

Olga Leticia López Escudero
Silvia García Peña

La enseñanza de la Geometría



Instituto Nacional para la
Evaluación de la Educación

La enseñanza de la Geometría



Materiales para apoyar la práctica educativa

Silvia García Peña
Olga Leticia López Escudero

La enseñanza de la Geometría

Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa

Coordinación editorial:

Miguel Á. Aguilar R.

Teresa Ramírez Vadillo

Diseño y formación:

Luis E. Ramírez Juárez

Ilustraciones:

Carlos E. Elenes Díaz

**INSTITUTO NACIONAL PARA LA
EVALUACIÓN DE LA EDUCACIÓN**

José Ma. Velasco 101-5° piso

Col. San José Insurgentes

Delegación Benito Juárez

03900 México, D.F.

Primera edición, 2008

El contenido, la presentación y disposición en conjunto y de cada página de esta obra son propiedad del editor. Se autoriza su reproducción parcial o total por cualquier sistema mecánico, electrónico y otros, citando la fuente.

Impreso y hecho en México

ISBN 978-968-5924-35-1



Instituto Nacional para la
Evaluación de la Educación

La enseñanza de la Geometría



Materiales para apoyar la práctica educativa

Silvia García Peña
Olga Leticia López Escudero



El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) tiene como misión *contribuir al mejoramiento de la educación en México a través de la realización de evaluaciones integrales de la calidad del sistema educativo y de los factores que la determinan, así como de la difusión transparente y oportuna de sus resultados para apoyar la toma de decisiones, la mejora pedagógica en las escuelas y la rendición de cuentas.*

Aunque a lo largo de sus seis años de vida el INEE ha producido una gran cantidad de publicaciones para dar a conocer los resultados de sus evaluaciones a públicos diversos, fue sólo a mediados de 2007 cuando se propuso elaborar materiales expresamente dirigidos a profesores y directivos escolares. Para ello se buscó la colaboración de especialistas que, además de un adecuado dominio de su disciplina, tuvieran conocimiento cercano del quehacer docente en escuelas de Educación Básica. A estos especialistas se les invitó a elaborar textos que versaran en torno a algunos de los problemas identificados por las evaluaciones del instituto, a la vez que ofrecieran a los maestros formas novedosas de atenderlos y reflexionar sobre ellos.

Los borradores fueron revisados por un Comité Técnico conformado por expertos reconocidos a nivel nacional y por un Comité Didáctico integrado por profesores de primaria y secundaria que laboran en escuelas urbanas, rurales e indígenas. Estos últimos probaron los materiales en sus aulas y, con base en ello, hicieron observaciones respecto a las fortalezas y debilidades de las propuestas, así como sugerencias para enriquecer los textos.

Hoy el INEE se enorgullece de poder ofrecer a los maestros de primaria y secundaria la colección *Materiales para apoyar la práctica educativa*. Los cuatro libros que la conforman buscan brindar a los profesores herramientas creativas para mejorar la enseñanza en sus salones de clase, proponiendo formas novedosas de apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Dos de los mate-



riales tratan sobre la promoción y el desarrollo de las habilidades de escritura, mientras que los otros dos abordan temas puntuales de las Matemáticas: los números decimales y la geometría.

Al poner estos textos a su alcance, el INEE refrenda su convicción de que la evaluación puede contribuir efectivamente a la calidad educativa. Es nuestro deseo que esta nueva línea de publicaciones sea de gran interés para los maestros; que en ella encuentren retroalimentación valiosa para ofrecer a los niños y jóvenes mexicanos más y mejores oportunidades de aprendizaje.

Annette Santos del Real
Directora General Adjunta, INEE



Estimadas maestras, estimados maestros:

El libro que tienen en sus manos forma parte de una colección de textos cuya finalidad es contribuir a mejorar la enseñanza y los procesos de aprendizaje en la Educación Básica, atendiendo a un doble compromiso. En primer término, al que deriva como parte de todo proceso evaluativo y que consiste en ofrecer a la población evaluada una retroalimentación congruente y pertinente y brindarle mecanismos para mejorar sus logros. En este sentido, los materiales centran su atención en el tratamiento de temas y contenidos que, conforme a las pruebas nacionales e internacionales como las aplicadas por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), han presentado mayores dificultades para los alumnos de primaria y secundaria.

En segundo término, el compromiso que tiene la Secretaría de Educación Pública de dotar a los maestros de Educación Básica de herramientas que mejoren su enseñanza y, en consecuencia, favorezcan mejores aprendizajes en los niños y adolescentes. Por esta razón, los materiales están dirigidos a todos los maestros de Educación Básica, aunque se destinan de manera prioritaria a quienes trabajan en las escuelas que presentan condiciones de vulnerabilidad (Escuelas en Contextos Vulnerables y Escuelas de Tiempo Completo), donde se han detectado mayores dificultades para alcanzar el aprendizaje y la formación de calidad a los que niños y adolescentes tienen derecho.

Estos textos constituyen un referente donde los maestros encuentran propuestas alternativas para la enseñanza de los temas seleccionados. Lejos de pretender constituirse en la respuesta única a los problemas detectados, son un insumo para que los docentes amplíen el conocimiento, conozcan otras opciones y, lo más importante, desarrollen su invaluable creatividad para favorecer la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades en sus



alumnos. Estos materiales no son un manual que pretenda que los maestros sigan determinadas secuencias; por el contrario, son textos que interpelan a su dominio sobre los contenidos y sus métodos de enseñanza para que generen, por sí mismos y a través del diálogo con sus colegas, nuevas estrategias didácticas en las que reconozcan las condiciones particulares del contexto en que trabajan, valoren los saberes previos de sus alumnos y los acompañen en la generación de sus propios aprendizajes.

Mediante el diseño, la producción y distribución de los materiales que aquí se presentan, tanto el INEE como la SEP buscan impulsar mejores prácticas docentes y aprendizajes de mayor nivel, conscientes de que esta medida puede contribuir a elevar la calidad y la equidad de la educación que se ofrece a los alumnos de Educación Primaria y Secundaria.

La SEP, en especial la Subsecretaría de Educación Básica, agradece al INEE y a los autores de los textos su generosidad y su valiosa contribución. Asimismo, confía en la capacidad de los maestros para aprovechar de la mejor manera estos materiales y espera de ellos sus aportaciones y observaciones para enriquecerlos, así como sugerencias para ampliar esta colección con temas que aborden los problemas que maestros y alumnos enfrentan en su trabajo cotidiano con los planes y programas de estudio, y las estrategias que favorecen el logro de las competencias y de los rasgos deseables en los egresados de Educación Básica.

José Fernando González Sánchez

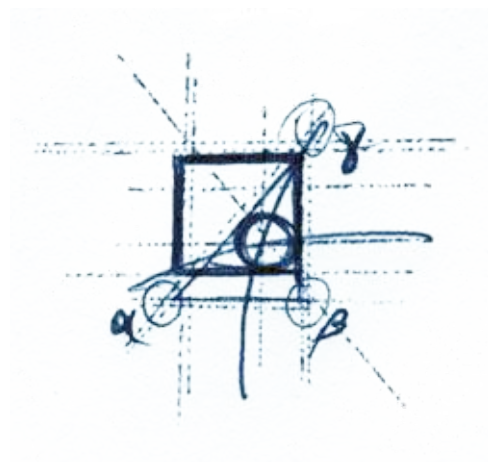
Subsecretario de Educación Básica, SEP

Índice

Presentación	13
Introducción	19
I. Enseñar Geometría	25
1. Enseñar Geometría, ¿para qué?	27
2. Tareas en la enseñanza de la Geometría	32
2.1. Tareas de conceptualización	32
2.2. Tareas de investigación	38
2.3. Tareas de demostración	41
3. Habilidades por desarrollar en la clase de Geometría	47
3.1. Habilidades visuales	48
3.2. Habilidades de comunicación	52
3.3. Habilidades de dibujo	58
3.4. Habilidades de razonamiento	65
3.5. Habilidades de aplicación y transferencia	67
4. Los niveles de razonamiento geométrico	69
II. La Geometría en el aula	75
1. El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Geometría	77
2. Propuesta para la enseñanza: el aula-taller de Geometría	80
2.1. Materiales para construir la Geometría	81
2.2. Actividades para el aula-taller de Geometría	91
2.3. Organización del aula-taller de Geometría	93
3. En conclusión...	93
III. La Geometría y sus resultados en los Excale	97
1. El aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Básica en Excale 2005	99
1.1. El aprendizaje de la Geometría en la Educación Primaria.	
Resultados Excale 2005	102



1.2. El aprendizaje de la Geometría en la Educación Secundaria.	
Resultados Excale 2005	110
IV. Actividades para practicar	121
1. Acerca de las actividades	123
1.1. Rompecabezas	124
1.2. Copiando figuras	127
1.3. Identificando cuerpos	129
1.4. Pentaminós	132
1.5. Definiendo trianpen	134
1.6. Explorando cuadriláteros	135
1.7. Construyendo y probando	138
1.8. Geometría y azulejos	140
1.9. El círculo	143
Anexo. Hojas de trabajo	147
Bibliografía consultada	165
Lecturas recomendadas	169
Colaboradores	173





Presentación



El libro *La enseñanza de la Geometría*, que forma parte de la colección Materiales para apoyar la práctica educativa, tiene como propósito introducir a los maestros en servicio de primaria y secundaria en la problemática de la enseñanza de la Geometría, así como presentar un análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de sexto de primaria y tercero de secundaria en los Excale en la asignatura de Matemáticas, particularmente en los contenidos relacionados con la Geometría.

Los resultados de las evaluaciones aplicadas por el INEE, y de las pruebas internacionales, en particular PISA, muestran que si bien hay avances en la calidad de los aprendizajes en Matemáticas, la distancia que separa los resultados obtenidos con los esperados es muy grande.

Si bien el enfoque de resolución de problemas, introducido en los planes y programas de estudio de las Matemáticas en la reforma curricular de 1993 y profundizado en la reforma de secundaria en 2006, plantea que el aprendizaje de las Matemáticas debe permitir a los alumnos desarrollar una forma de pensamiento que les permita resolver problemas que se presentan en diversos contextos, las evaluaciones ponen de manifiesto el predominio de una enseñanza memorística, en la que la aplicación mecánica de fórmulas o algoritmos parece un fin en sí mismo.

La enseñanza de la Geometría es una de las áreas de las Matemáticas en las que hay más puntos de desencuentro entre matemáticos y educadores, no sólo en relación con sus propósitos y contenidos sino también con la manera de enseñarla. Es probable que esto ocurra debido a los aspectos que abarca: por un lado la Geometría es considerada como una herramienta para el entendimiento, tal vez la parte de las Matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Por otra parte, la Geometría como disciplina se apoya en un pro-



ceso extenso de formalización, el cual se ha venido desarrollando por más de dos mil años en niveles crecientes de rigor, abstracción y generalidad.

Frente a la dificultad y complejidad de la temática abordada, la escasa difusión de propuestas didácticas de la enseñanza de la Geometría y considerando las diferencias existentes entre los niveles educativos a los que se dirige este material, su intención es brindar un panorama que dé cuenta de algunos de los componentes que se encuentran presentes en la enseñanza de esta disciplina, desde diferentes posturas teóricas.

Silvia García Peña y Olga Leticia López Escudero, autoras del libro, se han preocupado por vincular en su propuesta los aspectos teóricos con ejemplos, y actividades de reflexión dirigidas al maestro.

Los contenidos de Geometría no han cambiado de manera importante en las últimas décadas; lo que se intenta ofrecer en este material es una forma diferente de enseñarlos. Así, por ejemplo, se presentan actividades de dibujo de figuras que permitan que el alumno busque relaciones y propiedades geométricas y convertir la construcción de figuras en un medio para desarrollar el razonamiento geométrico. Lo mismo sucede con el uso del material concreto y con las diferentes actividades que se proponen.

Los docentes encontrarán en este libro una propuesta de cómo comenzar a cambiar sus prácticas, con el objeto de que sus alumnos desarrollen habilidades propias del razonamiento geométrico y encuentren el sentido de los conocimientos que aprenden. Al estudiar este material y llevar al aula las actividades que aquí se proponen, maestros y alumnos tendrán la oportunidad de disfrutar sus clases.

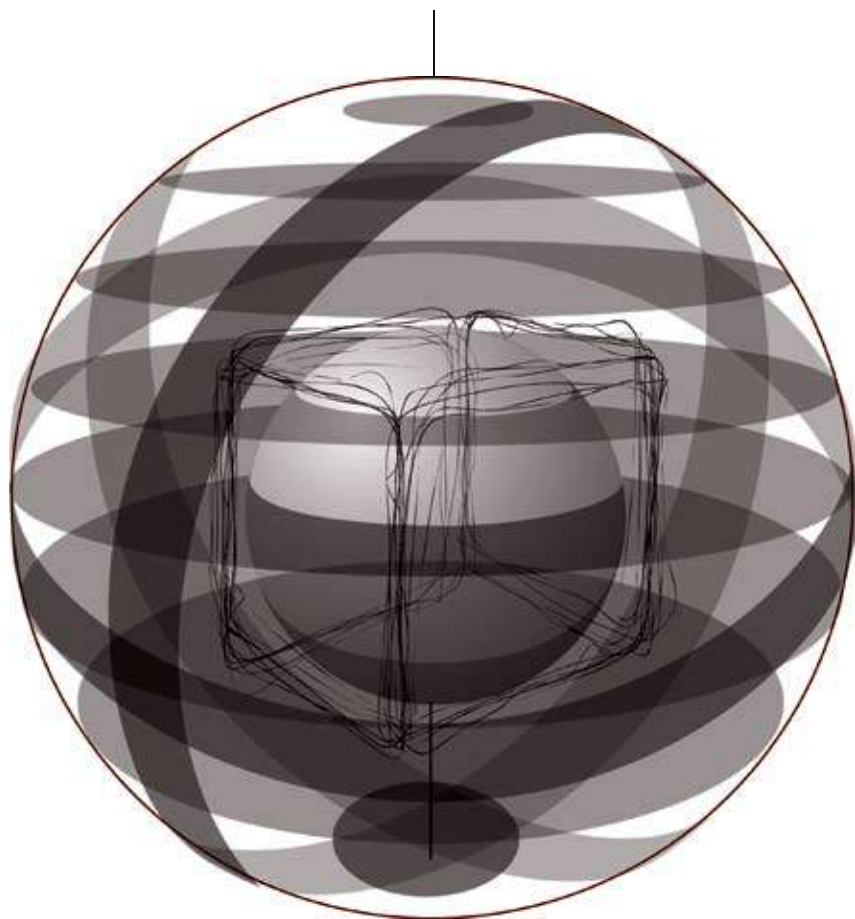
Lo invitamos a que, junto con sus compañeros de trabajo, comience a introducir algunos cambios en la enseñanza de la Geometría y pueda compartir con ellos los logros y las dificultades encontradas; ésta es la mejor manera de aprender y mejorar.

¡Mucha suerte!

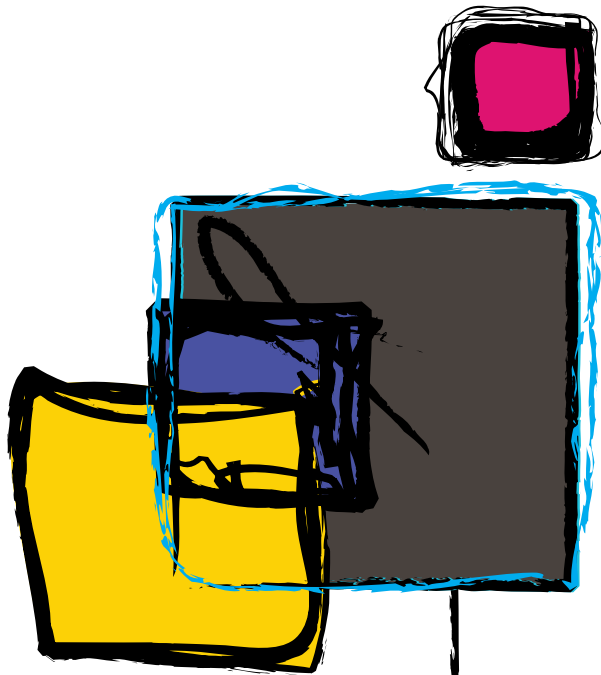
Mónica Schulmaister

Universidad Autónoma de la Ciudad de México





Introducción



■ Iniciar un viaje a través del mundo de la Geometría representa una interesante aventura alrededor de la ciencia que modela el espacio que percibimos: cuadrados, rectángulos, círculos, paralelas y perpendiculares son modelos teóricos de objetos y relaciones que encontramos en nuestro entorno. Esta travesía también permite adentrarnos en formas de pensamiento avanzado: la Geometría trabaja con objetos ideales que se pueden manipular mentalmente, que no dependen de lo que perciben nuestros sentidos. Además, este recorrido nos depara otra sorpresa: estudiar Geometría ofrece la oportunidad de conocer a la primera ciencia en la que, a partir de unas cuantas definiciones y postulados considerados verdaderos, se construye un sólido edificio de afirmaciones cuya veracidad puede demostrarse.

Si bien es cierto que esta ciencia modela nuestro entorno, es importante mencionar que la Geometría que trata este trabajo es sólo una de las representaciones de ese entorno, una manera de modelar el espacio; en la actualidad hay *otras geometrías*, la mayoría de ellas propias de estudios superiores, por lo que en este documento, al hablar de Geometría, nos referimos a la que se enseña en la Educación Básica y, en particular, al estudio de las figuras geométricas de dos y tres dimensiones. Se ha evitado el uso de la simbología geométrica para hacerlo más entendible, sobre todo para aquellos profesores que no están familiarizados con ella.

El propósito de este trabajo es invitar al docente a reflexionar acerca de toda la riqueza que gira alrededor de la enseñanza de la Geometría, a que tome conciencia de que su tratamiento en el aula no consiste sólo en la transmisión de los contenidos geométricos sino en adentrar al alumno en todo un mundo de experiencias en el conocimiento del espacio que percibe y en formas de pensamiento propias de la Geometría. El trabajo está dividido en cuatro capítulos, los dos primeros escritos por Silvia García Peña y los dos



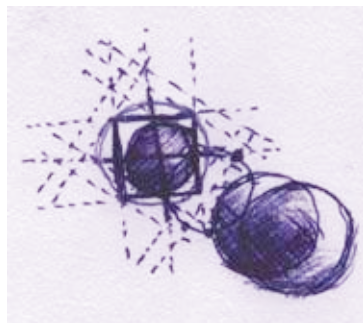
siguientes por Olga Leticia López Escudero. El primer capítulo presenta una serie de consideraciones sobre los diferentes tipos de tareas que el docente puede realizar en las clases de Geometría, las habilidades que se pueden desarrollar en los alumnos y los diferentes niveles de pensamiento geométrico que paulatinamente se pueden promover.

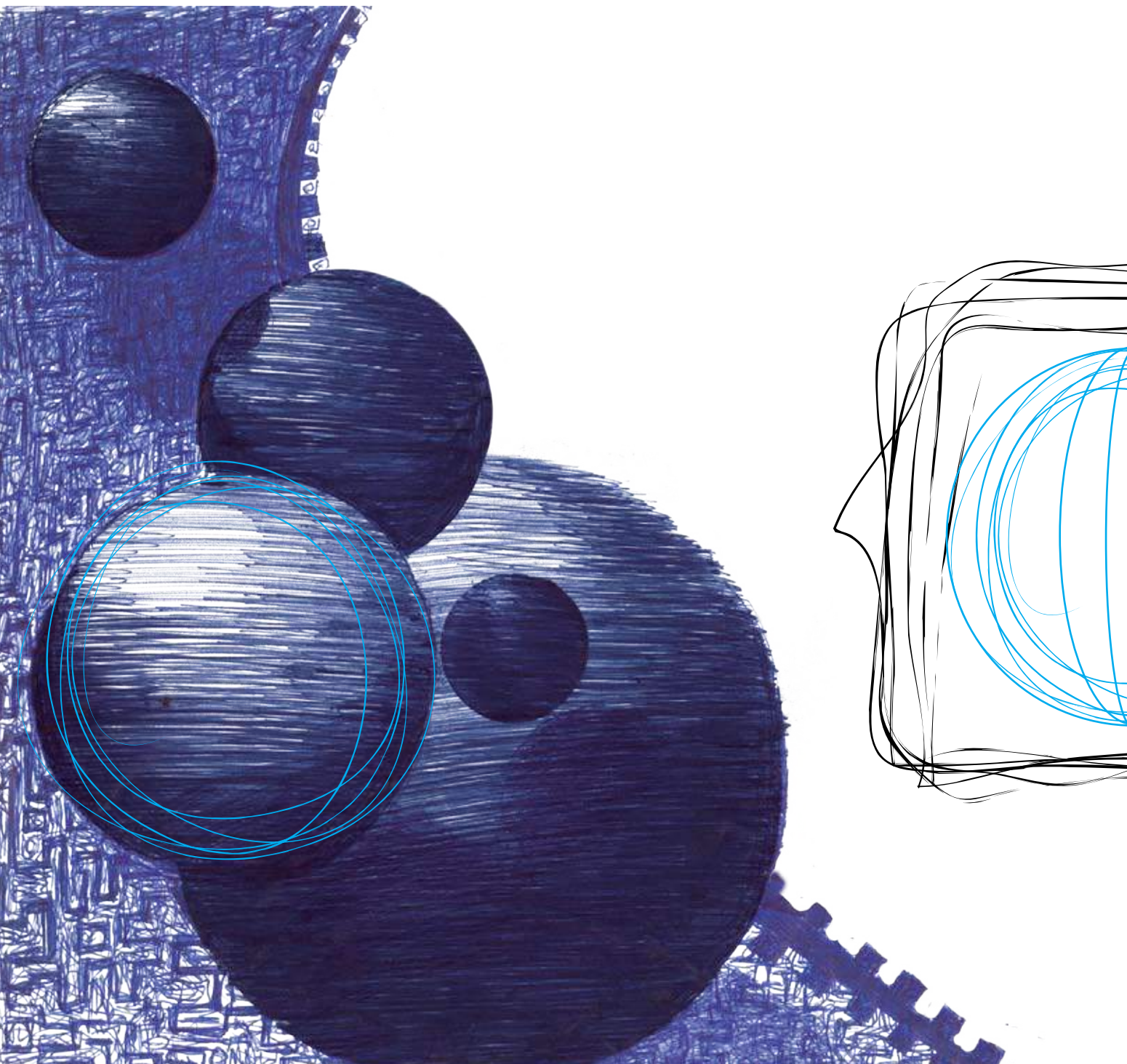
En el segundo se presentan ideas concretas para trabajar en el aula partiendo de los supuestos del enfoque de resolución de problemas; a manera de ejemplos, se presentan algunos materiales que el docente puede utilizar dentro de las clases y sugerencias de tipo didáctico para el trabajo en el aula.

En el tercero se muestran algunos de los resultados obtenidos en las pruebas de Excale 2006 en Geometría y se hace un breve análisis de los reactivos muestra que se utilizaron para evaluar contenidos geométricos.

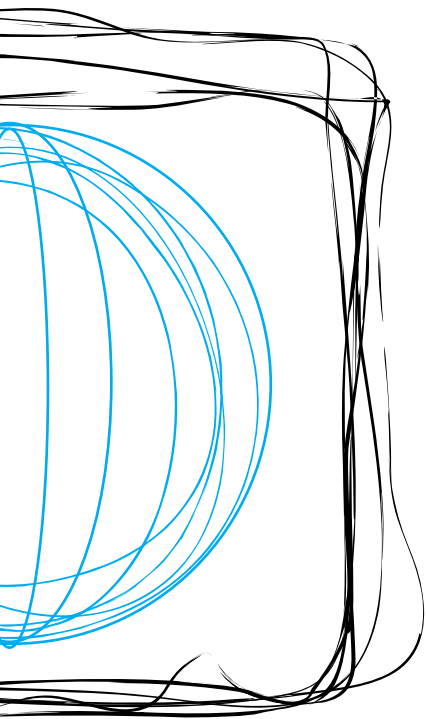
En el cuarto se proponen nueve actividades en las que se podrá identificar el tipo de tareas, habilidades y niveles que se presentan en la primera parte de este documento. Al finalizar, el docente encontrará una lista de lecturas que se sugieren para profundizar en el tema.

Esperamos que este trabajo despierte en los profesores el interés y el gusto por esta ciencia que tiene mucho que ofrecer tanto al aprenderla como al enseñarla.





Enseñar Geometría



La filosofía está escrita en ese inmenso libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.

Galileo

1. Enseñar Geometría, ¿para qué?

Muchas de las limitaciones que nuestros alumnos manifiestan sobre su comprensión acerca de temas de Geometría se deben al tipo de enseñanza que han tenido. Asimismo, el tipo de enseñanza que emplea el docente depende, en gran medida, de las concepciones que él tiene sobre lo que es Geometría, cómo se aprende, qué significa saber esta rama de las Matemáticas y para qué se enseña.

Muchos profesores identifican a la Geometría, principalmente, con temas como perímetros, superficies y volúmenes, limitándola sólo a las cuestiones métricas; para otros docentes, la principal preocupación es dar a conocer a los alumnos las figuras o relaciones geométricas con dibujos, su nombre y su definición, reduciendo las clases a una especie de glosario geométrico ilustrado.

Es importante reflexionar sobre las razones para enseñar Geometría. Si el maestro tiene claro el porqué, estará en condiciones de tomar decisiones más acertadas acerca de su enseñanza. Una primera razón para dar esta asignatura la encontramos en nuestro entorno inmediato, basta con mirarlo y descubrir que en él se encuentran muchas relaciones y conceptos geométricos: la Geometría modela el espacio que percibimos, es decir, *la Geometría es la Matemática del espacio*.¹ Por ejemplo, una habitación: es muy probable que

La Geometría modela el espacio que percibimos, es decir, la Geometría es la Matemática del espacio.

1 Bishop (1983), citado por Bressan (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica*.



La Geometría ofrece una oportunidad para emprender un viaje hacia formas superiores de pensamiento.

tenga forma de *prisma rectangular* con sus *caras*, *aristas* y *vértices*; las paredes y los techos generalmente son *rectangulares*; las paredes son *perpendiculares* al techo y éste es *paralelo* al piso; si hay alguna ventana lo más seguro es que tenga forma de una *figura geométrica* con lados que son *segmentos de recta*; al abrir y cerrar la puerta se forman diferentes *ángulos*; si el piso está cubierto de mosaicos, éstos tienen forma de una o varias *figuras geométricas* que cubren el plano sin dejar huecos ni empalmarse y en él se pueden observar diversas transformaciones geométricas: *rotaciones*, *traslaciones* y *simetrías*.

No obstante que la presencia de la Geometría en el entorno inmediato podría ser una razón suficiente para justificar su enseñanza y su aprendizaje, cabe aclarar que no es la única. La Geometría ofrece, a quien la aprende, una oportunidad para emprender un viaje hacia formas superiores de pensamiento. El siguiente pasaje de uno de los diálogos de Platón, *La República*, ilustra la gran importancia que se le daba al estudio de la Geometría en la época de la Grecia clásica. Los protagonistas son Sócrates y Glaucón:

Sócrates: Entonces, ¡oh, mi noble amigo!, la Geometría atraerá el alma hacia la verdad y formará mentes filosóficas que dirijan hacia arriba aquello que ahora dirigimos indebidamente hacia abajo.

Glaucón: Sí, y en gran manera.

Sócrates: Pues bien, en gran manera también hay que ordenar a los de tu Calípolis que no se aparten en absoluto de la Geometría. Porque tampoco son exiguas sus ventajas accesorias.

Glaucón: ¿Cuáles?

Sócrates: No sólo las que tú mismo citaste con respecto a la guerra, sino que también sabemos que, por lo que toca a comprender más fácilmente en cualquier otro estudio, existe una diferencia total y absoluta entre quien se ha acercado a la Geometría y quien no.

Glaucón: Sí, ¡por Zeus!, una diferencia absoluta. ¿Establecemos, pues, ésta como segunda enseñanza para los jóvenes?

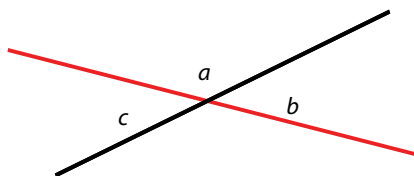
Sócrates: Establezcámosla.²

² Fuente: <http://www.bibliotecasvirtuales.com/biblioteca/otrosautoresdelaliteraturauniversal/Platon/larepublica/IX.asp>

Los matemáticos y filósofos griegos, amantes y buscadores incansables de la verdad, tenían en alta estima a la Geometría porque para ellos representó un cuerpo de conocimientos que eran verdaderos y que, además, podía demostrarse que lo eran, que no dependían del humor de las personas ni de los dioses; a tal grado llegó esta valoración, que en la Academia, la escuela filosófica de Platón, estaba escrito: *Nadie entre aquí que no sepa Geometría*. No obstante que la palabra Geometría significa *medida de la tierra*, que hace alusión a su origen práctico, a partir de los griegos y hasta la actualidad lo que se estudia en Geometría dista mucho de ser sólo lo que fue en sus inicios.

Veamos en qué consiste esta forma de pensar que se puede desarrollar con la enseñanza de la Geometría. Las personas construyen de manera intuitiva algunas relaciones y conceptos geométricos, producto de su interacción con el espacio; la enseñanza de la Geometría debe permitir avanzar en el desarrollo del conocimiento de ese espacio, de tal manera que en un momento dado pueda prescindir de él y manejar *mentalmente* imágenes de figuras y relaciones geométricas, es decir, hacer uso de su capacidad de abstracción. El estudio de la Geometría permite al alumno estar en interacción con relaciones que ya no son el espacio físico sino un espacio conceptualizado y, por lo tanto, en determinado momento, la validez de las conjeturas que haga sobre las figuras geométricas ya no se comprobarán empíricamente sino que tendrán que apoyarse en razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación en Matemáticas, en particular, la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya conocen.

Por ejemplo, en un nivel empírico, los alumnos podrían medir los ángulos de la siguiente figura y encontrar que la medida del ángulo a más la medida del ángulo b suman 180° y también, midiendo, pueden encontrar que el ángulo b mide lo mismo que el ángulo c .





En un nivel de razonamiento deductivo, *sin necesidad de medir*, los estudiantes pueden deducir que los ángulos a y b suman 180° y argumentar: porque los lados rojos de estos ángulos forman una línea recta y esto hace que ambos formen un ángulo de 180° .

También pueden deducir que los ángulos b y c miden lo mismo, con el siguiente razonamiento:

1. El ángulo a más el ángulo b suman 180°
2. El ángulo a más el ángulo c suman 180°
3. Entonces el ángulo b y el ángulo c miden lo mismo.

Este tipo de razonamiento deductivo debe ser la culminación de una serie de actividades llevadas a cabo a lo largo toda la Educación Básica; se espera que los alumnos que egresan de Educación Secundaria puedan hacer razonamientos similares.

Lo anterior nos lleva a concluir que el aspecto formativo de la enseñanza de la Geometría es tan relevante como el aspecto informativo, es decir, los procesos de pensamiento que los alumnos desarrollan con un adecuado tratamiento de la Geometría en clase son tan importantes como el aprendizaje de los contenidos geométricos.

La Geometría:

- Se aplica en la realidad (en la vida cotidiana, la arquitectura, la pintura, la escultura, la astronomía, los deportes, la carpintería, la herrería, etcétera).
- Se usa en el lenguaje cotidiano (por ejemplo, se dice: calles *paralelas*, tinaicos *cilíndricos*, la escalera en *espiral*, etcétera).
- Sirve en el estudio de otros temas de las Matemáticas (por ejemplo, un modelo geométrico de la multiplicación de números o expresiones algebraicas lo constituye el cálculo del área de rectángulos).
- Permite desarrollar en los alumnos su percepción del espacio, su capacidad de visualización y abstracción, su habilidad para elaborar conjeturas acerca de las relaciones geométricas en una figura o entre varias y su habilidad para argumentar al tratar de validar las conjeturas que hace.

- Constituye el ejemplo clásico de ciencia organizada lógicamente y deductivamente (a partir de axiomas y postulados se deducen teoremas).

Terminaremos este apartado con una lista de respuestas a la pregunta ¿para qué enseñar y aprender Geometría?:

- Para *conocer* una rama de las Matemáticas más instructivas.
- Para *cultivar* la inteligencia.
- Para *desarrollar* estrategias de pensamiento.
- Para *descubrir* las propias posibilidades creativas.
- Para *aprender* una materia interesante y útil.
- Para *fomentar* una sensibilidad hacia lo bello.
- Para *trabajar* Matemáticas experimentalmente.
- Para *agudizar* la visión del mundo que nos rodea.
- Para *gozar* de sus aplicaciones prácticas.
- Para *disfrutar* aprendiendo y enseñando.³



Actividades

1. Escriba en su cuaderno ejemplos de figuras o relaciones geométricas que están en su entorno, procure que sean diferentes a las mencionadas en este apartado.
2. Piense en algún oficio o profesión que haga uso de la Geometría, escriba cómo usan la Geometría quienes se dedican a ese oficio o profesión.
3. Responda en su cuaderno, lo más ampliamente posible, las siguientes preguntas:
 - a. ¿Qué ideas le vienen a la mente cuando escucha la palabra Geometría?
 - b. ¿Cuáles son los objetos de estudio de la Geometría?
 - c. ¿Cómo acostumbra enseñar Geometría?
 - d. ¿Por qué la enseña así?

