

# Física General

Ignacio Martín Bragado  
imartin@ele.uva.es

12 de febrero de 2003



# Índice general

<b>Índice General</b>	<b>3</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>11</b>
<b>I Sobre este libro</b>	<b>13</b>
1. Distribución de este documento	15
<b>II Teoría, esquemas para la resolución de problemas y ejercicios resueltos</b>	<b>17</b>
2. Introducción	19
2.1. Signos empleados . . . . .	19
3. Esquema	21
4. Introducción al cálculo vectorial	23
4.1. Magnitudes escalares y vectoriales . . . . .	23
4.1.1. Representación matemática . . . . .	23
4.2. Operaciones vectoriales unarias . . . . .	23
4.2.1. Operaciones unarias diferenciales . . . . .	24
4.3. Operaciones vectoriales binarias . . . . .	24
4.3.1. Equivalencia . . . . .	24
4.3.2. Suma y resta . . . . .	24
4.3.3. Producto escalar . . . . .	25
4.3.4. Producto vectorial . . . . .	25
4.3.5. Producto mixto . . . . .	27
5. Cinemática	29
5.1. Introducción . . . . .	29
5.2. Velocidad . . . . .	29
5.3. Aceleración . . . . .	30
5.4. Componentes intrínsecas de la aceleración . . . . .	30
5.5. Clasificación de movimientos . . . . .	31
5.6. Composición de movimientos . . . . .	31
5.6.1. Translación pura . . . . .	31
5.6.2. Rotación pura . . . . .	32
5.7. Resolución de problemas . . . . .	33
5.7.1. Tiro parabólico . . . . .	33
5.7.2. Componentes intrínsecas . . . . .	33
5.7.3. Cálculo de trayectorias . . . . .	34

<b>6. Dinámica</b>	<b>35</b>
6.1. Introducción . . . . .	35
6.2. Leyes de Newton . . . . .	35
6.2.1. Ley de la inercia . . . . .	35
6.2.2. Segunda ley de Newton . . . . .	35
6.2.3. Tercera ley de Newton . . . . .	36
6.3. Fuerzas especiales que aparecen en problemas . . . . .	36
6.3.1. Normal . . . . .	36
6.3.2. Rozamiento . . . . .	37
6.4. El momento lineal . . . . .	38
6.4.1. Conservación del momento lineal . . . . .	38
6.5. Conservación de la energía . . . . .	39
6.6. Resolución de problemas . . . . .	39
6.6.1. Planos inclinados . . . . .	39
6.6.2. Curvas . . . . .	41
6.6.3. Casos límite . . . . .	42
<b>7. Consideraciones energéticas</b>	<b>45</b>
7.1. Introducción . . . . .	45
7.2. Trabajo . . . . .	45
7.2.1. Trabajo conservativo . . . . .	46
7.3. Potencia . . . . .	46
7.4. Energía . . . . .	47
7.5. Conceptos previos . . . . .	47
7.5.1. Energía cinética . . . . .	47
7.5.2. Potencial . . . . .	49
7.6. Conservación de la energía . . . . .	51
7.6.1. Rozamiento . . . . .	51
7.7. Impulso . . . . .	53
7.8. Gradiente . . . . .	53
<b>8. Dinámica de un sistema de partículas</b>	<b>55</b>
8.1. Conceptos y definiciones primarias . . . . .	55
8.2. Centro de masas . . . . .	55
8.2.1. Teorema de Pappus . . . . .	55
8.3. Dinámica del centro de masas . . . . .	56
8.3.1. Velocidad . . . . .	56
8.3.2. Aceleración . . . . .	56
8.3.3. Momento lineal . . . . .	56
8.3.4. Energía . . . . .	56
8.4. Aplicaciones . . . . .	57
8.4.1. Sistema de referencia del centro de masas . . . . .	57
8.4.2. Problemas de dos cuerpos . . . . .	58
8.4.3. Colisiones . . . . .	58
<b>9. Dinámica de la rotación</b>	<b>59</b>
9.1. Introducción . . . . .	59
9.1.1. Sólido rígido . . . . .	59
9.1.2. Analogías . . . . .	59
9.2. Momento de una fuerza . . . . .	59
9.3. Momento angular . . . . .	60
9.4. Momento de inercia . . . . .	61
9.4.1. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos . . . . .	61
9.4.2. Teorema de las figuras planas o de los ejes perpendiculares. . . . .	62

9.4.3. Relación del momento de inercia respecto a un punto con los tres ejes . . . . .	62
9.5. Ecuación de la dinámica de rotación . . . . .	62
9.5.1. Conservación del momento angular . . . . .	63
9.6. Energía de rotación . . . . .	63
9.7. Algunos problemas típicos de rotación . . . . .	63
9.7.1. Cuerpos rodantes . . . . .	64
9.7.2. Poleas . . . . .	64
9.7.3. Estática y equilibrios . . . . .	64
9.7.4. Cálculo de la aceleración angular de un cuerpo . . . . .	65
9.7.5. Cálculo de momentos de inercia . . . . .	65
9.7.6. Variación de la forma del cuerpo que gira . . . . .	65
9.7.7. Conservación de la energía para cuerpos rodantes . . . . .	66
<b>10. Conceptos generales de campos</b> . . . . .	<b>67</b>
10.1. Introducción . . . . .	67
10.2. Definición . . . . .	67
10.3. Formalismo matemático . . . . .	67
10.4. Flujo de un campo vectorial . . . . .	68
10.5. Gradiente de un campo . . . . .	68
10.6. Ley de Gauss . . . . .	68
10.7. Circulación . . . . .	69
10.8. Representación gráfica de los campos . . . . .	69
10.8.1. Campo escalar . . . . .	69
10.8.2. Campo vectorial . . . . .	70
<b>11. Gravitación y campo gravitatorio</b> . . . . .	<b>71</b>
11.1. Introducción . . . . .	71
11.2. Ley de la gravitación universal . . . . .	71
11.2.1. Enunciado . . . . .	71
11.2.2. Las leyes de Kepler . . . . .	72
11.2.3. Principio de superposición . . . . .	72
11.3. Campo gravitatorio . . . . .	72
11.3.1. Concepto . . . . .	72
11.3.2. Entidad matemática . . . . .	73
11.4. Energía potencial gravitatoria . . . . .	73
11.5. Problemas concretos . . . . .	75
11.5.1. Cálculo de la fuerza gravitatoria ejercida por un sistema de partículas . . . . .	75
11.5.2. Cálculo de la fuerza gravitatoria ejercida por un cuerpo continuo . . . . .	75
11.5.3. Problemas de satélites . . . . .	75
11.5.4. Velocidad de escape . . . . .	75
11.5.5. Medida de la gravedad en la superficie de un planeta . . . . .	76
11.5.6. Cálculo de la atracción gravitatoria de algunos sólidos simples . . . . .	76
<b>12. Campo y potencial eléctrico</b> . . . . .	<b>79</b>
12.1. Preliminar . . . . .	79
12.2. Ley de Coulomb . . . . .	79
12.2.1. Principio de superposición . . . . .	79
12.3. Campo eléctrico . . . . .	79
12.4. Ley de Gauss . . . . .	80
12.5. Potencial y energía eléctrica . . . . .	80
12.5.1. Algunos casos particulares de potencial eléctrico . . . . .	81
12.6. Condensadores . . . . .	81

12.6.1. Asociación de condensadores . . . . .	81
<b>13. Movimiento armónico simple</b>	<b>83</b>
13.1. Introducción . . . . .	83
13.2. Dinámica del sistema . . . . .	83
13.2.1. Ecuación del movimiento . . . . .	83
13.2.2. Periodicidad de la ecuación . . . . .	84
13.2.3. Velocidad . . . . .	84
13.2.4. Aceleración . . . . .	85
13.3. Energía . . . . .	85
13.3.1. Energía cinética . . . . .	85
13.3.2. Energía potencial . . . . .	85
13.3.3. Energía mecánica . . . . .	86
13.4. El péndulo simple . . . . .	86
<b>14. Ondas</b>	<b>89</b>
14.1. Introducción . . . . .	89
14.1.1. Tipos de ondas . . . . .	89
14.2. Ecuación general de una onda . . . . .	90
14.3. Ecuación de una onda armónica . . . . .	90
14.3.1. Periodo y frecuencia . . . . .	91
14.3.2. Longitud de onda y número de ondas . . . . .	91
14.4. Consideraciones energéticas de las ondas . . . . .	93
14.4.1. Energía . . . . .	93
14.4.2. Potencia . . . . .	94
14.4.3. Intensidad . . . . .	94
<b>15. Fenómenos ondulatorios</b>	<b>95</b>
15.1. Introducción . . . . .	95
15.2. Principio de Huygens . . . . .	95
15.3. Interferencia entre ondas . . . . .	95
15.3.1. Ondas coherentes: Interferencias constructivas y destructivas . . . . .	96
15.3.2. Ondas estacionarias: Propagación en direcciones opuestas . . . . .	99
15.4. Otras propiedades de las ondas . . . . .	101
15.4.1. Difracción . . . . .	101
15.4.2. Polarización . . . . .	101
15.4.3. Otras propiedades . . . . .	102
15.5. Reflexión y refracción de la luz . . . . .	102
15.5.1. Reflexión . . . . .	102
15.5.2. Refracción . . . . .	103
15.5.3. Principio de Fermat . . . . .	105
<b>16. Electromagnetismo</b>	<b>107</b>
16.1. Introducción . . . . .	107
16.2. Fuerza de Lorentz . . . . .	107
16.2.1. Fuerza sobre una corriente eléctrica . . . . .	108
16.3. Campo magnético debido a una carga en movimiento . . . . .	108
16.3.1. Campo magnético producido por una corriente eléctrica . . . . .	109
16.4. Ley de Ampère . . . . .	109
16.5. Resolución de problemas típicos . . . . .	110
16.5.1. Partícula sometida a un campo magnético constante y uniforme . . . . .	110
16.5.2. Fuerza magnética experimentada por un conductor recto y perpendicular al campo magnético . . . . .	110
16.5.3. Campo magnético creado por un conductor recto e infinito . . . . .	110

16.5.4. Campo producido por una espira en su eje . . . . .	111
16.5.5. Campo magnético en el interior de un solenoide infinito . . . . .	112
16.5.6. Fuerzas entre corrientes paralelas . . . . .	113
<b>17.Inducción electromagnética</b>	<b>115</b>
17.1. Introducción . . . . .	115
17.2. Ley de Faraday-Henry . . . . .	115
17.2.1. Ley de Lenz . . . . .	116
17.3. Fuerza electromotriz . . . . .	116
17.4. Autoinducción . . . . .	116
17.4.1. Inducción mutua . . . . .	117
17.5. Energía magnética . . . . .	117
17.6. Problemas y aplicaciones de inducción electromagnética . . . . .	118
17.6.1. Generadores . . . . .	118
17.6.2. Transformadores . . . . .	119
17.6.3. Autoinducción de un solenoide . . . . .	120
<b>18.La naturaleza de la luz. Dualidad onda corpúsculo de la materia</b>	<b>121</b>
18.1. Introducción histórica . . . . .	121
18.2. El cuerpo negro . . . . .	122
18.3. El efecto fotoeléctrico . . . . .	123
18.3.1. Descripción del problema . . . . .	123
18.3.2. Solución . . . . .	124
18.4. Efecto Compton . . . . .	125
18.5. Naturaleza ondulatoria de la materia . . . . .	125
18.6. Resumen: Dualidad onda-corpúsculo de la luz y la materia . . . . .	126
<b>19.Fundamentos de Física Nuclear</b>	<b>129</b>
19.1. Introducción . . . . .	129
19.2. El núcleo atómico . . . . .	129
19.2.1. Algunas definiciones . . . . .	129
19.2.2. Características . . . . .	130
19.3. Radiactividad . . . . .	130
19.3.1. Radiactividad $\alpha$ . . . . .	131
19.3.2. Radiactividad $\beta$ . . . . .	131
19.3.3. Radiactividad $\gamma$ . . . . .	131
19.4. Características de los procesos radiactivos . . . . .	132
19.4.1. Cinética de las reacciones nucleares: Ley de desintegración . . . . .	132
19.4.2. Las series radiactivas . . . . .	132
19.5. Reacciones nucleares . . . . .	134
19.5.1. Fisión nuclear . . . . .	134
19.5.2. Fusión nuclear . . . . .	135
<b>III Prácticas de laboratorio</b>	<b>137</b>
<b>20.Cambios de fase y descenso ebulloscópico</b>	<b>139</b>
20.1. Material experimental . . . . .	139
20.2. Introducción teórica . . . . .	139
20.3. Realización práctica . . . . .	140
20.3.1. Parte 1: Cambios de fase . . . . .	140
20.3.2. Parte 2: Descenso ebulloscópico . . . . .	140
20.4. Precauciones a tener con la práctica . . . . .	140

<b>21. Carga y descarga de un condensador.</b>	<b>143</b>
21.1. Material experimental . . . . .	143
21.2. Introducción teórica . . . . .	143
21.3. Realización de la práctica . . . . .	145
21.4. Apéndice: Resolución de la ecuación diferencial . . . . .	145
<b>22. Principio de Arquímedes: Determinación de la densidad</b>	<b>147</b>
22.1. Material experimental . . . . .	147
22.2. Introducción teórica . . . . .	147
22.2.1. Medición de la densidad . . . . .	147
22.3. Realización práctica . . . . .	148
<b>23. Experiencia de Faraday. Inducción.</b>	<b>149</b>
23.1. Material experimental . . . . .	149
23.2. Introducción histórica y teórica. . . . .	149
23.3. Realización práctica. . . . .	149
<b>24. Iniciación a la hidráulica: Diversas experiencias.</b>	<b>151</b>
24.1. Material experimental . . . . .	151
24.2. Introducción teórica . . . . .	151
24.3. Realización práctica . . . . .	151
24.4. Objetivo de la práctica . . . . .	152
<b>25. Comprobación de la ley de Ohm.</b>	<b>155</b>
25.1. Material experimental . . . . .	155
25.2. Introducción teórica . . . . .	155
25.3. Realización práctica . . . . .	155
25.4. Precauciones . . . . .	156
<b>26. Solución al problema planteado en el método científico</b>	<b>157</b>
26.1. Advertencia . . . . .	157
26.2. Solución . . . . .	157
<b>27. El método científico</b>	<b>159</b>
27.1. Material experimental . . . . .	159
27.2. Introducción teórica . . . . .	159
27.3. Realización práctica. . . . .	160
<b>28. Estudio de un muelle.</b>	<b>161</b>
28.1. Material experimental . . . . .	161
28.2. Introducción teórica . . . . .	161
28.3. Realización práctica. . . . .	162
<b>29. Experiencia de Oersted.</b>	<b>165</b>
29.1. Material experimental . . . . .	165
29.2. Introducción histórica . . . . .	165
29.3. Realización práctica . . . . .	165
<b>30. Comprobación de la ley de Ohm</b>	<b>167</b>
30.1. Material experimental . . . . .	167
30.2. Introducción teórica . . . . .	167
30.3. Realización práctica . . . . .	167



<b>31. Uso elemental de un osciloscopio</b>	<b>169</b>
31.1. Material experimental . . . . .	169
31.2. Introducción teórica . . . . .	169
31.2.1. El osciloscopio . . . . .	169
31.2.2. El generador de onda . . . . .	170
31.3. Realización práctica . . . . .	170
31.4. Precauciones . . . . .	171
<b>32. Estudio de un péndulo.</b>	<b>173</b>
32.1. Material experimental . . . . .	173
32.2. Introducción teórica . . . . .	173
32.3. Realización práctica . . . . .	174
<b>33. Cálculo de la aceleración de un sistema mediante dinámica y cinemática</b>	<b>175</b>
33.1. Material experimental . . . . .	175
33.2. Introducción teórica . . . . .	175
33.3. Realización práctica . . . . .	176
<b>34. Medición de la humedad mediante un psicrómetro</b>	<b>177</b>
34.1. Material experimental . . . . .	177
34.2. Introducción teórica . . . . .	177
34.3. Realización práctica . . . . .	177
<b>35. Resistencias en serie y en paralelo.</b>	<b>179</b>
35.1. Material experimental . . . . .	179
35.2. Introducción teórica . . . . .	179
35.2.1. Acople en serie. . . . .	179
35.2.2. Acople en paralelo . . . . .	180
35.3. Realización de la práctica . . . . .	181
<b>IV Apéndices</b>	<b>183</b>
<b>A. Esquemas y formulario</b>	<b>185</b>
A.1. Cálculo vectorial . . . . .	185
A.2. Cinemática . . . . .	185
A.2.1. Movimiento circular . . . . .	186
A.3. Dinámica . . . . .	186
A.3.1. Translación . . . . .	186
A.3.2. Rotación . . . . .	186
A.4. Trabajo y Energía . . . . .	187
A.5. Movimiento armónico simple . . . . .	187
A.6. Campo y potencial eléctrico y gravitatorio . . . . .	188
A.7. Circuitos de corriente continua . . . . .	189
A.8. Electromagnetismo . . . . .	189
<b>B. Movimiento de un cuerpo en el campo gravitatorio bajo el rozamiento con el aire</b>	<b>191</b>
B.1. Introducción . . . . .	191
B.2. Planteamiento de la ley de Newton . . . . .	191
B.3. Interpretación de la ecuación de Newton . . . . .	191
B.4. Conclusión . . . . .	192

ÍNDICE GENERAL

<b>C. Tablas y fórmulas útiles</b>	<b>193</b>
C.1. Introducción . . . . .	193
C.2. Cálculo complejo . . . . .	193
C.3. Cálculo vectorial . . . . .	193
C.4. Funciones elementales . . . . .	193
C.4.1. Trigonómicas . . . . .	193
C.4.2. Logarítmicas y exponenciales . . . . .	194
C.5. Derivación . . . . .	194
C.5.1. Propiedades generales . . . . .	194
C.5.2. Tabla de derivadas . . . . .	194
C.6. Integración . . . . .	194
C.6.1. Definición y propiedades . . . . .	194
C.6.2. Tabla de integrales . . . . .	195
<b>D. Agradecimientos</b>	<b>197</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>198</b>

# Índice de figuras

4.1. El ángulo entre dos vectores y sus proyecciones. . . . .	27
5.1. Relación vectorial entre unos y otros sistemas. El conductor verá la piedra que cae como $\vec{r}_{cp} = \vec{r}_c - \vec{r}_p$ . . . . .	32
6.1. Descomposición de las fuerzas en un plano inclinado. . . . .	39
6.2. ¿Cuál será la aceleración de este sistema? . . . . .	40
6.3. Distintas situaciones ante una curva. . . . .	42
6.4. ¿Desde qué altura podrá una masa realizar un bucle?. . . . .	43
7.1. ¿A qué velocidad llegará al final?. . . . .	52
9.1. . . . .	62
11.1. Campo $\vec{g}$ generado por una varilla delgada. . . . .	76
12.1. Asociación de condensadores en serie y en paralelo. . . . .	81
13.1. Descomposición de las fuerzas en un péndulo. . . . .	87
14.1. Periodo de una onda armónica. . . . .	92
14.2. Longitud de onda de una onda armónica. . . . .	93
15.1. Esquema de un fenómeno de interferencias. . . . .	96
15.2. Representación de una interferencia (casi) constructiva. . . . .	97
15.3. Representación de una interferencia destructiva. . . . .	98
15.4. Experiencia de Young. . . . .	99
15.5. Reflexión de una onda. . . . .	103
15.6. Explicación según el principio de Huygens de la reflexión. . . . .	103
15.7. Refracción de una onda. . . . .	104
15.8. Explicación según el principio de Huygens de la refracción. . . . .	104
16.1. Geometría para calcular el campo magnético en el eje de una espira. . . . .	111
16.2. Trayectoria para un solenoide infinito. . . . .	112
17.1. Circuito con una resistencia y una autoinducción. . . . .	117
17.2. Corriente alterna. . . . .	119
17.3. Esquema simplificado de un transformador. . . . .	120
18.1. Dibujo de un “cuerpo negro”. . . . .	122
18.2. Distribución espectral de la radiación emitida por un cuerpo negro a distintas temperaturas. . . . .	122
18.3. Dispositivo simplificado para la medición del efecto fotoeléctrico. . . . .	124

## ÍNDICE DE FIGURAS

19.1. Serie radiactiva del uranio. . . . .	133
21.1. Circuito con condensador. . . . .	144
21.2. Carga de un condensador. . . . .	144
24.1. Frasco de Mariotte. . . . .	152
25.1. Circuito a realizar. . . . .	156
28.1. Medida de la elongación del muelle al poner el peso. . . . .	162
30.1. . . . .	168
31.1. Mandos fundamentales de un osciloscopio. . . . .	170
33.1. Sistema de poleas. . . . .	175
35.1. Resistencias en serie. . . . .	179
35.2. Resistencias en paralelo. . . . .	180

Parte I

Sobre este libro



# Capítulo 1

## Distribución de este documento

Este libro ha sido escrito íntegramente por Ignacio Martín Bragado y todo su material es original, incluyendo los gráficos que contiene, excepto los iconos de ampliación, recuerda, nota, problema y resolución que han sido tomados del proyecto GNOME (distribuido con licencia GPL) y modificados. Ha sido compuesto utilizando L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X sobre un ordenador AMD K6 utilizando un sistema operativo GNU/Linux.

Se permite la reproducción de los contenidos de este libro siempre y cuando quede absolutamente explícita la procedencia de este documento y su autor y se conserve esta leyenda.

No se permite la modificación de ningún tópico de este libro. Si desea realizar alguna corrección hágalo poniéndose en contacto con el autor en la dirección [imartin@ele.uva.es](mailto:imartin@ele.uva.es)

La dirección web original de este material es:

<http://www.ele.uva.es/~imartin/libro/index.html>

## CAPÍTULO 1. DISTRIBUCIÓN DE ESTE DOCUMENTO



## Parte II

# Teoría, esquemas para la resolución de problemas y ejercicios resueltos



# Capítulo 2

## Introducción

Este esquema pretende ser una pequeña guía para resolver los problemas de física evitando las confusiones más usuales. No obstante *no existe un sistema que resuelva los problemas de física*, sino que, cada uno, presenta una faceta que hemos de descubrir haciendo uso de nuestra razón.

Este esquema no pretende ser un chuletario de los distintos tipos de problemas y como solucionarlos, sino sólo una iniciación básica en el “arte de resolver” problemas de física.

El planteamiento de las ecuaciones que intervienen en los procesos físicos es, a nivel general, algo complicado, puesto que son muchos los fenómenos que pueden presentarse. En esta guía iremos desgajando los distintos procesos que pueden darse y las ecuaciones involucradas.

