

$$\mathbf{dv} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$$

est différent dans les deux cas, étant toujours orthogonal à  $\mathbf{v}$  dans le cas de rotations infinitésimales, voir la figure 5.9, où  $p'_1 - o'$  est le vecteur  $\mathbf{v}'$  dans le cas de rotation finie, alors que  $p'_2 - o'$  est le même vecteur dans le cas d'une rotation infiniment petite.

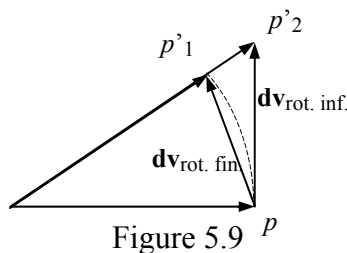


Figure 5.9

La propriété d'équi-projectivité vue au paragraphe précédent est cette fois valable non seulement pour les vitesses, qui continuent à obéir aux mêmes lois de la cinématique avec déplacements finis, mais bien évidemment pour les déplacements aussi.

Une autre particularité distingue le cas infinitésimal de celui fini : l'ordre d'application de deux rotations infinitésimales successives n'a pas d'importance, voire, les rotations infinitésimales commutent. Pour démontrer cela, considérons deux rotations infinitésimales,  $\mathbf{dS}_1$  et  $\mathbf{dS}_2$ , appliquées en succession à un corps rigide. Si  $p$  est un point du corps, la rotation  $\mathbf{dS}_1$  transforme le vecteur  $p - o'$  dans le vecteur  $p'_1 - o'$ , et la rotation  $\mathbf{dS}_2$ ,  $p'_1 - o'$  en  $p'_2 - o'$ , qui est aussi le vecteur final de la transformation. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} p'_2 - o' &= (\mathbf{I} + \mathbf{dS}_2)(p'_1 - o') = (\mathbf{I} + \mathbf{dS}_2)[(\mathbf{I} + \mathbf{dS}_1)(p - o')] = \\ &= [(\mathbf{I} + \mathbf{dS}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{dS}_1)](p - o') = (\mathbf{I} + \mathbf{dS}_2 + \mathbf{dS}_1 + \mathbf{dS}_2 \mathbf{dS}_1)(p - o'); \end{aligned}$$

or, toute transformation infinitésimale  $\mathbf{dS}$  peut être écrite comme

$$d\mathbf{S} = \varepsilon d\mathbf{S}^*,$$

où  $\varepsilon$  est un scalaire infinitésimal et  $d\mathbf{S}^*$  un tenseur axial avec composantes finies. C'est évident alors que le produit tensoriel  $d\mathbf{S}_2 d\mathbf{S}_1$  dépend de  $\varepsilon^2$ , et donc qu'il est négligeable, dans une approximation du premier ordre, comme celle faite pour introduire le tenseur  $d\mathbf{S}$ , par rapport à  $d\mathbf{S}_2$  et  $d\mathbf{S}_1$ .

Donc, on peut dire que

$$p'_2 - o' \cong (\mathbf{I} + d\mathbf{S}_2 + d\mathbf{S}_1)(p - o'),$$

qui est la *loi des rotations infinitésimales composées*. Mais nous savons, voir le paragraphe 1.6, que la somme tensorielle commute, et donc il est aussi

$$p'_2 - o' \cong (\mathbf{I} + d\mathbf{S}_1 + d\mathbf{S}_2)(p - o')$$

ce qui correspond, physiquement, à faire d'abord la rotation  $d\mathbf{S}_2$  et puis la  $d\mathbf{S}_1$ . Il est ainsi démontré que les rotations infinitésimales commutent.

Cette circonstance a une conséquence mathématique : toute rotation infinitésimale peut être représentée par un vecteur ; en fait, on peut considérer comme vecteur représentatif un vecteur qui a la direction de l'axe de rotation et module égal à l'amplitude de rotation. Cela est évidemment possible pour les rotations finies, mais celles-ci ne peuvent pas être représentées par des vecteurs parce que la commutativité, propriété essentielle de la somme de vecteurs, n'est valable que pour les rotations infinitésimales et pour les vitesses.

## 5.8 L'AXE D'INSTANTANEE ROTATION

On se propose maintenant de rechercher le lieu géométrique des points qui, à un instant donné, sont animés par un mouvement de translation pure. Or, la vitesse de tout point  $q$  d'un corps solide est donnée par

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (q - o'),$$

et si  $q$  appartient au lieu cherché, sa vitesse doit être parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ ; c'est en fait celle-ci la condition pour avoir un mouvement de translation pure. Donc il faut rechercher les points  $q$  tels que

$$\mathbf{v}_q \wedge \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}.$$

Or, formellement les deux équations ci-dessus sont identiques aux équations qui amènent à la détermination de l'axe central, voir paragraphe 2.2 :  $\mathbf{v}_q$  correspond à  $\mathbf{M}_{p_1}$ ,  $\mathbf{v}_{o'}$  à  $\mathbf{M}_{p_0}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  à  $\mathbf{R}$ . Cela comporte que même le lieu cherché est une droite, appelée *axe de Mozzi*. Cet axe possède toutes les propriétés de l'axe central : il est unique, les points de l'axe de Mozzi sont les points qui ont les plus petites vitesses scalaires, qui sont animés de mouvement de translation pure dans la direction de  $\boldsymbol{\omega}$ , et l'équation de l'axe est donnée par

$$q = o' + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{o'}}{\boldsymbol{\omega}^2} + s \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|},$$

avec  $s$  paramètre réel. A remarquer que l'axe de Mozzi est défini seulement si  $\boldsymbol{\omega}$  n'est pas nulle, ainsi que l'axe central est défini seulement si  $\mathbf{R}$  est différente du vecteur nul. Or, comme la position de  $o'$  ainsi que  $\mathbf{v}_{o'}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  dépendent du temps, on a en réalité une famille de droites, et donc il faut parler d'axe de Mozzi du corps à un certain instant. Physiquement, par comme on l'a défini, l'axe de Mozzi est un *axe de roto-translation instantanée* : le corps rigide tourne autour de l'axe qui, en même temps, se déplace dans sa direction. En général, donc, aucun point d'un corps rigide en

mouvement n'est à repos.

Lors de la discussion de l'axe central, on avait introduit l'invariant scalaire ; avec l'analogie vue ci-dessus, dans le cas des vitesses l'invariant scalaire devient

$$\mathbf{v}_q \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_{o'} \cdot \boldsymbol{\omega} .$$

Pour l'axe central, un invariant scalaire nul comportait que l'axe était le lieu des points qui annulaient le moment résultant du système de vecteurs appliqués. Dans le cas des vitesses, si

$$\mathbf{v}_p \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 ,$$

pour chaque point  $p$  du corps, alors l'axe de Mozzi devient le lieu des points à vitesse nulle. Dans ce cas le mouvement du corps est de pure rotation autour de l'axe de Mozzi, qui prend alors le nom d'*axe de rotation instantanée*, qu'on indiquera avec  $\mathcal{A}_v$ . L'attribut instantanée sert à rappeler qu'en général l'axe change à chaque instant. La dernière relation ci-dessus nous assure que cette condition est vérifiée lorsque tout point du solide est animé par une vitesse orthogonale à  $\boldsymbol{\omega}$  : c'est la condition pour avoir un *mouvement plan*. Le mouvement du système peut être alors analysé en ne considérant que ses composantes sur un plan quelconque orthogonal à  $\mathcal{A}_v$ , le *plan du mouvement*. Si en plus  $\boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$  est un vecteur constant, le plan du mouvement ne change pas. L'intersection entre  $\mathcal{A}_v$  et le plan du mouvement est un point appelé *centre d'instantanée rotation*,  $C_v$ . Etant  $C_v$  un point de  $\mathcal{A}_v$ , sa vitesse est évidemment nulle à chaque instant. En définitive, dans le cas des mouvements plans avec  $\boldsymbol{\omega}$  non nulle, il existe toujours un axe dont les points sont instantanément à repos.

### 5.9 MOUVEMENTS PLANS D'UN CORPS RIGIDE

Dans le cas d'un mouvement plan, on peut donner une expression plus efficace pour la vitesse et l'accélération d'un point  $p$  d'un corps rigide. En fait, dans ce cas, si le plan du mouvement est le plan  $z=0$ , alors, voir la figure 5.10,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_z ,$$

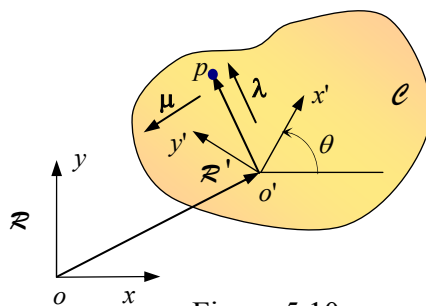


Figure 5.10

et si on pose  $p - o' = r \boldsymbol{\lambda}$ , où  $r = |p - o'|$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \frac{p - o'}{r}$  et  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{e}_z \wedge \boldsymbol{\lambda}$ , alors la première loi de la cinématique pour les corps rigides devient

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o'} + r \dot{\theta} \boldsymbol{\mu} .$$

Pour les accélérations, on trouvera évidemment (*théorème de Rivals*)

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{o'} + r \ddot{\theta} \boldsymbol{\mu} - r \dot{\theta}^2 \boldsymbol{\lambda} .$$

Si on ne considère que le mouvement autour de  $o'$ , ce qui équivaut à considérer nul tout déplacement de  $o'$ , la vitesse et l'accélération de  $p$  sont celles d'un point qui tourne autour de  $o'$  en

mouvement circulaire; la distribution de la vitesse est alors linéaire, c'est-à-dire qu'elle varie de façon linéaire avec la distance  $r$ , et elle est tangente à la trajectoire. Pour l'accélération, elle est composée de deux termes bien connus, l'accélération tangentielle et l'accélération centripète.

### 5.10 LE CENTRE D'INSTANTANEE ROTATION

On a déjà introduit le centre d'instanée rotation  $C_v$  au paragraphe 5.8 comme la trace sur le plan du mouvement de l'axe d'instanée rotation ; toutefois, il vaut mieux faire à ce propos d'autres considérations.

$C_v$  est le seul point sur le plan du mouvement qui est instantanément à repos, et donc sa vitesse est nulle à tout instant,

$$\mathbf{v}_{C_v} = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (C_v - o') = \mathbf{0},$$

alors que pour tout autre point  $p$  il est

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (p - o').$$

Si alors on soustrait la première relation de la deuxième on a

$$\mathbf{v}_p = \boldsymbol{\omega} \wedge (p - C_v),$$

ce qui nous dit que dans un mouvement plan la vitesse de chaque point  $p$  est égale à la vitesse de rotation de  $p$  autour de  $C_v$ . Tout mouvement plan peut donc se réduire à une suite de rotations autour de  $C_v$ .

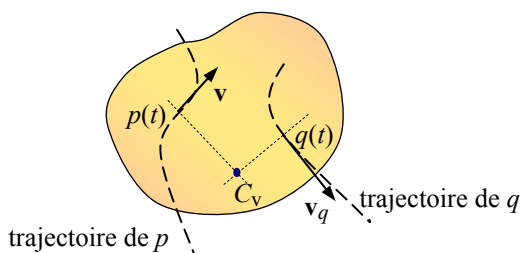


Figure 5.11

Une observation à propos de la formule ci-dessus nous permet souvent de déterminer facilement la position de  $C_v$  à un instant donné : en fait nous savons que la vitesse  $\mathbf{v}_p$  d'un point  $p$  quelconque est tangente à la trajectoire, à chaque instant. Mais la formule ci-dessus nous dit aussi que  $\mathbf{v}_p$  est orthogonal au vecteur  $p - C_v$ . Donc ce dernier vecteur est, à chaque instant, orthogonal à la trajectoire de  $p$ . Or, si l'on connaît les trajectoires de deux points quelconques du corps,  $C_v$  doit appartenir aux perpendiculaires à ces deux trajectoires conduites par les positions respectivement occupées au même instant par les deux points ;  $C_v$  est donc l'intersection des perpendiculaires contemporaines aux trajectoires, figure 5.11. Souvent on connaît ces trajectoires, par exemple pour les points liés du corps, et donc il reste facile de trouver  $C_v$ .

### 5.11 BASE ET ROULANTE

$C_v$  décrit en  $\mathcal{R}$  est une courbe plane dite *base* ( $\beta$ ), et en  $\mathcal{R}'$  une courbe plane dite *roulante* ( $\gamma$ ). Or, en général, si  $\mathbf{v}_\beta$  est la vitesse avec laquelle  $C_\beta$ , point représentatif de  $C_v$  en  $\mathcal{R}$ , se déplace le long de  $\beta$ , et  $\mathbf{v}_\gamma$  la vitesse avec laquelle  $C_\gamma$ , point représentatif de  $C_v$  en  $\mathcal{R}'$ , se déplace le long de  $\gamma$ , on peut toujours écrire, en choisissant  $C_v$  comme origine de  $\mathcal{R}'$ ,

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma + \mathbf{v}_C,$$

où  $\mathbf{v}_C$  est la vitesse absolue de  $C_v$ , qui est nulle à tout instant. Donc à chaque instant

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma,$$

ce qui signifie que  $\beta$  est tangente à  $\gamma$  en  $C_v$  à chaque instant, et que  $C_\beta$  décrit sur  $\beta$  des arcs qui ont la même longueur que les arcs décrits par  $C_\gamma$  sur  $\gamma$ : la roulante roule donc sans glisser sur la base.

On a déjà vu au paragraphe précédent comment déterminer la position de  $C_v$  lorsqu'on connaît la trajectoire de deux points du corps. D'une façon plus générale, on peut considérer que  $C_v$  est un point de  $\mathcal{A}_v$ , et en plus qu'il appartient au plan du mouvement. Si alors on fixe  $o'$  sur le plan du mouvement, choix toujours possible, il en résulte, de l'application de l'équation de  $\mathcal{A}_v$ , que la position de  $C_v$  est donnée, en  $\mathcal{R}$ , par

$$C_v = o' + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{o'}}{\boldsymbol{\omega}^2};$$

celle-ci est donc l'équation de la base  $\beta$ . De la même façon en  $\mathcal{R}'$ , une fois qu'on a écrit les vecteurs dans la base propre à  $\mathcal{R}'$ , il est

$$C_v = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{o'}}{\boldsymbol{\omega}^2},$$

qui est l'équation de la roulante  $\gamma$ .

## 5.12 MECANISMES

Un *mécanisme* est un ensemble de corps rigides, liés entre eux et avec l'extérieur par des liens, qui a un seul degré de liberté. Cela signifie que toute configuration possible du système est déterminée par la connaissance d'un seul paramètre.

Dans le cas où un système est composé par plusieurs corps rigides en mouvement plan, on appelle *centre d'instantanée rotation du corps A relatif au corps B* ( $C_{AB}$ ) le centre d'instantanée rotation du mouvement de  $A$  par rapport à un observateur solidaire avec  $B$ . Ils existent deux théorèmes qui donnent des conditions auxquelles les systèmes plans de corps rigides doivent répondre pour former un mécanisme :

**Théorème 1** : deux corps rigides qui forment un mécanisme ont les centres absolus d'instantanée rotation alignés avec le centre d'instantanée rotation relatif.

**Théorème 2** : trois corps rigides qui forment un mécanisme ont les trois centres d'instantanée rotation relatifs alignés.

Ces théorèmes, dont on ne montrera pas la démonstration, nous permettent de déterminer facilement tous les centres de rotation instantanée dans une configuration donnée, et restent donc très utiles lors de l'analyse des petits mouvements d'un système, comme c'est le cas, par exemple, de l'utilisation en statique du principe des travaux virtuels.



## LES PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE

### 6.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on passe à l'étude du mouvement et des ses causes, c'est-à-dire à la branche de la mécanique qu'on appelle *dynamique*. En particulier, on s'occupera d'abord des fondements de la dynamique, les *principes de Newton*. Ces trois principes sont à la base de toute la mécanique classique, et ils ont été pendant au moins un siècle la seule méthode d'investigation des phénomènes mécaniques.

Les principes furent publiés en 1687 par Newton dans son ouvrage "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (Les principes mathématiques de la philosophie naturelle). Le livre est composé de trois parties : dans la première ils sont énoncés les trois principes fondamentaux, sur lesquels se base toute la mécanique ; dans la même partie Newton donne de nombreuses applications de ses principes, utilisés dans la solution de plusieurs problèmes différents. Dans la deuxième partie, l'auteur s'applique à la solution de problèmes de mouvement de fluides ainsi qu'aux mouvements des corps dans un milieu fluide. Dans le troisième livre, Newton s'applique à la solution de problèmes de mécanique céleste. Après et grâce à l'analyse d'une longue série d'observations faites directement par l'auteur ou par d'autres scientifiques, Newton énonce sa fameuse loi de gravitation universelle, qui ouvre la voie à la mécanique céleste et, entre autres choses, à la démonstration rigoureuse des lois de Kepler. C'est ici que Newton écrit sa fameuse phrase 'Hypothesis non fingo' (je ne formule pas des hypothèses), avec laquelle il signifie que sa loi ne peut pas expliquer la raison de la gravité, sa nature intime, mais que les phénomènes sont bien représentés par la loi qu'il énonce, remarquable exemple et paradigme de ce qu'aujourd'hui on appelle normalement un *modèle mathématique*. Grâce à l'approche donnée à la mécanique par Newton, plusieurs problèmes fondamentaux de la mécanique ont été abordés et résolus pendant le 18<sup>ème</sup> siècle, par Newton même et par d'autres savants, comme les Bernoulli, Euler, d'Alembert.

Un siècle après la parution des "Principia", et précisément en 1788, l'œuvre principale de Lagrange, la "Mécanique Analytique", est publiée à Paris. Dans son chef d'œuvre, le savant turinois pose les bases de la mécanique sur le principe des travaux virtuels, donc sur des considérations énergétiques, et il arrive à formuler les fameuses équations du mouvement qui portent son nom : une nouvelle approche à la mécanique a vu le jour. Finalement, c'est en plein 19<sup>ème</sup> siècle que Hamilton donne à la mécanique l'approche qui porte son nom, et qui est basée sur des principes de minimum.

Après l'introduction des principes, dans ce chapitre on établira les théorèmes fondamentaux pour le cas d'un point matériel. L'extension de ces résultats aux systèmes discrets et continus rigides, ainsi que les approches énergétiques, seront traitées dans les chapitres qui suivent.

### 6.2 LES PRINCIPES DE NEWTON

Les trois principes fondamentaux dans leur formulation originelle sont :

1. chaque corps reste immobile ou se déplace de mouvement rectiligne uniforme s'il n'est pas poussé par des forces (*principe d'inertie* ou *de Galilée*) ;

2. le changement du mouvement est proportionnel à la force, et il en a la même direction ;
3. pour chaque action il y a toujours une action égale et contraire, c'est-à-dire, les actions mutuelles que deux corps s'échangent sont égales et dirigées vers directions opposées (*principe d'action et réaction*).

A propos de ces principes, il faut faire quelque remarque : d'abord, Newton considère les concepts de corps et de force comme primitifs. La seule chose qu'on puisse dire à propos d'un corps, c'est qu'il occupe une région de l'espace euclidien. Pour les forces, Newton considère implicitement qu'elles sont représentées par des vecteurs. Cela implique que pour les forces restent valables les règles générales de composition et d'opération sur les vecteurs, par exemple la règle du parallélogramme ; ceci constitue en réalité un postulat fondamental de la mécanique classique.

Dans la suite de ce chapitre, on se propose d'établir les lois fondamentales de la dynamique d'une *particule* ou *point matériel* : un point matériel est mathématiquement représenté par un couple  $(p, m)$ , avec  $p \in \mathcal{E}$  et  $m \in \mathbb{R}^+$ .

Le scalaire positif  $m$  est la *masse* du point matériel  $p$  qu'on peut le considérer, dans les buts de ce cours, comme un concept intuitif et une grandeur primitive ; la seule propriété qu'on lui donne c'est la *superposition* : la masse totale d'un système est la somme des masses de chaque part composant le système. Nous faisons en outre une hypothèse de caractère général : nous considérerons toujours la masse comme une propriété invariable. Les systèmes qui respectent cette hypothèse s'appellent *systèmes à masse conservative*. A la fin de ce chapitre, on reviendra sur le concept de masse pour en préciser mieux une caractéristique.

En définitive, le concept de point matériel est un enrichissement du concept de point, qui vient à être doté de masse. Un point matériel est une abstraction, un modèle qui se prête pour représenter aussi bien une planète qu'un électron, une boule et un véhicule, selon le cas du problème à traiter.

Newton a formulé ses principes en général, pour tout corps, et pas seulement pour les points matériels, ce qui donne une généralité totale aux trois principes. Toutefois, nous allons mieux détailler le contenu des trois principes pour les points matériels, objet de la dynamique de ce chapitre :

1. il existe un observateur par rapport auquel un point matériel qui n'est pas soumis à l'action des forces est immobile ou se déplace avec mouvement rectiligne uniforme ; un tel observateur est dit *inertiel* ou *galiléen* ;
2. si  $\mathbf{f}$  est la résultante des forces agissantes sur un point matériel, alors pour un observateur inertiel il vaut la relation

$$\mathbf{f} = m \mathbf{a}$$

où  $\mathbf{a}$  est l'accélération et  $m$  la masse du point ;

3. si deux points matériels  $p$  et  $q$  interagissent entre eux, alors

$$\mathbf{f}_p^q + \mathbf{f}_q^p = \mathbf{0},$$

$$(p - q) \wedge \mathbf{f}_p^q = \mathbf{0},$$

où  $\mathbf{f}_p^q$  est la force exercée par  $q$  sur  $p$  et  $\mathbf{f}_q^p$  la force exercée par  $p$  sur  $q$ .

Faisons quelques remarques : le premier principe postule, à bien voir, l'existence d'une classe particulière d'observateurs (repères), les *observateurs inertiels* ou *galiléens* ; il est évident que deux observateurs inertiels sont en relation entre eux à travers une transformation galiléenne, voir aussi paragraphe 6.4. Le premier principe admet l'existence de points matériels non soumis à forces, les

*points isolés* ; cette condition n'est jamais remplie, à la rigueur, parce que certaines forces, comme la force gravitationnelle ou la force électrostatique, se propagent dans l'espace, en théorie à l'infini ; toutefois, l'intensité des actions à distance décroît rapidement avec la distance même, et donc en définitive la condition à la base du premier principe peut être considérée respectée, à la rigueur, seulement approximativement. Le premier principe précise, en voie théorique, une mesure absolue des temps : ils sont égaux les temps employés par un point isolé à parcourir distances égales ; il n'est pas déductible du deuxième, mais celui-ci est invariant par transformations galiléennes d'observateur.

Le deuxième principe établit une relation entre les unités de mesure d'espace, temps, force et masse, autrement indépendantes parce que primitives. Ce principe, il vaut bien le remarquer, n'est valable que par rapport à un observateur galiléen, voir aussi le paragraphe 6.4.

Le troisième est le seul principe qui s'applique à systèmes et non pas à points isolés ; les conditions posées impliquent non seulement que les deux forces sont égales en module et opposées en direction, mais aussi qu'elles agissent le long de la droite passante par  $p$  et  $q$ . Le troisième principe postule une relation entre les interactions mutuelles de deux points matériels, indépendamment de la présence d'autres points ou corps ; il introduit, en définitive, une méthode de calcul des actions mutuelles globales pour les systèmes de points (voir aussi le paragraphe 9.2 sur les forces internes).

Il faut remarquer que le troisième principe n'est pas un principe de validité générale en physique, parce que certaines forces, comme par exemple l'interaction électromagnétique entre particules en mouvement, n'obéissent pas à ce principe, en particulier les forces mutuelles ne sont pas dirigées selon la droite qui passe par les deux points. Dans ce cas particulier, ce principe doit être remplacé par des relations plus générales, qui tiennent compte de la caractéristique de la force d'interaction. Nous ne traiterons pas ce genre de problèmes dans ce cours.

Considérons maintenant deux observateurs galiléens,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ; alors, comme une force est invariante par rapport à l'observateur, ses effets, par le deuxième principe, seront les mêmes, voire

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' ;$$

ces deux repères sont donc mis en relation par une transformation galiléenne, voir le paragraphe 4.5. En effet, la condition ci-dessus nous dit qu'il n'y a pas moyen de distinguer entre les deux observateurs, parce que les effets d'une force sont les mêmes. Donc le concept de repère "fixe" n'a pas de sens physique, voire il n'existe pas un observateur privilégié, par rapport auquel écrire les lois du mouvement : tous les observateurs galiléens sont équivalents : c'est la *relativité galiléenne*.

C'est ici la raison pour laquelle le deuxième principe n'est valable que pour les observateurs inertiels : si on veut un lien entre une force, qui existe indépendamment de l'observateur, et son effet, l'accélération, il faut que celle-ci soit mesurée d'une façon absolue, donc par rapport à un observateur qui n'est pas accéléré. En plus, une telle mesure sera la même par rapport à tous les observateurs qui s'obtiennent par transformation galiléenne, voire qui se déplacent de mouvement rectiligne uniforme. Les observateurs galiléens, dont on postule l'existence, sont donc des observateurs particuliers pour l'écriture des lois du mouvement. On verra dans le paragraphe 6.4 que ces lois peuvent être écrites même pour un observateur non galiléen, donc accéléré, pourvu qu'on tienne compte des *forces d'inertie*.

### 6.3 CLASSIFICATIONS DES FORCES, ENERGIE POTENTIELLE, TRAVAIL MECANIQUE

Ils existent aux moins deux classifications possibles des forces agissantes sur un système matériel : dans une première classification on distingue entre forces *internes* et *externes* au système ; les forces internes sont les forces agissantes sur un point du système dues à la présence d'autres points ou de liaisons internes. Elles peuvent être aussi bien des actions à distance, comme l'attraction

gravitationnelle, ou des actions transmises directement par contact. Les forces externes, au contraire, sont toutes les actions sur les points du système qui sont dues à la présence de corps ou liaisons externes au système. Par exemple, si l'on considère le système matériel constitué par la Terre et la Lune, l'attraction du Soleil est une action externe, alors que si l'on considère le système solaire, celle-ci devient une action interne au système.

Dans l'autre classification on distingue entre forces *actives* et *réactives* ; les premières sont les forces agissantes sur les points du système dont on connaît la loi d'action et de variation. Les deuxièmes sont les forces dont on ne connaît pas la loi d'action et variation, et elles sont normalement dues à la présence de liens, internes ou externes au système ; elles sont donc des inconnues dans un problème de mécanique, voir le paragraphe 13.1. Naturellement, il y a des forces externes actives et d'autres réactives, et de même pour les forces internes. Souvent, la première classification est utile dans une approche newtonienne, alors que la deuxième est à la base de la méthode lagrangienne. C'est évident que, pour un système composé par un seul point matériel, la première classification n'a pas de sens, étant donné que toutes les forces sont externes.

Une autre classification des forces est possible, sur la base de la nature ou de la loi de variation, d'une force donnée, tout en restant dans le champ de la modélisation mathématique, sans par cela vouloir expliquer la véritable nature intime, l'essence d'une force. En fait, en général en mécanique on considère qu'une force agissant sur un point matériel dépend de la position du point, de sa vitesse et du temps :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(p, \dot{p}, t) ;$$

si, toutefois, une force est complètement déterminée par sa seule position,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(p) ,$$

alors la force est dite *positionnelle*. Des exemples de forces positionnelles sont les forces d'attraction gravitationnelle et celle électrostatique ; un exemple de force dépendante de la vitesse est la résistance à l'avancement d'un corps dans un fluide.

On appelle *champ de force* l'application  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$  où  $\Omega$  est la région de  $\mathcal{E}$  sur laquelle la force  $\mathbf{f}$  est définie ; un champ de force est donc un champ vectoriel. Parmi les champs de force, les *champs conservatifs* revêtent un intérêt tout particulier : un champ positionnel de force est conservatif si la fonction vectorielle  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(p)$  qui représente la force coïncide avec le vecteur gradient d'une fonction scalaire  $U$ , dite *potentiel* de la force,  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{f} = \nabla U ,$$

où l'opérateur différentiel  $\nabla$ , dit *opérateur nabla*, définit l'opération

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 .$$

A remarquer que  $U$  est défini à une constante additive près. La fonction

$$V = -U$$

est dite *énergie potentielle* ; cette définition n'est pas univoque, car certains auteurs préfèrent définir comme potentiel la fonction  $V$ , surtout en mécanique des fluides.

Les champs conservatifs ont des propriétés remarquables, comme par exemple

$$\mathbf{f} \cdot dp = \nabla U \cdot dp = \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = dU ;$$

or, si on définit *travail mécanique élémentaire* la quantité

$$d\mathcal{L} = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p},$$

qui est le *travail mécanique* fait par la force  $\mathbf{f}$  à la suite d'un déplacement  $d\mathbf{p}$  de son point d'application, on a que le travail fait par  $\mathbf{f}$  lorsque son point d'application se déplace le long d'une trajectoire entre les points  $A$  et  $B$  est donné par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}.$$

Alors, pour une force conservative, on a que

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \int_A^B dU = U_B - U_A$$

et donc le travail ne dépend pas de la trajectoire suivie, mais seulement du point d'arrivée et du point de départ, étant la différence entre les valeurs du potentiel calculées dans ces deux points. Une conséquence de cela est le fait que si  $A$  coïncide avec  $B$ , c'est-à-dire si le point se déplace sur une trajectoire fermée, alors le travail total de la force est nul.

Exemples de forces conservatives sont :

- la force d'attraction gravitationnelle

$$\mathbf{f} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}$$

qui est la force avec laquelle le corps de masse  $M$  attire le corps de masse  $m$  ;  $G$  est la *constante de gravitation universelle* ( $G = 6.672598 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ),  $r$  est la distance entre les deux corps et  $\mathbf{e}$  est le vecteur unitaire de la droite passant par les barycentres des deux corps, dirigé de  $M$  vers  $m$  ; à remarquer que, étant  $G$  et les masses positives, le signe moins assure que la force est toujours d'attraction ; le *potentiel gravitationnel* sera donc

$$U = G \frac{Mm}{r};$$

- la force poids terrestre :

$$\mathbf{f} = -m\mathbf{g}\mathbf{e}_z$$

où  $\mathbf{e}_z$  est un vecteur unitaire dirigé verticalement vers le haut,  $m$  est la masse du corps et  $g$  est l'accélération de gravité,  $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$  ; le *potentiel de la force poids* sera donc

$$U = -m g z,$$

avec  $z$  hauteur du point sur l'horizontale (définie à une constante additive près) ;

- la force électrostatique :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qq}{r^2} \mathbf{e},$$

qui est la force avec laquelle la charge  $Q$  interagit avec la charge  $q$  ;  $r$  et  $\mathbf{e}$  ont la même signification que dans le cas de la force gravitationnelle, alors que  $\epsilon = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ Nm}^{-2}$  est la *permittivité électrique du vide* ; on remarquera que cette relation a la même structure de celle de la force gravitationnelle, mais dans ce cas, comme les charges électriques peuvent avoir signe positif ou négatif, la force peut être d'attraction ou de répulsion, selon que  $Q$  et  $q$  ont signe contraire ou pas ; finalement, le *potentiel électrostatique* sera

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qq}{r};$$

- la force élastique :

$$\mathbf{f} = -k \Delta\ell \mathbf{e},$$

où  $\mathbf{f}$  est la force de rappel d'un ressort de constante élastique  $k$ , qui est ancré à un point autour duquel il peut tourner,  $\mathbf{e}$  est le vecteur unitaire colinéaire avec le ressort et qui va de l'extrémité ancrée à celle libre et  $\Delta\ell$  est la variation de longueur par rapport à sa longueur de repos (configuration dans laquelle le ressort ne fait pas de force) ; donc cette force est toujours colinéaire avec le ressort, et comme  $k$  est une constante positive, la force est toujours opposée à la variation de longueur : si on allonge le ressort, celui-ci oppose une force de rappel dirigée vers le point d'ancrage, si on essaie de le raccourcir, la force de rappel change d'orientation ; le *potentiel élastique* est

$$U = -\frac{1}{2}k \Delta\ell^2 ;$$

on peut donner aussi le cas d'un ressort angulaire, qui réagit avec un couple à une rotation ; le moment du couple élastique sera

$$\mathbf{M} = -\mu \Delta\theta \mathbf{e},$$

où  $\mu$  est la constante élastique du ressort,  $\Delta\theta$  est la variation d'angle par rapport à l'angle de repos (pour lequel le ressort ne donne pas un couple) et  $\mathbf{e}$  est le vecteur unitaire de l'axe autour duquel la rotation a lieu ; même ici, le ressort réagit toujours à une rotation imposée avec un couple de moment contraire à la rotation ; dans ce cas le potentiel élastique est

$$U = -\frac{1}{2}\mu \Delta\theta^2.$$

La force poids est constante, et son champ est *uniforme* ; tout champ uniforme est conservatif. Les forces gravitationnelle et électrostatique, ainsi que la force de rappel d'un ressort, ont les propriétés d'être toujours dirigées vers un point fixe et d'avoir leur intensité qui est fonction seulement de la distance de ce point. Un champ de force qui a ces deux propriétés est dit *champ central* ; tout champ central est conservatif. La dynamique d'un point matériel soumis à l'action d'un champ central fera l'objet du chapitre 7.

#### 6.4 PRINCIPE DE D'ALEMBERT ET FORCES D'INERTIE

Considérons encore le deuxième principe de Newton, valable pour un observateur inertiel, écrit comme

$$\mathbf{f} - m \mathbf{a} = \mathbf{0};$$

formellement, rien n'est changé par rapport à sa formulation usuelle ; toutefois, cette façon d'écrire les choses ouvre la voie à l'analyse des mouvements dans un repère relatif non inertiel. Le deuxième principe de Newton écrit dans cette forme est connu comme *principe de d'Alembert*. Voyons la raison de son importance : la deuxième loi de la cinématique nous assure que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}',$$

et alors on peut écrire que pour un observateur relatif il est

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{f} - m\mathbf{a}_o - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}'.$$

La relation ci-dessus peut être réécrite encore dans la forme typique du deuxième principe, comme

$$\phi = m \mathbf{a}' ;$$

cette relation nous assure que le deuxième principe continue à fonctionner même dans un repère non inertiel, accéléré, et on analysera alors l'accélération relative  $\mathbf{a}'$ , pourvu qu'à la place des forces qui agissent sur le système on considère la force  $\phi$ ,

$$\phi = \mathbf{F} + (\mathbf{F}_o + \mathbf{F}_{\dot{\omega}} + \mathbf{F}_{cent} + \mathbf{F}_{Cor}) .$$

Les quatre forces entre parenthèses sont appelées *forces d'inertie* ou *apparentes* et sont respectivement :

- force apparente nommée *d'entraînement*, due à l'accélération de  $o'$ , origine du repère relatif :

$$\mathbf{f}_o = -m\mathbf{a}_o ;$$

- force apparente due à la variation de la vitesse de rotation :

$$\mathbf{f}_{\dot{\omega}} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' ;$$

- force apparente nommée *force centrifuge* :

$$\mathbf{f}_{cent} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') = m\boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{r}' ,$$

où  $\mathbf{e}$  est le vecteur de  $\mathcal{S}^2$  qui donne la direction de  $\boldsymbol{\omega}$ ,

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} ;$$

- force apparente nommée *force de Coriolis* :

$$\mathbf{f}_{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' .$$

Donc la relation ci-dessus permet le passage d'un repère inertiel à un autre non inertiel : ce passage se fait tout simplement en considérant la présence des forces d'inertie. Si l'on recherche l'équilibre d'un système dans le repère relatif, l'équation se simplifie : en fait, dans ce cas la vitesse et l'accélération relative sont nulles (à l'équilibre relatif, chaque point du système est immobile dans un repère relatif solidaire au système) et donc la force de Coriolis aussi. Finalement

$$\phi = \mathbf{f} + (\mathbf{f}_o + \mathbf{f}_{\dot{\omega}} + \mathbf{f}_{cent}) = \mathbf{0} ,$$

expression qui nous assure que l'équilibre dans un système non inertiel est réalisé non seulement par les forces actives et réactives, mais aussi par les forces d'inertie. C'est ainsi que le principe de d'Alembert opère ce qu'on appelle souvent la *réduction de la dynamique à la statique*. Il faut considérer que pour un système rigide, voir paragraphe 5.1, il existe toujours un repère solidaire, dans lequel l'équation ci-dessus est toujours valable.

## 6.5 THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

L'énergie cinétique d'un point matériel qui a vitesse  $\mathbf{v}$  est définie comme

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

et la *puissance*  $W$  d'une force  $\mathbf{f}$  appliquée à un point matériel  $p$  comme

$$W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} .$$

Comme

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

$W$  correspond au travail mécanique fait par la force  $\mathbf{f}$  dans l'unité de temps.

Cherchons la variation temporelle de  $T$  :

$$\dot{T} = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v};$$

d'ailleurs

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m},$$

et donc

$$\dot{T} = m \frac{\mathbf{f}}{m} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = W.$$

La relation

$$\dot{T} = W,$$

est connue comme *théorème de l'énergie cinétique* ou de la *puissance*. Ce théorème affirme que la puissance totale des forces agissantes sur un point matériel équivaut à la variation de l'énergie cinétique du point même.

## 6.6 INTEGRALE PREMIERE DE L'ENERGIE

En mécanique on appelle *intégrale première* une quantité qui reste constante pendant le mouvement d'un système ; parmi les intégrales premières une place de très grande importance est occupée par l'*intégrale première de l'énergie*. Elle n'est pas valable en général, mais seulement dans les cas suivants :

a. toutes les  $n$  forces actives qui agissent sur  $p$  sont conservatives :

$$\mathbf{f}_i^a = \nabla U_i, \quad \forall i = 1, \dots, n;$$

b. toutes les  $m$  forces réactives qui agissent sur  $p$  ont puissance nulle (c'est-à-dire que les réactions ne font pas de travail mécanique) :

$$\mathbf{f}_j^r \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Alors, par le théorème de l'énergie cinétique et dans les deux hypothèses ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \dot{T} = W &= \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^a \cdot \mathbf{v} + \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_j^r \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^a \cdot \mathbf{v} = \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla U_i \cdot \mathbf{v} = \nabla \sum_{i=1}^n U_i \cdot \mathbf{v} = \nabla U \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dU}{dt} = \dot{U}, \end{aligned}$$

où

$$U = \sum_{i=1}^n U_i$$



est le potentiel total des forces actives agissant sur  $p$  ; finalement

$$\dot{T} = \dot{U} \Rightarrow (T - U)' = 0 \Rightarrow T - U = \text{const} ;$$

donc pendant le mouvement la quantité  $(T - U)$  reste constante : cette quantité s'appelle *énergie mécanique totale* du système, et elle est normalement indiquée avec la lettre  $E$  ; si l'on considère que l'énergie potentielle est l'opposé du potentiel, on peut finalement écrire l'intégrale première de l'énergie dans sa forme usuelle :

$$T + V = E ,$$

relation qui affirme que, dans les cas considérés, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est constante pendant le mouvement ou, dans d'autres mots, que l'énergie mécanique totale du point se conserve (d'où le nom de force conservative déjà vu).

Dans plusieurs cas, la connaissance d'une intégrale première, c'est-à-dire d'une quantité qui se conserve constante pendant le mouvement, aide beaucoup à la solution de certains problèmes, et souvent donne des indications qualitatives capables de faire mieux comprendre l'évolution du système.

## 6.7 QUANTITE DE MOUVEMENT

Le vecteur

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v}$$

est dit *quantité de mouvement* d'un point matériel  $p$ . Dans cette expression,  $\mathbf{v}$  est la vitesse absolue de  $p$ , mesurée dans un repère inertiel.

Si on dérive l'expression ci-dessus par rapport au temps, on a, étant la masse un scalaire invariable,

$$\dot{\mathbf{Q}} = m \mathbf{a} ,$$

et donc, par le deuxième principe de Newton on a que

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{f} ,$$

où  $\mathbf{f}$  est la résultante des forces agissant sur  $p$  ; cette équation est l'*équation de conservation de la quantité de mouvement* : en fait, on voit bien que si  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , le vecteur quantité de mouvement a dérivée nulle, et donc il est constant.

Il faut faire une remarque à ce point : l'énoncé qu'on a donné au paragraphe 6.2 du deuxième principe est celui élaboré par Newton même, et on a souligné que nous ne considérerons que des problèmes où la masse est constante. Dans ces cas, ce principe est formulé d'une façon correcte. Mais si on veut considérer la dynamique de systèmes à masse variable, il faut en réalité énoncer le deuxième principe d'une façon plus générale, et l'écrire comme

$$\mathbf{f} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} ,$$

donc comme l'équation de conservation de la quantité de mouvement ci-dessus. Si le système est à masse conservative, cette dernière équation coïncide exactement avec celle du paragraphe 6.2, mais si la masse est variable, alors, en développant la dérivée qui apparaît au deuxième membre, on obtient

$$\mathbf{f} = m \mathbf{a} + \dot{m} \mathbf{v} ,$$

donc un terme en plus. Le principe de conservation de la quantité de mouvement, que nous avons retrouvé analytiquement dans l'hypothèse de systèmes à masse conservative, est donc plus général de celui énoncé par Newton, parce qu'il peut considérer aussi les systèmes à masse variable (c'est le cas par exemple des fusées dans l'espace, dont la variation de masse due à l'éjection des gaz de combustion explique la variation de vitesse).

Nous continuerons dans la suite à nous occuper de systèmes à masse conservative, pour lesquels le principe de Newton et le principe de conservation de la quantité de mouvement coïncident parfaitement.

## 6.8 MOMENT DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Le vecteur

$$\mathbf{K}_o = (p - o) \wedge m \mathbf{v}$$

est dit *moment de la quantité de mouvement* de  $p$ , par rapport au point  $o$ . Il faut remarquer qu'en général  $o$  est en mouvement par rapport à un observateur inertiel, et que pas forcément il coïncide avec l'origine d'un repère. Avec la même technique vue pour le changement de pôle du moment résultant d'un système de vecteurs appliqués, voir paragraphe 2.1, on montre que le moment de la quantité de mouvement par rapport à un autre point  $o'$  est donné par

$$\mathbf{K}_{o'} = \mathbf{K}_o + (o - o') \wedge \mathbf{Q}.$$

Cherchons à présent la dérivée temporelle de  $\mathbf{K}_o$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_o &= [(p - o) \wedge m \mathbf{v}]' = (p - o)' \wedge m \mathbf{v} + (p - o) \wedge m \dot{\mathbf{v}} = \\ &= \dot{p} \wedge m \mathbf{v} - \dot{o} \wedge m \mathbf{v} + (p - o) \wedge m \mathbf{a}; \end{aligned}$$

mais le premier terme est nul parce que  $\dot{p} = \mathbf{v}$ , et finalement

$$\dot{\mathbf{K}}_o = -m \mathbf{v}_o \wedge \mathbf{v} + (p - o) \wedge m \mathbf{a}.$$

La relation ci-dessus se réduit au seul deuxième terme dans les cas suivants :

- $\mathbf{v}_o = \mathbf{o}$ , c'est-à-dire dans le cas de pôle de réduction des moments immobile ;
- $\mathbf{v}_o = \alpha \mathbf{v}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire le pôle qui se déplace parallèlement au point  $p$  même.

Dans tous les autres cas il faut utiliser la formule entière, qu'on peut réécrire comme

$$\dot{\mathbf{K}}_o = (p - o) \wedge m \mathbf{a} - \mathbf{v}_o \wedge \mathbf{Q}.$$

D'ailleurs, par le deuxième principe on a que, pour tout pôle  $o$ , il est

$$(p - o) \wedge m \mathbf{a} = (p - o) \wedge \mathbf{f} = \mathbf{M}_o,$$

où  $\mathbf{M}_o$  est le moment par rapport à  $o$  de la résultante  $\mathbf{f}$  des forces agissantes sur  $p$  ; donc

$$\dot{\mathbf{K}}_o + \mathbf{v}_o \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_o.$$

Cette équation est l'équivalent de l'équation  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{f}$  pour le cas des moments ; à remarquer que dans l'une des deux hypothèses vues pour la dérivée de  $\mathbf{K}_o$ , la dernière équation se réduit à

$$\dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{M}_o.$$

Cette dernière équation, ou la précédente dans le cas plus général, est l'*équation de conservation du moment de la quantité de mouvement* : si  $\mathbf{M}_o = \mathbf{o}$ , le moment de la quantité de mouvement a dérivée nulle, et donc il est constant.

## 6.9 MASSE INERTIELLE ET MASSE GRAVITATIONNELLE

Dans le paragraphe 6.1 nous avons introduit la masse, sans la définir vraiment, mais en explicitant les deux propriétés qui nous intéressent dans la suite : additivité et conservation.