³ C. Alsina, J. Fortuny y R. Pérez (1997), *¿Por qué Geometría?*



4. Antes de leer este apartado usted tenía algunas ideas de para qué enseñar Geometría, ¿cuáles eran?, ¿coinciden con lo que acaba de leer? Si su respuesta es negativa, ¿en qué diferían?

Las tareas de conceptualización se refieren a la construcción de conceptos y de relaciones geométricas.

2. Tareas en la enseñanza de la Geometría

Básicamente se pueden categorizar en tres tipos las tareas que se realizan en las clases al estudiar las figuras geométricas de dos y tres dimensiones: conceptualización, investigación y demostración,⁴ con las que se espera que los alumnos desarrollen su razonamiento geométrico. Cabe aclarar que estas tareas pueden presentarse de manera simultánea en las situaciones problemáticas que se plantean a los alumnos y, con frecuencia, la línea que divide a una de otra es tan tenue que no se pueden separar. Por ejemplo, una tarea de investigación puede dar lugar a la construcción del concepto de una relación geométrica y a la vez propiciar que los alumnos argumenten los resultados de esa investigación, esto último como parte de una tarea de demostración.

Estos tres tipos de tareas (conceptualización, investigación y demostración) pueden realizarse dentro del marco del enfoque de resolución de problemas, cuya idea principal radica en el hecho de que los alumnos construyen conocimiento geométrico al resolver problemas.

2.1. Tareas de conceptualización

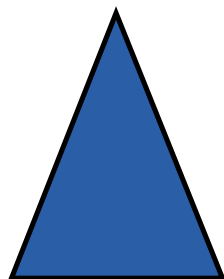
Como su nombre lo indica, las tareas de conceptualización se refieren a la construcción de conceptos y de relaciones geométricas. Es importante aclarar que no se trata de definir objetos geométricos sino de conceptualizarlos. Por ejemplo, si lo que se desea es que los alumnos construyan el concepto de *cuadrilátero* no es suficiente, ni deseable, que en principio se dé la definición de cuadrilátero como *polígono de cuatro lados* y se ilustre dibujando varios cuadriláteros, creyendo que con ello el alumno aprenderá lo que son estas figuras. Desafortunadamente, una manera común de enseñar Geometría es la denominada *enseñanza ostensiva*:

⁴ C. Samper, L. Camargo y C. Leguizamón, C. (2003), *Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la Geometría*.

Mediante esta última expresión se alude a una cierta presentación de los objetos de enseñanza en la que todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción prevista son proporcionados de un solo golpe por el profesor o el libro de texto.⁵

Es decir, el maestro muestra directamente los contenidos geométricos para que los alumnos observen una realidad sensible o una representación, en el supuesto de que los alumnos son capaces de apropiarse del contenido y de entender su aplicación en otras situaciones. En definitiva, ésta no es la mejor manera para enseñar un contenido geométrico.

Considérese, por ejemplo, que un maestro, para enseñar lo que es un triángulo isósceles, lo haga solamente dibujando a sus alumnos la siguiente figura:



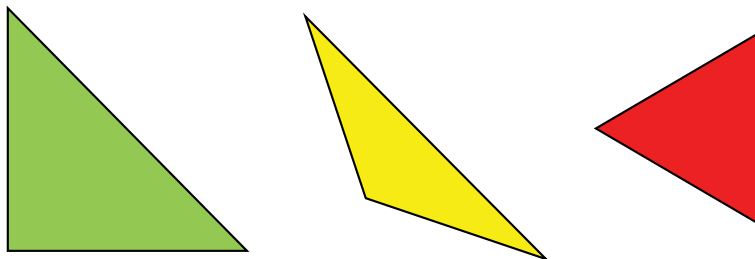
Para enriquecer la imagen conceptual de cualquier figura es necesario trabajarla y explorarla de diferentes maneras.

Es muy importante tener claro que la figura anterior es sólo una representación de un concepto: el triángulo isósceles. No se está *viendo* el concepto de triángulo isósceles sino un representante (y sólo uno) de un conjunto de figuras que comparten una característica: dos lados iguales. Si la imagen conceptual de un triángulo isósceles fuera sólo la anterior, se tendría una idea muy limitada de este concepto. Para enriquecer la imagen conceptual de cualquier figura es necesario trabajarla y explorarla de diferentes maneras (posición, material, color, tamaño) conservando sus características esenciales y por medio de diferentes situaciones que funcionalicen el con-

⁵ H. Ratsimba-Rajohm, citado por A. Ávila (2006), *Transformaciones y costumbres en la Matemática escolar*, p. 63.



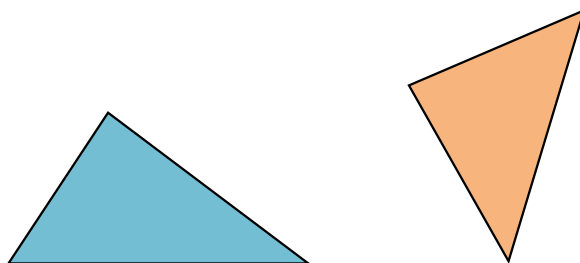
cepto. Por ejemplo, las siguientes figuras también tienen forma de triángulos isósceles.



Se pretende que la imagen conceptual de un objeto geométrico esté lo más cercanamente posible al concepto:

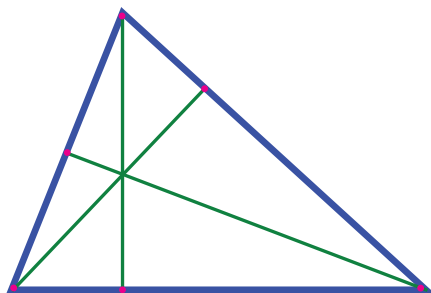
...la complejidad de la educación geométrica a diferencia de la educación numérica, radica en la omnipresente e inevitable dialéctica entre la conceptualización y la visualización [...] De esta manera, la Geometría puede ser considerada una búsqueda de modelos guiada tanto por el *ojo visual* como por el *ojo de la mente*.⁶

Muchos de los errores que cometen los alumnos se deben a que tienen imágenes conceptuales pobres. Por ejemplo, si los alumnos creen que la base de un triángulo es el lado horizontal porque en él se *apoya*, entonces pensarán que el primero de los siguientes triángulos tiene base pero el segundo no, lo cual es falso: cualquier lado de un triángulo puede ser tomado como su base.

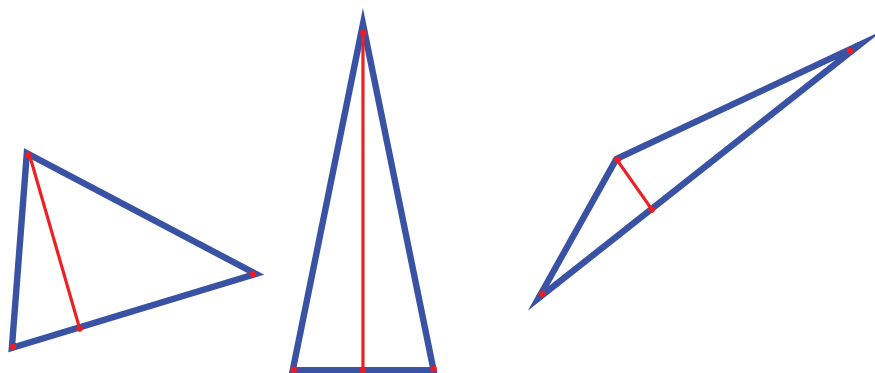


⁶ J. Fortuny (1994), "La educación geométrica 12-16. Sistemática para su implementación", *La Geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*.

Si cualquier lado puede ser base del triángulo, y se sabe que *la altura de un triángulo es la perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto*, entonces los triángulos tienen tres alturas (una por cada lado) y no sólo, una como muchos alumnos creen:



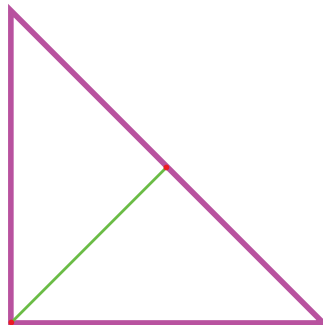
Cuando los estudiantes consideran que todas las alturas de un triángulo están dentro de él, generalmente se debe a la imagen conceptual que tienen de las alturas de un triángulo. Puede ser que siempre hayan visualizado alturas como las siguientes:



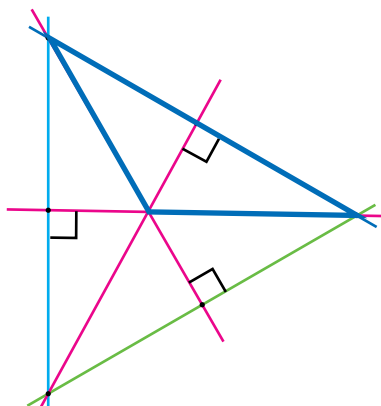
Para ampliar esa imagen se requiere que los alumnos trabajen con alturas que coinciden con los lados del triángulo, como es el caso de los triángulos



rectángulos, en los que los lados que forman el ángulo recto son, al mismo tiempo, dos de las alturas de los triángulos,



y con alturas que quedan fuera del triángulo, como en el caso de los triángulos obtusángulos.

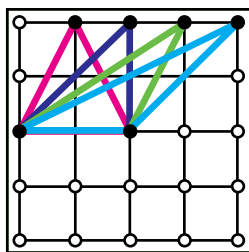


*En Geometría el concepto
está muy ligado a la
imagen conceptual.*

En conclusión, dado que en Geometría el concepto está muy ligado a la imagen conceptual conviene enriquecer lo más que se pueda esta última.

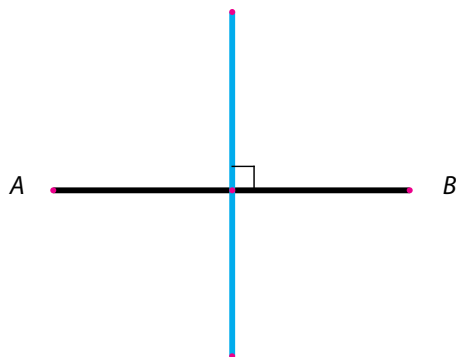
Por ejemplo, una actividad que permite una comprensión dinámica del concepto de altura es formar en el geoplano un triángulo como el rojo y que, partir de él y cambiando sólo el vértice superior, se encuentren otros triángulos con

la misma base y la misma medida de la altura. Con lo anterior se espera que los alumnos construyan triángulos como los siguientes (se usaron colores diferentes para distinguir un triángulo de otro):



La actividad puede realizarse también en el cuaderno trazando dos rectas paralelas y varios triángulos, todos con la misma base en una de las paralelas y el tercer vértice sobre la otra paralela.

No sólo es importante enriquecer la imagen conceptual al variar las posibilidades de representación, sino también, cuando se pueda, ampliar el concepto mismo. Muchos objetos geométricos pueden ser estudiados a partir de diferentes conceptos. Por ejemplo, al segmento AB se le ha trazado una perpendicular que pasa por el punto medio:





Esta perpendicular en el punto medio recibe el nombre de *mediatriz*. Pero la mediatriz es más que eso, observe que también es el eje de simetría del segmento. Y si elige cualquier punto de la mediatriz y mide la distancia entre él y cada uno de los extremos A y B notará que ese punto está a la misma distancia de ellos; esto se puede hacer con cualquier punto de la mediatriz. Es decir, la mediatriz también es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento.



2.2. Tareas de investigación

Las actividades o tareas de investigación son aquellas en las que el alumno indaga acerca de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de dotarlas de significados. Probablemente es en este tipo de tareas donde se aprecia de mejor manera el enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Geometría.

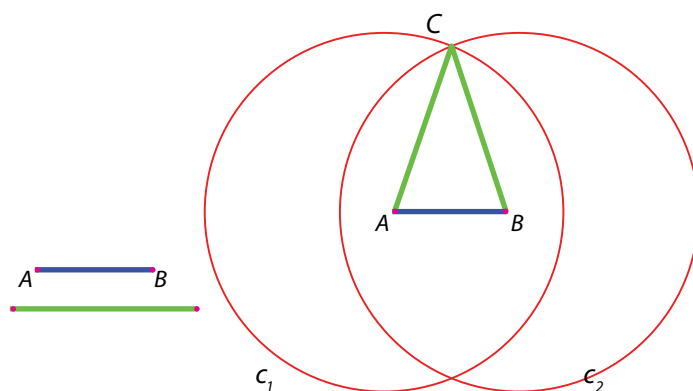
Un problema se concibe como una situación ante la cual no se cuenta con un proceso de resolución inmediato; si ya se sabe cómo resolverlo, entonces no es un problema. Es decir, podemos plantear a los alumnos problemas para *practicar* un conocimiento o problemas para *construir* un conocimiento, estos últimos son los que entran dentro de las tareas de investigación.

Un ejemplo de tarea de investigación es el siguiente: los alumnos han trabajado el concepto de triángulo isósceles pero no su trazo; se les pide entonces que usen sus instrumentos geométricos para trazar uno. En la clase surgen diferentes procedimientos:



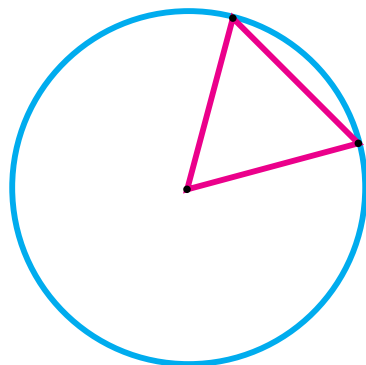
Procedimiento A

A partir del segmento AB se trazan dos circunferencias con igual radio, donde A es el centro de la circunferencia c_1 y B el de la circunferencia c_2 . Se unen A y B con el punto donde se cortan las circunferencias, el punto C .



Procedimiento B

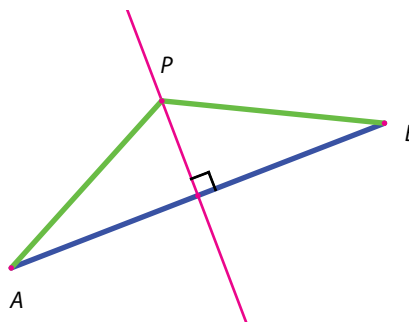
Se dibuja una circunferencia y, trazando dos radios cualesquiera y una cuerda se obtiene un triángulo isósceles.





Procedimiento C

Se traza un segmento AB y su mediatriz (la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento). Se elige un punto cualquiera de la mediatriz (P) y se une con los extremos del segmento.⁷



En las tareas de investigación los alumnos ponen en juego las relaciones y los conceptos geométricos para obtener lo que se pide. Es importante mencionar que las tareas de conceptualización y de investigación no necesariamente se dan por separado. Por ejemplo, considérese el siguiente problema:

Carlos vive a la misma distancia de la casa de Ara (punto A) que de la de Bety (punto B). Marca con puntos cinco lugares diferentes donde puede estar la casa de Carlos.⁸



A •



•B

⁷ S. Llinares (2003), *Matemáticas escolares y competencia matemática*.

⁸ *Matemáticas I. Telesecundaria*, vol. I, primer grado, p. 148.

Es muy probable que los alumnos localicen, en primer lugar, el punto medio entre los puntos A y B , pero como se les solicitan otros cuatro lugares tendrán que buscar la manera de hallarlos; quizá lo hagan *al tanteo* y utilicen la regla para medir la distancia de los puntos que marquen a los puntos A y B . Un alumno con más experiencia en el uso de los instrumentos podría observar que un compás será de gran utilidad para hallar los puntos restantes: se trazan dos circunferencias que se corten y que tengan el mismo radio, una con centro en A y otra con centro en B , se traza la recta que pasa por los puntos donde se cortan; cualquier punto de esa recta puede ser la ubicación de la casa de Carlos.

En esta tarea de investigación el contenido matemático que está en juego es una de las definiciones de la mediatriz: el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos de un segmento, es decir, se trata, al mismo tiempo, de una tarea de investigación que tiende a formar un concepto en los alumnos; más adelante se podría trabajar la definición de ese concepto.

2.3. Tareas de demostración

Las actividades de demostración tienden a desarrollar en los alumnos la capacidad para elaborar conjeturas o procedimientos de resolución de un problema que después tendrán que explicar, probar o demostrar a partir de argumentos que puedan convencer a otros de su veracidad. Es en este tipo de actividades donde puede apreciarse la socialización del conocimiento geométrico, ya que desde el enfoque de resolución de problemas se concibe al conocimiento como una construcción social.

Las tareas de demostración son esenciales en Geometría y deben estar presentes en la interacción del aula escolar; la construcción de argumentos lógicos es una habilidad que forma parte esencial de la cultura geométrica y es deseable que todos los alumnos la desarrollen.





En el ámbito escolar se pueden considerar tres tipos de demostraciones: la explicación, la prueba y la demostración propiamente dicha.⁹

Se entiende por *explicación* un discurso que trata de hacer inteligible el carácter de verdad de una proposición o de un resultado. Las razones expuestas pueden ser discutidas, refutadas o aceptadas. Un ejemplo escolar es cuando se pide a los estudiantes que expliquen la manera en que llegaron al resultado de un problema para que convenzan a sus compañeros de que dicho resultado es correcto.

Se pide a los estudiantes que expliquen la manera en que llegaron al resultado de un problema.

Una *prueba* es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento determinado, puede ser objeto de un debate cuya significación es determinar un sistema de validación común entre los que intervienen en la discusión de la prueba. Generalmente, cuando se trabajan las *demonstraciones* en el aula escolar lo que realmente se hace es probar que ciertos enunciados son verdaderos; no se consideran demostraciones rigurosas porque no forman parte de un sistema axiomático que parte de definiciones y axiomas¹⁰ sino que corresponden a *pruebas* aisladas de ciertos enunciados. Por ejemplo, cuando se prueba que:

- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales
- La suma de los ángulos de un triángulo es 180°
- Un ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco
- Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual un ángulo agudo
- Etcétera.

En una comunidad matemática sólo se pueden aceptar como pruebas las explicaciones que toman una forma particular. Una demostración¹¹ matemática se organiza mediante una secuencia de enunciados reconocidos como verdaderos o que se pueden deducir de otros, con base en un conjunto de reglas

⁹ Balacheff, citado por G. Arsac (1987), "El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 8, núm. 3, pp. 267-312.

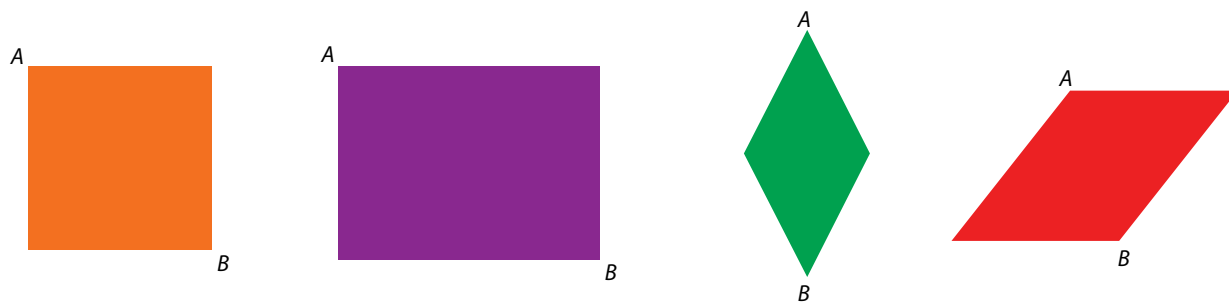
¹⁰ Un axioma es un enunciado que se acepta como verdadero sin que se tenga que demostrar que lo es.

¹¹ Matemáticas. Educación Básica. Secundaria. *Programas de estudio 2006*.

bien definido. En la Educación Básica, tal y como están actualmente estructurados los programas de Geometría, no se llega a demostraciones rigurosas, sólo a explicaciones y pruebas. Se espera que los estudiantes de Educación Básica desarrollen habilidades que les permitan explicar y probar por medio de argumentos convincentes; en secundaria es probable que hagan pruebas usando deducciones sencillas.

Las tareas de demostración constituyen una práctica habitual entre los matemáticos, no obstante, los alumnos no siempre ven la necesidad de probar o demostrar algo que para ellos resulta *evidente*.

Por ejemplo, una propiedad de los paralelogramos (cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos) es que sus ángulos opuestos son iguales. Si los alumnos observan varios paralelogramos notarán que, efectivamente, sus ángulos opuestos (A y B en las siguientes figuras) miden lo mismo.



Los estudiantes no sienten la necesidad de probar o demostrar que los ángulos internos A y B son iguales, como lo *ven* en estos ejemplos. Pensar matemáticamente implica ir más allá de lo que se ve, requiere pensar que no basta con *ver* porque los sentidos engañan; pero, además, tampoco basta con *ver* unos cuantos ejemplos, tendríamos que probar que esos ángulos son iguales para *todos* los paralelogramos, de diferentes formas y tamaños, y esto es imposible *ver* porque existe una infinidad de paralelogramos y no se pueden trazar todos. Una prueba o una demostración matemática es una poderosa herramienta que permite comprobar que algo es verdadero para *todos* los casos.

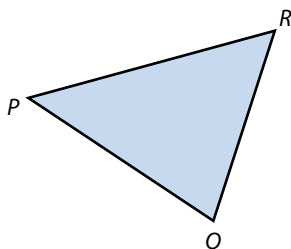
Para diferenciar lo que aquí consideramos *prueba* y *demostración* se planteará el siguiente ejemplo.



Una propiedad de los triángulos que suele trabajarse en la escuela secundaria es la siguiente:

La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°

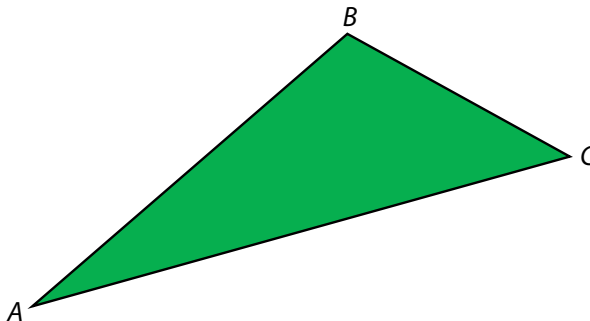
Esto significa que si se miden los tres ángulos de cualquier triángulo y se suman las tres medidas el resultado es 180° . Por ejemplo:



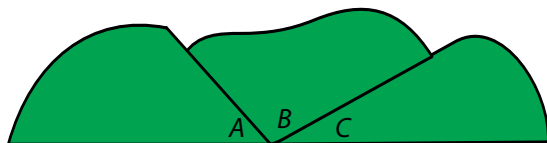
$$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$$

En un primer nivel, el alumno podría medir los ángulos de uno o varios triángulos, sumarlos y deducir que, efectivamente, la suma es 180° . Es probable que, al medir, algunos estudiantes no obtengan la suma exacta de 180° , sino un poco más o un poco menos, debido a la imprecisión de los instrumentos de medición o a la forma en que son utilizados.

También puede mostrarse que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° haciendo lo siguiente: se pide a los alumnos que tracen y recorten un triángulo cualquiera, cada alumno tendrá un triángulo diferente a los de sus compañeros.



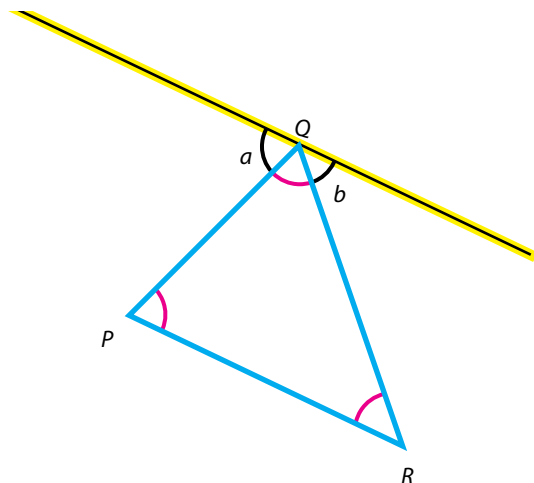
Después se les pide que corten sus ángulos y que pongan uno al lado de otro:



Los alumnos notarán que al poner los tres ángulos se forma un ángulo de 180° . Tanto midiendo como recortando los ángulos, los estudiantes creerán que, como se cumplió para algunos triángulos, entonces se cumple para todos; no obstante, pensar de esta manera no es admisible en Matemáticas: ¿qué garantiza que existe un triángulo en el que la suma de sus ángulos internos sea diferente a 180° ? Esto es lo que propicia la necesidad de probar o demostrar, de una manera general, para cualquier triángulo y no sólo para algunos.

Una prueba común es la siguiente:

Se traza un triángulo cualquiera PQR y se traza una paralela al lado PR que pase por Q .





Se tiene entonces que:

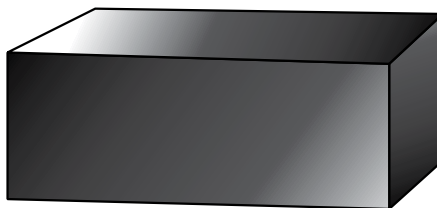
1. El ángulo a más el ángulo Q más el ángulo b suman 180° porque forman un ángulo colineal.
2. El ángulo a es igual al ángulo P porque son ángulos alternos internos entre paralelas.
3. El ángulo b es igual al ángulo R porque son ángulos alternos internos entre paralelas.
4. Entonces el ángulo P más el ángulo Q más el ángulo R suman 180° sustituyendo el ángulo a por P y el ángulo b por R .

Lo anterior es una prueba, pero no se trata exactamente de una demostración rigurosa, pues para ser considerada como tal se tendría que haber demostrado previamente que los ángulos alternos internos son iguales; es decir, en una demostración rigurosa todo lo que se afirma se debe demostrar antes, de otra manera no se puede usar una afirmación. En el caso de las pruebas, que son las que comúnmente se trabajan en el ámbito escolar, se permite utilizar algunas afirmaciones que no se hayan demostrado.



Actividades

1. Escriba un ejemplo de algún error que los alumnos cometen debido a que tienen una imagen conceptual limitada de un concepto geométrico.
2. Un alumno opina que las diagonales de un rectángulo son sus ejes de simetría, ¿cuál es su concepto de eje de simetría?, ¿por qué este concepto es erróneo?
3. A un diseñador le encomiendan diseñar una caja en forma de prisma y él hace una en forma de prisma rectangular.



¿Es el único prisma que puede usar para hacer una caja?, ¿qué otros prismas se pueden utilizar para hacer cajas?, ¿de qué depende la forma más adecuada?, ¿habrá hecho esta forma porque es el único prisma que conoce? o ¿qué otras razones pudo haber tenido?

4. Utilice sus instrumentos geométricos para trazar en su cuaderno triángulos isósceles usando los procedimientos A, B y C presentados en el apartado de tareas de investigación.
5. Explique, en cada caso, por qué el triángulo que se obtiene es isósceles.
6. El logotipo de un banco está formado por un triángulo equilátero azul y un círculo rojo:



Trace en su cuaderno el logotipo, puede ser a un mayor tamaño. Justifique por qué el triángulo que trazó es equilátero.

7. Identifique en algún libro de texto de Matemáticas de Educación Básica algunas actividades de las lecciones de Geometría, determine si se tratan de tareas de conceptualización, investigación o demostración.

3. Habilidades por desarrollar en las clases de Geometría

Por medio de las tareas de conceptualización, investigación y demostración que se propongan a los alumnos, las habilidades básicas por desarrollar en las clases de Geometría son:

- Visuales
- De comunicación



- De dibujo
- Lógicas o de razonamiento
- De aplicación o transferencia.¹²

En las diferentes actividades que se plantean a los alumnos estas habilidades no se dan por separado, generalmente están presentes dos o más; no obstante, aquí se separan para efectos de exposición.

3.1. Habilidades visuales

*La Geometría
es una disciplina
eminentemente visual.*

En relación con la enseñanza de las Matemáticas,¹³ la visualización es una actividad del razonamiento o proceso cognitivo basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, utilizados para resolver problemas o probar propiedades.

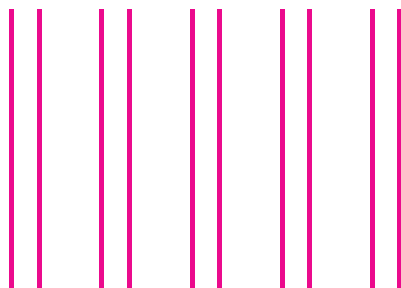
La Geometría es una disciplina eminentemente visual. En un principio, los conceptos geométricos son reconocidos y comprendidos a través de la visualización. Por ejemplo, el primer contacto que el alumno tiene con la idea de triángulo es mediante su visualización. Como ya se mencionó, es importante que los triángulos se exploren de las maneras más diversas para que el alumno sea capaz de discernir, poco a poco, lo que es inherente al concepto de triángulo (polígono que tiene tres lados) y lo que no lo es (posición, color, material del que está hecho).

Cabe aclarar que, si bien la habilidad de visualización es un primer acercamiento a los objetos geométricos, *no* podemos aprender la Geometría sólo viendo una figura u otro objeto geométrico. La generalización de las propiedades o la clasificación de las figuras no puede darse a partir únicamente de la percepción. Es necesario que el alumno se enfrente a diversas situaciones donde los conocimientos adquieran sentido, por ejemplo, a través de las construcciones geométricas, en las que se puede variar el tipo de información que se les da.

¹² Según Hoffer, citado por Bressan (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica*.

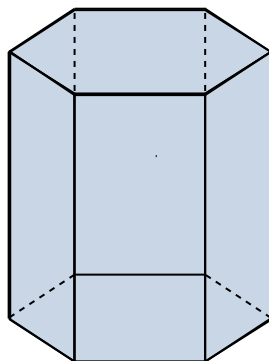
¹³ Según Gutiérrez, citado por Bressan (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica*.

Desarrollar la habilidad de visualización es muy importante en Geometría; es posible que al resolver un problema los estudiantes tengan dificultades debido a que no logran estructurar lo que observan o lo estructuran de una manera que no lleva a la solución del problema o no facilita demostrar cierta propiedad. Las configuraciones geométricas generalmente pueden visualizarse de varias maneras y es importante que esto se trabaje con los alumnos. Por ejemplo, el siguiente conjunto puede ser visto como cinco parejas de segmentos paralelos:



Pero también puede verse como un segmento inicial, uno final y cuatro parejas de segmentos paralelos entre ellos.

La habilidad de visualización está muy relacionada con la imaginación espacial: la visualización puede ser en la mente. Por ejemplo, es importante que los alumnos aprendan a interpretar la representación plana de un cuerpo de tres dimensiones:



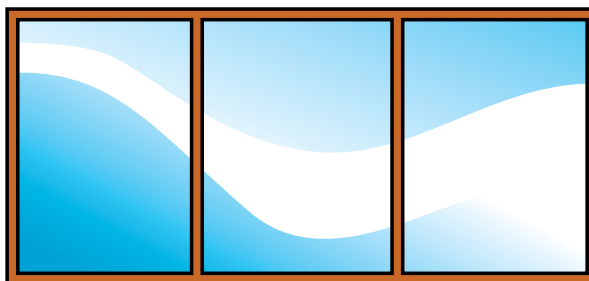


En el prisma anterior algunas de las aristas están representadas con líneas punteadas, esto significa que se está suponiendo que el cuerpo es transparente y que esas aristas realmente están detrás de las aristas trazadas en líneas continuas. Al visualizar esta imagen se espera que el alumno comprenda que se trata de un cuerpo que tiene tres dimensiones.

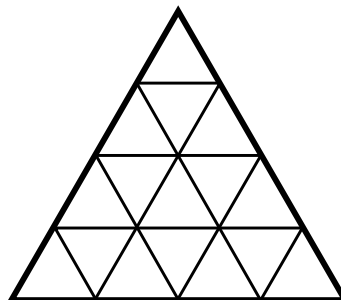


Actividades

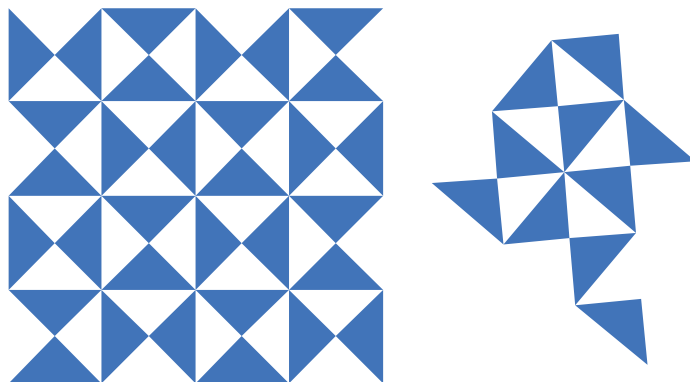
1. Trabaje su habilidad visual contando el número de rectángulos de la siguiente ventana. ¡Cuidado, son más de 4!



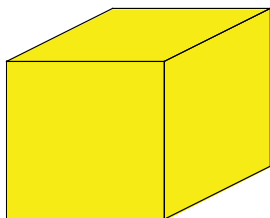
2. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura? ¡Cuidado, son más de 17!