La creación de este esquema ha sido un proceso complicado. Inicialmente constituyó unos breves apuntes que se impartían para un curso del (extinto o en vías de extinción) COU, pero se fueron añadiendo cosas y mezclando parte de los contenidos básicos de dicho curso con algunas consideraciones de índole más práctica fruto de la experiencia en el aula.

Actualmente el nivel de este libro hace que pueda ser utilizado para la asignatura de Física de 1º de las carreras de ciencias. Para 2º de Bachillerato quizás su nivel exceda un poco en algunos temas y no contenga otros. En cualquier caso la concepción final de este libro es como Curso de física generalz no como un libro de texto de ningún curso específico de Facultad ni Instituto.

### 2.1. Signos empleados

◊ Cuando aparezca algún comentario de interés, si bien no sea importante para el desarrollo del tema, se tratará de esta manera.

◦ Las partes del desarrollo que excedan un poco los objetivos de este libro, pero no por ello dejen de ser interesantes o importantes aparecerán de esta manera.

▷ Aquellos párrafos que sean muy importantes o que sea conveniente recordar, ya que pueden constituir algún dato esencial o un resumen de todo lo dicho se indicarán de esta forma.

$\mathcal{P}$  El enunciado de algunos problemas que sean posteriormente resueltos.

Nota



Ampliación



Recuerda



Problema



## CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN

$\mathcal{R}$  La resolución del problema con los cálculos y explicaciones pertinentes.

Resolución



# Capítulo 3

## Esquema

Para plantear un problema de física se pueden seguir los siguientes pasos:

**Hacer un dibujo explicativo.** Esto supone haber leído antes bien el enunciado comprendiendo exactamente qué datos se ofrecen y qué resultados se piden.

**Elegir un sistema de coordenadas adecuado,** que será aquel que nos facilite la posterior resolución del problema. Hay que ser *coherente* con el sistema de coordenadas que se elija, refiriendo posteriormente a él todas las cantidades *con sus correspondientes signos*.

La elección de un sistema de coordenadas no siempre es única, pero en cualquier caso hay que hacer una que otorgue sencillez al problema, por coincidir, generalmente, con algún punto particular que pueda dar posteriormente más simplicidad al planteamiento o a los cálculos.

**Comprobar las fuerzas que intervienen en el problema.** Suelen ser siempre menos de las que parecen. Sobre todo no hay que olvidar la fuerza de gravedad, de rozamiento, posibles tensiones, fuerzas elásticas<sup>1</sup> así como sus reacciones.

**Considerar las proyecciones sobre los ejes.** Una vez comprobadas las fuerzas que intervienen en el problema habrá que *proyectarlas* sobre los ejes del sistema de coordenadas, para poder así darlas un tratamiento vectorial. Esta proyección es más sencilla de lo que suele parecer. Basta recordar las relaciones  $\sin \alpha$  y  $\cos \alpha$ .

**Plantear las ecuaciones para cada eje.** Pueden ser ecuaciones dinámicas del tipo  $\sum F = ma$  o cinemáticas. Hay que ser conscientes de que la “única fórmula” que se suele emplear es  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ , pero que, como ésta es una ecuación vectorial, se descompone en tantas ecuaciones como dimensiones tenga el movimiento, o lo que es lo mismo, en tantas proyecciones como ejes tenga nuestro sistema de coordenadas elegido.

Como en pasos anteriores ya hemos considerado las fuerzas que intervienen y sus proyecciones este paso no debe ser sino un recuento cuidadoso de las fuerzas que aparecen en un determinado eje o dirección ligándolas con la ecuación correspondiente.

Este paso es estudiado más ampliamente en los capítulos siguientes.

**Relacionar las ecuaciones planteadas** con los datos que tenemos y los que queremos saber. Es decir, encontrar el sistema matemático que nos logrará encontrar la solución.

---

<sup>1</sup>Cuando hay muelles.

**Resolver los sistemas matemáticos involucrados.** Éste es un mero ejercicio matemático en el cual buscaremos la solución al problema.

**Interpretar la solución.** La interpretación de la solución consiste en mostrarse *críticos* hacia los resultados logrados, planteándose si estos son coherentes con la intuición, con lo que esperábamos que saliera, si responden bien al criterio de signos y sistema de coordenadas elegido, si tienen un orden de magnitud<sup>2</sup> apropiado y están en las unidades oportunas, así como todo lo que nos parezca oportuno indagar en nuestra propia solución.

En caso de que el resultado “parezca correcto” lo cual, lamentablemente, no quiere decir que lo sea, podremos dar por concluido el problema. En caso contrario es conveniente volver a repasar todo el ejercicio, o la parte de la cual nos mostremos insegura, para ver si detectamos alguna inconsistencia.

---

<sup>2</sup>Es decir, si no son demasiado grandes o pequeños.

## Capítulo 4

# Introducción al cálculo vectorial

### 4.1. Magnitudes escalares y vectoriales

Llamamos magnitud escalar, o simplemente escalar, a toda magnitud que puede expresarse simplemente con un único número. Por ejemplo, el peso o la altura de una persona es una magnitud escalar.

Se denomina magnitud vectorial o vector a aquella medida para la cual necesitamos dar “algo más que un sólo número”. Por ejemplo, para saber la velocidad del viento además de su intensidad, es decir, tantos kilómetros por hora, se requiere conocer su dirección y sentido, y así saber si viene del norte hacia el sur, etc. . . Este tipo de magnitudes se denominan vectores.

#### 4.1.1. Representación matemática

Matemáticamente un escalar se representa con un único número<sup>1</sup> y un vector con una serie de coordenadas, tantas como dimensiones tenga el espacio en el que se representa.

Así un vector  $\vec{v}$  se representa como

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k},$$

siendo  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  las componentes del vector, es decir, sus proyecciones sobre los ejes x,y y z. A su vez  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes x,y y z respectivamente.

### 4.2. Operaciones vectoriales unarias

Se llama módulo de un vector a lo que éste “mide”. Se calcula como

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (4.1)$$

Proyección de un vector sobre un eje es “la sombra” de dicho vector sobre el eje si la “luz que proyecta dicha sombra” cayera justo perpendicularmente. Así las proyecciones de un vector  $\vec{v}$  sobre los ejes x,y y z serán  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  respectivamente.

---

<sup>1</sup>Que normalmente pertenece al cuerpo de los números reales

El inverso de un vector es dicho vector con sus proyecciones cambiadas de signo. La suma de un vector y su inverso da siempre el vector nulo.

$$-\vec{v} = (-v_x, -v_y, -v_z).$$

Vector nulo es aquel vector cuyo módulo es cero. Este vector es especial, pues carece de dirección y sentido.

$$\vec{0} = (0, 0, 0).$$

Vector unitario de otro dado  $\vec{v}$  es aquél que, teniendo la misma dirección y sentido que el que se da, presenta un módulo igual a 1, se representa como  $\hat{v}$ . Así

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

### 4.2.1. Operaciones unarias diferenciales

Para derivar un vector  $\vec{v}$  respecto a un parámetro  $t$  se deriva componente a componente.

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \left(\frac{d}{dt}v_x, \frac{d}{dt}v_y, \frac{d}{dt}v_z\right).$$

Para integrar un vector  $\vec{v}$  respecto a un parámetro  $t$  se integra componente a componente.

$$\int \vec{v} dt = \left(\int v_x dt, \int v_y dt, \int v_z dt\right).$$

## 4.3. Operaciones vectoriales binarias

Las operaciones binarias necesitan dos vectores para poder operar sobre ellos. Las más conocidas son:

### 4.3.1. Equivalencia

Dos vectores son iguales si sus coordenadas son iguales. Es decir

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

### 4.3.2. Suma y resta

La suma de varios vectores también se denomina resultante de dichos vectores. Para sumar un vector  $\vec{a}$  a otro  $\vec{b}$  se suma componente a componente, es decir

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Para restar un vector  $\vec{a}$  de otro  $\vec{b}$  se suma el inverso del vector  $\vec{b}$ , es decir:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

La resta de dos vectores iguales son es el vector cero.

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}.$$



### 4.3.3. Producto escalar

El producto escalar de dos vectores da como resultado un escalar, como indica su nombre. Para multiplicar así escalarmente un vector  $\vec{a}$  por otro  $\vec{b}$  se opera

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\theta). \quad (4.2)$$

Siendo  $\theta$  el ángulo que forman los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  entre ellos.

El producto escalar de dos vectores, dadas sus componentes, se puede realizar también sabiendo que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4.3)$$

Observando las relaciones que marcan (4.2) y (4.3) y teniendo presente además la relación del módulo de un vector expuesta en (4.1) se pueden deducir las siguientes propiedades del producto escalar:

- Es nulo si alguno de los dos vectores es el vector nulo.
- Es nulo si los dos vectores son perpendiculares.
- Para proyectar un vector  $\vec{a}$  sobre un eje marcado por un vector  $\vec{b}$  basta con realizar la operación

$$proj_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

- Dados dos vectores se puede calcular el ángulo que forma entre ellos usando la relación

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

### 4.3.4. Producto vectorial

#### Introducción

El producto vectorial, representado como  $\vec{a} \times \vec{b}$  o bien como  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ , tiene las siguientes propiedades:

- Es perpendicular tanto a  $\vec{a}$  como a  $\vec{b}$ . Es decir,  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{a}$  y  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{b}$ .
- Su módulo es  $ab \sin \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo que forman entre ellos. También,  $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab \sin \alpha$ .
- Su sentido está dado por la regla del sacacorchos, entendiendo que hay que “mover el sacacorchos” desde el primer vector al segundo.

#### Cálculo de las componentes de $\vec{a} \wedge \vec{b}$

Demostraremos en 4.3.4, quizás no muy rigurosamente, pero si ganando a cambio mucho en simplicidad, como se puede llegar a este resultado. En cualquier caso, para hallar cuales son las componentes del vector producto vectorial basta con saber que si  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$  y  $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$ , entonces:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} \quad (4.4)$$

**Expresión analítica del producto vectorial**

Ampliación



◦ Tomando  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$  hemos exigido que tanto  $\vec{a} \perp \vec{c}$  como que  $\vec{b} \perp \vec{c}$ . Es decir

$$\begin{aligned} a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z &= 0 \\ b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Además parece lógico suponer que este nuevo vector deberá ser “independiente” del sistema de coordenadas que elijamos, con lo cual vamos a tomar uno en el que el vector  $\vec{a}$  coincida con el eje  $y$  y el  $\vec{b}$  se encuentre contenido en el plano  $xy$ , formando entre ellos un ángulo  $\theta$ .

Despejando  $c_x$  en una de las ecuaciones (4.5) tenemos que

$$c_x = \frac{-a_y c_y - a_z c_z}{a_x} \tag{4.6}$$

y, sustituyendo en la otra se consigue que

$$c_y = \frac{-b_z c_z a_x + b_x a_y c_y + b_x a_z c_z}{b_y a_x} \tag{4.7}$$

Operando un poco en la expresión (4.7) de tal forma que podamos expresar  $c_z$  en función de  $c_y$  tendremos que

$$c_z = \frac{c_y (b_y a_x - b_x a_y)}{b_x a_z - b_z a_x} \tag{4.8}$$

y ahora no queda más que ver el significado de esta expresión para lograr el resultado final.

De las relaciones (4.5) tenemos que  $\vec{c}$  debe ser perpendicular tanto a  $\vec{a}$  como a  $\vec{b}$  y, por tanto, en el caso concreto que hemos elegido,  $\vec{c}$  debe estar en el eje  $z$ , es decir,  $\vec{c} = \lambda \hat{k}$ . Ahora bien, precisamente por esta misma razón  $c_y = 0$  y, según la relación (4.8)  $c_z$  debería ser también cero, cosa que no tiene sentido. Una posible solución sería hacer ver que la relación no es válida porque estamos dividiendo por cero, y, ya que  $c_y$  también es cero, igualar ambos términos. Así tendríamos  $c_y = b_x a_z - b_z a_x$  y podríamos simplificar  $c_y$  con el denominador<sup>2</sup>. Una vez extraído  $c_y$  se tendría también que  $c_z = b_y a_x - b_x a_y$ , y sólo quedaría hallar  $c_x$  usando nuevamente las ecuaciones (4.5). Quedaría, no en sí demostrado, pero si razonado, el por qué de expresar el producto vectorial de la manera reseñada en (4.4).

**Cálculo de áreas con el producto vectorial**

Antes de nada: ¿cómo es posible que el producto vectorial, que da como resultado un vector, sea reutilizable para calcular un área?. Responder a esta pregunta es sencillo si, para ello, tenemos en cuenta el módulo del producto vectorial, que será un escalar.

Sabemos ya que  $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab \sin \phi$  donde  $\phi$  representa el ángulo formado por ambos vectores. Esto puede verse en la figura 4.1. También nos damos cuenta que  $b \sin \phi$  puede interpretarse como la “altura” del triángulo formado por  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y la unión de sus dos extremos. Con lo que resulta que  $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$  resulta ser la base  $a$  por la altura  $b \sin \phi$ , y por tanto

$$\frac{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}{2} = A_{tria}$$

donde  $A_{tria}$  es el área del triángulo anteriormente dicho.

<sup>2</sup>Teniendo presente que esta simplificación está muy tomada por los pelos... ya que se trata de  $\frac{0}{0}$ .

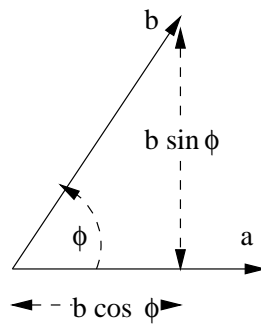


Figura 4.1: El ángulo entre dos vectores y sus proyecciones.

### 4.3.5. Producto mixto

A veces se define el producto mixto entre tres vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  como

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}). \quad (4.9)$$

Este producto, cuyo resultado puede verse que va a ser un escalar, se puede calcular también como el determinante de la matriz  $3 \times 3$  que se forma con las componentes de los vectores, es decir

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x b_y c_z + c_x a_y b_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x - a_y b_x c_z - a_x b_z c_y.$$

Una de las utilidades del producto mixto es que da el volumen de un paralelepípedo formado con las aristas de los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ , ya que si manejamos un poco (4.9) tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \\ &= a |\vec{b} \wedge \vec{c}| \cos \phi \\ &= abc \sin \psi \cos \phi. \end{aligned}$$

donde  $bc \sin \psi$  no es sino el área de la base del paralelogramo (ver sección 4.3.4) y  $a \cos \phi$  resulta ser la altura de dicho paralelepípedo. El área de la base por la altura nos da el volumen de este tipo de cuerpos geométricos.

◦ Sería un buen ejercicio para el lector intentar demostrar más rigurosamente estas últimas afirmaciones

Ampliación



## CAPÍTULO 4. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL

# Capítulo 5

## Cinemática

### 5.1. Introducción

Cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos, aunque sin interesarse por las causas que originan dicho movimiento. Un estudio de las causas que lo originan es lo que se conoce como dinámica.

Las magnitudes que define la cinemática son principalmente tres, la posición, la velocidad y la aceleración.

**Posición** es el lugar en que se encuentra el móvil en un cierto instante de tiempo  $t$ .

Suele representarse con el vector de posición  $\vec{r}$ . Dada la dependencia de este vector con el tiempo, es decir, si nos dan  $\vec{r}(t)$ , tenemos toda la información necesaria para los cálculos cinemáticos.

**Velocidad** es la variación de la posición con el tiempo. Nos indica si el móvil se mueve, es decir, si varía su posición a medida que varía el tiempo. La velocidad en física se corresponde al concepto intuitivo y cotidiano de velocidad.

**Aceleración** indica cuánto varía la velocidad al ir pasando el tiempo. El concepto de aceleración no es tan claro como el de velocidad, ya que la intervención de un criterio de signos puede hacer que interpretemos erróneamente cuándo un cuerpo se acelera ( $a > 0$ ) o cuándo se “decelera” ( $a < 0$ ). Por ejemplo, cuando lanzamos una piedra al aire y ésta cae es fácil ver que, según sube la piedra, su aceleración es negativa, pero no es tan sencillo constatar que cuando cae *su aceleración sigue siendo negativa* porque realmente su velocidad está disminuyendo, ya que hemos de considerar también el signo de esta velocidad.

### 5.2. Velocidad

Se define velocidad media como

$$v_m^{\vec{}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

tomando los incrementos entre los instantes inicial y final que se precisen.

No obstante, aunque la velocidad media es una magnitud útil, hay que destacar que en su cálculo se deja mucha información sin precisar. Así, aunque sepamos que la velocidad media de un móvil desde un instante 1 a otro 2 ha sido “tantos” metros por segundo, no sabremos si los ha hecho de forma constante, o si ha ido muy lento al principio y rápido al final o si... por eso se define una magnitud que exprese

la velocidad instantánea, es decir, la velocidad en cierto y determinado instante y que pueda calcularse como una velocidad media donde los intervalos sean tan pequeños que pueda decirse exactamente a qué velocidad se desplazaba el móvil en cada instante. Es fácil darse cuenta de que esta definición se logra tomando como velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

y por tanto, coincide con la definición de derivada respecto al tiempo. Así pues se define finalmente

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}.$$

De esta definición se obtienen algunas consecuencias:

- La dirección de  $\vec{v}$  va a ser siempre tangente a la trayectoria.
- El módulo de  $\vec{v}$  puede calcularse, además de operando sobre el vector  $\vec{v}$ , sabiendo que

$$|\vec{v}| = \frac{d}{dt} s(t)$$

siendo  $s(t)$  la distancia que el móvil ha recorrido sobre la trayectoria<sup>1</sup>.

### 5.3. Aceleración

Aceleración es la variación de la velocidad en la unidad de tiempo. Se puede definir una aceleración media entre dos instantes, inicial y final, como

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

y, de manera análoga a la velocidad, puede definirse una aceleración instantánea llevando estos instantes inicial y final muy cerca uno del otro, hasta tener así que la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}(t).$$

### 5.4. Componentes intrínsecas de la aceleración

Tomando el vector velocidad como un módulo por un vector unitarios, es decir, como

$$\vec{v} = |\vec{v}| \hat{v}$$

y derivando se tiene que, utilizando la regla del producto para las derivadas (apéndice C),

$$\vec{a} = \underbrace{\left( \frac{d}{dt} |\vec{v}| \right)}_{\text{tangencial}} \hat{v} + |\vec{v}| \underbrace{\frac{d}{dt} \hat{v}}_{\text{normal}}.$$

De estas dos componentes la primera se denomina aceleración tangencial porque, como se desprende de su propia definición, su dirección es la del vector unitario  $\hat{v}$  y es por tanto, tangente a la trayectoria. La otra componente es la aceleración normal.

<sup>1</sup>Intuitivamente, para un automóvil  $\vec{r}$  serían las coordenadas del coche vistas desde un sistema de referencia elegido, y  $s(t)$  sería la distancia recorrida por el automóvil que va marcando el cuentakilómetros.

De la aceleración tangencial diremos que su módulo es

$$|\vec{a}_t| = \frac{d}{dt} |\vec{v}| \quad (5.1)$$

y su dirección

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Esta  $\vec{a}_t$  se encarga de “medir” la variación de la velocidad sin importarle su dirección ni sentido, sino solo su módulo, es decir, su “intensidad”.

En cuanto a la aceleración normal, se puede demostrar que su módulo es

$$|\vec{a}_n| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}, \quad (5.2)$$

siendo  $R$  el radio de curvatura de la trayectoria, y que su dirección es siempre perpendicular a la trayectoria y hacia el interior de la “curva”.

## 5.5. Clasificación de movimientos

Los movimientos se pueden clasificar según las componentes intrínsecas de su aceleración.

1.  $a_t = 0$ 
  - a)  $a_n = 0$ . Movimiento rectilíneo a velocidad constante.
  - b)  $a_n = cte$ . Movimiento circular uniforme.
  - c)  $a_n \neq cte$ . Movimiento circular acelerado.
2.  $a_n = 0$ 
  - a)  $a_t = 0$ . Movimiento rectilíneo a velocidad constante.
  - b)  $a_t = cte$ . Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.
  - c)  $a_t \neq cte$ . Movimiento rectilíneo acelerado.
3.  $a_n \neq 0$  y  $a_t \neq 0$ . Movimiento curvilíneo.

## 5.6. Composición de movimientos

Los problemas de composición de movimientos tienen la dificultad de saber *respecto a que sistema estamos resolviendo* y por tanto determinar siempre las magnitudes respecto al sistema apropiado, bien el especificado por el problema, bien uno elegido adecuadamente. Es común en este tipo de problemas la presencia de más de un móvil y hay que ser muy cuidadoso para identificar correctamente que móviles se mueven y respecto a qué.

### 5.6.1. Translación pura

Sus relaciones, que pueden deducirse fácilmente de la suma vectorial y posterior derivación respecto al tiempo, son:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{r}_0 \\ \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_0 \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

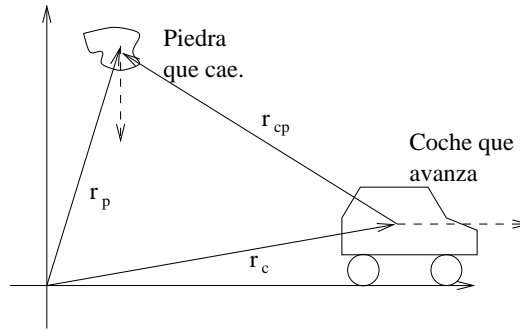


Figura 5.1: Relación vectorial entre unos y otros sistemas. El conductor verá la piedra que cae como  $\vec{r}_{cp} = \vec{r}_c - \vec{r}_p$ .

En donde intervienen el sistema “quieto” y el que se “mueve”, que es el “primado”. Las magnitudes con el subíndice 0 son las relativas entre los sistemas de referencia.

Una estrategia que suele resultar bastante inteligible de plantear es la siguiente:

1. Plantear un sistema fijo, respecto al cual conocemos, al menos, cómo es el movimiento de uno de los otros sistemas.
2. Dibujar entonces el vector de posición que buscamos (generalmente el de un sistema respecto al otro).
3. Relacionar estos vectores entre sí como sumas unos de los otros.

Se ha dibujado esto en la figura 5.1.

Una vez que conocemos el vector de posición se puede extraer el resto de información derivando o realizando la operación matemática necesaria.

### 5.6.2. Rotación pura

En este caso suponemos que un sistema gira respecto al otro con una velocidad angular constante  $\omega$ , pero manteniendo el origen en común.