Toutefois, il ne sera pas échappé au lecteur attentif que cette propriété des corps, la masse, joue un rôle fondamental dans deux lois essentielles de la mécanique : le deuxième principe de Newton,

$$\mathbf{f} = m_i \mathbf{a},$$

et la loi de la gravitation universelle, qu'on peut réécrire, pour un corps de masse  $m$  soumis à l'action d'un champ de gravitation, comme

$$\mathbf{f} = m_g \mathbf{g},$$

où  $\mathbf{g}$  est le champ gravitationnel par unité de masse, voir le paragraphe 6.3,

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}.$$

Dans les deux lois ci-dessus on a fait distinction entre *masse inertielle*,  $m_i$ , et *masse gravitationnelle*,  $m_g$  ; soit  $m_i$  que  $m_g$  sont des constantes physiques caractéristiques du corps. Or, si la gravitation est la cause du mouvement, donc la cause à l'origine de l'accélération du corps, alors

$$\mathbf{f} = m_g \mathbf{g} = m_i \mathbf{a},$$

et donc

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i} \mathbf{g}.$$

D'ailleurs, l'expérience montre que l'accélération pour un champ de gravitation donné est toujours la même, et indépendante de la nature et de l'état du corps. Donc il faut que même le rapport  $m_g/m_i$  soit toujours le même pour tous les corps, rapport qu'on peut poser égal à 1 par le choix des unités. On obtient ainsi un résultat fondamental de la mécanique, l'*équivalence entre masse inertielle et masse gravitationnelle*. Quelle interprétation donner à cette équivalence? La seule possible est que "la même qualité d'un corps se manifeste, suivant les circonstances, comme inertie ou comme poids" (Einstein). La nécessité de cette équivalence est montrée par Einstein dans le cadre de la théorie générale de la relativité, théorie qui ne fait pas objet de ce cours. Dans la suite, nous ne ferons aucune distinction entre masse inertielle et masse gravitationnelle, et on parlera simplement de masse.

## DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRALE

### 7.1 INTRODUCTION

On aborde dans ce chapitre un problème classique en mécanique : l'étude du mouvement d'un point matériel  $p$  de masse  $m$  soumis à l'action d'un champ de force centrale. Rappelons qu'une force est dite centrale si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- la force est toujours dirigée vers un point  $o$ , la *source* du champ de force ;
- le force ne dépend que de la distance entre le point  $p$  d'application de la force et la source.

Il s'agit d'une question extrêmement importante en mécanique, parce que plusieurs phénomènes, de grande importance, peuvent se reconduire à ce genre de problème : c'est par exemple le cas de la *mécanique céleste*, c'est-à-dire des mouvements planétaires, qui sera abondamment traitée dans la deuxième partie du chapitre, ou encore de l'interaction mécanique des particules chargées électriquement. Dorénavant, dans un souci de rapidité, on abrégera en disant *mouvement central*.

Si  $\mathbf{r} = p - o$  est le vecteur position de  $p$  par rapport à un observateur galiléen centré sur  $o$ , alors la force qui agit sur  $p$  est du type

$$\mathbf{f} = f(r) \mathbf{e}_r,$$

où  $\mathbf{e}_r$  est le vecteur unitaire direction de  $p - o$ ,

$$\mathbf{e}_r = \frac{p - o}{|p - o|}.$$

L'accélération de  $p$  est alors donnée par le deuxième principe de Newton :

$$\mathbf{a} = \varphi(r) \mathbf{e}_r,$$

où on a posé

$$\varphi(r) = \frac{f(r)}{m},$$

force par unité de masse ; on développera toute la théorie pour un point de masse unitaire.

### 7.2 INTEGRALES PREMIERES

On se propose ici d'aborder l'analyse d'un mouvement central par le biais des intégrales premières du mouvement, parce que cela, comme déjà anticipé dans le chapitre précédent, facilite l'étude. Cherchons donc les intégrales premières du problème.

Considérons le vecteur  $\mathbf{K}$ , moment de la quantité de mouvement, par rapport à  $o$ , par unité de masse:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} ;$$

en dérivant on obtient

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{v}}.$$

D'ailleurs,

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} = \varphi(r) \mathbf{e}_r,$$

et donc

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{K} = \text{const.}$$

On a obtenu ainsi une intégrale première : le moment de la quantité de mouvement se conserve. Or, le fait que  $\mathbf{K}$  soit constant comporte que tout mouvement central est plan : en fait, voir le paragraphe 1.15,  $\mathbf{K}$  est orthogonal à  $\mathbf{r}$  et à  $\mathbf{v}$ , et donc, comme il est constant,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$  appartiennent toujours au même plan, celui qui passe par  $o$ , par  $p$  et qui est orthogonal à  $\mathbf{K}$ . La trajectoire suivie par  $p$  est appelée *orbite*, et le plan du mouvement *plan de l'orbite*.

Dans un repère cylindrique avec centre en  $o$  et plan  $r$ - $\theta$  qui coïncide avec le plan de l'orbite, on a alors, voir le paragraphe 3.6,

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta,$$

où  $\theta$  est un angle mesuré à partir d'une droite  $x$  choisie, voir la figure 7.1.

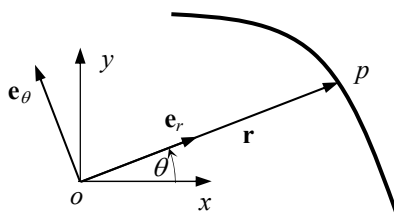


Figure 7.1

Dans ce repère on a alors

$$\mathbf{K} = r \mathbf{e}_r \wedge (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z,$$

et donc, par le fait que  $\mathbf{K}$  est un vecteur constant, on peut poser

$$r^2 \dot{\theta} = c,$$

où  $c$  est une constante appelée *constante des aires*. Ce nom est dû au fait que si l'on considère la surface  $dA$  balayée par le vecteur position  $\mathbf{r}$  durant le temps infinitésimal  $dt$ , voir la figure 7.2, on sait de la géométrie que

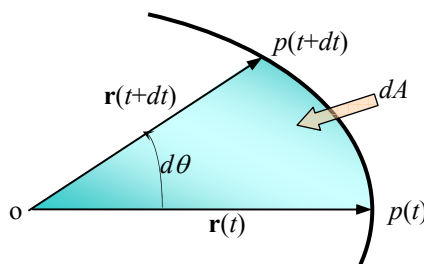


Figure 7.2

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta ,$$

et donc que la *vitesse aréolaire*, c'est-à-dire la variation de  $A$  dans l'unité de temps, est

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} c .$$

La constante  $c$  est donc le double de la vitesse aréolaire, dont le nom de constante des aires ; donc, dans un mouvement central la vitesse aréolaire est constante.

Cette intégrale première a donc une double signification :

- une signification mécanique : le moment de la quantité de mouvement se conserve ;
- une signification géométrique : l'orbite est plane et la vitesse aréolaire se conserve.

C'est pour cela que cette intégrale première est appelée *intégrale première des aires* ou *du moment de la quantité de mouvement*.

Une autre intégrale première est sans doute celle de l'énergie : en fait, tout champ central est conservatif. Cela est bien évident si l'on pense que  $\varphi(r)$  ne dépend que de  $r$  : il existe alors une fonction  $U(r)$  telle que

$$\varphi(r) = \frac{dU}{dr} .$$

$U(r)$  est le potentiel de  $\varphi(r)$ , voire le potentiel du champ par unité de masse, et il est défini comme

$$U(r) = \int_{r_0}^r \varphi(r^*) dr^* .$$

L'énergie mécanique totale  $E$  par unité de masse sera donc

$$E = \frac{1}{2} v^2 - U ,$$

avec  $E$  constante, par l'intégrale première de l'énergie. En coordonnées cylindriques cette intégrale première s'écrit simplement

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = U(r) + E .$$

On peut remarquer que les seules coordonnées actives sont  $r$  et  $\theta$ , et donc on peut se borner dorénavant à considérer un repère polaire.

Nous utiliserons les deux intégrales premières trouvées ci-dessus pour l'étude des orbites ; cette approche est plus simple de celle basée sur l'intégration directe de l'équation du mouvement. En fait, cette dernière, étant une équation différentielle vectorielle du deuxième ordre, nécessite de 6 conditions initiales, alors que les deux intégrales premières, étant des équations différentielles du premier ordre, ne nécessitent que de la connaissance de deux constantes d'intégration,  $r$  et  $\theta$  à l'instant initial, outre naturellement les deux constantes  $c$  et  $E$ , pour un total donc de quatre constantes. Les deux constantes qui manquent, en réalité, sont celles qui fixent la direction de l'axe de  $\mathbf{K}$ , donc l'orientation du plan de l'orbite, information dont on tient automatiquement compte en considérant que l'orbite est plane, voire, en réduisant le problème à deux seules variables,  $r$  et  $\theta$ .

Dans la suite, on approche l'étude des orbites en faisant distinction entre trois cas possibles : *orbites rectilignes*, dites aussi *dégénérées*, *orbites générales* et *orbites circulaires*.

Toutefois, avant de commencer on peut dire quelque chose de tout à fait général : l'intégrale première de l'énergie impose que

$$U(r) + E \geq 0 ;$$

si alors, comme souvent il se passe en nature, la valeur de  $U(r)$  tend vers zéro lorsque  $r$  va à l'infini, c'est-à-dire si l'effet de la force décroît avec la distance, et si l'énergie mécanique totale est négative, alors l'orbite se trouve entièrement à distance finie de la source  $o$ . En fait, l'inégalité ci-dessus impose, si  $E$  est négative, que le potentiel  $U(r)$  soit toujours positif ; comme  $U(r)$  tend vers zéro à l'infini, il existe une valeur  $r^* < \infty$  de  $r$  telle que pour tout  $r > r^*$  l'inégalité ci-dessus n'est pas satisfaite, ce qui est impossible. Donc  $r < r^*$  toujours, ce qui veut dire que le point ne peut pas s'échapper à l'infini.

### 7.3 ORBITES DEGENERÉES

Si  $c = 0$ , l'intégrale première des aires se réduit à

$$r^2 \dot{\theta} = 0 ;$$

mis à part la condition  $r = 0$ , qui comporte que le point se trouve et reste en correspondance de la source  $o$ , cette équation peut être satisfaite seulement si  $\theta$  est constant, c'est-à-dire si le point se déplace sur une droite. L'orbite est donc rectiligne, et on l'appelle *dégénérée*.

L'intégrale première de l'énergie, compte tenu de la condition ci-dessus, se réduit à

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = U(r) + E ,$$

qu'on peut réécrire

$$\dot{r}^2 = \Phi(r) ,$$

où évidemment la fonction  $\Phi(r)$ , qui ne dépend que de la distance  $r$  entre  $p$  et la source  $o$ , est

$$\Phi(r) = 2(U(r) + E) .$$

La vitesse de  $p$  est donc

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\Phi(r)} ,$$

le signe étant déterminé par celui de la vitesse initiale  $\dot{r}_0$ . Il est clair que la fonction  $\Phi(r)$  doit être toujours positive, condition qui pose des limites sur le mouvement du point.

Quatre cas principaux peuvent se présenter, nous les analysons ci de suite.

**Cas numéro 1 :**  $\Phi(r) > 0 \forall r$  ; alors, en supposant  $\dot{r}_0 > 0$ , on a

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\Phi(r)} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}} ,$$

et donc

$$t = \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\Phi(r^*)}} dr^* .$$

Cette dernière est la relation qui donne le temps nécessaire au point pour aller de  $r_0$  à  $r$  ; si la borne  $r$  de l'intégrale tend vers l'infini, l'intégrale est impropre et  $p$  arrivera en un temps fini à une

distance infinie de la source si l'intégrale impropre est finie sur l'intervalle  $[r_0, \infty)$  ; autrement, ce temps tend vers l'infini. Si  $\dot{r}_0 < 0$ , il est simple de voir que dans ce cas le point se rapproche vers la source, et qu'il y arrivera après un temps égal à

$$t = \int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{\Phi(r)}} dr,$$

qui s'appelle *temps de chute*.

**Cas numéro 2 :**  $\Phi(r) > 0$  pour  $r < r_1$ ,  $\Phi(r_1) = 0$ , voir la figure 7.3.

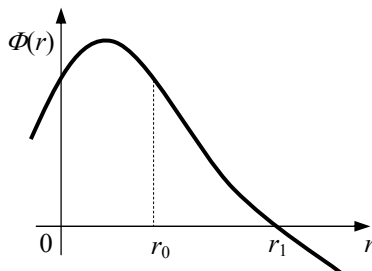


Figure 7.3

Supposons que le point démarre de  $r_0 < r_1$  avec vitesse positive; quand il arrive en  $r_1$ ,  $\Phi(r) = 0$ , et donc sa vitesse s'annule et le point s'arrête ; en suivant la même démarche qu'au cas précédent, le temps pour aller de  $r_0$  à  $r_1$  sera

$$t_1 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{\sqrt{\Phi(r)}} dr.$$

Si  $r_1$  est racine simple de  $\Phi(r) = 0$ , comme dans le cas de la figure 7.3, alors la fonction sous intégrale est intégrable en sens impropre sur  $[r_0, r_1[$  et donc  $t_1$  est fini. Le point  $p$  arrive donc en  $r_1$  et après le point revient en arrière, et il passe par les mêmes points avec la même vitesse, à cause de la conservation de l'énergie, mais avec le signe changé. Pour  $t > t_1$  le mouvement se reproduit donc exactement, mais en sens inverse, et en particulier il est

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\sqrt{\Phi(r)}, \\ r(2t_1) &= r_0, \\ \dot{r}(2t_1) &= -\dot{r}_0. \end{aligned}$$

Le point  $r_1$  est donc ce qu'on appelle un *point d'inversion du mouvement* ; pour ce qu'on vient de dire, il est un point de réflexion temporelle du mouvement.

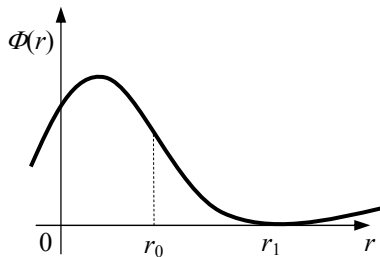


Figure 7.4

Si au contraire  $r_1$  est racine multiple de  $\Phi(r) = 0$ , voir la figure 7.4,  $\Phi(r)$  est stationnaire en  $r_1$  ; la fonction à intégrer n'est pas intégrable en sens impropre sur  $[r_0, r_1[$ , et donc  $t_1$  tends vers l'infini. Cela signifie que  $p$  tend vers  $r_1$  sans jamais y parvenir : le point  $r_1$  est un *point asymptotique*.



**Cas numéro 3 :**  $\Phi(r) > 0$  pour  $r_1 < r < r_2$ ,  $\Phi(r_1) = \Phi(r_2) = 0$ ,  $\Phi'(r_1) \neq 0$  et  $\Phi'(r_2) \neq 0$ , voir la figure 7.5.

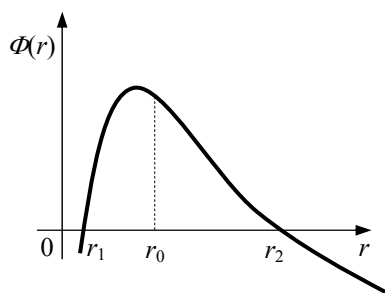


Figure 7.5

Les points  $r_1$  et  $r_2$  sont donc des racines simples de  $\Phi(r) = 0$ , et si le point se trouve initialement en  $r_0 \in [r_1, r_2]$  avec vitesse  $\dot{r}_0 > 0$ , le mouvement se produira d'abord depuis  $r_0$  vers  $r_2$ , puis, comme ce dernier est un point d'inversion,  $p$  revient en arrière et se dirige vers  $r_1$ , qui est à son tour un point d'inversion ; pour ce qu'on a dit au cas précédent,  $p$  passe par chaque point avec la même vitesse absolue. Le mouvement est donc périodique entre les deux points d'inversion ; la période du mouvement est la somme des temps nécessaires à  $p$  pour aller de  $r_0$  en  $r_2$ , puis de  $r_2$  en  $r_1$  et finalement de  $r_1$  en  $r_0$  ; en utilisant la même démarche, on trouve aisément que cette période est

$$\tau_{12} = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\Phi(r)}} dr.$$

Naturellement, on aurait trouvé les mêmes résultats si  $\dot{r}_0 < 0$ , mais dans un ordre différent. Si l'une des deux racines de  $\Phi(r) = 0$  est racine multiple, il s'agit d'un point asymptotique, et donc la première fois que  $p$  se dirige vers ce point ne l'atteindra jamais : le mouvement n'est plus périodique.

**Cas numéro 4 :**  $\Phi(r_0) = 0$ , c'est-à-dire qu'au début du mouvement  $p$  se trouve en correspondance d'une racine de  $\Phi(r) = 0$  et par conséquent  $\dot{r}_0 = 0$ . Si  $r_0$  est racine simple, alors sa dérivée est différente de zéro en  $r_0$ , et donc

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r_0} = 2 \left. \frac{d}{dr} (U(r) + E) \right|_{r_0} = 2 \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_0} = 2\varphi(r_0) = 2\ddot{r}_0 \neq 0,$$

voire l'accélération initiale n'est pas nulle et donc le mouvement peut commencer ; après, on retombe dans l'un des autres cas précédents.

Si au contraire  $r_0$  est racine multiple, alors

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r_0} = 2\ddot{r}_0 = 0,$$

et il faut revenir à l'équation générale du mouvement

$$\ddot{r} = \varphi(r),$$

avec les deux conditions initiales  $r(t=0) = r_0$  et  $\dot{r}(t=0) = 0$  ; la seule solution de cette équation, pour les conditions initiales spécifiées, est  $r = r_0 \forall t \geq 0$  : le point reste donc immobile en  $r_0$ , qui est un *point d'équilibre*. Il faut remarquer que si un point est racine multiple de  $\Phi(r) = 0$ , soit  $p$  s'y trouve au début, soit il ne peut jamais l'atteindre, étant un point asymptotique.

## 7.4 ORBITES GENERALES

Soit  $c > 0$  (le cas  $c < 0$  est identique, une fois changée la direction positive de l'angle  $\theta$ ). Par l'intégrale des aires on a

$$r^2 \dot{\theta} = c > 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} > 0$$

c'est-à-dire que la fonction  $\theta(t)$  est croissante et donc elle est inversible ; soit alors  $t = t(\theta)$  son inverse et soit  $r(\theta) = r[t(\theta)]$ . Alors,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta},$$

et donc l'intégrale de l'énergie devient

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left[ \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] = U(r) + E ;$$

mais par l'intégrale des aires on a

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2},$$

qui injecté dans l'expression précédente de l'intégrale de l'énergie donne

$$\frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + 1 \right] = U(r) + E.$$

Si on pose

$$u = \frac{1}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

l'intégrale de l'énergie devient

$$\frac{c^2}{2} \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = U\left(\frac{1}{u}\right) + E,$$

et donc

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2}{c^2} \left[ U\left(\frac{1}{u}\right) + E \right] - u^2.$$

On appelle alors

$$\Psi(u) = \frac{2}{c^2} \left[ U\left(\frac{1}{u}\right) + E \right] - u^2,$$

et on a finalement l'équation

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \Psi(u).$$

Cette équation est formellement identique à celle trouvée lors de l'étude des orbites dégénérées :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \Phi(r) ;$$

on peut donc utiliser la même discussion qualitative et trouver les mêmes résultats des orbites dégénérées, pourvu qu'on considère que cette fois  $u$  joue le rôle de  $r$  et l'angle  $\theta$  celui du temps  $t$ .

On trouvera alors la loi

$$\theta(u) = \int_{u_0}^u \frac{du^*}{\sqrt{\Psi(u^*)}},$$

qui donne la valeur de l'angle  $\theta$  balayé par le vecteur  $\mathbf{r}$  quand  $p$  passe de la distance  $r_0 = 1/u_0$  à la distance  $r = 1/u$ . La discussion de cette équation est tout à fait analogue à celle faite pour les orbites dégénérées ; en particulier, si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux racines simples de l'équation

$$\Psi(u) = 0,$$

et le point de départ est à  $u_0 \in [u_1, u_2]$ , alors, comme pour le cas dégénéré l'orbite était bornée, même ici elle le sera, et notamment elle sera comprise entre deux cercles limite, de rayon  $r_1$  et  $r_2$  :

$$r_2 = \frac{1}{u_2} \leq r \leq r_1 = \frac{1}{u_1}.$$

Un cercle limite est dit *cercle apsidal*, et notamment celui de rayon plus petit *périhélie*, l'autre *aphélie*. Aux points de contact de l'orbite avec les cercles apsidaux, points appelés *apsides*, il est  $\Psi(u) = 0$ , et donc

$$\frac{du}{d\theta} = 0,$$

ce qui comporte que l'orbite est tangente aux cercles apsidaux dans les apsides. L'*angle apsidal*  $\alpha$  est l'angle balayé par le vecteur  $\mathbf{r}$  entre deux apsides consécutifs, voir la figure 7.6 ; il est donné par

$$\alpha = \theta(u_2 - u_1) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\Psi(u)}} ;$$

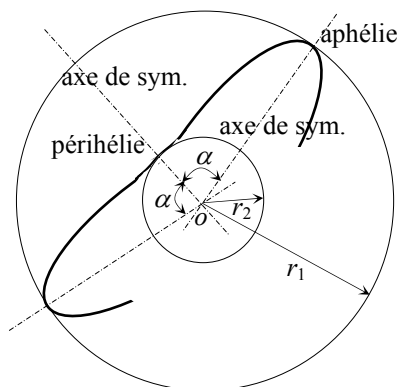


Figure 7.6

on remarque que cet angle est constant, c'est-à-dire que deux apsides consécutifs diffèrent toujours du même angle  $\alpha$ , qui est donc une caractéristique de l'orbite. Cela signifie deux choses : la première, que l'orbite sera une courbe fermée seulement si  $2\pi/\alpha$  est rationnel ; autrement l'orbite, même étant *liée*, c'est-à-dire bornée entre deux cercles apsidaux, ne sera pas une courbe fermée, mais une courbe ouverte et dense dans la couronne circulaire comprise entre les cercles apsidaux.

La deuxième, de la même façon qu'un point d'inversion est un point de réflexion temporelle du mouvement pour le cas dégénéré, un apside est point de réflexion angulaire pour l'orbite, ce qui signifie tout simplement que l'orbite est symétrique par rapport à chaque droite qui passe par la source  $o$  et un apside, voire encore la figure 7.6 ; ceci comporte aussi que l'orbite est complètement connue si on connaît le morceau entre deux apsides consécutifs. En fait, la partie restant de l'orbite peut être construite par des considérations de symétrie.

Si une racine, par exemple  $u_1$ , de l'équation  $\Psi(u)=0$  est racine multiple, alors l'intégrale impropre

$$\theta(u_1 - u_0) = \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{\Psi(u)}}$$

n'est pas finie, ce qui signifie que l'angle  $\alpha$  tend vers l'infini : le point  $p$  tend vers le cercle de rayon  $r_1 = 1/u_1$  sans jamais y parvenir : le cercle limite de rayon  $r_1$  est un *cercle asymptotique*, ainsi qu'une racine double de l'équation  $\Phi(r)=0$  était un point asymptotique pour les orbites dégénérées.

De l'intégrale des aires on a encore que

$$\frac{d\theta}{dt} = c u^2,$$

et donc

$$dt = \frac{d\theta}{c u^2},$$

d'où la *loi du temps*, relation qui permet de calculer le temps nécessaire au vecteur position  $\mathbf{r}$  pour balayer l'angle  $\theta$  :

$$t(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta^*}{c u^2(\theta^*)}.$$

## 7.5 ORBITES CIRCULAIRES

Soit le point de départ  $u_0$  une racine simple de l'équation  $\Psi(u)=0$  ; alors,

$$\left. \frac{d\Psi}{du} \right|_{u_0} \neq 0,$$

et si on dérive par rapport à  $\theta$  l'équation

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \Psi[u(\theta)]$$

on trouve qu'à l'instant initial

$$\left. \frac{d^2u}{d\theta^2} \right|_{u_0} = \frac{1}{2} \left. \frac{d\Psi}{du} \right|_{u_0} \neq 0,$$

relation d'où on tire les indications pour le début du mouvement, tout comme dans le cas dégénéré.

Si au contraire  $u_0$  est racine multiple de l'équation  $\Psi(u)=0$ , alors

$$\left. \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right|_{u_0} = \frac{1}{2} \left. \frac{d\Psi}{du} \right|_{u_0} = 0;$$

comme dans le cas dégénéré, il faut alors revenir à l'équation du deuxième ordre

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{du}$$

avec les deux conditions initiales

$$u(\theta=0) = u_0$$

et

$$\left. \frac{du}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0;$$

la seule solution de cette équation, pour les conditions initiales spécifiées, est  $u = u_0 \forall \theta$ : le point décrit donc une orbite circulaire de rayon  $r_0 = 1/u_0$ .

L'intégrale première des surfaces nous donne alors la vitesse angulaire  $\omega$ ,

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{c}{r_0^2},$$

ainsi que la vitesse du point  $p$ :

$$\dot{p} = \frac{c}{r_0}$$

et la vitesse aréolaire

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \omega r_0^2 = \frac{1}{2} \dot{p} r_0.$$

Les relations ci-dessus montrent un résultat général: dans un champ de force centrale les orbites circulaires sont parcourues à vitesse constante.

On peut se poser la question suivante: que se passe-t-il si l'orbite, au lieu d'être parfaitement circulaire, est perturbée? Pour analyser cela, on pose

$$u(\theta) = u_0 + \varepsilon(\theta),$$

avec  $\varepsilon(\theta)$  une fonction infinitésimale du premier ordre qui représente la perturbation par rapport à l'orbite circulaire de rayon  $r_0 = 1/u_0$ . En injectant cette relation dans l'équation différentielle du deuxième ordre ci-dessus on trouve alors

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\theta^2} = \frac{1}{2} \frac{d\Psi(u_0 + \varepsilon)}{du};$$

par développement de Taylor on a

$$\frac{d\Psi(u_0 + \varepsilon)}{du} = \left. \frac{d\Psi}{du} \right|_{u_0} + \varepsilon \left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0} + o(\varepsilon),$$

et comme pour une orbite circulaire

$$\left. \frac{d\Psi}{du} \right|_{u_0} = 0,$$

on a l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0} \varepsilon ;$$

cette équation est satisfaite par les solutions suivantes ( $a$  et  $b$  sont deux constantes à déterminer sur les conditions initiales):

- si  $\left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0} < 0$ , alors

$$\varepsilon = a \cos \lambda\theta + b \sin \lambda\theta,$$

avec  $\lambda^2 = -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0}$ ; on voit bien que  $\varepsilon$  est une fonction bornée de  $\theta$ : l'orbite reste proche de

celle circulaire prévue, qui est donc stable ;

- si  $\left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0} = 0$ , alors ( $\lambda = 0$ )

$$\varepsilon = a\theta + b ;$$

la fonction  $\varepsilon$  s'accroît indéfiniment avec  $\theta$ , et donc l'orbite ne reste pas proche de celle circulaire prévue, qui est donc instable ;

- si  $\left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0} > 0$ , alors

$$\varepsilon = a e^{\lambda\theta} + b e^{-\lambda\theta},$$

avec  $\lambda^2 = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0}$ ; même dans ce cas  $\varepsilon$  n'est pas bornée, et l'orbite est instable.

La condition de stabilité d'une orbite circulaire est donc

$$\left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0} < 0.$$

Considérons alors une force du type

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^\nu},$$

avec  $k$  une constante réelle. Le potentiel par unité de masse est

$$U(r) = -\frac{k}{1-\nu} r^{1-\nu},$$

et

$$\Psi(u) = \frac{2}{c^2} \left[ -\frac{k}{1-\nu} u^{\nu-1} + E \right] - u^2,$$

d'où

$$\frac{d\Psi}{du} = 2u \left[ \frac{k}{c^2} u^{\nu-3} - 1 \right]$$

et

$$\frac{d^2\Psi}{du^2} = 2 \left[ \frac{k}{c^2} (\nu-2) u^{\nu-3} - 1 \right].$$

Dans le cas d'une orbite circulaire, la condition

$$\left. \frac{d\Psi}{du} \right|_{u_0} = 0$$

donne alors

$$u_0^{\nu-3} = \frac{c^2}{k},$$

relation qui injectée dans l'expression de la dérivée seconde donne finalement

$$\left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0} = 2(\nu-3).$$

L'orbite sera donc stable si et seulement si  $\nu < 3$  ; ce résultat est assez important parce que certaines forces en nature, et notamment la force de gravitation universelle, ont une loi du type de celui considéré ici.

## 7.6 FORCES REPULSIVES

Dans le cas d'une force répulsive, il est  $dU/dr = \varphi(r) > 0$  et donc

$$\frac{d\Psi}{du} = -\frac{2}{c^2} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2} - 2u < 0,$$

ce qui signifie que la fonction  $\Psi(u)$  est monotone décroissante, voire qu'elle a au plus une seule racine simple, et donc l'orbite a au plus un seul apside, qui est un périhélie. En fait, si  $u_0$  est la racine, pour  $u$  suffisamment proche de  $u_0$  on a

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{du} < 0,$$

alors qu'en  $u_0$ ,

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{\Psi(u_0)} = 0;$$

$u_0$  est donc le maximum de la fonction  $u(\theta)$ , et donc  $r$  est minimum pour  $r_0 = 1/u_0$ , c'est-à-dire que l'apside est un périhélie.

## 7.7 LE PROBLEME DE KEPLER

Le problème de Kepler est le problème principal de la *mécanique céleste*, la branche de la mécanique qui étudie le mouvement des astres. L'astronome allemand J. Kepler énonça ses fameuses lois à la suite d'une longue série d'observations du mouvement des planètes, sans pour autant en donner la raison physique. La démonstration rigoureuse de ces lois est due à Newton, qui montra pour le premier que le mouvement des planètes suit les lois de Kepler seulement si la force d'interaction est la force de gravitation universelle, énoncée par Newton même en 1687 dans le troisième livre de ses "Principia". Dans les paragraphes qui suivent, on aborde donc la solution de Newton au problème de Kepler.

On appelle *problème de Kepler* l'étude du mouvement d'un point matériel  $p$  soumis à l'action d'une force centrale du type

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^2},$$

où  $k$  est une constante positive ; la force  $\varphi(r)$  est donc attractive, et le potentiel correspondant

$$U(r) = \frac{k}{r}$$

est appelé *potentiel newtonien* ; à la fin du chapitre, on verra que les forces d'interaction gravitationnelle entre les corps célestes dépendent d'un potentiel newtonien, d'où l'intérêt à l'étude du problème de Kepler. S'agissant d'un mouvement central, les résultats généraux trouvés dans les paragraphes précédents sont toujours valables ; en particulier, *le mouvement est plan et la vitesse aréolaire est constante* : c'est la fameuse *deuxième loi de Kepler*, qui toutefois n'est pas une loi typique des seules planètes, mais de tout mouvement central.

Par l'intégrale première de l'énergie,

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{k}{r} + E,$$

il faut que ce soit toujours

$$\frac{k}{r} \geq -E,$$

et donc si  $E$  est négative l'orbite est bornée, comme déjà vu en général au paragraphe 7.2 ; en particulier

$$r \leq \frac{k}{|E|}.$$

Abordons donc l'étude des orbites dans un champ de force à potentiel newtonien de la même façon du cas général, en considérant séparément les orbites dégénérées et générales.

## 7.8 LES ORBITES DEGENERÉES DU PROBLEME DE KEPLER

Dans le cas du potentiel newtonien,

$$\Phi(r) = 2\left(\frac{k}{r} + E\right),$$

qui est une hyperbole. Deux sont les cas possibles, selon le signe de  $E$  : si  $E > 0$ , la fonction  $\Phi(r)$  est



toujours positive, et donc le mouvement n'est pas borné : toute valeur de  $r$  peut être atteinte, voire figure 7.7, si la vitesse  $\dot{r}_0 > 0$  ; dans ce cas le point s'éloigne indéfiniment et arrive à une distance infinie en un temps

$$t_\infty = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2(k + E r)}} dr.$$

D'ailleurs, on peut montrer que si  $E > 0$  il est

$$\int \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2(k + E r)}} dr = \frac{1}{E\sqrt{2E}} \left[ \sqrt{E r (k + E r)} - k \ln \left( \sqrt{1 + \frac{E r}{k}} + \sqrt{\frac{E r}{k}} \right) \right],$$

et donc  $t_\infty = \infty$ . Si au contraire  $\dot{r}_0 < 0$ , le point chute sur la source de force avec le temps de chute

$$t_c = - \int_{r_0}^0 \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2(k + E r)}} dr = \frac{1}{E\sqrt{2E}} \left[ \sqrt{E r_0 (k + E r_0)} - k \ln \left( \sqrt{1 + \frac{E r_0}{k}} + \sqrt{\frac{E r_0}{k}} \right) \right].$$

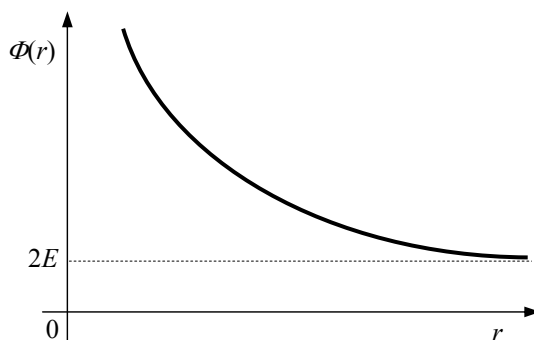


Figure 7.7

Si maintenant  $E < 0$ , la fonction  $\Phi(r)$  s'annule pour  $r = r^*$ ,

$$r^* = -\frac{k}{E},$$

et donc le mouvement est possible seulement dans l'intervalle  $[0, r^*]$ , voir la figure 7.8.

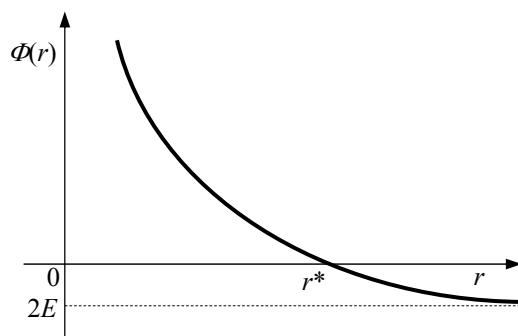


Figure 7.8

Le point  $r^*$  est donc un point d'inversion du mouvement. Quand  $E < 0$ , on a que

$$\int \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2(k + E r)}} dr = \frac{1}{E\sqrt{-2E}} \left[ \sqrt{-E r (k + E r)} - k \arcsin \sqrt{\frac{-E r}{k}} \right],$$

et donc, si  $\dot{r}_0 < 0$ ,  $p$  chute sur  $o$  avec le temps de chute

$$t_c = - \int_{r_0}^0 \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2(k + E r)}} dr = \frac{1}{E\sqrt{-2E}} \left[ \sqrt{-E r_0 (k + E r_0)} - k \arcsin \sqrt{\frac{-E r_0}{k}} \right].$$

Si  $\dot{r}_0 > 0$ ,  $p$  arrive en  $r^*$  après le temps

$$t_r = \int_{r_0}^{r^*} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2(k + E r)}} dr,$$

qu'on calcule facilement avec l'intégrale indéfinie ci-dessus, et après il chute sur  $o$ .

La condition  $E=0$  est donc la condition qui sépare la situation où  $p$  peut arriver à l'infini, si  $\dot{r}_0 > 0$ , de celle où  $p$  chute toujours sur la source du champ central. Si  $E=0$ , l'intégrale première de l'énergie est

$$\dot{r}^2 = 2 \frac{k}{r},$$

et si le point se trouve initialement en  $r_0$ , la *vitesse de libération*, c'est-à-dire la vitesse minimale qui permet à  $p$  de s'échapper du champ de force, sera

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}.$$

Si  $E=0$ , alors le temps de chute sur  $o$  est simplement

$$t_c = - \int_{r_0}^0 \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2k}} dr = \frac{1}{3} r_0 \sqrt{\frac{2r_0}{k}}.$$

## 7.9 LES ORBITES GENERALES DU PROBLEME DE KEPLER

La fonction  $\Psi(u)$  pour un potentiel newtonien est

$$\Psi(u) = \frac{2}{c^2} (k u + E) - u^2 = -u^2 + 2 \frac{k}{c^2} u + 2 \frac{E}{c^2},$$

qui est l'équation d'une parabole avec concavité en bas. Les racines de  $\Psi(u)=0$  sont

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{k}{c^2} \left[ 1 \mp \sqrt{1 + \frac{2E c^2}{k^2}} \right], \\ u_2 & \end{aligned}$$

qui existent si et seulement si

$$E \geq - \frac{k^2}{2c^2}.$$

En cas contraire, il serait  $\Psi(u) < 0$ , ce qui est impossible ; la valeur ci-dessus est donc une borne inférieure de l'énergie mécanique totale pour le cas d'un point qui se déplace sur une orbite générale dans un champ de force centrale à potentiel newtonien.

Si  $E \geq 0$ , les racines sont simples, avec  $u_1 \leq 0$  et  $u_2 > 0$ , voir la figure 7.9. La racine  $u_1$ , étant négative ou nulle, n'est pas acceptable, et le mouvement se produit pour  $u \in (0, u_2]$ , voire pour  $r \in [1/u_2, \infty)$ . On a ainsi un seul apside, de rayon  $r_2 = 1/u_2$ , qui est un périhélie. Si  $\dot{r}_0 < 0$ , alors, comme

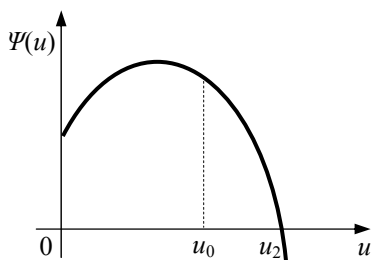


Figure 7.9

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

on a

$$\frac{du}{d\theta} = -u^2 \frac{dr}{d\theta} = -u^2 \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{c} > 0,$$

et donc le point se rapproche de l'apside, et puis il s'en éloigne définitivement ; si  $\dot{r}_0 > 0$ , alors  $\frac{du}{d\theta} < 0$  et le point s'éloigne immédiatement de l'apside. Dans tous les cas, l'orbite est ouverte et l'apside est un périhélie, fig. 7.10.

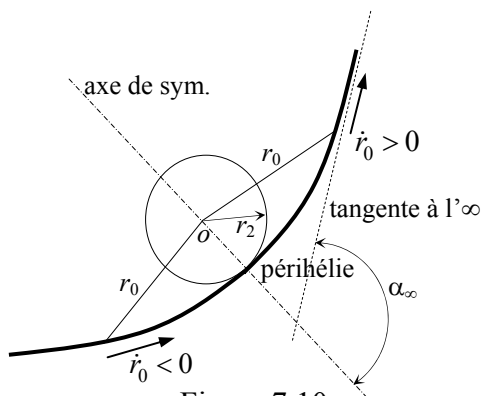


Figure 7.10

Si  $-k^2/2c^2 < E < 0$ , alors  $u_1$  et  $u_2$  sont positives et de multiplicité 1, fig. 7.11. L'orbite a deux apsidés, de rayon  $r_1=1/u_1$  et  $r_2=1/u_2$ ,  $r_1 > r_2$  : en effet, comme  $E < 0$ , l'orbite est liée. Si  $\dot{r}_0 < 0$ , le point se rapproche au début au cercle de rayon  $r_2$ , si  $\dot{r}_0 > 0$ , il se rapproche d'abord à celui de rayon  $r_1$ .

Si, finalement,  $E = -k^2/2c^2$ , alors  $u_1 = u_2 = k/c^2$  : on a une seule racine double, fig. 7.12, et l'orbite est circulaire de rayon  $r_0 = c^2/k$ . En outre, l'orbite est stable, au sens vu au paragraphe 7.5, parce que

$$\left. \frac{d^2\Psi}{du^2} \right|_{u_0} = -2 < 0.$$

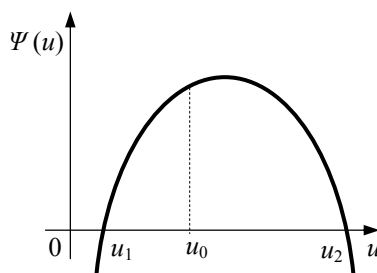


Figure 7.11

En effet, le potentiel newtonien est un potentiel du type de ceux analysés dans le paragraphe 7.5,

$$U(r) = -\frac{k}{1-\nu} r^{1-\nu},$$

avec  $\nu=2$ , donc plus petit de 3: par conséquent, les orbites circulaires sont stables. On peut trouver aussi la vitesse de rotation, constante,

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{c}{r_0^2} = \frac{k^2}{c^3}$$

ainsi que la vitesse du point  $p$ ,

$$\dot{p} = \frac{c}{r_0} = \frac{k}{c}.$$

Ce dernier résultat on peut l'obtenir directement par l'intégrale première de l'énergie :

$$\frac{1}{2} \dot{p}^2 - \frac{k}{r_0} = E \rightarrow \frac{1}{2} \dot{p}^2 - \frac{k^2}{c^2} = -\frac{k^2}{2c^2} \rightarrow \dot{p} = \frac{k}{c}.$$

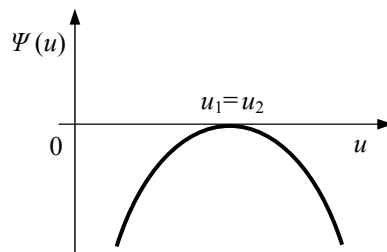


Figure 7.12

### 7.10 LA FORME DES ORBITES GENERALES DU PROBLEME DE KEPLER

Avant de trouver la forme géométrique des orbites générales, notons certaines caractéristiques de celles-ci. Considérons d'abord le cas des orbites ouvertes,  $E \geq 0$  ; nous voulons calculer l'angle  $\alpha_\infty$  qui exprime l'ouverture du secteur angulaire qui contient la partie de l'orbite qui va de l'apside jusqu'à l'infini, c'est-à-dire quand  $r \rightarrow \infty$ , voire lorsque  $u \rightarrow 0$ , voir la figure 7.10. Alors, si on applique à  $\Psi(u)$  la règle de décomposition des trinômes de deuxième degré, on peut écrire

$$\Psi(u) = (u - u_1)(u_2 - u),$$

où  $u_1$  et  $u_2$  sont les racines de l'équation  $\Psi(u) = 0$  ; on aura alors

$$\alpha_\infty = \int_0^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\Psi(u)}} = \int_0^{u_2} \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} = \pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{u_1}{u_1 - u_2}}.$$

Donc, si  $u_1 < 0$ , voire si  $E > 0$ ,  $\alpha_\infty < \pi$ , mais si  $u_1 = 0$ , voire si  $E = 0$ , alors  $\alpha_\infty = \pi$ .

Pour le cas des orbites liées, voire pour  $-k^2/2c^2 < E < 0$ , on peut trouver l'angle apsidal  $\alpha$  en utilisant la même démarche :

$$\alpha = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\Psi(u)}} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} = \pi.$$

Donc les orbites liées sont toutes du même type, et en plus elles sont fermées et les apsides se

trouvent sur la même droite, la *ligne des apsides* ; il ne reste plus qu'à trouver la forme des orbites.

Cherchons donc la forme des orbites générales du problème de Kepler : pour cela on transforme la fonction  $\Psi(u)$  de la façon suivante :

$$\Psi(u) = \frac{2E}{c^2} + \frac{k^2}{c^4} - \left(u - \frac{k}{c^2}\right)^2.$$

On pose ensuite

$$\chi = u - \frac{k}{c^2},$$

ce qui implique que

$$\frac{d\chi}{d\theta} = \frac{du}{d\theta},$$

et donc l'équation fondamentale des orbites dégénérées peut être réécrite comme

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E}{c^2} + \frac{k^2}{c^4} - \chi^2.$$

L'intégrale de cette équation différentielle est

$$\chi = \sqrt{\frac{2E}{c^2} + \frac{k^2}{c^4}} \cos(\theta - \theta_0) ;$$

or, comme il est aussi

$$\chi = \frac{1}{r} - \frac{k}{c^2},$$

on a une expression de la distance  $r$  en fonction de  $\theta$ , c'est-à-dire l'équation de l'orbite en forme polaire :

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + \frac{k^2}{c^2} \sqrt{1 + \frac{2E c^2}{k^2}} \cos(\theta - \theta_0).$$

Si on pose

$$q = \frac{c^2}{k},$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E c^2}{k^2}},$$

on a finalement

$$r = \frac{q}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Cette dernière est l'équation polaire d'une conique qui a un foyer à l'origine du repère polaire, donc en correspondance de la source de force, et l'autre sur une droite qui forme l'angle  $\theta_0$  avec l'axe orienté à  $\theta = 0$  ;  $q$  est le *paramètre* et  $e$  l'*excentricité* de la conique. Or, on sait que :

- si  $e = 0$  la conique est un cercle ; on voit bien que cela se produit pour  $E = -k^2/2c^2$  ;

- si  $0 < e < 1$ , la conique est une ellipse ; on reconnaît immédiatement que cela se produit pour  $-k^2/2c^2 < E < 0$  ; effectivement, on a vu plus haut que dans ce cas l'orbite est fermée et l'angle apsidal est  $\pi$ , caractéristiques qui correspondent au cas de l'ellipse, voir la figure 7.13 ; le grand axe de l'orbite correspond à la ligne des apsides ;
- si  $e = 1$ , la conique est une parabole : cela se produit pour  $E = 0$  ; dans ce cas l'unique apside est un périhélie de rayon  $c^2/2k$  et l'angle  $\alpha_\infty$  vaut  $\pi$ , comme effectivement c'est le cas pour une parabole ;
- si  $e > 1$ , la conique est une hyperbole : cela se produit pour  $E > 0$ , on a encore un périhélie de rayon  $c^2/2k$  mais  $\alpha_\infty < \pi$ .