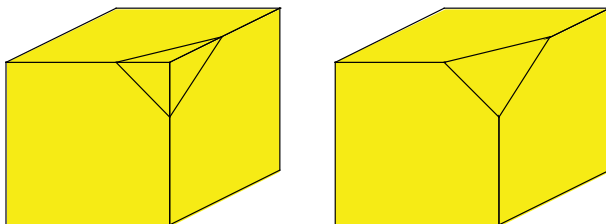
3. Considere un piso de azulejos, la figura de la derecha es una parte de él, aunque se ha cambiado de posición. Identifique y remarque en el piso esa figura.



4. ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene un cubo?



5. Ahora considere que al cubo anterior se le trunca un vértice. ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene el cubo truncado?





3.2. Habilidades de comunicación

La habilidad de comunicación se refiere a que el alumno sea capaz de interpretar, entender y comunicar información geométrica, ya sea en forma oral, escrita o gráfica, usando símbolos y vocabulario propios de la Geometría.

Las habilidades del lenguaje están estrechamente relacionadas con el pensamiento y están presentes en muchos sentidos durante las clases de Matemáticas y de Geometría en particular, por ejemplo, cuando:

- Se lee e interpreta la información de un problema para empezar a resolverlo.
- Se discute con los compañeros de equipo las posibles estrategias de resolución.
- Se presenta ante el grupo el resultado y procedimiento que se siguió para resolver un problema.
- Se justifica un resultado o un procedimiento.
- Se valida una conjetura que se hizo.

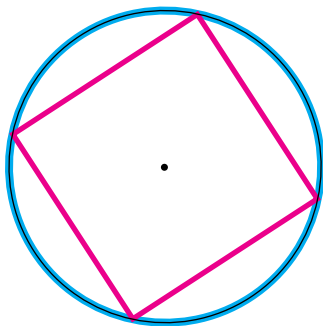
Dentro de estas habilidades está el proceso de designar por su nombre a las relaciones y a los objetos geométricos: paralelas, perpendiculares, cuadrado, rombo, círculo, mediatriz, bisectriz, etcétera. Muchas de las palabras que forman parte del vocabulario geométrico aparecen también en el lenguaje cotidiano, algunas veces con el mismo significado y otras con significado muy diferente; por ejemplo, la concepción inicial que los alumnos puedan tener sobre las palabras radio y diagonal es muy diferente a las concepciones geométricas de esas palabras.

Una actividad recomendable en las clases de Geometría es la de invitar continuamente a los alumnos a que, siempre que el ejercicio lo permita, argumenten sus respuestas: no sólo es importante dar el resultado sino explicar cómo se obtuvo y probar que es correcto, de esta manera convertimos las actividades en tareas de demostración fomentando la cultura de la argumentación lógica y el desarrollo de su habilidad para comunicarse.

Muchas de las palabras que forman parte del vocabulario geométrico aparecen también en el lenguaje cotidiano.

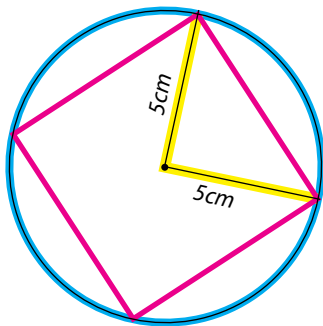
Por ejemplo, consideremos la siguiente tarea:

Si el radio de la circunferencia mide 5 cm, ¿cuál es el área del cuadrado?



Los alumnos pueden seguir diferentes procedimientos y llegar al resultado correcto, que es 50 cm^2 . No obstante, es muy importante que argumenten por qué 50 cm^2 es una respuesta correcta. Algunas explicaciones y argumentos posibles son los siguientes:

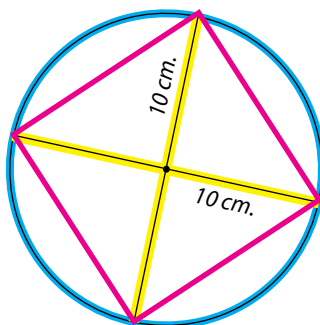
- Las diagonales de los cuadrados son perpendiculares, al trazar dos radios que pertenezcan a las diagonales también serán perpendiculares y formarán un triángulo rectángulo con base 5 cm y altura 5 cm, que es la cuarta parte del cuadrado. El área de este triángulo es $\frac{25}{2}=12.5$, este resultado por 4 da 50.



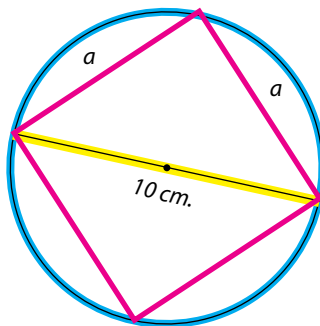


- El cuadrado es un rombo, de manera que se puede aplicar la fórmula para calcular el área del rombo: el producto de las diagonales entre dos. Las diagonales del cuadrado son diámetros del círculo, es decir, miden 10 cm, así que el área es:

$$\frac{10 \times 10}{2} = 50$$



- Al trazar una de las diagonales del cuadrado se forman triángulos rectángulos cuya hipotenusa es esta diagonal y cuyos catetos son los lados del cuadrado. Como la diagonal es también diámetro del círculo, entonces mide 10 cm.



Aplicando el teorema de Pitágoras y considerando que el cuadrado mide de lado a , tenemos:

$$a^2 + a^2 = 100$$

$$2a^2 = 100$$

$$a^2 = 50$$

La actividad *Adivina la figura*, que consiste en mantener una figura oculta y los estudiantes, por medio de preguntas que se responden sólo con sí o no, tratan de adivinar de cuál figura se trata, desarrolla el vocabulario geométrico de los alumnos, permitiendo incorporar las palabras adecuadas para referirse a las partes de las figuras. Por ejemplo, si los alumnos preguntan:

¿La figura tiene tres picos? (o tres puntas)

El maestro puede contestar:

No, no tiene tres vértices.

Sin que tenga que definir lo que es un vértice.

Otras actividades recomendables son aquéllas en las que hay que enviar un mensaje a un receptor con algún fin; como en las dos situaciones siguientes, la primera se refiere a una figura plana y la segunda a un cuerpo geométrico:

- Se le da a un alumno, que será el emisor, una figura geométrica recortada y se le pide que elabore un mensaje a otro compañero para que éste a su vez trace una figura idéntica en forma y tamaño. El alumno receptor recibe el mensaje y reconstruye la figura.
- Se le da a un alumno, que será el emisor, una caja pequeña y se le pide que elabore las instrucciones para que otro compañero construya con cartulina una caja idéntica en forma y tamaño. El alumno receptor recibe las instrucciones escritas y reconstruye la caja.

Hay que enviar un mensaje a un receptor con algún fin.

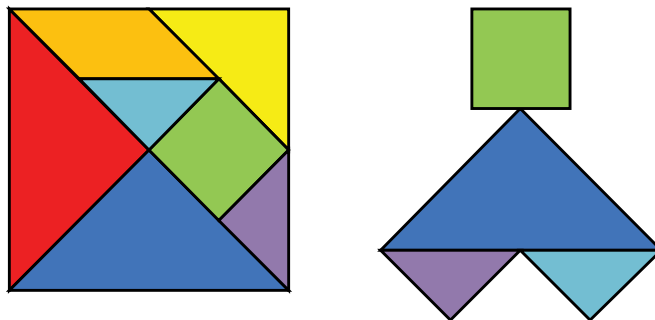
En la consigna de estas actividades se debe indicar que está prohibido hacer dibujos. Al terminar se comparan las figuras (o los cuerpos) y, si no son



iguales, se analiza si el error estuvo en el mensaje o en la interpretación del mismo.

Al principio los mensajes suelen ser ambiguos, les falta información importante e incluyen otra que no se requiere; poco a poco los alumnos van mejorando en la redacción de las indicaciones.

Otra actividad de comunicación consiste en organizar a los alumnos por parejas, se colocarán frente a frente con un obstáculo en medio (puede ser la mochila) y se le pide a uno de ellos que, sin que su pareja lo vea, haga una figura utilizando, por ejemplo, cuatro piezas del tangram:



Después le dará oralmente las instrucciones para que su compañero haga una figura idéntica. Cuando terminan se quita el obstáculo y se comparan las figuras.

El desarrollo del lenguaje geométrico es muy importante para la comprensión, de ahí la gran importancia que tiene enfrentar a los alumnos constantemente a situaciones en las que tengan que comunicar información geométrica.

Dentro de las habilidades de comunicación y estrechamente relacionada con las tareas de demostración está la competencia de argumentación:

Cuando el profesor logra que sus alumnos asuman la responsabilidad de resolver cada problema que plantea, junto con ella crea las condiciones para que dichos alumnos vean la necesidad de formular argumentos que les den sustento al procedimiento y/o solución encontrados, según las investigaciones que se han consultado, en tres niveles de complejidad y que corresponden a

tres finalidades distintas: para explicar, para mostrar o justificar informalmente o para demostrar.¹⁴

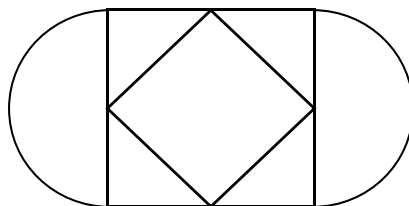
Pero la argumentación va más allá de la comunicación, hay que comunicar para convencer; el estudiante no sólo debe manejar el lenguaje geométrico adecuado sino también hacerlo de manera que forme una cadena de argumentos que muestren la veracidad de su propuesta. Esta cultura de la argumentación es necesaria no sólo dentro del ámbito matemático escolar sino en cualquier ámbito en el que se desenvuelva el alumno.

Dentro de la habilidad de comunicación está el uso de símbolos geométricos, que constituyen una poderosa herramienta que permite, en un momento dado, abandonar todo referente concreto e incluso vocablos lingüísticos y trabajar únicamente con símbolos. Por ejemplo, al anotar $AB \parallel CD$, se está simbolizando que el segmento AB es paralelo al segmento CD de una manera mucho más breve. El docente debe considerar la pertinencia de introducir la simbología sin que esto represente un obstáculo en el entendimiento de los alumnos.



Actividades

1. Trabaje su habilidad de comunicación; escriba un mensaje para que alguien pueda reproducir la siguiente figura.

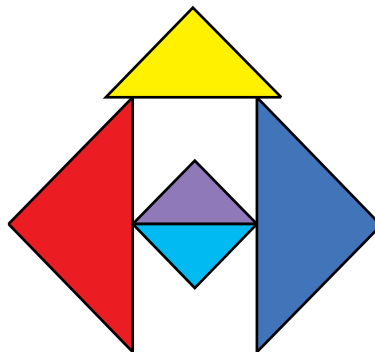


2. Entregue el mensaje a un compañero y pídale que siga las instrucciones; al final comparen las figuras.

¹⁴ Matemáticas. Educación Básica. Secundaria. *Programas de estudio 2006.*



3. Consiga dos tangram y dé las instrucciones orales para que un compañero construya una figura idéntica a la siguiente:



4. Escriba una lista de los símbolos geométricos que conoce e indique cómo se leen y qué significan.
5. Escriba una lista de las palabras del vocabulario geométrico que conoce e investigue lo que significan.
6. Escriba un enunciado que se refiera a una situación real para cada una de las siguientes palabras: paralelas, perpendiculares, diagonal, rectángulo, cuadrado, ángulo, círculo, rombo, cubo, prisma.
7. Investigue cómo se simbolizan en Geometría los segmentos, los ángulos, la relación de perpendicularidad, el ángulo recto, la congruencia de figuras y la semejanza de figuras.

3.3. Habilidades de dibujo

Las habilidades de dibujo están relacionadas con las reproducciones o construcciones gráficas que los alumnos hacen de los objetos geométricos. La reproducción se refiere a la copia de un modelo dado, ya sea del mismo tamaño o a escala, cuya construcción¹⁵ puede realizarse con base en información que se da en forma verbal (oral o escrita) o gráfica.

¹⁵ En este apartado se debe leer con cuidado cuándo se usa la palabra *construcción* para referirse a trazos geométricos y cuándo para referirse a la construcción de conocimientos (constructivismo).

Es necesario enfatizar que las actividades de trazo de figuras geométricas son de una gran riqueza didáctica debido a que promueven en el alumno su capacidad de análisis de las mismas al buscar las relaciones y propiedades que están dentro de su construcción. La construcción de figuras por sí misma no sólo es un propósito de la enseñanza de la Geometría sino que, además, constituye un medio para que los alumnos sigan explorando y profundizando en los conocimientos que ya tienen e incluso construyan otros nuevos. Asimismo, las actividades de construcción o reproducción de una figura permiten seguir desarrollando la habilidad para argumentar:

Por ejemplo, para construir, reproducir o copiar una figura, hay que argumentar las razones por las que un trazo en particular es válido o no, tomando como base las propiedades de dicha figura.¹⁶

Promover entre los alumnos el uso continuo de los instrumentos geométricos: regla, escuadras, compás y transportador.

De ahí la gran importancia que tiene promover entre los alumnos el uso continuo de los instrumentos geométricos: regla, escuadras, compás y transportador. Dichos instrumentos constituyen una herramienta indispensable en la enseñanza de la Geometría y es necesario desarrollar en los alumnos su destreza para utilizarlos y sus habilidades de dibujo.

Al pedir a los alumnos que, usando sus instrumentos geométricos, reproduzcan una figura tendrán que identificar las figuras involucradas y la manera en que están relacionadas dentro de la configuración completa, con lo cual estarán desarrollando su habilidad de visualización. Al reproducir una figura los alumnos practican el trazo de paralelas, perpendiculares, circunferencias (con determinado centro y radio), etcétera.

Entre las actividades que desarrollan las habilidades de dibujo y la imaginación espacial están aquéllas en las que, con un cuerpo geométrico dado, el estudiante tiene que trazar el desarrollo plano (molde o patrón) que permite construirlo.

Existen diferentes maneras de trabajar y presentar una serie de pasos para llevar a cabo una construcción geométrica; a continuación se muestran algunas:

¹⁶ Matemáticas. Educación Básica. Secundaria. *Programas de estudio 2006.*

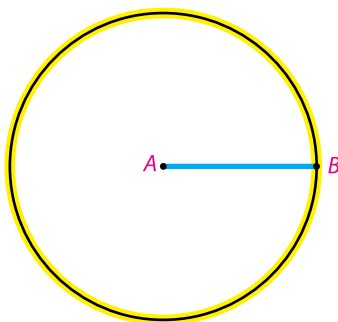


a) Se da la serie de instrucciones y se ilustran, el alumno las lleva a cabo apoyándose tanto en la lectura como en las ilustraciones. Por ejemplo, la siguiente es una serie de pasos para construir un triángulo equilátero que mide 2.5 de cada lado.

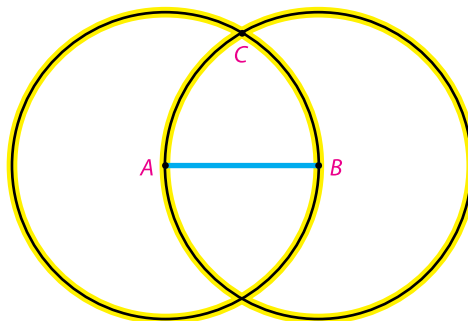
- Se traza un segmento de 2.5 cm (sus extremos pueden nombrarse A y B):



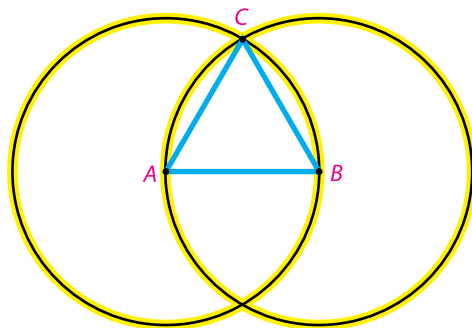
- Se traza una circunferencia con centro en A y radio AB:



- Se traza otra circunferencia con centro en B y radio AB. Se nombra C a uno de los dos puntos donde se cortan las dos circunferencias:



- Se une C con A y con B. El triángulo obtenido es equilátero:



b) Se da una serie de pasos para una construcción geométrica, el alumno los lleva a cabo apoyándose sólo en el texto escrito. Por ejemplo, las siguientes son las instrucciones para trazar dos rectas perpendiculares:

- Traza una recta.
- Con el compás traza dos circunferencias que tengan su centro en diferentes puntos de la recta y que se corten entre sí.
- Encuentra los dos puntos de corte de ambas circunferencias.
- Traza la recta que pase por estos dos puntos.¹⁷

c) Se dan los pasos de una construcción geométrica ilustrándolos y los alumnos tienen que reproducirlos y/o redactar lo que se hace en cada paso. Por ejemplo, la siguiente es una secuencia de pasos para trazar dos rectas paralelas:

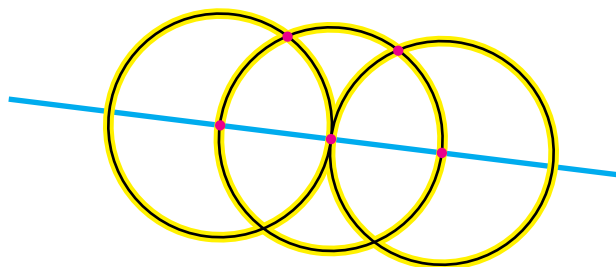
1



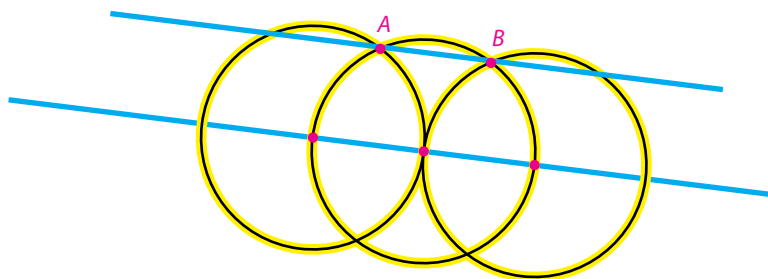
¹⁷ S. García y D. Block (2006), *Fractal 2*, p. 36.



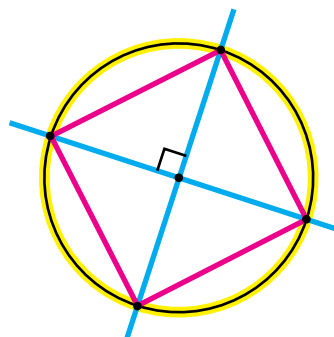
2



3



d) Se da la figura resultante de todo un trazo y el alumno tiene que reproducirlo o redactar la serie de pasos para llegar a esa figura. Por ejemplo, cuando se traza un cuadrado inscrito en una circunferencia se obtiene, como resultado final, la siguiente figura:



Las anteriores son sólo algunas de las formas en que pueden trabajarse las actividades de construcción haciendo uso de los instrumentos geométricos.

Los ejercicios en los que los alumnos tienen que utilizar sus instrumentos geométricos, además de que les permiten desarrollar conjuntamente muchas habilidades propias de la Geometría, también son propicias para que construyan nuevos conocimientos.

Por ejemplo, actividades como la número 7 de la página 64 permiten que los alumnos construyan conocimientos; en este caso observarán que una terna de medidas necesita reunir ciertas propiedades para que con ellas se pueda trazar un triángulo. Para el caso de los lados, se darán cuenta de que la suma de dos lados siempre es mayor que el tercer lado; para el de los ángulos, que la suma de las tres medidas debe ser igual a 180° . En cualquier otro caso no podrán obtener triángulos.

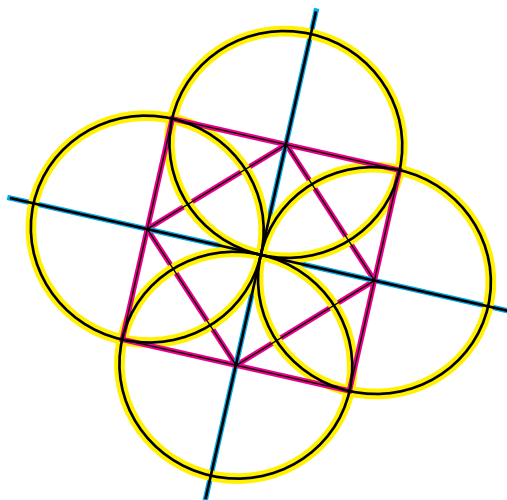
Una vez que se ha realizado la construcción en alguna de las formas anteriormente mencionadas, o en cualquier otra, también se puede trabajar esa actividad como una tarea de demostración: que los alumnos argumenten por qué la secuencia de pasos descrita efectivamente da como resultado la figura que se pide, es decir, ¿por qué puede garantizarse que el triángulo construido en el inciso a) es realmente equilátero? O bien, ¿por qué la figura del inciso d) es un cuadrado? Dar respuesta a estas preguntas permite que los alumnos desarrollen su capacidad para argumentar y hacer deducciones lógicas, lo que constituye parte esencial de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular.





Actividades

1. Utilice sus instrumentos geométricos para reproducir la siguiente figura (puede ser del tamaño que desee):



2. Construya triángulos cuyos lados midan:

6 cm, 6 cm, 8 cm

6 cm, 8 cm, 10 cm

3. Siga el procedimiento del inciso b) de la página 61 y verifique que, efectivamente, se obtienen rectas perpendiculares.
4. Redacte una secuencia de instrucciones para que un alumno trace un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.
5. Busque en libros secuencias de instrucciones escritas y llévelas a cabo.
6. Escriba las instrucciones para realizar la secuencia de trazos del inciso c) de la página 61.
7. *Triángulos imposibles*. Utilice sus instrumentos geométricos para construir, en cada caso, un triángulo que cumpla con las medidas indicadas y descubra cuáles medidas no permiten obtener triángulos.

a) Lados:

5 cm, 6 cm, 8 cm

2 cm, 2 cm, 4 cm

7 cm, 3 cm, 2 cm

9 cm, 6 cm, 8 cm

b) Ángulos:

60°, 80°, 40°

90°, 50°, 40°

10°, 20°, 60°

25°, 40°, 30°

8. Trabaje sus habilidades de dibujo utilizando sus instrumentos geométricos para trazar, en una hoja blanca, un cuadrado cuyos lados no sean paralelos a los bordes de la hoja.
9. Imagine un cilindro apoyado sobre uno de los círculos que sirven de base. Dibuje cómo se vería de frente y cómo se vería por arriba.
 - a) Trace el desarrollo plano para hacer un lapicero en forma de cilindro que mida 3.5 cm en el radio de su base y 12 cm de altura.

3.4. Habilidades de razonamiento

Al aprender Matemáticas, los alumnos desarrollan su razonamiento, es decir, aprenden a razonar. Esto es particularmente cierto para el caso de la Geometría, con cuyo estudio se pretende desarrollar habilidades de razonamiento como:

- La abstracción de características o propiedades de las relaciones y de los conceptos geométricos.
- Argumentar.
- Hacer conjeturas y tratar de justificarlas o demostrarlas.
- Demostrar la falsedad de una conjetura al plantear un contraejemplo.
- Seguir una serie de argumentos lógicos.
- Identificar cuándo un razonamiento no es lógico.
- Hacer deducciones lógicas.

A pesar de que tradicionalmente la Geometría ha sido considerada como el prototipo de una disciplina deductiva (sus demostraciones son deductivas porque algunas propiedades se demuestran o derivan a partir de otras ya de-

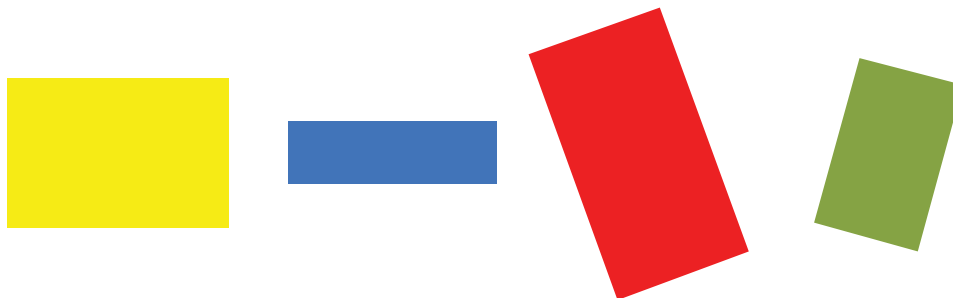


mostradas o aceptadas como verdades), en la enseñanza es conveniente usar la inducción para elaborar conjeturas o construir conceptos.

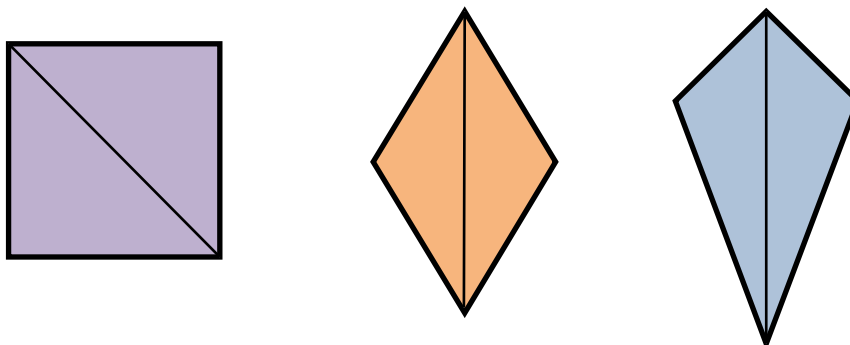


Actividades

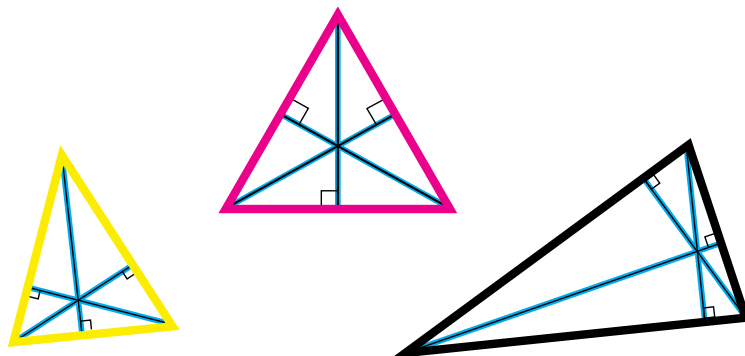
1. Juanito observa los siguientes rectángulos y deduce: las figuras con dos lados cortos y dos largos son rectángulos. ¿Es correcta su deducción?, ¿por qué? ¿Qué otras figuras tienen dos lados largos y dos cortos y no son rectángulos?



2. Lety traza un eje de simetría a cada una de las siguientes figuras. Al analizarlas deduce que: si un segmento divide a una figura en dos triángulos iguales, entonces el segmento es eje de simetría de la figura. ¿La deducción de Lety es correcta? Argumente su respuesta.



3. Carlos traza las tres alturas de los siguientes triángulos:



Y deduce que: las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto. El punto siempre está dentro del triángulo. ¿Son correctas sus deducciones? Argumente su respuesta a partir de un contraejemplo, es decir, dé un ejemplo que muestre que estas deducciones no siempre se cumplen.

3.5. Habilidades de aplicación y transferencia

Como su nombre lo indica, con las habilidades de aplicación y transferencia se espera que los alumnos sean capaces de aplicar lo aprendido no sólo a otros contextos, al resolver problemas dentro de la misma Geometría, sino también que modelen geoméricamente situaciones del mundo físico o de otras disciplinas.

Algunos investigadores consideran que la comprensión en Geometría se ha dado sólo si los alumnos son capaces de aplicar el contenido aprendido a problemas nuevos, es decir, a problemas diferentes a los que inicialmente fueron presentados.

La transferencia puede darse de varias maneras. Puede ser que el alumno transfiera el contenido aprendido en Geometría para resolver otra tarea que también pertenece al ámbito matemático, como el álgebra; o bien, que transfiera lo aprendido en Geometría a una tarea que pertenece a otra área del conocimiento, como la física, en cuyo caso se habla de la aplicación de las Matemáticas.



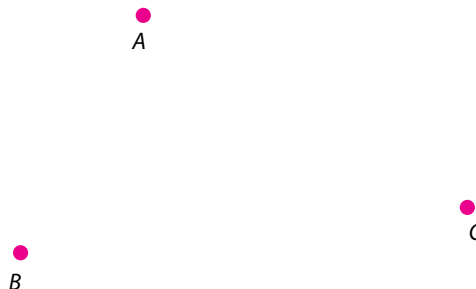
Se puede llevar aún más lejos: cuando el alumno transfiere lo aprendido en Geometría a un problema de carácter no matemático de otra asignatura o de la vida misma, en este caso se dice que la enseñanza de la Geometría ha cumplido su valor formativo: el alumno razona en terrenos distintos a como lo hace cuando se enfrenta a una tarea geométrica, por ejemplo, al tratar de convencer a otros utiliza una serie de argumentos estructurados lógicamente.



Actividades

1. Trabaje sus habilidades de aplicación: vuelva a leer los conceptos de mediatriz que se mencionaron en el apartado de *Tareas de conceptualización* y trate de usar ese conocimiento para resolver el siguiente problema.

Los puntos representan tres unidades habitacionales:



Se va a construir un centro comercial y se desea que esté a la misma distancia de las tres unidades. Identifique con un punto el lugar donde se tendría que construir el centro comercial. Haga la construcción en su cuaderno.

2. Busque o diseñe actividades en las que se trabajen, al menos, cada una de las habilidades descritas.
3. Identifique las lecciones de Geometría de un libro de texto y analice cuáles de las habilidades mencionadas se trabajan en cada una.

4. Los niveles de razonamiento geométrico

La teoría de los niveles de razonamiento fue propuesta por un matrimonio holandés de apellido Van Hiele, por lo que se conoce como la teoría de Van Hiele.

El modelo Van Hiele está formado por dos partes, que son los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje; para el presente trabajo sólo se tomarán como marco conceptual los primeros. A continuación se señalan los niveles de razonamiento y, de manera general, los principales rasgos que presenta un estudiante en cada nivel.

Nivel 1. Reconocimiento (o descripción): percibe los objetos en su totalidad y como unidades; describe los objetos por su aspecto físico y los clasifica con base en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos; no reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos. Un estudiante de este nivel es capaz de identificar que la siguiente figura es un cuadrado, pero no sabe más acerca de él.

El modelo Van Hiele está formado por los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.



Nivel 2. Análisis: percibe los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas; puede describir los objetos de manera informal mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas; deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera infor-

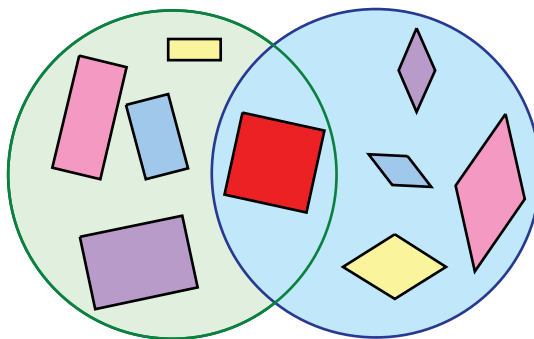


mal a partir de la experimentación. Un estudiante de este nivel puede enumerar algunas características de un cuadrado:

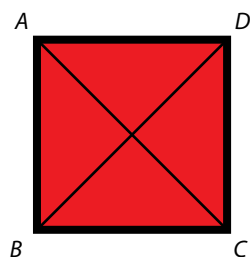


Tiene dos pares de lados paralelos.
Tiene cuatro ángulos y los cuatro son rectos.

Nivel 3. Clasificación (o abstracción): realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de razonamiento informal; describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta; entiende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración; no es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente la necesidad de hacerlos. Por ese motivo, tampoco comprende la estructura axiomática de las Matemáticas. Un estudiante de este nivel no tiene dificultad en aceptar que el cuadrado es, al mismo tiempo, un rectángulo (por tener ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos) y un rombo (por tener lados iguales y dos pares de ángulos opuestos de igual medida).



Nivel 4. Deducción (o prueba): es capaz de realizar razonamientos lógicos formales; comprende la estructura axiomática de las Matemáticas; acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etcétera). Un estudiante de este nivel puede demostrar que las diagonales de un cuadrado son iguales, siguiendo un razonamiento deductivo.



Hipótesis: $ABCD$ es un cuadrado.

Tesis: $AC = BD$

Demostración:

$AB = DC$ por ser lados de un cuadrado.

$BC = BC$ por ser lado común.

Ángulo $B = \text{ángulo } C = 90^\circ$ por ser ángulos de un cuadrado.

$\triangle ABC = \triangle BCD$ por LAL

$AC = BD$ por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

El modelo propuesto por los Van Hiele considera un nivel más, cuyas características son: capacidad para manejar, analizar y comparar diferentes Geometrías, cuestiones que no se toman en cuenta en los contenidos del currículo de Educación Básica, además de que en diversas investigaciones no es considerado porque estas características se encuentran en matemáticos profesionales y estudiantes de nivel superior.

El propósito de mencionar en este trabajo los niveles de Van Hiele no es que es docente *clasifique* a sus alumnos y trate de ubicar a cada uno en el nivel en que se encuentra. Lo que se desea mostrar es el hecho de que el razonamiento geométrico evoluciona desde niveles muy elementales de reconocimiento e identificación de las figuras geométricas hasta el desarrollo de razonamientos deductivos y que si un docente insiste en preocuparse porque sus alumnos sólo aprendan a identificar las figuras geométricas con sus nombres (e incluso definiciones) está condenándolos a mantenerse en un nivel muy elemental del pensamiento geométrico.