La fórmula interesante es la que relaciona sus velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.4)$$

que presenta una dificultad un poco mayor de deducción, y por eso no se expresa aquí.

Las magnitudes que aparecen en esta fórmula son  $\vec{v}$ , que es la velocidad que el móvil presenta respecto al sistema “fijo”.  $\vec{v}'$ , la velocidad del móvil vista desde el sistema que rota, y  $\omega$  que es la velocidad angular con la cual el sistema móvil rota respecto al “fijo”, aunque siempre manteniendo en común su origen de coordenadas.

Por ejemplo, si hubiera una mosca posada en el eje de un tocadiscos y girando con él a una cierta velocidad angular  $\omega$ , que observara a un mosquito avanzar por el disco con una velocidad  $\vec{v}'$ , vista desde el punto de vista de la mosca, que está rotando, en este caso:

- $\vec{v}$  Sería la velocidad del mosquito vista desde el eje del tocadiscos, pero el observador fijo, es decir, sin girar.
- $\vec{v}'$  es la velocidad con la cual la mosca, que gira, ve al mosquito desplazarse por el disco.



- $\omega$  es la velocidad angular del disco.
- $\vec{r}$  es el vector de posición del mosquito, en el sistema fijo.

## 5.7. Resolución de problemas

### 5.7.1. Tiro parabólico

Se denomina tiro parabólico, en general, a aquellos movimientos que suceden de forma bidimensional sobre la superficie de la tierra.

Para este tipo de móviles el movimiento se descompone en sus componentes<sup>2</sup>  $x$  e  $y$ . El movimiento en  $x$  no sufre aceleración, y por tanto sus ecuaciones serán

$$\text{Eje } x \begin{cases} x &= x_0 + v_{0x}t \\ v_x &= v_{0x} \end{cases} \quad (5.5)$$

pero en cambio en el eje  $y$  se deja sentir la fuerza de la gravedad, supuesta constante<sup>3</sup> y por tanto sus ecuaciones serán

$$\text{Eje } y \begin{cases} y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y &= v_{0y} - gt \end{cases} \quad (5.6)$$

Algunas preguntas típicas del tiro parabólico son calcular el alcance y altura máxima. Estas preguntas se pueden contestar sabiendo que la altura máxima se alcanzará cuando  $v_y = 0$ . De esta condición se extrae el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima y sustituyendo en la ecuación de las  $y$  se obtiene la altura máxima. El alcance máximo se puede calcular razonando que, para cuando esto suceda, el móvil volverá estar al nivel del suelo y por tanto  $y = 0$ , sustituyendo se obtiene  $t$  y, sustituyendo éste en las  $x$  el resultado. Otras cantidades se pueden conseguir de manera similar.

◊  $x_0$  e  $y_0$  serán las coordenadas donde el móvil se encuentra en el instante  $t = 0$ , inicio del movimiento, y  $v_{x0}$  y  $v_{y0}$  la velocidad con la que se mueve en ese instante. Si nos han indicado que el móvil se movía con una velocidad  $v$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal se puede ver muy fácilmente que, entonces,  $v_{x0} = v \cos \alpha$  y  $v_{y0} = v \sin \alpha$ .

A su vez el significado de las variables  $x$  e  $y$  es el siguiente: éstas nos indican a que distancia horizontal ( $x$ ) y altura ( $y$ ) se encuentra el móvil en cada instante de tiempo  $t$ , considerando que estamos tomando como origen para medir estas distancias horizontales y alturas desde el sistema de coordenadas respecto al cual estemos tomando todos los demás datos.

◦ Se podría hacer un estudio más complejo incluyendo el rozamiento del aire. Para esto habrá que modificar las ecuaciones  $x$  e  $y$  a las nuevas ecuaciones deducidas en el apéndice B.

Nota



Ampliación



### 5.7.2. Componentes intrínsecas

$\mathcal{P}$  Sea un móvil cuyo vector de posición es

$$\vec{r} = (7 - 3t)\hat{i} + (5t - 5t^2)\hat{j} + 8\hat{k} \text{ (m)}.$$

Calcular su velocidad, aceleración y componentes intrínsecas de ésta, así como el radio de la trayectoria para  $t = 0,5s$ .

Problema



$\mathcal{R}$  Derivo para encontrar  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$ . Una primera vez

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = -3\hat{i} + (5 - 10t)\hat{j}\frac{m}{s}$$

y una segunda vez

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = -10\hat{j}\frac{m}{s^2}.$$

Ahora calculo el módulo de la velocidad:

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + (5 - 10t)^2} = \sqrt{34 - 100t + 100t^2}\frac{m}{s}$$

que, derivado respecto al tiempo nos dará el módulo de  $\vec{a}_t$ .

$$|\vec{a}_t| = \frac{d}{dt}\sqrt{34 - 100t + 100t^2} = \frac{100t - 50}{\sqrt{34 - 100t + 100t^2}}\frac{m}{s^2}$$

y multiplicando por el unitario de  $\vec{v}$ , que es

$$\hat{v} = \frac{-3\hat{i} + (5 - 10t)\hat{j}}{\sqrt{34 - 100t + 100t^2}}$$

nos da el vector  $\vec{a}_t$

$$\vec{a}_t = \frac{100t - 50}{34 - 100t + 100t^2}(-3\hat{i} + (5 - 10t)\hat{j})\frac{m}{s^2}$$

Por último podemos calcular  $\vec{a}_n$  como  $\vec{a} - \vec{a}_t$ . Haciendo las oportunas sustituciones tendremos que para  $t = 0,5s$ ,  $\vec{v} = -3\hat{i}\frac{m}{s}$ ,  $\vec{a} = -10\hat{j}\frac{m}{s^2}$ ,  $\vec{a}_t = \vec{0}\frac{m}{s^2}$  con lo cual  $\vec{a}_n = -3\hat{j}\frac{m}{s^2}$  y de esta forma, podremos despejar el radio de la trayectoria, que será

$$R = \frac{v^2}{a_n} = 3m.$$

Resolución



### 5.7.3. Cálculo de trayectorias

Problema



$\mathcal{P}$  Dado el vector de posición de un móvil

$$\vec{r} = 15t\hat{i} + (200 - 5t^2)\hat{j},$$

calcule la ecuación de su trayectoria.

Resolución



$\mathcal{R}$  Este tipo de problemas se resuelve en general despejando  $t$  en una de las ecuaciones de  $x$  o de  $y$  y sustituyendo en la otra, encontrando así  $x$  en función de  $y$  o al revés. En este caso tenemos que

$$x = 15t \Rightarrow t = \frac{x}{15}$$

y sustituyendo en

$$y = 200 - 5t^2$$

tendremos

$$y = 200 - 5\left(\frac{x}{15}\right)^2 \Rightarrow y = 200 - \frac{1}{45}x^2.$$

<sup>2</sup>Vectores  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ .

<sup>3</sup>Aproximación válida siempre que el tiro discorra en la superficie terrestre o “apreciablemente” en la superficie terrestre.

# Capítulo 6

## Dinámica

### 6.1. Introducción

Así como la cinemática se encarga de la descripción del movimiento de los cuerpos, aunque sin entrar en detalles de la causa que hace mover a éstos, la dinámica estudia precisamente *por qué se mueven* los cuerpos, es decir, cuáles son las causas que crean la variación de su estado de movimiento.

### 6.2. Leyes de Newton

#### 6.2.1. Ley de la inercia

La ley de la inercia se podría enunciar como

▷ Todo cuerpo permanece en su estado actual de movimiento con velocidad uniforme o de reposo a menos que sobre él actúe una fuerza externa neta o no equilibrada.



donde la fuerza neta de la que hablamos antes sería la suma vectorial de todas las fuerzas que puedan actuar separadamente sobre el cuerpo.

◊ Ésta es la razón por la cual es tan peligroso para los astronautas en el espacio separarse de la nave sin un cordón que los una a ella, ya que si chocan con algo y salen impulsados, como no actúa ninguna fuerza sobre ellos, seguirán desplazándose uniformemente y separándose de la nave sin posibilidad de volver a ella (a no ser que tengan un pequeño impulsor).



#### 6.2.2. Segunda ley de Newton

Esta ley es la más importante en cuanto nos permite establecer una relación numérica entre las magnitudes “fuerza” y “aceleración”. Se podría enunciar como

▷ La aceleración que toma un cuerpo es proporcional a la fuerza neta externa que se le aplica.



La constante de proporcionalidad es la masa del cuerpo, con lo que numéricamente esta expresión se denota como

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (6.1)$$

o, en componentes

$$F_i = ma_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.2)$$

donde  $\vec{F}$  representa la *resultante* de todas las fuerzas externas al cuerpo, es decir, la suma de dichas fuerzas.  $\vec{F} = \sum \vec{F}_j$ ,  $j = 1, \dots$

Esta expresión nos relaciona  $\vec{F}$ ,  $m$  y  $\vec{a}$  de una forma unívoca. Básicamente nos dice que el resultado que producen una serie de fuerzas sobre un cuerpo es que dicho cuerpo se acelere en la misma dirección y sentido que la suma de las fuerzas que le son aplicadas y con una intensidad o módulo que será la misma que la resultante de las fuerzas dividida entre la masa del cuerpo.

Nota



◊ Así pues un cuerpo experimenta una aceleración *mientras* está siendo sometido a una fuerza resultante no nula. Si dicha fuerza cesa el cuerpo adquiriría un movimiento rectilíneo uniforme o se quedaría quieto, según el caso.

### 6.2.3. Tercera ley de Newton

La tercera ley de Newton expresa una interesante propiedad de las fuerzas: éstas siempre se van a presentar en parejas. Se puede enunciar como

Recuerda



▷ Si un cuerpo A ejerce, por la causa que sea, una fuerza  $F$  sobre otro B, este otro cuerpo B ejercerá sobre A una fuerza igual en módulo y dirección, pero de sentido contrario.

Gracias a esta ley<sup>1</sup> se pueden entender fenómenos como que, para saltar hacia arriba ¡empujamos la Tierra con todas nuestras fuerzas hacia abajo!. Al hacer esto la Tierra también ejerce esta misma fuerza con nosotros, pero con sentido contrario (es decir, hacia arriba) y como la masa de la Tierra es enorme en comparación con la nuestra, el resultado es que nosotros salimos despedidos hacia arriba pero la Tierra no se mueve apreciablemente. Así también si empujamos una superficie puntiaguda con mucha fuerza, podemos clavárnosla, porque dicha superficie también estará empujando nuestro dedo con la misma fuerza que nosotros a ella, y como la superficie de la aguja es muchísimo menor la presión que esta hace sobre nuestro dedo es muy grande.

Nota



◊ Entonces, si a toda fuerza que se ejerce se opone otra de sentido contrario ¿no deberían anularse las fuerzas y nada se podría mover?. No, porque las fuerzas se ejercen *en cuerpos diferentes*. Así en el ejemplo del salto, nosotros empujamos a la Tierra y la Tierra a nosotros, pero estas fuerzas no se anulan porque, como es evidente, nosotros y la Tierra somos cuerpos distintos.

## 6.3. Fuerzas especiales que aparecen en problemas

### 6.3.1. Normal

Por normal se entiende la fuerza con la que una superficie se opone a un cuerpo que se le sitúa encima. Si no existiera esta fuerza el cuerpo se “hundiría” en la superficie. Ésta es, por tanto, la fuerza de reacción que, obediente al tercer principio de Newton, la superficie opone al empuje que el cuerpo, por encontrarse encima, hace sobre ella.

Esta fuerza es siempre normal a la superficie, es decir, perpendicular a ésta. Para calcular su valor hay que ser bastante cuidadoso y hacer un balance de las fuerzas en los ejes que tomemos, utilizando la normal para compensar las otras fuerzas de la forma en que sea necesario.

Problema



$\mathcal{P}$  Calcule la normal que una mesa ejerce sobre un cuerpo de  $10\text{kg}$  si el cuerpo está en reposo.

<sup>1</sup>También llamada ley de acción y reacción

$\mathcal{R}$  Si el cuerpo está en reposo significa que su aceleración total es nula. Entonces aplicando la segunda ley de Newton a un eje vertical tendremos que

$$0 = N - P$$

donde hemos supuesto que la mesa está perfectamente horizontal y por tanto la normal tendrá sólo una componente en el eje  $y$ . Así tendremos que  $N = P$  y por tanto en este caso  $N = mg$ .

Resolución



El cálculo de la normal en un caso donde haya un cuerpo deslizando por una rampa puede encontrarse en la sección 6.6.

### 6.3.2. Rozamiento

#### Entre dos superficies

El rozamiento entre superficies se expresa como

$$F_r = \mu N,$$

siendo siempre de *sentido opuesto al del movimiento*. Este resultado no se puede “demostrar” porque se trata de un resultado empírico, es decir, fruto de la experimentación.

El coeficiente de rozamiento  $\mu$  es adimensional y expresa así la relación entre la normal que el cuerpo ejerce, es decir, la fuerza con la que el cuerpo empuja la superficie debajo de la cual se encuentra, y el rozamiento que va a sufrir por causa de este empuje. Puede haber dos tipos de coeficiente de rozamiento. Un  $\mu$  estático, que se aplica cuando el cuerpo está quieto y que así, utilizado en  $F_r = \mu N$  nos va a ofrecer la fuerza máxima con la que el rozamiento se va a resistir a que se mueva un cuerpo que está quieto, y un  $\mu$  dinámico que, aplicado en la fórmula de rozamiento, nos dice la fuerza que el rozamiento está realizando contra un movimiento.

$\mathcal{P}$  Un cuerpo de  $4\text{kg}$  está deslizando por una superficie lisa con coeficiente de rozamiento (dinámico)  $\mu = 0,25$ . Si sobre este cuerpo no actúan más fuerzas que el peso y dicha fuerza de rozamiento ¿con qué aceleración se mueve el cuerpo?.

Problema



$\mathcal{R}$  Aplicando la ecuación de Newton al eje  $y$  del movimiento obtenemos que, en este eje, las fuerzas que aparecen son el peso y la normal y, por tanto,

$$N - P = ma_y.$$

Como  $a_y = 0$  (un cuerpo sobre una superficie no va “botando” sobre ella, su altura, medida sobre la superficie, es siempre 0.) tendremos que  $N = mg$ . Aplicando ahora  $F_x = ma_x$  tenemos que la única fuerza en el eje  $x$  es la de rozamiento, y por tanto

$$F_x = -F_r = -\mu N = ma_x \Rightarrow a_x = -\mu g$$

de donde  $a_x = -2,45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . El signo ‘-’ se debe a que, como estamos suponiendo implícitamente que el cuerpo avanza hacia el signo positivo de las  $x$ , el rozamiento se opondrá al avance y tendrá, por tanto, signo negativo.

Resolución



**Con un fluido**

◦ Rozamiento con un fluido<sup>2</sup> se expresa con

$$\vec{F}_r = -K\vec{v}$$

o bien

$$F_r = -Kv^2$$

u otras potencias de  $v$ . Una aplicación algo compleja sobre la forma de utilizar esta fuerza de rozamiento puede verse en el apéndice B. No es sencillo demostrar por qué esta contribución nos aporta el rozamiento contra un fluido y, en algunos casos, es por medio de la experimentación como se encuentra una fórmula empírica más precisa.

Ampliación

**Tensión**

En problemas que intervienen cuerdas o poleas tensión es la fuerza que liga unos cuerpos y otros a través de la cuerda. La tensión en cada extremo de una misma cuerda es siempre igual pero de sentido contrario. Si esta tensión supera un cierto valor crítico la cuerda se rompería.

**6.4. El momento lineal**

La ley de Newton, expresada como  $\vec{F} = m\vec{a}$  puede ser utilizada también para demostrar otras relaciones interesantes, siempre que se manipule adecuadamente.

Por ejemplo, si definimos una cantidad  $\vec{p}$  a la que llamaremos cantidad de movimiento, podemos decir que una fuerza es la encargada de variar la cantidad de movimiento sobre un cuerpo. De esta forma definamos  $\vec{p}$  tal que

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}.$$

La pregunta será ahora ¿tendrá  $\vec{p}$  alguna expresión conocida?. Supongamos que un cuerpo con masa constante va a cierta velocidad  $\vec{v}$ . Una fuerza sobre él deberá producirle una aceleración y, por tanto variar su velocidad y su momento lineal. Así pues velocidad y momento lineal deben de ir relacionados de alguna forma. Efectivamente tomando  $\vec{p} = m\vec{v}$  nos damos cuenta de que  $\frac{d}{dt}m\vec{v}$  cuando  $m$  es constante es  $m\frac{d}{dt}\vec{v} = m\vec{a} = \vec{F}$ .

Por tanto hemos descubierto una nueva magnitud  $\vec{p}$  que nos será de gran utilidad para desarrollos sucesivos.

Nota



◊ Una forma intuitiva de comprender el momento lineal es como una forma de medir la dificultad de llevar una partícula hasta el reposo. Así es claro que, cuanto más masivo sea un cuerpo y más velocidad tenga, tanto más nos costará “parar” el movimiento de dicho cuerpo.

**6.4.1. Conservación del momento lineal**

Cuando la resultante de las fuerzas externas sobre un sistema es nula, ¿qué sucede con  $\vec{p}$ ? Como la fuerza es la derivada del momento lineal respecto al tiempo, obtenemos que, cuando la fuerza total es cero, esta cantidad que se deriva debe ser constante y, por tanto, si  $\vec{F} = \vec{0}$  esto supone  $\vec{p} = cte$ . Hemos obtenido así que esta magnitud tan interesante, el momento lineal, se conserva, es decir, no varía, cuando no aparecen fuerzas externas sobre un objeto. Por tanto podemos decir que

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f.$$

<sup>2</sup>Aire, agua, aceite...

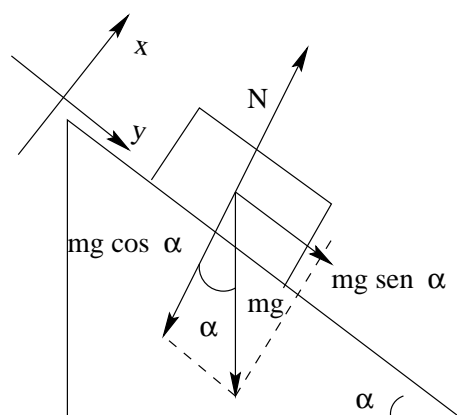


Figura 6.1: Descomposición de las fuerzas en un plano inclinado.

La importancia de esta igualdad se podrá ver mejor cuando hablemos de los sistemas de partículas, concretamente en la sección 8.3.3.

## 6.5. Conservación de la energía

Cuando en un problema intervienen sobre el sistema únicamente fuerzas conservativas<sup>3</sup> se puede aplicar el teorema de conservación de la energía. Esto supone que

$$E_i = E_f,$$

siendo  $E_i$  y  $E_f$  las sumas de las energías potenciales más la energía cinética en los momentos  $i$  y  $f$ <sup>4</sup>.

La explicación de esta igualdad tan interesante no se expresa aquí porque se verá más concretamente en el capítulo 7.4.

## 6.6. Resolución de problemas

### 6.6.1. Planos inclinados

Es común en los problemas la presencia de planos inclinados. En estos casos habrá que tener en cuenta que, así como la gravedad siempre se presenta vertical, la normal será perpendicular al plano inclinado, por lo que ningún sistema de coordenadas ortogonal tendrá exactamente comprendidas las fuerzas en acción en sus ejes. Esta pequeña dificultad se soslaya de una manera simple, se proyectan las fuerzas sobre los ejes que estemos utilizando.

Una buena elección suele ser tomar el eje  $y$  en la normal al plano inclinado, y el eje  $x$  acorde con su superficie de deslizamiento. De esta forma la normal estará totalmente comprendida en el eje  $y$ , y sólo habrá que considerar las proyecciones de  $g$  usuales;  $g \cos \alpha$  para la normal y  $g \sin \alpha$  la componente de la gravedad que hace desplazarse el vehículo hacia abajo en el plano inclinado. Todo esto se puede ver en la figura 6.1.

---

$\mathcal{P}$  Un cuerpo desliza por una rampa inclinada  $30^\circ$  y con un coeficiente

<sup>3</sup>Básicamente, siempre que no hay rozamiento.

<sup>4</sup>Llamados así por inicial y final.



Problema

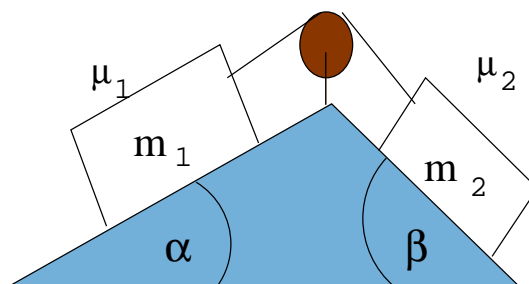


Figura 6.2: ¿Cuál será la aceleración de este sistema?

de rozamiento  $\mu = 0,2$ . Calcular la aceleración con la que desciende suponiendo que  $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ .

Resolución



$\mathcal{R}$  Tomemos para enfocar este problema el gráfico representado en la figura 6.1. Habremos de aplicar la ecuación de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

para un sistema adecuado de ejes. Se van a tomar como ejes unos tales que el eje  $x$  presente la misma inclinación que la rampa. De esta forma planteando la ecuación primero para el eje  $y$ :

$$F_y = ma_y$$

y como las fuerzas en el eje  $y$  son la normal (componente positiva) y la proyección sobre este eje  $y$  del peso (componente negativa) tendremos que

$$N - mg \cos 30 = ma.$$

Ahora hay que darse cuenta que, en el eje  $y$  el cuerpo no se acelera porque, como en ningún momento se despega de la superficie, siempre su  $y = y$ , por tanto,  $a_y = 0$ . Así que tenemos que  $N - mg \cos 30 = 0 \Rightarrow N = mg \cos 30$ .

Para el eje  $x$  tenemos dos fuerzas, la proyección sobre nuestro eje  $x$  del peso y la fuerza de rozamiento. Así pues

$$F_x = ma_x \Rightarrow mg \sin 30 - \mu N = ma_x$$

y haciendo las oportunas sustituciones podemos despejar  $a_x$ , que es la aceleración del sistema.

$$a_x = g \sin 30 - \mu g \cos 30 \approx 3,2 \frac{m}{s^2}.$$

Cuando aparecen varios cuerpos unidos por cuerdas hay que hacer este mismo análisis para cada cuerpo, incorporando como fuerza la tensión que ejercen las cuerdas y dándose cuenta de que  $a_x$  será la misma para todos los cuerpos, puesto que si se encuentran unidos por cuerdas su movimiento será solidario.