Or, les observations astronomiques permettent de dire que les planètes du système solaire se déplacent sur une orbite qui n'est pas une droite et qu'elles restent toujours à distance finie du Soleil, avec un mouvement périodique : il s'ensuit que les planètes suivent forcément une orbite elliptique, la seule orbite liée du problème de Kepler. On a ainsi démontré la *première loi de Kepler* : les planètes suivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des deux foyers.

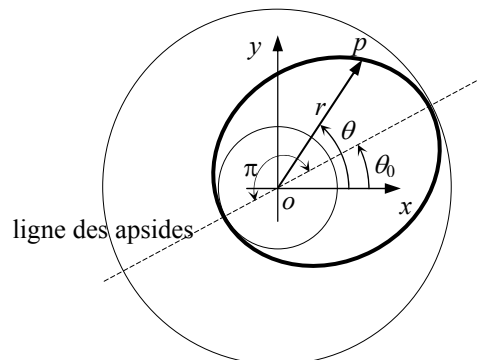


Figure 7.13

Il faut remarquer que les orbites elliptiques gardent les axes constants, voire qu'elles sont immuables. Cela n'est pas vrai à la rigueur, comme le mouvement d'avancement du périhélie observé pour Mercure le prouve (environ 43 secondes d'arc par siècle). Toutefois, une explication de ce phénomène ne peut pas être trouvée dans les lois de la mécanique classique : c'est seulement la théorie générale de la relativité d'Einstein qui l'explique et qui permet de le calculer. D'ailleurs ce mouvement, bien que minime et encore plus petit pour les autres planètes du système solaire, a constitué l'une des épreuves de la théorie d'Einstein.

Il y a aussi des corps célestes qui suivent des orbites qui ne sont pas des ellipses : ce sont les comètes. On a pu observer, en effet, le passage de comètes suivant des orbites paraboliques et hyperboliques. Ces comètes ne sont observables qu'une seule fois, alors que d'autres reviennent périodiquement, comme la fameuse comète de Halley, dont le temps de retour est de 76 ans : ces autres comètes suivent en effet des orbites elliptiques très allongées, à tel point qu'elles arrivent à disparaître à l'observation, et à être visibles seulement lors du leur passage à proximité du Soleil.

### 7.11 CINEMATIQUE DES PLANETES

Pour simplifier, supposons que  $\theta_0 = 0$ , voire que l'axe  $x$ , à partir duquel on compte les angles  $\theta$ , coïncide avec le grand axe de l'orbite, et que le Soleil se trouve en correspondance de l'origine du repère; alors l'équation de l'orbite en coordonnées polaires est

$$p(\theta) - o = r(\theta)\mathbf{e}_r = \frac{q}{1 + e \cos \theta} \mathbf{e}_r.$$

Par conséquent, vitesse et accélération seront, voir le paragraphe 3.5,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{q \dot{\theta}}{1 + e \cos \theta} \left( \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \right), \\ \mathbf{a} &= \frac{q}{(1 + e \cos \theta)^3} \left[ \dot{\theta}^2 (2e^2 \sin^2 \theta - e \cos \theta - 1) + e \sin \theta (1 + e \cos \theta) \ddot{\theta} \right] \mathbf{e}_r + \\ &\quad + \frac{q}{(1 + e \cos \theta)^2} \left[ (1 + e \cos \theta) \ddot{\theta} + 2e \sin \theta \dot{\theta}^2 \right] \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

D'ailleurs le mouvement est central, et donc la composante transversale de l'accélération est identiquement nulle, ce qui comporte

$$(1 + e \cos \theta) \ddot{\theta} + 2e \sin \theta \dot{\theta}^2 = 0 ;$$

si on injecte cette dernière relation dans l'expression de l'accélération ci-dessus, on trouve finalement

$$\mathbf{a} = -\frac{q \dot{\theta}^2}{(1 + e \cos \theta)^2} \mathbf{e}_r.$$

On peut parvenir à ce résultat d'une façon plus directe : en fait,

$$\mathbf{a} = \varphi(r) \mathbf{e}_r = -\frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r ;$$

mais

$$k = \frac{c^2}{q}, \quad c = r^2 \dot{\theta} \quad \text{et} \quad r = \frac{q}{1 + e \cos \theta},$$

et donc on retrouve la dernière expression de  $\mathbf{a}$ .

En coordonnées cartésiennes, il est évidemment

$$p(\theta) - o = r(\theta) \cos \theta \mathbf{e}_1 + r(\theta) \sin \theta \mathbf{e}_2 = \frac{q}{1 + e \cos \theta} (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2),$$

et donc pour la vitesse et l'accélération on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{q \dot{\theta}}{(1 + e \cos \theta)^2} [-\sin \theta \mathbf{e}_1 + (e + \cos \theta) \mathbf{e}_2], \\ \mathbf{a} &= -\frac{q}{(1 + e \cos \theta)^3} \left\{ \left[ \dot{\theta}^2 (2e + \cos \theta - e \cos^2 \theta) + \ddot{\theta} (1 + e \cos \theta) \sin \theta \right] \mathbf{e}_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \dot{\theta}^2 \sin \theta (1 - 2e^2 - e \cos \theta) - \ddot{\theta} (1 + e \cos \theta) (e + \cos \theta) \right] \mathbf{e}_2 \right\}. \end{aligned}$$

Pour terminer, la vitesse aréolaire sera

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{q^2 \dot{\theta}}{(1 + e \cos \theta)^2}.$$

7.12 LA TROISIEME LOI DE KEPLER

Pour trouver la troisième loi de Kepler, considérons d'abord la construction géométrique de la figure 7.14 : la position du point  $p$  sur l'orbite peut être déterminée à l'aide de l'angle  $\alpha$ , dit *anomalie excentrique*: dans le repère  $\{o', x, y\}$ , où  $o'$  est le centre géométrique de l'orbite elliptique, on a en effet que

$$p \equiv (a \cos \alpha, b \sin \alpha),$$

coordonnées qui satisfont identiquement à l'équation de l'orbite, qui est l'ellipse de centre  $o'$ , semi-

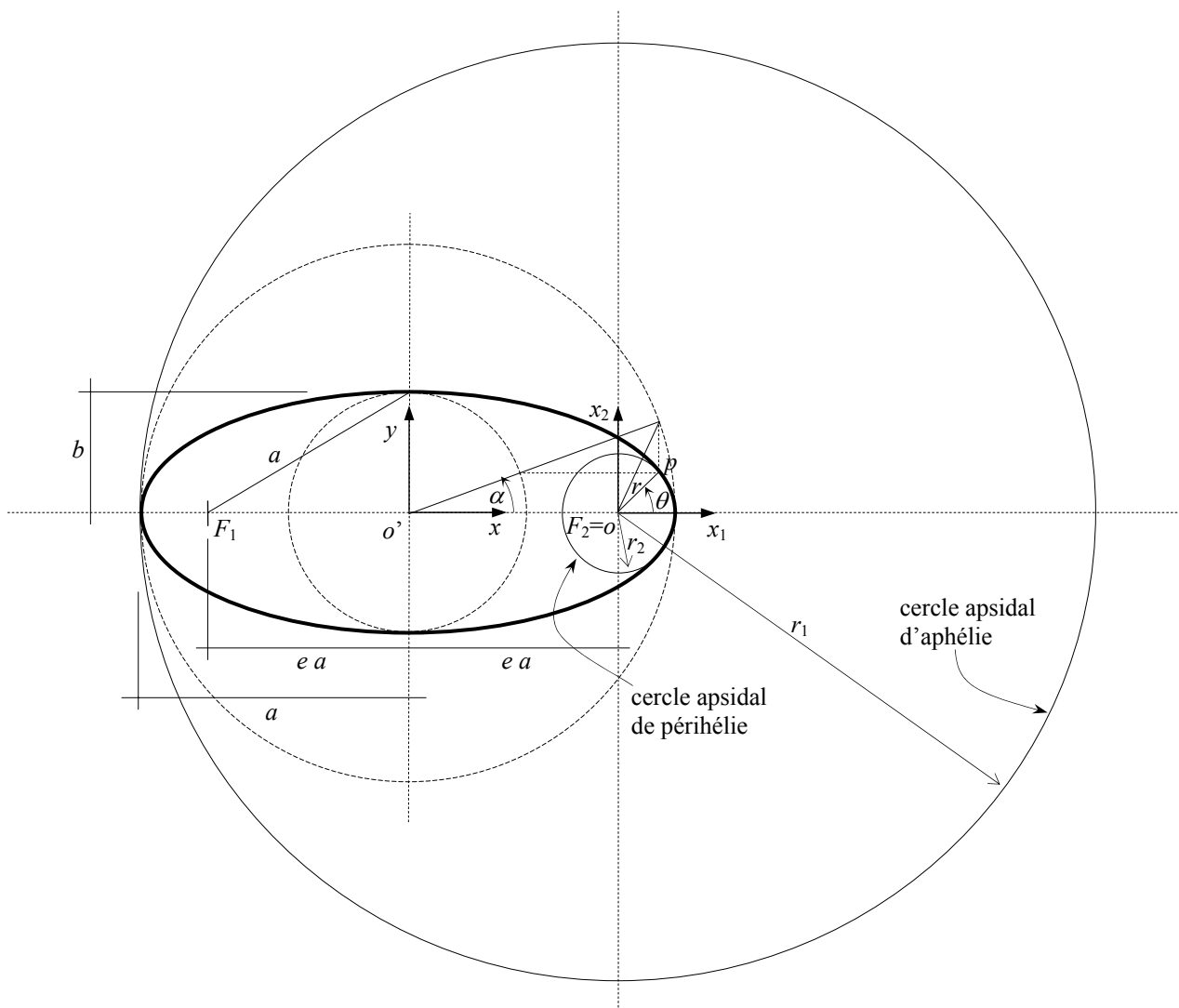


Figure 7.14

grand axe  $a$ , semi-petit axe  $b$  et foyers  $F_1$  et  $F_2$  :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De la géométrie analytique élémentaire on sait que

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

et que



$$|F_1 - o| = |F_2 - o| = e a .$$

En outre

$$|F_2 - o| = a - r(\theta = 0) ,$$

où la coordonnée  $r$  est mesurée à partir de  $F_2$ , foyer qui coïncide avec la source de force  $o$ , et donc dans le repère  $\{o, x_1, x_2\}$ . L'expression de  $r(\theta)$  vue au paragraphe précédent donne

$$r(\theta = 0) = \frac{q}{1+e} ;$$

en utilisant les trois dernières expressions, on trouve alors

$$a = \frac{q}{1-e^2} ,$$

qui injectée dans l'expression de l'excentricité donne

$$b = \sqrt{q a} .$$

Soit alors  $\tau$  la *période de révolution*, c'est-à-dire le temps nécessaire à  $p$  pour faire un tour complet de l'orbite; durant  $\tau$ , le vecteur position  $\mathbf{r}(\theta) = p(\theta) - o$  balaye toute la surface  $S$  de l'ellipse, qui est

$$S = \pi a b = \pi a \sqrt{q a}$$

Mais, étant le mouvement central, donc à vitesse aréolaire constante, il est aussi

$$S = \int_0^\tau \dot{A} dt = \dot{A} \tau = \frac{1}{2} c \tau .$$

D'ailleurs, voir le paragraphe 7.10,

$$q = \frac{c^2}{k} \rightarrow c = \sqrt{q k} ,$$

et donc on a que

$$\pi a \sqrt{q a} = \frac{1}{2} \sqrt{q k} \tau ,$$

d'où, finalement, la *troisième loi de Kepler* :

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k} .$$

Cette loi met en évidence que la période de révolution est liée au semi-grand axe de l'ellipse : physiquement, cela signifie que le temps de parcours et la géométrie de l'orbite ne sont pas indépendants. On verra en outre, dans le paragraphe 7.15, que le rapport  $\tau^2/a^3$  est pratiquement constant pour les planètes du système solaire.

Pour terminer, par l'expression ci-dessus de  $b$ , on peut remarquer que

$$q = \frac{b^2}{a} ,$$

qui donne la définition géométrique du paramètre de l'ellipse. Par l'expression générale de  $q$ , on a finalement la relation

$$\frac{c^2}{k} = \frac{b^2}{a},$$

qui lie les grandeurs mécaniques  $c$  et  $k$  avec les constantes géométriques  $a$  et  $b$  de l'orbite.

### 7.13 LA LOI DU TEMPS

Dans le paragraphe 7.4 on a trouvé, dans le cas général, la loi du temps, qui permet de déterminer le temps nécessaire au point  $p$  pour balayer l'angle  $\theta$ ; dans le cas du problème de Kepler, on a

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \int_0^\theta \frac{d\theta^*}{c u^2(\theta^*)} = \frac{1}{c} \int_0^\theta r^2(\theta^*) d\theta^* = \frac{c^3}{k^2} \int_0^\theta \frac{1}{(1 + e \cos \theta^*)^2} d\theta^* = \\ &= 2 \frac{c^3}{k^2} \frac{e \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{e^2 - 1} - \left(1 + e + \tan^2 \frac{\theta}{2} - e \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) \operatorname{arctanh} \left[ \frac{(e-1) \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{e^2 - 1}} \right]}{(e^2 - 1)^{3/2} \left(1 + e + \tan^2 \frac{\theta}{2} - e \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Comme les orbites des planètes ont souvent une excentricité très petite, et donc, par la deuxième loi de Kepler, le mouvement est presque circulaire uniforme, il est naturel d'associer au mouvement de  $p$  celui d'un point fictive  $q$ , qui parcourt de mouvement circulaire uniforme le cercle, coplanaire et concentrique de l'orbite elliptique, de rayon égal à  $a$ , et tel que  $p$  et  $q$  passent au même instant par les deux points, communs aux deux trajectoires, sur le grand axe de l'ellipse, voir la figure 7.14.

Si  $\tau$  est la période des deux mouvements, égale par construction, la vitesse angulaire constante de  $q$  est

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau},$$

et comme, voir le paragraphe précédent,

$$\pi a b = \frac{1}{2} c \tau,$$

et par la troisième loi de Kepler, on a aussi

$$\omega = \frac{c}{a b} = \sqrt{\frac{k}{a^3}}.$$

En se rapportant au schéma de la figure 7.14, il est

$$\begin{aligned} x_1 &= x - e a = a \cos \alpha - e a, \\ x_2 &= y = b \sin \alpha. \end{aligned}$$

Durant le mouvement keplerien de  $p$ ,  $\alpha$  sera une fonction du temps, que nous voulons caractériser. Dans ce but, par l'intégrale première des aires, on a

$$\begin{aligned} c &= r^2 \dot{\theta} = (x_1^2 + x_2^2) \left( \arctan \frac{x_2}{x_1} \right)' = \dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2 = \\ &= \dot{\alpha} a b (1 - e \cos \alpha) = a b (\alpha - e \sin \alpha)', \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d(\alpha - e \sin \alpha)}{dt} = \frac{c}{a b} = \omega .$$

L'intégrale de cette équation différentielle est l'équation de Kepler

$$\alpha - e \sin \alpha = \omega(t - t_0),$$

qui lie l'angle  $\alpha$ , qui détermine la position de  $p$ , et l'angle  $\omega(t-t_0)$ , qui est l'angle que  $p$  parcourt en moyenne durant le temps  $t-t_0$ , et qui est aussi l'angle parcouru par le point fictif  $q$ . Pour les planètes qui ont une faible excentricité, comme par exemple la Terre ( $e= 0.17$ ), il est avec une bonne approximation

$$\alpha \cong \omega(t - t_0) .$$

#### 7.14 LE PROBLEME DES DEUX CORPS

On appelle *problème des deux corps* l'analyse du mouvement relatif de deux points matériels  $p_1$  et  $p_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$ , qui interagissent entre eux et qui ne sont pas soumis à l'action d'autres forces. La solution de ce problème est due à Newton : par rapport à un observateur galiléen, il est

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{p}_1 &= \mathbf{f}_1^2, \\ m_2 \ddot{p}_2 &= \mathbf{f}_2^1, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{f}_i^j$  est la force que le point  $j$  exerce sur le point  $i$  ; naturellement, par le troisième principe de Newton,

$$\mathbf{f}_2^1 = -\mathbf{f}_1^2 ,$$

et si on remplace cette relation dans les équations ci-dessus et on les additionne, on a

$$m_1 \ddot{p}_1 + m_2 \ddot{p}_2 = (m_1 \dot{p}_1 + m_2 \dot{p}_2)' = \mathbf{0} .$$

Cette équation exprime la conservation de la quantité du mouvement du système, qui est par hypothèse un système isolé ; comme on verra dans le paragraphe 9.6, cette condition comporte que le barycentre du système se déplace avec mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'observateur galiléen choisi (et à tout autre galiléen).

Si maintenant on écrit les deux équations comme

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 &= \frac{1}{m_1} \mathbf{f}_1^2, \\ \ddot{p}_2 &= -\frac{1}{m_2} \mathbf{f}_1^2, \end{aligned}$$

et on soustrait la deuxième de la première, on a

$$\ddot{p}_1 - \ddot{p}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{f}_1^2 ;$$

si on pose alors

$$\mathbf{r} = p_1 - p_2$$

et

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

quantité appelée *masse réduite*, on a tout de suite l'équation

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_1^2.$$

Cette relation est formellement identique à la loi de Newton

$$m \mathbf{a} = \mathbf{f},$$

à la différence qu'elle est écrite pour un observateur accéléré, et donc non inertiel,  $p_2$ . On a ainsi trouvé un résultat surprenant : dans le problème des deux corps tout se passe comme si chaque point était un observateur inertiel. La "non-inertialité" du problème est en fait complètement prise en charge par la masse réduite, voire, si on veut analyser le mouvement relatif de  $p_1$  par rapport à  $p_2$  (ainsi que de  $p_2$  par rapport à  $p_1$ ), on peut continuer à utiliser la loi de Newton, pourvu qu'à la place de la masse on considère la masse réduite.

Si la force  $\mathbf{f}_1^2$  ne dépend que de la distance entre  $p_1$  et  $p_2$ , alors le mouvement relatif est central, avec le point  $p_2$  qui joue le rôle de source de force. Si en plus la force d'interaction dépend d'un potentiel newtonien, le problème des deux corps se réduit au problème de Kepler.

### 7.15 LA LOI DE GRAVITATION UNIVERSELLE

On a déjà introduit cette loi au paragraphe 6.3 : la force d'interaction gravitationnelle entre deux corps  $C_1$  et  $C_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$  est

$$\mathbf{f}_1^2 = -\mathbf{f}_2^1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e},$$

où  $\mathbf{e}$  est le vecteur unitaire dirigé de  $C_1$  vers  $C_2$ . Celle-ci est donc l'expression de la force pour le problème des deux corps où on a une interaction gravitationnelle, comme c'est le cas pour les corps célestes. Ainsi, le mouvement relatif d'un astre par rapport à un autre peut être étudié avec la méthode des deux corps et, comme la force admet évidemment un potentiel newtonien, voir ci de suite, les résultats du problème de Kepler seront valables, en particulier ses trois lois. En définitive celles-ci sont une conséquence de la loi de gravitation universelle.

Toutefois, ces trois lois ne sont valables, pour les planètes, qu'en voie approximée : en fait, dans les hypothèses du problème des deux corps il y a celle de l'absence d'autres forces. Cela n'est pas vrai pour les astres, qui sont bien plus nombreux de deux, et qui interagissent de façon gravitationnelle entre eux. Cependant, l'étude du mouvement d'un astre par rapport à un autre peut toujours se faire avec la méthode des deux corps, dans l'hypothèse que l'action des autres corps célestes soit négligeable. Un simple regard à la structure de la loi de gravitation universelle suffit à montrer que cette condition est remplie par les corps "distants", parce que la valeur de la force gravitationnelle diminue avec le carré de la distance  $r$  entre les deux corps, donc assez rapidement, de telle sorte que souvent on peut se borner à considérer seulement l'action de l'astre le plus proche.

Dans le cas du système solaire, on peut se limiter, dans l'analyse du mouvement d'une planète, à considérer la seule action du Soleil, car, même si parfois plus distant d'autres planètes, il a une masse bien plus grande de toutes les planètes, et donc son action dépasse toutes les autres (à titre indicatif, la masse du Soleil est environ 1000 fois la masse de tous les autres corps célestes du système solaire pris tous ensemble). Les trois lois de Kepler sont donc suivies par les planètes du système solaire avec une très grande approximation.

Pour la troisième loi on a aussi une interprétation supplémentaire : en fait, pour un problème de deux corps avec interaction gravitationnelle, il est

$$\varphi(r) = \frac{1}{\mu} f(r) = -G \frac{m_1 m_2}{\mu r^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^2},$$

et donc

$$U(r) = G \frac{m_1 + m_2}{r},$$

qui est bien un potentiel newtonien, avec

$$k = G(m_1 + m_2).$$

Dans le cas du système solaire,  $m_1$  est la masse  $m_p$  d'une planète et  $m_2$  celle du Soleil,  $m_s$ . La troisième loi de Kepler devient alors

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_s + m_p)}.$$

Or, on a vu que la masse de chaque planète est largement négligeable par rapport à celle du Soleil, et donc pour les planètes du système solaire on peut dire que

$$\frac{\tau^2}{a^3} \cong \frac{4\pi^2}{G m_s},$$

voire que le rapport  $\tau^2/a^3$  est une constante pour toutes les planètes, et donc une caractéristique du système solaire même. Kepler avait énoncé de cette façon sa troisième loi, à la suite de nombreuses observations faites par lui-même et par l'astronome danois T. Brahe.

## FORCES DISSIPATIVES

## 8.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre 6 on a abordé le problème général de la dynamique du point, et on a examiné les différents types de forces qu'on rencontrera le plus souvent dans la suite du cours. En particulier, on s'est occupés de la définition et des propriétés des forces conservatives ; un cas particulièrement important de celles-ci, celui d'une force centrale, a été ensuite traité au chapitre 7.

Dans ce chapitre on veut introduire un type particulier de forces non conservatives, les *forces dissipatives* : une force est dissipative si la puissance de la force même est toujours négative, pour tout mouvement possible de son point d'application. Si on se rappelle le théorème de la puissance, et si on suppose que les forces agissantes sur le point puissent se distinguer en forces conservatives, de puissance  $W_c$ , et forces dissipatives, de puissance  $W_d$ , on a

$$\dot{T} = W_c + W_d ;$$

mais, voir aussi le paragraphe 6.6, pour ce qui concerne les forces conservatives on peut écrire que

$$W_c = \nabla U \cdot \mathbf{v} = \nabla U \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{U} = -\dot{V},$$

étant  $U$  le potentiel et  $V$  l'énergie potentielle des forces conservatives. Donc on a

$$\dot{T} + \dot{V} = W_d,$$

et en se rappelant que  $E$ , énergie mécanique totale du système, est la somme de  $T$  et de  $V$ , ainsi que la définition de force dissipative, on a finalement

$$\dot{E} < 0.$$

Donc l'énergie totale du système décroît, se dissipe au fil du temps par la présence de ces forces, qui prennent d'ici le nom de forces dissipatives. C'est alors évident que, pour garder constant le niveau d'énergie du système, il faut ajouter un terme de puissance égale à  $W_d$ , mais positif, de telle sorte à rendre nulle la dérivée de  $E$ . Il faut donc faire un travail positif sur le système, c'est à dire lui fournir de l'énergie de l'extérieur.

En nature, les forces dissipatives sont de différente nature, mais dans la suite on ne s'occupera que de trois types de forces dissipatives: les forces de frottement entre solides, la résistance au roulement et les forces d'amortissement. D'autres formes de dissipation sont dues par exemple à la résistance du milieu fluide dans lequel il se produit le mouvement ou encore aux caractéristiques intrinsèques d'un matériau déformable.

## 8.2 FROTTEMENT

Le frottement est un phénomène qui se produit toujours lorsque deux corps solides entrent en contact et que les forces d'interaction ont une composante sur les plans tangents aux points à contact. La nature du frottement est dans le contact même entre les deux corps : ce contact se

produit sur des surfaces qui ont un certain degré de rugosité, et les micro aspérités, qui dépendent de l'état des deux surfaces, s'opposent aux mouvements relatifs. Ce phénomène peut se représenter par une force qui s'explique en correspondance de la surface de contact, la *force de frottement*, qui a la caractéristique d'être une action qui s'oppose toujours aux déplacements mutuels des deux corps.

Une expérience classique peut mettre en évidence le phénomène du frottement et ses particularités : considérons un bloc de masse  $m$ , appuyé à repos sur un plan, et poussé contre celui-ci par une force  $\mathbf{N}$ , orthogonale au plan même. Appliquons maintenant, par l'intermédiaire d'un ressort de constante élastique  $k$  connue, une force  $\mathbf{T}$  parallèle au plan, voir la figure 8.1.

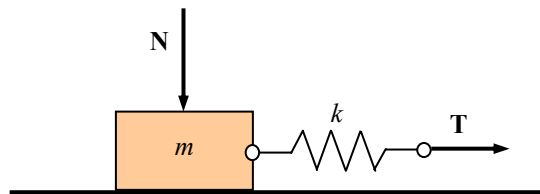


Figure 8.1

Par le deuxième principe de Newton, le bloc devrait se mettre en mouvement à la suite de l'application de la force  $\mathbf{T}$ ; toutefois, on observe que cela ne se produit qu'après que cette force n'a atteint une certaine valeur minimale, mesurable par la déformation du ressort. L'expérience montre que cette valeur dépend de l'état des surfaces à contact et de la force  $\mathbf{N}$ : en particulier, cette valeur minimale augmente si  $\mathbf{N}$  s'accroît et si les surfaces sont, pour le même matériau, rugueuses.

Ces résultats expérimentaux se résument dans la *loi de Coulomb* : l'équilibre est garanti si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$T \leq \nu_s N .$$

Naturellement,  $T$  est la norme de la force tangentielle et  $N$  celle de la force normale à la surface de contact. Le coefficient adimensionnel  $\nu_s$  est la *coefficient de frottement statique*. Selon Coulomb, ce coefficient ne dépend que de la nature, de la température et de l'état surfacique des deux corps et pas, par exemple, de la force  $\mathbf{N}$  ni des dimensions de la zone de contact. La loi de Coulomb donc est un modèle mathématique qui décrit un phénomène macroscopique avec un certain degré d'approximation, souvent acceptable dans les cas courants. Toutefois, dans certains problèmes particuliers, cette loi donne des résultats insatisfaisants et il faut s'adresser à des modèles qui représentent plus finement le frottement.

Il faut remarquer la structure de la loi de Coulomb: c'est une relation en forme d'inégalité, et donne seulement la valeur limite de la force tangentielle, valeur qui marque le passage entre l'équilibre et le mouvement. Cela signifie qu'il existe, à cause du frottement, une force tangentielle égale et contraire à la force  $\mathbf{T}$  appliquée, et qui l'équilibre jusqu'à ce que  $\mathbf{T}$  respecte la limite imposée par la loi de Coulomb, après quoi on a le début du mouvement: c'est la *force de frottement statique*.

On peut donner une interprétation géométrique de la loi de Coulomb: la résultante  $\mathbf{R}$  entre  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{N}$  forme un angle  $\varphi$  avec l'axe vertical, voir figure 8.2, tel que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T}{N} ;$$

à la condition limite de glissement, grâce à la loi de Coulomb, on a la valeur maximale  $\varphi_s$  de cet angle, correspondant aux valeurs limite de  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{N}$  :

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \left( \frac{T}{N} \right)_{\text{lim}} = \nu_s.$$

Donc on aura l'équilibre si

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \varphi_s,$$

voire jusqu'à ce que

$$\varphi \leq \varphi_s.$$

Si alors on définit *cône de frottement* le cône avec axe vertical et demi-ouverture  $\varphi_s$ , la condition d'équilibre correspond au fait que la résultante  $\mathbf{R}$  reste à l'intérieur de ce cône.

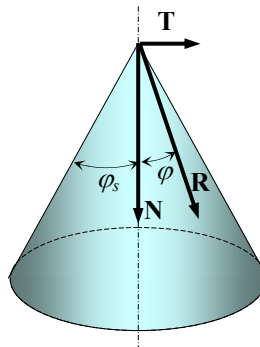


Figure 8.2

Ainsi que  $\nu_s$ , l'angle  $\varphi_s$  aussi ne dépend que des caractéristiques des surfaces à contact, et pas des forces appliquées; comme normalement, pour les matériaux de plus fréquent usage, il est  $\nu_s < 1$ , généralement  $\varphi_s < \pi/4$ , angle qui peut se considérer comme une valeur limite.

Une fois que la valeur limite du rapport  $T/N$  a été atteinte, voire une fois que la résultante  $\mathbf{R}$  est sortie du cône de frottement, l'équilibre n'est plus possible, et le bloc commence à glisser. L'expérience montre alors que pour garder un mouvement à vitesse constante, il faut continuer à appliquer une force tangentielle, dont la valeur, pour une même force normale  $\mathbf{N}$ , est toutefois plus petite de celle nécessaire à faire démarrer le bloc. En outre, si on enlève cette force tangentielle, le bloc s'arrêtera après un certain temps. Cela signifie que pendant son mouvement le bloc est soumis à l'action d'une force résistante  $\mathbf{T}_g$ , égale et contraire à la force nécessaire à le garder en mouvement à vitesse constante, et qui a une valeur inférieure à celle de la force limite de frottement statique, pour une même valeur de la force normale appliquée et pour le même état des surfaces à contact. Cette force résistante est la *force de frottement par glissement*. Compte tenu que cette force est toujours dirigée en sens contraire à celui d'avancement, le modèle mathématique proche de la loi de Coulomb qui modélise le phénomène du frottement par glissement est le suivant

$$\mathbf{T}_g = -\nu_g N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\nu_g N \boldsymbol{\tau},$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse du corps, et  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur tangent à la trajectoire; on remarque que dans ce modèle, la force de frottement ne dépend pas de la norme de la vitesse. Le paramètre non dimensionnel  $\nu_g$  est le *coefficient de frottement par glissement*; il a la même origine que  $\nu_s$ , mais, pour ce qu'on vient de dire, valeurs plus petites; dans le tableau 8.1 on montre des valeurs caractéristiques des coefficients de frottement.

Si la surface de contact est lubrifiée, les coefficients de frottement statique diminuent beaucoup, en fonction de différents paramètres, comme par exemple le type de lubrifiant; à titre d'exemple, le



coefficient de frottement pour le contact gomme/asphalte, en présence d'eau, chute à  $0,2 \div 0,5$ , ce qui correspond à un angle de frottement compris entre  $11^\circ 3'$  et  $26^\circ 6'$ . Le frottement par glissement change totalement de nature en présence d'un lubrifiant, car dans ce cas le mouvement relatif comporte la déformation d'un film liquide: c'est la loi de Newton-Petrov qui gère le phénomène, loi qui ne sera pas traitée dans ce cours.

TYPE DE CONTACT	$\nu_s$	$\varphi_s$ (°)	$\nu_g$
Acier/acier	0.74	$36^\circ 5'$	0.57
Acier/glace	0.027	$1^\circ 5'$	0.014
Bois/pierre	0.7	$35^\circ$	0.3
Acier/verre	0.6	$31^\circ$	0.1
Teflon/teflon	0.04	$2^\circ 3'$	0.02
Gomme/asphalte	$0,8 \div 1$	$38^\circ 6' \div 45^\circ$	$0,7 \div 0,9$

Tableau 8.1

Il faut encore montrer que la force de frottement par glissement est une force dissipative : la puissance  $W_f$  de celle-ci, par la définition qu'on a donnée ci-dessus, sera

$$W_f = -\nu_g N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v} = -\nu_g N v,$$

quantité qui est toujours négative; par conséquent, la force de frottement par glissement est une force dissipative. En appliquant le bilan de l'énergie, voir le paragraphe précédent, on a

$$\frac{dE}{dt} = W_f,$$

voire

$$dE = W_f dt = -\nu_g N v dt = -\nu_g N ds.$$

La variation d'énergie à la suite d'un déplacement entre deux points aux abscisses  $s_1$  et  $s_2$  le long d'une trajectoire donnée sera donc

$$\Delta E = \int_{s_1}^{s_2} dE = \int_{s_1}^{s_2} -\nu_g N(s) ds,$$

d'où l'énergie mécanique totale après déplacement

$$E_2 = E_1 - \nu_g \int_{s_1}^{s_2} N(s) ds.$$

L'intégrale est sans doute positive, car la fonction, la norme de  $\mathbf{N}$ , l'est toujours ; ceci confirme que l'énergie mécanique totale non seulement ne se conserve pas, mais elle diminue le long du mouvement. La quantité

$$E_f = -\nu_g \int_{s_1}^{s_2} N(s) ds$$

est l'énergie mécanique dissipée par frottement ; cette énergie se transforme en une forme d'énergie non mécanique, la chaleur. Si on tient compte de cette forme d'énergie, on peut encore énoncer une conservation de l'énergie globale, mécanique plus la chaleur : il s'agit du *premier principe de la thermodynamique*, qui remplace l'intégrale première de l'énergie dans le domaine de la thermo-mécanique.

Dans le cas particulier où la norme de la force  $\mathbf{N}$  est constante, l'énergie dissipée par frottement est

$$E_f = -v_g N \int_{s_1}^{s_2} ds = -v_g N \ell ,$$

où  $\ell$  est la longueur de la courbe parcourue entre  $s_1$  et  $s_2$ .

### 8.3 LA RESISTANCE AU ROULEMENT

Un autre phénomène de dissipation de l'énergie est celui lié à la *résistance au roulement*. L'expérience suivante sert à le mettre en évidence: considérons un cylindre, de masse  $m$ , rayon  $R$  et hauteur  $h$ , appuyé sur un plan, avec une force normale de contact  $\mathbf{N}$  sur l'axe. Appliquons à l'axe du cylindre une force  $\mathbf{T}$  tangentielle au plan de roulement, par l'intermédiaire d'un ressort de constante élastique connue  $k$ , voir la figure 8.3.

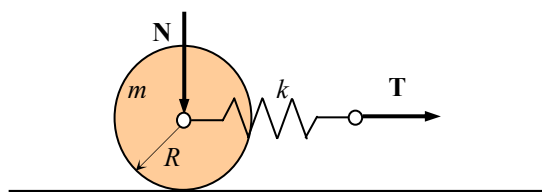


Figure 8.3

Dans ce cas aussi, on observe que le cylindre se met en mouvement seulement lorsque la force  $\mathbf{T}$  atteint une valeur minimale, mesurable par la déformation du ressort. Une fois le mouvement commencé, la vitesse d'avancement reste constante si la force continue à avoir la même valeur qu'au début du mouvement. Toutefois, généralement, cette force est assez plus petite de celle nécessaire à faire avancer un bloc qui glisse sous les mêmes conditions de vitesse, force normale et nature des corps.

Même si parfois ce phénomène est indiqué avec le nom de *frottement par roulement*, il ne s'agit pas vraiment d'un frottement : sa nature doit se rechercher dans la déformation des parties en contact. En effet, le contact entre le cylindre et le plan se produit, théoriquement, sur une génératrice du cylindre ; mais dans ce cas, la force mutuelle par unité de surface de contact devrait être infinie, ayant cette surface aire nulle. Cela est évidemment impossible: en réalité, les deux matériaux à contact se déforment en fonction de leurs caractéristiques et de la force  $\mathbf{N}$ , de telle sorte que le contact se produit sur une surface d'aire non nulle : cela ramène les forces surfaciques à des valeurs finies. Or, on peut observer que, lorsqu'on cherche de mettre en mouvement le corps, et lorsque le mouvement est déjà en cours, la résultante  $\mathbf{P}$  des réactions de contact, qui passe par le barycentre de la distribution des forces surfaciques, n'est plus centrée par rapport au centre d'instantanée rotation  $C$ , mais elle est décalée en avant de la quantité  $\delta$ .

C'est clair, alors, que pour mettre en mouvement le cylindre il faut appliquer une force  $\mathbf{T}$  qui ait un moment  $\mathbf{M}$  par rapport à  $C$  au moins égal, et contraire, au moment résistant  $\mathbf{M}_r$  dû à  $\mathbf{P}$  ; avec référence à la figure 8.4, et en considérant que pour des raisons évidentes  $\mathbf{P} = -\mathbf{N}$ , cela correspond à

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_r = \mathbf{0} \rightarrow R\mathbf{e}_y \wedge T\mathbf{e}_x + \delta\mathbf{e}_x \wedge N\mathbf{e}_y = \mathbf{0} ;$$

la condition limite de roulement est donc

$$-RT + \delta N = 0 \rightarrow T = \frac{\delta}{R} N .$$

Normalement, cette condition est écrite d'une façon différente, pour tenir compte du fait que le cylindre peut être mis en mouvement par une condition différente, notamment par l'application d'un couple à l'axe (dans l'équation ci-dessus le moment du couple est tout simplement  $TR$ ). On

préfère alors écrire la condition d'équilibre sous une forme semblable à la loi de Coulomb,

$$M \leq \mu N ,$$

où  $M$  est le moment du couple appliqué à l'axe de rotation,  $N$  est la force de contact et  $\mu$  le *coefficient de frottement par roulement*; ce coefficient, qui a les dimensions d'une longueur, coïncide avec  $\delta$ , et varie en fonction des caractéristiques élastiques des corps à contact : il est petit pour des corps peu déformables, alors qu'il augmente pour des corps souples. Par exemple, pour un contact acier/acier, il est de l'ordre de 0.5 mm, alors que pour le contact gomme/asphalte il varie entre 10 et 75 mm, en fonction de la pression de gonflage.

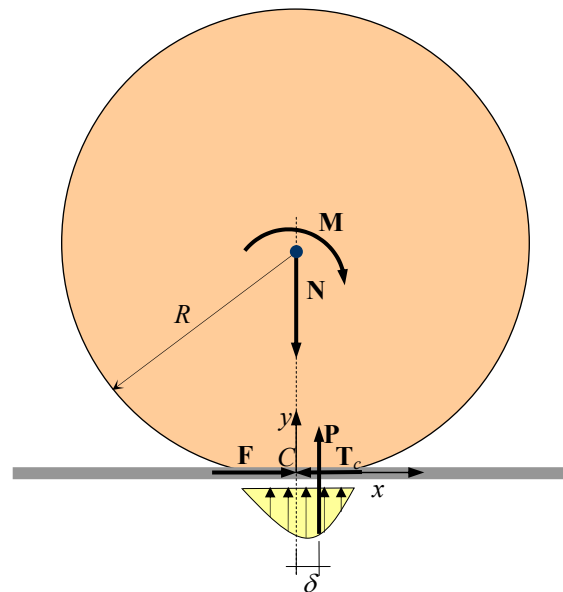


Figure 8.4

Comme pour le cas du frottement, le mouvement ne se produira qu'une fois atteinte la valeur minimale du couple,  $\mu N$ , mais, à la différence du frottement, il faudra garder cette valeur pour maintenir le cylindre à vitesse constante ; la valeur de  $\mu$  ne diminue en effet pratiquement pas entre le cas statique et celui dynamique.

Une fois le cylindre en mouvement, le couple résistant, toujours dirigé en sens contraire à la vitesse de rotation, sera

$$\mathbf{M}_r = -\mu N \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} .$$

Pour faire rouler le cylindre, il faut lui appliquer un couple moteur de moment égal au moins à  $\mathbf{M}_r$ , mais évidemment de sens contraire.

La diversité entre résistance au roulement et frottement se comprends encore mieux si l'on considère que le roulement sans glissement a besoin du frottement pour se produire; en fait, le cylindre ne glisse pas si la réaction de contact  $\mathbf{F}$  en direction du mouvement est supérieure ou à la limite égale à la force  $\mathbf{T}_c$ , tangentielle au contact, que la roue transmet à la surface, voir la figure 8.4. Mais cette réaction  $\mathbf{F}$  n'est due qu'au frottement statique. La condition de non-glissement est donc celle donnée par la loi de Coulomb :

$$T_c \leq \nu_s N ;$$

en passant au couple appliqué, voire au cas d'une roue motrice, on n'aura pas de glissement si

$$M \leq \nu_s N R ,$$

d'où on voit bien que le roulement sans glissement ne peut se produire que grâce au frottement statique. D'ailleurs, pour que le roulement se produise, il faut que

$$M \geq \mu N ;$$

les deux conditions réunies donnent alors

$$\mu \leq \frac{M}{N} \leq v_s R ,$$

qui est la condition recherchée, de roulement sans glissement : si la première inéquation n'est pas respectée, alors on n'aura pas de mouvement, alors que si on ne respecte pas la deuxième, on aura glissement de la roue. Dans le cas d'une roue traînée par une force  $T$ , avec la même démarche on trouve la condition

$$\frac{\mu}{R} \leq \frac{T}{N} \leq v_s .$$

A remarquer que si

$$\mu > v_s R$$

on aura toujours glissement de la roue, dans les deux cas.

Le caractère de phénomène non conservatif de la résistance au roulement est vite démontré : si on calcule la puissance  $W_r$  relative au couple résistant, on a

$$W_r = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\mu N \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\mu N \omega ,$$

quantité toujours négative. En procédant comme pour la force de frottement, on trouve aisément la dissipation d'énergie pour un déplacement entre deux points aux abscisses  $s_1$  et  $s_2$  le long d'une trajectoire donnée :

$$\Delta E = -\mu \int_{s_1}^{s_2} N(s) d\alpha ,$$

où  $\alpha$  est l'angle de rotation de la roue. La condition cinématique de roulement sans glissement est d'ailleurs

$$d\alpha = \frac{ds}{R}$$

d'où l'énergie mécanique totale après déplacement

$$E_2 = E_1 - \frac{\mu}{R} \int_{s_1}^{s_2} N(s) ds .$$

L'intégrale ci-dessus est encore positive, ce qui confirme que l'énergie mécanique totale diminue. Si  $\mathbf{N}$  est constante, alors l'énergie dissipée pour aller de  $s_1$  à  $s_2$ , distant  $\ell_{12}$ , est

$$E_f = -\frac{\mu}{R} N \ell_{12} .$$

A remarquer que, si le frottement statique est indispensable pour avoir un roulement sans glissement, il n'est toutefois responsable de la dissipation d'énergie, qui est entièrement due au couple résistant.

## 8.4 L'AMORTISSEMENT

Le phénomène de l'*amortissement* est lié à la dissipation d'énergie par déformation ; même les corps élastiques ont un certain degré d'amortissement. La raison de ce phénomène doit être recherchée dans le comportement microscopique du matériau. Un modèle macroscopique souvent utilisé pour étudier le phénomène de l'amortissement est celui de l'*amortisseur*. Ce dispositif est réalisé par un cylindre à l'intérieur duquel peut glisser un piston du même diamètre, dans lequel on a percé des petits trous, qui permettent à un fluide de passer d'une chambre à l'autre du cylindre, voir la figure 8.5.

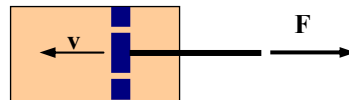


Figure 8.5

L'expérience montre l'existence d'une force  $\mathbf{F}$  qui s'oppose à tout déplacement du piston, de valeur proportionnelle à la vitesse de déplacement  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{F} = -c \mathbf{v} .$$

La constante  $c$  est nommée *amortissement*; elle a les dimensions d'une masse sur un temps, et elle dépend, pour le dispositif décrit ci-dessus, des caractéristiques géométriques du dispositif même et des propriétés physiques du fluide, notamment de sa viscosité. C'est pour ça que le modèle d'amortissement introduit ici est appelé souvent *amortissement visqueux*. Plus en général, dans le cas de l'amortissement propre à un matériau déformable donné, la constante  $c$  est une caractéristique du matériau même. Il faut remarquer que, à la différence du frottement, la force d'amortissement dépend de la vitesse de déplacement : pour des déplacements rapides, cette force est élevée, alors qu'elle est petite dans le cas contraire.

La nature dissipative de l'amortissement est évidente : si on calcule la puissance  $W_a$  relative à cette force on trouve

$$W_a = -c \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -c v^2 ,$$

qui, étant  $c$  un coefficient positif, est évidemment une quantité toujours négative. La dissipation d'énergie sera donc donnée par

$$\Delta E = -c \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt .$$

La présence de l'amortissement est très importante dans les phénomènes vibratoires, parce que c'est la condition qui permet l'extinction du mouvement, qui autrement se poursuivrait indéfiniment, voir le chapitre 17.

Dans le cas d'un corps qui se déplace dans un milieu fluide, l'amortissement est toujours présent, mais ce n'est pas toujours possible de le réduire à une force du type introduit ici : cela dépend essentiellement des caractéristiques de l'écoulement.

## DYNAMIQUE DES SYSTEMES DISCRETS

### 9.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre 6 on a introduit les principes de la dynamique classique, et on a trouvé, sur la base de ceux-ci, les théorèmes fondamentaux de la dynamique pour le cas d'un point matériel. Dans ce chapitre on passe à l'étude de la dynamique d'un système composé par plusieurs points matériels, un système discret. Un *système matériel discret* est un ensemble fini de points matériels :

$$S = \{(p_i, m_i) : p_i \in \mathcal{E}, m_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

En particulier, dans ce cas il faut considérer la présence des forces internes, c'est à dire des forces d'interaction mutuelle entre les particules qui composent le système.

### 9.2 FORCES INTERNES

Pour chaque point du système, la résultante des forces internes peut s'écrire

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_i^j,$$

où  $\mathbf{f}_i^j$  est la force exercée sur le point  $p_i$  par le point  $p_j$ . Cette formule implique un *principe de superposition des actions* ; en particulier, on admet que,  $\forall i, j = 1, \dots, n$  :

a.  $\mathbf{f}_i^j + \mathbf{f}_j^i = \mathbf{0}$  ;

b.  $(p_i - p_j) \wedge \mathbf{f}_i^j = \mathbf{0}$  ;

c. l'interaction de chaque point avec les autres est la somme vectorielle de l'interaction du point avec chacun des autres, pris à eux seuls.