En resumen, se ha expuesto que hay diferentes tipos de tareas que pueden trabajarse con los alumnos en la clase de Geometría:

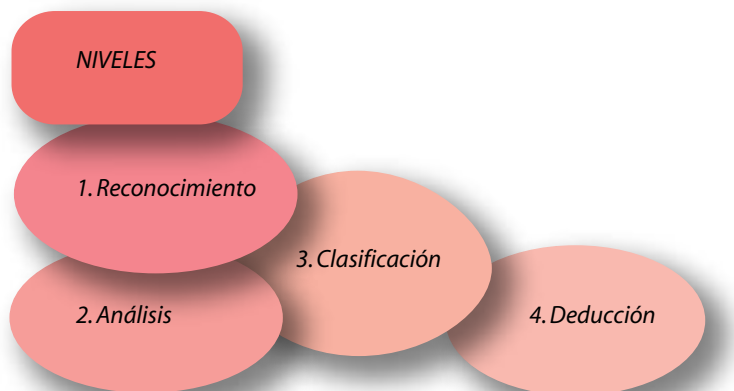


Y que se esperaba que los maestros tuvieran en cuenta esto cuando eligen o diseñan las actividades que piensan trabajar con los alumnos. También es importante considerar que, aunado a los contenidos geométricos, deben desarrollar habilidades a través de las tareas propuestas:

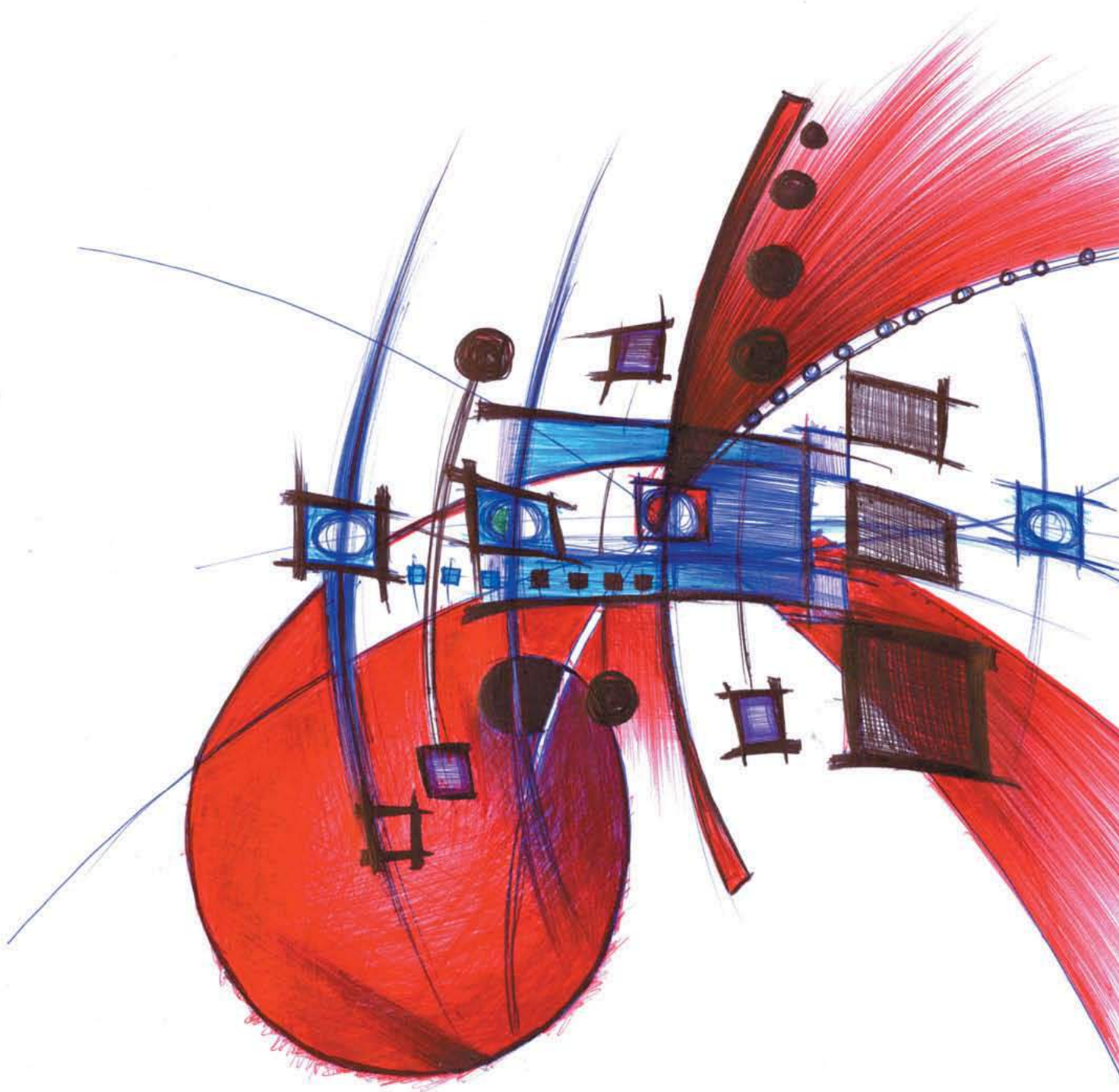


Por ello, al momento de elegir las actividades a realizar es importante que se reflexione no sólo sobre el contenido que está en juego sino también en las habilidades que se podrán desarrollar en los alumnos.

Finalmente, según los esposos Van Hiele, las personas desarrollan ciertos niveles de razonamiento geométrico:



Lo hasta aquí expuesto no constituye un recetario de lo que se debe hacer en clase; su propósito principal es que el docente reflexione y tome conciencia de la riqueza que encierra la enseñanza de la Geometría, que considere el hecho de que va mucho más allá de la simple transmisión o explicación de términos geométricos y, sobre todo, que cuente con más herramientas que le permitan enriquecer sus clases y, por lo tanto, el aprendizaje de sus alumnos.



La Geometría en el aula



Es correcto, pregunto, es incluso prudente, aburrirse
a sí mismo y aburrir a los estudiantes.

Goethe

1. El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Geometría

Las tendencias actuales sobre enseñanza de la matemática promueven su aprendizaje mediante la resolución de problemas: resolver problemas constituye no sólo la finalidad de enseñar Matemáticas sino también un medio a través del cual los alumnos construyen conocimientos matemáticos. Acorde con este enfoque, se sugiere que la enseñanza de la Geometría gire en torno a la resolución de problemas que impliquen el uso de relaciones y conceptos geométricos. Los problemas deben ser lo suficientemente difíciles para que realmente constituyan un reto para los alumnos y lo suficientemente fáciles para que cuenten con algunos elementos para su resolución.

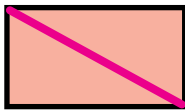
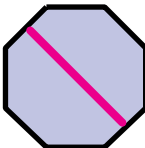
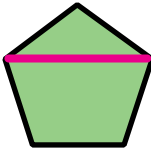
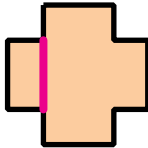
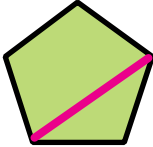
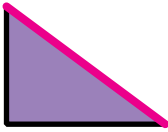
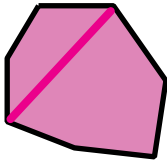
Una situación problemática es aquella en la que se desea obtener un resultado pero no se conoce un camino inmediato para obtenerlo, en este sentido la concepción de problema es relativa: lo que para unos alumnos puede resultar un problema para otros ya no lo es si cuentan con un camino para su resolución. La concepción de un problema como una situación de aprendizaje es muy amplia, los siguientes son ejemplos de problemas en Geometría:

Se sugiere que la enseñanza de la Geometría gire en torno a la resolución de problemas de relaciones y conceptos geométricos.

- Armar un rompecabezas
- Hacer el croquis del camino de la casa a la escuela
- Calcular el número de diagonales de un polígono cualquiera
- Calcular la altura de un poste (sin medirlo)
- Hallar el número de vértices de un poliedro a partir de su desarrollo plano
- Imaginar el resultado de girar un cuerpo geométrico
- Imaginar el cuerpo geométrico que se forma con cierto desarrollo plano.



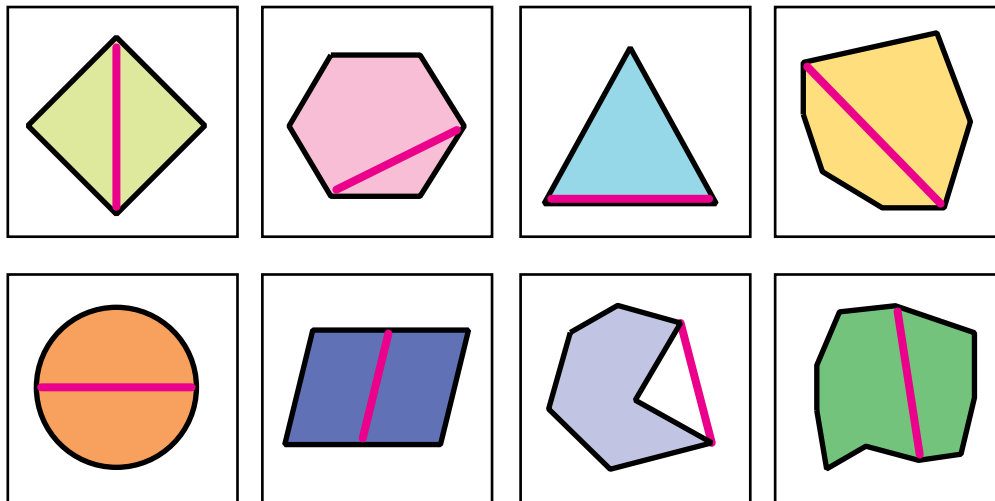
Este enfoque supone un modelo de clase muy diferente a aquel en el que se acostumbra *mostrar* un concepto geométrico o dar una explicación de los contenidos para después aplicarlos a problemas. Se trata ahora de realizar tareas que lleven a los estudiantes a experiencias más significativas: visualizar, explorar y analizar, abstraer propiedades, clasificar, elaborar conjeturas y tratar de validarlas. Por ejemplo, considérese la siguiente actividad. Se le da al alumno la siguiente información:

1. Es una diagonal 	2. No es una diagonal 	3. No es una diagonal 	4. No es una diagonal 
5. Es una diagonal 	6. No es una diagonal 	7. Es una diagonal 	8. Es una diagonal 
9. Es una diagonal 	10. No es una diagonal 	11. Es una diagonal 	12. Es una diagonal 

En esta parte de la actividad los alumnos *visualizan* las figuras e identifican cuál es o no una diagonal.

Después se le plantea el siguiente problema:

A partir de la información anterior, anota si el segmento rojo es o no es una de las diagonales de la figura.



¿Qué procesos pone en juego el alumno al tratar de decidir si el segmento rojo es o no es una diagonal de la figura? Ya no sólo se trata de *visualizar*, ahora tendrá que *explorar* y *analizar* cuál es la característica principal de una diagonal. Empieza entonces un proceso de *abstracción* en donde el alumno debe fijarse en qué es lo que se mantiene invariante en las diagonales, qué es lo que determina que el segmento indicado sea diagonal. Empezarán a *elaborar conjeturas* de lo que es una diagonal, algunas serán falsas o sólo se cumplirán en ciertos casos; por ejemplo, las siguientes son definiciones erróneas:

- Un segmento inclinado
- Un segmento que pasa por el centro de la figura
- Un segmento que une dos ángulos de la figura
- Un segmento que une dos vértices de la figura
- Un segmento que atraviesa la figura



El docente dista mucho de ser un simple transmisor de contenidos geométricos.

Con base en la idea que hayan construido sobre lo que es una diagonal, podrán *clasificar* en el segundo grupo de figuras aquellas que tienen señalada la diagonal de las que no lo tienen. Es importante que cuando los alumnos enuncien sus conjeturas acerca de lo que es una diagonal o cuando determinen si un segmento es o no diagonal de una figura se les invite a *argumentar* ¿por qué lo crees así? La argumentación es una de las competencias básicas que se pretende que los alumnos desarrollen durante su Educación Básica.

Una manera de trabajar los problemas consiste, *grosso modo*, en organizar al grupo en pequeños equipos o parejas y plantear el problema; se da el tiempo necesario para que los alumnos interactúen y traten de hallar la solución, después del cual se puede hacer una puesta en común o confrontación de resultados de manera grupal en donde algunos equipos, previamente seleccionados por el maestro, podrán exponer al frente sus procedimientos y resultados.

2. Propuesta para la enseñanza: el aula-taller de Geometría

Todo lo expuesto anteriormente implica una enseñanza de la Geometría en la que el docente dista mucho de ser un simple transmisor de contenidos geométricos. Sin descuidar éstos, la propuesta es llevar a cabo los diferentes tipos de tareas (conceptualizar, investigar, demostrar) en las que se trabaje el desarrollo de las habilidades mencionadas (visualización, de dibujo, comunicación, razonamiento lógico y transferencia), considerando los diferentes niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele (reconocimiento, análisis, clasificación y deducción); todo ello bajo el enfoque de resolución de problemas.

También se dijo que el punto de partida para el aprendizaje de la Geometría es el entorno físico: en esta disciplina el uso de material concreto (sobre todo en los primeros grados de escolaridad) cobra particular importancia al constituirse en un primer acercamiento hacia los diferentes grados de abstracción que se espera que los alumnos alcancen; sin embargo, es necesario mencionar que se debe ser muy cauteloso en la utilización de este material, pues debe estar supeditada a actividades que realmente con-

duzcan a un aprendizaje adecuado de los contenidos geométricos y al desarrollo de las habilidades geométricas mencionadas. El uso de material concreto, por sí mismo, no garantiza un aprendizaje significativo, se requiere que el profesor tenga un propósito específico para que la actividad que realice el alumno lo conduzca al desarrollo de una habilidad y al aprendizaje de contenidos geométricos. Al utilizar material concreto se debe estar alerta de que realmente se use bajo el enfoque de resolución de problemas.

El aula-taller de Geometría o aula-laboratorio se concibe como un espacio en el donde el alumno se hace responsable de su propio aprendizaje y el maestro es quien:

- Elige, adapta o diseña las actividades a trabajar.
- Organiza al grupo.
- Indica las consignas de las actividades a trabajar o problemas a resolver.
- Observa a los alumnos mientras trabajan, auxiliando a los que no hayan entendido lo que se tiene que hacer, dando pistas a los que hayan entendido pero requieren algo de ayuda; claro está, siempre sin solucionarles los problemas
- Dirige la confrontación grupal o puesta en común de resultados y procedimientos.
- Cierra la actividad institucionalizando o formalizando los contenidos geométricos trabajados durante la clase.

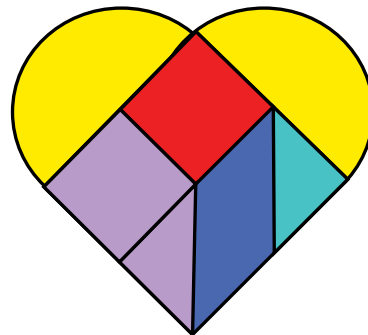
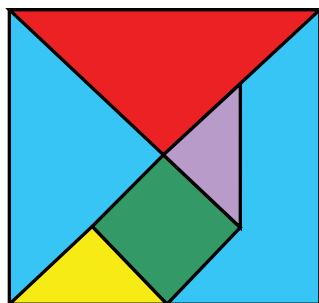
2.1. Materiales para construir la Geometría

Existen diferentes materiales que el maestro puede emplear para realizar actividades que favorezcan el desarrollo de habilidades geométricas y la adquisición de conocimiento geométrico. A continuación se presentan algunos ejemplos:





a) *Tangram*. El uso de estos rompecabezas geométricos desarrolla la visualización, las habilidades de reproducción, construcción y comunicación. Los siguientes son dos ejemplos de ellos:



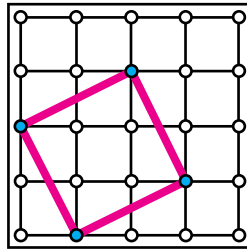
Algunas actividades que se pueden desarrollar con los tangram son:

- Recortar las diferentes piezas del rompecabezas y con ellas armar cuadrados, rectángulos, romboides, trapecios, utilizando una, dos, tres, cuatro o más piezas.
- Reproducir con regla y compás los rompecabezas.

El trabajo con tangram, entre otras cosas, permite enriquecer la imagen conceptual de las figuras, ya que van apareciendo en diferente posición y están formados por distintas piezas. También prepara a los alumnos para la deducción de las fórmulas de las áreas, pues construyen la idea de unas figuras que pueden descomponerse o ser formadas por otras.

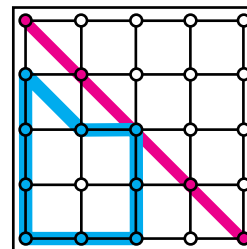
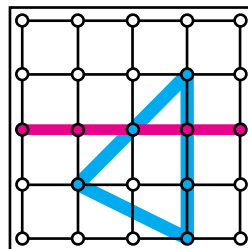
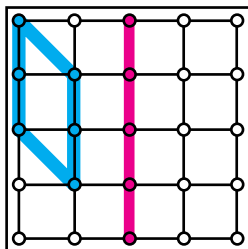
b) *Geoplano*. Consiste en un cuadrado de madera al que previamente se le traza una cuadrícula (del tamaño deseado) y en cada punto de intersección de dos líneas de la cuadrícula se clava un clavo dejando una parte de él

fuera para que pueda sujetar ligas. Un buen número de clavos es $5 \times 5 = 25$. Con las ligas de colores pueden formarse diferentes figuras geométricas.



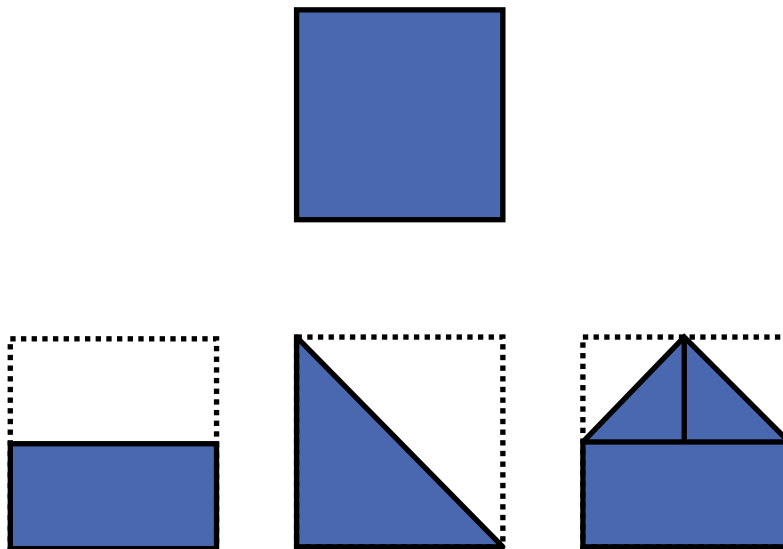
Los usos del geoplano son múltiples, algunos ejemplos de actividades de investigación son:

- Formar en el geoplano un cuadrado, un rectángulo, un triángulo, un trapecio, etcétera.
- Reproducir en el geoplano una figura dibujada en el pizarrón o construida en el geoplano del maestro.
- Formar en el geoplano todos los segmentos diferentes que puedan construirse (cuando se haya estudiado el teorema de Pitágoras puede pedirse la longitud de cada uno).
- Formar en el geoplano todos los cuadrados de diferentes tamaños que puedan formarse (lo mismo para rectángulos, triángulos rectángulos, etcétera).
- Hallar la figura simétrica con respecto al eje indicado.

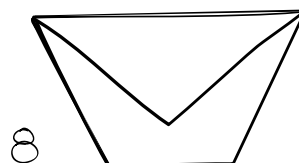
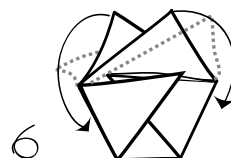
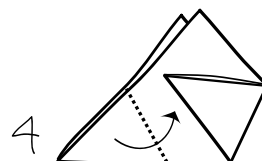
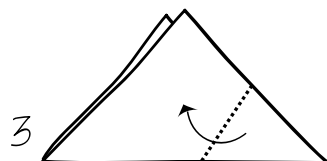
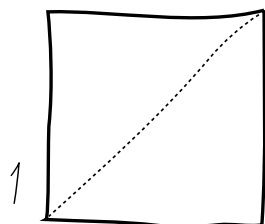




- Formar un polígono irregular y dar las instrucciones oralmente para que otro u otros compañeros formen un polígono idéntico y en la misma posición.
- c) *Doblado de papel.* El origami o papiroflexia constituye un excelente recurso para trabajar la Geometría, desde elaborar figuras siguiendo las instrucciones dadas por el profesor o por un manual hasta resolver problemas con el doblado de papel. Un problema de investigación podría ser: por medio de dobleces construir, a partir de un cuadrado, el mayor número de figuras geométricas que tengan diferente nombre (dos triángulos se cuentan por uno solo).



Seguir las instrucciones para hacer una figura de papel también desarrolla habilidades de visualización y comunicación.



Además, al hacer los dobleces implícitamente los alumnos están en contacto con diversos conceptos geométricos: cuadrado, diagonal, triángulo, triángulo rectángulo, etcétera.

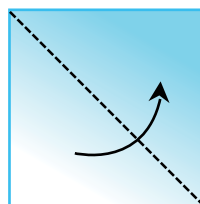


Si lo que se desea es que los estudiantes se apropien del vocabulario geométrico, la papiroflexia puede trabajarse dando las indicaciones oralmente o por escrito usando términos geométricos y cuestionando a los alumnos sobre las figuras que van obteniendo y sus características. Por ejemplo:

- Tomen un cuadrado:



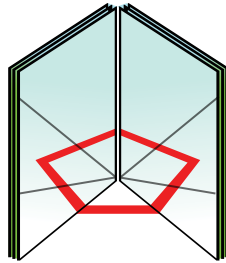
- Dóblenlo por una de sus diagonales:



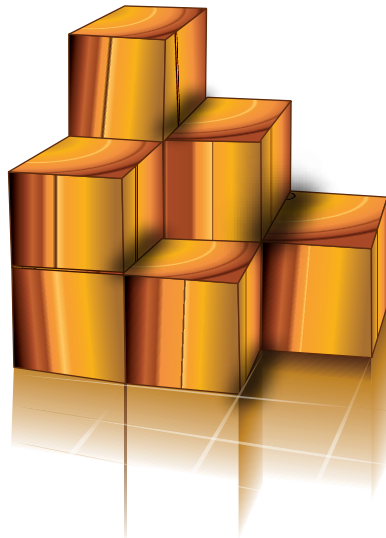
- Según sus lados, ¿qué tipo de triángulo obtienen? Según sus ángulos, ¿qué tipo de triángulo obtienen?



- d) *Espejos*. Ideales para validar o construir figuras simétricas. Si se hace un libro de espejos (dos espejos pegados por uno de sus lados a manera de bisagra que se abre y se cierra) se puede explorar la generación de polígonos regulares: ¿cuánto debe medir el ángulo entre los espejos para que, al ponerse sobre un papel con una recta dibujada, forme determinado polígono semejante?

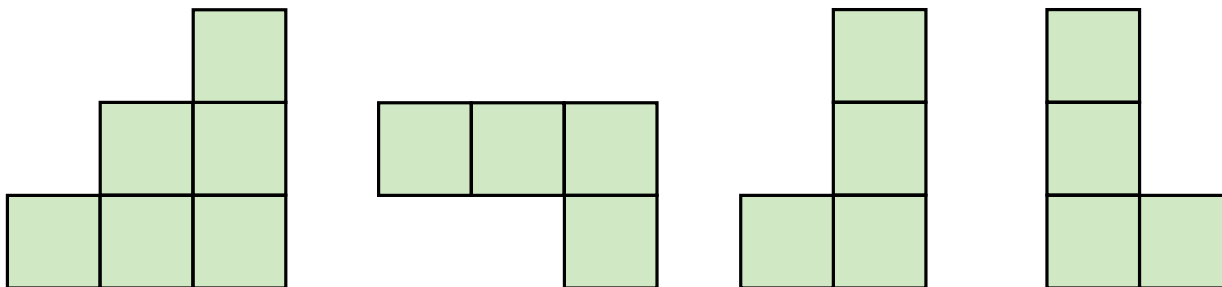


- e) *Cubos de madera*. Con ellos se pueden formar diferentes cuerpos geométricos y dibujar las vistas frontal, de arriba, izquierda, etcétera; o bien, dadas las vistas, que el alumno reconstruya el cuerpo geométrico. Por ejemplo, dibuja la vista frontal y de arriba de este cuerpo geométrico.





- Arma con tus cubos un cuerpo geométrico que tenga las siguientes vistas: frontal, de arriba y de cada lado, respectivamente.

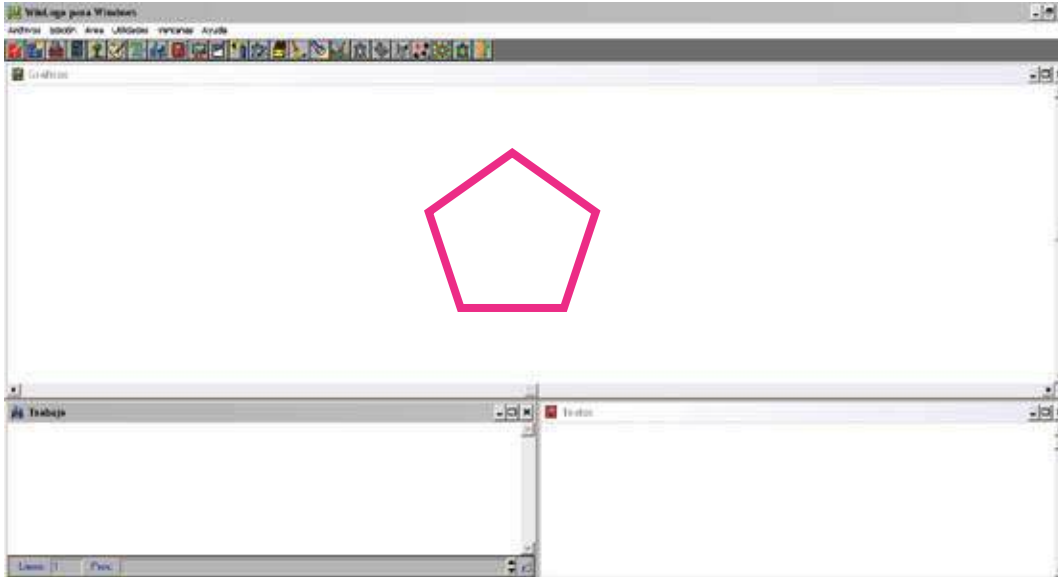


Otra actividad para desarrollar la habilidad de comunicación es que un alumno construya un cuerpo formado por varios cubos sin que su compañero lo vea y oralmente dé las instrucciones para que su pareja arme un cuerpo idéntico; después se comparan.

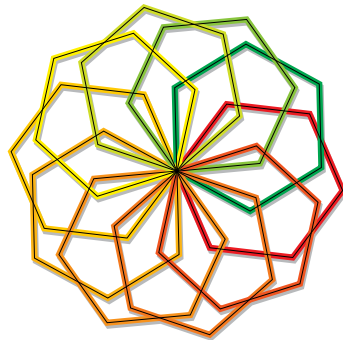


f) *Software de Geometría*. El uso de algunos paquetes de Geometría dinámica, así como el lenguaje de programación LOGO han tenido fuerte impacto en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. En caso de contar con una computadora y con estos programas se pueden trabajar algunos problemas interesantes. En LOGO, el apuntador es una tortuga que se desplaza por la pantalla dejando huella del trayecto que sigue; la tortuga entiende palabras como: avanza 100, giraderecha 60, retrocede 50,

giraizquierda 30, etcétera. Un problema podría ser: dar las indicaciones a la tortuga para que dibuje un pentágono regular:



O realizar diseños como el siguiente, en el que se trabajan diversos aspectos geométricos:

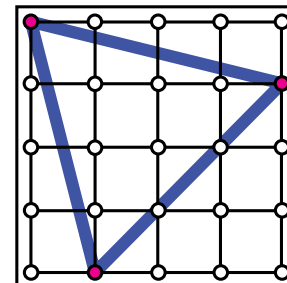




El material concreto no es la panacea para la enseñanza de las Matemáticas.

Cabe hacer algunas reflexiones sobre el uso de materiales en la enseñanza de la Geometría:

- Se debe ser muy cauteloso en el empleo de materiales concretos, las actividades que se propongan con ellos deben ser acordes con el enfoque de resolución de problemas.
- Con el uso de material concreto no se pretende, de ninguna manera, proponer una enseñanza de las Matemáticas sensual-empirista basada en la idea de que *nada hay en la mente que no haya pasado por los sentidos*. Se sabe que los sentidos engañan y que las verdades matemáticas están por encima de las demostraciones empíricas y son producto de operaciones mentales.
- Con el uso de material concreto tampoco se pretende hacer pasar a los alumnos por las conocidas etapas concreta, gráfica y simbólica que suponen que el estudiante copia pasivamente del exterior en una secuencia lineal de abstracciones sucesivas. La matemática no se aprende de esta manera, esas etapas nada tienen que ver con un aprendizaje significativo. El alumno construye conocimiento cuando interactúa de manera activa con el objeto de estudio, de ahí la importancia de que los ejercicios con el material concreto realmente promuevan la actividad mental de los estudiantes.
- El material concreto no es la panacea para la enseñanza de las Matemáticas, tiene sus bondades pero también sus limitaciones. Por ejemplo, si se desea explorar los polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, etcétera) el geoplano cuadrado resulta totalmente inadecuado, pues en él sólo se puede construir el cuadrado y no el triángulo equilátero ni ninguno de los otros polígonos regulares. Esto constituye un buen ejemplo para mostrar que los sentidos engañan; por ejemplo, algunos alumnos consideran que el siguiente triángulo es equilátero:



Sin embargo, no lo es y esto puede probarse aplicando el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de los lados, dos de los lados miden $\sqrt{17}$ y el otro, $\sqrt{18}$; nótese que la diferencia es mínima y para algunos alumnos es imperceptible a la vista.

- Existen actividades interesantes y significativas que no emplean material concreto, es decir, éste es importante pero no indispensable en la enseñanza de las Matemáticas.

2.2. Actividades para el aula-taller de Geometría

En general, si la actividad la va a realizar todo el grupo, el profesor puede dar las instrucciones de las tareas de forma oral. Se recomienda el uso de tarjetas u hojas de trabajo en las que estén escritas las consignas de las tareas a realizar, de tal manera que los alumnos tomen la tarjeta y hagan lo que se indica; las tarjetas pueden estar numeradas y los alumnos pueden llevar el control de las actividades que ya realizaron. Esta organización permite, en caso de ser necesario, que cada equipo o alumno lleve su propio ritmo al tomar la tarjeta que le corresponde trabajar, aunque no sea la misma que están viendo los demás compañeros.

Algunas tarjetas de trabajo pueden corresponder a tareas en las que se requiera utilizar algún material, que deberá estar disponible en el momento en que los alumnos lo necesiten usar; otras tarjetas podrán contener actividades en las que no se requiera material específico. Al realizar los ejercicios, el juego de Geometría debe estar presente en todo momento.

Ejemplos de tarjetas:

Toma las piezas del tangram de corazón y arma un trapecio utilizando:

- a) Una pieza
- b) Dos piezas
- c) Tres piezas
- d) Cuatro piezas

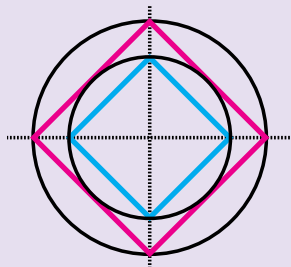
Dibuja tus trapecios armados en tu cuaderno

Tarjeta
1



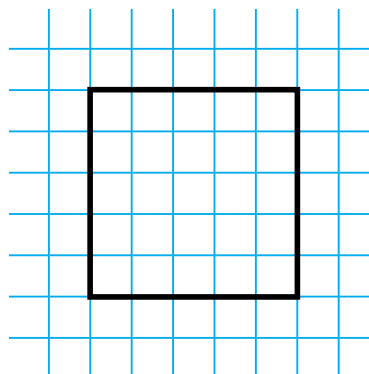


Reproduce en tu cuaderno la siguiente figura:



Es deseable que las actividades que se propongan presenten diferentes grados de dificultad de una misma tarea. Por ejemplo, la siguiente es una secuencia que aumenta cada vez en grado de dificultad; es probable que para algunos alumnos la primera tarea no sea un reto, en este caso se les pide la segunda, mientras que habrá quienes tengan que pasar por cada una de ellas para ir adquiriendo confianza y construyendo herramientas que les permitirán pasar a la siguiente.

Tarea 1. Reproduce en papel cuadriculado la figura.



Tarea 2. Termina de construir el cuadrado.



Tarea 3. En una hoja blanca construye un cuadrado que mida 3 cm de lado.

2.3. Organización del aula-taller de Geometría

En el aula-taller los alumnos pueden estar organizados en equipos, parejas, grupos o trabajar de manera individual, dependiendo de la actividad. La tarea a realizar puede ser la misma para todos los equipos y, en ese caso, se puede hacer una puesta en común en algún momento para confrontar resultados y procedimientos.