Problema



$\mathcal{P}$  Encontrar la aceleración del sistema dibujado en la figura 6.2.



## Resolución



$\mathcal{R}$  Tomemos primero el cuerpo 1 y analicemos las fuerzas que aparecen sobre él. Podemos, aprovechando el análisis del problema anterior, darnos cuenta de que un estudio de las fuerzas perpendiculares a la superficie va a darnos sólo como resultado que  $N_1 = m_1 g \cos \alpha$ . Así que las fuerzas horizontales serán, tomando como sentido positivo hacia la derecha:

1. La tensión, positiva.
2. La componente  $x$  del peso, de valor  $-m_1 g \sin \alpha$ .
3. El rozamiento, que será  $-\mu_1 N_1 = -\mu_1 m_1 g \cos \alpha$ .

Para el cuerpo 2 se tendrán las fuerzas:

1. Tensión, negativa para este cuerpo.  $-T$
2. Componente  $x$  del peso:  $m_2 g \sin \beta$ .
3. Rozamiento,  $-\mu_2 N_2 = -\mu_2 m_2 g \cos \beta$ .

Queda ahora plantear el sistema de ecuaciones que resolverá este problema. Antes hay que darse cuenta que la componente  $x$  de la aceleración debe ser la misma para ambos cuerpos, ya que van solidarios gracias a la cuerda. Llamaremos a esta componente de la aceleración simplemente  $a$ .

$$\left. \begin{aligned} T - m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha &= m_1 a \\ -T + m_2 g \sin \beta - \mu_2 m_2 g \cos \beta &= m_2 a \end{aligned} \right\}.$$

Resolviendo este sistema (por ejemplo sumando las ecuaciones miembro a miembro) se obtiene fácilmente que

$$a = \frac{m_2 \sin \beta - \mu_2 m_2 \cos \beta - m_1 \sin \alpha - \mu_1 m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} g.$$

### 6.6.2. Curvas

Cuando aparecen problemas de estabilidad en las curvas pueden ser de los tipos explicados a continuación y cuya representación se ha pretendido en la figura 6.3.

#### Curvas sin peraltar

En estos casos la fuerza de rozamiento es la que nos proporciona toda la componente normal que servirá para tomar la curva. Siempre que tengamos que ésta es mayor que la aceleración normal el automóvil será capaz de tomar la curva, es decir, el caso límite se alcanza cuando

$$F_r = m a_n = m \frac{v^2}{R}$$

#### Curvas peraltadas sin rozamiento

En estos casos se toma la proyección de la normal sobre la horizontal como causante de la fuerza centrípeta. Este caso se puede ver en la figura 6.3b y se tiene, simplemente, que:

$$\tan \alpha = \frac{m \frac{v^2}{R}}{m g} = \frac{v^2}{R g}.$$

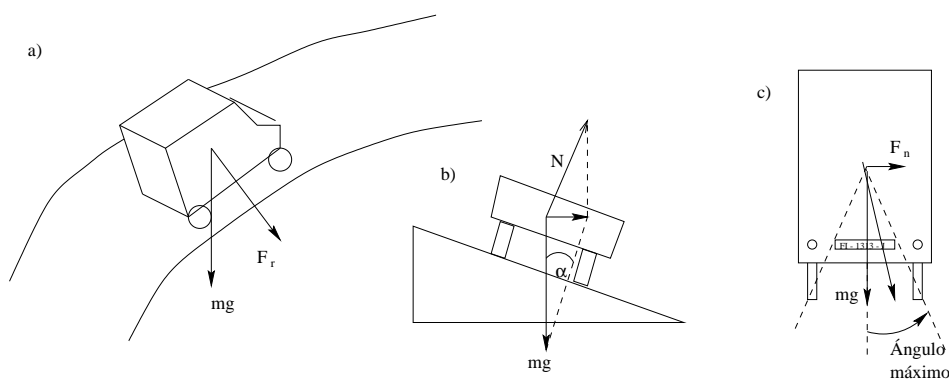


Figura 6.3: Distintas situaciones ante una curva.

### Curvas peraltadas con rozamiento

Este es un caso bastante más complejo de analizar. Podría ser un buen ejercicio para el lector intentar demostrar que, en este caso, la velocidad límite para tomar la curva siendo  $g$  la aceleración de la gravedad,  $\mu$  el coeficiente de rozamiento,  $\alpha$  el ángulo de inclinación de la curva y  $R$  el radio de la misma, es

$$v = \sqrt{Rg \frac{\mu + \tan \alpha}{1 - \mu \tan \alpha}}$$

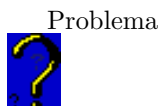
### Vuelcos

En otras situaciones se pide que analicemos si vuelca o no un automóvil. Se considera que vuelca cuando la fuerza sobre el centro de masas supera el ángulo que forma el centro de masas con alguno de los extremos donde se apoya el vehículo. Un dibujo puede verse en la figura 6.3. (Este apartado necesita actualización).

### 6.6.3. Casos límite

Es común la existencia de problemas en los que se nos pregunta por un caso límite, relacionado con cuando un móvil se saldrá de un determinado recorrido, o podrá dar una vuelta completa en un bucle, o similar. En estos casos hay que tener en cuenta, simplemente, que un cuerpo permanecerá adherido a una superficie mientras exista una cierta reacción de la superficie al cuerpo, es decir, mientras la normal no sea nula. Cuando la normal es nula estamos ante el caso límite.

También es muy conveniente recordar que, en la mayoría de estos casos, los cuerpos siguen una trayectoria circular. Pues bien, habrá que recordar que este recorrido circular sólo es posible si existe una aceleración centrípeta del módulo adecuado a la velocidad y radio de la trayectoria, (ver (5.1) y (5.2)) con lo que habrá que realizar la descomposición oportuna de fuerzas para ver qué parte es la que suministra esta componente y, cuando las fuerzas exteriores no sean capaces de suministrar esta aceleración normal, nos hallaremos con el caso límite y el cuerpo se saldría de su trayectoria circular o, en definitiva, dejaría de hacerla.



Problema

$\mathcal{P}$  Calcular la altura mínima desde la que hay que dejar caer un objeto para que logre dar la vuelta a un bucle entero, como el dibujado en la figura 6.4. Se desprecian todos los rozamientos que pudiese haber.

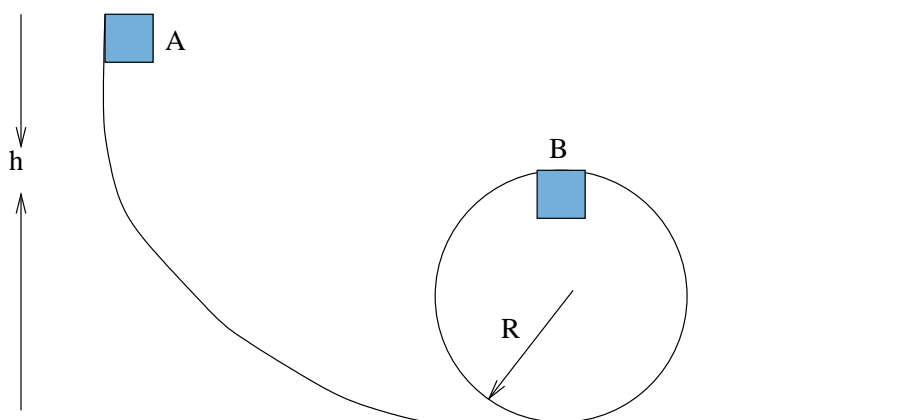


Figura 6.4: ¿Desde qué altura podrá una masa realizar un bucle?.

### Resolución



$\mathcal{R}$  Analizando las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo cuando éste se encuentre en el punto  $B$  de la trayectoria, tenemos que, tomando como sentido positivo hacia arriba, el peso será  $-mg$ , la normal *en este caso es hacia abajo* porque la fuerza que realiza la superficie sobre el cuerpo es siempre evitando que este “atravesase” la superficie, y en este caso “atravesar” la superficie supondría empujarla en exceso hacia arriba, con lo cual, tomando  $N$  como el módulo de la normal, la normal será  $-N$ . Por último el efecto de estas dos fuerzas será producir una aceleración pero, como en este caso el objeto está rotando, no será una aceleración cualquiera sino *una aceleración puramente normal* y, por tanto, de módulo

$$a = \frac{v^2}{R}$$

y sentido también hacia abajo (hacia el centro de la curva). De esta manera tendremos que el análisis de fuerzas en la parte más alta del bucle (punto  $B$ ) es

$$-mg - N = -m \frac{v^2}{R}.$$

¿Qué significa esta fórmula?. Lo que significa es que son el peso y la normal, los que “empujan” al cuerpo hacia abajo obligándole a girar y realizar una trayectoria circular. Ahora bien, si “mentalmente” vamos disminuyendo  $v$  en la fórmula, nos damos cuenta de que el término de la aceleración normal va siendo más pequeño, y por tanto la fuerza centrípeta también. ¿Cómo se logra esto?. Como el peso es constante sólo se puede lograr disminuyendo la fuerza que ejerce la normal. Cuando la fuerza centrípeta sea igual que el peso del cuerpo tendremos que en este instante la normal es cero. ¿Y si es menor la fuerza centrípeta que el peso?. Entonces deberíamos tener una normal positiva, es decir, que “empujara” hacia arriba. Pero esto es imposible, porque claramente se ve que las superficies no “absorben” los cuerpos, que es lo que supondría que la normal tuviera signo contrario. Por lo tanto si  $m \frac{v^2}{R} < mg$  el cuerpo no puede rotar correctamente y caería saliéndose del bucle. Intuitivamente sucede que, como la fuerza centrípeta no necesita tanto peso, “sobra componente vertical” y, por tanto, el cuerpo cae.

Así pues deducimos que la velocidad límite con la que debe llegar el cuerpo arriba es tal que  $m \frac{v^2}{R} = mg \Rightarrow v = \sqrt{gR}$ .

Por último, para relacionar esta velocidad con la altura utilizamos el teorema de conservación de la energía, ya que no hay rozamientos. Así

$$\left. \begin{aligned} E_c^A + E_p^A &= 0 + mgh \\ E_c^B + E_p^B &= \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR \end{aligned} \right\} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m(\sqrt{gR})^2 + 2mgR$$

y con un simple cálculo se obtiene que

$$h = \frac{5}{2}R.$$

Aunque entender intuitivamente de donde sale este  $\frac{1}{2}R$  más de lo que parece que se necesita para llegar al punto más alto del bucle no es sencillo, si puede intentarse pensando que, al llegar a la parte más alta del bucle se requiere un mínimo de energía cinética para seguir desplazándose hacia la derecha, pero la suficiente para que el cuerpo siga girando. Este mínimo lo proporciona esa altura extra.

---

# Capítulo 7

## Consideraciones energéticas

### 7.1. Introducción

Los conceptos de trabajo y energía son de gran importancia en física, y también son muy utilizados en la vida cotidiana. No obstante el uso habitual de estos conceptos en la vida diaria no siempre coincide con su idea física, por lo que habrá que tratar la intuición con cierto cuidado cuando la apliquemos a las situaciones en las que intervienen el trabajo y la energía.

### 7.2. Trabajo

Se define trabajo como

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7.1)$$

La unidad del trabajo es el *Julio*. Un Julio equivale a un *Nm*. Si la fuerza aplicada es constante, entonces se puede decir que

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = Fr \cos \alpha, \quad (7.2)$$

en donde  $\alpha$  es el ángulo que existe entre la línea de aplicación de la fuerza y el desplazamiento del cuerpo.

◊ Se tiene así que *una fuerza aplicada perpendicularmente a un desplazamiento no produce trabajo*. Por ejemplo, avanzar horizontalmente mientras se sujeta una bolsa no produce trabajo, porque la fuerza aplicada es vertical y, por tanto, perpendicular al desplazamiento. ¿Cómo se puede entender esto intuitivamente?. Realmente uno asocia la palabra trabajo con “cansancio” y, por tanto, parece que llevar una pesada bolsa debería producir trabajo físico, porque cansa. Para entender esta situación podemos pensar que realmente no es necesario sujetar personalmente la bolsa a cierta distancia del suelo, puesto que esta misma acción puede realizarla un soporte con ruedas, por lo que el trabajo auténtico consiste en desplazar el objeto paralelamente a las fuerzas que se oponen a él, como podría ser en este caso el rozamiento del soporte con el suelo.

Nota



---

$\mathcal{P}$  ¿Cuánto es el trabajo que produce la normal sobre un cuerpo que realiza un desplazamiento sobre una superficie cualesquiera?

$\mathcal{R}$  Ninguno, porque la fuerza normal *siempre es perpendicular* al desplazamiento del cuerpo y por tanto, el trabajo (producido por la normal) será nulo.

Problema



Resolución



Ahora bien. ¿Cómo podemos definir el trabajo si la fuerza es variable, o si la trayectoria es curva?. En ese caso suponemos válida la definición de trabajo para una trayectoria muy pequeña (infinitésima) y sumamos (integramos) a todos los “pequeños trozos de trayectoria”.

Es decir:

$$W_2 - W_1 = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.3)$$

Problema



$\mathcal{P}$  Un niño arrastra un trineo durante 100 metros. Para hacerlo tira de una cuerda con una fuerza de 80 Newton formando un ángulo con el suelo de  $30^\circ$ . ¿Cuál es el trabajo producido?

Resolución



$\mathcal{R}$  Utilizando la fórmula (7.2) tenemos simplemente que:

$$W = 80 \cdot 100 \cos 30 = 6928,20J$$

Recuerda



▷ Las definiciones de trabajo son:

$$W = \int \vec{F} d\vec{r}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = Fr \cos \alpha$$

### 7.2.1. Trabajo conservativo

Trabajo conservativo es aquel producido por las fuerzas conservativas. Una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza no depende del recorrido sino sólo de los puntos inicial y final, es decir, independientemente del itinerario seguido. Si un cuerpo se desplaza desde un punto  $A$  hasta otro  $B$  bajo la acción de una fuerza conservativa el trabajo realizado por dicha fuerza será el mismo independientemente del itinerario del cuerpo.

Estas fuerzas son muy importantes porque para ellas se puede definir una magnitud denominada energía potencial (ver 7.5.2). Ejemplos de fuerzas conservativas son las fuerzas constantes (aquellas cuyo valor es el mismo para todos los puntos del espacio) y centrales (las que presentan la forma funcional  $f(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$ ).

Recuerda



▷ Trabajo conservativo es aquél que sólo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria.

## 7.3. Potencia

La potencia se define como el trabajo realizado por unidad de tiempo, es decir

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (7.4)$$

donde, si el trabajo es constante, se puede expresar como

$$P = \frac{W}{t}, \quad (7.5)$$

y si la fuerza es constante se puede decir que

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (7.6)$$

La unidad de la potencia es el Watt o Vatio. ( $W$ ).

Recuerda



▷ Potencia es el trabajo realizado por unidad de tiempo.

◊ La magnitud potencia puede servir para entender algunas situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo los motores de los coches (suponiendo que la presión que se ejerce sobre el acelerador es constante) desarrollan una potencia que podemos considerar constante. Esto supone que, como se deduce de la fórmula (7.6) la fuerza que puede desarrollar el motor multiplicada por la velocidad es constante. ¿Qué podemos explicar con esto?. Supongamos que un automóvil está ascendiendo por un puerto, y por tanto su motor debe de realizar una fuerza bastante considerable para contrarrestar la componente del peso que “tira de él hacia atrás”. El conductor se ve obligado a ir en una marcha corta, lo cual significa que la relación entre la fuerza y la velocidad va a ser de mucha fuerza frente a poca velocidad. El mismo conductor en cambio, en un llano, puede ir en una marcha muy larga y a gran velocidad, porque la fuerza que debe desarrollar el motor es poca, únicamente para vencer los rozamientos.

Si este conductor es adelantado por un coche de gran potencia verá como, efectivamente, si la potencia es mayor, el coche que le adelante puede desarrollar la misma fuerza que se necesita para ascender por el puerto, pero a una velocidad mayor.

Nota



$\mathcal{P}$  Calcula la potencia que debe tener una bomba de agua para ascender mil litros de agua por minuto a una altura de 10 metros.

$\mathcal{R}$  Primero calculemos el trabajo que debe realizar esta bomba para ascender este agua. Usando la fórmula para fuerzas constantes y notando que la fuerza que debe realizar la bomba es paralela al desplazamiento y de módulo igual al peso del agua que ha de ascender tendremos que,

$$W = Fd = 1000 \cdot 9,8 \cdot 10 \cos 0 = 9,8 \cdot 10^4 J.$$

Aplicando ahora la ecuación de la potencia (7.5) tendremos que

$$P = \frac{9,8 \cdot 10^4}{60} = 1,6 \cdot 10^3 W.$$

Problema



Resolución



## 7.4. Energía

Se considera tácitamente la energía como la capacidad para hacer un trabajo, o bien el trabajo “acumulado” por un cuerpo.

El concepto de energía es uno de los más fructíferos de toda la física, pero también es bastante abstracto, dada la gran diversidad de formas en las que aparece, por ello iremos viendo algunas, aunque antes necesitaremos definir unos conceptos previos.

## 7.5. Conceptos previos

### 7.5.1. Energía cinética

Energía cinética es la que tiene un cuerpo por desplazarse a determinada velocidad. Realmente resulta un poco sorprendente que un cuerpo, por el mero hecho de moverse, tenga un tipo de energía, pero no tenemos más que pensar que efectivamente, en caso de un choque, por ejemplo, este cuerpo es capaz de producir un trabajo (de deformación, o del tipo que sea) y por tanto, debe de tener una energía.

Se puede demostrar la existencia de la energía cinética de varias formas. Una manera (que se deja como ejercicio al lector) es suponer que se está aplicando una fuerza constante sobre un cuerpo y que, por tanto, utilizando la ley de Newton  $F = ma$ , tendremos un cuerpo sometido a una aceleración constante y, usando las ecuaciones del movimiento, relacionar la cantidad trabajo, que será  $ma\Delta x$  con la velocidad.

Otra forma es calcular el trabajo que desarrolla un cuerpo sometido a una cierta fuerza paralela (para simplificar el cálculo) del tipo que sea. Utilizando (7.3) tenemos que

$$\begin{aligned} W &= \int_1^2 F dx = \int_1^2 ma dx \\ &= \int_1^2 m \frac{dv}{dt} dx = \int_1^2 m \frac{dx}{dt} dv \\ &= \int_1^2 mv dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \end{aligned}$$

Con lo cual se puede ver que el trabajo “se acumula” en forma de energía cinética cuya fórmula es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (7.7)$$



Recuerda

▷ Energía cinética es la energía que tiene un cuerpo por desplazarse con cierta velocidad y su valor es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$



Nota

◊ En algunos libros de física se denomina a la energía cinética como  $T$ .

Es más correcto expresarlo como

$$W_2 - W_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \quad (7.8)$$

éste es el llamado *teorema de las fuerzas vivas*.

Para resolver un problema utilizando este teorema habrá que elegir unos instantes 1 y 2 y, calculando el trabajo y la energía en cada uno de estos instantes, el teorema nos permitirá relacionar una de estas magnitudes con el resto. Generalmente se busca una velocidad y se tiene el resto de datos. Hay que elegir convenientemente los puntos 1 y 2 para obtener lo que deseamos y, además, intentar que el máximo número de estas magnitudes sea nulo, lo cual facilita el cálculo.



Problema

$\mathcal{P}$  Se aplica una fuerza horizontal de  $100N$  a un cuerpo de  $2kg$  que está inicialmente en reposo. ¿A qué velocidad se moverá al cabo de 20 metros?.



Resolución

$\mathcal{R}$  Apliquemos el teorema de las fuerzas vivas (7.8) a este problema y tendremos que

$$W = E_c^f - E_c^i$$

siendo  $i$  y  $f$  los instantes inicial y final, respectivamente. Vemos que, en este caso,  $E_c^i$  es nula, porque el cuerpo parte del reposo, y que el trabajo será, como la fuerza es paralela al desplazamiento,  $W = Fd = 100 \cdot 20 = 2000J$ . Tendremos entonces que

$$2000J = \frac{1}{2}mv^2$$



y por tanto

$$v = \sqrt{2 \frac{2000J}{2kg}} = 44,72 \frac{m}{s}.$$

### 7.5.2. Potencial

La energía potencial es aquella relacionada con fuerzas conservativas. Se define la energía potencial en un punto de tal forma que se cumpla

$$W_{AB} = E_p(A) - E_p(B) \tag{7.9}$$

Igualmente, unificando las definiciones (7.3) y (7.9) se puede decir que

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\Delta E_p \tag{7.10}$$

es decir, el trabajo realizado por una fuerza conservativa equivale a la disminución de la energía potencial, donde hemos llamado  $\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$ .

Es muy importante darse cuenta de la aparición del signo  $-$  en la fórmula (7.10), consecuencia de la definición (7.9) anterior. Dicho signo aparece también en las ecuaciones (7.11), (7.12), (7.13), y (7.14).

◊ Otra notación para la energía potencial es, en vez de llamarla  $E_p$ , denominarla  $U$ .

◊ Intuitivamente la energía potencial es la que tiene un cuerpo por el mero hecho de ocupar una determinada posición en el espacio. Así por ejemplo, veremos más adelante, concretamente en 7.5.2, que un cuerpo que se encuentre a una cierta altura  $h$  sobre la superficie terrestre presenta, sólo por este hecho, una energía potencial. Podemos entender esto dándonos cuenta de que, efectivamente, un cuerpo, por el mero hecho de estar elevado respecto al suelo, tiene energía, puesto que puede caer al suelo y, por tanto, desarrollar un trabajo durante su caída.



### Gravitatoria en la superficie terrestre

Aplicando la definición de potencial indicada en (7.10) tendremos que

$$E_p = - \int_0^y m(-g)ds = mgy \tag{7.11}$$

Se tiene que

$$E_p = mgy$$

siendo  $y$  la altura sobre el suelo o el nivel 0. En la integral aparece  $(-g)$  ya que el sentido de la fuerza de la gravedad es contrario al sentido en que se toman las alturas.

▷ La energía potencial cuando el valor de  $g$  se puede tomar constante es

$$E_p = mgh.$$



### Gravitatoria general

Como se puede ver más ampliamente en (11.1) todos los cuerpos se atraen entre sí con una fuerza que se rige por la ley de Newton de la gravitación universal, es decir, que el módulo de la fuerza de atracción es

$$F = -G \frac{Mm}{r^2},$$

en donde el signo “-” nos informa de que el sentido siempre es de atracción.