Ces trois propriétés constituent l'extension du troisième principe de Newton aux systèmes de points, indépendamment de la nature de la force, active ou réactive. Ces propriétés ont une conséquence très importante: le système des forces internes est équilibré. En fait, en ce qui concerne la résultante des forces, on a que

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_i^j ;$$

d'ailleurs, dans la dernière expression on peut, par symétrie, échanger les indices  $i$  et  $j$  et écrire :

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_j^i,$$

et donc par la propriété a,

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^j = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_i^j = -\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = -\mathbf{R}_{\text{int}} \Rightarrow \mathbf{R}_{\text{int}} = \mathbf{o}.$$

Il faut encore montrer que le moment résultant des forces internes, par rapport au point  $o$  est nul (et comme la résultante est nulle, le moment sera nul par rapport à tout autre point) :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{o_{\text{int}}} &= \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_i^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{f}_i^j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ (p_i - p_j) \wedge \mathbf{f}_i^j + (p_j - o) \wedge \mathbf{f}_i^j \right] \end{aligned}$$

le premier terme entre crochets est nul par la propriété b, et en utilisant encore la symétrie des indices, ainsi que la propriété a, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{o_{\text{int}}} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{f}_j^i = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{f}_i^j = -\sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_i^j = \\ &= -\sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{f}_i = -\mathbf{M}_{o_{\text{int}}} \Rightarrow \mathbf{M}_{o_{\text{int}}} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

### 9.3 LES EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT POUR UN SYSTEME DISCRET

Soient  $\mathbf{f}_i$  et  $\mathbf{F}_i$  respectivement la résultante des forces internes et externes agissantes sur le point  $p_i$ , de masse  $m_i$ , appartenant au système discret  $S$  ; alors, dans un galiléen, les équations du mouvement de tout point  $p_i$  sont

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i ;$$

celles-ci sont les  $n$  équations différentielles vectorielles, correspondantes à  $3n$  équations scalaires, du deuxième ordre qui, avec les  $2n$  conditions initiales vectorielles ( $6n$  conditions scalaires) gèrent le mouvement du système. Il apparaît clair, donc, que la solution d'un tel problème est extrêmement complexe, et en général il est impossible d'obtenir une solution en forme analytique. C'est pour cela qu'on introduit certaines grandeurs qui facilitent souvent la tâche, dans le but d'avoir au moins des indications en moyenne sur le mouvement d'un système.

### 9.4 QUANTITE DE MOUVEMENT

Le vecteur

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$$

est dit *quantité de mouvement* du système. Dans cette expression,  $\mathbf{v}_i$  est la vitesse du point  $p_i$ , par rapport à un repère inertiel :

$$\mathbf{v}_i = (p_i - o)' = \dot{p}_i.$$

Soit  $C$  le barycentre du système, ainsi qu'il sera défini dans le paragraphe 10.2 ; alors, on peut exprimer sa vitesse absolue comme

$$\mathbf{v}_C = (C - o)' = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (p_i - o)'}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{m} = \frac{\mathbf{Q}}{m},$$

et donc

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_C.$$

La quantité de mouvement est donc un vecteur proportionnel à la vitesse du barycentre. En outre,

$$\dot{\mathbf{Q}} = m\dot{\mathbf{v}}_C = m\mathbf{a}_C.$$

### 9.5 MOMENT DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Soit  $o$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$  ; alors le vecteur

$$\mathbf{K}_o = \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

est dit *moment de la quantité de mouvement* du système, par rapport au point  $o$ . Il faut remarquer qu'en général  $o$  est en mouvement par rapport à un observateur inertiel, et que pas forcément, si  $o$  est immobile, il coïncide avec l'origine du repère. Avec la même technique vue pour le changement de pôle du moment résultant d'un système de vecteurs appliqués, voir paragraphe 2.1, on montre que le moment de la quantité de mouvement par rapport à un autre point  $o'$  est donné par

$$\mathbf{K}_{o'} = \mathbf{K}_o + (o - o') \wedge \mathbf{Q}.$$

Cherchons à présent la dérivée temporelle de  $\mathbf{K}_o$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_o &= \sum_{i=1}^n [(p_i - o) \wedge m_i \mathbf{v}_i]' = \sum_{i=1}^n (p_i - o)' \wedge m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^n \dot{o} \wedge m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge m_i \mathbf{a}_i; \end{aligned}$$

mais le premier terme est nul parce que  $\dot{p}_i = \mathbf{v}_i$ , et finalement

$$\dot{\mathbf{K}}_o = -m\mathbf{v}_o \wedge \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge m_i \mathbf{a}_i.$$

Le second membre dans la relation ci-dessus se réduit au seul deuxième terme dans les cas suivants :

- $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire dans le cas de pôle de réduction des moments immobile ;
- $o = C$ , c'est-à-dire si le pôle coïncide avec le barycentre du système ;
- $\mathbf{v}_C = \alpha \mathbf{v}_o$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire le pôle qui se déplace parallèlement au barycentre.

Dans tous les autres cas il faut utiliser la formule entière, qu'on peut réécrire comme

$$\dot{\mathbf{K}}_o = \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{v}_o \wedge \mathbf{Q}.$$

Considérons maintenant un observateur relatif particulier, celui qui se déplace sans tourner avec la vitesse du barycentre ; alors,  $\forall p_i$ ,



$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i,$$

et donc

$$\mathbf{K}_C = \sum_{i=1}^n (p_i - C) \wedge m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n (p_i - C) \wedge m_i \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^n (p_i - C) \wedge m_i \mathbf{v}'_i,$$

mais étant le premier terme nul, voir le paragraphe 10.2, on a que

$$\mathbf{K}_C = \sum_{i=1}^n (p_i - C) \wedge m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{K}'_C,$$

où  $\mathbf{K}'_C$  est le moment de la quantité de mouvement mesuré par l'observateur relatif. Le résultat est donc que  $\mathbf{K}_C$  est le même pour les deux observateurs, absolu et relatif.

## 9.6 EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES SYSTEMES

Si l'on considère tous les points d'un système, on a (avec  $\mathbf{f}_i$  on indique la résultante des forces internes agissantes sur le point  $p_i$ , et avec  $\mathbf{F}_i$  la résultante de celles externes)

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

et comme le système des forces internes est équilibré, le premier terme à deuxième membre est nul ; en se souvenant ensuite que

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{Q}} = m \mathbf{a}_C,$$

l'équation ci-dessus peut être réécrite comme

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^e,$$

où  $\mathbf{R}^e$  est la résultante des forces externes. Cette relation est connue comme *théorème du mouvement du barycentre*. Il faut remarquer que si le système est soumis à des actions externes à résultante nulle, le barycentre se déplace de mouvement rectiligne uniforme par rapport à un galiléen ou il est immobile.

Ensuite, si  $o$  est un pôle quelconque,

$$\sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{F}_i;$$

le premier terme à deuxième membre est nul, étant le moment résultant des forces internes. En outre, par l'expression de la dérivée du moment de la quantité de mouvement

$$\sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge m_i \mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{K}}_o + \mathbf{v}_o \wedge \mathbf{Q},$$

et donc si on appelle  $\mathbf{M}_o^e$  le moment résultant des forces externes par rapport au pôle  $o$ ,

$$\mathbf{M}_o^e = \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{F}_i,$$

on a finalement

$$\dot{\mathbf{K}}_o + \mathbf{v}_o \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_o^e.$$

Cette expression, connue sous le nom de *théorème du moment de la quantité de mouvement*, et le théorème du mouvement du barycentre constituent les *équations fondamentales de la dynamique des systèmes*. Elles représentent des conditions nécessaires du mouvement, mais en général elles ne sont pas suffisantes à déterminer complètement le mouvement de chaque point. Toutefois, pour un mouvement rigide, elles sont aussi des conditions suffisantes, c'est-à-dire que dans un tel cas les deux équations ci-dessus sont capables de déterminer complètement le mouvement de chaque point du système. C'est donc toujours le cas pour un corps rigide, comme on verra dans le détail au cours du chapitre 11.

A remarquer que dans l'une des trois hypothèses vues pour la dérivée de  $\mathbf{K}_o$ , la dernière équation se réduit à

$$\dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{M}_o^e.$$

Finalement, si un système est en équilibre les vitesses et les accélérations de tout point sont nulles, et donc les deux équations précédentes deviennent

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{o},$$

$$\mathbf{M}_o^e = \mathbf{o},$$

qui constituent les deux *équations fondamentales de la statique des systèmes*.

### 9.7 THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

L'énergie cinétique d'un système matériel est définie comme (on applique la convention d'Einstein sur la somme dans ce qui suit)

$$T = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

En opérant de la même façon qu'au paragraphe 6.5, on obtient d'abord la variation temporelle de  $T$

$$\dot{T} = \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i) = m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i ;$$

d'ailleurs,

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i}{m_i} \quad \forall p_i,$$

et donc

$$\dot{T} = m_i \frac{\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = W^i + W^e ,$$

où on a indiqué avec  $W^i$  et  $W^e$  respectivement la puissance totale des forces internes et externes. Si

$$W = W^i + W^e$$

est la puissance totale des forces, internes et externes, on a finalement le *théorème de l'énergie cinétique* ou *de la puissance*,

$$\dot{T} = W .$$

Ce théorème affirme que la puissance totale des forces agissantes sur un système matériel équivaut à la variation de l'énergie cinétique du système même ; la différence par rapport au cas d'un seul point matériel est qu'ici, dans le calcul de la puissance, il faut considérer aussi la puissance des forces internes, qui, dans le cas général, n'est pas nulle.

Toutefois, si le mouvement est rigide, la puissance des forces internes est nulle (propriété qui est donc toujours vraie pour un corps rigide). Dans ce cas la puissance se réduit au seul terme des forces externes. Montrons cette propriété : dans le cas d'un mouvement rigide, on a vu que, voir le paragraphe 4.6,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i,$$

et donc la puissance totale des forces internes peut être écrite comme

$$W^i = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{f}_i = \mathbf{v}_o \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{f}_i$$

Dans la dernière expression, le premier terme est nul parce que la résultante des forces internes est nulle. Ensuite, en appliquant la propriété du produit mixte, voir paragraphe 1.15, on peut écrire

$$W^i = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{f}_i \cdot \boldsymbol{\omega} = \left[ \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{f}_i \right] \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{o_{\text{int}}} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

et comme le moment résultant des forces internes  $\mathbf{M}_{o_{\text{int}}}$  est nul, on a finalement

$$W^i = 0,$$

comme on avait annoncé. Celle-ci est une propriété importante du corps rigide, et plus en général de tout système, discret ou continu, en mouvement rigide.

## 9.8 INTEGRALE PREMIERE DE L'ENERGIE

Montrons à présent comme l'intégrale première de l'énergie soit valable pour les systèmes, pourvu que les trois hypothèses suivantes soient satisfaites (dans la suite,  $\mathbf{F}_i^a$  et  $\mathbf{F}_i^r$  sont respectivement la résultante des forces externes actives et réactives agissantes sur le point  $p_i$ , et on applique la sommation d'Einstein) :

a. toutes les forces actives externes sont conservatives :

$$\mathbf{F}_i^a = \nabla U_i;$$

b. les forces réactives externes ont puissance nulle (c'est-à-dire que les réactions externes ne font pas de travail mécanique) :

$$\mathbf{F}_i^r \cdot \mathbf{v}_i = 0;$$

c. la puissance des forces internes est nulle :

$$W^i = 0.$$

On peut remarquer qu'on a ici une hypothèse supplémentaire, par rapport au cas d'une seule particule, concernant la nature des forces internes. Cette hypothèse, pour ce qu'on vient de démontrer au paragraphe précédent, est toujours vérifiée pour un corps rigide ; pour ce type de corps l'intégrale première de l'énergie est donc valable, pourvu que les deux autres hypothèses ci-dessus soient satisfaites. En réalité cette troisième hypothèse n'est pas strictement nécessaire pour

la validité de l'intégrale première de l'énergie, qui reste valable aussi dans le cas où les forces internes ont une puissance non nulle, pourvu qu'elles aussi soient conservatives. C'est le cas par exemple des solides élastiques ; nous ne traiterons pas ce cas, qui est plutôt le sujet d'un cours de mécanique des milieux continus, et on se bornera donc aux problèmes relatifs aux systèmes à puissance interne nulle.

Par le théorème de l'énergie cinétique et dans les trois hypothèses ci-dessus, on a donc

$$\begin{aligned}\dot{T} &= W^i + W^e = W^e = \mathbf{F}_i^a \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_i^r \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{F}_i^a \cdot \mathbf{v}_i = \\ &= \nabla U_i \cdot \mathbf{v}_i = \nabla U_i \cdot \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{dU}{dt} = \dot{U},\end{aligned}$$

où

$$U = \sum_{i=1}^n U_i$$

est le *potentiel total* ; en procédant comme pour une seule particule, on arrive au résultat cherché

$$\dot{T} = \dot{U} \Rightarrow (T - U)' = 0 \Rightarrow T - U = T + V = E = \text{const.}$$

### 9.9 THEOREME DE KÖNIG

On a déjà vu, au paragraphe 9.5, ce qu'il se passe pour le moment de la quantité de mouvement si l'on considère un repère qui se déplace, sans tourner, avec la vitesse du barycentre. Voyons à présent comment l'énergie cinétique se transforme dans le même cas :

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_C^2 + 2\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}'_i{}^2) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^2 + \mathbf{v}_C \cdot \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{p}_i - C) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i{}^2,\end{aligned}$$

et comme le deuxième terme dans la dernière expression est manifestement nul, voir le paragraphe 10.2, on a que

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^2 + T'$$

expression connue sous le nom de *théorème de König*, où la quantité

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i{}^2$$

représente l'*énergie cinétique relative*, c'est-à-dire l'énergie cinétique correspondante au mouvement mesuré dans le repère relatif, et particulier, choisi. Le théorème de König affirme donc que l'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique relative plus un terme qui est équivalent à l'énergie cinétique d'un point matériel qui a la masse totale du système et la vitesse de son barycentre.

## PROPRIETES D'INERTIE DES SYSTEMES

### 10.1 INTRODUCTION

Par *propriétés d'inertie des systèmes* on entend l'étude des propriétés liées à la distribution de la masse pour un système donné. Ces propriétés seront décrites à l'aide de certaines grandeurs mathématiques, en particulier il nous sera suffisant de connaître:

- la masse totale du système ;
- la position du barycentre ;
- le tenseur d'inertie relatif à un point quelconque.

Ces trois grandeurs à elles seules nous permettent de traduire l'influence de la masse et de sa distribution sur le mouvement du système.

Avant de définir le barycentre et le tenseur d'inertie, il faut dire quelque chose à propos des systèmes matériels : ceux-ci sont normalement distincts en *systèmes discrets*, déjà introduits dans le chapitre 9, et en *systèmes*, ou *corps*, *continus*. Bien que, comme déjà anticipé dans le paragraphe 5.1, pour nous un corps continu soit un concept intuitif, primitif, on peut toujours le penser comme un ensemble de points matériels, liés entre eux par des liens sans masse, de telle sorte que la masse totale soit la somme de la masse des tous les points, et que la forme, donc la disposition des ces points, soit garantie par le "squelette" des liens imaginaires : c'est le *modèle de Boscovich*. Naturellement, pour un corps continu, le nombre de ces points idéaux nécessaires pour bien le représenter tend vers l'infini, et la somme sur les points mêmes est remplacée par une intégrale de volume.

Dans la suite, nous établirons les différentes propriétés pour des systèmes discrets ; le passage à un système continu se fait en remplaçant les sommations par des intégrales.

### 10.2 BARYCENTRE

Considérons un système matériel constitué de  $n$  points matériels  $(p_i, m_i)$  ; on définit *barycentre* du système le point (géométrique, non matériel)  $C$  défini comme

$$C - o = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (p_i - o),$$

où

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

est la masse totale du système. Le point  $C$  ne dépend pas de  $o$ , c'est à dire du repère choisi. En fait, soit  $o'$  le point origine d'un deuxième repère, alors :

$$\begin{aligned}
C'-o' &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (p_i - o') = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (p_i - o + o - o') = \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (p_i - o) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (o - o') = C - o + o - o' = C - o' \Rightarrow C' = C.
\end{aligned}$$

A remarquer que, par la définition même de barycentre, il est

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (p_i - C) = C - C = \mathbf{o}.$$

### 10.3 PROPRIETES DU BARYCENTRE

Le barycentre a des propriétés remarquables, dont en voici quelques-unes.

1. S'il existe un plan de symétrie matérielle pour le système,  $C$  appartient à ce plan. Définissons d'abord qu'est-ce qu'on entend pour *plan de symétrie matérielle* : soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$  et orthogonal au plan ; si  $o \in \text{plan}$  la symétrie matérielle implique que  $\forall p_i, \exists p_i'$  tel que

$$\begin{aligned}
m_i &= m_i', \\
(p_i - o) \cdot \mathbf{u} &= -(p_i' - o) \cdot \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas on a

$$(C - o) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i [(p_i - o) + (p_i' - o)] \cdot \mathbf{u} = 0,$$

c'est-à-dire que le vecteur  $C - o$  est orthogonal à  $\mathbf{u}$ , et donc, comme  $o$  appartient au plan,  $C$  lui appartient aussi.

2. Si le système a un point  $o$  de symétrie matérielle,  $C$  coïncide avec ce point. Par définition, un point  $o$  est de *symétrie matérielle* si  $\forall p_i \exists p_i'$  tel que

$$\begin{aligned}
m_i &= m_i' \\
p_i - o &= -(p_i' - o).
\end{aligned}$$

Alors

$$C - o = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i [(p_i - o) + (p_i' - o)] = \mathbf{o},$$

par symétrie ; donc  $C$  coïncide avec  $o$ .

3. *Propriété additive du barycentre* : soit le système matériel  $S$  l'union de deux sous-systèmes,  $S = S_1 \cup S_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$ , barycentres  $C_1$  et  $C_2$ . Alors

$$C - o = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ \sum_{i=1}^{n_1} m_i^{(1)} (p_i - o)^{(1)} + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} m_i^{(2)} (p_i - o)^{(2)} \right]$$

et donc, par la définition de barycentre, il est

$$C - o = \frac{1}{m} [m_1(C_1 - o) + m_2(C_2 - o)].$$

#### 10.4 MOMENT D'INERTIE

On appelle *moment d'inertie* d'un système matériel par rapport à une droite  $s$  passant par  $o$  et parallèle au vecteur  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$  le scalaire positif

$$I_u = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i [(\mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{r}_i]^2,$$

où on a indiqué avec  $\mathbf{r}_i$  le vecteur  $p_i - o$ ,  $\forall i$ , voir la figure 10.1. On remarque immédiatement que, à parité de masse,  $I_u$  augmente si les points s'éloignent de  $s$ .

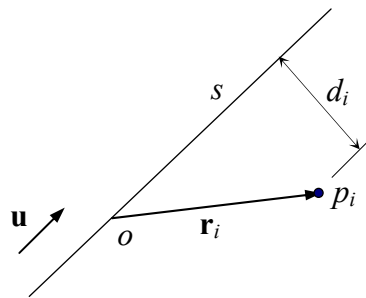


Figure 10.1

Si on observe que

$$[(\mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{r}_i]^2 = [\mathbf{r}_i - \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_i \mathbf{u}]^2 = \mathbf{r}_i^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_i)^2,$$

et on appelle *moment d'inertie polaire*, par rapport au point  $o$ , la quantité

$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^2$$

on peut écrire

$$I_u = I_o - \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_i)^2.$$

Donc le moment d'inertie par rapport à toute droite passante par  $o$  est plus petit ou égal au moment d'inertie polaire relatif à  $o$ .

#### 10.5 TENSEUR D'INERTIE

Si l'on considère que  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ , quelques simples passages algébriques montrent que

$$I_u = I_{11}u_1^2 + I_{22}u_2^2 + I_{33}u_3^2 - 2I_{12}u_1u_2 - 2I_{13}u_1u_3 - 2I_{23}u_2u_3,$$

où les quantités  $I_{jk} = I_{kj}$ ,  $j, k = 1, 2, 3$  sont respectivement

$$I_{11} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad \text{moment d'inertie par rapport à l'axe } x,$$

$$I_{22} = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad \text{moment d'inertie par rapport à l'axe } y,$$

$$I_{33} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad \text{moment d'inertie par rapport à l'axe } z,$$

$$I_{12} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, \quad \text{produit d'inertie par rapport à l'axe } z,$$

$$I_{13} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i, \quad \text{produit d'inertie par rapport à l'axe } y,$$

$$I_{23} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad \text{produit d'inertie par rapport à l'axe } x.$$

Alors que les moments d'inertie sont toujours positifs, les produits d'inertie peuvent être négatifs. Les six quantités ci-dessus peuvent être rangées dans une matrice symétrique :

$$\begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

on peut démontrer que cette matrice représente, dans la base choisie, un tenseur  $\mathbf{I}_o$ , dit *tenseur d'inertie relatif au point o*. C'est immédiat alors de voir que

$$I_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_o \mathbf{u},$$

c'est-à-dire, une fois connu le tenseur d'inertie relatif à un point  $o$ , il est possible de calculer, à l'aide de la formule ci-dessus, le moment d'inertie par rapport à n'importe quelle droite passante par  $o$ , de direction  $\mathbf{u}$ , vecteur unitaire. Naturellement,  $\mathbf{I}_o$  et  $\mathbf{u}$  doivent être exprimés dans la même base. Si le point  $o$  coïncide avec  $C$ , le tenseur d'inertie est dit *central*.

Le tenseur d'inertie est défini positif, parce que la forme quadratique ci-dessus, qui représente un moment d'inertie, est toujours positive, pour chaque  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ . En plus,  $\mathbf{I}_o$  est symétrique; les deux propriétés nous assurent alors que  $\mathbf{I}_o$  a trois valeurs propres réelles positives, et déterminant positif; par le théorème d'inversibilité,  $\mathbf{I}_o$  est donc inversible. A la rigueur, il faudrait dire que le tenseur d'inertie est semi-défini positif, parce que pour un système constitué par des points matériels alignés sur la droite par  $o$  parallèle à  $\mathbf{u}$ , il est  $I_u = 0$ ; c'est, celle-ci, une conséquence de la modélisation d'un système par points matériels. Dans la réalité physique, les corps occupent toujours une région tridimensionnelle de  $\mathcal{E}$ , et le cas particulier cité ne peut pas se produire.

On peut maintenant donner une expression générale pour  $\mathbf{I}_o$  : si l'on considère que  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} I_u &= \sum_{i=1}^n m_i [(\mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{r}_i]^2 = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{I} \mathbf{r}_i - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{u}]^2 = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{I} \mathbf{r}_i^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_i)^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{I} \mathbf{r}_i^2 \mathbf{u}^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_i)^2] = \mathbf{u} \cdot \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{I} \mathbf{r}_i^2 \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i] = \\ &= \mathbf{u} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{I} \mathbf{r}_i^2 - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i] \right\} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Par comparaison avec la forme quadratique



$$I_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_o \mathbf{u},$$

on voit alors que l'expression générale pour  $\mathbf{I}_o$  est

$$\mathbf{I}_o = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i].$$

Si on pose

$$\mathbf{E}_o = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i,$$

dit *tenseur d'inertie d'Euler*, on peut écrire que

$$\mathbf{I}_o = I_o \mathbf{I} - \mathbf{E}_o,$$

où  $I_o$  est le moment d'inertie polaire, par rapport à  $o$ . Or, par la définition de trace, voir le paragraphe 1.12, et par ses propriétés de linéarité, il est

$$\text{tr } \mathbf{E}_o = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^2 = I_o,$$

et alors

$$\text{tr } \mathbf{I}_o = I_o \text{tr } \mathbf{I} - \text{tr } \mathbf{E}_o = 2I_o.$$

En se rappelant que la trace est un invariant tensoriel, on voit que la somme des trois moments d'inertie par rapport à trois droites orthogonales qui passent par  $o$  est toujours égal à deux fois le moment d'inertie polaire par rapport au même point  $o$ . En plus, si le système est plan, par les expressions de  $I_{jk}$ , il est (cas de système du plan  $xy$ , où les  $z_i$  sont identiquement nulles)

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{22} &= I_o, \\ I_{33} &= I_o, \\ I_{13} = I_{23} &= 0. \end{aligned}$$

## 10.6 L'ELLIPSOÏDE D'INERTIE

Comme déjà dit, le tenseur d'inertie a trois valeurs propres réelles et positives ; les trois vecteurs propres correspondants constituent la base normale, et dans cette base le tenseur est diagonal, les valeurs propres  $I_{ii}$  étant les composantes sur la diagonale :

$$\mathbf{I}_o = I_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + I_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + I_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres s'appellent *moments principaux* d'inertie, et les vecteurs propres, *axes principaux* d'inertie. Si on pose

$$\boldsymbol{\xi} = p - o,$$

l'équation

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{I}_o \boldsymbol{\xi} = 1$$

est l'équation d'un ellipsoïde, dit *ellipsoïde d'inertie* ; or, de la géométrie on sait que dans le repère

principal les axes de l'ellipsoïde coïncident avec les axes du repère. Dans ce cas l'équation de l'ellipsoïde devient tout simplement

$$I_{11}\xi_1^2 + I_{22}\xi_2^2 + I_{33}\xi_3^2 = 1,$$

et donc les semi-axes sont donnés par les relations

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{I_{ii}}}.$$

Le long des trois axes on a ainsi une mesure des moments d'inertie ; à cause de la proportionnalité inverse, si sur l'axe  $i$ -ème on a le semi-axe le plus petit, alors le moment d'inertie du système autour de cet axe est le plus grand possible, et donc la masse est globalement plus éloignée de cet axe, voir la figure 10.2. Le contraire se produit si sur un axe on a le semi-axe majeure de l'ellipsoïde. Bref, l'ellipsoïde donne une représentation graphique de la distribution de la masse autour d'un point.

Si  $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ , alors l'ellipsoïde est une sphère, et le tenseur est dit *sphérique* ; dans ce cas le système se comporte comme si sa masse était uniformément distribuée autour du point en question, comme c'est le cas pour une sphère homogène par rapport à son centre. Si  $I_{11} = I_{22}$ , alors le tenseur est dit *cylindrique*, dans ce cas autour de  $\mathbf{e}_3$ .

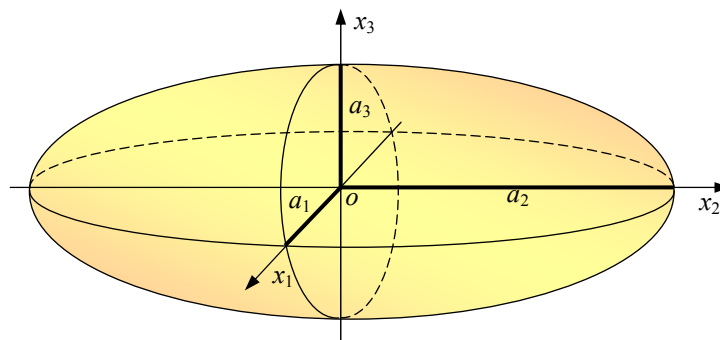


Figure 10.2

Une propriété de l'ellipsoïde d'inertie est la suivante : si un plan est de symétrie matérielle pour le système, il est aussi plan de symétrie pour l'ellipsoïde relatif à chaque point de ce plan. Pour démontrer cela, supposons que le plan en question soit le plan  $x_1x_2$ . Dans ce cas

$$I_{13} = I_{23} = 0,$$

et donc l'équation de l'ellipsoïde sera

$$I_{11}\xi_1^2 + I_{22}\xi_2^2 + I_{33}\xi_3^2 - 2I_{12}\xi_1\xi_2 = 1.$$

C'est évident alors que le plan  $xy$  est plan de symétrie pour l'ellipsoïde aussi : en fait, pour

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \pm\xi_3)$$

on obtient le même résultat.

Comme les intersections des plans de symétrie de l'ellipsoïde coïncident avec les axes de l'ellipsoïde même, si une droite est l'intersection de deux plans de symétrie matérielle, elle est un axe de l'ellipsoïde, et donc elle est axe principal d'inertie aussi, et cela par rapport à tout point de la droite.

## 10.7 LE THEOREME DE HUYGENS-STEINER

Nous avons vu que le tenseur d'inertie d'un corps peut être défini par rapport à un point quelconque, non seulement du même corps, mais de  $\mathcal{E}$  en général. Cela signifie qu'un système matériel crée un champ tensoriel, le *champ du tenseur d'inertie*, défini sur tout  $\mathcal{E}$ . La caractérisation complète de l'inertie d'un système passe par la connaissance de ce champ tensoriel. En fait, si l'on connaît le tenseur d'inertie par rapport à un point, on est en mesure de calculer le moment d'inertie par rapport à toute droite qui passe par ce point, et donc pour pouvoir calculer le moment d'inertie par rapport à toutes les droites possibles, il faut connaître le tenseur d'inertie par rapport à tout point de  $\mathcal{E}$ .

Pour aborder ce problème, montrons que si on connaît  $\mathbf{I}_C$ , tenseur central d'inertie, on peut connaître  $\mathbf{I}_o$ , tenseur d'inertie relatif à un point  $o$  quelconque. En fait, soit

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i &= p_i - o, \\ \mathbf{r}'_i &= p_i - C;\end{aligned}$$

alors

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{w},$$

où

$$\mathbf{w} = C - o.$$

Donc:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_o &= \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i] = \sum_{i=1}^n m_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{w})^2 \mathbf{I} - (\mathbf{r}'_i + \mathbf{w}) \otimes (\mathbf{r}'_i + \mathbf{w})] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}'_i \mathbf{I} - \mathbf{r}'_i \otimes \mathbf{r}'_i] + m[\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \mathbf{I} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}] + \sum_{i=1}^n m_i [2\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{w} \mathbf{I} - \mathbf{r}'_i \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{r}'_i],\end{aligned}$$

et comme le dernier terme est nul, voir le paragraphe 10.2, étant

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = m(C - C) = \mathbf{o},$$

on a finalement la relation cherchée, connue sous le nom de *théorème de Huygens-Steiner*:

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}_C + m[\mathbf{w}^2 \mathbf{I} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}].$$

Ce théorème définit le champ tensoriel d'inertie sur la base de la connaissance du seul tenseur central d'inertie et de la position, et résolve le problème posé.

Le théorème de Huygens-Steiner nous permet de trouver un résultat de portée moins générale, mais souvent assez utile: on connaît le moment d'inertie  $I_u^C$  par rapport à une droite  $s$  parallèle à  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$  et passant par le barycentre  $C$ , et on veut connaître  $I_u^o$ , moment d'inertie par rapport à une droite  $s'$  toujours parallèle à  $\mathbf{u}$ , mais passante par  $o$ . Par le théorème de Huygens-Steiner on a alors

$$I_u^o = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_o \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_C \mathbf{u} + m \mathbf{u} \cdot [\mathbf{w}^2 \mathbf{I} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}] \mathbf{u} = I_u^C + m[\mathbf{w}^2 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2].$$

Si  $d$  est la distance entre les deux droites, voir la figure 10.3, alors, comme  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ ,

$$d^2 = \mathbf{w}^2 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2,$$

et finalement

$$I_u^o = I_u^C + m d^2,$$

relation connue sous le nom de *théorème de Huygens* ou de *transposition des moments d'inertie*. Ce résultat nous montre que le barycentre est le point de minimisation des moments d'inertie.

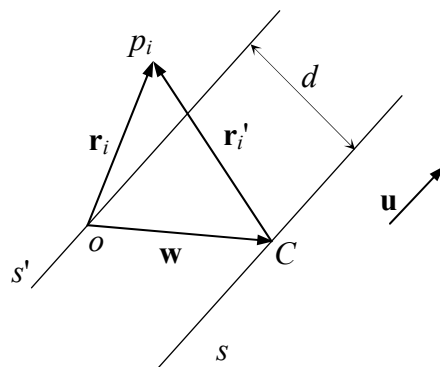


Figure 10.3

Une conséquence du théorème de Huygens-Steiner est la propriété suivante, dite *théorème de composition des tenseurs centraux d'inertie*: soit le système  $S$  composé de deux sous-systèmes,  $S_1$  et  $S_2$ , de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ , barycentres  $C_1$  et  $C_2$  et tenseurs centraux d'inertie  $\mathbf{I}_{C_1}$  et  $\mathbf{I}_{C_2}$ . Alors, le tenseur central d'inertie du système total est donné par la relation suivante:

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{C_1} + \mathbf{I}_{C_2} + \mu d_{12}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{u}_{12} \otimes \mathbf{u}_{12}),$$

où

$$d_{12} = |C_2 - C_1|,$$

$$\mathbf{u}_{12} = \frac{C_2 - C_1}{|C_2 - C_1|};$$

$\mu$  est la *masse réduite* du système,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

déjà trouvée dans le paragraphe 7.14 pour la résolution du problème des deux corps. A remarquer qu'on trouve le tenseur central d'inertie pour le système global sans même en devoir connaître la position du barycentre.

Montrons ce théorème : d'abord, un simple regard à l'expression générale du tenseur d'inertie nous montre que celui-ci est additif par rapport aux points matériels, et donc on peut décomposer  $\mathbf{I}_C$  en deux parties,

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_C^1 + \mathbf{I}_C^2,$$

où  $\mathbf{I}_C^i$  est le tenseur d'inertie du corps  $i$  relatif au barycentre global. Par le théorème de Huygens-Steiner on a alors

$$\mathbf{I}_C^1 = \mathbf{I}_{C_1} + m_1 [(C - C_1)^2 \mathbf{I} - (C - C_1) \otimes (C - C_1)];$$

$$\mathbf{I}_C^2 = \mathbf{I}_{C_2} + m_2 [(C - C_2)^2 \mathbf{I} - (C - C_2) \otimes (C - C_2)].$$

Ensuite, par la propriété additive du barycentre, si  $C$  est le barycentre global et  $m$  la masse totale,

$$m(C - o) = m_1(C_1 - o) + m_2(C_2 - o).$$

Si alors dans cette formule on prend une fois  $o = C_1$  et une fois  $o = C_2$ , on obtient

$$m(C - C_1) = m_2(C_2 - C_1),$$

$$m(C - C_2) = m_1(C_1 - C_2).$$

En utilisant ces relations on trouve immédiatement que

$$\mathbf{I}_C^1 = \mathbf{I}_{C_1} + \frac{m_1 m_2^2}{m^2} d_{12}^2 [\mathbf{I} - \mathbf{u}_{12} \otimes \mathbf{u}_{12}];$$

$$\mathbf{I}_C^2 = \mathbf{I}_{C_2} + \frac{m_1^2 m_2}{m^2} d_{12}^2 [\mathbf{I} - \mathbf{u}_{12} \otimes \mathbf{u}_{12}].$$

Finalement, étant  $m = m_1 + m_2$ ,

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_C^1 + \mathbf{I}_C^2 = \mathbf{I}_{C_1} + \mathbf{I}_{C_2} + \mu d_{12}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{u}_{12} \otimes \mathbf{u}_{12}).$$

## DYNAMIQUE DES CORPS RIGIDES

### 11.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre 9 on a vu les lois fondamentales de la dynamique des corps discrets ; ici, on parcourt le même chemin pour retrouver ces mêmes lois dans le cas d'un corps rigide  $\mathcal{C}$ . Le concept de corps rigide a déjà été introduit au paragraphe 5.1 ; ici on rappelle les lois de la cinématique propres au mouvement d'un tel solide, voir le paragraphe 4.6 :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}',$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{o'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'),$$

étant  $\mathbf{r}' = p - o'$ ,  $p \in \mathcal{C}$  et  $o'$  l'origine du repère solide  $\mathcal{R}'$ , voir la figure 11.1.

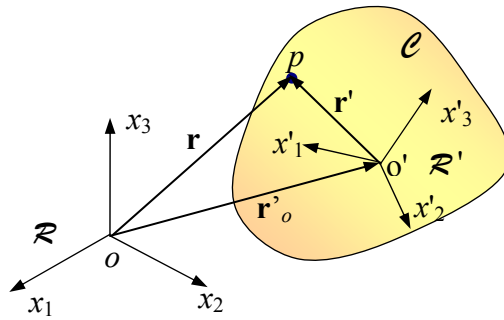


Figure 11.1

### 11.2 QUANTITE DE MOUVEMENT

Par la définition de  $\mathbf{Q}$  appliquée au cas présent, on a

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (p_i - o')],$$

et donc, par la définition même de barycentre,  $C$ ,

$$\mathbf{Q} = m [\mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (C - o')].$$

On remarque que si  $C$  coïncide avec  $o'$  ou si  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  ou encore si  $\boldsymbol{\omega}$  est parallèle à  $C - o'$ , alors

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v}_{o'}.$$

Donc dans le premier cas énoncé la quantité de mouvement d'un corps rigide est égale à la masse totale,  $m$ , par la vitesse du barycentre, alors que dans le deuxième cas la quantité de mouvement est égale à la masse par la vitesse d'un point quelconque du corps même ; dans le troisième ceci est encore vrai, pourvu que  $o'$  soit un point sur la droite par  $C$  et parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ . Ceci implique que si un corps rigide a le barycentre immobile, sa quantité de mouvement est nulle.

## 11.3 MOMENT DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Calculons maintenant le moment de la quantité de mouvement d'un corps rigide par rapport à  $o'$  : en utilisant la formule du double produit vectoriel et de celui dyadique, et grâce à la définition de barycentre et de tenseur d'inertie, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{o'} &= \sum_{i=1}^n m_i (p_i - o') \wedge \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (p_i - o') \wedge [\mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (p_i - o')] = \\
 &= m(C - o') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \sum_{i=1}^n m_i (p_i - o') \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (p_i - o')] = \\
 &= m(C - o') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \sum_{i=1}^n m_i \left\{ (p_i - o')^2 \boldsymbol{\omega} - (p_i - o') [\boldsymbol{\omega} \cdot (p_i - o')] \right\} = \\
 &= m(C - o') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \left\{ \sum_{i=1}^n m_i [(p_i - o')^2 \mathbf{I} - (p_i - o') \otimes (p_i - o')] \right\} \boldsymbol{\omega},
 \end{aligned}$$

et finalement

$$\mathbf{K}_{o'} = m(C - o') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega}.$$

Comme dans le cas de  $\mathbf{Q}$ , on remarque que si  $C$  coïncide avec  $o'$  ou si  $\mathbf{v}_{o'} = \mathbf{0}$  ou encore si  $\mathbf{v}_{o'}$  est parallèle à  $C - o'$ , il est

$$\mathbf{K}_{o'} = \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega}.$$

Un simple regard à cette dernière formule et à la dernière du paragraphe précédent, qui donne  $\mathbf{Q}$  dans les mêmes hypothèses, montre le parallèle entre les deux cas : alors que pour  $\mathbf{Q}$  c'est la masse et la vitesse qui entrent en jeu, pour  $\mathbf{K}_{o'}$  c'est le tenseur d'inertie, relatif au même point  $o'$ , et la vitesse de rotation.

## 11.4 PUISSANCE

Cherchons maintenant la puissance des actions sur un corps rigide ; nous savons déjà que la puissance des forces internes est nulle, voir le paragraphe 9.7. Il s'agit donc d'écrire la puissance des forces externes, en tenant compte des lois de la cinématique du corps rigide : si  $\mathbf{f}_i$  est la résultante des forces agissant sur le point  $p_i$ , il est

$$W = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \cdot [\mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (p_i - o')] = \mathbf{v}_{o'} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n (p_i - o') \wedge \mathbf{f}_i,$$

et donc

$$W = \mathbf{v}_{o'} \cdot \mathbf{R}^e + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{o'}^e.$$

Il est clair alors que, pour un mouvement rigide, la puissance des actions est nulle si, et seulement si, le système des actions externes est équilibré.

## 11.5 ENERGIE CINETIQUE

Pour calculer l'énergie cinétique d'un corps rigide on utilise encore les formules et les définitions rappelées dans le paragraphe précédent, ainsi que la formule du produit mixte :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}')] \cdot [\mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}')] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{o'}^2 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{o'} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}') + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}') \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}')] = \\
&= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{o'}^2 + m \mathbf{v}_{o'} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{C} - \mathbf{o}') + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}') \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}')] = \\
&= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{o'}^2 + m \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{o}') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \left\{ (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}')^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}') [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}')] \right\} = \\
&= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{o'}^2 + m \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{o}') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n m_i [(\mathbf{p}_i - \mathbf{o}')^2 \mathbf{I} - (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}') \otimes (\mathbf{p}_i - \mathbf{o}')] \right\} \boldsymbol{\omega},
\end{aligned}$$

et finalement

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{o'}^2 + m \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{o}') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega}.$$

Si  $\mathbf{v}_{o'} = \mathbf{o}$ , alors

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_{o'}.$$

Si  $\mathbf{o}'$  coïncide avec  $\mathbf{C}$ , alors

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega},$$

qui correspond au *théorème de König pour les corps rigides*. Ce théorème nous montre que l'énergie cinétique d'un corps rigide se compose de deux termes : le premier, qu'on pourrait appeler *énergie cinétique de translation*, parce que c'est la même énergie d'un point matériel dont la masse est égale à la masse totale du corps et qui se déplace avec la vitesse du barycentre, et le deuxième, qu'on pourrait appeler *énergie cinétique de rotation*, parce que c'est l'énergie du même corps lorsqu'il tourne autour du barycentre, immobile, avec la même vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$ . On a donc ici une décomposition de l'énergie cinétique d'un corps rigide, en énergie de translation et énergie du mouvement relatif au barycentre, qui est une rotation, comme le théorème d'Euler l'assure, voir le paragraphe 5.3. Transformons le terme de rotation en utilisant la relation entre moment et tenseur d'inertie, voir le paragraphe 10.5 :

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \cdot \mathbf{I}_C \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \boldsymbol{\omega}^2 = \frac{1}{2} I_C^\omega \boldsymbol{\omega}^2,$$

où  $I_C^\omega$  est le moment d'inertie par rapport à une droite passant par le barycentre et qui a la même direction de la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$ . Maintenant, un simple regard aux deux termes qui composent l'énergie cinétique nous permet de constater le parallèle existant entre ceux-ci : si celui de translation est le produit de la masse par le carré de la vitesse, le terme de rotation est le produit d'un moment d'inertie par le carré de la vitesse de rotation. Donc, pour la partie rotation, le rôle de la masse est pris par un moment d'inertie, et celui de la vitesse par une vitesse de rotation.

Il faut toutefois remarquer qu'écrire le terme de rotation avec le moment d'inertie est limitatif, parce que, en général, la direction de  $\boldsymbol{\omega}$  change, et donc le moment d'inertie aussi, alors que l'écriture qui utilise le tenseur, comme on sait déjà, est tout à fait générale. On a ici le moyen d'apprécier ce qu'on



avait dit au paragraphe 10.1, à savoir que la caractérisation complète de l'inertie d'un corps rigide nécessite de la connaissance du tenseur d'inertie, outre que de la masse et du barycentre.