En otros casos puede ser que no todos estén trabajando en la misma actividad; por ejemplo, cuando no se cuenta con material para todo el grupo se puede organizar de tal manera que cada mesa de trabajo cuente con ciertas tarjetas y materiales y que los alumnos vayan cambiándose de mesa hasta pasar por todas. En este caso si se desea hacer una puesta en común tendría que realizarse cuando todos los equipos hayan trabajado en todas las mesas.

3. En conclusión...

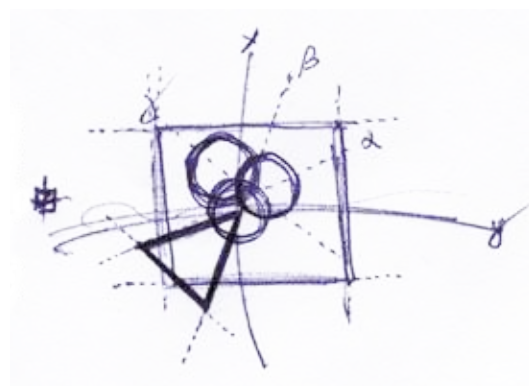
Se trata de que la enseñanza de la Geometría...

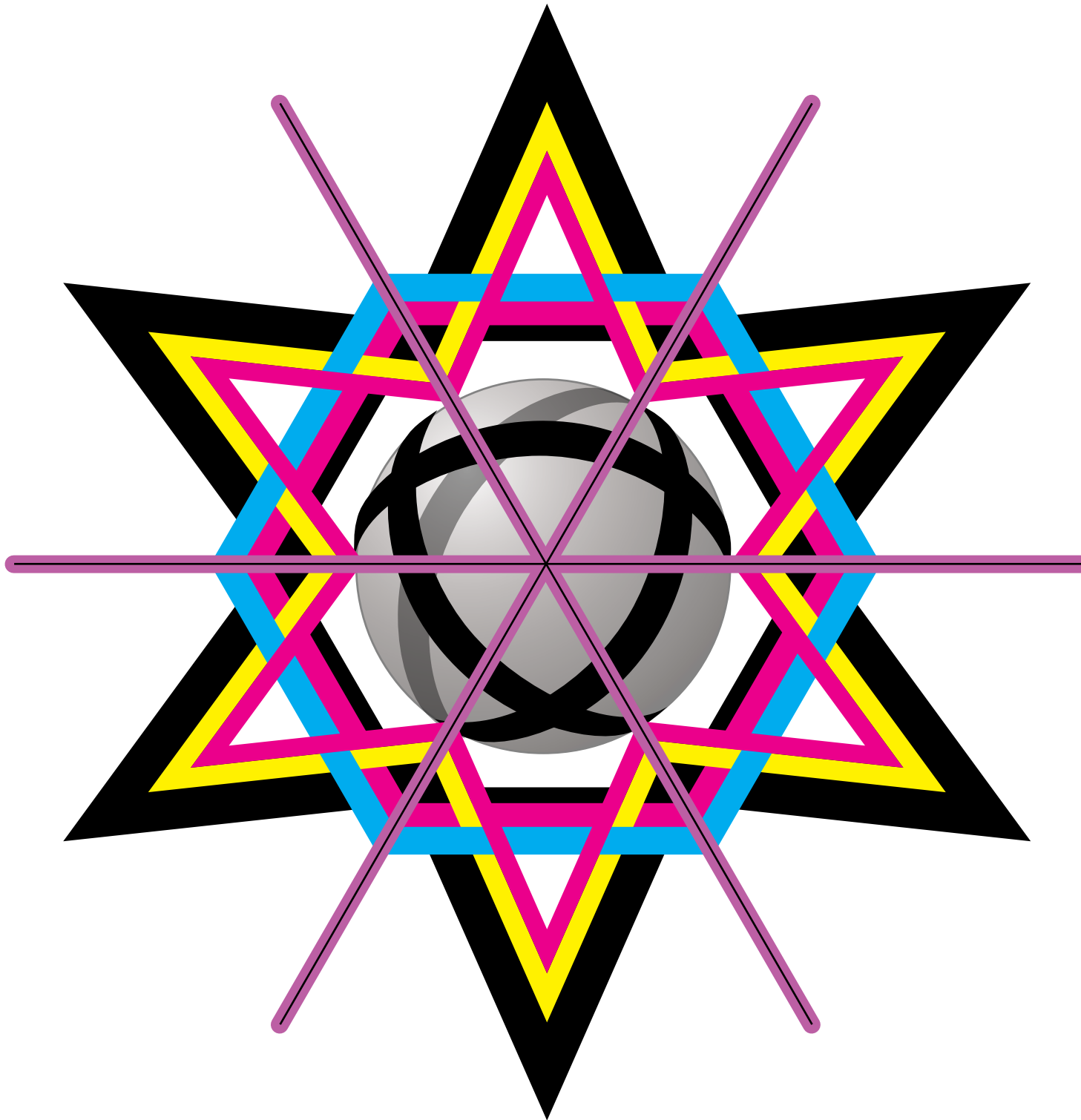
- Esté basada en la resolución de problemas.
- Sea dinámica más que estática, propiciando que las actividades tiendan a enriquecer los conceptos y las imágenes conceptuales de los objetos geométricos que estudian.
- No se limite al modelo de enseñanza en el que el maestro explica y los



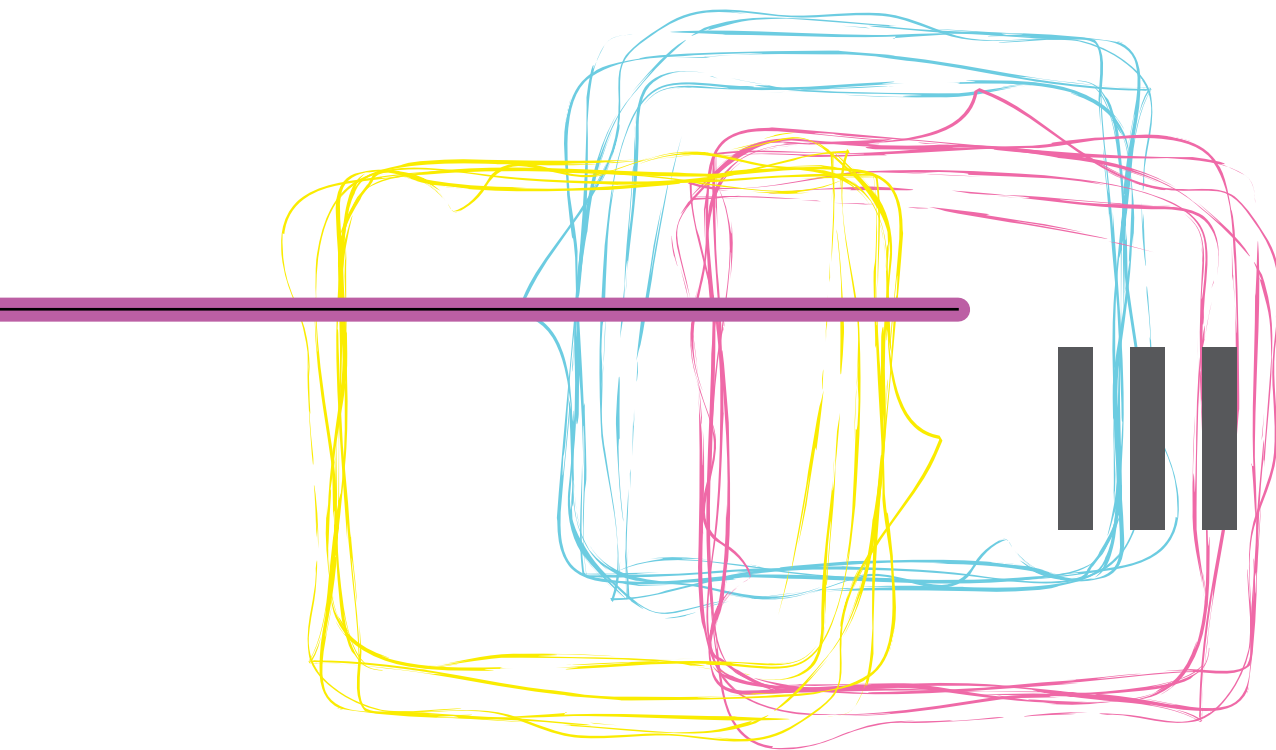
alumnos atienden a las explicaciones; se trata de que continuamente se enfrente a los alumnos a tareas que les brinden la oportunidad de construir conceptos, investigar relaciones y explicarlas, probarlas y, de ser posible, demostrarlas.

- Considere los diferentes tipos de tareas que pueden trabajarse con los alumnos: de conceptualización, investigación y demostración.
- Tienda a desarrollar en los alumnos diferentes habilidades: visualización, de dibujo, de comunicación, de razonamiento y de aplicación.
- Atienda a los niveles de razonamiento geométrico en los que se encuentran los alumnos y tenga como propósito hacerlos avanzar por estos niveles.
- Tenga presente que lo más importante son los alumnos y fomentar en ellos una actitud positiva hacia la Geometría en particular y hacia el conocimiento en general.





La Geometría y sus resultados en los Excale



Nunca deberíamos pensar en las Matemáticas que puede aprender un niño, sino en aquéllas con cuyo aprendizaje se contribuya al desarrollo de su dignidad humana: en educación lo importante no son las asignaturas –en nuestro caso, las Matemáticas– sino los alumnos y las alumnas, y el sistema escolar debe procurar que crezcan ganando día a día en autoconfianza y autoestima.

Freudenthal

1. El aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Básica en Excale 2005

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) tiene como misión evaluar de forma válida y confiable el logro escolar de los estudiantes mexicanos, a fin de retroalimentar al Sistema Educativo Nacional y a las políticas que lo sustentan, así como informar a la ciudadanía sobre la calidad educativa del país.

Una forma que el INEE utiliza para evaluar al Sistema Educativo Mexicano es a través de los aprendizajes que logran los estudiantes en determinadas asignaturas y grados escolares. Dentro del Plan General de Evaluación del Aprendizaje (PGEA), y como parte del mismo, se ha desarrollado y aplicado una nueva generación de pruebas nacionales con las cuales se evalúan las habilidades y los conocimientos de los estudiantes de Educación Básica y que se conocen con el nombre de Exámenes para la Calidad y el Logro Educativos (Excale).

Para el desarrollo de esta propuesta se tomaron como referentes los resultados de los exámenes diseñados por el INEE con el propósito de conocer los aprendizajes que alcanzan los alumnos en la asignatura de Matemáticas. Estas pruebas fueron aplicadas en mayo y junio de 2005 y los resultados se publicaron en el documento *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria*.

Según se señala en el documento, el objetivo de los Excale de Matemáticas de sexto de primaria y tercero de secundaria es evaluar los conocimientos y las habilidades que los alumnos adquieren de los planes y programas de estudio



de 1993 para ambos grados y de acuerdo con cada nivel educativo. En estas pruebas se utiliza el currículo como el principal documento organizador de los contenidos que un alumno debe aprender, y además considera el conjunto de oportunidades de aprendizaje ofrecido a los alumnos a través de los materiales curriculares y las prácticas pedagógicas del aula.

Además, el INEE (como otras instancias evaluadoras) consideró deseable introducir en la interpretación de los resultados de los Excale el uso de niveles de logro (o estándares de ejecución). Señala que la determinación de éstos se ha convertido en una práctica común cuando se reportan los resultados de las evaluaciones educativas, cuyo propósito es rendir cuentas a la sociedad. De este modo se reporta la proporción de estudiantes que se ubican en distintas categorías de desempeño, especialmente en aquellas que se consideran aceptables, remarcando el porcentaje de los que no llegan a esos niveles, con lo cual se pretende ofrecer resultados más significativos y creíbles para administradores, docentes y padres de familia.

De manera general, todos los Excale tienen cuatro niveles de logro, que se presentan a continuación:

Para cada prueba se definieron niveles de logro educativo en términos de las habilidades y los conocimientos que debe poseer un alumno en la asignatura respectiva según el currículo. Dichos niveles fueron establecidos por dos grupos de especialistas; por ejemplo, en el caso de la prueba de Matemáticas, el primero se conformó por expertos en el currículo (de acuerdo con el grado y nivel educativos) que determinó las categorías en que se clasificarían los conocimientos y las habilidades de los estudiantes. El segundo, formado por docentes de los distintos estados y modalidades educativas, determinó la puntuación que separa a un nivel de otro.

A manera de ejemplo, se presentan los niveles de logro y los puntos de corte que corresponden a la prueba de sexto grado de primaria.

DESCRIPCIÓN GENÉRICA DE LAS COMPETENCIAS ACADÉMICAS QUE LOGRAN LOS ESTUDIANTES EN CADA NIVEL DE LOGRO EDUCATIVO (ESPAÑOL Y MATEMÁTICAS)

Niveles de logro y puntos de corte	Competencias académicas
Por debajo del básico (hasta 466.59)	Los alumnos de este nivel resuelven problemas con una operación que implique sumas o restas con números de hasta cuatro cifras; además comparan decimales con el mismo número de cifras. Asimismo, calculan el promedio de números naturales en contextos conocidos.
Básico (466.6 - 568.84)	Los alumnos de este nivel leen, ordenan y comparan números naturales; además resuelven problemas sencillos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen una operación en contextos conocidos. Adicionalmente, calculan perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros dentro de una retícula. Asimismo, interpretan información contenida en gráficas y tablas sencillas.
Medio (568.85 - 663.63)	Los alumnos de este nivel leen, comparan y ordenan números decimales y fraccionarios, y resuelven con ellos problemas sencillos de suma y resta; además resuelven problemas con números naturales que impliquen dos o tres operaciones. Igualmente, clasifican figuras con base en sus propiedades geométricas; también calculan áreas mediante el uso de fórmulas y calculan volúmenes de figuras mediante el conteo de unidades cúbicas; identifican puntos en croquis, planos y mapas, así como puntos en el primer cuadrante de un plano cartesiano. Asimismo, interpretan información contenida en gráficas y tablas que contienen datos; resuelven problemas sencillos de probabilidad que no impliquen realizar un análisis combinatorio, y resuelven problemas de proporcionalidad.
Avanzado (663.64 o más)	Los alumnos de este nivel resuelven problemas que impliquen varias operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales. También tienen nociones depuradas de conceptos tales como perímetro, área y volumen; además, interpretan la representación plana de un cuerpo geométrico y el desarrollo plano de una figura. Asimismo, describen trayectos en planos y mapas; pueden además realizar conversiones de unidades de medida. También interpretan información contenida en gráficas y tablas y resuelven problemas de probabilidad que impliquen un análisis combinatorio; aplican las propiedades de la proporcionalidad.

La validez de los Excale se debe centrar especialmente en la premisa de que las puntuaciones de la prueba muestran qué tanto los estudiantes saben y pueden hacer respecto al currículuo nacional.

Particularmente, en este apartado se utilizan los resultados que presenta el documento del INEE relacionados con el estudio y aprendizaje de la Geometría, debido a que su importancia radica no sólo en que los contenidos geométricos



ocupan un lugar en los programas de Educación Primaria y secundaria sino porque, a través de su estudio, los alumnos están en contacto con procesos que desarrollan su razonamiento matemático y su habilidad para resolver problemas.

No obstante su importancia, algunas investigaciones realizadas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría han detectado ciertas características en las clases de Geometría que analizaron;¹⁸ entre ellas:

- Predominio de una Geometría intrafigural (relaciones al interior de una figura) olvidando la Geometría interfigural (relaciones entre diversas figuras).
- Predominio de la enseñanza de la Geometría métrica (cálculo de perímetros, áreas y volúmenes) formando en los alumnos una falsa concepción de lo que es la Geometría.
- Limitaciones en cuanto al uso del vocabulario geométrico lo que provoca un mal uso de las palabras o expresiones para describir, designar y simbolizar formas o relaciones geométricas.
- No trabajar con los alumnos algunos procesos y formas de razonamiento propios de la Geometría, por ejemplo, el método deductivo o el inductivo.

En los siguientes dos apartados se presentan algunos ejemplos de resultados y reactivos¹⁹ que corresponden a Geometría en las pruebas Excale de sexto grado de primaria y tercer grado de secundaria, respectivamente, con la finalidad de conocer y analizar cómo fueron evaluados y cuál fue el desempeño de los alumnos en los temas de Geometría.

1.1. El aprendizaje de la Geometría en la Educación Primaria. Resultados Excale 2005

De acuerdo con el plan y los programas de estudio de Educación Primaria de 1993, los contenidos del eje temático de Geometría favorecen el desarrollo de la ubicación espacial del alumno en relación con su entorno, la formalización de las relaciones que se establecen en el plano, así como el manejo y la interpre-

¹⁸ Vecino, F. (2003), *Didáctica de la Geometría en la Escuela Primaria*.

¹⁹ Obtenidos en la página de internet del INEE:
<http://www.inee.edu.mx/explorador/muestraEspecificacion.php>

tación de las propiedades y las relaciones de las formas geométricas. Se pretende que los alumnos, al concluir la Educación Primaria, puedan ubicar seres y objetos en representaciones planas (planos, croquis, mapas); leer y describir trayectos en planos y mapas; clasificar figuras planas a partir de distintos criterios, así como reconocer semejanzas y diferencias entre ellas; identificar los elementos, desarrollos y representaciones de cuerpos geométricos como el cubo y el prisma y utilizar instrumentos como la escuadra, la regla, el transportador y el compás.²⁰

La prueba de sexto grado, Excale 06 de Matemáticas, evaluó los tres aspectos que conforman el eje de Geometría: ubicación espacial, cuerpos geométricos y figuras geométricas, en 12 de un total de 130 reactivos que conformaron la prueba, lo que corresponde a 9.2% del total.

En la siguiente tabla se muestra el número de reactivos y los contenidos específicos que se evaluaron en cada uno de los temas del eje de Geometría.

Eje	Tema	Ítems	Contenidos específicos
Geometría	Ubicación espacial	4	Ubicar puntos en un mapa.
			Ubicar puntos en un croquis.
			Identificar trayectos en un mapa.
			Ubicar puntos en un plano cartesiano sin la nomenclatura convencional.
	Cuerpos geométricos	4	Identificar posibles desarrollos de un cubo.
			Identificar, imaginar y contar aristas en cuerpos geométricos.
			Identificar e imaginar caras laterales de figuras no convencionales.
			Identificar un cuerpo geométrico a partir del número de caras, vértices y aristas.
	Figuras geométricas	4	Clasificar figuras a partir de sus ejes de simetría.
			Clasificar polígonos a partir del paralelismo de sus lados.
			Reconocer semejanzas de figuras a escala.
			Identificar lados paralelos en polígonos.

²⁰ Educación Básica. Primaria. *Plan y programas de estudio 1993*.



La siguiente tabla muestra la proporción de aciertos en los reactivos que corresponden a Geometría en la prueba de sexto grado de primaria, Excale 06.²¹

PROPORCIÓN DE ACIERTOS EN GEOMETRÍA DE LA PRUEBA EXCALE SEXTO DE PRIMARIA

Reac- tivo	Competencias curriculares de Matemáticas	Nacional		Urbanas Públicas		Rurales Públicas		Educación Indígena		Cursos Comunita- rios		Escuelas Privadas	
		P	E.E.	P	E.E.	P	E.E.	P	E.E.	P	E.E.	P	E.E.
Geometría													
99	Ubicar puntos en un croquis	0.64	(0.01)	0.66	(0.01)	0.60	(0.02)	0.46	(0.03)	0.50	(0.06)	0.75	(0.02)
100	Ubicar puntos en un mapa	0.55	(0.01)	0.58	(0.01)	0.45	(0.02)	0.31	(0.02)	0.47	(0.05)	0.74	(0.02)
101	Clasificar Figuras a partir de sus ejes de simetría	0.54	(0.01)	0.57	(0.01)	0.48	(0.02)	0.36	(0.02)	0.42	(0.05)	0.61	(0.02)
102	Reconocer semejanzas de Figuras a escala	0.54	(0.01)	0.54	(0.01)	0.51	(0.02)	0.41	(0.03)	0.44	(0.06)	0.70	(0.02)
103	Ubicar puntos en un plano cartesiano sin nomenclatura conven- cional	0.48	(0.01)	0.50	(0.01)	0.41	(0.02)	0.33	(0.02)	0.31	(0.05)	0.70	(0.02)
104	Identificar posibles desarrollos de un cubo	0.40	(0.01)	0.43	(0.01)	0.34	(0.02)	0.25	(0.02)	0.19	(0.04)	0.48	(0.02)
105	Identificar un cuerpo geométrico a partir del número de caras, vértices y aristas	0.36	(0.01)	0.37	(0.01)	0.34	(0.02)	0.26	(0.02)	0.24	(0.05)	0.46	(0.02)
106	Identificar trayectos en un mapa	0.33	(0.01)	0.34	(0.01)	0.29	(0.02)	0.22	(0.02)	0.25	(0.05)	0.42	(0.02)
107	Identificar lados paralelos en polígonos	0.32	(0.01)	0.31	(0.01)	0.29	(0.02)	0.26	(0.02)	0.27	(0.04)	0.49	(0.02)
108	Clasificar polígonos a partir del paralelismo de sus lados	0.26	(0.01)	0.26	(0.01)	0.21	(0.01)	0.22	(0.02)	0.29	(0.04)	0.38	(0.02)
109	Identificar e imaginar caras laterales de Figuras no convenciona- les	0.21	(0.01)	0.23	(0.01)	0.16	(0.01)	0.11	(0.02)	0.11	(0.03)	0.32	(0.02)
110	Identificar, imaginar y contar aristas en cuerpos geométricos	0.14	(0.01)	0.14	(0.01)	0.14	(0.01)	0.09	(0.01)	0.09	(0.02)	0.18	(0.01)

P = Proporción de acierto EE = Error Estándar

De manera general, al comparar los resultados que se muestran en la tabla anterior con los de toda la prueba, se encontró lo siguiente:

- La mayor proporción de aciertos en los reactivos de Geometría es 0.64 (contra 0.83, que fue la mayor proporción de aciertos de un reactivo en la prueba y que corresponde al eje *Los números, sus relaciones y sus operaciones*).
- Los dos reactivos con menor proporción de aciertos en la prueba corresponden al tema de cuerpos geométricos.

²¹ Estos datos se obtuvieron del anexo F del documento *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria*.

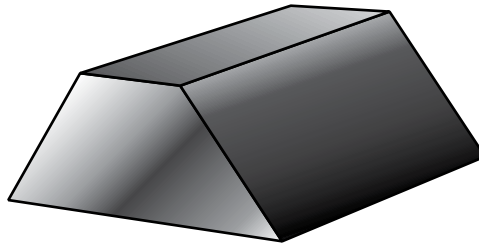
- Dos de los reactivos más difíciles se refieren a la relación de paralelismo entre los lados de las figuras, caso interesante si se considera que es a partir de tercer grado de Educación Primaria cuando se inicia el estudio de las rectas paralelas.

A continuación se presenta un conjunto de reactivos que se aplicaron en la prueba y que corresponden a Geometría, con el propósito de tener una idea de cómo fueron evaluados los alumnos, desde el punto de vista de las tareas y las habilidades que están implicadas en los reactivos y que se requieren trabajar y desarrollar en el salón de clase de acuerdo con el marco teórico que se presentó en la primera parte.

Al siguiente reactivo sólo 14% de los alumnos contestó correctamente, siendo el reactivo que presentó mayor dificultad.

¿Cuántos vértices tiene?

- A) 8 vértices
- B) 7 vértices
- C) 9 vértices
- D) 12 vértices



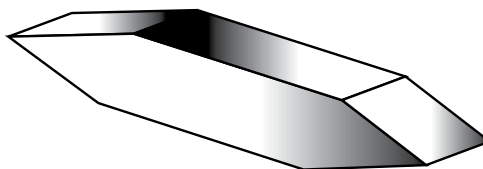
Algunas de las dificultades que pudieron haber tenido los alumnos al contestar el reactivo fueron: no identificar los vértices del cuerpo geométrico, es probable que algunos alumnos hayan confundido vértices con aristas; no considerar los vértices que no son visibles en la representación plana del prisma presentado, tal es el caso de los alumnos que seleccionaron la opción B (obsérvese que son 7 los vértices visibles y 9 las aristas visibles). Para contestar correctamente este reactivo es importante trabajar las habilidades de visualización y de comunicación por medio de actividades de conceptualización y de investigación, por ejemplo, proponer ejercicios en los que los estudiantes identifiquen, desarrollen y construyan la representación plana de este y otros cuerpos; así como actividades en las que caractericen e identifiquen un cuerpo a partir de alguna de sus propiedades o elementos, siendo necesario que



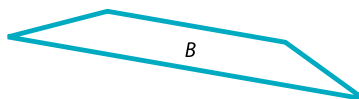
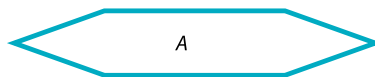
utilicen un vocabulario preciso para poder indicar aquella propiedad o elemento a la que se quiere hacer referencia.

El siguiente reactivo, que también corresponde al tema de cuerpos geométricos, fue respondido correctamente por 21% de los alumnos.

Observa el siguiente cuerpo geométrico



¿Cuál es la base con la cual se puede hacer este cuerpo?

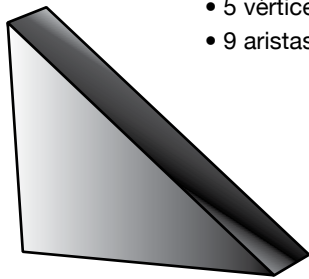


En este reactivo se requiere que los alumnos pongan en juego su habilidad de visualización para imaginar la forma de la cara que sirve de base al cuerpo geométrico y su habilidad de dibujo. Para desarrollarlas se requiere plantear actividades en las que se trabajen diferentes vistas de un cuerpo y en las que se identifiquen y construyan desarrollos planos de cuerpos.

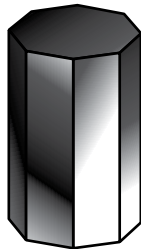
Otro de los reactivos que evaluó el tema de cuerpos geométricos es el siguiente:

Observa los siguientes cuerpos. ¿Cuál de ellos tiene las siguientes características?

- 5 caras
- 5 vértices
- 9 aristas



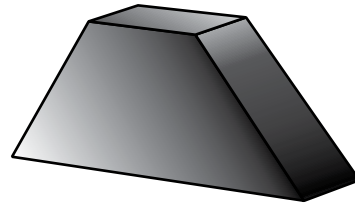
A



B



C



D

Treinta y seis por ciento de los alumnos lo contestó correctamente. Nuevamente, la habilidad de visualización se pone en juego en este reactivo. Incluso, se podría convertir en una tarea de investigación en la que se realice un trabajo de exploración y análisis de los cuerpos.



Actividad 1

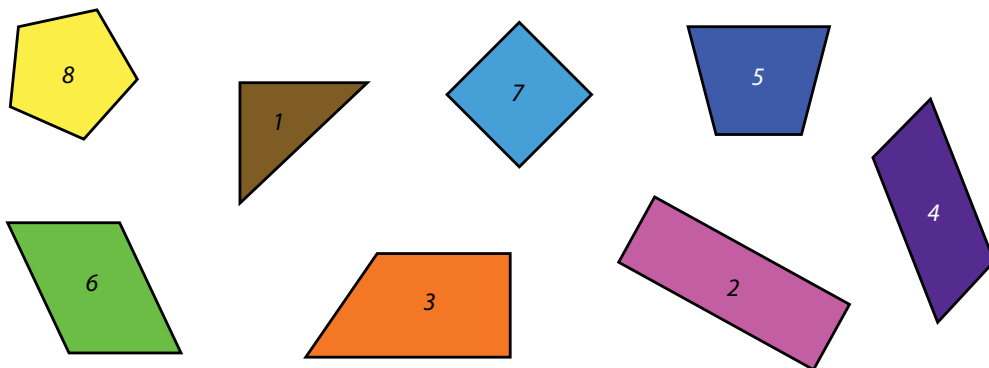
- Conteste los reactivos.
- ¿Por qué cree que para los alumnos fue más difícil resolver el primer reactivo que el último?
- Investigue en los libros de texto de quinto y sexto grados la manera en que se propone el estudio de los cuerpos geométricos, ¿considera que los conocimientos que adquieren los alumnos al resolver las lecciones son suficientes para contestar correctamente estos reactivos? Justifique su respuesta.



El siguiente par de reactivos que se presenta corresponde al tema de figuras geométricas; en ambos el porcentaje de respuesta correcta fue de 54%, siendo uno de los porcentajes más altos en los reactivos de Geometría. El objetivo de mostrar estos reactivos es analizar, a partir de las tareas y habilidades presentadas en el marco conceptual, qué es lo que mejor saben los alumnos de sexto grado y tomarlo como referencia para contrastar con los reactivos de mayor dificultad que se presentaron anteriormente.

En el siguiente reactivo se deben clasificar figuras a partir de sus ejes de simetría; se realizan tareas de conceptualización e investigación, ya que los alumnos deben tener el concepto de *eje de simetría* para indagar acerca del número de ejes de simetría que tienen las figuras que se les presentan.

Observa las siguientes figuras:



¿Cuáles tienen solamente un eje de simetría?

- A) 1 y 5
- B) 3 y 4
- C) 2 y 6
- D) 7 y 8

En el siguiente reactivo, la habilidad de visualización es muy importante y se relaciona con la habilidad de dibujo y las tareas de indagación y conceptualización.

La figura Z es una reproducción de la figura Y.

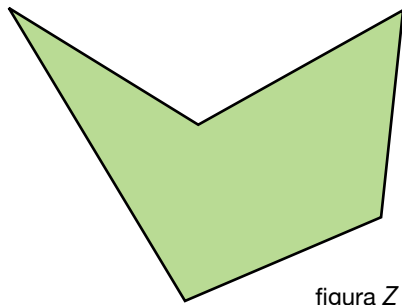


figura Z

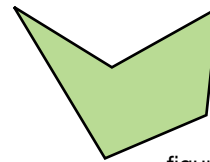


figura Y

¿En qué se parecen?

- A) En la medida de los ángulos*
- B) En la medida de sus lados
- C) En la medida de sus diagonales
- D) En la medida de su área

* Respuesta correcta



Actividad 2

- Analice el segundo reactivo, ¿qué conocimientos o razonamientos incorrectos pudieron tener los alumnos para elegir una opción de respuesta incorrecta?
- Compare ambos reactivos, ¿cuál tiene mayor grado de dificultad?, ¿por qué?
- ¿En qué grado(s) se inicia el estudio de esos conocimientos? Consulte el plan y programas de estudio.
- Anote un ejemplo del tipo de problemas o situaciones que pudiera trabajarse en clase que desarrolle las habilidades que se ponen en juego en alguno de los reactivos anteriores.



1.2. El aprendizaje de la Geometría en la Educación Secundaria. Resultados Excale 2005

La enseñanza de la Geometría en la escuela secundaria tiene como propósitos principales:

- Proporcionar a los alumnos una experiencia geométrica que les ayude a comprender, describir y representar el entorno y el mundo donde viven.
- Proporcionarles, también, una serie de conocimientos que les serán útiles para resolver problemas de la vida cotidiana y acceder al estudio de otras materias y disciplinas.
- Iniciarlos gradualmente en el razonamiento deductivo.²²

Los programas de estudio de secundaria de 1993 están organizados en Aritmética, Álgebra, Geometría, Presentación y Tratamiento de la información y Probabilidad.

Los programas de estudio de secundaria de 1993 (con base en los cuales se diseñó la prueba Excale) están organizados en cinco áreas de estudio: Aritmética, Álgebra, Geometría, Presentación y Tratamiento de la información y Probabilidad. En el área de Geometría se incluyen también los contenidos de Medición. Algunos aspectos en la enseñanza de la Geometría que se señalan en los materiales oficiales²³ son:

- Los trazos y las construcciones geométricos como una forma de explorar y conocer las propiedades y características de las figuras geométricas.
- El conocimiento y uso efectivo de los diferentes instrumentos de medida, así como el diseño de situaciones y problemas que favorezcan la estimación de magnitudes físicas y geométricas, como actividades que deberán acompañar el uso de fórmulas para calcular perímetros, áreas, volúmenes y capacidades.
- La exploración de las simetrías de las figuras mediante actividades y problemas que favorezcan las manipulaciones, el dibujo y la medida.
- El conocimiento, la manipulación y la representación plana de sólidos comunes, con el objeto de que los alumnos desarrollen su imaginación espacial y se acostumbren al lenguaje utilizado para describirlos.

²² SEP (1993), *Planes y programas de estudio de Matemáticas. Educación Secundaria*.

²³ SEP (2000), *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*.

- La aplicación de las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, así como de los teoremas de Pitágoras y de semejanza en la solución de numerosos ejercicios y problemas de cálculo geométrico.
- La iniciación gradual al razonamiento deductivo, en situaciones escogidas por el profesor y teniendo en cuenta que el acceso a la demostración en Matemáticas es un objetivo que requiere tiempo y una preparación cuidadosa.

La prueba Excale 09 de Matemáticas para tercero de secundaria se conformó de 128 reactivos, de los cuales 42 evaluaron los conocimientos y las habilidades del área de Geometría, organizados en tres temas: estudio de la forma, sólidos y medición y cálculo geométrico. La siguiente tabla muestra el número de reactivos y contenidos específicos para cada tema evaluado en el examen.