Así pues para calcular la energía potencial que un cuerpo de masa  $m$  tiene por estar a una distancia  $r$  de otro de masa  $M$  no habrá más que calcular

$$E_p = - \int F dr = - \int -G \frac{Mm}{r^2} dr = -GMm \int -\frac{1}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r}. \quad (7.12)$$

Recuerda



▷ Energía potencial gravitatoria (en el caso general) es

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}.$$

Nota



◊ Tanto en esta fórmula como en la fórmula (7.14) un análisis del significado estas expresiones y, más concretamente, de la presencia de una  $r$  en el denominador, nos indica que, para estas dos fórmulas, el origen de las energías se toma en el infinito, es decir, que la energía potencial de un planeta (por ejemplo) es nula, cuando este planeta está totalmente aislado, es decir, infinitamente alejado, del otro.

### Elástica

Para muelles y sistemas de fuerzas centrales que cumplan  $\vec{F} = -k\vec{r}$  se tiene que, (tomando una única dimensión)

$$E_p = - \int F dx = - \int -kx dx = \frac{1}{2} Kx^2 \quad (7.13)$$

Recuerda



▷ La energía potencial de un sistema que obedece a la ley de Hooke es

$$E_p = \frac{1}{2} Kx^2.$$

### Electrostática

Dadas dos partículas con cargas  $q$  y  $Q$ , se comenta en el apartado 12.1 como el módulo de la fuerza de atracción entre ambas cargas es

$$F = K \frac{Qq}{r^2},$$

siendo  $r$  la distancia que existe entre ambas cargas. De esta forma se puede extraer fácilmente que la energía potencial electrostática será

$$E_p = - \int F dr = - \int K \frac{Qq}{r^2} dr = KQq \int \frac{-dr}{r^2} = K \frac{Qq}{r} \quad (7.14)$$

Recuerda



▷ Energía potencial entre dos partículas cargadas es

$$E_p = K \frac{Qq}{r}.$$

## 7.6. Conservación de la energía

Cuando en un sistema sólo aparecen fuerzas conservativas, se tiene entonces que se cumple el siguiente teorema de conservación de la energía

$$E_p(A) + E_c(A) = E_p(B) + E_c(B) \quad (7.15)$$

Siendo  $A$  y  $B$  dos momentos cualesquiera en la evolución de la partícula, y  $E_p(A)$  y  $E_p(B)$  la suma de todas las energías potenciales que tenga el cuerpo en los puntos  $A$  y  $B$ .

Este teorema es muy útil para la resolución de ciertos aspectos de los problemas, sobre todo los relacionados con la obtención de la velocidad en determinados instantes en un sistema conservativo. Esto se debe a que, por ejemplo, en un movimiento sin rozamientos de un cuerpo bajo el campo gravitatorio terrestre en superficie, particularizando (7.15) tenemos

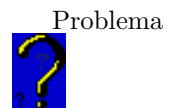
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

de donde podremos despejar fácilmente la velocidad en uno y otro instante según los datos que conozcamos.

▷ El teorema de conservación de la energía dice que la energía total en todos los instantes es la misma, siendo la energía total la suma de las energías cinéticas más las potenciales.



$\mathcal{P}$  Un cuerpo desliza sin rozamiento por una pista de hielo. Si parte del reposo desde una altura de 7 metros sobre el suelo. ¿A qué velocidad estará cuando se encuentre tan sólo a 1 metro sobre el suelo?



$\mathcal{R}$  Llamemos  $A$  al instante inicial, en que encuentra parado y a 7 metros, y  $B$  al segundo instante, cuando viaja a una velocidad  $v$  y se encuentra a tan sólo 1 metro. Tendremos entonces que

$$E_p^A + E_c^A = E_p^B + E_c^B$$

en donde  $E_p^A = mg7$ ,  $E_p^B = mg1$ , como parte del reposo  $E_c^A = \frac{1}{2}mv^2 = 0$  porque  $v_A = 0$  y denominando  $v_B$  a la velocidad cuando pasa por el punto  $B$  tendremos que  $E_c^B = \frac{1}{2}mv_B^2$ . Tendremos entonces que

$$mg7 = mg1 + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g(7-1)} \approx 10,84 \frac{m}{s}.$$



### 7.6.1. Rozamiento

En el caso de que exista rozamiento u otras pérdidas de energía no conservativas podremos aún seguir usando (7.15) siempre que tengamos la precaución de introducir esta energía perdida por rozamiento con el signo oportuno. Por ejemplo si tenemos un problema en el cual aparece la energía potencial en la superficie terrestre  $mgh$  y también una fuerza de rozamiento podríamos plantear la ecuación de conservación de la energía entre los instantes 1 y 2 como

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + E^*,$$

donde se ha representado por  $E^*$  la energía que se ha perdido entre dichos instantes.

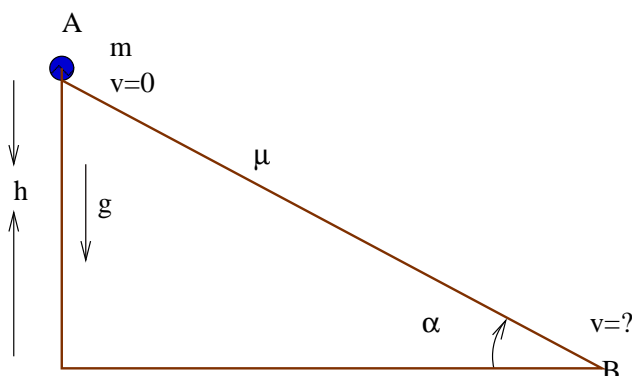


Figura 7.1: ¿A qué velocidad llegará al final?.

▷ Cuando aparezcan trabajos procedentes de fuerzas no conservativas los puedes poner como

$$E_c^A + E_p^A = E_c^B + E_p^B + E^* \quad (7.16)$$

Donde  $E^*$  es el trabajo no conservativo.

A su vez el trabajo de rozamiento puede calcularse teniendo presente que  $W = Fd \cos \alpha$  y que  $\alpha = 180^\circ$  porque el rozamiento siempre se opone al desplazamiento. De esta forma se tendría que  $W = -\mu Ngs$  pero, como el término  $E^*$  se sitúa en el miembro derecho de la ecuación (7.16) con valor positivo, simplemente

$$E^* = \mu Ns,$$

donde  $N$  es la normal y  $s$  es el desplazamiento que ha realizado el cuerpo, es decir, la distancia durante la cual ha experimentado el rozamiento.



$\mathcal{P}$  Dejamos caer desde el reposo un cuerpo de masa  $m$  por una rampa de  $\alpha$  grados de inclinación desde una altura  $h$  (ver figura 7.1). Si la rampa ofrece un coeficiente de rozamiento  $\mu$ . ¿A qué velocidad llegará al suelo?



$\mathcal{R}$  Planteemos la ecuación de conservación de la energía expresada en (7.16) y analicemos el valor de cada término. Antes llamaremos  $A$  al instante en el cual el cuerpo se encuentra a cierta altura  $h$  y  $B$  cuando el cuerpo está ya al nivel del suelo con una velocidad  $v$ . Así tendremos que

$$\begin{aligned} E_p^A &= mgh \\ E_p^B &= mg0 = 0 \\ E_c^A &= \frac{1}{2}m0^2 = 0 \\ E_c^B &= \frac{1}{2}mv^2 \\ E^* &= \mu Ns \end{aligned}$$

Donde queda por precisar que  $s$  es el espacio total recorrido por el cuerpo mientras bajaba por la rampa. Teniendo en cuenta que el espacio  $s$  es

la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde un ángulo mide  $\alpha$  y su lado opuesto mide  $h$ , se tiene que  $s = \frac{h}{\sin \alpha}$ .

Respecto a la normal  $N$ , como se ha visto ya en 6.6, su valor será  $N = mg \cos \alpha$  por lo que el valor de  $E^*$  en función de parámetros conocidos será

$$E^* = \mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}$$

Por fin utilizando (7.16) tenemos que

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}$$

y despejando  $v$  se obtiene la solución, que es,

$$v = \sqrt{2gh(1 - \mu \tan \alpha^{-1})}.$$

◦ Como consecuencia del problema anterior ¿Para qué relación entre  $\mu$  y  $\alpha$  el cuerpo no podría bajar por la rampa?.

Ampliación



## 7.7. Impulso

El impulso surge de integrar la fuerza respecto al tiempo.

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt. \tag{7.17}$$

O lo que es lo mismo,

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = I_2 - I_1 = \int \vec{F} dt.$$

## 7.8. Gradiente

◦ Sabiendo que podemos expresar un incremento infinitesimal de energía potencial como

$$dE_p = E_p(\vec{r} + d\vec{r}) - E_p(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

y que la regla de derivación de la cadena para varias dimensiones nos dice que

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

tenemos entonces una interesante relación<sup>1</sup> que nos dice que

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{aligned} \right\}.$$

A raíz de esto se puede definir matemáticamente el *gradiente* de un escalar como *nabla* por dicho escalar. Por *nabla* se define al “vector<sup>2</sup>”  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ . La notación  $\frac{\partial f}{\partial x}$  supone derivar la función  $f$  respecto a la variable  $x$  y considerar el resto de variables, ( $y$ ,  $z$ , etc.) como si fueran constantes.

<sup>1</sup>Mucho más explotada en libros de física más avanzados

<sup>2</sup>Pues realmente es un operador, ya que actúa como una derivación sobre los escalares o vectores a los que se le aplica.

Ampliación



## CAPÍTULO 7. CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS

Con esto podemos definir el vector fuerza como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p \quad (7.18)$$

Las propiedades matemáticas del gradiente son muy interesantes, aunque exceden ampliamente el nivel de este libro.

## Capítulo 8

# Dinámica de un sistema de partículas

### 8.1. Conceptos y definiciones primarias

Sistema de partículas es un conjunto de partículas<sup>1</sup> cuyas propiedades globales queremos estudiar.

Fuerza exterior de un sistema de partículas es aquella que viene de fuera del sistema. Fuerza interior es la proveniente de las interacciones entre las propias partículas del sistema. Se pueden denotar como  $\vec{F}^{ext}$  y  $\vec{F}^{int}$ .

### 8.2. Centro de masas

El centro de masas para un sistema de partículas discreto es

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (8.1)$$

Cuando se tenga un sistema continuo el centro de masas vendrá definido como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

o, expresándolo mejor en función de la densidad del sistema

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \rho dm}{m_T}$$

siendo  $m_T$  la masa total del cuerpo continuo.

#### 8.2.1. Teorema de Pappus

◦ Este teorema resulta muy útil para calcular el centro de masas de algunas figuras. El mecanismo de funcionamiento es como sigue: tomando un área cualquiera cerrada en un plano y generando un sólido rotándola en el espacio de manera tal que cada punto siempre se mueva perpendicular al plano del área, tendremos como resultado que el sólido así generado tendrá un volumen igual que el área de esta sección empleada por la distancia que se ha desplazado el centro de masas.

Ampliación



---

<sup>1</sup>Supuestas puntuales.

## 8.3. Dinámica del centro de masas

### 8.3.1. Velocidad

Hallar la magnitud  $\vec{v}_{cm}$  es simplemente derivar la ecuación (8.1), con lo cual se llega a

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m_T} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

o, también se tiene

$$m_T \vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (8.2)$$

### 8.3.2. Aceleración

Derivando dos veces

$$\vec{F}^{ext} = m_t \vec{a}_{cm}. \quad (8.3)$$

Para llegar a este resultado ha hecho falta darse cuenta de que cada  $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$  se puede descomponer en  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$  donde  $\vec{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ij}$ , siendo estas  $\vec{F}_{ij}$  todas las fuerzas de interacción entre las partículas o, más concretamente, la fuerza que una partícula  $j$  ejerce sobre la  $i$ . Posteriormente cuando se suman todas estas fuerzas en la fórmula general se tiene que el sumatorio  $\sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ij}$  se anula ya que, por el principio de acción y reacción,  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ .

### 8.3.3. Momento lineal

Se define el momento lineal de un sistema de partículas como la suma de los momentos de cada una de las partículas que integran el sistema. Quiere decir esto que el momento lineal de un sistema será

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i.$$

Atendiendo a la fórmula (8.2) podemos ver claramente que

$$\vec{p} = m_t \vec{v}_{cm}.$$

A su vez, si la fuerza exterior ejercida sobre el sistema de partículas es nula, haciendo uso de (8.3) se ve fácilmente que  $\vec{p}$  permanece constante, de donde podemos enunciar la conservación del momento lineal total del sistema:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte.$$

Recuerda



▷ Si la fuerza neta externa que actúa sobre un sistema es nula, el momento lineal de éste se conserva.

### 8.3.4. Energía

Generalizando el teorema de las fuerzas vivas a todo un sistema de partículas se puede demostrar que

$$W_t^{A \rightarrow B} = E_c(B) - E_c(A)$$



donde  $E_c = \sum_{i=1}^N E_{c,i}$ . Cuando todas las fuerzas, tanto las internas como las externas, que aparecen en acción en el sistema son conservativas podemos enunciar un teorema general de conservación de la energía, que dirá

$$E_T = E_c + E_p = cte.$$

Ahora bien, como ya hemos definido una  $E_c$  total nos quedará ver cómo definir la magnitud  $E_p$ . Intuitivamente se puede ver que deberá ser una suma de todas las energías potenciales puestas en juego en el sistema, es decir, un término donde se considere la energía potencial que pueda tener cada partícula por la aplicación de la fuerza externa, y otro donde se sumen todos los pares de interacción entre partículas del propio sistema, que también contribuirá. Estas ideas se traducen en

$$E_p = \sum_{i=1}^N E_{p,i}^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^n E_{p,ij}^{int}.$$

### Energía mecánica interna

Relacionando la energía cinética de un sistema de partículas en un sistema de referencia inercial usual con la que tiene en el sistema de referencia centro de masas se llega a la ecuación

$$E_c = E'_c + \frac{1}{2} m_t v_{cm}^2$$

donde vemos que, además de la energía cinética que tiene el sistema considerándole como un único cuerpo situado en su centro de masas, aparece otra energía, que se relaciona con cómo se mueven esas partículas respecto al centro de masas.

◊ Posteriormente veremos que esa  $E'_c$  se puede expresar mucho más fácilmente cuando tenemos un sistema de masas continuo que esta rotando

▷ Cuando tanto las fuerzas externas como las internas que actúan sobre un sistema de partículas son conservativas, la energía total del sistema permanece constante.

Nota



Recuerda



## 8.4. Aplicaciones

### 8.4.1. Sistema de referencia del centro de masas

Consiste en situar el sistema de coordenadas justo con el origen en el centro de masas. Tiene como ventaja que, si la resultante de todas las fuerzas exteriores es nula, es decir si  $\vec{F}^{ext} = \vec{0}$ , entonces en este nuevo sistema el centro de masas permanece constante e igual a 0 (ya que está situado en el origen de coordenadas) y además, se trata de un sistema inercial.

Para pasar de un sistema a otro basta usar las ecuaciones (5.3) en este caso particular y tendremos

$$\begin{aligned} \vec{r}'_i &= \vec{r}_i - \vec{r}_{cm} \\ \vec{v}'_i &= \vec{v}_i - \vec{v}_{cm} \end{aligned}$$

habiendo primado en este caso las coordenadas que se verían desde el sistema centro de masas.

### 8.4.2. Problemas de dos cuerpos

o Cuando tenemos un problema de dos cuerpos podemos separar este problema en dos situaciones diferenciadas. Por ejemplo, si queremos ver que sucede con el sistema Tierra-Sol, podríamos plantearnos usar la ecuación (8.3) para tener una idea global de cómo se está moviendo el sistema.

No obstante esta ecuación no nos da la información concreta de cómo una partícula, o un planeta, se mueve respecto al otro, sino sólo como se desplaza su centro de masas. Es muy útil suponer que las fuerzas exteriores sobre el sistema sean nulas, es decir, que tengamos un sistema de dos cuerpos aislados, y ver que sucede. En ese caso  $\vec{a}_{cm} = \vec{0}$  y, por tanto, el c.d.m. se desplazará con movimiento rectilíneo y uniforme (o se estará quieto). Pero ¿qué sucede con las partículas que componen nuestro sistema?

Cuando las fuerzas externas son nulas se puede demostrar tras un poco de álgebra que

$$\vec{F}_{12} = \mu \vec{a}_{12}$$

donde  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  y  $\vec{a}_{12}$  es la aceleración del cuerpo 2 vista desde el 1. Esta igualdad nos permitiría establecer como es el movimiento de los cuerpos como si de un único cuerpo de masa  $\mu$  se tratase.

### 8.4.3. Colisiones

Cuando tenemos un sistema de partículas en el cual sus partículas componentes chocan entre sí, en ausencia de fuerzas externas, hemos de tener en cuenta que esto supone una conservación de la masa, evidentemente, más una conservación del momento lineal, como ya se ha escrito en 8.3.3. Por tanto tomando el sistema en un instante *inicial* y otro *final* tendremos

$$\begin{aligned} \sum_i m_i^i &= \sum_i m_i^f \\ \sum_i p_i^i &= \sum_i p_i^f \end{aligned}$$

En general, para simplificar los problemas, el número de partículas en los instantes *i* y *f* suele ser 1 o 2.

#### Conservación de la energía

En las colisiones, en cambio, no se tiene por qué conservar la energía. Aquellas en las que si que se tiene que  $E_c^i = E_c^f$  se denominan **elásticas**. Para medir el grado de elasticidad de una colisión, y también para aportar un dato extra en el caso en el cual la conservación del momento (y de la masa) no nos aporta información suficiente, se recurre al concepto de coeficiente de restitución. Éste se define en el caso unidimensional como

$$K = -\frac{v_1^f - v_2^f}{v_2^i - v_1^i} \quad (8.4)$$

y cuyo valor varía entre 1 para un choque elástico y 0 para otro perfectamente inelástico.

Ampliación



Ampliación



o La demostración de que  $K = 1$  para un choque elástico no es complicada, aunque hay que hacer un poco de álgebra. Pasa simplemente por plantear, para un choque de dos cuerpos donde no hay variación en la masa, las ecuaciones de conservación del momento lineal y, por ser elástico, también las de la energía cinética. Serán dos ecuaciones con dos incógnitas. Se despeja y sustituye y, al resolver la ecuación de segundo grado que se obtiene, sale una relación de  $v_1^f$  y  $v_2^f$  de la cual ya, introduciendo sus valores en (8.4) se obtiene el resultado deseado. Sería muy útil que el lector comprobara esto personalmente a modo de ejercicio práctico.

# Capítulo 9

## Dinámica de la rotación

### 9.1. Introducción

#### 9.1.1. Sólido rígido

Para simplificar mucho la explicación de la rotación en los cuerpos se toma siempre un modelo de cómo son estos cuerpos que se denomina *sólido rígido*. Este modelo consiste en considerar que los cuerpos, los sólidos tomados, son absolutamente indeformables, son rígidos. Matemáticamente se puede expresar de una manera más rigurosa diciendo que la distancia entre sus partículas no cambia. Dada una partícula  $j$  y otra  $i$  del sistema que consideremos siempre se tendrá que  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = K$  siendo  $K$  una constante cualesquiera.

Para un cuerpo de este tipo, por tanto, conociendo dónde está en un momento determinado una partícula y el ángulo  $\theta$  de rotación del cuerpo respecto a la posición original, conocemos el resto de las posiciones de los puntos.

#### 9.1.2. Analogías

El estudio de la dinámica de la rotación se puede hacer sencillo teniendo presentes las siguientes analogías entre la dinámica normal y ésta.

traslación	Rotación
$x$	$\theta$
$v$	$\omega$
$a$	$\alpha$
$m$	$I = \sum_i m_i r_i^2$
$\vec{p}$	$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$
$\vec{F}$	$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
$F = ma$	$M = I\alpha$
$F = \frac{dp}{dt}$	$M = \frac{dL}{dt}$
$p = mv$	$L = I\omega$
$W = Fd$	$W = M\theta$
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$

### 9.2. Momento de una fuerza

Cuando un cuerpo sufre una aceleración es porque tiene una *causa* que lo provoca. Newton descubrió que es la *fuerza* la causa de que esto suceda. ¿Cuál es la causa de una rotación?. Es el momento de una fuerza. Una deducción fácil, clara y divertida se puede encontrar en [1]. De momento aquí se expondrá su definición y

propiedades. Como  $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$  tomando  $M$  será igual a  $rF \sin \alpha$  siendo  $\alpha$  el ángulo formado entre el vector  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ . Por tanto la componente perpendicular al vector posición es la que interviene realmente en la rotación.

Recuerda



▷ La componente de la fuerza perpendicular al vector posición es la que realmente interviene en la rotación.

### 9.3. Momento angular

En dinámica de traslación la variación del momento lineal  $\vec{p}$  respecto al tiempo es denominada fuerza. Parece lógico suponer que debiera existir alguna magnitud análoga en dinámica de rotación tal que su derivada temporal nos proporcione también la *causa*, es decir, el momento de las fuerzas  $\vec{M}$ . Como  $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$  probemos a tomar  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  siendo

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (9.1)$$

y ver que sucede al ser derivado. Es sencillo llegar a la conclusión de que, efectivamente, esta magnitud es la análoga del momento lineal  $\vec{p}$  en cuanto que al ser derivada se obtiene  $\vec{M}$ .

Ampliación



◦ Derivar esta magnitud no es complicado, razonando que un producto vectorial no es sino un producto combinado de las componentes de un vector no parece descabellado admitir que

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Así tenemos que

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

en donde es sencillo darse cuenta de que  $\vec{p} = m\vec{v}$  y que  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ . Tenemos entonces un primer sumando que será  $\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$  por se el producto vectorial de dos vectores paralelos, y un segundo sumando que es, efectivamente, igual a  $\vec{M}$ .

También se puede expresar  $L$  en función del momento de inercia  $I$  como

$$L = I\omega.$$

Ampliación



◦ La igualdad  $L = I\omega$  se puede conseguir tomando un sólido rígido y calculando cuanto será su momento angular. Para una determinada partícula tendremos que  $L_i = m_i r_i v_i$ . De aquí sólo resulta interesante conocer cuanto será la proyección de este valor sobre el eje  $z$  que vamos a tomar en este caso como el eje de rotación. Esta proyección se logra multiplicando  $L_i$  por el  $\sin \theta_i$ , siendo  $\theta_i$  el ángulo formado por  $\vec{r}_i$  con el eje de giro. Así tenemos que

$$L_z = \sum_i L_{z_i} = \sum_i m_i r_i v_i \sin \theta_i = \sum_i m_i R_i^2 \omega$$

siendo  $R_i$  la distancia de la partícula  $i$  al eje. Todo esto se puede expresar ahora fácilmente como

$$L_z = \omega \sum_i m_i R_i^2 = I\omega$$

puesto que se define  $I = \sum_i m_i R_i^2$ . Existen algunos ejes en un cuerpo, generalmente ejes de simetría, tales que si el cuerpo rota alrededor de estos ejes, el momento angular total es paralelo al eje de rotación, y por tanto para ellos  $L_z = L$ . En estos casos se puede escribir que

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Nota



◊ El momento angular total como vector  $\vec{L}$  no tiene por qué estar en la dirección del eje de rotación si este eje no coincide con alguno de simetría del cuerpo.