On peut aussi exprimer l'énergie cinétique d'un corps rigide en fonction de  $\mathbf{Q}$  et de  $\mathbf{K}_{o'}$  : en fait, de la formule du moment de la quantité de mouvement on a que

$$\mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}_{o'} - m(C - o') \wedge \mathbf{v}_{o'},$$

et donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{o'}^2 + m \boldsymbol{\omega} \cdot (C - o') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_{o'} - \frac{1}{2} m \boldsymbol{\omega} \cdot (C - o') \wedge \mathbf{v}_{o'} = \\ &= \frac{1}{2} [m(\mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (C - o')) \cdot \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_{o'}] \end{aligned}$$

d'où, en se rappelant la formule générale de  $\mathbf{Q}$ , on a finalement

$$T = \frac{1}{2} [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{K}_{o'} \cdot \boldsymbol{\omega}].$$

## 11.6 DERIVEES TEMPORELLES

Cherchons à présent les dérivées temporelles de  $\mathbf{Q}$  et de  $\mathbf{K}_{o'}$ , dans le cas d'un corps rigide ; d'abord,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= [m \mathbf{v}_{o'} + m \boldsymbol{\omega} \wedge (C - o')] \cdot = m \dot{\mathbf{v}}_{o'} + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (C - o') + m \boldsymbol{\omega} \wedge (C - o') \cdot = \\ &= m \dot{\mathbf{v}}_{o'} + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (C - o') + m \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_C - m \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{o'}; \end{aligned}$$

si alors  $o' \equiv C$ , il est simplement

$$\dot{\mathbf{Q}} = m \dot{\mathbf{v}}_C.$$

Voyons maintenant le cas de  $\mathbf{K}_{o'}$  :

$$\dot{\mathbf{K}}_{o'} = [m(C - o') \wedge \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega}] \cdot = m \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{v}_{o'} + m(C - o') \wedge \dot{\mathbf{v}}_{o'} + \mathbf{I}_{o'} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{I}}_{o'} \boldsymbol{\omega};$$

dans l'expression ci-dessus, il faut transformer le dernier terme : par l'expression générale du tenseur d'inertie, paragraphe 10.5, on a

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_{o'} &= \left( \sum_{i=1}^n m_i [(p_i - o')^2 \mathbf{I} - (p_i - o') \otimes (p_i - o')] \right) \cdot = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i [2(p_i - o') \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{o'}) \mathbf{I} - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{o'}) \otimes (p_i - o') - (p_i - o') \otimes (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{o'})]. \end{aligned}$$

Comme le corps est rigide, il est

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{o'} = \boldsymbol{\omega} \wedge (p_i - o'),$$

et donc l'expression de  $\dot{\mathbf{I}}_{o'}$  devient

$$\dot{\mathbf{I}}_{o'} = - \sum_{i=1}^n m_i \{ [\boldsymbol{\omega} \wedge (p_i - o')] \otimes (p_i - o') + (p_i - o') \otimes [\boldsymbol{\omega} \wedge (p_i - o')] \}.$$

On constate immédiatement, alors, que

$$\dot{\mathbf{I}}_{o'} \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{E}_{o'} \boldsymbol{\omega},$$

où  $\mathbf{E}_{o'}$  est le tenseur d'inertie d'Euler, voir le paragraphe 10.5 ; d'ailleurs, on sait que

$$\mathbf{I}_{o'} = I_{o'} \mathbf{I} - \mathbf{E}_{o'},$$

et donc

$$-\mathbf{E}_{o'} = \mathbf{I}_{o'} - I_{o'} \mathbf{I},$$

où  $I_{o'}$  est le moment d'inertie polaire du système par rapport à  $o'$ . Il est donc

$$\dot{\mathbf{I}}_{o'} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{I}_{o'} - I_{o'} \mathbf{I}) \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega},$$

et finalement,

$$\dot{\mathbf{K}}_{o'} = m \mathbf{v}_C \wedge \mathbf{v}_{o'} + m(C - o') \wedge \dot{\mathbf{v}}_{o'} + \mathbf{I}_{o'} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega};$$

Si  $\mathbf{v}_{o'} = \mathbf{0}$  où si  $o' \equiv C$ , la formule ci-dessus se simplifie et devient :

$$\dot{\mathbf{K}}_{o'} = \mathbf{I}_{o'} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega}.$$

### 11.7 LES EQUATIONS FONDAMENTALES POUR UN CORPS RIGIDE

Dans le cas d'un corps rigide, la première équation fondamentale de la dynamique, paragraphe 9.6, devient

$$m \dot{\mathbf{v}}_{o'} + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (C - o') + m \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_C - m \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{o'} = \mathbf{R}^e,$$

où  $\mathbf{R}^e$  est la résultante des forces externes agissantes sur le corps ; si  $o' \equiv C$ , on retrouve le théorème du mouvement du barycentre :

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^e,$$

La deuxième équation fondamentale, c'est à dire le théorème du moment de la quantité de mouvement, devient, en injectant l'expression ci-dessus de  $\dot{\mathbf{K}}_{o'}$ , dans celle du théorème vu au paragraphe 9.6,

$$m(C - o') \wedge \dot{\mathbf{v}}_{o'} + \mathbf{I}_{o'} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{o'}^e,$$

où  $\mathbf{M}_{o'}^e$  est encore le moment résultant des forces externes par rapport à  $o'$ . Toujours dans le cas de  $o' \equiv C$  ou de  $\mathbf{v}_{o'} = \mathbf{0}$ , on a la relation simplifiée

$$\dot{\mathbf{K}}_{o'} = \mathbf{M}_{o'}^e,$$

avec

$$\dot{\mathbf{K}}_{o'} = \mathbf{I}_{o'} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega}.$$

Pour un corps rigide les équations fondamentales de la dynamique déterminent complètement le mouvement du corps, voire elles sont parfaitement équivalentes aux équations de mouvement écrites pour chaque point du corps ; nous verrons une démonstration de ça dans le paragraphe 13.6.

## 11.8 LE THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE POUR UN CORPS RIGIDE

Voyons comment s'écrit le théorème de l'énergie cinétique,

$$\dot{T} = W,$$

pour un corps rigide : dans le but de simplifier les calculs, considérons que le point  $o'$  coïncide avec le barycentre  $C$ . Il est alors

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega},$$

et donc, en considérant que le tenseur d'inertie est symétrique,

$$\dot{T} = m \mathbf{v}_C \cdot \dot{\mathbf{v}}_C + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

D'ailleurs, de la dernière formule du paragraphe précédent on a

$$\mathbf{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{K}}_C - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega},$$

et par conséquent

$$\dot{T} = m \mathbf{v}_C \cdot \dot{\mathbf{v}}_C + \boldsymbol{\omega} \cdot (\dot{\mathbf{K}}_C - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{v}_C \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{K}}_C.$$

Pour ce qui concerne la puissance, voir le paragraphe 11.4, on a

$$W = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{R}^e + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_C^e,$$

et finalement le théorème de la puissance devient

$$\mathbf{v}_C \cdot (\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{R}^e) + \boldsymbol{\omega} \cdot (\dot{\mathbf{K}}_C - \mathbf{M}_C^e) = 0.$$

Comme cette relation doit être valable pour tout mouvement possible, c'est-à-dire pour tous les vecteurs  $\mathbf{v}_C$  et  $\boldsymbol{\omega}$ , il faut qu'il soit

$$\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{R}^e = \mathbf{0},$$

$$\dot{\mathbf{K}}_C - \mathbf{M}_C^e = \mathbf{0}.$$

Le théorème de l'énergie cinétique est donc équivalent aux équations fondamentales.

## 11.9 LES EQUATIONS D'EULER

Les trois composantes scalaires de la deuxième équation fondamentale, écrite par rapport à un point fixe ou au barycentre,

$$\dot{\mathbf{K}}_{o'} = \mathbf{M}_{o'}^e,$$

avec

$$\dot{\mathbf{K}}_{o'} = \mathbf{I}_{o'} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_{o'} \boldsymbol{\omega},$$

sont appelées *équations d'Euler*. Explicitons ces trois équations dans le cas où le repère choisi est le repère principal du tenseur  $\mathbf{I}_{o'}$ . Dans ce repère, ce tenseur est diagonal (on applique dans la suite la convention d'Einstein sur la somme) :

$$\mathbf{I}_{o'} = I_h \mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_h, \quad h = 1, 2, 3,$$

où les  $I_h$  sont les trois moments principaux d'inertie. Soit, encore dans ce repère,

$$\mathbf{M}_o^e = M_h \mathbf{e}_h, \quad h = 1, 2, 3,$$

et

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_h \mathbf{e}_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

Par la formule de Poisson, paragraphe 4.3, on a alors

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_h \mathbf{e}_h + \omega_h \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_h = \dot{\omega}_h \mathbf{e}_h, \quad h = 1, 2, 3,$$

et donc

$$\mathbf{I}_o \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = I_h \dot{\omega}_h \mathbf{e}_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

Evidemment, il est aussi

$$\mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\omega} = I_h \omega_h \mathbf{e}_h, \quad h = 1, 2, 3,$$

et on obtient donc

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Nous sommes alors en mesure d'expliciter les trois équations d'Euler :

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_1;$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2;$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_3.$$

Traditionnellement on pose  $I_1 = A$ ,  $I_2 = B$ ,  $I_3 = C$ ,  $\omega_1 = p$ ,  $\omega_2 = q$ ,  $\omega_3 = r$ ,  $M_1 = M_x$ ,  $M_2 = M_y$  et  $M_3 = M_z$ ; la forme classique des équations d'Euler est donc la suivante

$$A \dot{p} - (B - C) q r = M_x;$$

$$B \dot{q} - (C - A) r p = M_y;$$

$$C \dot{r} - (A - B) p q = M_z.$$

Celles-ci sont trois équations différentielles non linéaires du premier ordre. Si le moment des forces externes est constamment nul, les équations d'Euler sont d'évolution pour  $\boldsymbol{\omega}$ .

### 11.10 MOUVEMENTS AUTOUR D'UN POINT

On appelle *mouvement d'un système rigide autour d'un point o* le mouvement vu par un observateur qui se déplace à la vitesse du point  $o$ . Parmi les mouvements autour d'un point, deux sont les situations les plus importantes: le cas où  $o$  est immobile ( $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$ ), et le cas où  $o$  coïncide avec le barycentre  $C$  du système. Dans ces deux cas, les seuls dont on s'occupera dans la suite, les équations fondamentales de la dynamique des systèmes rigides peuvent s'écrire simplement

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^e;$$

$$\dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{M}_o^e.$$

## 11.11 MOUVEMENTS A LA POINSOT

Parmi les mouvements précédents, ceux qui ont

$$\mathbf{M}_o^e = \mathbf{o}$$

sont appelés *mouvements à la Poinsot* ou *par inertie*. Un exemple de mouvement à la Poinsot est le cas d'un corps rigide qui tourne autour d'un point fixe  $o$  et qu'il est soumis seulement à une force,  $\boldsymbol{\varphi}_o$ , en  $o$  :

$$\mathbf{M}_o^e = (o - o) \wedge \boldsymbol{\varphi}_o = \mathbf{o} ;$$

c'est le cas d'une toupie, si  $o$  coïncide avec  $C$ . Un autre exemple est celui d'un corps rigide libre soumis seulement à son propre poids  $\mathbf{P}$  ; alors par rapport à  $C$  on a

$$\mathbf{M}_C^e = (C - C) \wedge \mathbf{P} = \mathbf{o} ,$$

car la force poids est appliquée au barycentre.

Dans les mouvements à la Poinsot, certaines quantités, appelées *constantes du mouvement*, se conservent. En fait, par la définition même de mouvement à la Poinsot et par la deuxième équation fondamentale, on a immédiatement que

$$\dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{I}_o \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} ,$$

et donc le moment de la quantité de mouvement se conserve:

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} = \text{constant.}$$

Ce moment est donc la première constante du mouvement. Ensuite, dans les cas considérés, l'énergie cinétique sera exprimée par la relation, voir paragraphe 11.5,

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_o^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} ;$$

le deuxième terme de la somme ci-dessus est l'énergie cinétique du mouvement autour de  $o$ , qu'on appellera  $T_o$  :

$$T_o = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_o .$$

Montrons que  $T_o$  est la deuxième constante du mouvement ; en fait, si on calcule la dérivée temporelle de  $T_o$ , en se souvenant que  $\mathbf{K}_o$  est constant et que le tenseur d'inertie est symétrique, on a que

$$\begin{aligned} \dot{T}_o &= \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{K}_o + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{K}}_o) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{K}_o = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_o^T \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_o \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \end{aligned}$$

c'est à dire que  $T_o$  aussi se conserve, comme annoncé.

## 11.12 ROTATIONS PERMANENTES

Une rotation est dite *permanente* si le vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  se conserve constant. Dans ce cas,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{I}_o \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} = \mathbf{o} ;$$

mais par la condition de parallélisme entre vecteurs, la dernière relation est vraie si et seulement si

$$\mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega},$$

c'est à dire si et seulement si  $\boldsymbol{\omega}$  est un vecteur propre de  $\mathbf{I}_o$ . Donc, pour avoir une rotation permanente, il faut que  $\boldsymbol{\omega}$  soit parallèle à l'un des trois axes principaux d'inertie (les axes de l'ellipsoïde d'inertie) du tenseur d'inertie relatif au point  $o$ .

Dans le cas d'une rotation permanente, c'est le vecteur vitesse angulaire qui se conserve constant, et donc l'axe de rotation aussi ; ce dernier est la droite par  $o$  et parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ . On peut montrer qu'une rotation permanente est *stable*, par rapport aux conditions initiales, si elle se produit autour d'un axe principal d'inertie sur lequel on a le moment d'inertie minimum ou maximum, et qu'elle est *instable* si elle se produit autour de l'axe où le moment d'inertie a la valeur intermédiaire.

### 11.13 PRESSIONS

Un mouvement autour d'un point  $o$  est une *précession* s'il existe une droite ( $f$ ) solidaire au corps, qui forme à tout instant un angle constant avec une droite fixe ( $p$ ), voir la figure 11.2. L'axe  $f$  est dit *axe de figure* et l'axe  $p$  *axe de précession* ;  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{u}$  sont les vecteurs de  $\mathcal{S}^2$  qui donnent les directions de  $f$  et  $p$  respectivement ;  $\theta$  est l'angle, constant, formé par les deux droites. Il vaut mieux remarquer que la seule droite fixe est  $p$ , alors que  $f$  peut tourner autour de  $p$ , mais en gardant constant l'angle  $\theta$ .

La condition  $\theta = \text{constant}$ , implique

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} = \text{constant},$$

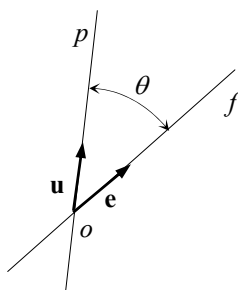


Figure 11.2

et donc, en se souvenant que  $\mathbf{u}$  est un vecteur fixe, car vecteur direction de la droite fixe  $p$ , on a

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})' = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e} \wedge \mathbf{u} = 0.$$

La dernière relation ci-dessus est vraie si et seulement si

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{u},$$

c'est à dire si la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  est une combinaison linéaire de  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{u}$ , voire si elle appartient au plan déterminé par ces deux vecteurs. En fait, dans ce cas, on a

$$(\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e} \wedge \mathbf{u} = \alpha \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \wedge \mathbf{u} + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} \wedge \mathbf{u} = 0.$$

Si  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ , alors la précession est une rotation, respectivement autour de  $p$  ou de  $f$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont constantes, la précession est dite *régulière*.

## 11.14 GYROSCOPES

Un *gyroscope* est un corps rigide dont le tenseur central d'inertie est cylindrique. Sur les gyroscopes on a un théorème fondamental :

**Théorème:** tous les mouvements à la Poinsot d'un gyroscope autour d'un point de l'axe gyroscopique sont des précessions régulières.

En fait, soit, dans le repère principal d'inertie,

$$\mathbf{I}_o = I_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \mathbf{e}_3,$$

et supposons que  $I_1 = I_2$ , c'est à dire que l'ellipsoïde d'inertie ait une symétrie cylindrique autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ , qui est donc l'axe gyroscopique. Le moment de la quantité de mouvement sera alors

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_o &= \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} = I_1(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 = I_1(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3) + \\ &+ (I_3 - I_1) \omega_3 \mathbf{e}_3 = I_1 \boldsymbol{\omega} + (I_3 - I_1) \omega_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

La vitesse angulaire peut donc être écrite de la façon suivante

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{K}_o}{I_1} + \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 \mathbf{e}_3.$$

De la troisième équation d'Euler,

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0,$$

étant  $I_1 = I_2$ , on tire

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{constante},$$

et donc même

$$\frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 = \text{constant}.$$

D'ailleurs, dans un mouvement à la Poinsot, le moment de la quantité de mouvement est constant aussi, et il peut être écrit comme

$$\mathbf{K}_o = K_o \mathbf{u},$$

où  $K_o$  est un scalaire constant et  $\mathbf{u}$  un vecteur fixe de  $\mathcal{S}^2$ . Donc la vitesse angulaire est un vecteur du type

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{u},$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3, \\ \beta &= \frac{K_o}{I_1}, \end{aligned}$$

qui sont des coefficients constants ; le mouvement est donc une précession régulière. L'axe de précession  $p$  a la direction de  $\mathbf{u}$ , qui est parallèle à  $\mathbf{K}_o$ , et l'axe de figure  $f$  coïncide avec l'axe de symétrie cylindrique du tenseur d'inertie, de direction  $\mathbf{e}_3$ , qui est l'axe gyroscopique.

La Terre se comporte comme un gyroscope, dont l'axe de figure est l'axe terrestre. Cet axe tourne à

vitesse constante autour d'un autre axe, perpendiculaire à l'orbite de la planète et passant par son centre, tout en gardant constant l'angle que ces deux axes forment. C'est le phénomène de la *précession des équinoxes*, qui cause une inversion des saisons tous les 25800 ans environ. Il faut toutefois remarquer que cette précession n'est pas libre, parce qu'elle est due au moment des forces d'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil. C'est pour cela qu'on appelle *astronomique* cette précession, pour la distinguer de la vraie *précession de la Terre*, au sens introduit dans ce chapitre, qui est une précession de période théorique de 10 mois environ, dans laquelle l'intersection de l'axe terrestre avec la surface de la Terre décrit un cercle, autour du Pôle Nord, de rayon égal à 4,5 m environ. L'observation a confirmé ce mouvement secondaire de la Terre, même si on a pu voir qu'il n'est pas exactement un cercle, et que la période est de 427 jours au lieu des 300 prévus : cela semble dû au fait que la Terre n'est pas tout à fait un corps rigide.

### 11.15 EFFET GYROSCOPIQUE

Considérons un gyroscope en rotation autour de son axe  $\mathbf{e}_3$  ; on a déjà vu que dans une rotation permanente, le vecteur vitesse angulaire se conserve, et donc l'axe de rotation aussi. On veut montrer maintenant que si on applique une force  $\mathbf{F}$  à un point de l'axe gyroscopique afin d'en changer la direction, cette force doit être assez plus grande de celle nécessaire à produire le même mouvement si la rotation du gyroscope autour de son axe était nulle ; c'est l'*effet gyroscopique*. En fait, on a vu que pour un gyroscope

$$\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{constante} = \omega_3^o,$$

où  $\omega_3^o$  est la vitesse initiale de rotation du gyroscope autour de son axe, l'axe gyroscopique. Donc

$$\mathbf{K}_o = I_1(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) + I_3 \omega_3^o \mathbf{e}_3;$$

si maintenant on dérive par rapport au temps, et on considère la présence de la force  $\mathbf{F}$ , on a que, par le théorème du moment de la quantité de mouvement,

$$\dot{\mathbf{K}}_o = I_1(\dot{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\omega}_2 \mathbf{e}_2) + I_3 \omega_3^o \dot{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{M}_o^e,$$

où  $\mathbf{M}_o^e$  est le moment des forces externes par rapport à  $o$ , et il est dû seulement à la force  $\mathbf{F}$ . Le premier terme dans la somme ci-dessus est le moment qu'il faut appliquer au gyroscope pour obtenir le même mouvement si celui-ci ne tourne pas autour de son axe. Il est clair alors que lorsque cette rotation a lieu, le moment total  $\mathbf{M}_o^e$  doit être plus grand ; en particulier, sa valeur augmente avec le moment d'inertie  $I_3$  et avec la vitesse de rotation  $\omega_3^o$ . Comme  $\mathbf{M}_o^e$  ne dépend que de  $\mathbf{F}$ , pour un même point d'application de celle-ci sur l'axe gyroscopique, son intensité doit être plus grande que dans le cas où le gyroscope ne tourne pas autour de cet axe.

Ce phénomène explique, au moins en partie, pourquoi on peut se promener en vélo et en moto sans perdre l'équilibre. C'est en outre un phénomène assez important dans la conception d'appareils de stabilisation du mouvement ou de navigation aérienne et marine, ainsi que dans le dimensionnement du système de direction des voitures de compétition.

### 11.16 LA BOUSSOLE GYROSCOPIQUE

Une *boussole gyroscopique* est un gyroscope monté de telle façon que l'axe gyroscopique reste en un plan horizontale  $\pi$ , et qu'un point  $o$  de l'axe gyroscopique soit fixe, voir la figure 11.3. L'axe gyroscopique peut tourner librement autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ , et donc il est obligé à rester sur le plan  $\pi$ ,



orthogonal à  $\mathbf{e}_3$ .

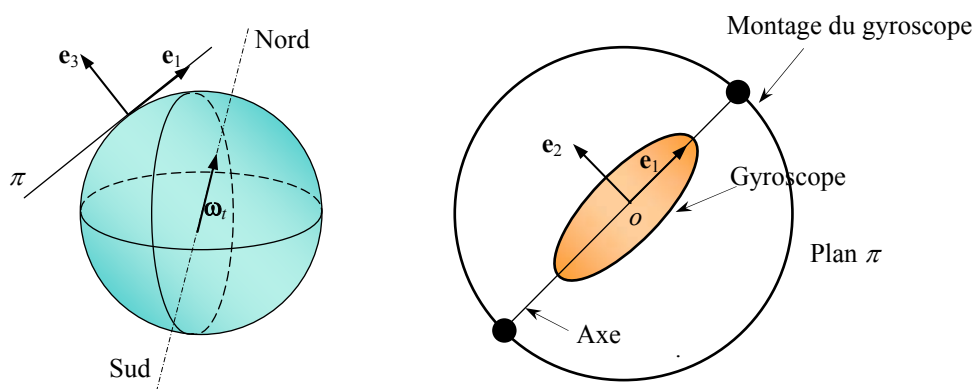


Figure 11.3

Ecrivons le théorème du moment de la quantité de mouvement sans négliger les forces d'inertie dues à la rotation terrestre :

$$(\dot{\mathbf{K}}_o)_R + \boldsymbol{\omega}_t \wedge \mathbf{K}_o = \mathbf{M}_o^e,$$

où  $\boldsymbol{\omega}_t$  est la vitesse angulaire de la Terre et  $(\mathbf{K}_o)_R$  le moment de la quantité de mouvement du gyroscope dans son mouvement relatif autour du barycentre. Alors, paragraphe 11.6, il est

$$(\dot{\mathbf{K}}_o)_R = \mathbf{I}_o \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega},$$

$\boldsymbol{\omega}$  étant la vitesse de rotation du gyroscope autour de son axe gyroscopique :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_1.$$

En outre, on peut décomposer le moment des forces externes  $\mathbf{M}_o^e$  dans les parties active et réactive :

$$\mathbf{M}_o^e = \mathbf{M}_o^{e,a} + \mathbf{M}_o^{e,r}.$$

Soit nul le moment des forces externes actives :

$$\mathbf{M}_o^{e,a} = \mathbf{0};$$

en plus, à cause du montage du gyroscope, sur celui-ci ne peut agir qu'un moment externe réactif du type

$$\mathbf{M}_o^{e,r} = M \mathbf{e}_2.$$

Si on calcule la dérivée temporelle de  $\boldsymbol{\omega}$  on a, par la formule de Poisson, paragraphe 4.3,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega} \mathbf{e}_1 + \omega \dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\omega} \mathbf{e}_1 + \omega \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_1 = \dot{\omega} \mathbf{e}_1;$$

d'ailleurs, on reconnaît facilement que

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega} = I_1 \omega \mathbf{e}_1,$$

relation qu'utilisée dans l'expression de  $(\dot{\mathbf{K}}_o)_R$  donne

$$(\dot{\mathbf{K}}_o)_R = I_1 \dot{\omega} \mathbf{e}_1.$$

En injectant ces expressions dans celle du théorème du moment de la quantité de mouvement, on trouve facilement

$$I_1(\dot{\omega} \mathbf{e}_1 + \omega \boldsymbol{\omega}_t \wedge \mathbf{e}_1) = M \mathbf{e}_2,$$

et si on multiplie tout scalairement par  $\mathbf{e}_3$ , on trouve

$$\boldsymbol{\omega}_t \wedge \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\omega}_t \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\boldsymbol{\omega}_t \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

ce qui implique que

$$\boldsymbol{\omega}_t = \omega_t^1 \mathbf{e}_1 + \omega_t^3 \mathbf{e}_3.$$

Dans d'autres mots,  $\boldsymbol{\omega}_t$  reste à tout instant sur le plan  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ , et donc ces deux vecteurs appartiennent à un plan diamétral de la Terre. Cela, et par le fait que  $\mathbf{e}_1$  appartient aussi au plan horizontal  $\pi$ , implique que  $\mathbf{e}_3$  passe par le centre terrestre, et que  $\mathbf{e}_1$  est tangent au méridien qui passe par  $o$  :  $\mathbf{e}_1$  indique donc le nord. Comme le gyroscope conserve la direction de l'axe gyroscopique, celui-ci pointera toujours le nord.

## DYNAMIQUE IMPULSIVE

### 12.1 INTRODUCTION

Le but de la dynamique impulsive est celui d'analyser le mouvement d'un système de corps qui subissent un événement appelé *choc* ou *collision* : un choc est un contact entre deux corps qui se produit à un *instant singulier*, qu'on indiquera dans la suite avec  $t^*$  ; ce contact comporte une discontinuité de leurs actes de mouvement, sans toutefois avoir discontinuité des configurations. Dans d'autres mots, les vitesses des deux corps sont des fonctions vectorielles discontinues du temps, alors que les positions sont continues.

Si alors  $p$  est un point quelconque d'un corps qui subit un choc à l'instant singulier  $t = t^*$ , la courbe  $p = p(t)$  qui décrit la trajectoire est continue pour chaque  $t$ , alors que  $\dot{p}(t)$  est discontinue à  $t = t^*$ . La trajectoire est donc une courbe qui a au point  $p(t^*)$  un point anguleux : la tangente à la trajectoire à l'instant  $t^* + \varepsilon$ , immédiatement après l'instant singulier  $t^*$ , est différente de celle à l'instant immédiatement précédent la collision,  $t^* - \varepsilon$ , voir comme exemple, sur la figure 12.1, le cas d'un point matériel qui rebondit sur une surface fixe.

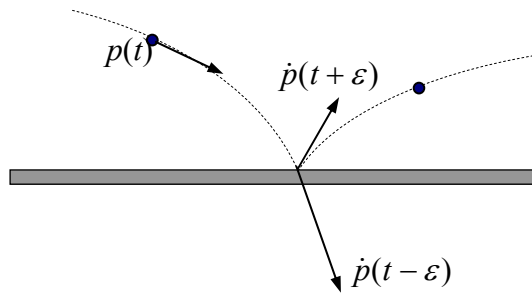


Figure 12.1

La variation de la vitesse à  $t = t^*$  est produite par des forces, dites *impulsives*, qui agissent uniquement à l'instant singulier  $t^*$ , et qui sont dues au contact entre les deux corps. Soit  $\mathbf{f}_p$  la résultante des forces impulsives agissantes au point  $p$  d'un corps ; si la collision se produit à l'instant singulier  $t^*$ , alors l'*impulsion instantanée* de  $\mathbf{f}_p$  est définie comme le vecteur

$$\mathbf{I}_p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t^* - \varepsilon}^{t^* + \varepsilon} \mathbf{f}_p(t) dt .$$

Dans la théorie que nous allons développer, les forces impulsives interviennent donc uniquement par le biais de leur impulsion instantanée, qui s'exerce à l'instant singulier.

### 12.2 L'EQUATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE IMPULSIVE POUR UN POINT MATERIEL

Voyons maintenant comment l'équation fondamentale du mouvement pour un point  $p$  de masse  $m$ ,

$$\mathbf{f} = m \mathbf{a}_p ,$$

se modifie en correspondance d'un choc, voire à  $t = t^*$ . Si on appelle  $\mathbf{F}_p$  la résultante des forces non impulsives, et  $\mathbf{f}_p$  celle des forces impulsives, on aura, à  $t = t^*$ ,

$$m \mathbf{a}_p = \mathbf{f}_p + \mathbf{F}_p .$$

Si on imagine de dilater l'instant  $t^*$  à un intervalle de temps  $[t^*-\varepsilon, t^*+\varepsilon]$ , on peut écrire que

$$m \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{a}_p(t) dt = \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{f}_p(t) dt + \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{F}_p(t) dt ;$$

si maintenant on passe à la limite pour  $\varepsilon$  qui tend vers zéro, voire si on imagine de rétrécir l'intervalle de temps à l'instant singulier, on a que, étant  $\mathbf{F}_p(t)$  une fonction continue du temps, parce que c'est la résultante des forces non impulsives, il est

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{F}_p(t) dt = \mathbf{0} .$$

En outre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{a}_p(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\mathbf{v}_p(t^*+\varepsilon) - \mathbf{v}_p(t^*-\varepsilon)] = \mathbf{v}_p^+ - \mathbf{v}_p^- = \Delta \mathbf{v}_p ,$$

où  $\mathbf{v}_p^-$  est la vitesse de  $p$  immédiatement avant l'instant  $t^*$ , et  $\mathbf{v}_p^+$  celle immédiatement après ; l'opérateur  $\Delta$  indique évidemment l'opération de différence, finie, entre les valeurs d'une quantité après et avant l'instant singulier.

En se souvenant de la définition d'impulsion, on a finalement l'équation fondamentale de la dynamique impulsive pour un point matériel,

$$\mathbf{I}_p = m(\mathbf{v}_p^+ - \mathbf{v}_p^-),$$

voire

$$\mathbf{I}_p = \Delta \mathbf{Q} .$$

L'impulsion est donc équivalente à la variation de la quantité de mouvement à  $t = t^*$ . Si  $\mathbf{I}$  est nulle, l'équation ci-dessus devient une condition de continuité pour  $\mathbf{v}_p$ . Pour les instants différents de l'instant singulier, on continue, naturellement, à utiliser la normale équation du mouvement.

### 12.3 LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE IMPULSIVE POUR LES SYSTEMES

Voyons maintenant comment les équations fondamentales de la dynamique des systèmes matériels, voir le paragraphe 9.6,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{R}^e , \\ \dot{\mathbf{K}}_o &= \mathbf{M}_o^e , \end{aligned}$$

se modifient en correspondance d'un choc, voire pour  $t = t^*$ . Rappelons au préalable que la deuxième équation n'est valable que dans les cas où  $o$  coïncide avec le barycentre  $C$  du système ou pour  $o$  immobile : on se placera toujours dans l'un de ces cas de figure, dans un souci de simplifier les développements analytiques.

Faisons d'abord l'hypothèse que les liens, éventuellement présents dans le système, développent des réactions impulsives simultanées aux forces actives impulsives comme conséquence de celles-ci, même si exercées sur des points différents de ceux qui sont directement soumis aux liens. Pour les forces impulsives aussi est valable le principe d'action et réaction, et par conséquent même les forces impulsives internes forment un système équilibré, voir le paragraphe 9.2.

Comme au paragraphe précédent, on écrira qu'à  $t = t^*$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{R}^e + \mathbf{r}^e, \\ \dot{\mathbf{K}}_o &= \mathbf{M}_o^e + \mathbf{m}_o^e,\end{aligned}$$

où  $\mathbf{r}^e$  est la résultante des forces externes de nature impulsive, et  $\mathbf{m}_o^e$  le moment résultant par rapport à  $o$  des mêmes forces, alors que  $\mathbf{R}^e$  et  $\mathbf{M}_o^e$  sont les mêmes quantités pour les forces non impulsives. Par la même démarche suivie pour le cas d'un seul point, on a donc

$$\begin{aligned}\int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \dot{\mathbf{Q}}(t) dt &= \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{R}^e(t) dt + \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{r}^e(t) dt, \\ \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \dot{\mathbf{K}}_o(t) dt &= \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{M}_o^e(t) dt + \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{m}_o^e(t) dt,\end{aligned}$$

et après passage à la limite pour  $\varepsilon$  qui tend vers zéro, on a finalement les *équations fondamentales de la dynamique impulsive pour les systèmes* :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^e &= \Delta \mathbf{Q}, \\ \mathbf{M}_o^e &= \Delta \mathbf{K}_o.\end{aligned}$$

Dans les deux équations ci-dessus, on a appelé  $\mathbf{R}^e$  la résultante et  $\mathbf{M}_o^e$  le moment résultant par rapport à  $o$  des impulsions externes ; un simple regard aux relations ci-dessus, ainsi qu'à la définition d'impulsion, permet de voir que

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^e &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{r}^e(t) dt = \sum_{i=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{f}_{p_i}^e(t) dt = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{p_i}^e, \\ \mathbf{M}_o^e &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} \mathbf{m}_o^e(t) dt = \sum_{i=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t^*-\varepsilon}^{t^*+\varepsilon} (p_i - o) \wedge \mathbf{f}_{p_i}^e(t) dt = \sum_{i=1}^n (p_i - o) \wedge \mathbf{I}_{p_i}^e.\end{aligned}$$

Encore, à tout instant différent de celui singulier les équations fondamentales de la dynamique non impulsive continuent à valoir.

#### 12.4 CHOC ENTRE CORPS RIGIDES

La première équation fondamentale nous permet de trouver la variation de la vitesse du barycentre due au choc : en fait, en se souvenant, paragraphe 9.4, que

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v}_C,$$

on a immédiatement

$$\Delta \mathbf{v}_C = \frac{1}{m} \mathbf{R}^e.$$

Cette relation est tout à fait générale ; pour un corps rigide on a des résultats supplémentaires : si comme point  $o$  on considère le barycentre  $C$ , alors, voir le paragraphe 11.3, il est

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega},$$

où  $\mathbf{I}_C$  est le tenseur central d'inertie et  $\boldsymbol{\omega}$  la vitesse de rotation du corps. La deuxième équation fondamentale de la dynamique impulsive devient donc

$$\mathbf{M}_C^e = \mathbf{I}_C \Delta \boldsymbol{\omega}.$$

Or, comme  $\mathbf{I}_C$  est un tenseur symétrique défini positif, son déterminant est différent de zéro, et donc  $\mathbf{I}_C$  est inversible, voir le paragraphe 1.18 ; on peut alors écrire que

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_C^{-1} \mathbf{M}_C^e.$$

On peut alors trouver la variation de vitesse d'un point quelconque du corps rigide : si on se rappelle, voir le paragraphe 4.6, que

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge (p - C),$$

on a donc

$$\Delta \mathbf{v}_p = \Delta \mathbf{v}_C + \Delta \boldsymbol{\omega} \wedge (p - C).$$

Dorénavant on s'occupera seulement de chocs entre corps rigides.

## 12.5 VARIATION DE L'ENERGIE CINETIQUE D'UN CORPS RIGIDE A LA SUITE D'UN CHOC

Pour un corps rigide, il est, voir le paragraphe 11.5,

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}.$$

En utilisant les formules du paragraphe précédent on a alors

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_C^{+2} - \mathbf{v}_C^{-2}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}^+ \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega}^- \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}^-);$$

d'ailleurs,

$$\mathbf{v}_C^{+2} - \mathbf{v}_C^{-2} = (\mathbf{v}_C^+ - \mathbf{v}_C^-) \cdot (\mathbf{v}_C^+ + \mathbf{v}_C^-) = \frac{1}{m} \mathbf{R}^e \cdot (\mathbf{v}_C^+ + \mathbf{v}_C^-)$$

et, étant  $\mathbf{I}_C$  symétrique,

$$\boldsymbol{\omega}^+ \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega}^- \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}^- = \mathbf{I}_C (\boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega}^-) \cdot (\boldsymbol{\omega}^+ + \boldsymbol{\omega}^-) = \mathbf{M}_C^e \cdot (\boldsymbol{\omega}^+ + \boldsymbol{\omega}^-),$$

d'où finalement

$$\Delta T = \frac{1}{2} \mathbf{R}^e \cdot (\mathbf{v}_C^+ + \mathbf{v}_C^-) + \frac{1}{2} \mathbf{M}_C^e \cdot (\boldsymbol{\omega}^+ + \boldsymbol{\omega}^-).$$

Si l'on considère que

$$\mathbf{v}_C^+ = \mathbf{v}_C^- + \frac{1}{m} \mathbf{R}^e$$

et que

$$\boldsymbol{\omega}^+ = \boldsymbol{\omega}^- + \mathbf{I}_C^{-1} \mathbf{M}_C^e,$$

on peut exprimer la variation d'énergie cinétique en fonction des seules caractéristiques cinématiques avant la collision et des résultantes des impulsions :

$$\Delta T = \frac{1}{2m} |\mathbf{R}^e|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{M}_C^e \cdot \mathbf{I}_C^{-1} \mathbf{M}_C^e + \mathbf{R}^e \cdot \mathbf{v}_C^- + \mathbf{M}_C^e \cdot \boldsymbol{\omega}^-.$$

## 12.6 CHOC SANS FROTTEMENT ENTRE CORPS RIGIDES LIBRES

Considérons le choc entre deux corps rigides lisses non soumis à liens, et faisons l'hypothèse que le choc se produit en correspondance d'un seul point  $p$ , régulier pour les deux corps, c'est-à-dire un point où la normale à la surface est définie. Par l'absence de frottement, chaque corps transfère à l'autre, au moment du choc, une action normale à la surface au point de contact  $p$ .

Soit  $\mathbf{n}_1$  la normale interne en  $p_1$  au corps 1 et  $\mathbf{n}_2$  la normale interne au corps 2 en  $p_2$ ,  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2 \in \mathcal{S}^2$ . Les points  $p_1$  et  $p_2$  entrent en contact au moment du choc en correspondance du point  $p$ . Soit en outre  $\mathbf{I}_i^j$  l'impulsion du corps  $j$  sur le corps  $i$ ; alors, par le principe d'action et réaction,

$$\mathbf{I}_2^1 = -\mathbf{I}_1^2,$$

et par les hypothèses géométriques faites,

$$\mathbf{I}_1^2 = \mathcal{I} \mathbf{n}_1,$$

$$\mathbf{I}_2^1 = \mathcal{I} \mathbf{n}_2,$$

où évidemment  $\mathcal{I}$  est la norme de l'impulsion; à remarquer qu'au moment singulier  $t^*$  il est aussi, par les hypothèses faites,

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2.$$

Les équations fondamentales de la dynamique impulsive, appliquées à chacun des deux corps, donnent

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}_i &= \mathcal{I} \mathbf{n}_i, \\ \Delta \mathbf{K}_{C_i} &= (p - C_i) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}_i, \quad \forall i=1, 2, \end{aligned}$$

et pour la variation des vitesses, si  $q_i$  est un point quelconque du corps  $i$ , on aura

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{C_i} &= \frac{1}{m_i} \mathcal{I} \mathbf{n}_i, \\ \Delta \boldsymbol{\omega}_i &= \mathbf{I}_{C_i}^{-1} [(p - C_i) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}_i], \quad \forall i=1, 2. \\ \Delta \mathbf{v}_{q_i} &= \frac{1}{m_i} \mathcal{I} \mathbf{n}_i + \left\{ \mathbf{I}_{C_i}^{-1} [(p - C_i) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}_i] \right\} \wedge (p - C_i). \end{aligned}$$

A remarquer que les deux points  $p_1$  et  $p_2$ , qui coïncident en  $p$  pour  $t = t^*$ , n'ont pas la même vitesse, ni avant ni après le choc.

Si  $\mathbf{t} \in \mathcal{S}^2$  est un vecteur appartenant au plan tangent en  $p$  aux deux corps, alors

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad \forall i=1, 2,$$

et donc

$$\Delta \mathbf{v}_{C_i} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \forall i=1, 2,$$

voire

$$\mathbf{v}_{C_i}^+ \cdot \mathbf{t} = \mathbf{v}_{C_i}^- \cdot \mathbf{t} \quad \forall i=1, 2.$$

La projection, sur le plan tangent au point de choc, des vitesses des barycentres est continue à  $t = t^*$ : le mouvement des barycentres des corps en direction tangentielle n'est donc pas affecté par le choc.

Pour terminer, il faut remarquer que la quantité  $\mathcal{I}$  a un caractère réactif, au sens qu'elle est une inconnue du problème. Si l'on connaît  $\mathcal{I}$ , les équations ci-dessus permettent de résoudre complètement le problème du choc, au sens qu'on peut trouver la vitesse de chaque point immédiatement après la collision en fonction des vitesses  $\mathbf{v}_C$  et  $\boldsymbol{\omega}$  avant la collision même. Le problème revient donc à trouver une équation exprimant  $\mathcal{I}$ ; or, les lois générales de la mécanique, c'est-à-dire les lois de conservation, ont déjà été utilisées pour obtenir les lois fondamentales, qui en fait expriment la conservation de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement. Ne pouvant faire appel à aucune loi de caractère générale, valable pour tout corps, il faut utiliser une loi qui décrive le comportement des matériaux constituant les deux corps vis-à-vis du choc. Il s'agit donc d'une *loi constitutive*, ou de *comportement*, qui concerne non pas une propriété générale de tous les corps, mais le comportement d'un type de corps ou d'un matériau particulier. Naturellement, pour faire tout ça il faut faire des hypothèses sur le comportement des corps : nous allons voir dans le paragraphe qui suit l'hypothèse la plus utilisée dans l'étude des collisions.

### 12.7 L'HYPOTHESE CONSTITUTIVE DE NEWTON

Par les hypothèses faites dans le paragraphe précédent, on peut écrire, pour les deux points  $p_1$  et  $p_2$  qui entrent en contact, que

$$\begin{aligned}\dot{p}_i^+ &= \mathbf{v}_{C_i}^+ + \boldsymbol{\omega}^+ \wedge (\mathbf{p} - C_i), \\ \dot{p}_i^- &= \mathbf{v}_{C_i}^- + \boldsymbol{\omega}^- \wedge (\mathbf{p} - C_i).\end{aligned} \quad \forall i = 1, 2.$$

Soit alors  $w$  la *vitesse normale relative*, qui mesure, avant et après le choc, la vitesse relative de  $p_j$  par rapport à  $p_i$  dans la direction de la normale interne  $\mathbf{n}_j$  au corps  $j$  :

$$w = (\dot{p}_2 - \dot{p}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = (\dot{p}_1 - \dot{p}_2) \cdot \mathbf{n}_1.$$

C'est évident que  $w$  est positive lorsque les deux corps s'éloignent, alors qu'elle est négative quand ils se rapprochent.

Nous considérons comme hypothèse constitutive la *loi du choc de Newton* :

$$w^+ = -e w^-.$$

Cette relation donne la valeur de  $w$  après collision en fonction de  $w$  avant le choc ;  $e$  est le *coefficient de restitution*, un paramètre constitutif adimensionnel qui caractérise le comportement des corps qui entrent en collision vis-à-vis du choc, de la même façon que le coefficient de frottement le caractérise par rapport au frottement. Le coefficient de restitution, qui dépend des propriétés élastiques du matériau, varie entre 0 et 1 : si  $e = 0$  le choc est dit *parfaitement anélastique*. Dans ce cas  $w^+ = 0$  et donc après le choc

$$\dot{p}_2^+ = \dot{p}_1^+,$$

voire les deux points continuent à coïncider en  $p$  : les deux corps restent donc à contact après la collision (adhésion parfaite).

Si  $e = 1$ , le choc est dit *parfaitement élastique* : il est évidemment  $w^+ = -w^-$ , voire après le choc la vitesse relative est la même, mais elle change de signe : les deux corps s'éloignent l'un de l'autre (rebond parfait).

Avec cette nouvelle condition, on peut complètement résoudre le problème du choc : en fait



$$\Delta w = -(1 + e) w^- ;$$

d'ailleurs,

$$\Delta w = (\Delta \dot{p}_2 - \Delta \dot{p}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = [\Delta \mathbf{v}_{C_2} + \Delta \boldsymbol{\omega}_2 \wedge (p - C_2) - \Delta \mathbf{v}_{C_1} - \Delta \boldsymbol{\omega}_1 \wedge (p - C_1)] \cdot \mathbf{n}_2 ,$$

et comme  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ ,

$$\Delta w = \sum_{i=1}^2 [\Delta \mathbf{v}_{C_i} + \Delta \boldsymbol{\omega}_i \wedge (p - C_i)] \cdot \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^2 [\Delta \mathbf{v}_{C_i} \cdot \mathbf{n}_i + (p - C_i) \wedge \mathbf{n}_i \cdot \Delta \boldsymbol{\omega}_i] .$$

Si on utilise alors les expressions de  $\Delta \mathbf{v}_C$  et de  $\Delta \boldsymbol{\omega}$ , on trouve

$$\Delta w = \mathcal{I} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{m_i} + [(p - C_i) \wedge \mathbf{n}_i] \cdot \mathbf{I}_{C_i}^{-1} [(p - C_i) \wedge \mathbf{n}_i] \right\} ;$$

on appelle alors

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{m_i} + [(p - C_i) \wedge \mathbf{n}_i] \cdot \mathbf{I}_{C_i}^{-1} [(p - C_i) \wedge \mathbf{n}_i] \right\} ,$$

où la quantité  $\mu$ , appelée *masse d'impact*, a les dimensions d'une masse, et dépend de l'inertie des deux corps, ainsi que de la géométrie de la collision;  $\mu$  est une quantité positive, parce qu'obtenue par la somme d'inverses de masses avec des formes quadratiques définies positives. Donc il est

$$\Delta w = \frac{\mathcal{I}}{\mu} ,$$

et finalement

$$\mathcal{I} = -\mu(1 + e)w^- .$$

On voit bien que, étant  $\mathcal{I}$ ,  $e$  et  $\mu$  des quantités positives,  $w^-$  est négative ; en fait avant la collision les deux corps doivent se rapprocher. Cette dernière relation et les autres trouvées précédemment, permettent de résoudre complètement le problème du choc :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= -\mu(1 + e)w^- \\ \Delta \mathbf{Q}_i &= \mathcal{I} \mathbf{n}_i , \\ \Delta \mathbf{K}_{C_i} &= (p - C_i) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}_i , \\ \Delta \mathbf{v}_{C_i} &= \frac{1}{m_i} \mathcal{I} \mathbf{n}_i , & \forall i=1, 2. \\ \Delta \boldsymbol{\omega}_i &= \mathbf{I}_{C_i}^{-1} [(p - C_i) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}_i] , \\ \Delta \mathbf{v}_{q_i} &= \frac{1}{m_i} \mathcal{I} \mathbf{n}_i + \left\{ \mathbf{I}_{C_i}^{-1} [(p - C_i) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}_i] \right\} \wedge (p - C_i) . \end{aligned}$$

## 12.8 TYPES DE CHOC

On appelle *direct* un choc où

$$\mathbf{v}_{C_i}^- \wedge \mathbf{n}_i = \mathbf{o} \quad \forall i=1, 2.$$

Il s'agit donc d'une collision où la vitesse des deux barycentres immédiatement avant la collision

est parallèle à la normale  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ . Comme

$$\Delta \mathbf{v}_{C_i} = \frac{1}{m_i} \mathcal{I} \mathbf{n}_i \quad \forall i=1, 2,$$

dans un choc direct il est aussi

$$\mathbf{v}_{C_i}^+ \wedge \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad \forall i=1, 2,$$

c'est-à-dire, même après le choc les vitesses des barycentres sont parallèles à  $\mathbf{n}$ . Donc dans un choc direct les directions des vitesses des barycentres ne changent pas.