Eje	Tema	Ítems	Contenidos específicos
Geometría	Estudio de la forma	19	Identificar instrucciones para trazar paralelas, perpendiculares, figuras básicas (triángulo, cuadrado y polígonos regulares) y tangentes a un círculo. Reconocer las condiciones para mantener la invarianza del área de triángulos y rectángulos. Identificar escalas entre figuras o las medidas de una figura que fue sujeta a una escala y reconoce el efecto de una ampliación a escala sobre el área total y el volumen de un sólido. Usar los principios y las propiedades de simetría axial y central.
	Sólidos	12	Imaginar resultados de giros de sólidos e identificar las vistas laterales y frontales de sólidos. Identificar la pirámide o el poliedro que corresponde con un desarrollo plano. Determinar las secciones planas que se forman al cortar un cubo, una pirámide, un cono o un poliedro.
	Medición y cálculo geométrico	11	Modificar las alturas de sólidos distintos para que tengan la misma área total. Calcular razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Aplicar el teorema de Pitágoras.



Si se excluyen los reactivos que corresponden a medición, nos quedan 31, que equivalen a 24.2% de la prueba.

Del mismo modo que en el caso de primaria, en secundaria se consideró la proporción de aciertos de los alumnos que corresponden a contenidos de Geometría en la prueba Excale-09, 2005.²⁴

**PROPORCIÓN DE ACIERTOS EN GEOMETRÍA DE LA PRUEBA
EXCALE 2005 DE TERCERO DE SECUNDARIA**

Reac- tivo	Contenidos curriculares de Matemáticas	Nacional		Secunda- rias Generales		Secunda- rias Técnicas		Telesecun- darias		Secun- darias Privadas	
		P	E.E.	P	E.E.	P	E.E.	P	E.E.	P	E.E.
Geometría											
78	Imaginar el resultado de girar sólidos formados por conos y cilindros	0.85	(0.01)	0.85	(0.01)	0.86	(0.01)	0.84	(0.01)	0.91	(0.01)
79	Identificar semejanzas entre sólidos	0.78	(0.01)	0.80	(0.01)	0.78	(0.01)	0.72	(0.02)	0.85	(0.01)
80	Imaginar giros de sólidos	0.65	(0.01)	0.66	(0.01)	0.65	(0.01)	0.63	(0.02)	0.69	(0.02)
81	Identificar Figuras simétricas respecto a una recta	0.61	(0.01)	0.60	(0.01)	0.59	(0.01)	0.66	(0.02)	0.67	(0.02)
82	Imaginar e identificar las caras de un sólido formado por otros sólidos	0.61	(0.01)	0.62	(0.02)	0.62	(0.01)	0.49	(0.02)	0.76	(0.01)
83	Identificar las vistas laterales y frontales de sólidos	0.58	(0.01)	0.59	(0.01)	0.59	(0.01)	0.49	(0.02)	0.73	(0.02)
84	Identificar la pirámide que corresponde con un desarrollo plano	0.55	(0.01)	0.53	(0.02)	0.55	(0.01)	0.56	(0.02)	0.62	(0.02)
85	Determinar las secciones planas que se forman al cortar un cono	0.54	(0.01)	0.55	(0.02)	0.56	(0.01)	0.50	(0.02)	0.61	(0.02)
87	Reconocer que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°	0.54	(0.01)	0.54	(0.01)	0.51	(0.01)	0.55	(0.02)	0.64	(0.02)
88	Identificar las instrucciones para la construcción de polígonos regulares	0.44	(0.01)	0.41	(0.01)	0.42	(0.01)	0.46	(0.02)	0.63	(0.02)
90	Identificar las instrucciones para la construcción de un cuadrilátero	0.42	(0.01)	0.39	(0.01)	0.43	(0.01)	0.42	(0.02)	0.51	(0.02)
91	Identifica características de poliedros después de realizar un corte con un plano	0.41	(0.01)	0.39	(0.01)	0.43	(0.01)	0.39	(0.02)	0.53	(0.02)
92	Aplicar propiedades de los ángulos inscritos en una semi-circunferencia	0.40	(0.01)	0.40	(0.01)	0.37	(0.01)	0.43	(0.02)	0.41	(0.02)

²⁴ Estos datos se obtuvieron del anexo J del documento: *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria.*

III. La Geometría y sus resultados en los Excale

94	Identificar las características simétricas de Figuras	0.37 (0.01)	0.37 (0.01)	0.37 (0.01)	0.33 (0.02)	0.44 (0.02)
95	Reconocer instrucciones para la construcción de un círculo	0.37 (0.01)	0.32 (0.01)	0.34 (0.01)	0.47 (0.02)	0.47 (0.02)
97	Determinar las secciones planas que se forman al cortar un cubo	0.37 (0.01)	0.39 (0.01)	0.35 (0.01)	0.34 (0.02)	0.42 (0.02)
99	Identificar las instrucciones para trazar una perpendicular a un segmento por uno de sus extremos	0.34 (0.01)	0.34 (0.01)	0.35 (0.01)	0.35 (0.02)	0.34 (0.02)
100	Identificar diferencias entre sólidos	0.34 (0.01)	0.33 (0.01)	0.34 (0.01)	0.30 (0.02)	0.47 (0.02)
102	Aplicar el teorema de Tales	0.32 (0.01)	0.32 (0.01)	0.31 (0.01)	0.29 (0.02)	0.44 (0.02)
103	Aplicar propiedades de ángulo central e inscrito en una circunferencia	0.33 (0.01)	0.35 (0.01)	0.30 (0.01)	0.29 (0.01)	0.38 (0.02)
104	Identificar las instrucciones para la construcción de la tangente a una circunferencia por un punto exterior a ella	0.32 (0.01)	0.32 (0.01)	0.33 (0.01)	0.30 (0.02)	0.33 (0.02)
105	Identificar las instrucciones para la construcción de triángulos equiláteros	0.33 (0.01)	0.34 (0.01)	0.32 (0.01)	0.28 (0.01)	0.42 (0.02)
108	Identificar las instrucciones para la construcción de la tangente a una circunferencia por un punto sobre ella	0.27 (0.01)	0.28 (0.01)	0.26 (0.01)	0.27 (0.01)	0.27 (0.02)
110	Reconocer los resultados de realizar dos reflexiones consecutivas respecto a dos rectas	0.27 (0.01)	0.26 (0.01)	0.24 (0.01)	0.35 (0.02)	0.23 (0.01)
112	Determinar las secciones planas que se forman al cortar una pirámide	0.24 (0.01)	0.25 (0.01)	0.24 (0.01)	0.18 (0.01)	0.33 (0.02)
118	Identifica el poliedro que corresponde con un desarrollo plano	0.12 (0.01)	0.13 (0.01)	0.13 (0.01)	0.09 (0.01)	0.17 (0.01)
119	Identificar las instrucciones para trazar una paralela a una recta por un punto dado	0.13 (0.01)	0.13 (0.01)	0.12 (0.01)	0.12 (0.01)	0.13 (0.01)

P = Proporción de aciertos EE = Error Estándar

En el informe se señala que los alumnos tienen buen desempeño en situaciones de imaginación espacial donde realizan giros, así como en problemas de simetría; en cambio, tienen bajo desempeño en los reactivos en los que deben utilizar los conocimientos sobre las propiedades de las figuras y los sólidos.

Como una muestra de los reactivos que se aplicaron en el examen, a continuación se presentan dos en los que el porcentaje de respuesta correcta fue el mismo: 27%. De acuerdo con la organización de la prueba, ambos corresponden al tema de estudio de la forma.

En el siguiente reactivo los alumnos deben identificar la construcción de una recta tangente a una circunferencia por un punto sobre ella o exterior.

Los alumnos tienen buen desempeño en imaginación espacial, así como en problemas de simetría.



Indica qué figura se construye al seguir las instrucciones que se enlistan a continuación.

- a) Traza una circunferencia C_1 con centro en O .
 - b) Ubica el punto P exterior a C_1 .
 - c) Traza el segmento PO .
 - d) Determina el punto medio A de PO .
 - e) Traza una circunferencia C_2 con centro en A que pase por P y O .
 - f) Llamemos T y T' a los puntos donde C_2 corta a C_1 , traza la recta que pase por P y T .
-
- A) Se construye una recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto localizado sobre la circunferencia.
 - B) Se construye una bisectriz de un ángulo inscrito a la circunferencia.
 - C) Se construye una recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto exterior a la circunferencia.
 - D) Se localizan los puntos T y T' donde se intersectan dos circunferencias.

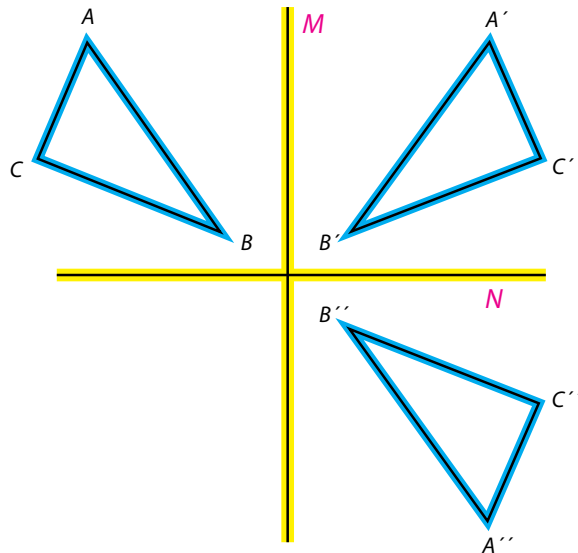
En este reactivo los alumnos ponen en juego:

- La habilidad de comunicación, ya que tienen que interpretar una serie de pasos geométricos dados por escrito y para ello tienen que saber a qué se refieren los términos como: circunferencia, centro, punto medio, etcétera.
- La habilidad de dibujo, porque podrían hacer un bosquejo de los trazos que se enuncian para saber qué es lo que se construye.
- La habilidad de visualización, al imaginar los trazos así como al hacer su bosquejo.
- Para desarrollar estas habilidades es importante trabajar con los alumnos en tareas de:
 - Conceptualización, en las que construyan los conceptos de los términos geométricos usados en la secuencia de pasos.
 - Investigación, en las que exploren y analicen las figuras y sus relaciones, así como la manera de construirlas.

Si se realizan estas actividades en clase, también se les podría pedir que argumenten por qué la secuencia de pasos es correcta. Además, cuando se realicen trazos geométricos con los alumnos será importante analizar qué es lo que garantiza que el trazo sea realmente lo que se pide; los alumnos podrán dar argumentos y con ello también se están trabajando tareas de demostración.

En este otro reactivo los estudiantes tienen que reconocer los resultados de efectuar dos reflexiones consecutivas respecto a dos rectas.

El triángulo $A''B''C''$ se obtuvo al hacer dos reflexiones del triángulo ABC respecto a las rectas perpendiculares M y N respectivamente, como se muestra a continuación.



¿Qué transformación tuvo el triángulo ABC al hacer estas dos reflexiones?

- A) Se obtuvo una traslación del triángulo.
- B) Se obtuvo una rotación de 180° del triángulo.
- C) Se obtuvo un triángulo $A''B''C''$ simétrico con respecto a la recta M .
- D) Se obtuvo una rotación del triángulo menor de 180° .



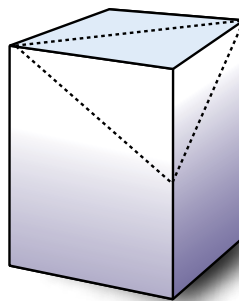
Actividad 3

- ¿Qué habilidades (visuales, de comunicación, de dibujo, de razonamiento o de aplicación) se requieren para contestar correctamente este reactivo?
- ¿Qué tareas (de conceptualización, investigación o demostración) están involucradas aquí?
- Si se realiza en clase la situación que presenta este reactivo, ¿cómo trabajaría la argumentación?
- Compare sus respuestas con las habilidades y tareas señaladas para el primer ítem.
- ¿Cuál es la importancia del uso de los instrumentos geométricos en el estudio de los contenidos que se tratan en ambos ejemplos?

A continuación se presentan dos reactivos que corresponden al tema de cuerpos geométricos. Se le pide que los analice y realice la actividad que se señala.

En el primero los alumnos tienen que identificar las secciones planas que se forman al cortar un sólido, y el porcentaje de respuesta correcta fue de 37%.

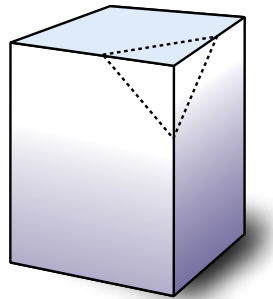
Determina a qué tipo de triángulo corresponde la forma de la sección sombreada (corte) vista de frente.



- Triángulo isósceles rectángulo.
- Triángulo equilátero
- Triángulo isósceles obtuso
- Triángulo isósceles acutángulo no equilátero

En este otro reactivo los alumnos tienen que encontrar el número de caras, aristas o vértices que resultan después del corte. El porcentaje de respuesta correcta fue de 41%.

Observa la representación del siguiente poliedro. Determina el número de vértices (V) y el número de aristas (A) que tendrá el poliedro que se obtiene al hacer un corte con un plano a través de la zona punteada.



- A) $A = 15$; $V = 11$
- B) $A = 12$; $V = 7$
- C) $A = 15$; $V = 10$
- D) $A = 12$; $V = 8$

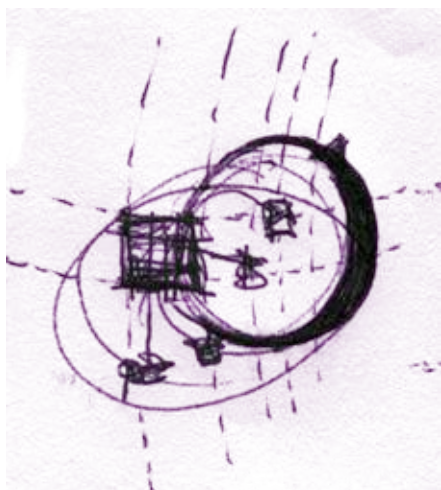


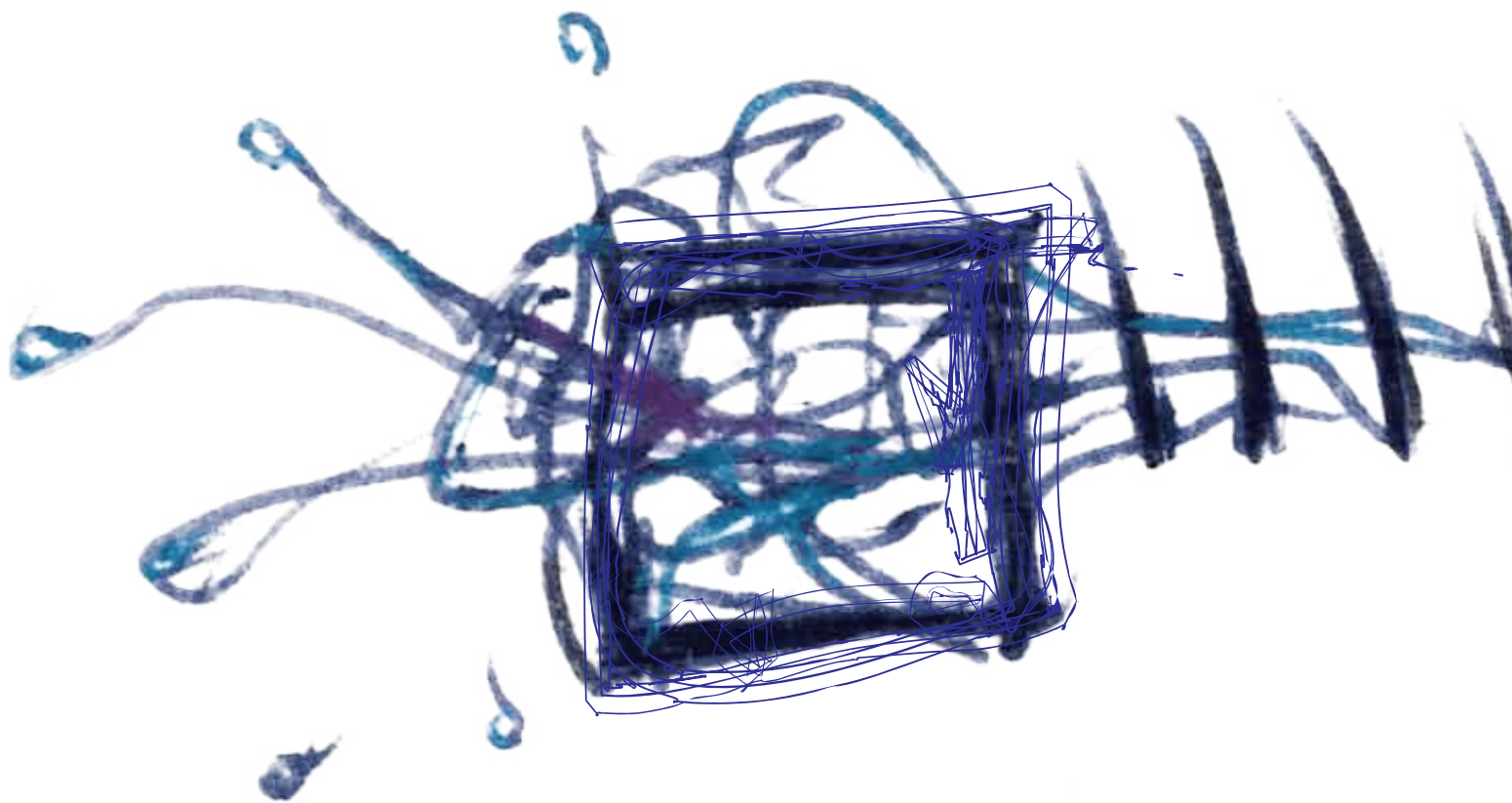
Actividad 4

- Identifique la respuesta correcta para cada reactivo.
- ¿Qué habilidades (visuales, de comunicación, de dibujo, de razonamiento o de aplicación) se ponen en juego al contestar cada uno de los reactivos?
- ¿Qué tareas (de conceptualización, investigación o demostración) están involucradas en cada uno?
- Si se intercambian las imágenes de los cuerpos entre un reactivo y otro, ¿continuarían siendo correctas las mismas respuestas? Justifique su contestación.
- Investigue en los libros de texto de secundaria la manera en que se propone el estudio de los cuerpos geométricos. Compare sus respuestas.

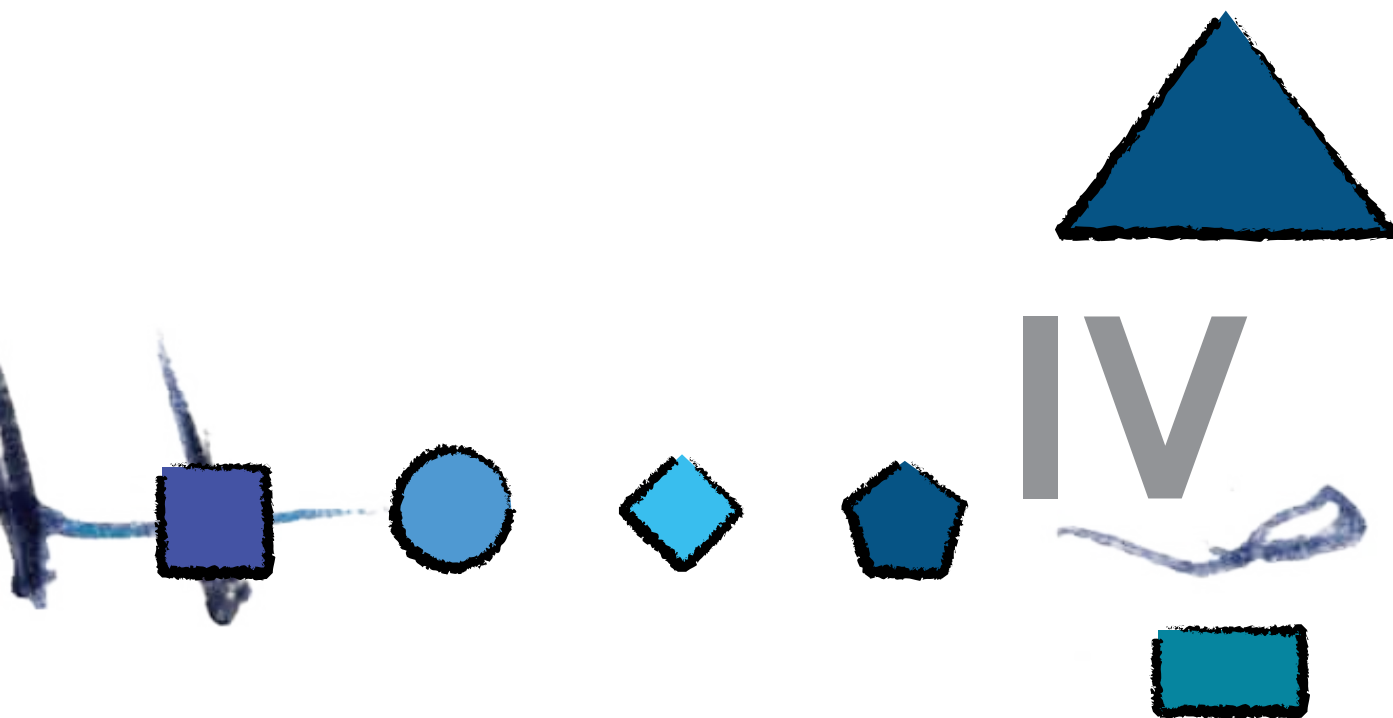


- Investigue cuáles son algunas de las recomendaciones didácticas para enseñar estos contenidos. Puede consultar en el *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*, editado por la SEP en 2000.
- Describa cómo aborda el tema de cuerpos geométricos en su clase. Mencione algunas de las actividades que plantea a sus alumnos, ¿qué tipo de tareas y habilidades se desarrollan en ellas?, ¿cómo evalúa el aprendizaje de sus alumnos?





Actividades para practicar



La enseñanza constructiva, como ya hemos señalado, no es nada fácil. Pero no hay caminos fáciles. Para disfrutar la vista desde lo alto de una montaña es preciso escalarla.
En Matemáticas no hay teleféricos. Los cables se rompen en la mente de los jóvenes.

Morris Kline

1. Acerca de las actividades

En esta última sección se presentan, a manera de ejemplo, nueve actividades y en cada una se incluye un análisis y recomendaciones didácticas. Lo interesante aquí reside en la posibilidad de *poner en práctica estas actividades* para que el docente experimente esta manera de enseñar Geometría. En la presentación de cada actividad se incluyen los siguientes apartados:



¿Qué sé de este tema?

Su propósito es que el docente tome conciencia de los conocimientos previos que posee acerca del tema que trata la actividad.

Dividido en dos partes:

Primero lo hago yo. Se recomienda que siempre que el maestro elija una actividad para trabajar con los alumnos, primero la resuelva él mismo. Esto le permite analizar los conocimientos y las habilidades que se ponen en juego, el material que se requiere, las posibles dificultades que enfrentarán los alumnos, los errores, etcétera.

Después lo pongo en práctica. Donde se invita al docente a llevar a la práctica la actividad sugerida.



Manos a la obra



Reflexión sobre la práctica

Es importante que al término de la actividad el docente reflexione acerca de ella: ¿se lograron los propósitos?, ¿fue adecuada?, ¿no fue adecuada?, ¿cómo fue mi proceder frente al grupo?, ¿cuál fue el papel de los alumnos?, ¿qué cambiaría?, ¿qué dejaría igual?, etcétera.



No está de más aclarar que este material no agota todo lo que podría analizarse de una actividad y es también necesariamente incompleto porque se aspira a que aliente al docente a reflexionar y formular nuevas preguntas, encontrar otros problemas y estimular la construcción colectiva de algunas certezas en el proceso de enseñar y aprender.

La reflexión sobre la propia práctica docente es el camino más adecuado para mejorar como maestro y aumentar las probabilidades de éxito en el aprendizaje de los alumnos.

Este material no agota todo lo que podría analizarse de una actividad.

Le sugerimos tener un cuaderno para hacer anotaciones, será su *diario del profesor*.

1.1. Rompecabezas²⁵

En esta actividad los alumnos de segundo, tercero y cuarto grados desarrollan las habilidades de visualización y comunicación al describir las piezas que forman el rompecabezas en el que tienen que analizar las características de las figuras que lo componen.



¿Qué sé de este tema?

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas.

1. *¿En alguna ocasión ha realizado actividades didácticas en las que utilice como recurso un rompecabezas? ¿Qué ventajas considera que ofrece el uso del rompecabezas en las clases de Geometría?*
2. *¿Qué tipo de rompecabezas conoce? ¿Qué habilidades se desarrollan al usar rompecabezas?*
3. *¿Ha pensado en la idea de trabajar la Geometría como un lenguaje?*

²⁵ Tomada de: C. Broitman y H. Itzcovich (2002), *El estudio de las figuras y de los cuerpos geométricos. Actividades para los primeros años de la escolaridad*.



Manos a la obra

Primero lo hago yo

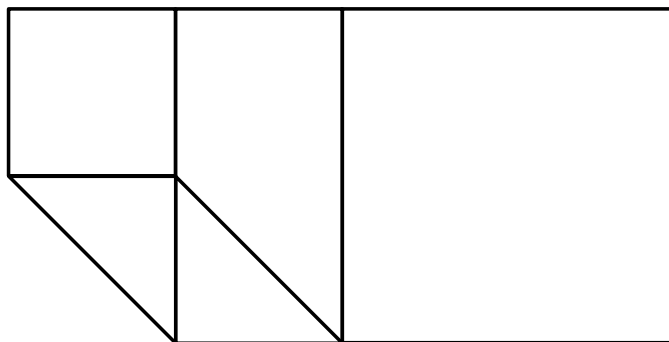
Observe el rompecabezas (véase hoja de trabajo en el anexo). Anote una descripción de las piezas que se requieren para poder formarlo. Luego, pruebe su descripción.

- ¿Cuáles son los posibles errores que pueden cometer los alumnos al describir las piezas que se requieren para formar el rompecabezas?

Después lo pongo en práctica

Organice a sus alumnos en equipos.

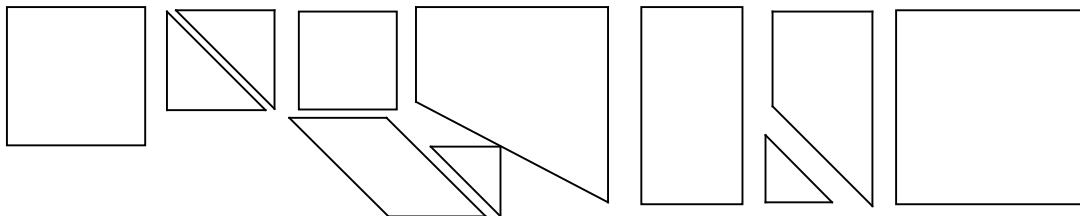
Cada equipo debe tener una copia del rompecabezas armado (véase hoja de trabajo).



Además, por cada equipo debe haber un juego de piezas sueltas recortadas encima de su escritorio (véase hoja de trabajo). Obsérvese que en este con-



junto de piezas están las que arman el rompecabezas y algunas más que no pertenecen a él.



El siguiente es un ejemplo del tipo de indicaciones que podrían darse a los alumnos:

- Van a describir en una hoja las piezas que necesitan para armar su rompecabezas. No pueden hacer dibujos.
- Cuando hayan terminado de escribir, van a enviar a mi escritorio a un secretario con esa hoja para que él tome las piezas necesarias.
- El secretario tomará las piezas y regresará al equipo.
- Gana el equipo que logra armar su rompecabezas exactamente con las mismas piezas y sin que le sobren figuras.

Cuando los equipos terminen, realice una confrontación grupal, pida a los equipos que lean sus descripciones. Se trata de que analicen las descripciones que fueron adecuadas para elegir las figuras.



Reflexión sobre la práctica

Responda en su diario del profesor:

1. ¿Qué le pareció la actividad?
2. ¿En qué grado la aplicó?
3. ¿Resultó apropiada para los alumnos?
4. ¿Qué dificultades tuvo usted para llevar a cabo la actividad?
5. ¿Qué dificultades tuvieron los alumnos?

6. ¿Cómo se sintió usted durante el desarrollo de la clase?
7. Si volviera a aplicarla, ¿qué le cambiaría a la actividad para mejorarla?, ¿qué cambiaría de su propio actuar?
8. Si la quisiera aplicar a alumnos más pequeños, ¿qué ajustes le haría?, ¿y si quisiera hacerla con alumnos mayores?

1.2. Copiando figuras²⁶

Esta actividad es una tarea de investigación en la que los alumnos de tercero y cuarto grados desarrollan las habilidades de visualización, comunicación y de dibujo al reproducir una figura.



¿Qué sé de este tema?

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿Ha trabajado alguna vez actividades de investigación con los alumnos?
¿Cuáles?
2. ¿Cuál cree que es la importancia que tienen las actividades de copia o reproducción de figuras en el estudio de la Geometría?
3. ¿Cuáles son las figuras geométricas que deben conocer y manipular los alumnos de los primeros grados de primaria? ¿Y cuáles características o relaciones de esas figuras geométricas se pueden trabajar con ellos?



Manos a la obra

Primero lo hago yo

Realice las tres actividades que se presentan en la hoja de trabajo *Copiando figuras* (véase anexo).

- ¿Qué diferencia hay entre utilizar papel liso o cuadriculado para realizar la copia de la figura?

²⁶ Adaptada de H. Ponce (2003), *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo*.

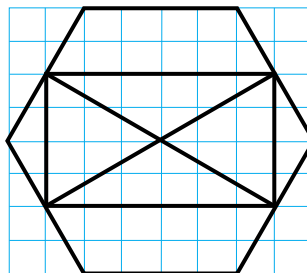


*Una vez que los alumnos
hayan terminado, realice
una confrontación grupal.*

- ¿Qué variantes hay entre las figuras que se pide copiar?
- ¿Qué posibles procedimientos podrían utilizar los alumnos? ¿Cuáles de ellos convendría destacar?
- ¿Qué sería necesario identificar como recomendaciones para copiar mejor una figura o un dibujo?

Después lo pongo en práctica

Dé a cada alumno una copia de la primera figura que aparece, en papel cuadriculado, en la actividad 1 de la hoja de trabajo (véase anexo) y una hoja de papel cuadriculado (una opción es recortar la hoja como se señala).



Pídales que de manera individual copien el dibujo en la hoja cuadriculada.

Una vez que los alumnos hayan terminado, realice una confrontación grupal; para ello seleccione algunos trabajos, por ejemplo, los que representan una dificultad generalizada o los que presentan algunos errores, así como los que han sido resueltos correctamente. La confrontación deberá girar en torno a las características que deben tomarse en cuenta para realizar correctamente la tarea y establecer ciertos acuerdos que pueden considerarse como recomendaciones para *copiar mejor*.

Ahora entregue a cada alumno la segunda figura (véase actividad 2 de la hoja de trabajo) para que la copien y recuérdelos las conclusiones o los acuerdos alcanzados anteriormente para ponerlos a prueba. Este nuevo dibujo puede implicar un mayor nivel de complejidad.

En la tercera figura la copia ya está realizada (véase actividad 3 de la hoja de trabajo); pida a los alumnos que señalen cuáles son los errores y que los corrijan. Al final realice una confrontación grupal.



Reflexión sobre la práctica

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿Qué le pareció la actividad?
2. ¿En qué grado la aplicó?
3. ¿Resultó apropiada para los alumnos?
4. ¿Cuáles fueron las recomendaciones que dieron los alumnos después de realizar la copia de la primera figura?
5. Compare los procedimientos seguidos por sus alumnos y los procedimientos que consideró en el apartado *Primero lo hago yo*, ¿qué aspectos nuevos surgieron?
6. ¿De qué manera vincularon las recomendaciones que obtuvieron los alumnos al finalizar de copiar la primera figura e iniciar la copia de la segunda y tercera figuras?
7. Si volviera a aplicarla, ¿qué le cambiaría a la actividad para mejorarla?, ¿qué cambiaría de su propio actuar?
8. Si la quisiera aplicar a alumnos de grados superiores, ¿qué ajustes le haría?

1.3. Identificando cuerpos²⁷

En esta actividad los alumnos de cuarto, quinto y sexto de primaria desarrollan las habilidades de visualización, comunicación y razonamiento al realizar las tareas de conceptualización e investigación relacionadas con cuerpos geométricos.

²⁷ Adaptada de H. Ponce (2003), *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo*.



¿Qué sé de este tema?

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿Ha trabajado alguna vez actividades de conceptualización con los alumnos? ¿Cuáles?
2. ¿Cuál cree que es la importancia que tienen las actividades de visualización y comunicación en la clasificación de cuerpos geométricos?



Manos a la obra

Primero lo hago yo

Forme un conjunto de cuerpos como el que aparece en la actividad 1 de la hoja de trabajo *Identificando cuerpos* (véase anexo); puede utilizar objetos como envases, cajas de cartón y otros. Si se pretende realizar una clasificación de los cuerpos que juntaron (y que aparecen en la actividad 1): ¿qué tipo de clasificaciones podrían ser?, ¿qué relaciones se espera que los alumnos encuentren para poderlos clasificar?