## 9.4. Momento de inercia

Se ha visto ya en apartados anteriores la importancia relativa del momento de inercia  $I$  como el análogo de la masa para las rotaciones.

▷ El momento de inercia es el análogo de la masa para una rotación.

Para sistemas discretos este momento de inercia se expresa como

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

donde  $r_i$  representa la distancia de la partícula al eje de rotación. Pero normalmente se tiene cuerpos reales, formados por tal cantidad de átomos, de pequeñas partículas que se les supone continuos. Para ellos la fórmula de cálculo del momento de inercia es

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV.$$

No obstante, a la hora de determinar el momento de inercia de un determinado cuerpo es interesante conocer que

1. La simetría del cuerpo permite a veces realizar sólo parte del cálculo.
2. Como el momento de inercia es aditivo<sup>1</sup> el cálculo de un momento de inercia de un cuerpo compuesto se puede tomar como la suma de los momentos de inercia de sus partes. También si tenemos un cuerpo formado por uno más sencillo al que “le falta un cacho” podemos calcular su momento como la suma del cuerpo sencillo menos el cacho que le falta.
3. Muchas veces dado el momento de inercia de un cuerpo respecto a un cierto eje podemos sacar su momento en otro eje sin necesidad de recalcarlo usando el teorema de Steiner o el de las figuras planas.

### 9.4.1. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

El teorema de Steiner relaciona el momento de inercia de un eje que pase por el centro de masas de un cuerpo con el momento de inercia que tendría el mismo cuerpo tomando cualquier otro eje paralelo al primero. Esta relación es

$$I = I_{cm} + md^2$$

donde  $I$  es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje paralelo al original,  $I_{cm}$  es el momento de inercia del eje que pasa por el centro de masas,  $m$  es la masa total del cuerpo y  $d$  es la distancia entre estos ejes paralelos.

▷ El teorema de Steiner relaciona el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de masas de un sólido con cualquier otro eje paralelo a él.



Recuerda



Recuerda

<sup>1</sup>Ya que proviene de una suma o integración, que son operadores lineales.

### 9.4.2. Teorema de las figuras planas o de los ejes perpendiculares.

El momento de inercia de una figura plana respecto a un eje perpendicular a la figura es igual a la suma de los momentos de inercia de dos ejes que estén contenidos en el plano de la figura, corten al eje perpendicular y sean todos perpendiculares entre si.

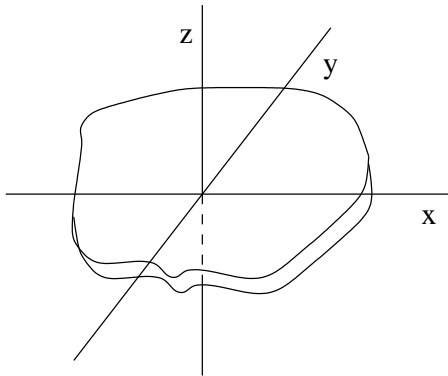


Figura 9.1: Dibujo de una figura plana.

Es decir, dado el dibujo de la figura 9.1 tendremos que  $I_z = I_y + I_x$ . Este teorema nos sirve, por ejemplo, para calcular fácilmente el momento de inercia de un anillo. Respecto al eje que pasa por el centro del anillo, como toda la masa está situada a la misma distancia tenemos que su momento de inercia será de  $mR^2$  (es trivial, como dicen los matemáticos). Además como el anillo tiene mucha simetría el momento de inercia de un eje que esté contenido en el plano del anillo será igual al de otro eje también contenido en el plano pero perpendicular al eje anterior, ya que el anillo “se ve igual”. Si llamamos a este otro momento  $I_p$  poniendo  $p$  de plano, tendremos que  $mR^2 = I_p + I_p \Rightarrow I_p = \frac{1}{2}mR^2$ .



► El teorema de los ejes perpendiculares sólo se aplica a las figuras planas y permite relacionar el momento perpendicular al plano de la figura con los momentos de otros dos ejes contenidos en el plano de la figura.

### 9.4.3. Relación del momento de inercia respecto a un punto con los tres ejes

Si llamamos al momento de inercia de un cuerpo respecto a un punto, y no un eje,  $I_0$  tendremos que

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z.$$

Como demostración basta darse cuenta que el momento  $I_0$  será

$$\int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

frente a los momentos

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\}.$$

## 9.5. Ecuación de la dinámica de rotación

Sabemos ya que  $\frac{dL}{dt} = M$  y que cuando la rotación es alrededor de un eje de simetría<sup>2</sup>  $L = I\omega$ . Introduciendo esta  $L$  en la fórmula anterior tenemos sencillamente que

$$M = I\alpha \tag{9.2}$$

donde  $\alpha$  es la derivada de  $\omega$  respecto al tiempo, es decir, será la aceleración angular.

<sup>2</sup>Lo cual será cierto en los problemas que puedan surgir a este nivel.

De esta manera la ecuación (9.2) nos proporciona una relación entre los momentos aplicados a un cuerpo y la aceleración angular que logra alcanzar ese cuerpo. En muchos casos, como se puede ver en 9.7.1 y 9.7.2 se puede establecer una relación entre  $\alpha$  y  $\vec{a}$ .

### 9.5.1. Conservación del momento angular

A partir de la fórmula (9.2) y, de manera análoga a como lo planteamos con la dinámica de traslación, se puede establecer que cuando no actúa ningún momento externo sobre un sistema de partículas o un cuerpo rígido, su momento angular se mantiene constante, teniéndose entonces que

$$L_i = L_f.$$

Ésta es una igualdad muy útil para resolver situaciones en las que el cuerpo varía su forma, y por tanto su momento de inercia  $I$ , pero sin que existan momentos externos. Una explicación más detallada se encuentra en 9.7.6.

▷ Cuando no actúan momentos externos sobre un sistema de partículas su momento angular  $L$  permanece constante.



Recuerda

## 9.6. Energía de rotación

Al igual que un cuerpo con una cierta velocidad  $v$  presenta una energía cinética igual a  $\frac{1}{2}mv^2$ , los cuerpos que rotan tienen una energía asociada a esta rotación que, por analogía, resulta ser

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

◦ También se puede razonar tomando  $E_c = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$  y, como  $v_i = r_i \omega$  tendremos  $E = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$  que, extrayendo factor común resultará ser

$$E_c = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$



Ampliación

Cuando, además, el cuerpo está girando con respecto a un eje que pase por su centro de masas la energía cinética total es igual a la de traslación del centro de masas más la de rotación, es decir

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

siendo  $m$  la masa total del cuerpo y  $v_{cm}$  e  $I_{cm}$  la velocidad del centro de masas y el momento de inercia del cuerpo cuando rota por un eje que pase por el centro de masas, respectivamente.

## 9.7. Algunos problemas típicos de rotación

Se detallan a continuación algunas situaciones fácilmente resolubles y características en las cuales se aplican las fórmulas anteriores de dinámica de rotación.

### 9.7.1. Cuerpos rodantes

Cuando un cuerpo rueda sin deslizarse se establece una ligadura, hablando en lenguaje físico, entre el ángulo que rota el cuerpo y la distancia que avanza. Para un cuerpo redondo, que es el caso común,  $s = R\theta$ , siendo  $R$  el radio de la figura. Esto es muy lógico porque si el camino que va recorriendo el móvil fuera mayor que la longitud de cuerpo que toca el suelo necesariamente debería haber algún tipo de deslizamiento.

Teniendo esta igualdad es muy fácil establecer que

$$\left. \begin{aligned} v_{cm} &= R\omega \\ a_{cm} &= R\alpha \end{aligned} \right\}.$$

### 9.7.2. Poleas

En problemas en los que aparezcan poleas, como éstas giran alrededor de su centro de masas y su momento de inercia será el de un círculo (o un cilindro, si es tridimensional), tendremos ya toda la situación conocida.

1. El momento de las fuerzas será simplemente el producto de la fuerza, o la tensión de la cuerda, por el radio de la polea al que se aplica.
2. El momento de inercia de un círculo es  $\frac{1}{2}MR^2$ .
3. Tendremos así que, si la cuerda pasa por la parte exterior de la polea, como es habitual (hay que tener más cuidado si la polea tiene más gargantas o éstas no están sobre la superficie externa del disco) para cada tensión  $T$  aplicada en la polea  $TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$ .
4. Como la cuerda gira sin deslizar existe la condición  $a = R\alpha$  que se aplica a la ecuación anterior.

### 9.7.3. Estática y equilibrios

En aquellos problemas en los cuales, no existiendo movimiento de ningún tipo, se nos pida calcular la geometría de alguna estructura o bien las fuerzas de acción o de reacción que hay que tener para mantener la estructura en equilibrio basta con aplicar dos fórmulas.

1. Al no haber movimiento del centro de masas tendremos que la resultante de todas las fuerzas deberá ser nula. Así

$$\sum \vec{F} = 0.$$

Esta ecuación se descompondrá en tantas como dimensiones tenga el problema.

2. Cuando hay una situación estática o un equilibrio el cuerpo tampoco gira respecto a ningún punto. Por ello podremos aplicar también que los momentos resultantes deben ser nulos

$$\sum \vec{M} = 0.$$

Con estas ecuaciones aplicadas con cierta intuición a algunos puntos concretos del sistema se pueden resolver este tipo de problemas.



### 9.7.4. Cálculo de la aceleración angular de un cuerpo

Para ello hay que aplicar la ecuación general de la dinámica de rotación.

1. Se consigue el momento de inercia de la figura respecto al eje en que se produce la rotación.
2. Se calculan los momentos de fuerzas tomando como punto uno del eje de rotación. Si el problema es bidimensional este eje será perpendicular al plano, generalmente, y podremos reducir el momento de fuerzas tridimensional a su módulo, es decir  $M = Fc \sin \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo que forman  $\vec{F}$  con  $\vec{r}$ .
3. Se relacionan estas magnitudes con la aceleración angular  $\alpha$  mediante  $\sum M = I\alpha$ .

### 9.7.5. Cálculo de momentos de inercia

Para la resolución de los problemas de cálculo de momentos de inercia es habitual el planteamiento según algunos distintos tipos.

1. Si no conocemos el momento de la figura en absoluto respecto a ningún otro eje, y ésta no está compuesta de otras figuras tendremos que aplicar  $I = \sum_i m_i R_i^2$  para un cuerpo discreto o bien  $I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV$  para uno continuo.
2. Si la figura es plana y conocemos los dos momentos de inercia del plano, y nos piden el del eje perpendicular a la figura se intenta usar el Teorema de las figuras planas. (Ver 9.4.2).
3. Si conocemos el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masas y nos piden hallar el de otro eje paralelo a este usaremos el Teorema de Steiner. (Ver 9.4.1).
4. Si nuestra figura está compuesta por otras figuras de las cuales conocemos su  $I$ , o bien parece una figura sencilla a la que se ha extraído alguna otra figura simple, usando la linealidad del momento de inercia podremos poner nuestro momento incógnita como sumas o restas de otros momentos más sencillos, teniendo siempre cuidado de que todos los momentos estén referidos al mismo eje de rotación.

### 9.7.6. Variación de la forma del cuerpo que gira

En aquellos problemas en los cuales varíe la forma de un cuerpo pero no existan momentos externos es muy útil la aplicación del principio de conservación del momento angular. Tomando un instante  $i$  y otro  $f$  inicial y final tendremos que  $L_i = L_f$  y, por tanto

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f,$$

relación de la que conocidos tres datos podremos extraer el cuarto.

◊ Esta es la razón por la que las patinadoras sobre hielo, cuando encogen los brazos, van angularmente más deprisa. Al disminuir su  $I$  resulta que  $\omega$  debe aumentar para mantener constante el momento angular.



**9.7.7. Conservación de la energía para cuerpos rodantes**

Si tenemos un caso de un cuerpo simétrico que rueda respecto a un eje que pasa por su centro de masas y todas las fuerzas externas son conservativas, podremos aplicar el teorema de conservación de la energía y tendremos que

$$E = E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}.$$

En este caso además

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Además, si el cuerpo rueda sin deslizar se podrá relacionar  $v$  y  $\omega$  mediante  $v = R\omega$ .

# Capítulo 10

## Conceptos generales de campos

### 10.1. Introducción

En bastantes campos de la física se trata el concepto de campo, introduciéndole de forma más o menos intuitiva y formulándolo después rápidamente para después realizar con él algunos cálculos. De todas formas parece más conveniente analizar ahora algunos conceptos de manera un poco más rigurosa para poder luego entender mejor la visión que sobre la física aportan los campos.

### 10.2. Definición

Se denomina campo a todo objeto matemático que esté definido para cualquier punto del espacio. En física una magnitud es un campo cuando está definida en todo el espacio. Si esta magnitud es un número, un escalar, tendremos un campo escalar, si es en cambio un vector, será un campo vectorial.

Por ejemplo, en un día con mucho viento, la temperatura que haga en cualquier parte de una ciudad será un campo escalar. Así podemos decir que en el punto “tal” existen tantos grados de temperatura y en el “cual” otros ciertos grados de temperatura. Dado cualquier punto de la ciudad diciendo que temperatura hace tendremos un campo escalar (de temperaturas). Si para esta misma ciudad tomamos la intensidad y dirección del viento como un vector tendremos un campo vectorial. Análogamente podremos decir: En este punto el vector de la velocidad del viento es tanto, pero en este otro punto es cuanto. Tendremos definida una cierta magnitud vectorial en todos los puntos del espacio.

### 10.3. Formalismo matemático

Para describir matemáticamente un campo bastará con indicar cuánto vale la magnitud que nos interese en todos los puntos del espacio indicada por una cierta función. Para un campo escalar tendremos que  $M = f(x, y, z)$  o quizás también del tiempo  $t$ . Por ejemplo, si queremos definir el campo escalar *distancias al origen de coordenadas* tendremos que  $M = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  y así hemos cumplido la definición de campo escalar. Dado un punto del espacio tenemos bien escrita una magnitud para ese punto. En el punto  $(1, 1, 1)$  la magnitud, en este caso, es  $\sqrt{3}$ .

Un campo vectorial se define de manera análoga, pero teniendo en cuenta que deberemos aportar las tres componentes del vector. Podemos denotarlo como  $\vec{M} =$

$\vec{f}(x, y, z)$  o también como

$$\left. \begin{aligned} M_x &= f_1(x, y, z) \\ M_y &= f_2(x, y, z) \\ M_z &= f_3(x, y, z) \end{aligned} \right\}.$$

Un ejemplo (que representa una fuerza cualesquiera) de campo vectorial sería

$$\vec{M}(x, y, z) = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + xy\hat{k}.$$

## 10.4. Flujo de un campo vectorial

Se define el flujo de un campo vectorial como la cantidad de campo que atraviesa cierta área. Como esta definición hablada es un poco pobre, matemáticamente si tenemos un campo vectorial  $\vec{M}$  que atraviesa una pequeña región  $dS$  tomamos como  $d\phi = M dS$ . Ahora bien, no es lo mismo que la superficie que atravesase sea perpendicular al campo, en cuyo caso entraría “de lleno” a que dicha superficie esté situada de forma paralela, pues en este último caso no atravesaría nada de campo. Por esto se define un vector  $d\vec{S}$  que sea perpendicular a la pequeña área considerada y tener así que  $d\phi = \vec{M} \cdot d\vec{S}$ . Con esto logramos que aparezca el término  $\cos \theta$  en la definición de flujo y poder así considerar la proyección correcta de campo que atraviesa la superficie. Para lograr tener el flujo total no hay más que integrar:

$$\phi_M = \int_S \vec{M} \cdot \vec{S}.$$

## 10.5. Gradiente de un campo

Ampliación



o Dada una fuerza conservativa ya hemos visto anteriormente como se podía extraer de un potencial, lo cual reportaba la ventaja de que una fuerza conservativa no es sino un campo vectorial, y por tanto tendrá tres dimensiones, frente a un potencial, que puede ser considerado un campo escalar y por tanto presenta sólo una dimensión.

La operación por la cual lográbamos esto la llamamos gradiente, y teníamos que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ .

Así pues la operación gradiente es una forma de, a partir de un campo escalar, lograr otro vectorial y, como hemos visto en el párrafo anterior, este campo nuevo será un campo de fuerzas si el otro era un potencial.

## 10.6. Ley de Gauss

Si tomamos una fuerza central que decrezca con el cuadrado de la distancia, es decir, del tipo  $\vec{F} = C \frac{\hat{r}}{r^2}$  donde  $C$  es una constante cualquiera, y calculamos su flujo a través de una superficie esférica centrada también respecto al origen, como la fuerza, de radio  $R$  tendremos que

$$\phi = \int_S C \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{S}$$

y aquí considerando que para este caso la fuerza siempre corta perpendicularmente a nuestra esfera, y la distancia a ella siempre es  $R$  tendremos, extrayendo las constantes y realizando el producto escalar

$$\phi = \frac{C}{R^2} \int_S dS$$

que, simplemente, dará  $\phi = \frac{C}{R^2} 4\pi R^2$  y, por tanto

$$\phi = 4\pi C.$$

Esta ley encontrada para un caso muy particular, se puede demostrar no obstante, que sirve también tomando *un campo gravitatorio o electrostático cualquiera y una superficie cerrada cualquiera*. Por tanto, cualquiera que sea la superficie que tomemos

$$\phi = 4\pi Kq, \quad (10.1)$$

donde  $q$  es la carga encerrada por la superficie, para el caso electrostático, o bien

$$\phi = -4\pi Gm, \quad (10.2)$$

siendo ahora  $m$  la masa total que encierra la superficie.

Este resultado, en cuya demostración general no vamos a entrar, resulta muy importante y útil, ya que es práctico para resolver bastantes problemas, y se conoce con el nombre de Ley de Gauss para el campo electrostático o gravitatorio, en honor de su descubridor.

## 10.7. Circulación

◦ Se define la circulación de un campo vectorial  $\vec{M}$  a lo largo de un recorrido  $l$  como la integral a lo largo de la línea de la componente del campo que es paralela a dicha línea.

Esta definición se puede expresar matemáticamente como

$$\int_L \vec{M} \cdot \vec{l}.$$

Como podemos observar esta nueva magnitud, la circulación, no es más que la definición matemática de una magnitud física que ya conocemos: el trabajo.

Ampliación



## 10.8. Representación gráfica de los campos

### 10.8.1. Campo escalar

Representar un campo escalar se puede realizar por medio de sus *superficies de nivel*, es decir, uniendo con una línea todos los puntos que presente el mismo potencial, y observando estos dibujos tendremos una idea de cómo se comporta este campo. Un ejemplo podrían ser las líneas de nivel de un mapa geográfico. En él se indican cuánto vale en cada punto la altura. Basta echar una ojeada a un mapa geográfico para, observando dónde se acumulan más líneas de nivel saber que en esos puntos la pendiente será mayor.

◦ Además, en este ejemplo, el campo escalar de las alturas coincide (salvo una constante) con el campo escalar potencial gravitatorio. De esta manera un punto donde hay muchas líneas de nivel supone un punto donde hay mucha variación de energía potencial. La variación la proporciona la derivada del escalar, en este caso el gradiente. Si esta derivada es alta el gradiente será considerable. Pero el gradiente de un potencial con signo menos es la fuerza que se siente en ese punto. ¿Cómo entender esto desde nuestro mapa geográfico?, es sencillo, allí donde las curvas de nivel están muy juntas el terreno es muy empinado, tiene mucha pendiente, y la fuerza que se ejerce sobre nosotros en esos puntos será muy pronunciada (hacia arriba o hacia abajo) porque el gradiente lo es. O escrito de otra forma ¿quién no ha sentido la dificultad de

Ampliación



subir o bajar por un terreno muy escarpado?. Esta dificultad que nos proporcionan las fuerzas gravitatorias se puede ya ver gracias a la representación de un mapa con líneas de nivel.

### 10.8.2. Campo vectorial

Aunque representar un campo vectorial no es sencillo una manera de hacerlo es mediante el concepto de las *líneas de fuerza*, que son líneas tangentes en todo punto a la dirección del campo. Si el campo fuera uno de velocidades estas líneas coincidirían con las trayectorias de las partículas sometidas a dicho campo. Algunas propiedades de estas líneas es que no pueden cortarse<sup>1</sup> pues, si así fuera, tendríamos que en ese punto habría dos valores para el mismo campo. Para lograr que estas líneas nos hablen del módulo del campo (es decir, de su intensidad) se dibujan de tal manera que la densidad de líneas sea proporcional a dicho módulo.

Cuando un campo es conservativo, a los puntos donde las líneas convergen, se juntan, se denominan sumideros, y a aquellos de donde surgen o nacen fuentes. Así cualquier planeta es un “sumidero” de campo gravitatorio, y un protón sería una “fuente” de campo electrostático.

---

<sup>1</sup>Más que en puntos singulares, sitios donde la fuerza es infinito...

# Capítulo 11

## Gravitación y campo gravitatorio

### 11.1. Introducción

La ley de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  es muy útil para indagar cómo se mueve un cuerpo sometido a una cierta fuerza, pero no obstante hay algunas situaciones en las cuales hay que indagar cual es la fuerza a la que se ve sometido un cuerpo determinado. Entre estas fuerzas las más conocidas son la gravitatoria y la electrostática, de aspecto muy similar pero orígenes distintos.

No obstante estas fuerzas aparecen gracias a una extraña “acción a distancia”. Para evitar este concepto se introduce el concepto de campo, como una “deformación” que sufre el espacio<sup>1</sup> que posibilita esta acción a distancia entre unas partículas y otras.