On appelle *central* un choc où

$$(p - C_i) \wedge \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad \forall i=1, 2.$$

Il s'agit donc d'une collision où les normales  $\mathbf{n}_i$  en  $p$ , point de collision, passent par les barycentres des deux corps, voire  $C_1, p$  et  $C_2$  sont alignés. Dans ce cas on a immédiatement que

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0} \quad \forall i=1, 2,$$

voire il n'y a pas de variation de la vitesse angulaire des deux corps ; ceci comporte que chaque point des deux corps subit la même variation de vitesse que le barycentre correspondant. En outre, de l'expression de  $\mu$  on tire

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

voire

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

et donc dans ce cas particulier,  $\mu$  est exactement la masse réduite, déjà rencontrée aux paragraphes 7.14, dans la solution du problème des deux corps, et 10.7, dans la formule d'addition des tenseurs centraux d'inertie.

## 12.9 PERTE D'ÉNERGIE

La connaissance du coefficient de restitution nous permet de calculer aussi la variation de l'énergie cinétique totale due au choc ; par les formules vues au paragraphe 12.5, on a que

$$\Delta T_i = \frac{1}{2} \mathbf{R}_i^e \cdot (\mathbf{v}_{C_i}^+ + \mathbf{v}_{C_i}^-) + \frac{1}{2} \mathbf{M}_{C_i}^e \cdot (\boldsymbol{\omega}_i^+ + \boldsymbol{\omega}_i^-) \quad \forall i=1, 2.$$

Si alors on utilise les relations qui donnent  $\mathbf{R}^e$  et  $\mathbf{M}_o^e$ , trouvées au paragraphe 12.3, ainsi que les équations fondamentales pour deux corps rigides données au paragraphe 12.6, on a

$$\begin{aligned} \Delta T_i &= \frac{1}{2} \mathcal{I} \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{v}_{C_i}^+ + \mathbf{v}_{C_i}^-) + \frac{1}{2} \mathcal{I}(p - C_i) \wedge \mathbf{n}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i^+ + \boldsymbol{\omega}_i^-) = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{I} \mathbf{n}_i \cdot [(\mathbf{v}_{C_i}^+ + \mathbf{v}_{C_i}^-) + (\boldsymbol{\omega}_i^+ + \boldsymbol{\omega}_i^-) \wedge (p - C_i)] = \frac{1}{2} \mathcal{I} \mathbf{n}_i \cdot (\dot{p}_i^+ + \dot{p}_i^-). \end{aligned} \quad \forall i=1, 2.$$

La variation totale d'énergie cinétique sera donc la somme des deux quantités ci-dessus :

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{1}{2} \mathcal{I} [(\dot{p}_1^+ + \dot{p}_1^-) \cdot \mathbf{n}_1 + (\dot{p}_2^+ + \dot{p}_2^-) \cdot \mathbf{n}_2] = \frac{1}{2} \mathcal{I} [(\dot{p}_2^+ - \dot{p}_1^+) \cdot \mathbf{n}_2 + (\dot{p}_2^- - \dot{p}_1^-) \cdot \mathbf{n}_2] = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{I}(w^+ + w^-) = \frac{1}{2} \mathcal{I}(1-e)w^-, \end{aligned}$$

et finalement, en remplaçant  $\mathcal{I}$  par son expression,

$$\Delta T = -\frac{1}{2} \mu(1-e^2)w^{-2}.$$

Cette équation nous montre que lors d'un choc il y a toujours une perte d'énergie cinétique, sauf si  $e=1$ , voire dans le cas d'un choc parfaitement élastique. Physiquement cela signifie que seulement dans un choc parfaitement élastique toute l'énergie se conserve sous forme d'énergie mécanique ; cette circonstance est fonction de  $e$ , donc des propriétés élastiques des matériaux constituant les deux corps qui entrent en collision. Si le choc n'est pas parfaitement élastique, voire si  $0 < e < 1$ , une partie de l'énergie mécanique du système se transforme en chaleur, forme d'énergie non mécanique ; cette partie augmente si  $e$  diminue. Pour un choc parfaitement anélastique,  $e=0$ , et si  $\mathbf{v}_C^+ = \mathbf{0}$ , choc contre un obstacle fixe, alors toute l'énergie cinétique se transforme en chaleur. Un bilan correct de l'énergie avant et après le choc, dans les cas non parfaitement élastiques, devrait donc tenir compte des formes d'énergie non mécaniques, voire se baser sur le premier principe de la thermodynamique plutôt que sur l'intégrale première de l'énergie mécanique totale.

#### 12.10 CHOC CONTRE UNE PAROI IMMOBILE

Considérons la démarche faite dans les paragraphes précédents pour deux corps, dans le cas limite où l'un de ces deux corps est une paroi immobile ; cela revient à répéter la démarche en ne considérant qu'un seul corps, de masse  $m$ , au lieu de deux. Dans ce cas, si  $\mathbf{n} \in \mathcal{S}^2$  est la normale extérieure à la paroi, on a

$$w = \dot{p} \cdot \mathbf{n},$$

qui est la vitesse normale à la paroi du corps mobile. Les équations deviennent, si  $q$  est un point quelconque du corps mobile,

$$\mathcal{I} = -\mu(1+e)w^-,$$

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathcal{I} \mathbf{n},$$

$$\Delta \mathbf{K}_C = (\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n},$$

$$\Delta \mathbf{v}_C = \frac{1}{m} \mathcal{I} \mathbf{n},$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_C^{-1} [(\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}],$$

$$\Delta \mathbf{v}_q = \frac{1}{m} \mathcal{I} \mathbf{n} + \left\{ \mathbf{I}_C^{-1} [(\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}] \right\} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{C}),$$

$$\Delta T = -\frac{1}{2} \mu(1-e^2)w^{-2},$$

avec

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + [(\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathbf{n}] \cdot \mathbf{I}_C^{-1} [(\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathbf{n}].$$

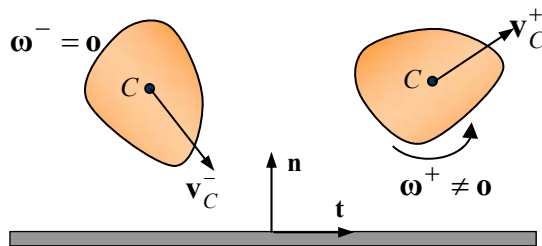


Figure 12.2

Si avant le choc le mouvement est une simple translation, voire si  $\omega^- = \mathbf{0}$ , alors chaque point du corps mobile a, avant le choc, la même vitesse que le barycentre : ceci est valable aussi pour le point qui entre en collision, bien évidemment. Toutefois, cela n'est plus vrai, en général, après la collision : un simple regard à l'équation qui donne la variation de la vitesse de rotation suffit à le montrer : en général, après collision, le corps tourne, voire la figure 12.2. Cependant, même après le choc la vitesse angulaire sera nulle, et donc le corps n'entrera pas en rotation, si

$$(\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

voire si la collision est centrale. Or, par l'équation de variation de la vitesse du barycentre,

$$\mathbf{v}_C^+ = \mathbf{v}_C^- + \Delta \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^- + \frac{1}{m} \mathcal{I} \mathbf{n},$$

et en revenant au cas où  $\omega^- = \mathbf{0}$ , on peut écrire la même équation pour le point qui entre en collision. Alors, en se souvenant de la définition de vitesse normale donnée ci-dessus, ainsi que de l'expression de  $\mathcal{I}$ , on a

$$\mathbf{v}_C^+ \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{v}_C^- \cdot \mathbf{n} \left[ \frac{\mu}{m} (1 + e) - 1 \right].$$

Or,

$$\frac{m}{\mu} = 1 + m[(\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathbf{n}] \cdot \mathbf{I}_C^{-1} [(\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathbf{n}],$$

et donc, étant  $\mathbf{I}_C$  un tenseur défini positif,

$$\frac{m}{\mu} \geq 1 \Rightarrow \frac{\mu}{m} \leq 1.$$

En outre,  $w$  est négative quand  $p$  se rapproche à la paroi, positive quand il s'éloigne, voir la figure 12.3, et donc

$$\mathbf{v}_C^- \cdot \mathbf{n} \leq 0,$$

$$\mathbf{v}_C^+ \cdot \mathbf{n} \geq 0,$$

ce qui comporte

$$0 \leq \frac{\mu}{m} (1 + e) - 1 \leq e \leq 1,$$

et finalement

$$\mathbf{v}_C^+ \cdot \mathbf{n} \leq -\mathbf{v}_C^- \cdot \mathbf{n}.$$

Ceci signifie que l'angle de réflexion  $\alpha_r$  est en général plus grand de l'angle d'incidence  $\alpha_i$ , étant ces angles respectivement les angles que les vitesses avant et après le choc forment avec la normale  $\mathbf{n}$ , voire encore la figure 12.3.

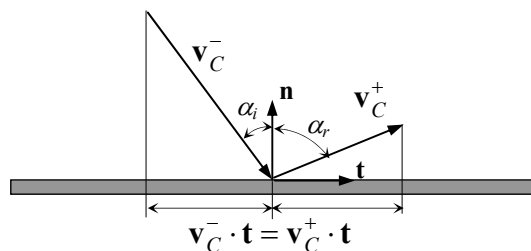


Figure 12.3

En outre, on sait déjà, paragraphe 12.6, que la composante de la vitesse du barycentre orthogonale à  $\mathbf{n}$  se conserve,

$$\Delta \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{t} = 0.$$

Si le choc est central,

$$(\mathbf{p} - \mathbf{C}) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{o},$$

et, en injectant cette condition dans l'expression ci-dessus du rapport  $m/\mu$ , on a immédiatement que

$$\mu = m.$$

Alors,

$$\mathbf{v}_C^+ \cdot \mathbf{n} = -e \mathbf{v}_C^- \cdot \mathbf{n},$$

et donc  $\alpha_r$  sera égal à  $\alpha_i$  si, et seulement si,  $e = 1$ , voire pour un choc parfaitement élastique.

### 12.11 CHOC D'UN CORPS RIGIDE LIBRE CONTRE UN CORPS AYANT UN POINT FIXE

Considérons maintenant le cas d'un choc entre un corps rigide libre et un corps rigide qui a un point fixe  $o$ , sachant que ce deuxième peut tourner dans toutes les directions autour de ce point : c'est le cas d'un corps lié par une rotule sphérique parfaite. Pour le corps libre, rien ne change, alors que pour le corps lié il faut compter non seulement l'impulsion directement due au choc, mais aussi l'impulsion réactive au point  $o$ , qui a moment nul par rapport à ce point.

On peut donc écrire, pour le corps lié,

$$\Delta \mathbf{v}_C = \frac{1}{m} (\mathcal{I} \mathbf{n} + \mathbf{I}_o),$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_o^{-1} [(\mathbf{p} - o) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}],$$

où la deuxième équation a été écrite non pas par rapport à  $C$ , mais au point  $o$ , de façon à éliminer la contribution au moment de l'impulsion réactive  $\mathbf{I}_o$ . On voit bien que le saut de vitesse du barycentre dépend aussi de  $\mathbf{I}_o$ , et qu'en général il n'est plus parallèle à la normale  $\mathbf{n}$ . On peut encore trouver la variation de vitesse du point de collision  $p$ ,

$$\Delta \dot{\mathbf{p}} = \Delta \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{p} - o),$$

qui remplacée dans l'expression de  $\Delta w$  nous permet d'arriver encore à écrire

$$\Delta w = \frac{\mathcal{I}}{\mu},$$

avec cette fois

$$\frac{1}{\mu} = [(p - o) \wedge \mathbf{n}] \cdot \mathbf{I}_o^{-1} [(p - o) \wedge \mathbf{n}] + \frac{1}{m_1} + [(p - C_1) \wedge \mathbf{n}_1] \cdot \mathbf{I}_{C_1}^{-1} [(p - C_1) \wedge \mathbf{n}_1],$$

où avec l'indice 1 on a indiqué les quantités relatives au corps libre.

Une fois l'impulsion calculée, à l'aide encore de la relation

$$\mathcal{I} = -\mu(1 + e)w^-,$$

on peut l'injecter dans l'équation qui donne la variation de la vitesse de rotation pour le corps lié. Quand celle-ci est connue, on la remplace dans l'équation

$$\Delta \mathbf{v}_C = \Delta \boldsymbol{\omega} \wedge (C - o)$$

pour avoir la variation de vitesse du barycentre, et ainsi, en utilisant la relation

$$\Delta \mathbf{v}_C = \frac{1}{m} (\mathcal{I} \mathbf{n} + \mathbf{I}_o)$$

on trouve finalement l'impulsion réactive :

$$\mathbf{I}_o = m \Delta \mathbf{v}_C - \mathcal{I} \mathbf{n} = m \mathbf{I}_o^{-1} [(p - o) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}] \wedge (C - o) - \mathcal{I} \mathbf{n}.$$

## 12.12 CHOC DANS UN PLAN

Considérons le cas de deux corps rigides plans, qui sont soumis à la seule contrainte de se déplacer librement dans un même plan, et qui entrent en collision. Si  $\mathbf{e} \in \mathcal{S}^2$  est orthogonal à ce plan, on peut toujours écrire que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_i &= \omega_i \mathbf{e}, \\ (p - C_i) \wedge \mathbf{n}_i &= \lambda_i \mathbf{e}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad \forall i = 1, 2.$$

En outre,  $\mathbf{e}$  est, évidemment, axe principal d'inertie pour chacun des deux corps, relativement à chaque point du plan du mouvement. Ceci nous permet de simplifier l'équation qui donne  $\Delta \boldsymbol{\omega}_i$  :

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{I_{C_i}^e} [(p - C_i) \wedge \mathcal{I} \mathbf{n}_i], \quad \forall i = 1, 2,$$

où  $I_{C_i}^e$  est le moment central principal d'inertie relatif à la direction  $\mathbf{e}$ , pour le corps  $i$ . De la même façon, la formule qui donne la masse d'impact devient

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{m_i} + \frac{1}{I_{C_i}^e} (p - C_i)_\perp^2 \right],$$

où  $(p - C_i)_\perp$  est la composante de  $(p - C_i)$  sur la direction orthogonale à  $\mathbf{n}_i$  :

$$(p - C_i)_\perp = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i)(p - C_i).$$

Si l'un des deux corps est astreint à tourner autour d'un point fixe  $o$ , tout en restant sur le plan

commun, en suivant la même démarche qu'au paragraphe précédent, on trouvera pour la masse d'impact la formule

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{I_o^e} (p - o)_\perp^2 + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{I_{C_1}^e} (p - C_1)_\perp^2 .$$

Pour terminer, on peut remarquer que différents cas de chocs entre corps soumis à des liens divers peuvent se traiter de la même façon, notamment en adaptant la valeur de la masse d'impact au cas particulier.

## LE PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

## 13.1 LIENS, SYSTEMES HOLONOMES ET ANHOLONOMES

Considérons un système  $S$  de points matériels :

$$S = \{(p_i, m_i) : p_i \in \mathcal{E}, m_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Dans des nombreux problèmes de mécanique, les points constituant un système ne sont pas libres de se déplacer sous l'action des forces imposées, mais ils sont soumis à certaines conditions imposées au mouvement même, conditions qui limitent ce mouvement : ces conditions s'appellent *liens*.

Mathématiquement, les liens sont représentés par des équations ou des inéquations, alors que dans la pratique ils sont réalisés par la présence de connexions entre les corps constituant le système, ou par l'existence de barrières externes qui limitent l'espace de mouvement possible, ou encore par la nature même des corps : caractéristique à ce propos est le lien interne de rigidité, selon lequel un corps est rigide si la distance mutuelle entre deux quelconques de ses points est invariable.

La présence d'un lien comporte deux types de difficultés dans la solution des problèmes de mécanique: la première difficulté est que les positions  $p_i$  des points du système ne sont plus indépendantes, car elles sont liées par les conditions imposées par les liens. Par conséquent, les équations du mouvement

$$\mathbf{f}_i = m_i \ddot{p}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ne sont plus indépendantes. La deuxième difficulté est que les conditions imposées par les liens sur le déplacement du système se traduisent par des forces, appliquées là où le lien se trouve ; ces forces, appelés *réactions*, ont la caractéristique d'être à priori inconnues, et leur valeur peut être calculée seulement à partir de la solution du problème. D'ailleurs, dire qu'un système est soumis à des liens correspond tout simplement à dire que sur le système agissent des forces qu'on n'est pas capable de spécifier directement, mais dont les effets sur le mouvement du système sont connus. On peut seulement ajouter, pour ce qui concerne les réactions internes, que celles-ci constituent un système équilibré, car elles obéissent à la propriété générale des forces internes, comme déjà vu dans le paragraphe 9.2.

Considérons maintenant un type particulièrement important de liens, les liens *holonomes* : un lien est holonome si les conditions imposées par le lien même sont telles que les positions des  $n$  points  $p_i$  et le temps sont liés par des équations du type

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n, t) = 0.$$

Un exemple de lien holonome est celui du lien de rigidité, pour lequel la distance entre deux points quelconques du système s'exprime avec une relation du type

$$(p_i - p_j)^2 = d_{ij}, \quad d_{ij} = \text{const} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Un autre exemple est celui d'un point lié à se déplacer sur une trajectoire connue ou sur une surface donnée. En outre, si le lien ne dépend pas explicitement du temps, alors le lien est *scleronome*, *reonome* dans le cas contraire.



Pour un système holonome, la première des deux difficultés énoncées ci-dessus peut être surmontée : normalement, pour un système de  $n$  points libres, on utilise les  $3n$  coordonnées cartésiennes pour déterminer la position des  $n$  points : ces coordonnées, qui sont indépendantes en raison de l'absence de liens, sont donc les  $3n$  *degrés de liberté* du système. Si  $k$  liens holonomes sont présents, on peut utiliser les  $k$  équations qui les représentent, du type vu ci-dessus, pour éliminer  $k$  des  $3n$  coordonnées, de telle sorte que seulement  $3n-k$  coordonnées indépendantes restent dans le problème. On a ainsi réduit de  $3n$  à  $3n-k$  le nombre de degrés de liberté du système.

Cette réduction peut se faire d'une autre façon, par l'introduction de  $m=3n-k$  nouvelles variables indépendantes  $q_j, j=1, \dots, m$ , en fonction desquelles les positions des points sont exprimées par des relations du type

$$p_i - o = \mathbf{x}_i(q_1, \dots, q_m; t), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad q_j = q_j(t) \quad \forall j=1, 2, \dots, m;$$

ces relations contiennent implicitement les liens. Ces équations sont des équations de transformation du système des variables  $\mathbf{x}_i$  au système des variables  $q_j$ . Les coordonnées  $q_j$  sont appelées *coordonnées généralisées* ou *lagrangiennes*.

Pour que les  $m$  coordonnées lagrangiennes soient effectivement indépendantes il faut que la matrice jacobienne

$$[\mathbf{x}_{ij}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right]_{n \times m}$$

ait rang maximal. Un exemple de système holonome, est celui d'un pendule double : celui-ci est constitué par deux tiges indéformables, de longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  et de masses négligeables, qui portent à leurs extrémités deux points matériels de masses  $m_1$  et  $m_2$ , voir la figure 13.1.

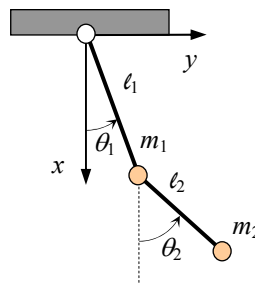


Figure 13.1

Dans le but de déterminer la configuration du système à tout instant, les coordonnées cartésiennes des deux points pourraient être considérées. Cependant, la présence des tiges rigides impose deux conditions au mouvement :

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= \ell_1^2, \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= \ell_2^2. \end{aligned}$$

Le nombre de coordonnées peut donc se réduire de 4 à 2 ; cela peut se faire tout simplement en considérant que

$$\begin{aligned}
x_1 &= \ell_1 \cos \theta_1, \\
y_1 &= \ell_1 \sin \theta_1, \\
x_2 &= x_1 + \ell_2 \cos \theta_2 = \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2, \\
y_2 &= y_1 + \ell_2 \sin \theta_2 = \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2.
\end{aligned}$$

Une configuration quelconque du système est donc complètement déterminée par la connaissance des deux seuls angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  que les deux tiges forment avec l'axe  $x$ , voir encore la figure 13.1. Ces deux angles sont donc des coordonnées lagrangiennes possibles du problème ; possibles, dans le sens qu'elles ne sont pas les seules, d'autres choix pouvant être faits, comme par exemple encore  $\theta_1$  et l'angle de rotation relative entre les deux tiges. Le choix des coordonnées lagrangiennes, en effet, n'est pas unique, en général ; parmi les différents choix possibles pour un système donné, aucun ne peut se dire meilleur des autres à priori. Parfois un jeu particulier de coordonnées lagrangiennes facilite les développements analytiques, mais cela est difficilement prévisible à l'avance. Toutefois, pour les problèmes d'analyse des petits mouvements d'un système autour d'une configuration d'équilibre stable, on verra dans le chapitre 16 l'existence d'un ensemble particulier, privilégié par rapport aux autres, de coordonnées lagrangiennes, les *coordonnées normales*, mais leur détermination à priori est encore impossible, en général.

Les vitesses des points d'un système holonome peuvent être facilement exprimées en fonction des coordonnées lagrangiennes (on utilise ici la convention d'Einstein sur la somme) :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_{ij} \dot{q}_j + \mathbf{x}_{it}, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m,$$

où on a défini les *vitesses lagrangiennes*

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \quad j=1, 2, \dots, m$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{ij}(q_j, t) &= \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}, \\
\mathbf{x}_{it}(q_j, t) &= \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t},
\end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, \dots, m.$$

En dérivant l'expression de la vitesse ci-dessus, on trouve l'accélération d'un point du système en fonction des coordonnées lagrangiennes :

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{x}_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2\mathbf{x}_{ijt} \dot{q}_j + \mathbf{x}_{ij} \ddot{q}_j + \mathbf{x}_{itt}, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m,$$

où on a posé

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_j &= \frac{d^2 q_j}{dt^2}, \\
\mathbf{x}_{ijk} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_k \partial q_j}, \\
\mathbf{x}_{ijt} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}, \\
\mathbf{x}_{itt} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial t^2},
\end{aligned} \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m.$$

Dans la suite de ce cours, on ne s'occupera que des systèmes holonomes, et le plus souvent de systèmes scléronomes, pour lesquels les liens, qui n'évoluent pas au fil du temps, ne dépendent pas explicitement de celui-ci. Toutefois, il existe des liens qui ne peuvent pas s'exprimer par des équations du type

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n, t) = 0 ;$$

ces liens sont appelés *anholonomes* ; un cas typique de lien anholonome est celui d'un point astreint à se déplacer librement à l'intérieur d'une région donnée, comme c'est le cas par exemple des particules d'un gaz contenu à l'intérieur d'une sphère : la position  $p$  de chaque particule doit obéir à une inégalité du type

$$(p - o)^2 \leq R^2 ,$$

$o$  et  $R$  étant respectivement le centre et le rayon de la sphère. Le lien n'est donc pas holonome parce qu'il est exprimé en forme d'inégalité.

Un autre type de lien anholonome est celui où les coordonnées cartésiennes dépendent non seulement des coordonnées lagrangiennes (outre que du temps), mais de leurs dérivées aussi :

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots, \dot{p}_n, t) = 0 .$$

Le problème avec les liens anholonomes est qu'il n'est pas possible de les utiliser pour éliminer les coordonnées dépendantes. Voyons cela avec un exemple classique, celui d'une roue qui roule sans glisser sur un plan, figure 13.2.

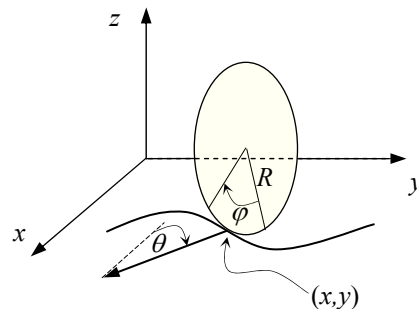


Figure 13.2

Supposons que la roue, de rayon  $R$ , reste toujours verticale. Les coordonnées à utiliser pour décrire le mouvement pourraient être, par exemple, les coordonnées  $(x, y)$  du point de contact, l'angle  $\theta$  qu'une droite horizontale orientée forme avec l'axe  $x$  et l'angle  $\varphi$  de rotation de la roue autour de son axe. Le lien de non-glissement s'impose comme condition entre la vitesse du point de contact et la vitesse de rotation de la roue autour de son axe :

$$v = R\dot{\varphi} ;$$

La direction de  $v$  est perpendiculaire à l'axe de la roue, et donc

$$\dot{x} = v \sin \theta ,$$

$$\dot{y} = v \cos \theta ,$$

et si on injecte dans ces deux relations l'expression de  $v$ , on trouve deux équations différentielles qui expriment la condition du lien :

$$dx - R d\varphi \sin \theta = 0 ,$$

$$dy - R d\varphi \cos \theta = 0 .$$

Ces équations ne peuvent être intégrées qu'après la solution complète du problème, et donc le lien est inutilisable pour réduire a priori le nombre de coordonnées. C'est un type de lien anholonome dit *non intégrable*.

Dans le chapitre suivant on verra une méthode capable de réduire toujours, pour les systèmes holonomes, le nombre des coordonnées et d'éliminer les réactions inconnues. Pour les systèmes anholonomes il n'existe pas une méthode générale de solution, et chaque cas doit être traité à part. Toutefois, si les liens sont du type non intégrable, une fois introduites les équations différentielles du lien, on peut éliminer les équations dépendantes avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange; nous ne développerons pas cette méthode. Cependant, voyons comme dans l'exemple de la roue une condition supplémentaire permet de rendre intégrable le lien, même si anholonome. Supposons en fait que la roue soit obligée à rouler sur une ligne droite, par exemple l'axe  $y$ , et donc  $\theta = 0$ . Dans ce cas les deux équations différentielles du lien se réduisent à

$$\begin{aligned} dx &= 0, \\ dy &= R d\varphi, \end{aligned}$$

qui peuvent être facilement intégrées, pour donner, si la roue au départ se trouve en correspondance de l'origine du repère,

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= R\varphi. \end{aligned}$$

Donc ce cas particulier est encore traitable avec la méthode propre des systèmes holonomes.

### 13.2 DEPLACEMENTS, VITESSES, TRAVAIL ET PUISSANCE VIRTUELS

Un *déplacement virtuel* d'un système est défini par la relation suivante:

$$\delta p_i = \mathbf{x}_{ij} \delta q_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

où les quantités  $\delta q_j$ , arbitraires et infinitésimales, sont des incréments, c'est-à-dire des variations arbitraires, des coordonnées lagrangiennes. Donc un déplacement virtuel n'est qu'une variation infinitésimale et arbitraire de la configuration du système à l'instant  $t$ , c'est-à-dire à temps bloqué. En général, donc,  $(p_i, \delta p_i)$  est un champ de déplacements virtuels si les  $\delta p_i$  sont des déplacements infinitésimaux compatibles avec les liens du système, considérés à l'instant  $t$ , où les points du système se trouvent en  $p_i$  et les forces sont celles agissantes à  $t$ , instant considéré. Si, en outre, même le champ  $(p_i, -\delta p_i)$  est virtuel, alors le champ  $(p_i, \delta p_i)$  est dit *réversible*.

On dit, au contraire, qu'un déplacement est *possible* si

$$dp_i = \mathbf{x}_{ij} dq_j + \mathbf{x}_{it} dt, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

quantité qui est la différentielle totale de la fonction  $p_i$ . Un déplacement possible est donc un déplacement d'une configuration à l'instant  $t$  à une autre à l'instant  $t+dt$  : il s'agit d'un déplacement compatible avec les liens et leur évolution temporelle. Naturellement, pour les liens scleronomes qui, n'évoluent pas dans le temps, déplacements virtuels et possibles coïncident. En tant que différences des points, aussi bien  $\delta p_i$  que  $dp_i$  sont des vecteurs.

Un exemple qui montre la différence entre déplacements virtuels et possibles est le suivant: considérons un point  $p$  obligé à se déplacer sur un cercle, dont le rayon varie au fil du temps:  $r=r(t)$ . Alors, un déplacement virtuel est celui du point sur la circonférence avec le rayon  $r(t)$ , c'est-à-dire le rayon bloqué à l'instant  $t$ , alors qu'un déplacement possible est celui d'une position sur la circonférence de rayon  $r(t)$  à une position sur la circonférence de rayon  $r(t+dt)$ , voir la figure 13.3.

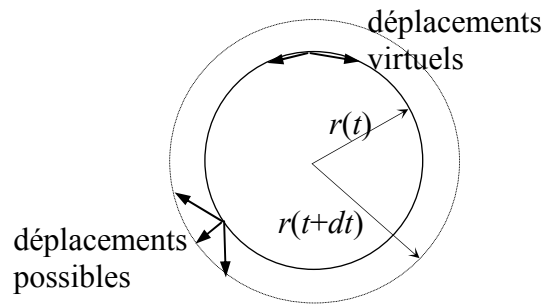


Figure 13.3

On définit *vitesse virtuelle* d'un point  $p_i$  la quantité

$$\delta \mathbf{v}_i = \mathbf{x}_{ij} \delta \dot{q}_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

où

$$\delta \dot{q}_j = \frac{\delta q_j}{\delta t}, \quad j=1, 2, \dots, m$$

sont les *vitesse généralisées* d'un mouvement virtuel.

On définit *travail virtuel* des forces  $\mathbf{F}_i$  la quantité

$$\delta \mathcal{L} = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_{ij} \delta q_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Avec  $\mathbf{F}_i$  on a indiqué ci-dessus une force quelconque; il faut remarquer que le travail virtuel n'est pas le vrai travail d'une force, c'est-à-dire qu'il n'est pas le travail fait par une force à la suite du déplacement effectif de son point d'application, déplacement provoqué par la force même. En fait, le déplacement virtuel est purement arbitraire, et en outre dans le calcul du travail virtuel la valeur de la force est celle bloquée à l'instant  $t$  d'application du déplacement virtuel.

D'une façon analogue à ce qu'on a fait avec le travail, on définit *puissance virtuelle* des forces pour un déplacement virtuel donné la quantité

$$\delta W = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_{ij} \delta \dot{q}_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Pour la puissance sont valables les mêmes remarques faites pour le travail.

### 13.3 CLASSIFICATION ENERGETIQUE DES LIENS

Cette classification des liens est appelée *énergétique* parce qu'elle est basée sur l'analyse du travail virtuel des forces de réactions.

Nous appelons *non-dissipatif* un lien pour lequel le travail virtuel des réactions est majeur ou égal à zéro :

$$\delta \mathcal{L}^{(r)} = \Phi_i \cdot \delta \mathbf{p}_i = \Phi_i \cdot \mathbf{x}_{ij} \delta q_j \geq 0 \quad \forall \delta q_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Encore, on pourrait donner la même définition avec la puissance virtuelle :

$$\delta W^{(r)} = \Phi_i \cdot \delta \mathbf{v}_i = \Phi_i \cdot \mathbf{x}_{ij} \delta \dot{q}_j \geq 0 \quad \forall \delta \dot{q}_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Il faut remarquer qu'on demande que ce soit nul le travail, ou la puissance, virtuel et non pas le travail effectif, qui ferait intervenir les déplacements possibles, et donc une partie du déplacement

dépendant du temps. Ci-dessus, comme dans la suite aussi, on a indiqué avec  $\Phi_i$  toute réaction que le lien peut expliquer.

Si  $(p_i, \delta p_i)$  est réversible, alors même  $(p_i, -\delta p_i)$  est virtuel, et même pour celui-ci doit être  $\delta \mathcal{L}^{(r)} \geq 0$ ; mais dans ce cas on a

$$\delta \mathcal{L}^{(r)} = -\Phi_i \cdot \delta p_i \geq 0,$$

ce qui donne :

$$\delta \mathcal{L}^{(r)} = 0.$$

Cette relation caractérise les liens qui permettent des déplacements virtuels réversibles: ce sont les liens *bilatéraux*. Finalement, on peut penser à l'existence de liens pour lesquels le signe d'égalité, dans la définition de lien non-dissipatif, est toujours valable, indépendamment de la réversibilité du champ de déplacements virtuels : ces liens sont appelés *parfaits* ou *idéaux*.

#### 13.4 LE PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

Nous énonçons le *principe des travaux virtuels* de la façon suivante: pour un système à liens non-dissipatifs, pour chaque champ de déplacements virtuels on a

$$\delta \mathcal{L}^{(m)} + \delta \mathcal{L}^{(a)} \leq 0.$$

Le signe d'égalité est valable si tous les liens sont réversibles, ou bien sûr parfaits. Dans la relation ci-dessus, il est:

$$\delta \mathcal{L}^{(m)} = -m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

qui représente le travail virtuel des forces d'inertie, et

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

qui est le travail virtuel des forces actives. Le principe des travaux virtuels établit donc que le travail des forces d'inertie et actives est nul ou négatif pour tout déplacement virtuel. A part les hypothèses faites sur les liens, il n'y a pas d'autres restrictions, et donc il représente un principe de grande généralité en mécanique.

Pour certains auteurs, on parle de principe des travaux virtuels seulement dans le cas de la statique, et le principe ci-dessus est appelé *principe général de la dynamique*, ou *relation formelle de la dynamique*. Le fait important, c'est qu'il s'agit d'un principe général, dont l'importance est énorme. D'un point de vue historique, dans la forme actuelle il a été formulé d'une façon correcte en 1717 par Jean Bernoulli, dans une lettre adressée à Varignon ; toutefois, déjà Descartes avait compris l'existence d'un principe semblable, et il l'avait conçu en terme de déplacements infinitésimaux, voire de puissances. Lagrange, quant à lui, affirme que ce principe est dû à Galilée. Dans tous les cas, il a été formulé comme principe de la statique

Il faut se souvenir que dans le calcul du travail virtuel, la valeur des forces est celle bloquée à l'instant d'application du déplacement virtuel. C'est ce dernier qui est imposé et arbitraire, et c'est pour cela que souvent ce principe est connu aussi bien avec le nom de *principe des déplacements virtuels*.

Encore, on peut énoncer le principe avec les puissances plutôt qu'avec les travaux, et il serait même, pour certains aspects, plus correct ; dans ce cas, évidemment, le principe s'écrit

$$\delta W^{(m)} + \delta W^{(a)} \leq 0,$$

avec

$$\delta W^{(m)} = -m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

qui représente la puissance virtuelle des forces d'inertie, et

$$\delta W^{(a)} = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

qui est la puissance virtuelle des forces actives. Dans ce cas le principe est appelé *principe des puissances* ou des *vitesse virtuelles*. Un avantage immédiat du principe des puissances virtuelles est qu'il ne fait pas appel à des quantités infinitésimales.

Il faut remarquer que le champ de déplacements virtuels qu'on utilise est infinitésimal ; donc, lors de l'analyse d'un système composé par des corps rigides, on utilisera les lois typiques d'un déplacement rigide infinitésimal, qui correspondent aux lois des vitesses, comme on a vu dans le paragraphe 5.7.

### 13.5 EQUIVALENCE DU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS ET DE LA LOI DU MOUVEMENT

L'importance du principe des travaux virtuels réside dans le fait qu'il est complètement équivalent aux équations générales du mouvement, comme établi par le théorème suivant:

**Théorème:** si les liens sont non-dissipatifs, le principe des travaux virtuels est équivalent aux équations du mouvement.

Pour démontrer ce théorème, montrons d'abord qu'on retrouve le principe de travaux virtuels à partir des équations du mouvement. Dans le cas d'un système avec liens les équations du mouvement s'écrivent

$$-m_i \mathbf{a}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i = \mathbf{0};$$

on choisit un champ de déplacements virtuels et on calcule les travaux virtuels :

$$-m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i + \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i + \mathbf{\Phi}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta \mathcal{L}^{(m)} + \delta \mathcal{L}^{(a)} + \delta \mathcal{L}^{(r)} = 0;$$

grâce à l'hypothèse de liens non-dissipatifs on a alors le principe des travaux virtuels:

$$\delta \mathcal{L}^{(m)} + \delta \mathcal{L}^{(a)} \leq 0.$$

Maintenant il faut faire le parcours inverse : partir du principe des travaux virtuels pour montrer les équations fondamentales de la dynamique. On sait que pour chaque champ de déplacements virtuels

$$\delta \mathcal{L}^{(m)} + \delta \mathcal{L}^{(a)} \leq 0;$$

on partage en deux sous-systèmes  $S_1$  et  $S_2$  le système matériel  $S = S_1 \cup S_2$ , avec

$$S_1 = \{(p_i, m_i) : p_i \in \mathcal{E}, m_i \in \mathbb{R}^+, i=1, 2, \dots, n_1\},$$

sous-ensemble des points libres, non soumis à l'action des liens, internes ou externes, et

$$S_2 = \{(p_i, m_i) : p_i \in \mathcal{E}, m_i \in \mathbb{R}^+, i=n_1+1, 2, \dots, n\},$$

sous-ensemble des points soumis à des liens. Alors, par la liberté de choix du champ des déplacements virtuels, on prend comme champ virtuel le suivant :

$$\delta p_i = 0 \quad \forall i = n_1 + 1, \dots, n,$$

c'est-à-dire qu'on ne donne pas un déplacement aux points liés. Alors, le champ donné  $(p_i, \delta p_i)$  est sûrement réversible, parce qu'il est constitué par des déplacements virtuels de points non liés, et donc, dans ce cas, le principe des travaux virtuels nous assure que:

$$-m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta p_i + \mathbf{F}_i \cdot \delta p_i = 0 \quad \forall \delta p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_1,$$

ce qui implique, étant les  $\delta p_i$  arbitraires, qu'il soit

$$\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n_1.$$

Celles-ci sont les équations du mouvement pour les points non liés. Maintenant, on se tourne vers les points liés, et on prend le champ de déplacements virtuels suivant:

$$\delta p_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_1,$$

c'est-à-dire qu'on ne donne pas un déplacement aux points libres. Par le principe des travaux virtuels on a alors

$$-m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta p_i + \mathbf{F}_i \cdot \delta p_i \leq 0 \quad \forall \delta p_i, \quad i = n_1 + 1, \dots, n;$$

ensuite on pose

$$\Phi_i = m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i, \quad i = n_1 + 1, \dots, n,$$

qui sont les équations du mouvement des points liés ; on voit bien que les  $\Phi_i$  sont les réactions que les liens peuvent produire, parce que, par l'inégalité du principe des travaux virtuels, il est

$$\delta \mathcal{L}^{(r)} = \Phi_i \cdot \delta p_i = (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta p_i \geq 0 \quad \forall \delta p_i, \quad i = n_1 + 1, \dots, n.$$

Donc, à partir du principe des travaux virtuels on retrouve les équations fondamentales de la dynamique. La correspondance entre celles-ci et le principe est donc totale. Grâce à cette correspondance, on peut aborder l'étude du mouvement d'un autre point de vue, sur la base de considérations énergétiques, ce qui a, souvent, des avantages considérables. En outre, on montrera dans le chapitre suivant comment, à partir du principe des travaux virtuels, on arrive aux équations de Lagrange, autre formulation possible pour les équations du mouvement.

### 13.6 EQUIVALENCE D'EQUATIONS FONDAMENTALES ET LOI DU MOUVEMENT POUR UN CORPS RIGIDE

Dans le paragraphe 11.7, lorsqu'on a introduit les équations fondamentales de la dynamique du corps rigide, on avait annoncé que celles-ci sont parfaitement équivalentes à la loi du mouvement, au sens qu'elles peuvent déterminer le mouvement de chaque point du système. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer cette affirmation.

**Théorème** : pour un corps rigide soumis à des liens externes non-dissipatifs les équations fondamentales de la dynamique sont équivalentes à la loi du mouvement.

Le lien interne de rigidité est un lien parfait : en fait, si on appelle  $\phi_i$  les forces internes qui assurent le lien de rigidité, en se rappelant la première loi de la cinématique pour les corps rigides, voir le paragraphe 4.6, on a,

$$\delta W^{(r,i)} = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot \delta p_i = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot [\delta \mathbf{v}_o + \delta \boldsymbol{\omega} \wedge (p_i - o)] = \delta \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{R}^{(r,i)} + \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_o^{(r,i)}.$$

Ci-dessus, on a indiqué avec  $\mathbf{R}^{(r,i)}$  la résultante des forces internes de rigidité, et avec  $\mathbf{M}_o^{(r,i)}$  leur moment résultant par rapport au point  $o$ . Comme les forces internes sont équilibrées, voir le



paragraphe 9.2, la puissance virtuelle des forces internes est nulle, et donc le lien interne de rigidité est parfait.

Par conséquent, les liens imposés au système, internes et externes ensemble, respectent la condition

$$\delta W^{(r)} \geq 0;$$

cela implique qu'on est dans le cas de figure du théorème du paragraphe précédent, et donc les lois du mouvement sont équivalentes au principe des travaux virtuels. Pour compléter la démonstration, il nous suffit de montrer que la loi du mouvement peut être trouvée à partir des équations fondamentales, parce que le chemin inverse a déjà été fait lorsqu'on a trouvé les équations fondamentales à partir de la loi du mouvement.

Or, comme le principe des travaux virtuels est, dans le cas de figure, équivalent à la loi du mouvement, il nous reste à montrer qu'à partir des équations fondamentales de la dynamique du corps rigide on peut retrouver le principe des travaux virtuels. En effet, comme les forces internes ont résultante nulle, on peut écrire, en appliquant les équations fondamentales, que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^m &= -\mathbf{R}^a = -\dot{\mathbf{Q}}, \\ \mathbf{M}_o^m &= -\mathbf{M}_o^a = -(\dot{\mathbf{K}}_o + \mathbf{v}_o \wedge m\mathbf{v}_C), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{R}^m$  est la résultante des forces d'inertie, et  $\mathbf{M}_o^m$  leur moment résultant par rapport à  $o$ . Comme la puissance virtuelle des forces actives internes est nulle, pour la même raison vue pour les forces réactives internes, c'est-à-dire parce qu'un système de forces internes est équilibré, il est, grâce au lien de rigidité,

$$\delta W^{(a)} + \delta W^{(m)} = \delta \mathbf{v}_o \cdot (\mathbf{R}^{(a,e)} - \dot{\mathbf{Q}}) + \delta \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{M}_o^{(a,e)} - \dot{\mathbf{K}}_o - \mathbf{v}_o \wedge m\mathbf{v}_C),$$

où  $\mathbf{R}^{(a,e)}$  est la résultante des forces externes actives et  $\mathbf{M}_o^{(a,e)}$  leur moment résultant par rapport à  $o$ . Or, comme pour les forces réactives externes il est évidemment

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(r,e)} &= \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{R}^{(a,e)}, \\ \mathbf{M}_o^{(r,e)} &= \dot{\mathbf{K}}_o + \mathbf{v}_o \wedge m\mathbf{v}_C - \mathbf{M}_o^{(a,e)}, \end{aligned}$$

on a, par l'hypothèse sur les liens externes, non-dissipatifs,

$$\delta W^{(a)} + \delta W^{(m)} = -\delta \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{R}^{(r,e)} - \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_o^{(r,e)} = -\delta W^{(r,e)} \leq 0,$$

ce qui complète la démonstration.

### 13.7 PASSAGE A LA STATIQUE

On peut regarder à la statique comme à la dynamique des systèmes immobiles, c'est-à-dire des systèmes dont la vitesse de chaque point est nulle. C'est évident, alors, que les forces d'inertie sont nulles, et ainsi le travail virtuel de ces forces. Alors, en statique, le principe des travaux virtuels s'écrit tout simplement

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} \leq 0$$

pour chaque champ de déplacements virtuels; le signe d'égalité est toujours pour le cas des liens bilatéraux ou parfaits. Ce principe permet d'établir les conditions d'équilibre d'un système. Il est très utilisé, par exemple, pour la recherche des réactions inconnues des structures isostatiques: dans ce cas, on substitue un lien avec la réaction correspondante, considérée comme force active, on assigne un champ de déplacement arbitraire (qui dépendra nécessairement d'un seul paramètre

arbitraire, parce que grâce à l'élimination d'un lien, la structure est devenue une fois hypostatique), et on calcul le travail virtuel correspondant, où la seule inconnue est la réaction en question. Par la liberté du choix du déplacement virtuel, on trouve la valeur de la réaction.

Le principe des travaux virtuel est, par le théorème précédent, parfaitement équivalent aux équations fondamentales de la statique, qui pour un corps rigide sont

$$\mathbf{R} = \mathbf{o};$$

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{o}.$$

Le principe des travaux virtuels en statique est donc le principe fondamental de l'équilibre.