Después lo pongo en práctica

Organice a los alumnos en equipos de cuatro o cinco integrantes y entregue a cada equipo un conjunto de cuerpos como el que aparece en la actividad 1 de la hoja de trabajo (véase anexo).

Se sugiere dar instrucciones del siguiente tipo:

- Voy a elegir uno de los cuerpos que ustedes tienen en cada conjunto, pero no les voy a decir cuál elegí.
- Ustedes me van a hacer preguntas sobre las características del cuerpo geométrico, a las que voy a responder con *sí* o *no*.
- Cuando crean estar seguros de qué cuerpo se trata, pueden intentar decir cuál es.

- Si aciertan, ganan un punto; pero si se equivocan, pierden y dejan de jugar durante esa ronda.
- Escriba en el pizarrón las preguntas que le formulen los alumnos y las respuestas que usted da.

Una vez que se haya identificado el cuerpo que eligió, realice una confrontación grupal; las preguntas que los alumnos realizaron hasta lograr determinar qué cuerpo era el elegido y las respuestas que usted ofreció serán el principal material a analizar y discutir. Para ello será conveniente investigar cuáles fueron las preguntas que ofrecieron buenas pistas para acercarse al cuerpo seleccionado, qué cuerpos se descartan y cuáles comparten las características propuestas a partir de la información que se va obteniendo. En el caso de preguntas que no se apoyan en características geométricas, por ejemplo, ¿es alargado?, se debe destacar que elegir ese rasgo no es conveniente porque para algunos puede ser alargado y para otros no, por lo que se requiere que se formulen preguntas en las que sea posible estar de acuerdo con la respuesta. Otros aspectos a destacar y establecer como acuerdos son el uso de un vocabulario común, así como identificar que las preguntas que formularon anteriormente otros equipos ofrecen información que puede ser utilizada para plantear nuevas preguntas.

Realice otras rondas del juego para que los alumnos puedan utilizar aquello que han aprendido; para ello puede pedirles que el grupo se divida en un número par de equipos y que cada uno de ellos juegue contra otro y viceversa. En la siguiente sesión de Matemáticas utilice el mismo conjunto de cuerpos que en la sesión anterior y pida a sus alumnos que ahora supongan que ha ocurrido un juego en el que ha sido elegido el prisma recto de base cuadrada (el cual se señala en la actividad 2 de la hoja de trabajo); ellos deberán escribir la menor cantidad de preguntas y respuestas con las que sea posible identificarlo.

Finalmente, para realizar la tercera actividad de la hoja de trabajo, entregue el tercer conjunto de cuerpos; en este caso deberá conocerse el cuerpo que ha sido elegido y una lista incompleta de preguntas y respuestas. Los alumnos deberán escribir las preguntas y respuestas que faltan para que se pueda identificar el cuerpo.

Deberá conocerse el cuerpo que ha sido elegido y una lista incompleta de preguntas y respuestas.



Reflexión sobre la práctica

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles fueron algunas de las diferencias y similitudes entre los cuerpos que encontraron los alumnos al realizar la primera situación?
2. ¿Cuál es el nuevo vocabulario que manejan los alumnos?
3. Compare las preguntas que formularon los alumnos en la primera ronda con las de la última ronda de la primera parte de la actividad, ¿evolucionaron en la manera en que plantean sus preguntas?, ¿en qué tipo de aspectos se centraron?
4. Mencione algunas de las intervenciones que realizó durante el desarrollo de la actividad. Anote sobre todo aquéllas en las que ayudaba a los alumnos a utilizar nuevo vocabulario o a reflexionar sobre el tipo de preguntas que ellos estaban planteando.
5. Si utiliza esta actividad para clasificar poliedros, ¿qué aspectos tendría que considerar para cambiar o agregar nuevos cuerpos geométricos?

1.4. Pentaminós

Esta actividad representa una buena oportunidad para que los alumnos de quinto grado en adelante exploren, en diferentes niveles, ideas tales como la búsqueda sistemática y las transformaciones. Las habilidades de visualización, comunicación y dibujo se desarrollan ampliamente en esta actividad.



¿Qué sé de este tema?

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿Ha trabajado alguna vez actividades de búsqueda sistemática con los alumnos?
2. ¿Ha trabajado actividades de imaginación espacial?, ¿cuáles?
3. ¿Conoce los desarrollos planos para armar un cubo?, ¿cuántos? Dibújelos.



Manos a la obra

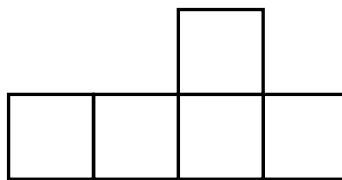
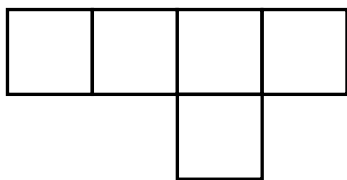
Primero lo hago yo

Realice las cinco consignas que se presentan en la hoja de trabajo *Pentaminós* (véase anexo 2).

- ¿Fue fácil encontrar los 12 pentaminós? ¿Cuál fue la estrategia que siguió para encontrarlos?
- ¿Cómo identifica a los pentaminós que también son desarrollos planos de una caja sin tapa?

Después lo pongo en práctica

Organice a los alumnos en equipos de dos o tres integrantes para resolver la hoja de trabajo *Pentaminós*. Se recomienda que cada alumno use hojas cuadrículadas para buscar y dibujar diferentes pentaminós. Indique que cuando un pentaminó se puede obtener a partir de otro por medio de una transformación: girarlo o voltearlo, se trata del mismo y sólo cuenta por uno, por ejemplo:



Reflexión sobre la práctica

Responda en su diario a las preguntas de la página 126, ahora para la actividad de los pentaminós.



1.5. Definiendo trianpen²⁸

En esta actividad se realizan tareas de conceptualización a partir de la expresión de las características de un objeto que lo distinguen de otros, con lo cual los alumnos desarrollan principalmente las habilidades de visualización y comunicación.



¿Qué sé de este tema?

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. Cuando le piden dar el concepto de triángulo, usted dice...
2. Cuando escucha o lee la palabra triángulo, usted piensa en triángulo... (dibuje la primera imagen que le llega a la mente)
3. Si alguien traza un triángulo equilátero, ¿cómo le muestra que no todo triángulo es equilátero?
4. Anote una situación en la que muestre cómo ha trabajado con sus alumnos una tarea de conceptualización geométrica.



Manos a la obra

Primero lo hago yo

Realice la actividad de la hoja de trabajo *Definiendo trianpen* (véase anexo).

- ¿Qué es un trianpen?
- ¿Cuántos trianpen encontró?

Después lo pongo en práctica

Organice a los alumnos en parejas y entrégueles una hoja de trabajo *Definiendo trianpen*. Deles tiempo suficiente para responder y mientras tanto escuche las

²⁸ Adaptada de C. Alsina et al. (1998), *Enseñar Matemáticas*.

discusiones que tiene cada pareja para decidir qué imágenes son o no son un trianpen.

Cuando termine el trabajo en parejas realice una puesta en común en donde los alumnos argumenten cuáles son trianpen. Pídales que traten de expresar ¿qué es un trianpen?, ¿cuáles son sus características? Finalmente, pídales que traten de encontrar un ejemplo de trianpen que sea diferente a los 18 que aparecen en la hoja de trabajo.



Reflexión sobre la práctica

Responda en su diario del profesor a las preguntas de la página 126 para esta actividad. Agregue: *¿Cómo suele trabajar con sus alumnos actividades de conceptualización?, ¿obtiene buenos resultados?*

1.6. Explorando cuadriláteros²⁹

En esta actividad el docente tendrá la oportunidad de estudiar y reflexionar acerca de sus conocimientos sobre cuadriláteros y cómo enseñar este tema a los alumnos.



¿Qué sé de este tema?

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿Qué entiende por cuadrilátero y qué cuadriláteros conoce?
2. ¿Conoce alguna clasificación de los cuadriláteros? Si su respuesta es afirmativa, ¿en qué criterio se basa esa clasificación?
3. Anote brevemente cuándo, dónde y cómo aprendió lo que sabe sobre los cuadriláteros.
4. ¿Alguna vez ha trabajado con sus alumnos el tema de los cuadriláteros o lo ha estudiado?

²⁹ Tomado de G. Burton, G. et al. (1993), *Sixth-Grade Book. Standards for School Mathematic*. Addenda Series. Grades K-6.



5. Anote brevemente lo que recuerda sobre la manera en que trabajó este tema y por qué lo trabajó así.



Manos a la obra

Primero lo hago yo

Responda la hoja de trabajo *Explorando cuadriláteros*; de ser posible trabájela en parejas o en equipo con otros compañeros.

Cuando haya encontrado los 16 cuadriláteros haga lo siguiente:

- Anote el nombre de los cuadriláteros que reconoce.
- Elija cinco cuadriláteros diferentes y en su diario del profesor anote todo lo que sepa de ellos (si tiene lados paralelos, perpendiculares, tipo de ángulos, etcétera).
- Clasifique los cuadriláteros de acuerdo con los siguientes criterios:
- Los que tienen al menos un eje de simetría y los que no tienen eje de simetría.
- Los que tienen todos sus ángulos menores que 180° y los que tienen al menos uno mayor que 180° .
- Los que tienen dos pares de lados paralelos, un par o ningún par.
- Los que tienen diagonales iguales y los que tienen diagonales que no son iguales.
- Los que tienen diagonales perpendiculares y los que tienen diagonales que no son perpendiculares.
- Proponga una clasificación diferente a las anteriores y preséntela al grupo.

Después lo pongo en práctica

Se invita a los alumnos a trabajar en parejas; a cada alumno se le entrega una hoja de trabajo de *Explorando cuadriláteros*. Se les da tiempo suficiente para que encuentren todos o la mayor parte de los cuadriláteros que se piden. Mientras tanto, el maestro puede reproducir los puntos en el pizarrón o llevar preparado un pliego de papel con los 16 cuadrados de puntos dibujados (si se

cuenta con un retroproyector se puede reproducir en acetato la hoja de trabajo y proyectarla).

Cuando termine el trabajo en parejas se realiza una puesta en común en donde los alumnos pasen al pizarrón a dibujar los cuadriláteros que encontraron.

Quienes no hayan encontrado los 16 cuadriláteros copian del pizarrón los faltantes.

Una vez que se haya realizado la actividad base, y dependiendo del grado escolar y nivel de los alumnos, se puede seguir trabajando algunos de los ejercicios que usted ya realizó (nombrar los cuadriláteros, identificar las propiedades de algunos, clasificarlos, si el grupo es de secundaria puede demostrar algunas propiedades de los paralelogramos, entre otras).



Reflexión sobre la práctica

Una vez que haya aplicado la actividad responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿La actividad fue del agrado de los alumnos?
2. ¿Qué nivel o niveles de Van Hiele trabajó?
3. ¿Qué procesos pusieron en marcha los alumnos?
4. ¿Qué dificultades y errores tuvieron?
5. ¿Qué tipo de actividad es?
6. Si volviera a trabajarla: ¿qué cambiaría?, ¿qué dejaría igual?, ¿qué cambiaría de su propio actuar?

Al resolver estos problemas los alumnos deben elaborar y seguir una serie de argumentos lógicos que después tendrán que explicar y probar al comunicar a otros la veracidad de sus respuestas.



1.7. Construyendo y probando³⁰

En esta actividad los alumnos de secundaria realizarán tareas de investigación y demostración en las que desarrollarán las habilidades de comunicación, de dibujo y razonamiento al analizar las propiedades de las figuras que se les pide construir a partir de los datos y de los instrumentos que se les indican.



¿Qué sé de este tema?

Anote en su diario del profesor sus comentarios o respuestas a las siguientes cuestiones:

1. ¿Ha trabajado alguna vez actividades de demostración con los alumnos?
¿Cuáles?
2. Escriba una actividad de dibujo que conozca en la que les pide a sus alumnos que utilicen regla no graduada y compás, ¿cuáles son las propiedades o relaciones que se enfatizan en esa actividad?
3. ¿Cuál cree que es el papel de los instrumentos geométricos (regla no graduada, compás, escuadras) en las construcciones?

Por ejemplo:

Situación A: El siguiente segmento es la diagonal de un rectángulo.



Utilizando compás, regla y escuadra no graduada dibuje dos rectángulos distintos que tengan por diagonal al segmento dado. ¿Es posible dibujar más rectángulos?, ¿cuántos? Explique por qué.

Situación B: El siguiente segmento es la diagonal de un rectángulo.



³⁰ Adaptada de H. Ponce (2003), *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo*.

Utilice compás y regla no graduada para construirlo.

¿Es posible dibujar más rectángulos?, ¿cuántos? Explique por qué.

Compare de qué manera las situaciones A y B son diferentes debido a que los instrumentos que se pueden utilizar en ellas son distintos, a pesar de que ofrecen el mismo dato: la diagonal.³¹

Manos a la obra



¿Qué hago yo

Realice las cinco construcciones que se presentan en la hoja de trabajo *Construyendo y probando* (véase anexo). ¿Cuáles son algunas de las propiedades o relaciones de las figuras que se proponen construir? ¿Qué diferencias encuentra entre cada una de las construcciones que se plantean? ¿En cuáles construcciones hay más de una solución? ¿Por qué? ¿Y en qué casos no existe una solución? ¿Qué diferencia hay entre utilizar papel liso o cuadriculado para realizar la construcción? ¿Qué conceptos matemáticos se trabajan en la actividad? ¿Qué posibles procedimientos podrían utilizar los alumnos? ¿Cuáles de ellos convendría destacar? ¿Por qué?

Después lo pongo en práctica

Organice a los alumnos en parejas y entrégueles un dibujo como el que aparece en la actividad 1 de la hoja de trabajo *Construyendo y probando* (véase anexo). Pídales que traten de realizar las construcciones y de justificar sus procedimientos.

Una vez que los alumnos hayan terminado sus construcciones, realice una confrontación grupal en la que ellos mismos argumenten por qué es o no posible cada construcción y de qué manera se puede estar seguro de la respuesta. Un aspecto a destacar es el hecho de que la medición no puede ser un argumento en el cual se apoye una justificación para determinada construcción debido a que en ocasiones se pueden lograr figuras geométricas aun con erro-

³¹ Tomada de H. Ponce (2003), *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo*.



res de medición, pero desde las propiedades y relaciones de las figuras dicha construcción no es posible (por ejemplo, construir un triángulo cuyos lados midan 9 cm, 5 cm y 4 cm).



Reflexión sobre la práctica

Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles fueron algunos de los argumentos que dieron los alumnos al realizar cada una de las construcciones?
2. Compare los procedimientos seguidos por sus alumnos y los que usted consideró en el apartado *Primero lo hago yo*, ¿qué aspectos nuevos surgieron?
3. ¿Cuáles fueron algunos de los errores más comunes que cometieron los alumnos durante el desarrollo de la actividad?
4. ¿Cuáles podrían ser algunas variantes de la actividad?

1.8. Geometría y azulejos³²

En esta actividad los alumnos de secundaria realizarán tareas de investigación y demostración en las que desarrollarán las habilidades de comunicación, dibujo, razonamiento y transferencia al analizar con qué polígonos regulares e irregulares es posible recubrir un plano y por qué.



¿Qué sé de este tema?

Anote en su diario del profesor sus comentarios o respuestas a las siguientes cuestiones:

1. Investigue qué es un teselado.
2. ¿Con qué polígonos regulares es posible cubrir un plano? ¿Por qué?

³² Tomada de H. Espinosa, Silvia García, Marco Antonio García (1999), *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*.

3. ¿Existirán otras figuras que no sean polígonos regulares con las cuales sea posible cubrir el plano? ¿Por qué?



Manos a la obra

Primero lo hago yo

Realice las tres actividades que se presentan en la hoja de trabajo *Geometría y azulejos* (véase anexo).

Para concluir y analizar las actividades puede utilizar una tabla como la siguiente:

Polígono regular	¿Los polígonos embonaban perfectamente?	¿Cubren todo el plano?	Medida de los ángulos interiores	Número de ángulos alrededor del punto	Suma de las medidas de los ángulos alrededor del punto.

Utilice sus observaciones para completar la tabla.

- ¿Cuánto vale la suma de las medidas de los ángulos alrededor del punto indicado?
- Si se mezclan distintos polígonos regulares para cubrir el plano, ¿cuál es la suma de las medidas de los ángulos alrededor del punto indicado?



Después lo pongo en práctica

Invite a los alumnos a trabajar en parejas; a cada uno se le entrega una copia de la actividad 1 de la hoja de trabajo de *Geometría y azulejos*. Deje abierta la pregunta para que, en una lluvia de ideas, los alumnos digan los posibles motivos por los que los azulejos en forma de pentágono regular no sirvieron. Se espera que lleguen a la conclusión de que los pentágonos regulares, puestos uno al lado de otro, no permiten cubrir totalmente un plano. Recomiéndeles que hagan un pentágono regular en una cartulina y que lo utilicen como plantilla para calcar varios y traten de cubrir totalmente un plano y vean lo que sucede. Los alumnos notarán que se requiere construir rombos o alguna otra figura para cubrir los huecos que dejan los pentágonos.

Para la realización de la actividad 2 se recomienda que los alumnos utilicen su juego de Geometría para trazar polígonos regulares en cartulina y los usen como plantillas. Después de un tiempo suficiente, pida que un representante de cada equipo muestre las figuras que dan respuesta a los incisos a) y b). Invite a los alumnos a descubrir la característica común entre los hexágonos regulares, los cuadrados y los triángulos equiláteros. Es probable que al menos un equipo se dé cuenta de que la medida de un ángulo interno en cualquiera de estos tres polígonos regulares es un divisor de 360° .



Reflexión sobre la práctica

Responder en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles fueron algunos de los argumentos que dieron los alumnos al realizar cada una de las construcciones?
2. Compare los procedimientos seguidos por sus alumnos y los que usted consideró en el apartado *Primero lo hago yo*, ¿qué aspectos nuevos surgieron?
3. ¿Cuáles fueron algunos de los errores más comunes que cometieron los alumnos durante el desarrollo de la actividad?
4. ¿Cuáles podrían ser algunas variantes de la actividad?

1.9. El círculo³³

En esta actividad los alumnos de secundaria realizarán tareas de investigación y demostración en las que desarrollarán las habilidades de comunicación, dibujo, razonamiento y aplicación al resolver un problema que corresponde a un contexto no matemático en el que se aplican los conceptos de *ángulo inscrito en una circunferencia* y *lugar geométrico*.



¿Qué sé de este tema?

Anote en su diario del profesor sus comentarios o respuestas a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué es un ángulo inscrito?
2. ¿Qué es un ángulo inscrito en una circunferencia?
3. ¿Qué sucede cuando dos ángulos inscritos en el mismo círculo abarcan el mismo arco de circunferencia?
4. Anote una situación en la que muestre cómo ha trabajado con sus alumnos la habilidad de aplicación o transmisión geométrica.

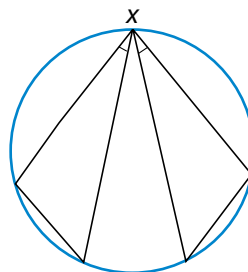


Manos a la obra

Primero lo hago yo

Realice las tres actividades que se presentan en la hoja de trabajo *El círculo* (véase anexo).

- ¿Cómo serán los ángulos de visión si un espectador X observa dos escenarios en los que la medida de los arcos que abarcan son iguales?



³³ Tomada de H. Espinosa, Silvia García, Marco Antonio García (1999), *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*.



Después lo pongo en práctica

Organice a los alumnos en parejas; a cada alumno se le entrega un dibujo de la actividad 1 de la hoja de trabajo *El círculo* y se les plantea la situación. Deles tiempo suficiente para contestar. Tal vez algunos alumnos tracen los ángulos de visión de los espectadores y algunos los midan con el transportador; quizá otros utilicen una hoja como auxiliar y copien en ella uno de los ángulos para superponerlo y compararlo con los otros. En cualquier caso concluirán que los ángulos de visión de cada uno de los espectadores son iguales (es decir, son congruentes). Pídales que escriban una conjetura de lo que sucede con estos ángulos inscritos en el mismo círculo.

En cuanto a la segunda actividad, es posible que los alumnos elijan puntos al azar y midan cada ángulo para ver si cumple con la condición que se ha solicitado. Observarán que si los puntos elegidos se encuentran cerca de la circunferencia la medida del ángulo se va acercando a la mitad de la medida del ángulo central, y que si el punto elegido se encuentra sobre cualquier parte de la circunferencia, entonces la medida del ángulo cumple con la condición señalada.

Finalmente, para realizar la tercera actividad organice a los alumnos en parejas y observe cómo trabajan; sin duda esta tarea es una oportunidad para que aprendan a utilizar adecuadamente los instrumentos geométricos. Cuando la mayoría de los estudiantes haya terminado, realice una discusión grupal en la que contesten las siguientes preguntas:

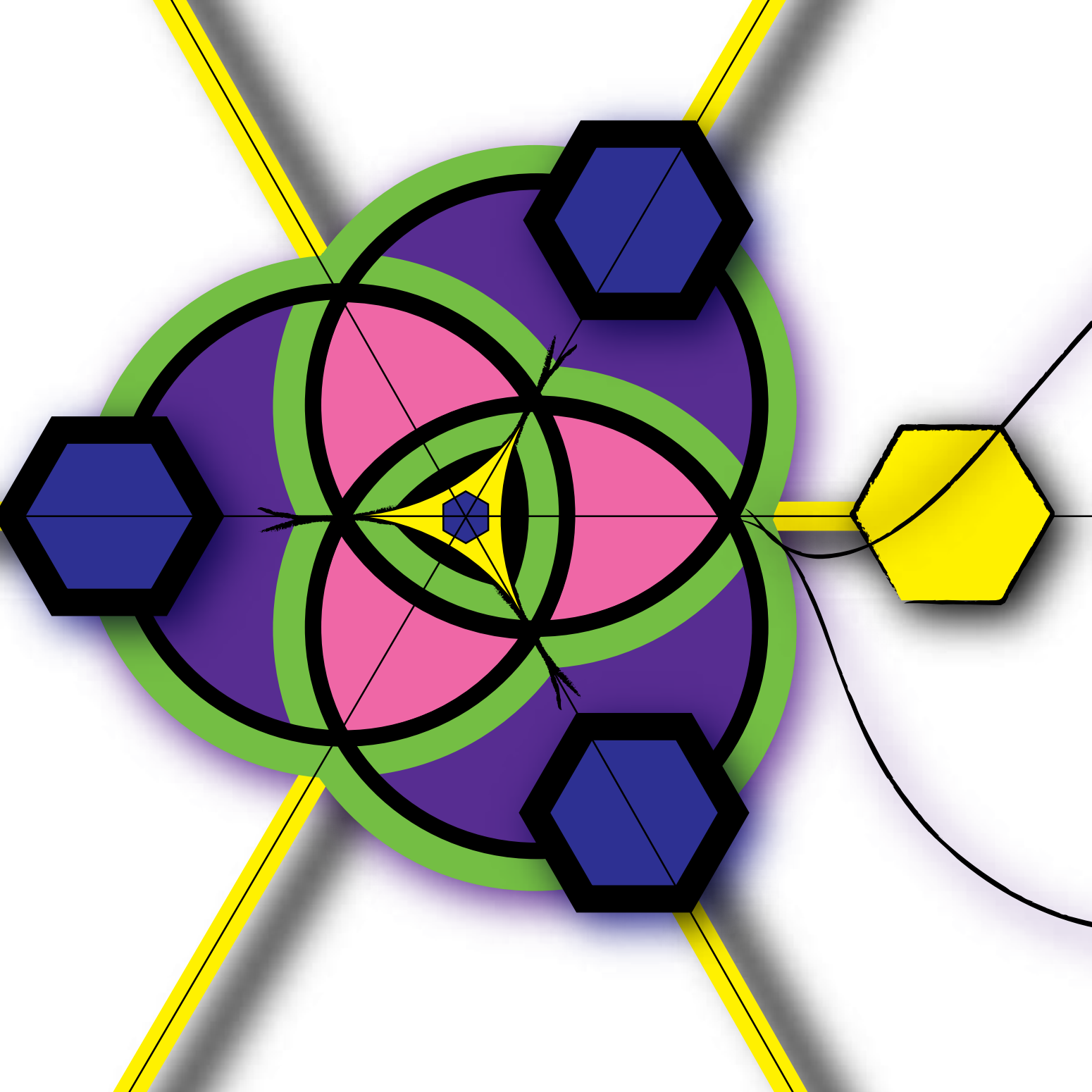
- ¿Cómo trazaron los rectángulos?
- ¿Qué figura geométrica se forma con los vértices de los rectángulos?
- ¿Qué relación tiene el segmento original con la circunferencia que se forma?
- ¿Cuánto mide un ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y abarca su diámetro?



Reflexión sobre la práctica

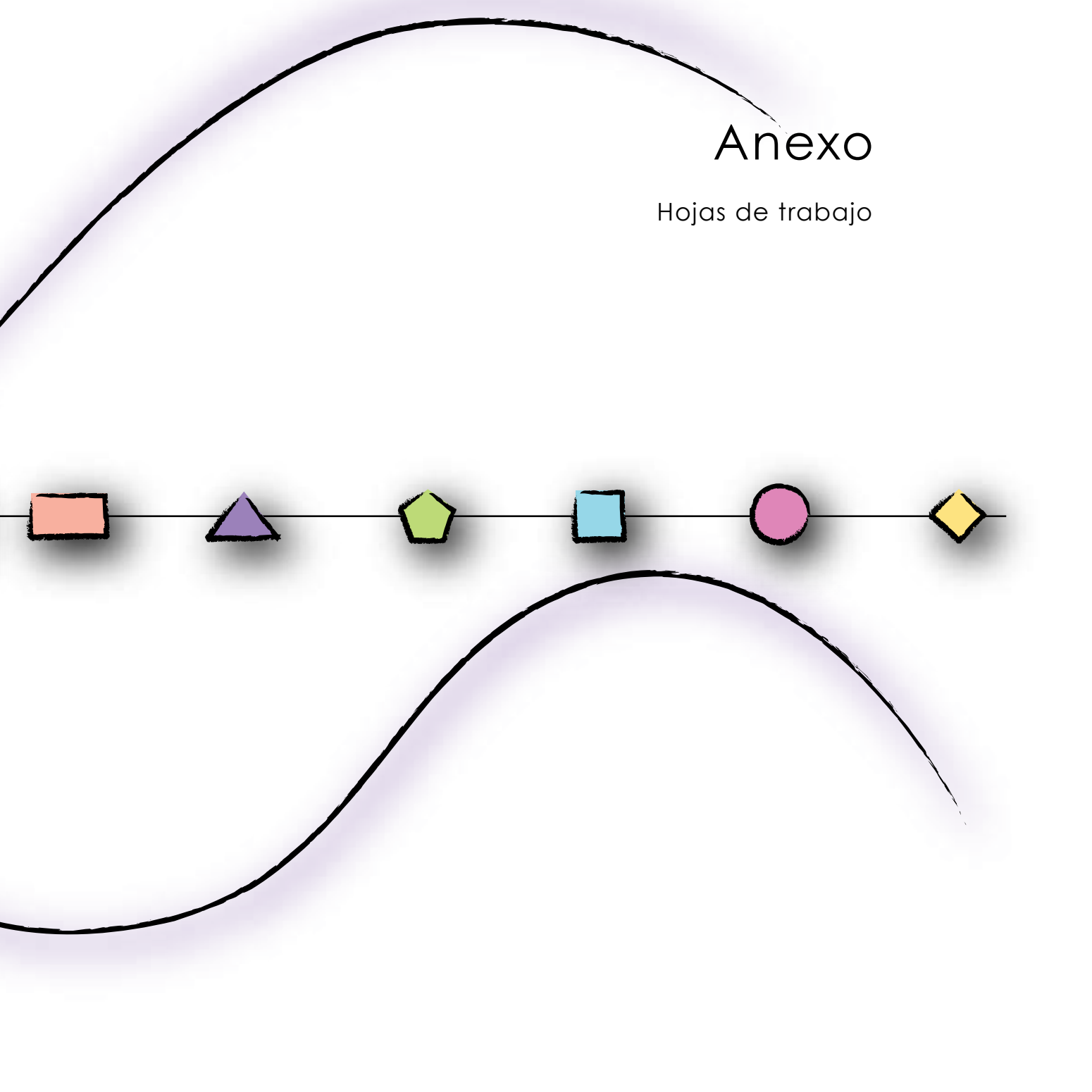
Responda en su diario del profesor las siguientes preguntas:

1. Compare los procedimientos seguidos por sus alumnos y los procedimientos que consideró en el apartado *Primero lo hago yo*, ¿qué aspectos nuevos surgieron?
2. ¿Cuáles fueron algunos de los argumentos que dieron los alumnos al realizar la construcción de la actividad 3?
3. ¿Cuáles fueron algunos de los errores más comunes que cometieron durante el desarrollo de la actividad?
4. ¿Cuáles podrían ser algunas variantes de la actividad?

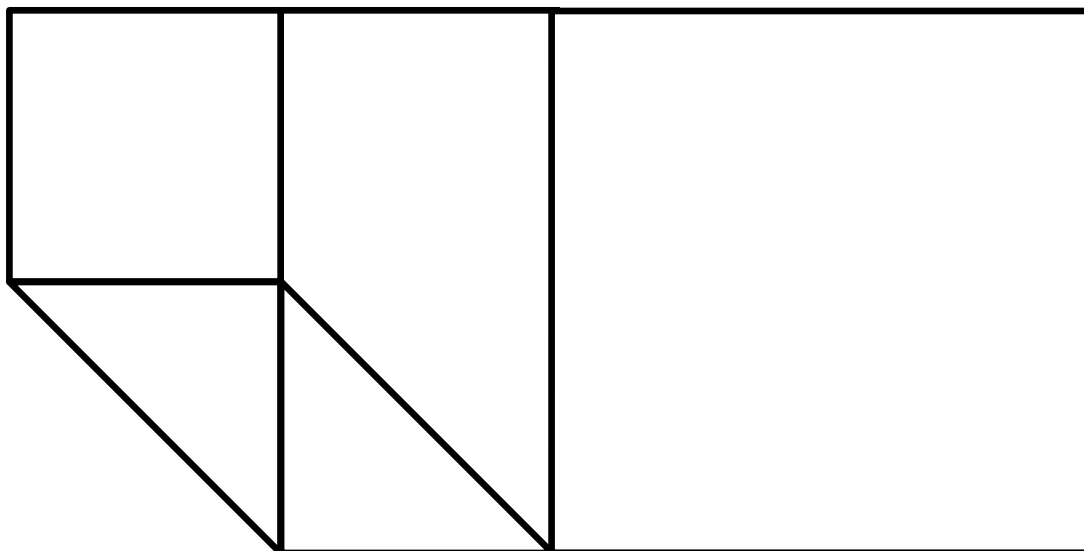


Anexo

Hojas de trabajo



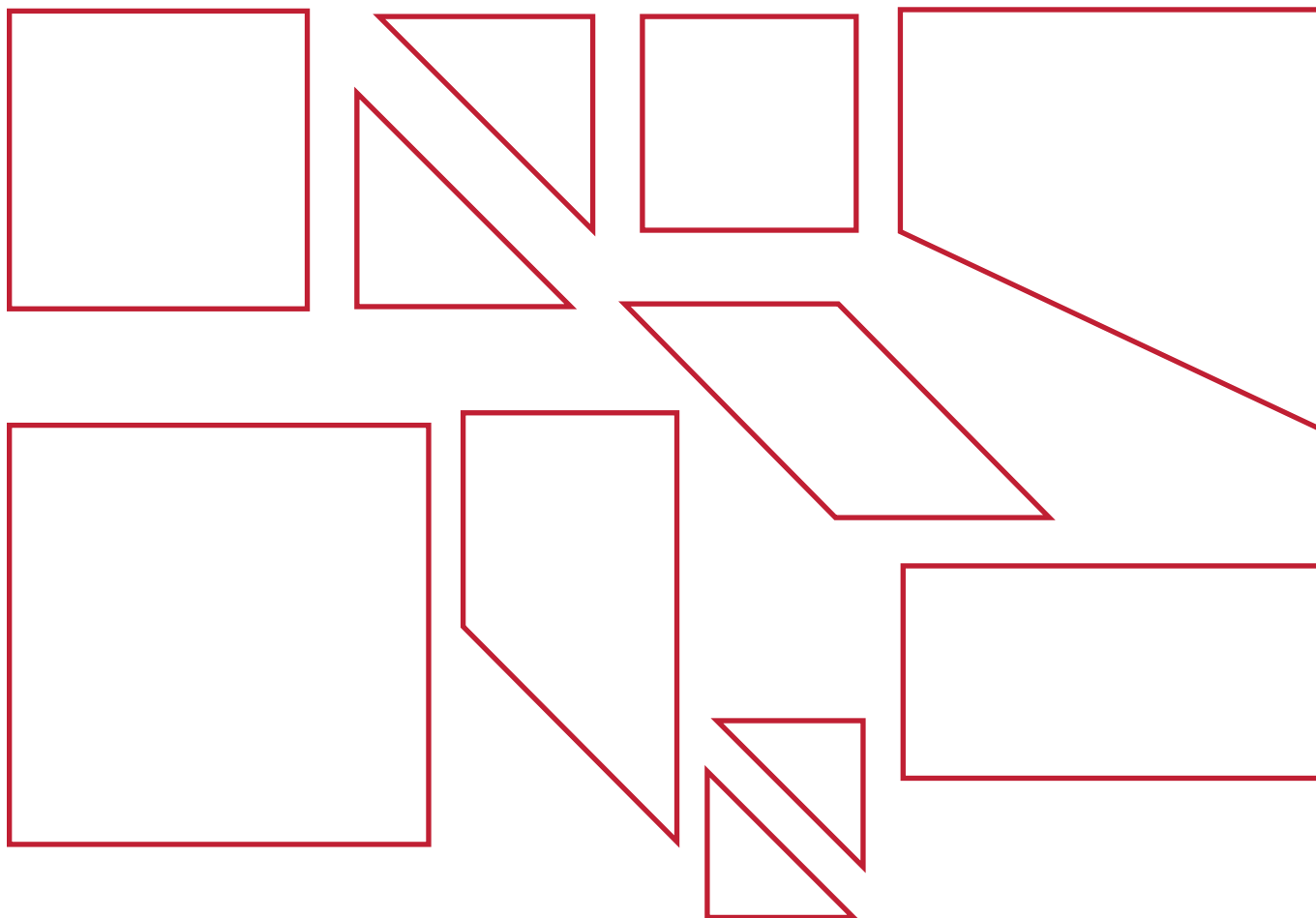
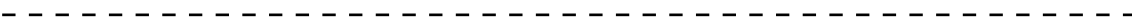
1.1. Rompecabezas³⁴



³⁴ Tomada de: C. Broitman y H. Itzcovich (2002), *El estudio de las figuras y de los cuerpos geométricos. Actividades para los primeros años de la escolaridad.*

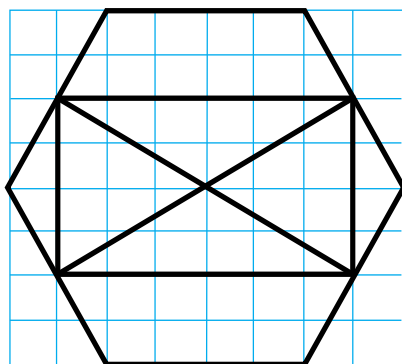


Piezas que deben estar en el escritorio del maestro, recortadas.