### 11.2. Ley de la gravitación universal

#### 11.2.1. Enunciado

Esta ley, descubierta por Newton, afirma que dos masas cualesquiera experimentan una atracción entre ellas en la línea que une sus cuerpos y que dicha atracción es proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, es decir

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (11.1)$$

En esta ley si tomamos  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$  podemos decir también que

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -GMm \frac{x}{r^3} \\ F_y &= -GMm \frac{y}{r^3} \end{aligned} \right\}$$

Donde  $M$  es la masa de un cuerpo,  $m$  la del otro,  $r$  el módulo de la distancia que hay entre ellos, que podemos expresar como  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$  y  $G$  es la constante de gravitación universal cuyo valor experimental es aproximadamente

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}.$$

---

<sup>1</sup>O el espacio-tiempo.

### 11.2.2. Las leyes de Kepler

Estas leyes de índole empírica son

1. Los planetas describen órbitas elípticas y planas alrededor de su sol, donde éste último ocupa el foco de la elipse.
2. El vector de posición con respecto al sol de un planeta cualquiera barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los planetas que giran alrededor de una misma estrella cumplen que  $T^2 \propto R^3$ , siendo  $T$  su periodo y  $R$  la distancia a la estrella.

### 11.2.3. Principio de superposición

La ley descubierta por Newton se aplica al hallar la fuerza de atracción entre dos únicos cuerpos puntuales. Por eso es lógico preguntarse que sucederá cuando tenemos tres o más cuerpos que se atraen gravitatoriamente entre sí. Para ello se ha descubierto el principio de superposición.

Este principio indica simplemente que, a la hora de calcular cual será la fuerza que siente una partícula por otro conjunto de partículas, basta sumar vectorialmente las fuerzas.

Esta propiedad, pese a que estamos acostumbrados a ella, no deja de ser sorprendente. De alguna forma la perturbación que se crea en el espacio y que logra que los cuerpos se atraigan, es independiente de si ya existe otra perturbación creada por el mismo cuerpo, y simplemente se suman sus resultados respectivos para formar el total.

Ampliación



◦ Esta propiedad general que presenta la física en muchos campos se suele llamar linealidad. También a veces se habla de física lineal, óptica lineal, etc... indicando aquellos ámbitos en los que es válido afirmar que la perturbación total es simplemente la suma de las perturbaciones parciales.

Recuerda



▷ Para un conjunto de partículas la fuerza gravitatoria que experimenta una partícula es, simplemente, la suma de los vectores de cada una de las fuerzas involucradas.

## 11.3. Campo gravitatorio

### 11.3.1. Concepto

Podemos decir que cuando un planeta gira alrededor del Sol es debido a que el Sol “tira” de él, a través de los millones de kilómetros de espacio vacío e inerte, usando para ello un concepto denominado “acción a distancia”, es decir, esta misteriosa capacidad de lograr que un cuerpo afecte a otro sin que “haya nada en medio”. No obstante otra forma más física de interpretar el mismo suceso es suponer que el Sol crea algún tipo de perturbación, crea una entidad que hace que, cuando un planeta se sitúa en el mismo espacio, éste se sienta atraído. A esta perturbación es a la que denomina campo.

Ampliación



◦ ¿Pero por qué afirmar que es más físico suponer la existencia de este campo?. Para ello valgámonos de un ejemplo sencillo. Si en un estanque en el cual hay bastantes olas porque un niño se está bañando enfrente, nosotros dejamos caer un corcho de una botella observaremos que éste oscila. La interpretación de “acción a distancia” postularía que es el niño el que, de una forma quizás “misteriosa” ha logrado hacer oscilar el corcho. La interpretación de campo sostiene que el niño crea una perturbación en el medio, en este caso



el agua, que se transmite y llega hasta el corcho, haciéndole oscilar. Incluso podríamos ver que, como las ondas son esféricas y se van haciendo cada vez más grandes, si su energía permanece constante, como ha de repartirse entre la longitud de la onda total, que es  $2\pi r$ , su efecto decrecerá con el inverso de la distancia. Podríamos postular así la ley de acción a distancia del niño sobre los corchos de botella como “todo niño en un estanque genera una fuerza oscilatoria sobre los corchos de los alrededores que depende directamente de la fuerza del niño e inversamente de la distancia a dicho niño”, pero no obstante es mucho más natural pensar que el niño se limita a realizar una *perturbación* que afecta tarde o temprano al corcho.

Estas dos formas de ver el mismo fenómeno, no obstante, dejan claras dos diferencias extraordinariamente importantes:

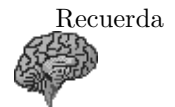
1. En la “acción a distancia” no parece haber ningún inconveniente para que dicha acción se ejerza instantáneamente, pero en cambio cuando usamos el concepto de campo parece lógico que la perturbación se propague y tarde, por consiguiente, cierto tiempo en alcanzar su objetivo. Vemos pues que existe así una forma mucho más tangible de ver si el Sol genera un campo o una acción a distancia. La respuesta es un campo, aunque tendríamos que irnos hasta la mecánica relativista, que escapa de los objetivos de este libro, para comentar que, efectivamente, la gravedad “tarda” en llegar desde el Sol hasta nuestro planeta cierto tiempo. Concretamente, si lográsemos quitar repentinamente el Sol de nuestro Universo la Tierra no se enteraría de su ausencia gravitatoria hasta pasado un cierto tiempo. ¿A qué velocidad se propaga esta alteración gravitatoria? A la velocidad de la luz  $c$ , como casi todo en mecánica relativista.
2. La presencia de un campo implica de alguna forma la existencia de un “medio” que propague la perturbación. Este medio sería el agua, en el ejemplo didáctico expuesto anteriormente, y el vacío en nuestro caso concreto de la gravedad (y el electromagnetismo). Por tanto el “vacío” no está tan vacío como parece, sino que debe presentar una cierta estructura que permita transmitir estas alteraciones. A esta estructura Albert Einstein, Minkowsky y otros la denominaron espacio-tiempo.

### 11.3.2. Entidad matemática

Partiendo de la ecuación (11.1) de Newton para la gravitación podemos ver que, si consideramos un cuerpo aislado, podemos suponer que este ejerce un campo igual a la fuerza que experimentaría una partícula de masa  $m$  dividido, precisamente, por esta masa  $m$ . Así tenemos que el campo gravitatorio, que llamaremos  $\vec{g}$  es, simplemente

$$\vec{g} = \frac{\vec{f}}{m}.$$

▷ El campo gravitatorio  $\vec{g}$  que existe en cualquier sitio del espacio es igual a la fuerza neta que experimentaría una partícula de masa  $m$  en dicho punto dividida por esa misma masa.



De esta manera, de forma general, tendremos que el campo  $\vec{g}$  que genera una partícula de masa  $m$  será

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r}.$$

## 11.4. Energía potencial gravitatoria

Resulta muy interesante hacer un estudio sobre la energía potencial que puede tener un cuerpo por el hecho de estar sumergido en un campo gravitatorio. Sabemos ya que los campos gravitatorios producidos por una partícula puntual, serán

centrales y que toda fuerza central es conservativa y, por tanto, tendrá una energía potencial. Ahora bien, saber cuál será ésta puede ser o no sencillo. Veremos en este caso cuál es dicha energía potencial gravitatoria.

La energía potencial es fácilmente obtenible a través del trabajo que supone desplazar una partícula o cuerpo desde una posición hasta otra. Esto es así porque esta magnitud nos expresa una cierta energía “especial”, ya que la tiene el cuerpo por ocupar una posición, y la energía está íntimamente relacionada con el trabajo. Así podemos plantear cuál será dicho trabajo como

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}.$$

Como dicho trabajo resulta venir de una fuerza conservativa central emplearemos la misma técnica que se usaba para ver que las fuerzas centrales eran conservativas: separamos mentalmente la trayectoria en órbitas perpendiculares a la fuerza, en las cuales el trabajo será cero, y otras paralelas a dicha fuerza. En las fuerzas centrales las órbitas perpendiculares en todo punto a la fuerza resultan ser círculos concéntricos. Así pues sólo va a intervenir el trabajo realizado por alejar o acercar un cuerpo del origen, y la ecuación anterior pasará a ser

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr,$$

en donde sólo intervienen los módulos. Basta ahora recordar que  $F = -\frac{GMm}{r^2}$  para obtener que

$$W_{AB} = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{GMm}{r^2} dr = GMm \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right).$$

Como  $W_{AB} = E_p(r_A) - E_p(r_B)$  tenemos por fin que:

$$E_p^{grav}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r}. \tag{11.2}$$

Nota



◇

1. Intentando interpretar el resultado (11.2) tenemos que para que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo sea cero éste debe encontrarse ¡en el infinito!. ¿Cómo se entiende esto?. Como el alcance de la fuerza gravitatoria es infinito el hecho de que un cuerpo deje de sentirla supone que dicho cuerpo está infinitamente alejado. Ése es, en principio el significado de esta elección de origen de energía potencial.
2. Otro dato significativo es el hecho de que dicha energía sea negativa. Hasta ahora todas las energías nos habían salido positivas. ¿Qué puede significar que una energía sea negativa?. Para ello vamos a pensar en lo que supone tener un cuerpo con energía cero. Teóricamente éste sería un cuerpo incapaz de producir trabajo alguno. No es difícil asociar este cuerpo con uno situado en el vacío más absoluto, aislado y quieto en nuestro sistema de referencia. Como no tiene velocidad ni hay perturbación alguna su energía debería ser cero. Pensemos ahora en que hay que hacer para que un cuerpo parado en las cercanías de otro llegue a tener energía cero. Para ello deberíamos aislarle del otro, y para hacerlo le alejamos hasta el  $\infty$ . Ahora bien, como el otro cuerpo le atrae *hemos de aportar energía para alejarle* hasta dejarle aislado. Ahora bien, si para que este cuerpo tenga una energía nula hemos de darle *nosotros* energía, significa que, de alguna forma, este cuerpo “debe energía”, pues hemos de dársela nosotros para que su energía total sea cero. Precisamente como “debe” energía tenemos que su  $E_p$  es menor que cero.

## 11.5. Problemas concretos

### 11.5.1. Cálculo de la fuerza gravitatoria ejercida por un sistema de partículas

Recordando el principio de superposición enunciado en 11.2.3, para calcular la fuerza que sobre una partícula de masa  $m$  y radio  $\vec{r}$  ejerce un sistema de  $i$  partículas con masas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  y radios  $\vec{r}_i$  basta “sumar” todos los campos producidos, esto es

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = - \sum_{i=1}^N \frac{Gmm_i}{(\vec{r} - \vec{r}_i)^2} (\widehat{r - r_i})$$

### 11.5.2. Cálculo de la fuerza gravitatoria ejercida por un cuerpo continuo

Si debemos calcular la fuerza gravitatoria que ejerce un cuerpo continuo deberemos, aplicando el principio enunciado en 11.2.3, “sumar” todas las contribuciones. Para una suma continua hemos de recurrir al cálculo integral y lograr así conseguir

$$\vec{F} = - \int \frac{Gm}{(\vec{r}_0 - \vec{r})^2} (\widehat{r_0 - r}) dm.$$

Después como se hace usualmente se reemplaza  $dm$  por  $\rho(\vec{r})dV$  y se integra.

◊ Esta integración, que en el caso general puede resultar complicada, queda muy simplificada en problemas que presenten simetría eligiendo adecuadamente el sistema de coordenadas.



### 11.5.3. Problemas de satélites

Para resolver problemas de satélites generalmente basta con lograr relacionar su velocidad con la altura a la que órbita. Para ello se supone que describen una órbita circular a velocidad angular constante y que, por tanto, debe existir una fuerza que proporcione la aceleración normal necesaria. Esta fuerza es la gravitatoria.

Sabiendo entonces que

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

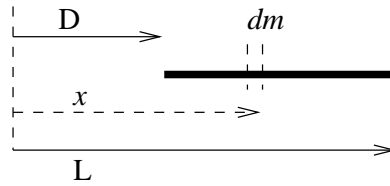
y relacionando  $v$  con otras magnitudes como  $v = R\omega$  y  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  suele bastar para sacar estos problemas.

### 11.5.4. Velocidad de escape

Se llama velocidad de escape a aquella que hay que dar a un cuerpo para que logre desligarse de la atracción gravitatoria a la que se encuentra sometido. Como desligar a un cuerpo de la atracción gravitatoria supone en cierta medida aislarlo del cuerpo que lo atrae, necesitaremos que la energía que tenga dicho cuerpo, sea, por lo menos, nula. En caso contrario tendrá una cierta energía potencial negativa, que supondrá que aún se encuentra ligado con el sistema que le atrae. Así pues tomando que la energía total, suma de cinética y potencial debe ser cero, tendremos que

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

y de aquí se puede extraer dicha conclusión. Se ha aplicado la ecuación (11.2). Es notable que la resolución de este problema supone el claro entendimiento de la sección 11.4.


 Figura 11.1: Campo  $\vec{g}$  generado por una varilla delgada.

### 11.5.5. Medida de la gravedad en la superficie de un planeta

El valor de  $\vec{g}$  en la superficie de un planeta será sencillamente el valor que el campo  $\vec{g}$  tiene en dicho punto y, por tanto

$$\vec{g} = \frac{GM}{R^2}$$

donde  $M$  es la masa del planeta y  $R$  el radio que dicho planeta tiene.

### 11.5.6. Cálculo de la atracción gravitatoria de algunos sólidos simples

Para algunos sólidos simples o que presenten simetría se puede calcular con relativa sencillez la atracción gravitatoria que ejercen, o su campo  $\vec{g}$ . Generalmente bastará integrar en unos casos y aplicar astutamente el teorema de Gauss en otros.

#### Varilla delgada horizontal

Para lograr calcular cual puede ser el campo que se ejerce a una distancia  $D$  de una varilla delgada, como la de la figura 11.1 tomemos un punto cualquiera a una distancia  $x$ . La pequeña masa  $dm$  generará un campo  $d\vec{g}$  que será

$$d\vec{g} = -G \frac{dm}{x^2} \hat{i}.$$

En estos casos siempre se toma la varilla homogénea, de donde  $dm = \lambda dx$ , aunque si no lo fuera tendríamos que  $dm = \lambda(x)dx$  y se integra entre los extremos que hay masa, es decir,  $x$  variando entre  $D$  y  $D + L$ . Así tenemos que

$$\vec{g} = \int d\vec{g} = \int_D^{L+D} -G \frac{\lambda}{x^2} dx \hat{i} = \frac{GM}{L} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{L+D} \right) \hat{i}$$

donde hemos sustituido  $\lambda = \frac{M}{L}$ .

#### Plano infinito

Si tenemos un plano infinito y queremos hallar el campo en cualquier punto tendremos que, necesariamente, en dicho punto el campo tiene que ser perpendicular al plano. Esto es así porque al ser el plano infinito en cualquier zona que estemos estamos “en el medio del plano”, es decir, hay la misma cantidad de masa en *todas* las direcciones. Podemos usar el teorema de Gauss para resolver este problema. Tomando como superficie un cilindro perpendicular al plano y de tal manera que la mitad este a un lado y la otra mitad al otro tendremos que el flujo total que atraviesa será  $\phi = -4\pi GM$  donde  $M = \sigma S$  siendo  $\sigma$  la densidad superficial y  $S$  el área que encierra el cilindro, que será la misma que la de su tapa. EL flujo se puede calcular fácilmente. Será solamente el de las tapas, pues los bordes resultan

paralelos al campo que, como hemos dicho antes, es perpendicular. En las tapas, por simetría, el campo será el mismo a lo largo de toda la tapa, y como además será perpendicular a ella tendremos que el flujo total resulta ser  $\phi = -2Sg$  donde el 2 es debido a que tiene dos tapas, y  $-Sg$  es sencillamente el campo por la superficie que, en este caso particular y sencillo, nos dará el flujo.

Relacionando ahora con la ecuación de Gauss anteriormente escrita tenemos que  $-4\pi G\sigma S = -2Sg$  y de esta manera deducimos que  $g = 2\pi G\sigma$  que, de forma un tanto sorprendente, *no depende de la distancia a la que estemos del plano*.

◊ Como ejercicio puede ser interesante plantearse el campo gravitatorio que generaría un hilo recto homogéneo infinitamente largo.

Nota



### Campo gravitatorio de un objeto esférico homogéneo<sup>2</sup>

Si tenemos un objeto esférico homogéneo podemos decir, por simetría, que el campo que genere será central. Entonces tomaremos como superficie de Gauss una esfera más grande que el objeto, concéntrica con él y cuyo radio, tomando como origen el centro del objeto, sea  $r$ . Dado que el campo de la esfera es central éste cortará perpendicularmente a la superficie de Gauss en todo punto, de donde el flujo será sencillamente  $\phi = -g4\pi r^2$  pues  $g$  es el módulo del campo, aún no sabemos cuanto, y  $4\pi r^2$  la superficie total de la esfera que usamos como superficie de Gauss.

Igualando este resultado con (10.2) tendremos que

$$-4g\pi r^2 = -4\pi Gm$$

y, por tanto, el resultado es que la esfera actúa como si toda su masa estuviera concentrada en su centro, pues

$$g = \frac{Gm}{r^2}.$$

---

<sup>2</sup>Al menos a capas.

## CAPÍTULO 11. GRAVITACIÓN Y CAMPO GRAVITATORIO

# Capítulo 12

## Campo y potencial eléctrico

### 12.1. Preliminar

Las leyes de este tema y las formas de resolución de problemas son muy similares en forma y contenidos a las del tema anterior. Por esta razón se verán un poco más escuetamente sus leyes. De todas formas hay que tener en cuenta que esta analogía se produce entre dos magnitudes tan diferentes como la atracción gravitatoria y la eléctrica, cuya diferencia en órdenes de magnitud es del orden de  $10^{20}$ .

### 12.2. Ley de Coulomb

Dos cargas eléctricas puntuales se atraen (o repelen) entre sí con una fuerza dada por

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \quad (12.1)$$

$Q$  y  $q$  son los valores de las cargas involucradas, que deberán llevar su correspondiente signo,  $\epsilon_0$  se denomina permitividad del vacío. A veces al valor  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  se le denota con la letra  $K$  y su valor aproximado es de  $9,00 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ .

#### 12.2.1. Principio de superposición

La fuerza que ejercen un sistema de cargas sobre otra es igual a la suma (vectorial) de las fuerzas de cada una de las cargas del sistema sobre la otra. Quiere decir esto que dado un sistema de cargas puntuales de posiciones  $\vec{r}_i$  y cargas  $q_i$ , la fuerza que ejercen sobre otra carga  $q$  situada en  $\vec{r}$  será

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^2} \widehat{r_i - r}.$$

### 12.3. Campo eléctrico

Es la fuerza por unidad de carga que experimentará una carga en cierta posición del espacio. Obedece a la fórmula

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Debido también al principio de superposición, la expresión del campo eléctrico en una posición  $\vec{r}$  del espacio creado por un sistema de  $N$  cargas de valor  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, N$

y posición  $\vec{r}_i$  será

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^2} \widehat{r_i - r}.$$

En el caso de tener un sistema continuo esta fórmula anterior quedará transformada en

$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} \widehat{r' - r} dV.$$



Recuerda

▷ La fuerza y el campo eléctrico son magnitudes *vectoriales* que cumplen el principio de superposición. Por tanto se podrán sumar como vectores.

## 12.4. Ley de Gauss

Recordando que el flujo es la cantidad de campo vectorial que pasa por unidad de superficie, tendremos que, para el campo eléctrico  $\vec{E}$  el flujo será

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Siguiendo un razonamiento similar al que se puede realizar para el caso gravitatorio, la ley de Gauss nos dice que

$$\phi_E = 4\pi KQ = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$



Nota

◊ En este caso, como las cargas pueden ser tanto positivas como negativas, puede resultar que, pese a que existan cargas en el interior de la superficie su carga neta sea nula (se anulen unas con otras) y el flujo sea cero.

La ley de Gauss resulta muy útil para la resolución de problemas con simetría plana, cilíndrica o esférica.

## 12.5. Potencial y energía eléctrica

Potencial es la circulación del campo eléctrico entre dos puntos  $A$  y  $B$ , es decir

$$V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B) = \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (12.2)$$

Si en esta fórmula multiplicamos ambos miembros por  $q$ , como  $\vec{F} = q\vec{E}$  tendremos que el trabajo eléctrico realizado para desplazar una carga  $q$  desde una posición  $A$  hasta otra  $B$  será simplemente  $W_{A \rightarrow B} = q(V(A) - V(B))$ .

Análogamente la energía eléctrica, es decir, la energía potencial eléctrica que tendrá una carga por encontrarse inmersa en un campo eléctrico, será tal que  $W_{A \rightarrow B} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = q(V(A) - V(B))$ . Esto supone que

$$E_p^e(\vec{r}) = qV(\vec{r}).$$



Recuerda

▷ Tanto la energía como el potencial y el trabajo son magnitudes *escalares* y por tanto se expresarán como un número normal (con sus correspondientes unidades, eso sí). Además, en virtud del principio de superposición el potencial eléctrico de un conjunto de partículas es la suma del creado por cada uno de ellas. Como el potencial es escalar será tan fácil como sumar sus magnitudes.



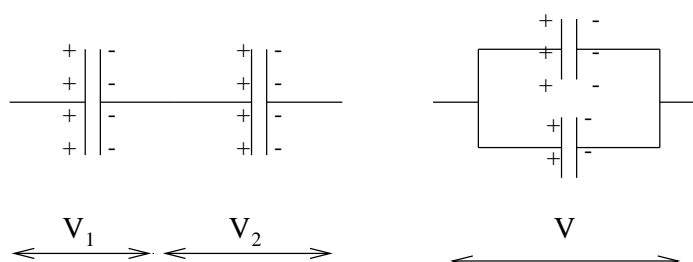


Figura 12.1: Asociación de condensadores en serie y en paralelo.

### 12.5.1. Algunos casos particulares de potencial eléctrico

#### Carga puntual

Usando la ecuación (12.2) con el valor de  $\vec{E}$  para una carga puntual, que es  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$  e integrando, se llega fácilmente a la conclusión de que

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

#### Campo eléctrico constante

Un sencillo uso de (12.2) nos lleva directamente a la expresión

$$V(x) = -Ex,$$

donde suponemos que el campo  $\vec{E}$  es constante, y así el potencial depende de una cierta cantidad unidimensional  $x$ . Un buen ejemplo sería el campo creado por un plano cargado infinito. En este caso  $x$  sería la distancia al plano.

## 12.6. Condensadores

Un condensador es un dispositivo capaz de almacenar carga eléctrica. Básicamente están formados por dos conductores situados uno frente al otro, lo más cerca posible, dejando entre medias de ellos un aislante que puede ser el “vacío” o un dieléctrico.