## LES EQUATIONS DE LAGRANGE

### 14.1 LES EQUATIONS DE LAGRANGE DANS LE CAS GENERAL

Considérons un système matériel, pour lequel on fera deux hypothèses seulement : le système est holonome et les liens sont non-dissipatifs et bilatéraux (voire, parfaits). Cette deuxième hypothèse nous assure que le travail virtuel des réactions est nul et que le principe des travaux virtuels s'écrit (on utilise la convention d'Einstein pour la somme)

$$\delta\mathcal{L}^{(m)} + \delta\mathcal{L}^{(a)} = -m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta\mathbf{p}_i + \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{p}_i = 0 ;$$

d'ailleurs,

$$\delta\mathbf{p}_i = \mathbf{x}_{ih} \delta q_h$$

et donc

$$-m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_{ih} \delta q_h + \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_{ih} \delta q_h = 0 .$$

On pose alors

$$Q_h = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_{ih} , \quad h=1, 2, \dots, m,$$

qui représente la *composante lagrangienne des forces actives* sur la coordonnée généralisée  $q_h$ . Le travail virtuel des forces actives est donc:

$$\delta\mathcal{L}^{(a)} = Q_h \delta q_h .$$

Ensuite, on pose

$$\tau_h = m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_{ih} , \quad h= 1, 2, \dots, m,$$

qui représente la *composante lagrangienne des forces d'inertie* sur  $q_h$ . Le travail virtuel des forces d'inertie est donc

$$\delta\mathcal{L}^{(m)} = -\tau_h \delta q_h .$$

Le principe des travaux virtuels peut donc s'écrire

$$(Q_h - \tau_h) \delta q_h = 0 ;$$

à cause du fait que les déplacements virtuels sont arbitraires, cette égalité doit être valable pour chaque champ de déplacements virtuels. Comme le système est holonome, et donc les  $q_h$ , ainsi que leurs variations  $\delta q_h$ , sont indépendantes les unes des autres, ceci est possible si et seulement si

$$Q_h = \tau_h \quad \forall h=1, 2, \dots, m .$$

Pour parvenir aux équations de Lagrange il faut maintenant développer l'expression de  $\tau_h$ :

$$\tau_h = m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_{ih} = m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{x}_{ih} ;$$

d'ailleurs

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_{ih}\dot{q}_h + \mathbf{x}_{it},$$

et si on dérive par rapport à  $\dot{q}_h$  on a

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} = \mathbf{x}_{ih}.$$

Si on injecte cela dans l'expression de  $\tau_h$ , on trouve

$$\tau_h = m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h},$$

quantité qui peut être réécrite comme

$$\tau_h = \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right)' - m_i \mathbf{v}_i \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right)'$$

D'ailleurs, l'expression de l'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i,$$

et donc

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} = m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h},$$

qui est le premier terme à deuxième membre dans l'expression de  $\tau_h$ . Cherchons maintenant de transformer l'autre terme:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right)' = \dot{\mathbf{x}}_{ih} = \mathbf{x}_{ihj} \dot{q}_j + \mathbf{x}_{iht},$$

où

$$\mathbf{x}_{ihj} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_j \partial q_h}, \quad \mathbf{x}_{iht} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial t \partial q_h};$$

dans l'hypothèse de continuité des dérivées secondes mixtes, on a, par le théorème de Schwarz,

$$\mathbf{x}_{ihj} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_j \partial q_h} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_h \partial q_j} = \mathbf{x}_{ijh},$$

$$\mathbf{x}_{iht} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial t \partial q_h} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_h \partial t} = \mathbf{x}_{ith},$$

et donc on peut écrire

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right)' = \mathbf{x}_{ijh} \dot{q}_j + \mathbf{x}_{ith} = \frac{\partial}{\partial q_h} (\mathbf{x}_{ij} \dot{q}_j + \mathbf{x}_{it}).$$

Le terme entre parenthèse dans l'expression ci-dessus est tout simplement  $\mathbf{v}_i$ , et donc finalement on a

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h},$$

égalité qui constitue le *lemme de Lagrange*. En injectant ces résultats dans l'expression de  $\tau_h$  on trouve

$$\tau_h = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h};$$

d'ailleurs,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} = m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h},$$

et alors on a l'expression finale pour  $\tau_h$ :

$$\tau_h = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}.$$

Finalement, en se souvenant que  $Q_h = \tau_h$ , on a les *équations de Lagrange* (1788) dans le cas général:

$$Q_h = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}, \quad h=1, 2, \dots, m.$$

Celles-ci sont  $m$  équations, une pour chaque degré de liberté, qui, étant dérivées du principe des travaux virtuels, sont équivalentes aux équations de mouvement du système. Elles décrivent la variation temporelle des coordonnées lagrangiennes en fonction des seules forces actives ; en fait, pour écrire les équations de Lagrange, il suffit  $Q_h$  et  $T$ . A remarquer que ces équations s'écrivent à partir des quantités scalaires, et non pas vectorielles. De ces équations on tire les  $q_h(t)$ , et ensuite les positions  $p_i = \mathbf{x}_i(q_j, t)$ . Par double dérivation, on trouve alors les accélérations  $\mathbf{a}_i$ , et on peut remonter aux réactions inconnues grâce aux équations générales de mouvement:

$$\mathbf{\Phi}_i = m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i,$$

ou, dans le cas d'un corps rigide, par les équations correspondantes, voir le paragraphe 11.7.

Les équations de Lagrange éliminent donc du calcul les réactions, qui sont inconnues ; celles-ci sont calculées à la fin, une fois connu le mouvement du système. Cette circonstance est l'un des avantages des équations de Lagrange. Un autre avantage, déjà mis en évidence par Lagrange même, est le fait que l'écriture des équations du mouvement, surtout, comme on verra, dans le cas des forces conservatives, est assez automatique, méthodique: une fois exprimée l'énergie cinétique et le  $Q_h$ , "le reste ne sera plus qu'une affaire de pur calcul", avec les propres mots de Lagrange.

Si l'on cherche la configuration d'équilibre, c'est-à-dire si on se borne à la statique, alors  $T=0$ , et donc les équations se réduisent tout simplement à

$$Q_h = 0, \quad h=1, 2, \dots, m.$$

## 14.2 LES EQUATIONS DE LAGRANGE POUR LES SYSTEMES CONSERVATIFS

Si toutes les forces actives sont conservatives,

$$\mathbf{F}_i = \nabla U_i,$$

les équations de Lagrange se simplifient; en fait, dans ce cas le travail virtuel des forces actives peut être réécrit comme

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i = \nabla U_i \cdot \delta \mathbf{p}_i = \nabla U_i \cdot \mathbf{x}_{ih} \delta q_h = \nabla U_i \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h;$$

Si on indique avec  $U$  le potentiel total des forces actives, on a

$$\frac{\partial \mathcal{U}[p_i(q_h)]}{\partial q_h} = \nabla U_i \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \dot{q}_h} = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_{ih} = Q_h$$

et donc

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_h} \delta q_h = Q_h \delta q_h.$$

Les équations de Lagrange deviennent alors

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_h} = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right)' - \frac{\partial T}{\partial q_h}, \quad h=1, 2, \dots, m;$$

si on pose

$$L = T + U,$$

fonction appelée *lagrangienne* du système, étant

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_h} = 0, \quad h=1, 2, \dots, m,$$

car le potentiel des forces conservatives ne peut pas dépendre des vitesses, on a finalement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0, \quad h=1, 2, \dots, m,$$

qui sont les *équations de Lagrange pour les systèmes conservatifs*, qui est leur forme la plus connue. Dans les hypothèses vues, tout le problème se ramène donc à l'écriture de la lagrangienne, après ce n'est que du calcul analytique.

Dans le cas des systèmes conservatifs, les équations de Lagrange pour la recherche des configurations d'équilibre ( $T=0$ ) se réduisent à

$$Q_h = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_h} = 0, \quad h=1, 2, \dots, m,$$

c'est-à-dire à

$$\nabla U = \mathbf{0},$$

équation qui exprime la circonstance remarquable que pour un système conservatif les configurations d'équilibre sont celles qui rendent stationnaire le potentiel total des forces actives.

La démarche générale pour l'étude des systèmes conservatifs peut finalement se résumer dans les points suivants:

1. détermination du nombre des degrés de liberté et choix des coordonnées lagrangiennes;
2. calcul de l'énergie cinétique du système en fonction des coordonnées lagrangiennes;
3. calcul du potentiel total du système;

4. assemblage de la lagrangienne;
5. écriture des équations du mouvement;
6. solution des équations du mouvement;
7. calcul des  $p_i = p_i[q_h(t)]$ ;
8. calcul des accélérations  $\mathbf{a}_i$ ;
9. calcul des réactions par la loi  $\Phi_i = m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i$  ou par les équations fondamentales de la dynamique des corps rigides.

### 14.3 UN EXEMPLE: LE PENDULE COMPOSE

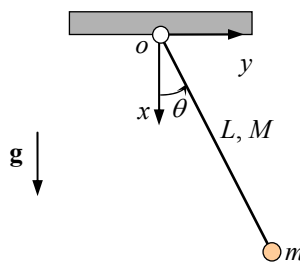


Figure 14.1

Considérons, figure 14.1, un pendule composé par une barre de longueur  $L$  et masse  $M$ , à laquelle est attachée une masse ponctuelle de valeur  $m$ . Cherchons l'équation du mouvement à l'aide des équations de Lagrange. Le système a un seul degré de liberté ; comme coordonné lagrangienne on a choisi l'angle  $\theta$  de figure. La seule force active est la gravité, donc :

$$U = M g x_C + m g x_m,$$

où  $x_C$  est la position le long de l'axe  $x$  du barycentre de la tige et  $x_m$  la position du point matériel de masse  $m$  ; évidemment, par les liens du système :

$$x_C = \frac{L}{2} \cos \theta, \quad x_m = L \cos \theta,$$

et donc

$$U = g L \left( \frac{M}{2} + m \right) \cos \theta.$$

Energie cinétique:

$$T = \frac{1}{2} m_{tot} \mathbf{v}_o^2 + m_{tot} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{C}_{tot} - o) \wedge \mathbf{v}_o + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega}$$

et si pour  $o$  on prend le point d'attache du pendule, il est  $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$ , et donc

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega},$$

où la vitesse angulaire est

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_z,$$

et  $\mathbf{I}_o$  est le tenseur d'inertie du système par rapport à  $o$ . Comme le système est plan, on a que ce tenseur se réduit à

$$\mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix},$$

et si on fait le produit qui donne l'énergie cinétique on trouve alors

$$T = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\theta}^2.$$

Il suffit donc de calculer  $I_{33}$ , moment d'inertie du système par rapport à l'axe  $z$ . Alors, si on appelle  $\lambda = M/L$  la densité linéique de la barre, supposée homogène, on a:

$$I_{33} = \lambda \int_0^L s^2 ds + mL^2 = \lambda \frac{L^3}{3} + mL^2 = \left(m + \frac{M}{3}\right)L^2,$$

et donc

$$T = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3}\right)L^2 \dot{\theta}^2.$$

La lagrangienne est alors

$$L = T + U = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3}\right)L^2 \dot{\theta}^2 + g L \left(m + \frac{M}{2}\right) \cos \theta.$$

Donc:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -g L \left(m + \frac{M}{2}\right) \sin \theta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(m + \frac{M}{3}\right)L^2 \dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(m + \frac{M}{3}\right)L^2 \ddot{\theta},$$

et l'équation du mouvement sera:

$$\left(m + \frac{M}{3}\right)L^2 \ddot{\theta} + g L \left(m + \frac{M}{2}\right) \sin \theta = 0,$$

c'est-à-dire

$$\ddot{\theta} + \varpi^2 \sin \theta = 0,$$

avec

$$\varpi^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \frac{M + 2m}{M + 3m},$$

qui est l'équation typique d'un mouvement pendulaire.

Pour trouver la réaction en  $o$ , on fait appel à la première équation fondamentale de la dynamique du corps rigide, voir le paragraphe 11.7:



$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^e.$$

La position de  $C$  est

$$C - o = \frac{2m + M}{m + M} \frac{L}{2} (\cos \theta; \sin \theta),$$

et donc

$$\dot{\mathbf{Q}} = (m + M) \mathbf{a}_C = \frac{2m + M}{2} L (-\dot{\theta}^2 \cos \theta - \ddot{\theta} \sin \theta; -\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta).$$

La résultante des forces externes est

$$\mathbf{R}^e = (m + M) \mathbf{g} + \boldsymbol{\varphi},$$

où  $\boldsymbol{\varphi}$  est la réaction inconnue. Finalement

$$\boldsymbol{\varphi} = \left( -\frac{2m + M}{2} L (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) - (m + M) g; \frac{2m + M}{2} L (-\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta) \right).$$

Dans cette expression,  $\theta$  et ses dérivées sont fonctions du temps, qui sont connues une fois résolue l'équation du mouvement. Le problème est donc complètement résolu.

## STABILITE ET BIFURCATION DE L'EQUILIBRE

### 15.1 GENERALITES

Le concept de *stabilité de l'équilibre* est de très grande importance dans les applications ; en fait, la stabilité est une qualité indispensable pour pouvoir garder un système dans une configuration d'équilibre. D'une façon assez générale, on peut dire qu'un certain phénomène est *stable* si à des petites variations des paramètres initiales, correspondent des variations de la réponse du même ordre de grandeur. Pour ce qui concerne la stabilité de l'équilibre, cela signifie que, si on perturbe un petit peu une configuration d'équilibre, on a deux possibilités : le système s'éloigne très peu de la configuration d'équilibre théorique, et sa vitesse reste petite, ou bien l'éloignement et la vitesse ne sont pas bornés dans le temps, et après un certain temps le système se sera éloigné d'une quantité grande de sa position théorique d'équilibre, ou sa vitesse sera augmentée et ne restera pas bornée aux alentours de zéro, ou les deux choses ensemble. C'est sur ces considérations qui se base le concept de stabilité de Lyapounov, qu'on utilisera dans la suite. Naturellement, comme dans les applications les perturbations sont nombreuses et inévitables, pensons par exemple à une longueur pas exacte ou à une vitesse pas exactement nulle, on souhaite d'avoir toujours des configurations d'équilibre stables: dans le cas contraire les effets des perturbations, étant grands, ne seraient pas tolérables.

Il faut dire que la stabilité est un concept assez vaste, qui concerne beaucoup de phénomènes physiques et mathématiques, et non seulement l'équilibre : on connaît l'existence d'équations différentielles qui sont sensibles à des petites variations des conditions initiales, ou de systèmes linéaires mal conditionnés, pour lesquels des faibles perturbations des coefficients amènent à des variations énormes dans la solution. Encore, on peut citer des problèmes particuliers de stabilité, comme la stabilité des rotations permanentes dans les mouvements à la Poincaré, ou la stabilité des orbites pour les points qui se déplacent dans un champ de force centrale, voir le paragraphe 7.5, ou la stabilité des écoulements, qui gère le passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent, ou la stabilité dynamique de certains systèmes mécaniques, ou encore la stabilité par rapport à la régulation d'une machine. La caractéristique commune à tous ces problèmes est le fait que la solution, si le phénomène est instable, est très sensible aux perturbations, donc aux imperfections initiales, circonstance celle-ci toujours intolérable dans les applications.

Dans ce chapitre on se limitera à analyser la stabilité des configurations d'équilibre d'un système matériel. Nous suivrons l'*approche dynamique de Lyapounov* (1892), indispensable à une vision moderne du problème de la stabilité en mécanique. Ensuite, on abordera rapidement et d'une façon simple le problème de la bifurcation de l'équilibre ; on mettra en évidence les liens existant entre stabilité et bifurcation, tout en soulignant les différences théoriques entre ces deux phénomènes, parfois mélangés dans la pratique courante.

### 15.2 CONFIGURATION D'EQUILIBRE STABLE SELON LYAPOUNOV

Soit  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  dont les composantes sont les  $m$  coordonnées lagrangiennes; une configuration  $\mathbf{q}^o = (q_1^o, q_2^o, \dots, q_m^o)$  est d'*équilibre* si

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^o \quad \forall t \geq 0$$

est la solution des équations du mouvement, avec les conditions initiales

$$\mathbf{q}(t = 0) = \mathbf{q}^o,$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t = 0) = \mathbf{o}.$$

Cela impose, évidemment, que chaque point reste immobile au fil du temps. Il faut remarquer que la définition d'équilibre est dynamique, étant faite à partir des équations du mouvement ; en plus, elle définit une configuration géométrique. Donc, on parle de *configuration d'équilibre*, concept différent de celui d'équilibre des forces, qui est toutefois une condition nécessaire à l'équilibre.

Voyons alors quand une configuration d'équilibre  $\mathbf{q}^o$  est stable selon Lyapounov : on dira que la configuration  $\mathbf{q}^o = (q_1^o, q_2^o, \dots, q_m^o)$  est *d'équilibre stable* si  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , tel que pour tout mouvement  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$  qui vérifie

$$|\mathbf{q}(t = 0) - \mathbf{q}^o| < \delta,$$

$$|\dot{\mathbf{q}}(t = 0)| < \delta,$$

il est

$$|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^o| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

$$|\dot{\mathbf{q}}(t)| < \varepsilon,$$

Cette définition est donc purement dynamique, étant faite à partir des équations du mouvement. Analysons la signification de cette définition, qui affirme, dans des termes mathématiques, une chose très simple : si les conditions initiales sont différentes de celles qui amènent à un mouvement qui corresponde à l'immobilité du système, donc à l'équilibre, le système aura un mouvement, mais on dira que la configuration est d'équilibre stable si ce mouvement est à la fois borné en position et vitesse. Donc, si les perturbations initiales sont plus petites de  $\delta$ , le mouvement qui en suit s'éloignera, en position et vitesse, au plus de  $\varepsilon$  de la configuration d'équilibre. Comme on peut choisir  $\varepsilon$  aussi petit qu'on le veut, dire qu'une configuration est stable signifie qu'un mouvement dû à des perturbations initiales restera toujours "un petit mouvement".

### 15.3 REPRESENTATION GRAPHIQUE : L'ESPACE DES PHASES

On peut donner une représentation graphique assez efficace de la stabilité selon Lyapounov. Comme la définition de stabilité concerne à la fois la position et la vitesse, cette représentation se fait dans un espace appelé *espace des phases* : la courbe, dans l'espace  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , dont l'équation en forme paramétrique est  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ , est dite *orbite* dans l'espace des phases  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . L'orbite est donc l'ensemble des points qui, à chaque instant  $t$ , indiquent à la fois la valeur de la position et de la vitesse généralisées. Comment interpréter alors la définition de stabilité de Lyapounov dans l'espace des phases? D'abord supposons d'avoir choisi les coordonnées lagrangiennes de telle sorte que la configuration d'équilibre  $\mathbf{q}^o$  coïncide avec  $\mathbf{q} = \mathbf{o}$  ; cela est, évidemment, toujours possible. Alors, par la définition de configuration d'équilibre, celle-ci sera représentée dans l'espace des phases par le point origine  $(\mathbf{o}, \mathbf{o})$ . Choisissons ensuite deux nombres positifs  $\varepsilon$  et  $\delta$ , petits au choix, et traçons les carrés de côté  $2\varepsilon$  et  $2\delta$  centrés sur l'origine. Et bien, si dans l'espace des phases le point représentatif des conditions initiales du mouvement  $(\mathbf{q}^o, \dot{\mathbf{q}}^o)$  est compris dans le carré de côté  $2\delta$ , alors l'orbite du mouvement qui dérive de ces conditions initiales sera comprise dans le carré de

coté  $2\varepsilon$  dans le cas d'équilibre stable, voir la figure 15.1, qui se rapporte au cas d'un système à un seul degré de liberté, comme les autres figures aussi. Si, au contraire, la position est d'équilibre instable, il existera au moins une valeur de  $\varepsilon$  pour laquelle il est impossible de trouver une valeur de  $\delta$  telle que, si  $(\mathbf{q}^o, \dot{\mathbf{q}}^o)$  est compris dans le carré  $2\delta$ , l'orbite suivante reste dans le carré  $2\varepsilon$ .

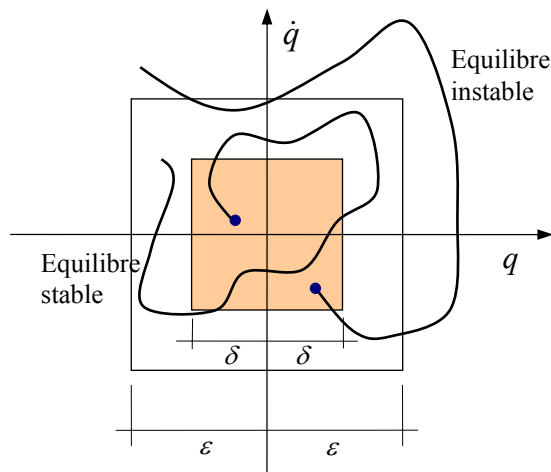


Figure 15.1

En fait, pour l'équilibre stable on a ( $\mathbf{q}^o = \mathbf{o}$ )

$$|\mathbf{q}(t=0)| < \delta,$$

$$|\dot{\mathbf{q}}(t=0)| < \delta,$$

et

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}(t)| < \varepsilon, \\ |\dot{\mathbf{q}}(t)| < \varepsilon, \end{aligned} \quad \forall t \geq 0,$$

alors que pour celui instable il résulte, pour quelque valeur de  $t$ ,

$$|\mathbf{q}(t)| > \varepsilon,$$

$$|\dot{\mathbf{q}}(t)| > \varepsilon.$$

#### 15.4 UN EXEMPLE: LES OSCILLATIONS LIBRES

L'équation linéarisée du mouvement d'un système à un seul degré de liberté qui oscille est, voir le paragraphe 16.5,

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

dont la solution est

$$q(t) = q^o \cos \omega t + \frac{\dot{q}^o}{\omega} \sin \omega t,$$

où  $q^o$  et  $\dot{q}^o$  sont les conditions initiales; par dérivation, on trouve la vitesse:

$$\dot{q}(t) = -q^o \omega \sin \omega t + \dot{q}^o \cos \omega t.$$

C'est évident que  $q=0$  est solution de l'équation du mouvement si les conditions initiales sont  $q^o = 0$  et  $\dot{q}^o = 0$ , et dans ce cas la vitesse est nulle à tout moment. Donc  $q=0$  est une configuration

d'équilibre ; montrons qu'elle est stable aussi. Comme

$$|\sin \varpi t| \leq 1, \quad |\cos \varpi t| \leq 1,$$

il suffit, une fois choisi un  $\varepsilon > 0$ , de trouver un  $\delta > 0$  tel que, lorsqu'on perturbe les conditions initiales mais

$$|q^o| \leq \delta, \quad |\dot{q}^o| \leq \delta,$$

alors

$$|q(t)| \leq |q^o| + \frac{|\dot{q}^o|}{\varpi} \leq \varepsilon,$$

$$|\dot{q}(t)| \leq \varpi |q^o| + |\dot{q}^o| \leq \varepsilon.$$

Et bien, on voit facilement que si on prend

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varpi \varepsilon}{1 + \varpi}, \frac{\varepsilon}{1 + \varpi} \right\},$$

alors on a effectivement

$$|q(t)| \leq \varepsilon,$$

$$|\dot{q}(t)| \leq \varepsilon.$$

Donc la configuration  $q = 0$  est d'équilibre stable. En outre, les deux équations de la position et de la vitesse décrivent, dans l'espace des phases, une ellipse.

Cette méthode de procéder est tout à fait générale, mais évidemment elle a le double défaut d'être ni simple ni systématique. On cherche donc une méthode d'analyse de la stabilité, qui soit à la fois générale, simple et systématique. L'instrument mathématique pour faire cela est le *théorème de Lagrange-Dirichlet*. De ce théorème, de grande importance en mécanique classique, on va en développer la démonstration, d'une remarquable élégance formelle, dans le paragraphe suivant.

### 15.5 LE THEOREME DE LAGRANGE-DIRICHLET

Le théorème s'énonce comme il suit: si en  $\mathbf{q}^o = (q_1^o, q_2^o, \dots, q_m^o)$  l'énergie potentielle totale d'un système conservatif scleronome a un minimum isolé,  $\mathbf{q}^o$  est configuration d'équilibre stable.

Pour démontrer le théorème, rappelons d'abord que pour un système conservatif, si

$$\nabla V(\mathbf{q}^o) = \mathbf{o}$$

alors  $\mathbf{q}^o$  est configuration d'équilibre; dans d'autres mots, en correspondance de toute configuration d'équilibre l'énergie potentielle est stationnaire, et donc elle peut être minimale ou maximale, ou encore le point stationnaire peut être un point de selle. Si alors  $V$  est minimale en  $\mathbf{q}^o$ , le théorème de Lagrange-Dirichlet nous assure que la configuration est d'équilibre stable; autrement, on ne peut rien dire, à la rigueur, parce que ce théorème ce n'est qu'une condition suffisante, mais pas nécessaire, de stabilité. Dans ce cas, donc, il faudra considérer d'autres théorèmes, comme les théorèmes d'instabilité de Tchetaev et de Lyapounov. A présent, l'inversion complète du théorème de Lagrange-Dirichlet est encore une question ouverte de la mécanique classique.

Montrons donc le théorème, et pour cela remarquons d'abord que l'énergie mécanique totale  $E$  est du type

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q})$$

c'est-à-dire que  $E$ , ainsi que  $T$  et  $V$ , sont fonctions définies dans l'espace des phases. Si l'on considère un mouvement quelconque,  $E$  est constante le long du mouvement:

$$E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = E_o.$$

Donc une trajectoire dans l'espace des phases est une courbe de niveau de  $E$ , courbe qui dépend des conditions initiales. Par la définition de stabilité selon Lyapounov,  $\mathbf{q}^o$  est d'équilibre stable si  $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\forall (\mathbf{q}(t=0), \dot{\mathbf{q}}(t=0)) \in U_\delta$$

le mouvement qui en dérive est tel que

$$(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \in U_\varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

avec

$$U_\delta = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : |\mathbf{q} - \mathbf{q}^o| < \delta, |\dot{\mathbf{q}}| < \delta\},$$

$$U_\varepsilon = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : |\mathbf{q} - \mathbf{q}^o| < \varepsilon, |\dot{\mathbf{q}}| < \varepsilon\}$$

Or,  $V = V(\mathbf{q})$ , mais il est possible, sans rien n'altérer, d'éteindre  $V$  aux  $\dot{\mathbf{q}}$  aussi, le graphique restant tout simplement constant sur des droites parallèles à  $\dot{\mathbf{q}}$ , voir la figure 15.2.

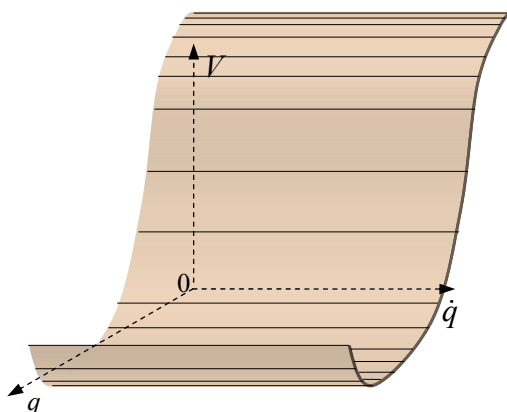


Figure 15.2

Par hypothèse,  $\mathbf{q}^o$  est point de minimum pour  $V$ , donc

$$\exists \delta_o > 0 : V(\mathbf{q}) > V(\mathbf{q}^o) \quad \forall \mathbf{q} : |\mathbf{q} - \mathbf{q}^o| < \delta_o.$$

Si on étend  $V$  aux  $\dot{\mathbf{q}}$ , la définition ci-dessus se généralise en, voir aussi la figure 15.3,

$$\exists U_{\delta_o} : V(\mathbf{q}) > V(\mathbf{q}^o) \quad \forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in U_{\delta_o} - s, \quad s = \{(\mathbf{q}^o, \dot{\mathbf{q}}) : |\dot{\mathbf{q}}| < \delta_o\}.$$

D'ailleurs,  $V$  est définie à une constante additive près, et donc on peut toujours poser  $V(\mathbf{q}^o) = 0$ . En outre, pour un système scleronome l'énergie cinétique peut toujours être écrite comme, voir paragraphe 16.4,

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

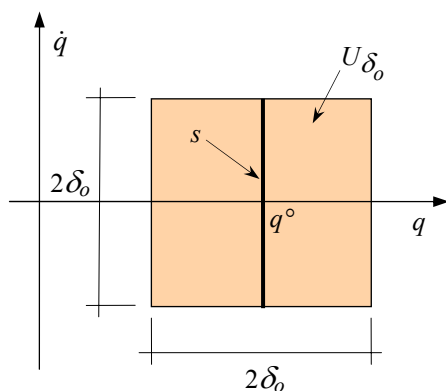


Figure 15.3

et naturellement il est toujours  $T \geq 0$ . Donc, en  $U_{\delta_o}$ , on a que l'énergie mécanique totale est sûrement positive, et nulle en  $(\mathbf{q}^o, \mathbf{o})$ . A ce point, on considère un voisinage  $U_\varepsilon$  de  $(\mathbf{q}^o, \mathbf{o})$  arbitraire, mais tel que  $U_\varepsilon \subset U_{\delta_o}$ ; par sa définition,  $U_\varepsilon$  est un ensemble ouvert. Sa frontière  $\partial U_\varepsilon$  est alors un ensemble fermé et limité, parce que  $\varepsilon < \delta_o$ ; donc, par le théorème de Weierstrass, la fonction  $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  a maximum et minimum sur  $\partial U_\varepsilon$ , et pour ce qu'on a dit ci-dessus, le minimum  $E_\varepsilon^{\min}$  est sûrement positif. Alors, choisissons un troisième voisinage de  $(\mathbf{q}^o, \mathbf{o})$ , soit  $U_{\delta_\varepsilon}$ , tel que

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) < E_\varepsilon^{\min} \quad \forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in U_{\delta_\varepsilon}.$$

A ce point, voir figure 15.4, si on prend comme point initiale un point  $(\mathbf{q}(t=0), \dot{\mathbf{q}}(t=0)) \in U_{\delta_\varepsilon}$ , la trajectoire du mouvement qui en dérive ne peut pas sortir de  $U_\varepsilon$ , parce que sur la frontière  $\partial U_\varepsilon$  il y a des points  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  où  $E$  vaut, au minimum,  $E_\varepsilon^{\min}$ , qui est plus grande, par construction, de  $E(\mathbf{q}(t=0), \dot{\mathbf{q}}(t=0))$ .

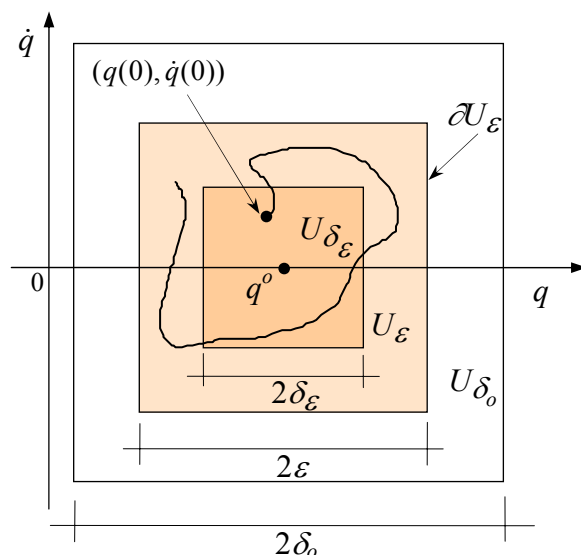


Figure 15.4

Or, comme  $E$  doit être constante tout au long du mouvement, il n'est pas possible que la trajectoire de  $E$  dans l'espace des phases coupe  $\partial U_\varepsilon$ . Donc la trajectoire est bornée en  $U_\varepsilon$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^o| &< \varepsilon \\ |\dot{\mathbf{q}}(t)| &< \varepsilon \end{aligned} \quad \forall t \geq 0,$$

ce qui implique que la configuration  $\mathbf{q}^o$  est d'équilibre stable.

On peut démontrer aisément que le théorème de Lagrange-Dirichlet est valable même si des forces non conservatives sont présentes, pourvu que celles-ci soient toujours dissipatives; en fait, dans ce cas l'énergie totale  $E$  est toujours décroissante, voir le paragraphe 8.1, et alors la méthode de démonstration du théorème fonctionne également. Au contraire, si des forces non conservatives qui n'ont pas un caractère dissipatif sont présentes, c'est par exemple le cas des forces suiveuses, comme les forces hydrodynamiques et aérodynamiques, le théorème de Lagrange-Dirichlet n'est pas valable, et pour l'analyse de stabilité il faut utiliser d'autres méthodes, comme la méthode directe de Lyapounov.

## 15.6 ANALYSE DE LA QUALITE DE L'ENERGIE POTENTIELLE

Le théorème de Lagrange-Dirichlet demande de reconnaître si l'énergie potentielle est minimale en  $\mathbf{q}^o$  ou, ce qui est exactement la même chose, si le potentiel est maximum en  $\mathbf{q}^o$ . En général, d'un point de vu analytique, l'énergie potentielle est un champ scalaire défini sur un domaine de l'espace  $m$ -dimensionnel  $\mathbb{R}^m$ , où  $m$  est le nombre de coordonnées lagrangiennes qui décrivent le problème. Donc la recherche d'un minimum pour  $V$ , d'un point de vu analytique, n'est rien d'autre que la recherche du minimum d'un champ scalaire; on rappelle donc ici la méthode à suivre.

Le développement de Taylor de  $V$  autour de  $\mathbf{q}^o$  est donné par

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}^o) + \nabla V(\mathbf{q}^o)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o) + \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o) \cdot \mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)](\mathbf{q} - \mathbf{q}^o) + o(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o)^2,$$

où  $\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)]$  est la *matrice hessienne* de  $V$  calculée en  $\mathbf{q}^o$ , c'est-à-dire la matrice dont les composantes sont les dérivées seconde de  $V$  calculées en  $\mathbf{q}^o$ :

$$\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)] = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}^o} \right].$$

Remarquons que, en tant qu'application linéaire sur l'espace vectoriel  $m$ -dimensionnel des coordonnées lagrangiennes,  $\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)]$  est en réalité la matrice représentative, dans la base choisie, d'un tenseur double sur l'espace  $\mathbb{R}^m$ , le *tenseur hessian*.

Si  $\mathbf{q}^o$  est point d'équilibre, alors

$$\nabla V(\mathbf{q}^o) = \mathbf{o},$$

et donc le développement de Taylor, en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o)^2$ , devient

$$V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{q}^o) = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o) \cdot \mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)](\mathbf{q} - \mathbf{q}^o).$$

Or,  $\mathbf{q}^o$  est point de minimum isolé pour  $V$  si, et seulement si,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que

$$V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{q}^o) > 0 \quad \forall \mathbf{q} : |\mathbf{q} - \mathbf{q}^o| < \varepsilon,$$

et donc, pour avoir un minimum de  $V$  en  $\mathbf{q}^o$  il faut qu'il soit

$$(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o) \cdot \mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)](\mathbf{q} - \mathbf{q}^o) > 0 \quad \forall \mathbf{q} : |\mathbf{q} - \mathbf{q}^o| < \varepsilon,$$



c'est-à-dire, il faut que  $\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)]$  soit défini positif. Or, l'hessien, en hypothèse de dérivées seconde continues, est symétrique par le théorème de Schwarz, et donc, grâce au théorème spectral, il possède  $m$  valeurs propres réelles. Nous savons, voir le paragraphe 1.15, qu'un tenseur symétrique est défini positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives. Donc, dans ce cas, et seulement dans celui-ci, on peut dire que  $V$  est minimale en  $\mathbf{q}^o$ , et donc que  $\mathbf{q}^o$  est configuration d'équilibre stable. L'analyse de stabilité nous oblige donc à rechercher les valeurs propres de l'hessien, c'est-à-dire à résoudre l'équation caractéristique

$$\det[\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)] - \lambda \mathbf{I}] = 0,$$

et ensuite à poser pour chaque valeur propre  $\lambda_h$ ,

$$\lambda_h > 0, \quad \forall h=1, 2, \dots, m.$$

### 15.7 BIFURCATION DE L'EQUILIBRE

Considérons un système mécanique soumis à l'action d'un certain nombre de forces actives, et supposons que toutes ces forces soient proportionnelles à un même paramètre  $\psi$ , dit *multiplicateur des charges*. Or, on sait bien que les configurations d'équilibre du système, dans l'hypothèse bien sur de forces actives conservatives, sont les solutions de l'équation

$$\nabla V(\mathbf{q}) = \mathbf{o};$$

mais, en général, l'énergie potentielle totale sera fonction des forces actives, et donc de  $\psi$ . Cela signifie, évidemment, qu'en général une configuration d'équilibre change si les forces appliquées changent. On peut donc penser de tracer la variation d'une coordonnée lagrangienne en fonction de  $\psi$ ; un tel diagramme s'appelle *parcours d'équilibre*. Un problème général qu'on se pose à cet égard est le suivant : est-ce qu'il est possible que pour une certaine valeur de  $\psi$ , le parcours d'équilibre se 'bifurque'? D'un point de vue mathématique cela équivaut à dire que, à partir de cette valeur de  $\psi$ , qui détermine sur le parcours d'équilibre le *point de bifurcation*, il n'y a plus unicité de la solution, alors que, physiquement, cela implique l'existence de solutions équilibrées nouvelles qui se départent de la solution originale, et qui, au voisinage du point de bifurcation, lui sont très proches.

Le fait que la solution ne soit pas unique est une circonstance typique des phénomènes non linéaires; en effet, si les équations d'équilibre sont linéaires par rapport aux coordonnées lagrangiennes, ce n'est pas possible d'avoir une bifurcation. Mais si cela ce n'est pas le cas, comment trouver une éventuelle bifurcation? Il faut bien dire éventuelle, parce que, même dans le cas d'équations non linéaires, ce n'est pas forcément vrai qu'il y aura une bifurcation.

La méthode générale pour trouver d'éventuels points de bifurcation est due à Euler, et s'appelle *méthode des équilibres adjacents*; cette méthode s'inspire directement de l'observation faite précédemment, pour laquelle, aux alentours du point de bifurcation, les nouvelles solutions sont très proches de la solution originelle,  $\mathbf{q}^o$ , dite aussi *solution fondamentale*.

Si on veut analyser ce qui se passe au voisinage de  $\mathbf{q}^o$ , il faut faire un développement de Taylor du gradient de  $V$  avec point initial  $\mathbf{q}^o$ :

$$\nabla V(\mathbf{q}) = \nabla V(\mathbf{q}^o) + \mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)](\mathbf{q} - \mathbf{q}^o) + o(|\mathbf{q} - \mathbf{q}^o|);$$

si on néglige les termes d'ordre supérieur à  $|\mathbf{q} - \mathbf{q}^o|$ , l'expression ci-dessus posée égale à zéro est la linéarisation des équations d'équilibre au voisinage de  $\mathbf{q}^o$ ; or, si l'on cherche d'autres solutions dans ce voisinage, il faut que ce développement soit nul, et comme

$$\nabla V(\mathbf{q}^o) = \mathbf{o},$$

l'équation d'équilibre linéarisée est tout simplement

$$\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)](\mathbf{q} - \mathbf{q}^o) = \mathbf{0}.$$

Celui-ci est un système homogène d'équations linéaires, dont la solution est naturellement la solution nulle, ce qui implique, évidemment,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^o$  ; mais d'autres solutions sont possibles si

$$\det \mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)] = 0.$$

Or, comme  $V$ , pour ce qu'on a dit ci-dessus, dépend en général de  $\psi$ , même  $\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)]$  en dépendra ; donc des valeurs de  $\psi$  qui annulent le déterminant de l'hessien peuvent exister, rendant ainsi possible l'existence d'autres solutions équilibrées. Ces valeurs de  $\psi$  qui annulent le déterminant de  $\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)]$  correspondent donc, sur le parcours d'équilibre, à des points de bifurcation; la dernière relation ci-dessus est donc l'*équation de bifurcation*. La valeur la plus petite de  $\psi$  qui satisfait à l'équation de bifurcation est appelée *multiplicateur critique de bifurcation*, où plus simplement *charge critique de bifurcation*, dans le cas d'une seule force active.

Une question est alors naturelle: existe-t-il un lien entre stabilité et bifurcation? On a vu au paragraphe précédent que l'analyse de la stabilité nous oblige à résoudre l'équation caractéristique

$$\det[\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)] - \lambda \mathbf{I}] = 0,$$

pour trouver les valeurs propres de  $\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)]$  ; en général, même celles-ci seront fonction de  $\psi$ . Or, la condition de passage entre stabilité et instabilité est

$$\exists \lambda_h = 0, \quad h = 1, 2, \dots, m.$$

Le plus petit  $\psi$  qui annule une valeur propre est dit *multiplicateur critique de stabilité*, ou, dans le cas d'une seule force active, plus simplement *charge critique de stabilité*.

Or, si  $\lambda_h = 0$ , la dernière équation devient égale à l'équation de bifurcation; les deux cas alors coïncident, ainsi que les charges critiques de stabilité et de bifurcation. Il faut toutefois remarquer que la stabilité est un concept assez plus général de la bifurcation, puisqu'il est possible d'avoir une perte de stabilité sans pour autant avoir une bifurcation. La seule chose qu'on puisse dire est que s'il y a une bifurcation, celle-ci détermine aussi la perte de stabilité de la configuration fondamentale. Voyons tout ça avec deux exemples particulièrement simples, et fondamentaux en analyse de bifurcation et stabilité.

### 15.8 EXEMPLE 1: LE FLAMBEMENT

Considérons une barre comme en figure 15.5, de longueur  $L$ , avec un lien pivot à sa base muni d'un ressort spiral de constante  $\mu$ , et soumise à l'action d'une force verticale  $\mathbf{P}$ , dirigée vers le bas. La position à repos de la barre est celle verticale.

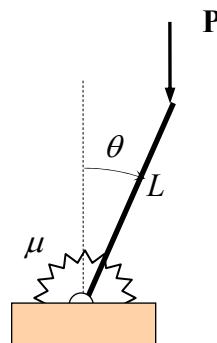


Figure 15.5

Soit  $\theta$  la coordonnée lagrangienne,  $-\pi < \theta < \pi$ , seul degré de liberté dans l'hypothèse que la barre soit

astreinte à rester dans le plan de la figure. L'énergie potentielle est

$$V = PL \cos \theta + \frac{1}{2} \mu \theta^2,$$

et donc l'équation d'équilibre sera

$$\frac{dV}{d\theta} = -PL \sin \theta + \mu \theta = 0 \Rightarrow \frac{\mu}{PL} \theta = \sin \theta.$$

Il est évident alors que  $\theta = 0$  est la configuration d'équilibre fondamentale (solution triviale). Examinons sa stabilité:

$$\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^0)] = \left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = 1 - \frac{PL}{\mu} \cos \theta \Big|_{\theta=0} = 1 - \frac{PL}{\mu} > 0 \Leftrightarrow P < \frac{\mu}{L} = P_{cr.stab.}$$

Donc, si  $P < P_{cr.stab.}$ , la configuration  $\theta = 0$  est stable, sinon elle est instable. Mais, outre la solution triviale, il y a aussi une autre solution possible, qu'on appellera  $\theta^*$ , si, comme il est simple de voir,

$$P > \frac{\mu}{L} = P_{cr.stab.}$$

Cette nouvelle solution, qui est une solution bifurquée, est toujours stable; en fait,

$$\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^*)] = \left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta^*} = 1 - \frac{PL}{\mu} \cos \theta \Big|_{\theta=\theta^*} = 1 - \frac{PL}{\mu} \cos \theta^* > 0 \Leftrightarrow \cos \theta^* < \frac{\mu}{PL},$$

ce qui est toujours vrai pour  $-\pi < \theta^* < -\frac{\pi}{2}$  et pour  $\frac{\pi}{2} < \theta^* < \pi$ , en vertu du fait que  $\frac{\mu}{PL}$  est une quantité strictement positive. D'ailleurs, si l'on remarque que  $\forall \theta^*$  il est identiquement

$$\frac{\mu}{PL} = \frac{1}{\theta^*} \sin \theta^*,$$

on a que la condition de stabilité peut se poser sous la forme

$$\begin{aligned} \theta^* > \tan \theta^* & \text{ pour } -\frac{\pi}{2} < \theta^* < 0, \\ \theta^* < \tan \theta^* & \text{ pour } 0 < \theta^* < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

inégalités toujours respectées  $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ; donc chaque  $\theta^*$  est position d'équilibre stable.

On peut alors, grâce à l'équation d'équilibre, tracer le parcours d'équilibre, c'est-à-dire la courbe qui lie  $\theta$  et  $P$  (dans ce cas il est inutile d'introduire explicitement le multiplicateur  $\psi$ , parce qu'il n'y a qu'une seule force): si on indique avec un trait continu les solutions stables et avec un trait discontinu les solutions instables, on a alors le diagramme de figure 15.6.

Ce diagramme c'est une typique courbe de bifurcation, qui décrit un phénomène connu dans la théorie des structures aussi sous le nom de *flambement*.