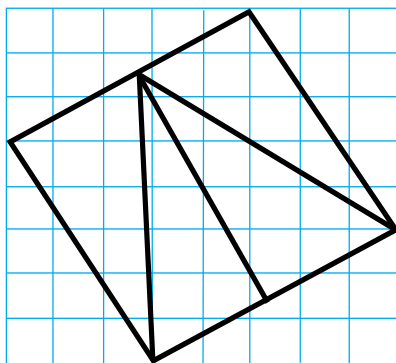


1.2. Copiando figuras³⁵

Actividad 1. Copia la figura siguiente en la hoja cuadriculada que se te entregó.



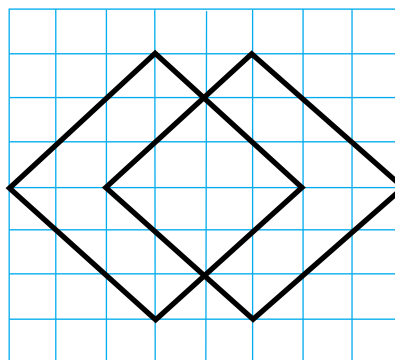
Actividad 2. Ahora copia esta otra figura en una hoja cuadriculada. Para realizar esta nueva copia toma en cuenta las recomendaciones que escribiste en la actividad anterior.



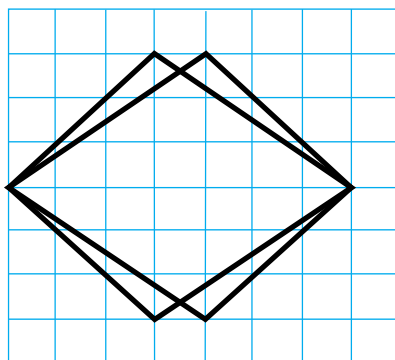
³⁵ Adaptada de H. Ponce (2003), *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo*.



Actividad 3. Observa la figura original y una copia que se elaboró de ella, señala cuáles son los errores y corrígelos.



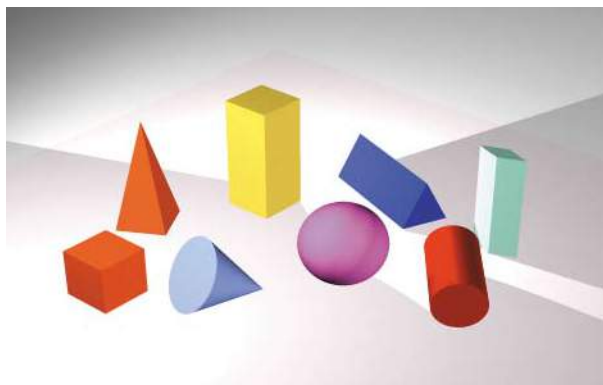
Original



Copia

1.3. Identificando cuerpos³⁶

Actividad 1. Forma un conjunto de cuerpos como los que aparecen en la siguiente figura.

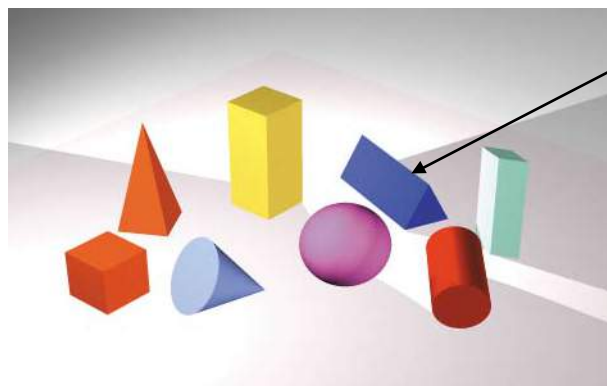


Se pueden utilizar cajas de cartón, envases u otros objetos. El profesor selecciona un cuerpo sin decir a los alumnos cuál fue. Éstos deberán hacer preguntas a las que sólo se puede responder con *sí* o *no*. Cuando creen estar seguros de qué cuerpo se trata pueden intentar decir cuál es. Si aciertan, ganan un punto; pero si se equivocan, pierden y dejan de jugar durante esa ronda.

³⁶ Adaptada de H. Ponce (2003), *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo*.



Actividad 2. Supón que ha sido seleccionado el cuerpo que se indica en la siguiente figura.

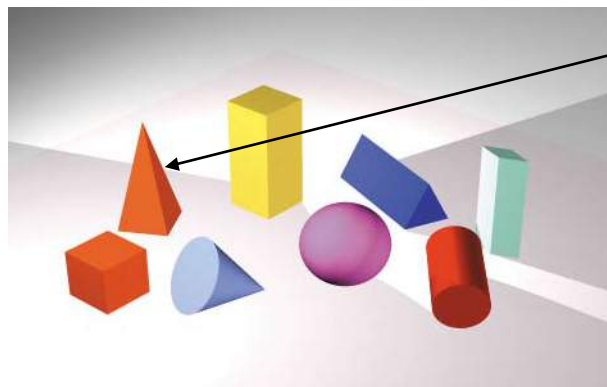


Cuerpo Elegido

Debes escribir la menor cantidad de preguntas y respuestas para que sea posible identificarlo.



Actividad 3. Forma un conjunto de cuerpos, como los que aparecen en la figura de abajo, en el que conozcas el cuerpo que ha sido elegido y una lista de preguntas y respuestas que está incompleta. Los alumnos deben escribir la pregunta que falta para que puedan identificar al cuerpo.



Cuerpo Elegido

Actividad: Identificando cuerpos

¿El cuerpo tiene caras cuadradas?

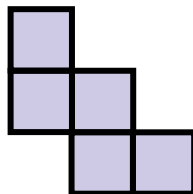
Respuesta: Sí

¿El cuerpo tiene 6 caras?

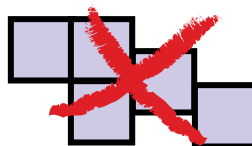
Respuesta: No

1. 4 Pentaminós

Si tomamos cinco cuadrados y los unimos de modo que tengan al menos un lado común, obtenemos lo que se llama *pentaminó*. Por ejemplo:



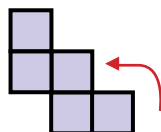
No se pueden unir sólo por un vértice y tampoco por la mitad de un lado.



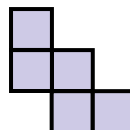
1. En total hay 12 pentaminós.
¡Encuétralos todos!

2. Cuando ya tengaa los 12, identifica los pentaminós con los que puedes armar una cajita sin tapa.

3. Con este pentaminó sí se puede armar una cajita sin tapa. Señala con una flecha los lados que tienen que unirse para formar la tapita. Como en el ejemplo:



4. Completa este molde, dibujando otro cuadrado, para que se puede armar con el un cubo.



5. Elige dos pentaminós, diferentes al del ejemplo, con los que también se pueda armar una cajita sin tapa y en su cuaderno repitan con ellos las actividades 3 y 4.



1.5 Definiendo trianpen³⁷

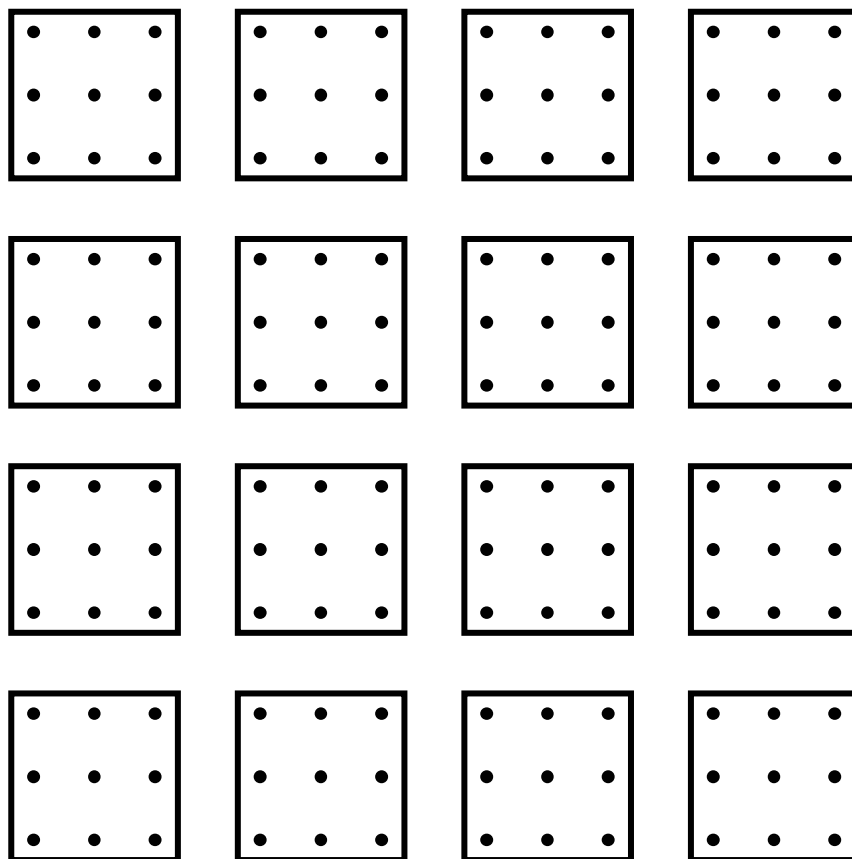
Anota en las figuras 13 a 18: *Es un trianpen* o *No es un trianpen*, según lo consideres.

1 No es un trianpen 	2 No es un trianpen 	3 Es un trianpen 	4 No es un trianpen 	5 Es un trianpen 	6 No es un trianpen
7 No es un trianpen 	8 Es un trianpen 	9 No es un trianpen 	10 No es un trianpen 	11 Es un trianpen 	12 No es un trianpen
13 _____ 	14 _____ 	15 _____ 	16 _____ 	17 _____ 	18 _____

³⁷ Adaptada de C. Alsina et al. (1998), *Enseñar Matemáticas*.

1.6. Explorando cuadriláteros³⁸

En cada conjunto de puntos traza una figura de cuatro lados de tal manera que sus vértices sean cuatro de los puntos. Dos figuras con igual forma y medida se cuentan por una sola. En total hay 16 figuras, ¡encuéntralas todas!



³⁸ Tomado de G. Burton et al. (1993), *Sixth-Grade Book. Standards for School Mathematics*. Addenda Series. Grades K-6. NCTM.



1.7 Construyendo y probando

Actividad 1. Se sabe que el siguiente segmento es la diagonal de un paralelogramo.



Utiliza regla y escuadra no graduadas para realizar la construcción. ¿Es posible? Si lo fuera, ¿hay una única respuesta? ¿Por qué?

Actividad 2. Usa regla graduada y compás para construir, si es posible, un paralelogramo que tenga:

- Un lado de 3 cm
- Una diagonal de 4 cm

Justifiquen su respuesta.

Actividad 3. Utiliza regla graduada y compás para construir, si es posible, un paralelogramo que tenga:

- Un lado de 3 cm
- Una diagonal de 4 cm
- Una diagonal de 6 cm

¿Hay un solo paralelogramo que cumple estas condiciones? ¿Por qué?

Actividad 4. Usa regla graduada y compás para construir, si es posible, un paralelogramo que tenga:

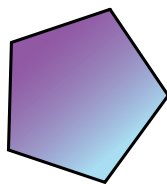
- Un lado de 5 cm
- Una diagonal de 7 cm que forma un ángulo de 60° con el lado de 5 cm

¿Cuántos paralelogramos cumplen estas condiciones? Justifiquen su respuesta.

1.8 Geometría y azulejos³⁹

Actividad 1. Lee la siguiente situación y contesta la pregunta.

A un fabricante se le ocurrió producir azulejos en forma de pentágonos regulares.



Una persona que visitó su establecimiento vio esos azulejos y le gustaron mucho. Compró los suficientes para cubrir las paredes de su baño, sin embargo, a pesar de que los azulejos eran de excelente calidad, regresó con el fabricante sumamente molesto y le dijo que sus azulejos no servían. El fabricante, sorprendido, le preguntó por qué.

¿Qué tiene que hacer el fabricante para que su producción de azulejos pentagonales pueda utilizarse para cubrir las paredes?

✂ —————

Actividad 2. Organizados en equipos de cuatro integrantes, lean y resuelvan la siguiente situación:

Busquen polígonos regulares que puedan servir como moldes para fabricar azulejos que cubran totalmente una superficie, bajo las siguientes condiciones:

- a) Sólo se permiten figuras del mismo tipo
- b) Se permiten figuras de varios tipos

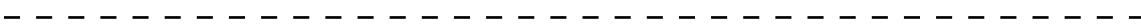
³⁹ Tomada de H. Espinosa, S. García, M.A. García (1999), *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*.



En cada caso hagan dibujos que muestren cómo cubrieron la superficie.
Contesten las preguntas.

- ¿Qué característica común tienen los polígonos que dan solución al inciso a)?
- ¿Qué característica común tienen los polígonos que no dan solución al inciso a)?

Comparen sus respuestas.



Actividad 3. Encuentra diferentes figuras que no sean polígonos regulares y que cubran totalmente el plano.

Haz un teselado⁴⁰ con algunas de las figuras encontradas para este problema y coloréalo a tu gusto.

⁴⁰ Teselado: del latín *tessellatus*, nombre que daban los antiguos romanos a los azulejos que utilizaban para cubrir sus pavimentos y muros. Un teselado se hace repitiendo la misma forma una y otra vez.

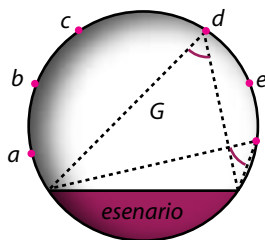
1.9. El círculo⁴¹

Actividad 1. Lee la siguiente situación y contesta las preguntas.

El dibujo que observas es el croquis de un teatro.

Las letras señalan algunos de los asientos y las líneas punteadas, el ángulo de visión de los espectadores que ocupan esos asientos.

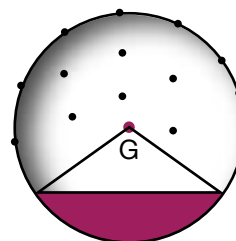
- ¿Cuál de los espectadores (a, b, c, d, e, f) tiene mayor ángulo de visión? Justifiquen sus respuestas.
- ¿Qué sucede si el teatro es más grande o más chico?
- ¿Qué tiene que hacer el fabricante para que su producción de azulejos pentagonales pueda utilizarse para cubrir las paredes?



Actividad 2. Resuelve la siguiente situación:

Una persona se encuentra situada en el centro del teatro (que tiene la misma forma que en la actividad 1).

- Localiza algún lugar del teatro en el que otro espectador tenga la mitad del ángulo de visión que el que se encuentra en el centro.



Compara tus respuestas.

⁴¹ Tomada de H. Espinosa, S. García, M.A. García (1999), *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*.



Actividad 3. Utiliza tus escuadras para resolver la siguiente situación:

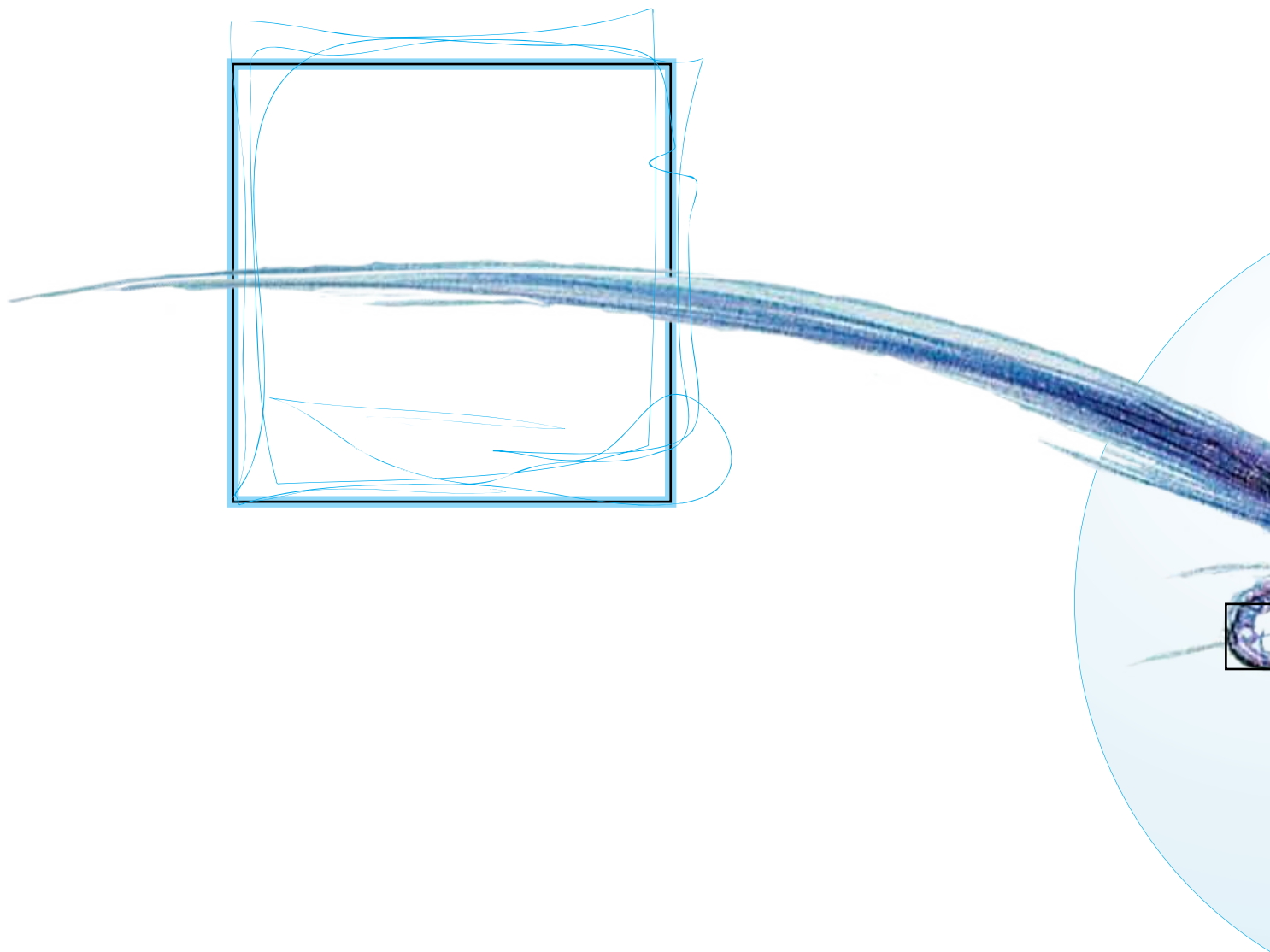
Traza un segmento de 8 cm de longitud.



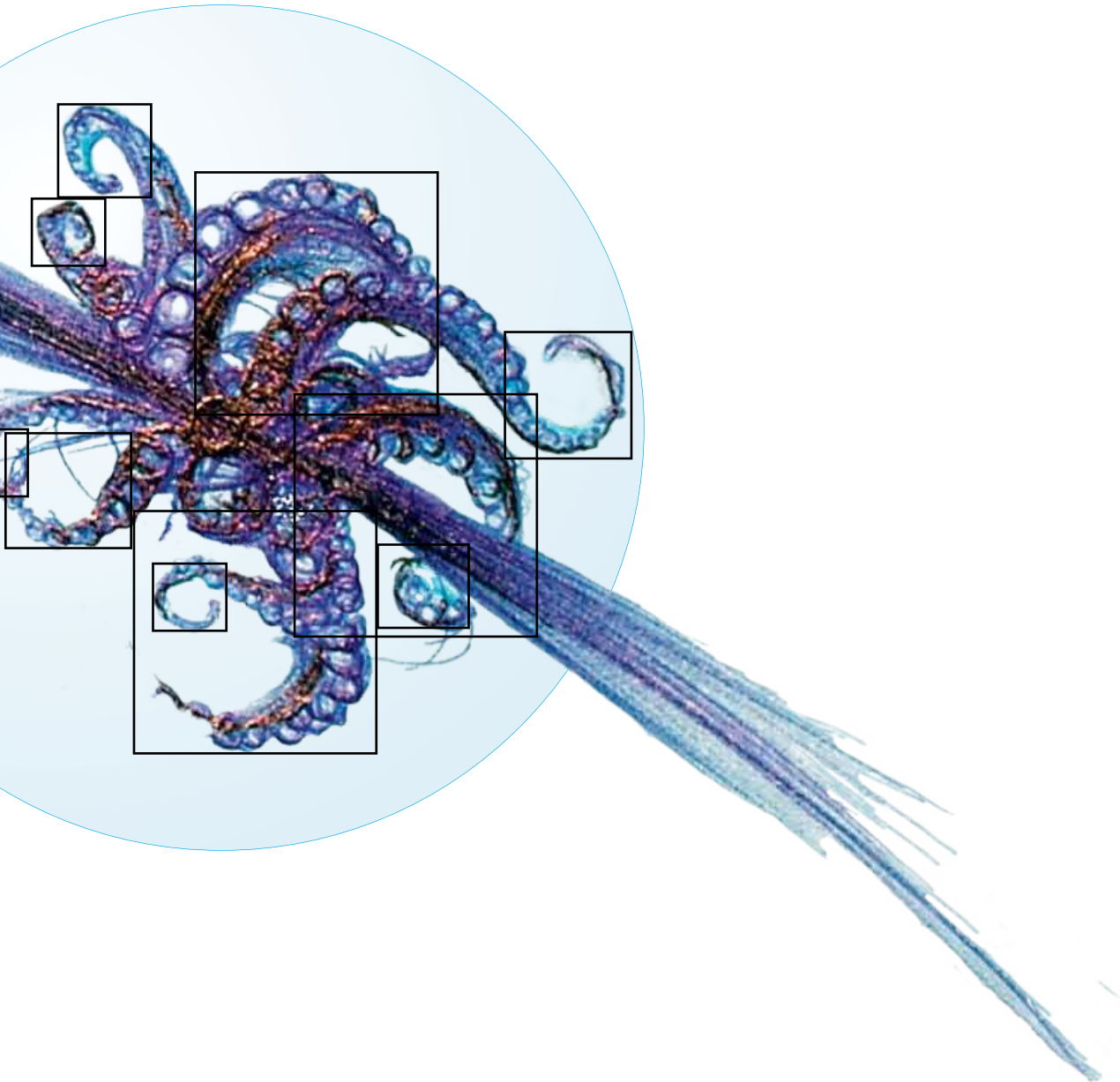
Después, traza al menos 8 rectángulos diferentes en los cuales una de sus diagonales sea el segmento que trazaste.

- a) ¿Qué figura geométrica forman los vértices de todos los rectángulos que trazaste?
- b) ¿Por qué se forma la figura geométrica que encuentraste?





Bibliografía



Libros y artículos:

- Alsina, C., C. Burgués, J. Fortuny (1991), *Materiales para construir la Geometría*, Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., J. Fortuny, R. Pérez (1997), *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., C. Burgués, J. Fortuny, J. Giménez, M. Torra (1998), *Enseñar Matemáticas*, Barcelona: Editorial Graó.
- Backhoff, E. et al. (2006), *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México: sexto de primaria y tercero de secundaria*, México: INEE.
- Bressan, A., B. Bogisic, K. Crego (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar...* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.
- Broitman, C. y H. Itzcovich (2002), *El estudio de las figuras y de los cuerpos geométricos. Actividades para los primeros años de la escolaridad*, Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.
- Burton, G. et al. (1993), *Sixth-Grade Book. Standards for School Mathematics. Addenda Series. Grades K-6*, EUA: NCTM.
- Espinosa, H., S. García y M.A. García (1999), *Fichero de actividades didácticas. Educación Secundaria*, México: SEP.
- Fortuny, J. (1994), "La educación geométrica 12-16. Sistemática para su implementación", en *La Geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*, Barcelona: Editorial Graó.
- Guillén, G. (2005), "Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos", *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 2, agosto 2005, México: Santillana XXI.



- Gutiérrez, A. y A. Jaime (1991), “El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: los giros”, *Educación Matemática* (2), vol. 3, México: Santillana XXI, pp. 49-65.
- Llinares, S. (2003), “Matemáticas escolares y competencia matemática”, en Carmen Chamorro (coord.), *Didáctica de las Matemáticas para primaria*, Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Ponce, H. (2003), *Enseñar Geometría en el primer y segundo ciclo. Diálogos de la capacitación*, Buenos Aires: CePA (serie Materiales para la Capacitación. Escuela de Capacitación).
- Samper, C., L. Camargo, C. Leguizamón (2003), *Cómo promover el razonamiento en el aula por medio de la Geometría*, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- SEP
- Vecino, F. (2003), “Didáctica de la Geometría en Educación Primaria”, en Carmen Chamorro (coord.), *Didáctica de las Matemáticas para primaria*, Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Velázquez, F. (2006), “La Geometría, una enseñanza imprescindible”, *UNO. Revista de didáctica de las Matemáticas*, núm. 42, año XII, Barcelona: Editorial Graó.

Páginas de internet consultadas:

Explorador Excale del INEE:

<http://www.inee.edu.mx/explorador/muestraDificultad.php>

<http://www.inee.edu.mx/explorador/muestraEspecificacion.php>

Lecturas recomendadas

Alsina, C., Josep Fortuny, Rafael Pérez (1997), *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Madrid: Síntesis.

A pesar de tratarse de un texto dirigido a maestros de secundaria, también puede ser de utilidad para los profesores de primaria. Consta de los siguientes capítulos: *Unas reflexiones sobre Geometría y educación*; *Pensar geométricamente*; *Resolver problemas estratégicamente*, y *Geometría en clase: implementar y evaluar*. El texto es eminentemente didáctico y, entre otros aspectos, incluye una historia breve de la Geometría, un análisis muy interesante del papel de la definición en la clase de Geometría e ideas sobre la implementación de un laboratorio de Geometría.

Bressan, A., Beatriz Bogisic, Karina Crego (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar...* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

El libro es básicamente una extensa colección de diversas actividades para la enseñanza de la Geometría, la gran mayoría para primaria pero también para secundaria. Las actividades se presentan clasificadas de acuerdo con la habilidad que trabajan principalmente. Tiene los siguientes capítulos: *La Geometría en la educación general básica*; *Habilidades visuales*; *Habilidades de dibujo y construcción*; *Habilidades de comunicación*; *Habilidades de pensamiento*; *Habilidades de aplicación y transferencia*; *Conclusiones*.

Broitman, C. y H. Itzcovich (2002), *El estudio de las figuras y de los cuerpos geométricos. Actividades para los primeros años de la escolaridad*. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Este libro presenta una serie de actividades de Geometría diseñadas de acuerdo con la didáctica francesa, en particular con la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau. Después de una introducción donde se habla someramente de esta teoría, se presenta una serie de secuencias didácticas que dan nombre



a los diferentes capítulos que conforman el libro: *Pistas y figuras; Plegados y formas; Mensajes con figuras; Cubrir diseños con figuras; Adivinar cuerpos; Mensajes de construcciones con cuerpos; Desarrollos planos de cuerpos.*

Calvo, Xelo et al. (2002), *La Geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*, vol. 17, Barcelona: Editorial Graó (Col. Claves para la Innovación Educativa).

En este libro se presenta una colección de pequeños ensayos relacionados con la enseñanza de la Geometría; está dirigido a maestros de preescolar, primaria y secundaria. Sobre los aspectos generales se incluyen dos capítulos: *Construir la Geometría* y *Los recursos didácticos en el aprendizaje de la Geometría*. Para Educación Preescolar: *El aprendizaje de la Geometría; Aprender jugando con la Geometría en la escuela infantil*. Para Educación Primaria: *El qué, cuándo, para qué de las Matemáticas; El polydrón, un material que engancha*. Para secundaria: *La educación geométrica. Sistemática para su implementación; El espacio en forma*.

Guillén, G. (2005), “Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos”, *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 2, agosto 2005, México: Santillana XXI.

Es una propuesta para futuros maestros de alumnos de primaria que presenta un marco teórico sobre el mundo de los poliedros y formas de clasificarlos. Hace un interesante análisis de la clasificación vista desde diferentes puntos de vista y de los obstáculos y las dificultades de clasificar bajo criterios diferentes.

Moriena, S. y S. Scaglia (2003), “Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la Geometría”, *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 1, abril 2003, México: Santillana XXI.

En palabras de las autoras: *En este artículo se describe un estudio realizado para detectar la influencia de las representaciones gráficas estereotipadas en la*

enseñanza y el aprendizaje de los conceptos geométricos. Se trata de estudiar la dificultad para identificar una figura geométrica cuando su representación gráfica difiera (por ejemplo, en su posición) de la que se presenta comúnmente en los libros de texto.

_____. 2005), “Prototipos y estereotipos en Geometría”, *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 3, diciembre 2005, México: Santillana XXI.

En este artículo se introduce la expresión *representación gráfica estereotipada* para referirse al dibujo que normalmente se hace de una figura geométrica; por ejemplo, el cuadrado se dibuja por lo general apoyado sobre un lado, mientras que el rombo nunca se dibuja así. Estas representaciones estereotipadas dan lugar a lo que las autoras llaman *ejemplo prototípico*, que es el esquema mental que los alumnos se forman de un concepto geométrico.

Vecino, F. (2003), “Didáctica de la Geometría en Educación Primaria”, en Carmen Chamorro (coord.), *Didáctica de las Matemáticas para primaria*, Madrid: Pearson Prentice Hall.

Se trata de un ensayo en el que se hacen reflexiones sobre la enseñanza de la Geometría, los problemas actuales y sus posibles causas; la parte medular del ensayo corresponde a proposiciones didácticas que el autor hace sobre el tema, por ejemplo, que sea más dinámica, que se trabaje la inducción y la deducción, que atienda a procesos de construcción, reproducción, representación y designación, entre otros aspectos.

Colaboradores

El siguiente listado incluye académicos del INEE, asesores, miembros de comités, expertos y docentes que contribuyeron en la elaboración de este material. Nuestro reconocimiento a todos ellos.

Especialistas

Mónica Inés Schulmaister

Miguel Ángel León Hernández

Comité didáctico de docentes

Ariadna Berenice García Cruz, Estado de México

Emilia Aldama Casias, Morelos

Hugo Ramírez Valencia, Morelos

Luis Gerardo Luna Soto, Guanajuato

Luz María Pérez Arredondo, Guanajuato

María del Rocío Ruiz Talavera, Jalisco

Mario Reyna González, Querétaro

Mateo Segundo Moreno, Estado de México

Pascual Flores Alberto, Estado de México

Rosa Isela Arciga Tapia, Querétaro

Coordinación INEE

Annette Santos del Real

Alejandra Delgado Santoveña

Hidalía Sánchez Pérez

María Minerva Nava Amaya

Rosa Mónica García Orozco

A los alumnos y alumnas del ciclo escolar 2007-2008 y a la directora profesora Remedios Soriano Pardo de la *Escuela Secundaria Oficial Número 633, Profesor Manuel Hinojosa Giles*, en Nezahualcóyotl, Estado de México, y al profesor Ángel Villaraus



Villegas por las facilidades brindadas en el piloteo de algunas de las actividades de este material. Al profesor Fortino Escareño Soberanes por su lectura crítica y sus valiosos comentarios.