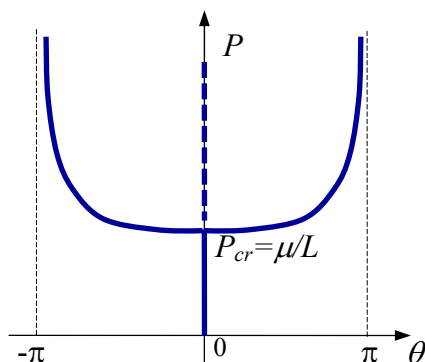


Figure 15.6

15.9 EXEMPLE 2: LE SNAPPING

Considérons maintenant le système plan de figure 15.7, où chaque barre peut être pensée comme un ressort de constante élastique  $k$  et longueur à repos  $\ell_o$ . Les deux barres ont des liens pivot aux extrémités, et dans le nœud central agit une force verticale  $\mathbf{P}$ . Soit  $y$ , position vertical du nœud central par rapport au repère de figure, la coordonnée lagrangienne; à repos il est

$$y = f = \sqrt{\ell_o^2 - L^2} .$$

L'énergie potentielle du système est

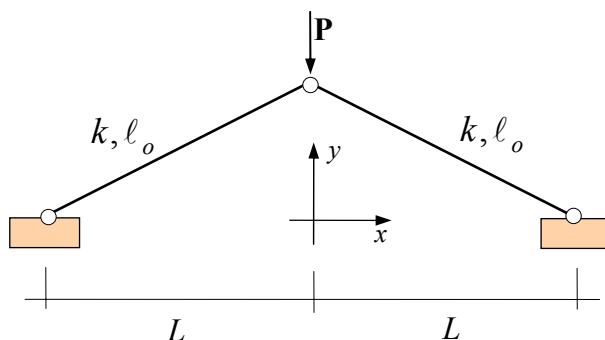


Figure 15.7

$$V = k(\sqrt{L^2 + y^2} - \ell_o)^2 + Py ,$$

et donc l'équation d'équilibre sera

$$\frac{dV}{dy} = 2k(\sqrt{L^2 + y^2} - \ell_o) \frac{y}{\sqrt{L^2 + y^2}} + P = 0 \Rightarrow y \left( \frac{\ell_o}{\sqrt{L^2 + y^2}} - 1 \right) = \frac{P}{2k} .$$

Appelons  $\varphi(y)$  la fonction au premier membre; pour connaître les solutions équilibrées il faut donc étudier la fonction  $\varphi(y)$ . Cette fonction est impaire, et elle a deux extremums pour

$$y = \mp L^{2/3} \sqrt{\ell_o^{2/3} - L^{2/3}} = \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix} ,$$

où la fonction vaut respectivement

$$\begin{bmatrix} \varphi(y_a) \\ \varphi(y_b) \end{bmatrix} = \mp (\ell_o^{2/3} - L^{2/3})^{3/2} = \mp f^* .$$

Le graphique de  $\varphi(y)$  est en figure 15.8; celui-ci est déjà le parcours d'équilibre, c'est-à-dire la variation d' $y$  en fonction de  $\frac{P}{2k}$ , et donc de  $P$ , étant  $2k$  une constante. Il est évident que la partie de courbe correspondante aux valeurs négatives de  $P$  est représentative des cas où  $P$  change son orientation. On remarque que si  $-f^* < \frac{P}{2k} < f^*$  on a trois solutions, soient dans l'ordre  $y_1, y_2$  et  $y_3$ .

Mais en dehors de cet intervalle, seulement les deux solutions  $y_1$  ou  $y_3$  sont possibles pour une même valeur de  $P$ . Donc la *force de snapping*

$$P = \pm 2kf^* = \pm 2k(\ell_o^{2/3} - L^{2/3})^{2/3}$$

est une charge limite pour la structure. Si par exemple  $P$  augmente, les deux solutions  $y_2$  et  $y_3$  se rapprochent l'une de l'autre, jusqu'à ce que, pour  $P = 2kf^*$ , elles se rencontrent en  $y = y_b$ . Si la charge augmente encore, ces deux solutions, pour lesquelles  $y > 0$ , ne sont plus possibles, et le système recherche immédiatement l'autre seule solution équilibrée possible,  $y_1$ , qui est négative; le système donc passe de l'autre côté de la droite  $y = 0$ : c'est le phénomène connu sous le nom de *snapping*.

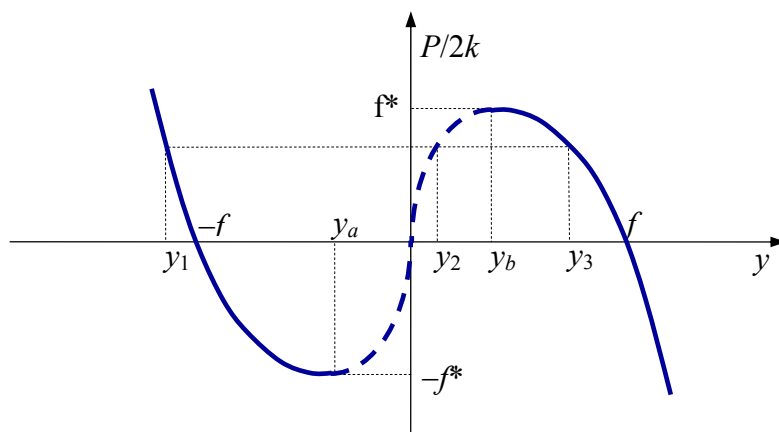


Figure 15.8

Il nous reste à analyser la stabilité des configurations d'équilibre. Pour cela, il faut étudier le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle; mais si l'on observe que, comme on reconnaît facilement,

$$\frac{d^2V}{dy^2} = -2k \frac{d\varphi(y)}{dy},$$

on s'aperçoit que là où  $\varphi(y)$  est décroissante, on a des configurations stables, et là où  $\varphi(y)$  est croissante, l'équilibre est instable. Donc, voir figure 15.8, la partie entre les deux extremums est instable, alors qu'ailleurs on a stabilité. Donc  $y_1$  et  $y_3$  sont toujours stables,  $y_2$  toujours instable.

Dans ce cas, contrairement à l'exemple précédent, il n'y a pas de bifurcation; pourtant, l'équation d'équilibre est bien non linéaire, comme le parcours d'équilibre le témoigne, et le problème de stabilité se pose également, même en l'absence de bifurcation. Une autre différence c'est que cette fois n'existe pas une configuration d'équilibre triviale: à chaque valeur de  $P$  correspond une différente valeur de  $y$ .

## MODES NORMAUX

### 16.1 GENERALITES

Un problème particulier et très important est l'analyse du mouvement d'un système au voisinage d'une configuration d'équilibre. Plus en détail, on est souvent concerné avec l'analyse des vibrations autour d'une position d'équilibre stable, et normalement on se borne à étudier les vibrations de faible amplitude, ce qu'on appelle souvent les *petits mouvements* d'un système. La méthode générale pour traiter cette matière est connue sous le nom d'*analyse modale*. Grâce à cette méthode on montre que chaque vibration de petite amplitude peut être décomposée en une série de mouvements particuliers, appelés *modes normaux*, en nombre égal à celui des degrés de liberté du système. Afin d'aborder correctement ce sujet, il faut d'abord introduire un résultat d'algèbre tensorielle: le *lemme de diagonalisation simultanée*.

### 16.2 LEMME DE DIAGONALISATION SIMULTANEE

Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux tenseurs symétriques du deuxième ordre, qui opèrent sur un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  de dimension  $n$ . Soit, en outre,  $\mathbf{A}$  défini positif,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}.$$

Il existe alors une base  $v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de  $\mathcal{V}$  pour laquelle

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{B} &= \lambda_i \mathbf{A}\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{A}\mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

Dans cette base, donc,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont diagonaux, et en plus  $\mathbf{A}$  coïncide avec l'identité. Pour prouver le lemme, définissons l'opération suivante, qui est un produit scalaire particulier :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{w}.$$

C'est évident que, grâce aux propriétés de  $\mathbf{A}$ , l'opération ainsi définie est une forme bilinéaire symétrique et définie positive. Le tenseur  $\mathbf{A}$  est aussi inversible, car il s'agit d'un tenseur symétrique défini positif, donc avec déterminant positif ; on peut alors définir le tenseur  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ , qui est symétrique par rapport au produit scalaire qu'on a introduit ci-dessus. En fait, comme  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont symétriques, on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Grâce alors au théorème spectral, il existe une base  $v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de  $\mathcal{V}$ , orthonormée par rapport au produit scalaire introduit dans ce paragraphe, qui est composée seulement de vecteurs propres de  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ . Donc les vecteurs de cette base ont les deux propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) &= \delta_{ij}, \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

où, ce qui est équivalent,

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \delta_{ij},$$

$$\mathbf{B} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{A} \mathbf{v}_i,$$

et donc, par l'unicité du tenseur identité, on a immédiatement que

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

En outre  $\mathbf{B}$  est diagonal dans la base  $v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de  $\mathcal{V}$  : en fait par la définition de composantes  $B_{ij}$  de  $\mathbf{B}$  il est

$$B_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{B} \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i \cdot \lambda_j \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \lambda_j \delta_{ij},$$

voire

$$\mathbf{B} = \lambda_k \mathbf{A} \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{A} \mathbf{v}_k ;$$

en fait

$$\mathbf{B} \mathbf{v}_i = \lambda_k (\mathbf{A} \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{A} \mathbf{v}_k) \mathbf{v}_i = \lambda_k \mathbf{A} \mathbf{v}_k (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}_k) = \delta_{ik} \lambda_k \mathbf{A} \mathbf{v}_k = \lambda_i \mathbf{A} \mathbf{v}_i.$$

Les composantes de  $\mathbf{B}$  sont donc les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{B}$  relatives à  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire les  $n$  racines de l'équation caractéristique

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0 ;$$

chaque vecteur de  $v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  est un vecteur propre, normalisé, de  $\mathbf{B}$  relatif à  $\mathbf{A}$ , correspondant à une racine  $\lambda_i$ , c'est-à-dire il est une solution non triviale de l'équation

$$(\mathbf{B} - \lambda_i \mathbf{A}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

La base  $v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de vecteurs propres de  $\mathbf{B}$  relatifs à  $\mathbf{A}$  est dite *base normale* ou *base modale*. Si alors  $\mathbf{u}$  est un vecteur que dans la base normale est  $\mathbf{u} = \beta_k \mathbf{v}_k$ , on a :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{u} = \beta_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{A} \beta_k \mathbf{v}_k = \beta_k \beta_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}_k = \beta_k \beta_k ;$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} = \beta_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{B} \beta_k \mathbf{v}_k = \beta_k \beta_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{B} \mathbf{v}_k = \beta_k \beta_k \mathbf{v}_k \cdot \lambda_k \mathbf{A} \mathbf{v}_k = \lambda_k \beta_k^2.$$

### 16.3 LE TENSEUR DE TRANSFORMATION

Le passage de la base donnée  $e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  à la base  $v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  est opéré, comme d'habitude, par un tenseur, qu'on appellera ici  $\mathbf{C}$ , tel que

$$\mathbf{C} \mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i \quad \forall i=1, 2, \dots, n.$$

On a déjà vu, cfr. paragraphe 1.19, que la  $i$ -ème colonne de  $\mathbf{C}$  est composée par le vecteur  $\mathbf{v}_i$  de la base  $v$ , donc par le  $i$ -ème vecteur propre de  $\mathbf{B}$  relatif à  $\mathbf{A}$  :

$$C_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_j, \quad \forall i, j=1, 2, \dots, n.$$

### 16.4 EXPRESSION GENERALE DE L'ENERGIE CINETIQUE

Considérons, comme on fera toujours dans la suite, un système conservatif scléronome. L'énergie cinétique a alors une forme du type

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

où  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des  $m$  coordonnées lagrangiennes. Montrons la relation ci-dessus : en général,

$$T = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

et, pour un système holonome, cfr. paragraphe 13.1,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_{ih} \dot{q}_h + \mathbf{x}_{it}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Si on injecte cette dernière relation dans l'expression générale de l'énergie cinétique, on trouve

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_i (\mathbf{x}_{ih} \dot{q}_h + \mathbf{x}_{it}) \cdot (\mathbf{x}_{ik} \dot{q}_k + \mathbf{x}_{it}) = \\ &= \frac{1}{2} m_i \mathbf{x}_{ih} \cdot \mathbf{x}_{ik} \dot{q}_h \dot{q}_k + m_i \mathbf{x}_{ih} \cdot \mathbf{x}_{it} \dot{q}_h + \frac{1}{2} m_i \mathbf{x}_{it} \cdot \mathbf{x}_{it}; \end{aligned}$$

or, si le système est scléronome,  $\mathbf{x}_{it} = \mathbf{0}$ , car la position de chaque point ne dépend pas explicitement du temps  $t$ . L'expression de l'énergie cinétique se réduit alors à

$$T = \frac{1}{2} m_i \mathbf{x}_{ih} \cdot \mathbf{x}_{ik} \dot{q}_h \dot{q}_k, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad h,k=1, 2, \dots, m,$$

qu'on peut réécrire comme

$$T = \frac{1}{2} A_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k, \quad h,k=1, 2, \dots, m,$$

avec

$$A_{hk} = m_i \mathbf{x}_{ih} \cdot \mathbf{x}_{ik}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad h,k=1, 2, \dots, m.$$

Les  $A_{hk}$  sont les composantes d'un tenseur du deuxième ordre  $\mathbf{A}$  qui opère sur l'espace  $m$ -dimensionnel des coordonnées lagrangiennes. C'est immédiat de voir que la dernière expression de  $T$  est en réalité une forme quadratique associée au tenseur  $\mathbf{A}$ :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

comme on avait annoncé. Naturellement, par sa définition même,  $T > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}}$ , et donc la relation ci-dessus nous assure que  $\mathbf{A}$  est défini positif; en outre,  $\mathbf{A}$  est aussi symétrique, comme on voit bien de l'expression de  $A_{hk}$ , grâce à la symétrie du produit scalaire.

Il est important de savoir calculer le tenseur  $\mathbf{A}$ ; à part la méthode directe, qui s'appuie sur la définition, on peut utiliser la démarche suivante: on écrit l'expression de  $T$  avec les méthodes connues, voir les paragraphes 9.7, 9.9 et 11.5, et on trouve une expression polynomiale ordonnée du type:

$$T = a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + a_{1m} \dot{q}_1 \dot{q}_m + a_{22} \dot{q}_2^2 + a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dots + a_{mm} \dot{q}_m^2.$$

Une autre expression polynomiale semblable s'obtient en développant la forme quadratique trouvée pour  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} (A_{11} \dot{q}_1^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2A_{1m} \dot{q}_1 \dot{q}_m + A_{22} \dot{q}_2^2 + 2A_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dots + A_{mm} \dot{q}_m^2).$$



Par simple identification polynomiale on a alors que:

$$\begin{aligned} A_{kk} &= 2a_{kk} \\ A_{hk} &= A_{kh} = a_{hk} \end{aligned} \quad \forall h, k = 1, 2, \dots, m.$$

### 16.5 LINEARISATION ET DECOUPLAGE DES EQUATIONS D'EQUILIBRE

Soit  $\mathbf{q}^o$  une configuration d'équilibre du système; on est intéressé à connaître les mouvements du système au voisinage de cette configuration. Pour cela, on peut faire un développement de Taylor de la lagrangienne, et s'arrêter au premier terme de la série qui ne soit pas nul. Dans ce but, il vaut mieux écrire les coordonnées lagrangiennes comme

$$q_i(t) = q_i^o + \varepsilon \alpha_i(t), \quad i = 1, \dots, m,$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre petit; ce changement de variable équivaut à prendre des nouvelles coordonnées, les  $\alpha_i$ , qui sont toutes nulles dans la configuration d'équilibre. Evidemment, étant les  $q_i^o$  des constantes,

$$\dot{q}_i(t) = \varepsilon \dot{\alpha}_i(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Maintenant, on opère l'expansion de Taylor de paramètre  $\varepsilon$  pour  $T$  et  $U$ ; d'abord  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}^o + \varepsilon \boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{q}^o) + \varepsilon \nabla \mathbf{A}(\mathbf{q}^o) \boldsymbol{\alpha} + \dots] \dot{\boldsymbol{\alpha}},$$

et donc le premier terme non nul est tout simplement

$$T = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}^o) \dot{\boldsymbol{\alpha}}.$$

A remarquer que  $\mathbf{A}$  est calculé en correspondance de la configuration d'équilibre. Passons à  $U$ :

$$U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}^o + \varepsilon \boldsymbol{\alpha}) = U(\mathbf{q}^o) + \varepsilon \nabla U(\mathbf{q}^o) \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{q}^o) \boldsymbol{\alpha} + \dots;$$

d'ailleurs, si  $\mathbf{q}^o$  est configuration d'équilibre,

$$\nabla U(\mathbf{q}^o) = \mathbf{0}$$

et donc finalement on parvient à la linéarisation du potentiel:

$$U(\boldsymbol{\alpha}) = U(\mathbf{q}^o) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{q}^o) \boldsymbol{\alpha}.$$

Comme  $V = -U$ , le tenseur  $\mathbf{B}(\mathbf{q}^o)$ , qui est le tenseur hessien du potentiel calculé dans la configuration d'équilibre, est égal à  $-\mathbf{H}[V(\mathbf{q}^o)]$ , défini dans le paragraphe 15.6.

Finalement, on a l'expression approximée de la lagrangienne, qui, à une constante additive près,  $U(\mathbf{q}^o)$ , est

$$L_2 = \left[ \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}^o) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{q}^o) \boldsymbol{\alpha} \right] \varepsilon^2.$$

$L_2$  est dite *lagrangienne carrée*, par le fait que son expression est proportionnelle au carré de  $\varepsilon$ . Le tenseur  $\mathbf{B}$ , voir le paragraphe 15.6, est symétrique. Donc  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  respectent les hypothèses du lemme

de diagonalisation simultanée; cela signifie qu'il existe une base, la base normale du paragraphe 16.2, dans laquelle  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont diagonaux, et en particulier

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{B} &= \lambda_i \mathbf{A} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{A} \mathbf{v}_i.\end{aligned}$$

Soient alors  $\beta_i$  les coordonnées lagrangiennes dans la base normale ; c'est immédiat de constater que dans cette base, la lagrangienne carrée devient simplement

$$L_2 = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \dot{\beta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i \beta_i^2 \right] \varepsilon^2.$$

Les *équations linéarisées de Lagrange* utilisent la lagrangienne carrée, et dans la base normale, on a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\beta}_i} \right) - \frac{\partial L_2}{\partial \beta_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Grâce à la dernière expression de  $L_2$ , on a alors les *équations linéarisées du mouvement* dans la base normale :

$$\ddot{\beta}_i - \lambda_i \beta_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Dans cette expression on peut observer tous les avantages des opérations faites jusqu'ici: d'abord, la linéarisation des équations, faite en utilisant la lagrangienne carrée, nous donne des équations différentielles ordinaires du second ordre à coefficients constants, équations dont on connaît bien la solution. Deuxièmement, et peut-être encore plus important, les équations sont découplées, au sens que dans chaque équation il apparaît seulement une coordonnée lagrangienne à la fois. Les  $m$  équations différentielles du mouvement peuvent donc être résolues séparément, une par une, et comme elles ont toutes la même structure, elles ont le même type de solution aussi. La solution du système nécessite, évidemment, de la connaissance de  $2m$  conditions initiales, deux pour chaque équation, qui spécifient la valeur de chaque coordonnée lagrangienne au début du mouvement, ainsi que sa vitesse initiale. Le découplage des équations du mouvement est une conséquence énormément importante du lemme de diagonalisation simultanée: pour les systèmes qu'on a considéré, il est toujours possible de trouver une base, c'est-à-dire un particulier choix des coordonnées lagrangiennes, dans laquelle les équations sont découplées. Ceci constitue une propriété mécanique de fondamentale importance dans l'analyse des petits mouvements d'un système autour d'une configuration d'équilibre. On rappelle, pour terminer, que les  $\lambda_i$  qui apparaissent dans les équations découplées du mouvement sont les valeurs propres de  $\mathbf{B}(\mathbf{q}^0)$  par rapport à  $\mathbf{A}(\mathbf{q}^0)$ .

## 16.6 MODES NORMAUX

Les solutions des équations découplées, c'est bien connu de l'analyse mathématique, sont toujours d'un des trois types suivants:

$$\begin{aligned}\beta_i(t) &= D_i^1 \cos \sqrt{-\lambda_i} t + D_i^2 \sin \sqrt{-\lambda_i} t = D_i \cos(\sqrt{-\lambda_i} t + \varphi_i), & \text{si } \lambda_i < 0; \\ \beta_i(t) &= D_i^1 + D_i^2 t, & \text{si } \lambda_i = 0; \\ \beta_i(t) &= D_i^1 e^{\sqrt{\lambda_i} t} + D_i^2 e^{-\sqrt{\lambda_i} t}, & \text{si } \lambda_i > 0.\end{aligned}$$

On appelle *mode normal*  $k$ -ième un mouvement pour lequel au moins un coefficient parmi  $D_k^1$  et  $D_k^2$  est différent de zéro, alors que tous les autres  $D_i^1$ ,  $D_i^2$ ,  $i \neq k$ , sont nuls. Donc, un mode

est un mouvement où une seule coordonnée normale est active, les autres étant nulles. Naturellement, les constantes  $D_i^j$  se déterminent sur les conditions initiales.

Si  $\lambda_i < 0$ , le mode est *oscillatoire*; sa *pulsation* ou *fréquence propre* sera

$$\varpi_i = \sqrt{-\lambda_i},$$

sa *fréquence circulaire*

$$\nu_i = \frac{\varpi_i}{2\pi}$$

et sa *période propre*

$$\tau_i = \frac{2\pi}{\varpi_i}.$$

Dans la solution du mode oscillatoire,  $D$  représente physiquement l'*amplitude* de l'oscillation et  $\varphi$  la *phase*.

Si  $\lambda_i = 0$  le mode est dit *uniforme*, et si  $\lambda_i > 0$  *hyperbolique*; dans ces deux cas, il suffit de regarder la solution des équations du mouvement pour comprendre qu'après un temps suffisamment long, les déplacements se seront tellement accrus qu'il ne sera plus possible de considérer valable l'hypothèse des petits déplacements, qui est à la base de la linéarisation des équations. En définitive, le système, pour un mode uniforme ou hyperbolique, s'échappe de la configuration d'équilibre, avec une vitesse croissante pour le mode hyperbolique, et donc l'équilibre est instable au sens de Lyapounov. Dans d'autres mots, le fait qu'une seule fréquence s'annule signe le passage de la stabilité à l'instabilité; voici donc une liaison entre stabilité et modes normaux; la première est analysée à partir des valeurs propres absolues de  $\mathbf{B}$ , alors que les deuxièmes sont analysés à partir des valeurs propres de  $\mathbf{B}$  relatifs à  $\mathbf{A}$ .

En général, une valeur propre  $\lambda_i$  dépend des forces agissantes sur le système, et donc les fréquences propres aussi; à la suite de la variation de ces forces, une valeur propre peut devenir nulle. Physiquement, cela signifie que la fréquence correspondante diminue de plus en plus jusqu'à ce qu'elle s'annule. Le mode, initialement oscillatoire, devient uniforme, et éventuellement, si  $\lambda_i$  devient positive, hyperbolique. L'équilibre, initialement stable, devient alors instable; le point de passage entre les deux cas est déterminé par  $\lambda_i = 0$ . Cela explique un fait bien connu, c'est-à-dire pourquoi près de l'instabilité les fréquences propres sont toujours faibles.

Si on considère les coordonnées normales,  $\mathbf{A}$  est la matrice identité, et donc vecteurs propres relatifs et absolus coïncident (à une constante près). Cela explique un autre fait fondamental, c'est à dire pourquoi les modes de vibration coïncident, qualitativement, avec les modes d'instabilité d'une structure. Dans d'autres mots, la première déformée modale est qualitativement égale à la première déformée critique de flambement, et ainsi de suite pour tous les autres modes.

### 16.7 DESCRIPTION QUALITATIVE DES MODES NORMAUX

Un même vecteur  $\mathbf{u}$  de  $\mathbb{R}^m$  peut être exprimé, dans les deux bases  $e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  et  $v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  comme

$$\mathbf{u} = \alpha_i \mathbf{e}_i = \beta_j \mathbf{v}_j = \beta_j \mathbf{C} \mathbf{e}_j,$$

et donc

$$\alpha_i = C_{ij} \beta_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Considérons le mode  $k$ -ème, c'est-à-dire le mouvement pour lequel  $\beta_k \neq 0, \beta_j = 0 \forall j \neq k$  ; on a alors que:

$$\alpha_i = C_{ik} \beta_k \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Soit le mode  $k$ -ème oscillatoire :

$$\beta_k(t) = D_k \cos(\varpi_k t + \varphi_k) ;$$

alors, on revient dans la base des coordonnées choisies par la relation

$$\alpha_i(t) = C_{ik} D_k \cos(\varpi_k t + \varphi_k)$$

et aux coordonnées originelles par

$$q_i(t) = q_i^0 + \varepsilon C_{ik} D_k \cos(\varpi_k t + \varphi_k) .$$

Celle-ci est la liaison entre les coordonnées lagrangiennes de base et celles normales, c'est-à-dire entre le mouvement et le mode: pour un mode donné, toutes les coordonnées lagrangiennes oscillent en phase et avec la même fréquence, mais avec différentes amplitudes. A remarquer que les coefficients ( $C_{1k}, C_{2k}, \dots, C_{mk}$ ) ne sont que les composantes, dans la base  $e$ , du vecteur propre de  $\mathbf{B}$  relatif à  $\mathbf{A}$ , qui correspond à la valeur propre  $\lambda_k$ . Le paramètre indéterminé  $\varepsilon$  joue le rôle d'un multiplicateur qui assure la petitesse du mouvement, conformément à l'hypothèse initiale. Comme les constantes  $\varepsilon, \varpi_k, D_k$  et  $\varphi_k$  sont les mêmes pour toute coordonnée lagrangienne, les coefficients  $C_{ik}$  déterminent le rapport entre les amplitudes des différentes coordonnées lagrangiennes, pour un même mode, et donc, à une constante près, qui donne l'amplitude effective, on peut identifier la déformée du système, voire ce qu'on appelle sa *forme modale*.

Finalement, il faut remarquer qu'on a autant de fréquences propres et de modes que de degrés de liberté. Si l'on considère alors tous les modes, on a qu'un petit mouvement autour d'une configuration d'équilibre stable est une superposition de modes oscillatoires, voire, que chaque oscillation peut être décomposée en  $m$  modes différents, un pour chaque degré de liberté. En outre, voir le paragraphe précédent, on peut dire aussi que si une configuration d'équilibre est stable, le seul petit mouvement du système autour de la configuration même, est une superposition d'oscillations de fréquences différentes.

## L'OSCILLATEUR SIMPLE

## 17.1 GENERALITES

Dans le chapitre précédent on a analysé le comportement d'un système au voisinage d'une configuration d'équilibre stable, et nous avons vu que le seul petit mouvement possible est une vibration qui peut être décomposée en un nombre d'oscillations élémentaires, les modes, égal au nombre de degrés de liberté. Pour cela, on a considéré le cas d'un système scleronome conservatif. Or, dans la réalité, tout système mécanique qu'on peut réaliser ne sera jamais conservatif, car la présence de forces dissipatives est inévitable. La dissipation de l'énergie est due à trois raisons principales : les frottements entre les parties du système, les dissipations internes au matériau, la résistance au mouvement dans un milieu fluide (phénomène très complexe, dans lequel le frottement joue parfois, en réalité, un rôle mineur, voire négligeable). La modélisation mécanique et mathématique de ces phénomènes de dissipation n'est pas unique. En outre, considérer la présence des dissipations dans un système complexe est un problème souvent très compliqué.

Toutefois, afin d'éclaircir le comportement d'un système mécanique dissipatif, on peut étudier un modèle très simple, à un seul degré de liberté, appelé *l'oscillateur simple*, grâce auquel certains phénomènes peuvent être mis en évidence. Dans ce modèle on assume que la dissipation soit représentée par une force proportionnelle à la vitesse ; c'est le cas d'un *amortissement visqueux*, voir le paragraphe 8.4. Dans ce chapitre on va analyser l'oscillateur simple dans différents cas classiques, en commençant par l'oscillateur libre non amorti.

## 17.2 OSCILLATIONS LIBRES NON AMORTIES

C'est le cas d'un oscillateur simple, sans dissipation, et non soumis à l'action de forces externes variables dans le temps. Normalement, le modèle physique est représenté comme en figure 17.1.

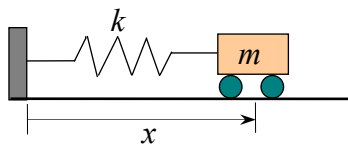


Figure 17.1

Les seuls paramètres du système sont sa masse  $m$  et sa rigidité, c'est-à-dire la constante  $k$  du ressort. Le système a un seul degré de liberté, soit  $x$ , déplacement de la masse par rapport à la configuration de repos ; c'est immédiat d'en trouver l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0,$$

où  $\omega_o$  est la fréquence propre :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La solution de cette équation est

$$x = A \cos(\varpi_o t + \varphi);$$

l'amplitude de l'oscillation,  $A$ , ainsi que la phase,  $\varphi$ , sont déterminées grâce aux conditions initiales sur la position et la vitesse. La période de l'oscillation est

$$\tau_o = \frac{2\pi}{\varpi_o} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}};$$

le diagramme de  $x$  en fonction du temps est donc du type montré en figure 17.2.

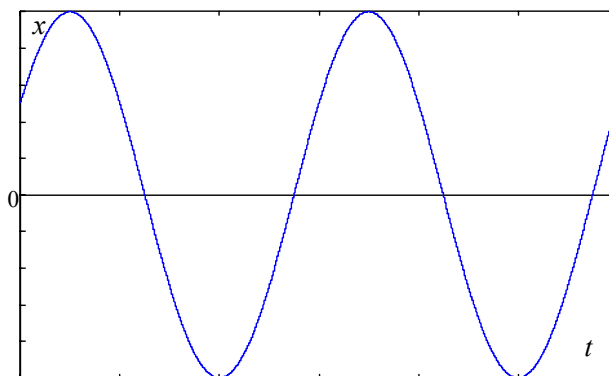


Figure 17.2

L'amplitude reste constante au fil du temps, et le mouvement se reproduit exactement à intervalles d'une période. Ceci est la conséquence de la conservation de l'énergie mécanique totale. Que celle-ci se conserve on peut le montrer facilement à partir de la solution de l'équation du mouvement:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \left[ m A^2 \varpi_o^2 \sin^2(\varpi_o t + \varphi) + k A^2 \cos^2(\varpi_o t + \varphi) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ m A^2 \frac{k}{m} \sin^2(\varpi_o t + \varphi) + k A^2 \cos^2(\varpi_o t + \varphi) \right] = \frac{1}{2} k A^2, \end{aligned}$$

et comme  $k$  et  $A$  sont des constantes,  $E$  est une constante aussi, c'est-à-dire que l'énergie mécanique totale se conserve pendant le mouvement.

### 17.3 OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES

Dans ce cas on ajoute au système un amortisseur, du type vu au paragraphe 8.4, qui est un dispositif de dissipation de l'énergie qui réagit à la vitesse, et pas au déplacement, avec la force

$$F_A = -c \mathbf{v},$$

où  $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse et  $c$  l'amortissement. Cette force s'oppose donc toujours au mouvement, et elle est proportionnelle à la vitesse.

Le modèle physique est celui de figure 17.3, où l'amortisseur travaille en parallèle avec le ressort. Dans ce cas, le système n'étant pas conservatif, l'équation du mouvement ne peut pas être trouvée avec les équations de Lagrange pour les systèmes conservatifs; on peut utiliser alors le théorème de la puissance,

$$\dot{T} = W_k + W_c,$$

où  $W_k$  et  $W_c$  sont respectivement la puissance de la force élastique et celle de la force d'amortissement :

$$W_k = -k x \mathbf{e}_x \cdot \dot{x} \mathbf{e}_x = -k x \dot{x},$$

$$W_c = -c \dot{x} \mathbf{e}_x \cdot \dot{x} \mathbf{e}_x = -c \dot{x}^2.$$

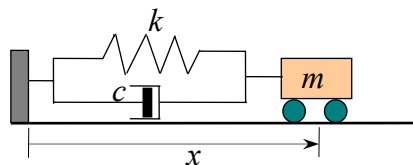


Figure 17.3

On trouve donc aisément

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0,$$

où  $\alpha$  est une quantité, dite *atténuation*, donnée par

$$\alpha = \frac{c}{2m}.$$

Par rapport au cas des oscillations non amorties, il y a l'apparition dans l'équation du mouvement d'un terme proportionnel à la vitesse. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_o^2 = 0,$$

et sa solution

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}.$$

Il faut distinguer trois cas:

**Premier cas:**  $\alpha^2 - \omega_o^2 < 0$ ; c'est le régime *pseudo-périodique*. Dans ce cas on peut écrire

$$\lambda = -\alpha \pm i\omega_1,$$

avec

$$\omega_1 = \omega_o \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_o^2}}.$$

La solution de l'équation du mouvement est alors

$$x = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \varphi),$$

ou le terme exponentiel traduit la présence de l'amortissement, et produit le décrétement de l'amplitude au fil du temps; le graphique de  $x$  en fonction de  $t$  est du type de figure 17.4. La courbe est comprise entre les deux courbes exponentielles  $\pm e^{-\alpha t}$  et la distance entre deux passages consécutifs par la position d'équilibre (*passages à zéro*), dans le même sens, s'appelle *pseudo-période*:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_o} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_o^2}}} = \tau_o \left(1 - \frac{\alpha^2}{\omega_o^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4m\pi}{\sqrt{4mk - c^2}};$$

l'attribut pseudo est dû au fait que le mouvement ne se reproduit jamais identiquement, mais les

passages à zéro sont toutefois équidistants.

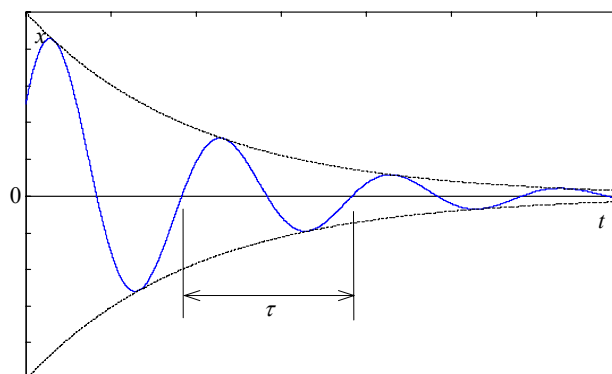


Figure 17.4

On appelle *décroissement logarithmique* la quantité

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}},$$

où  $A_n$  et  $A_{n+1}$  sont les amplitudes de deux oscillations successives; plus en général, donc,

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+\tau)} = \ln \frac{Ae^{-\alpha t} \cos(\varpi_1 t + \varphi)}{Ae^{-\alpha(t+\tau)} \cos[\varpi_1(t+\tau) + \varphi]} = \alpha\tau = \frac{2\pi c}{\sqrt{4mk - c^2}}.$$

**Deuxième cas:**  $\alpha^2 - \varpi_0^2 = 0$ ; c'est le *régime critique*. Dans ce cas, l'amortissement est dit *amortissement critique*,  $c$ , et il vaut, évidemment,

$$c = 2m\varpi_0 = 2m\alpha,$$

et la solution de l'équation caractéristique est tout simplement

$$\lambda = -\frac{c}{2m} = -\varpi_0 = -\alpha,$$

alors que la solution de l'équation du mouvement est

$$x = (A + Bt)e^{-\alpha t}.$$

La courbe de  $x$  en fonction de  $t$  est du type en figure 17.5; il n'existe plus un mouvement oscillatoire.

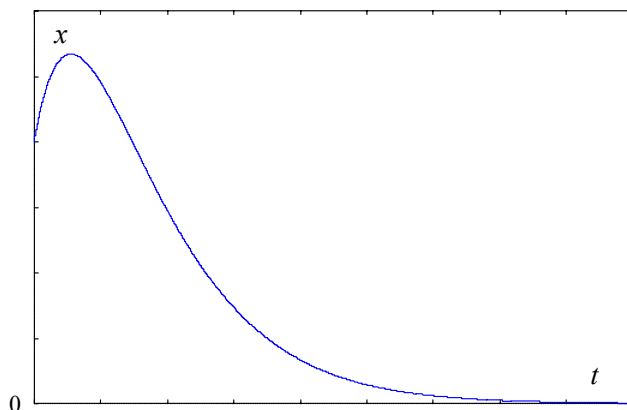


Figure 17.5

**Troisième cas:**  $\alpha^2 - \varpi_0^2 > 0$ ; c'est le *régime aperiodique*. Dans ce cas, les deux solutions de



l'équation caractéristique sont réelles et négatives, et la solution de l'équation du mouvement est

$$x = Ae^{-\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right)t} + Be^{-\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right)t}.$$

On peut facilement remarquer qu'après un temps suffisamment long, le deuxième terme est négligeable par rapport au premier; donc l'amplitude décroît pratiquement comme  $e^{-\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right)t}$ , et donc plus lentement que dans le cas critique. Le diagramme de  $x$  en fonction de  $t$  est du type de la figure 17.6.

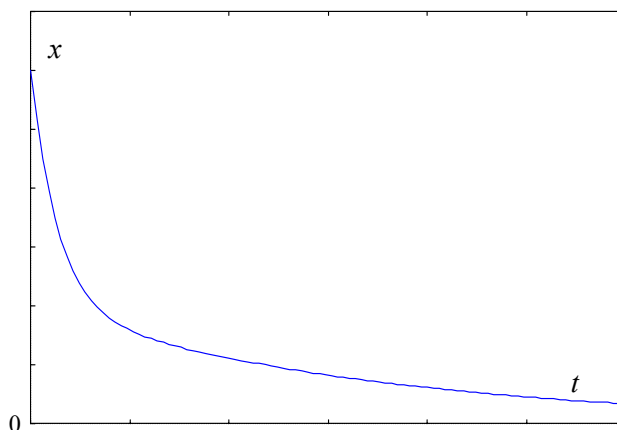


Figure 17.6

#### 11.4 OSCILLATIONS FORCÉES AMORTIES

Considérons maintenant un oscillateur amorti soumis à une force excitatrice du type

$$\mathbf{F} = F \cos \omega t \mathbf{e}.$$

Encore grâce au théorème de la puissance, l'équation du mouvement, c'est évident, devient

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t;$$

l'équation différentielle n'est plus homogène, et donc sa solution est la somme de l'intégrale générale de l'homogène associée, c'est-à-dire du cas précédent des oscillations libres amorties, plus une intégrale particulière, qui est de la forme:

$$\bar{x} = A \cos(\omega t + \varphi),$$

avec  $A$  et  $\varphi$  respectivement amplitude et phase du régime forcé. Comme on a vu dans le paragraphe précédent, dans tous les trois cas l'amplitude d'une oscillation libre amortie diminue dans le temps, alors que l'intégrale particulière ci-dessus a une amplitude constante. Cela signifie qu'après un temps suffisamment long, l'oscillation forcée prévaut sur l'oscillation libre, jusqu'à ce que cette dernière devienne totalement négligeable. C'est pourquoi on peut se borner dans ce cas à étudier seulement l'intégrale particulière des oscillations forcées. Il faut donc remarquer qu'après un certain temps, même si l'oscillateur est amorti, l'amplitude se maintient constante, et cela parce que la dissipation d'énergie par la présence de l'amortissement est compensée par l'énergie donnée au système par la force externe  $\mathbf{F}$ .

Donc, après un certain temps, on peut dire que

$$x \cong \bar{x} = A \cos(\omega t + \varphi),$$

et donc la fréquence est celle de la force excitatrice.

Pour trouver la valeur de  $A$  et de  $\varphi$ , il faut injecter l'intégrale particulière dans l'équation du mouvement, et ensuite identifier les différents termes; on obtient ainsi

$$\varphi = \arctan \frac{2\alpha\omega}{\omega^2 - \omega_0^2},$$

$$A = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}.$$

### 17.5 LA RESONANCE

Cherchons la variation de l'amplitude  $A$  avec la fréquence  $\omega$  de la force excitatrice, étant données les caractéristiques mécaniques de l'oscillateur, c'est-à-dire étant connue la fréquence propre  $\omega_0$ .

Dans ce but on réécrit  $A$  comme

$$A = \frac{F}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(\chi^2 - 1)^2 + \frac{4\alpha^2}{\omega_0^2} \chi^2}},$$

avec

$$\chi = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

On cherche donc la variation de  $A$  en fonction de  $\chi$ . Alors,

$$\frac{dA}{d\chi} = -2 \frac{F}{m\omega_0^2} \frac{\chi \left[ (\chi^2 - 1) + \frac{2\alpha^2}{\omega_0^2} \right]}{\left[ (\chi^2 - 1)^2 + \frac{4\alpha^2}{\omega_0^2} \chi^2 \right]^{\frac{3}{2}}},$$

et donc on voit bien que pour  $\chi=0$  et pour

$$\chi = \chi^* = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2 \frac{\alpha^2}{\alpha_{crit}^2}}$$

$A$  est extrémale. Dans le premier cas on a

$$A_0 = A(\chi = 0) = \frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{F}{k},$$

c'est-à-dire  $A_0$  est égale au déplacement statique pour une force égale à  $F$ , valeur maximale de  $\mathbf{F}(t)$ ; dans le deuxième cas on trouve facilement

$$A^* = A(\chi = \chi^*) = \frac{F}{2m\alpha} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}.$$

La solution  $\chi = \chi^*$  est valable seulement si

$$\alpha < \frac{\varpi_o}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha_{cr}}{\sqrt{2}} \cong 0.7\alpha_{cr};$$

dans ce cas,  $A_o$  est un minimum, et  $A^*$  un maximum pour  $A(\chi)$ , alors que dans le cas contraire  $A_o$  est un maximum. Donc si

$$\alpha < \frac{\varpi_o}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha_{cr}}{\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire si l'amortissement n'est pas trop grand, l'amplitude des oscillations forcées peut être plus grande du déplacement statique ; le maximum augmente si  $\alpha$  diminue, et en même temps  $\chi^*$  augmente. A la limite, pour  $\alpha=0$ , c'est-à-dire dans le cas d'oscillations forcées non amorties,  $A^*$  tend vers l'infini; c'est le phénomène de la *résonance*, qui se produit pour  $\chi^*=1$ , c'est-à-dire pour  $\varpi = \varpi_o$ , donc pour une force excitatrice qui a une fréquence égale à la fréquence propre du système.

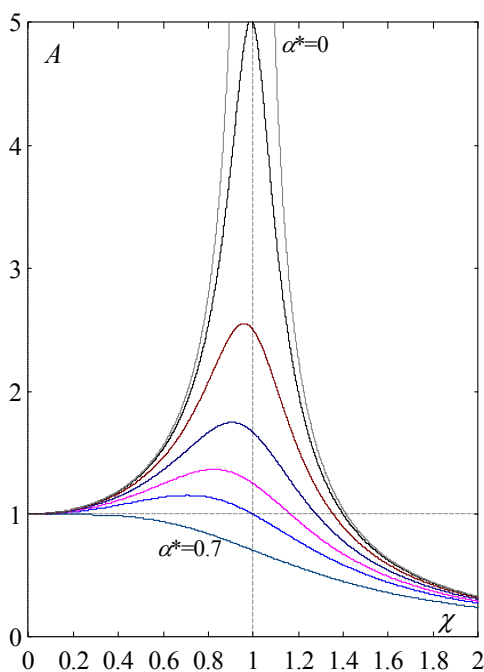


Figure 17.7

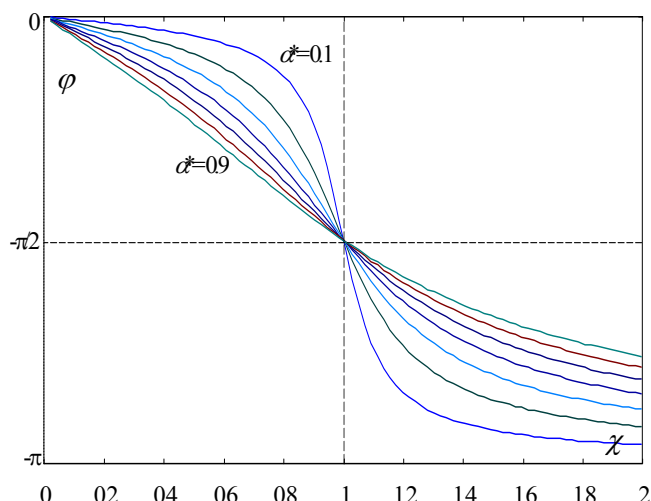


Figure 17.8

En figure 17.7 on montre plusieurs cas de variation de  $A$  avec  $\chi$ , pour différentes valeurs de  $\alpha^* = \alpha/\varpi_o = \alpha/\alpha_{cr}$  ; dans un système mécanique il est bien de faire en sorte que les fréquences propres du système soient éloignées des fréquences des forces excitatrices, pour éviter des oscillations de grande amplitude.

### 17.6 LA PHASE

Dans le paragraphe 17.4 on a vu la dépendance de la phase des oscillations forcées en fonction de la fréquence de la force excitatrice, relation qu'on peut réécrire comme

$$\varphi = \arctan \frac{2\alpha}{\varpi_o} \frac{\chi}{\chi^2 - 1};$$

cette relation a la forme indiquée en figure 17.8, où plusieurs courbes sont tracées pour différentes valeurs de  $\alpha^*$ . On voit que, pour des fréquences  $\varpi$  petites l'oscillateur suit la force, alors que le déphasage s'accroît avec  $\varpi$ , jusqu'à l'opposition de phase pour des valeurs élevées de  $\varpi$ .