Existe una relación de proporción entre el potencial creado entre los dos “polos” de un condensador y la carga almacenada. Matemáticamente se puede expresar de una manera simple como

$$Q = CV,$$

donde  $C$  es la constante de proporcionalidad, denominada *capacidad*. La unidad de la capacidad es el faradio.

◊ Un faradio es una unidad muy grande. (Al estilo del culombio). Por ello lo común es encontrarse con microfaradios, nanofaradios o picofaradios.



### 12.6.1. Asociación de condensadores

#### Serie

En dos condensadores situados en serie, como en el primer gráfico de la figura 12.1 la diferencia de potencial total que cae entre el primero y el segundo será la

suma de las diferencias parciales de cada condensador, es decir,  $\Delta V_T = \Delta V_1 + \Delta V_2$ . No obstante, al encontrarse unidos en serie la carga de ambos deberá ser igual<sup>1</sup>, y además será la carga total almacenada por la asociación. Así tenemos que  $Q_1 = Q_2 = Q_T$  y podemos poner

$$\Delta V_i = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

y de aquí se deduce fácilmente que la capacidad efectiva de la asociación es

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

### Paralelo

Si situamos dos condensadores asociándolos en paralelo, como se puede ver en el segundo dibujo de la figura 12.1, tendremos que la diferencia de potencial entre ambos deberá ser igual, y además será la diferencia de potencial total. Esto es así porque tenemos unidos los dos “polos” de los condensadores por un conductor, y por tanto la caída de potencial entre los “polos” opuestos tiene que ser la misma. A su vez, como cada condensador almacenará una carga distinta, tendremos que para la asociación total

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = C_1\Delta V + C_2\Delta V = (C_1 + C_2)\Delta V.$$

Se ve pues, de manera sencilla, que la capacidad efectiva o equivalente de dos condensadores asociados en paralelo obedece a la ley

$$C = C_1 + C_2.$$

---

<sup>1</sup>Pues si no se produciría un desplazamiento de cargas.

# Capítulo 13

## Movimiento armónico simple

### 13.1. Introducción

Hay muchas situaciones en física en las cuales la fuerza que siente una partícula en cierto sistema es proporcional a un desplazamiento respecto cierto punto “de equilibrio”. Es decir, existen sistemas para los cuales es válida la ley de Hooke

$$F = -kx \quad (13.1)$$

o al menos, lo es manteniendo el móvil entre ciertos límites. Estos sistemas se dice de ellos que describen un movimiento armónico simple.

La intención de este apartado es estudiar este tipo de movimientos, dada su importancia y su sencillez.

◊ En todo el estudio que se haga en este capítulo se tratará el problema de manera unidimensional.

◊ Se puede demostrar que la gran mayoría de los sistemas que tiene un punto de equilibrio estable admiten un tratamiento armónico para pequeñas oscilaciones en torno a dicho punto. Esto se puede ver desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto y dándose cuenta de que como la primera derivada será nula el primer término que aparecerá será, precisamente, el término de un potencial armónico:  $\frac{k}{2}x^2$ .

Nota



Ampliación



### 13.2. Dinámica del sistema

#### 13.2.1. Ecuación del movimiento

Si aplicamos la ley de Newton,  $F = ma$  junto con la ley de Hooke, obtendremos que

$$ma = -Kx \Rightarrow ma + Kx = 0.$$

Esta sencilla ecuación es, no obstante, algo más complicada de resolver que otras anteriores, puesto que las magnitudes involucradas,  $a$  y  $x$  dependen La una de la otra, concretamente como  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

que constituye una ecuación diferencial, ya que involucra derivadas de funciones con la propias funciones. Resolver esta ecuación está bastante más allá del ámbito de este curso, pero aún así es fácil darse cuenta de que las funciones sin y cos van a tener

algo que ver, dado que son las únicas que al ser derivadas dos veces y sumadas consigo mismas dan nulo. Manipulando algunos coeficientes en estas funciones y operando se encuentra la solución más general a este movimiento, que es

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (13.2)$$

y que por tanto constituye la ecuación de movimiento de un sistema que cumpla la ley de Hooke, o bien de un movimiento armónico simple.

### Significado de la ecuación

En esta ecuación  $A$  es la amplitud máxima que puede recorrer el móvil,  $\omega$  es la frecuencia angular de la oscilación, es decir, el número de “radianes” que da en un segundo. Como parece que la palabra radián no tiene sentido para un muelle, por ejemplo, quizás sea preferible pensar en la frecuencia del movimiento  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  es decir, el número de oscilaciones completas que da en un segundo, o bien tomar  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  el periodo de la oscilación, que será el tiempo que tarda nuestro sistema en dar una oscilación completa.

Por último ¿qué será  $\phi$ ?. Notemos que, si tomamos  $t = 0$  tendremos que en el instante 0, el cuerpo que realiza un movimiento estaba en la posición  $x = \sin(\phi)$ , por lo que  $\phi$ , parámetro al que se conoce con el nombre de fase, nos indica *cuando empieza el movimiento*.

### 13.2.2. Periodicidad de la ecuación

Fijándose en la ecuación (13.2) se puede observar que, la existencia de una función seno para describir este movimiento, nos va a llevar irremediamente hacia un movimiento de tipo periódico. Efectivamente, si tuviéramos un resorte perfecto, este estaría oscilando “eternamente” describiendo el mismo movimiento en cada oscilación.

Para adivinar cada cuanto se repite el movimiento bastará igualar el argumento del seno a  $2\pi$ , pues como se sabe  $\sin(2\pi + \phi) = \sin(\phi)$ . De esta manera tendremos que el movimiento se repetirá, esto es, hará un periodo, cuando  $\omega t = 2\pi$ , lo cual supone que el periodo  $T$  será, como ya habíamos dicho,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Es también frecuente describir el movimiento armónico simple como la analogía de una proyección sobre el eje  $OY$  o bien  $OX$  de un movimiento circular de velocidad angular constante  $\omega$ .

### 13.2.3. Velocidad

Para hallar la velocidad que un móvil sometido a una fuerza armónica presenta en un instante  $t$  basta derivar su ecuación del movimiento. Así tendremos que, como  $v = \frac{dx}{dt}$

$$v = A\omega \cos(\omega t + \phi),$$

relación que nos ofrece la velocidad de un movimiento armónico para cualquier instante. Es también común relacionar la velocidad con la posición, cosa sencilla notando que  $\cos = \sqrt{1 - \sin^2}$  y que, por tanto

$$A\omega \cos(\omega t + \phi) = A\omega \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)}$$

de donde, introduciendo la amplitud  $A$  en la raíz cuadrada

$$v = \omega \sqrt{A^2 - A^2 \sin^2(\omega t + \phi)}$$

y ahora, echando un vistazo a la relación (13.2) se ve que

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2},$$

siendo esta la relación entre  $v$  y  $x$  buscada.

### 13.2.4. Aceleración

La aceleración a la que se encuentra sometido un móvil que describe un movimiento armónico simple se puede obtener teniendo presente (13.2) y que  $a = \frac{dv}{dt}$ . Por tanto

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi).$$

Si queremos obtener una relación de la aceleración con respecto a la posición del móvil podemos recurrir a observar la similitud entre la ecuación anterior y la que describe la ecuación de movimiento de un m.a.s., o bien utilizando las leyes de Newton y Hooke poner que

$$F = ma = -Kx \Rightarrow a = -\frac{K}{m}x.$$

## 13.3. Energía

### 13.3.1. Energía cinética

Partiendo de la relación de la energía cinética de un móvil, y de la ecuación de velocidad del m.a.s. se tiene que

$$E_c = \frac{1}{2}K \cos^2(\omega t + \phi),$$

o, relacionándolo con la posición

$$E_c = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2).$$

### 13.3.2. Energía potencial

¿Es conservativo el movimiento armónico simple? ¿Podemos definir un potencial para él?. La respuesta es sí, por tratarse de una fuerza central<sup>1</sup>. En este caso ¿cuál será el potencial?. Para hallarlo recordamos que

$$W_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B) = \int_A^B F dx,$$

y que, por tanto, tendremos que

$$E_p(A) - E_p(B) = \int_A^B -Kx dx = -\frac{1}{2}Kx^2 \Big|_A^B = -\frac{1}{2}KB^2 + \frac{1}{2}KA^2,$$

siendo ahora ya muy sencillo identificar la energía potencial en una posición  $x$  como

$$E_p(x) = \frac{1}{2}Kx^2.$$

<sup>1</sup>Aunque estemos haciendo un estudio unidimensional, no por ello dejamos de tener una fuerza central.

### 13.3.3. Energía mecánica

Para obtener la energía mecánica o total puesta en juego en un movimiento armónico simple sumaremos las energías potencial y cinética respecto a la posición. Así tendremos que

$$E_T = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}A^2.$$

Nota



◊ En el movimiento armónico simple se ve, de una forma que casi roza en lo magistral, lo que la conservación de la energía supone en física. En este caso toda la energía está dada por la fórmula  $\frac{1}{2}A^2$ , que es la energía potencial máxima que alcanza el muelle por separarle una distancia  $A$  de su posición de equilibrio. Más tarde, cuando empieza el movimiento, éste va adquiriendo energía cinética, siempre a costa de su energía potencial, y por tanto acercándose a la posición de equilibrio. Cuando el móvil se encuentra en la posición de equilibrio su energía potencial es nula, pero el cuerpo conserva una cantidad de energía cinética que se irá ahora utilizando en comprimir otra vez el muelle hasta su amplitud máxima, y que contribuirá, por tanto, a incrementar nuevamente la energía potencial. En cualquier caso la suma de ambas nos dará la energía máxima puesta en juego, que se conserva.

Ampliación



◊ En un muelle real la conservación de la energía no se cumple, ya que siempre existen pérdidas por rozamiento. Estas pérdidas dan lugar a lo que se denomina un movimiento armónico simple amortiguado, ya que la amplitud va disminuyendo poco a poco, informándonos a su vez de la cantidad de energía que se está perdiendo.

Una forma de solucionar este fenómeno es aportando algo de energía extra al móvil, para contrarrestar la que pierde por rozamiento. Esto puede dar lugar a resonancias y otros fenómenos físicos muy interesantes.

## 13.4. El péndulo simple

Hay ciertos sistemas que, si bien no son estrictamente sistemas sometidos a una fuerza tipo Hooke, si pueden, bajo ciertas condiciones, considerarse como tales. El péndulo simple, es decir, el movimiento de un grave atado a una cuerda y sometido a un campo gravitatorio constante, es uno de ellos.

Al colocar un peso de un hilo colgado e inextensible y desplazar ligeramente el hilo se produce una oscilación periódica. Para estudiar esta oscilación es necesario proyectar las fuerzas que se ejercen sobre el peso en todo momento, y ver que componentes nos interesan y cuales no. Esto se puede observar en la figura 13.1.

Vemos pues que, considerando únicamente el desplazamiento tangente a la trayectoria, es decir, el arco que se está recorriendo, podemos poner

$$ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mg \sin(\alpha) = 0 \quad (13.3)$$

donde no hemos hecho sino aplicar la segunda ley de Newton. Esto se puede ver considerando que el arco es  $l\alpha$  y, como  $l$  es la longitud del hilo y es constante<sup>2</sup>, la aceleración será  $l \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ . Por otra parte, aplicando  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ , en este caso la fuerza es sólo la de la gravedad,  $mg$  que se descompone en una componente, que se contrarresta con la tensión, más otra, que es la que hace que exista movimiento en la trayectoria marcada por el arco.

Esta ecuación diferencial no es nada fácil de resolver<sup>3</sup> y por ello recurrimos a la aproximación siguiente: suponiendo que el ángulo que desplazamos es pequeño,

<sup>2</sup>Se considera un hilo inextensible.

<sup>3</sup>Realmente no tiene solución analítica.

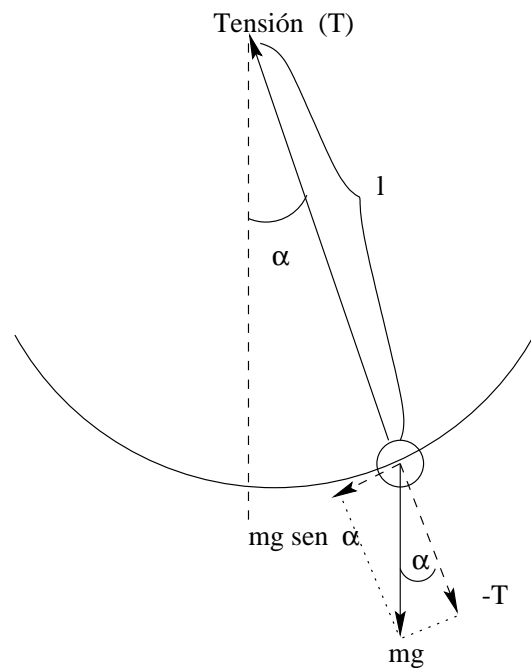


Figura 13.1: Descomposición de las fuerzas en un péndulo.

tomamos que  $\sin(\alpha) \simeq \alpha$  y así tenemos que

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \quad (13.4)$$

que a veces también se expresa como  $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$ .

Esta ecuación es absolutamente análoga a la de un movimiento armónico simple, y por tanto su solución también será (13.2) teniendo, únicamente, la precaución de sustituir el valor de  $\omega$  antiguo por el que tiene ahora para un péndulo

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

A partir de aquí se pueden extraer todas las demás relaciones para un péndulo simple, el periodo, frecuencia, etc.

CAPÍTULO 13. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



# Capítulo 14

## Ondas

### 14.1. Introducción

Existen en la naturaleza muchos fenómenos de los cuales se dice “tienen naturaleza ondulatoria” pero ¿qué es exactamente una onda? ¿Qué propiedades tienen? ¿Cómo se puede formalizar una expresión matemática de un fenómeno ondulatorio?. Estas y otras cuestiones son el tema objeto de este capítulo.

No obstante, antes de entrar de lleno en lo que es una onda y su formalismo, vamos a definir onda como:

▷ Una onda es una perturbación física que transmite energía y momento lineal, pero que no transmite materia.

En las ondas materiales las partículas concretas que componen el material no se propagan, sino que se limitan a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. No obstante cuando una onda se transmite por dicho material se produce una sincronización de oscilaciones entre las distintas partículas componentes del medio que posibilita la propagación de un momento lineal y una energía.

◦ Matemáticamente todas las ondas deben satisfacer la ecuación de ondas, que es

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2},$$

siendo  $v$  la velocidad de propagación de la onda en el medio. Se podría demostrar (aunque no es trivial) que algunas velocidades de propagación de ondas son  $v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$  para una onda que viaja por una cuerda de densidad lineal  $\rho_l$  y tensión  $T$  así como  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ <sup>1</sup> para una onda sonora que circula por un medio cuyo módulo de Young sea  $E$  y densidad sea  $\rho$ .

#### 14.1.1. Tipos de ondas

Podemos establecer criterios de clasificación de las ondas. Algunos serían:

- Según el medio por el que se propaguen.
  - Ondas que requieren medio material para propagarse. Ejemplo, el sonido.
  - Ondas que no requieren un medio material. Ejemplo, la luz.
- Según el número de dimensiones que involucran.

<sup>1</sup>Se trata, por tanto, de una ecuación para hallar la velocidad del sonido en un medio.

Recuerda



Ampliación



- Unidimensionales. Ejemplo, la propagación del movimiento en una cuerda.
  - Bidimensionales. Ejemplo, olas en la superficie de un líquido.
  - Tridimensionales. Ejemplo, el sonido normal.
- Según la relación entre la vibración y la dirección de propagación.
- Transversales. Son aquellas ondas en las cuales la oscilación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo en una cuerda normal y tensa la onda se propaga de izquierda a derecha (en cierto caso particular) pero, en cambio, la oscilación de un punto concreto de la cuerda se produce de arriba a abajo, es decir, perpendicularmente a la propagación.
  - Longitudinales. En este tipo la propagación es paralela a la oscilación. Como ejemplo, si apretamos un muelle las espiras oscilan de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, paralelas en cualquier caso a la dirección de propagación.

## 14.2. Ecuación general de una onda

Supongamos que, en una cuerda tensa, creamos una forma  $f$  en determinado instante y después observamos como se propaga a una velocidad  $v$ . Esto supone que la deformación que antes había  $parat = 0$  en  $x = 0$  deberá desplazarse de tal forma que, siendo coherente con su velocidad, se encuentre en  $x = vt$  en un tiempo  $t$ . Esto se puede lograr considerando la función de onda

$$f(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (14.1)$$

que nos ofrece una ecuación de onda que se desliza de izquierda a derecha. Si quisiéramos obtener una onda desplazándose de derecha a izquierda bastaría sustituir el signo por uno positivo y tener

$$f(x, t) = f\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

## 14.3. Ecuación de una onda armónica

La ecuación considerada en (14.1), si bien es correcta, no obstante es de una generalidad tan amplia que su estudio no es sencillo y no aportaría tampoco datos muy significativos. Es por eso conveniente particularizar al caso de ondas armónicas, tomando la función  $f(t)$  como  $f(t) = A \sin(\omega t)$  tendremos que

$$\psi(x, t) = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right).$$

Esta ecuación presenta una doble periodicidad temporal y espacial que será muy útil estudiar. No obstante antes de hacer un estudio más formal es conveniente plantearse intuitivamente qué está sucediendo en esta onda. Como la función  $\sin(x)$  es una función periódica que contiene infinitos “bucles” significa que, si dejamos el tiempo fijo y nos vamos desplazando por el eje  $OX$  desde cierto punto, tarde o temprano encontraremos otro punto desde el cual “se ve la misma forma de la onda”. La distancia entre estos dos puntos se llama longitud de onda  $\lambda$  y por “ver la misma forma de la onda” nos referimos a observar ondas en la misma fase, es decir, si en el primer punto vemos el seno en un máximo, por ejemplo, buscaremos en el

segundo punto otra vez el seno en un máximo, o si en el primer punto está el seno en un cero, pero subiendo, buscaremos el segundo punto en la misma situación: un cero subiendo...

Otra periodicidad que encontramos se nota al tomar la distancia fija e ir variando el tiempo. Dado un cierto instante  $t_0$  veremos que en un punto fijo  $x_0$  va variando la posición hasta que, al cabo de un tiempo  $t_0 + T$   $x_0$  se encuentra igual que en  $t_0$ . A esta cantidad  $T$  se la denomina periodo.

◊ Quizás se pregunte el lector que utilidad puede tener tomar una función tan particular como la función  $\sin(x)$  para hacer nuestro desarrollo de las ondas. Esta elección por una razón: Matemáticamente el teorema de Fourier demuestra que toda función  $f(x)$  puede ponerse como una suma de funciones  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  y siempre es más sencillo operar con estas funciones que con la función general  $f(x)$ .



### 14.3.1. Periodo y frecuencia

Calculemos explícitamente cuanto es  $T$ . Tenemos una onda particularizada en un tiempo  $t_0$  y una posición  $x_0$ , nos dará un desplazamiento en el eje  $y$  concreto que será

$$y_{(t_0, x_0)}(x_0, t_0) = A \sin\left(\omega\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right)\right).$$

Al cabo de un cierto tiempo  $T$ , cuando el cronómetro marque  $t_0 + T$  debemos tener la misma situación, es decir,  $y_{(t_0+T, x_0)} = y_{(t_0, x_0)}$ , por tanto

$$A \sin\left(\omega\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right)\right) = A \sin\left(\omega\left(t_0 + T - \frac{x_0}{v}\right)\right).$$

Esta situación se produce para las funciones seno y coseno cuando su argumento aumenta en una cantidad  $2\pi$ , con lo cual tenemos que:

$$\omega\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right) + 2\pi = \omega\left(t_0 + T - \frac{x_0}{v}\right)$$

y de esta expresión es sencillo deducir la siguiente, e interesante relación

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

. Por tanto el periodo está relacionado con la frecuencia angular  $\omega$  mediante esta relación, que es la misma que para un movimiento armónico simple. Análogamente podemos definir la frecuencia  $f$  o  $\nu$  como el inverso del periodo, es decir

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

En la figura 14.1 se ha representado lo que supone el transcurrir del tiempo para una onda armónica y como ésta se repite al cabo de un tiempo  $T$ .

### 14.3.2. Longitud de onda y número de ondas

Procedamos de manera similar al apartado 14.3.1 pero fijando ahora el tiempo y dejando que la coordenada  $x$  varíe desde  $x_0$  hasta  $x_0 + \lambda$ . Tendremos entonces que

$$\omega\left(t_0 - \frac{x_0}{v}\right) + 2\pi = \omega\left(t_0 - \frac{x_0 + \lambda}{v}\right)$$

y esto supondrá la relación:

$$\frac{\omega\lambda}{v} = 2\pi$$

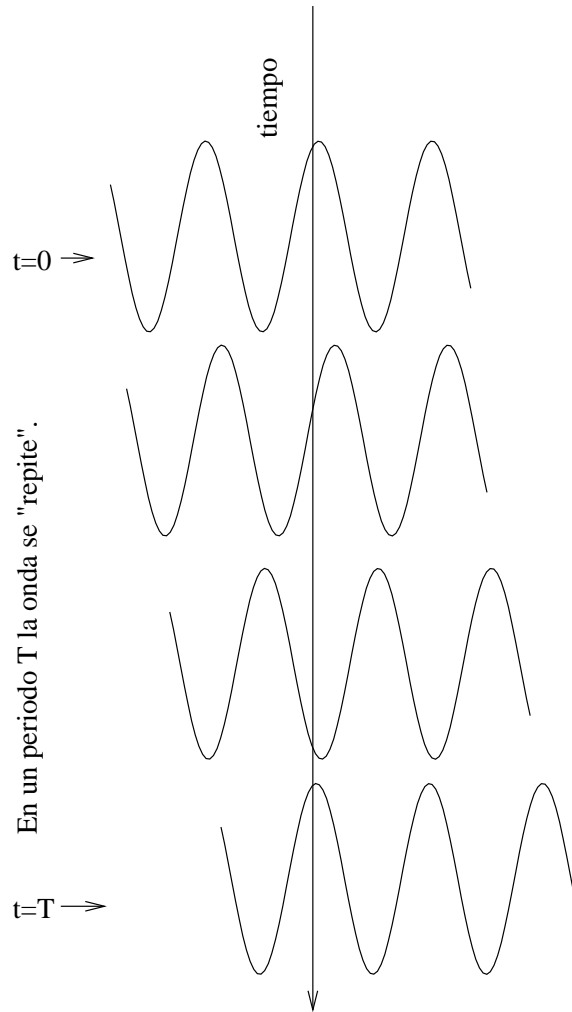


Figura 14.1: Periodo de una onda armónica.

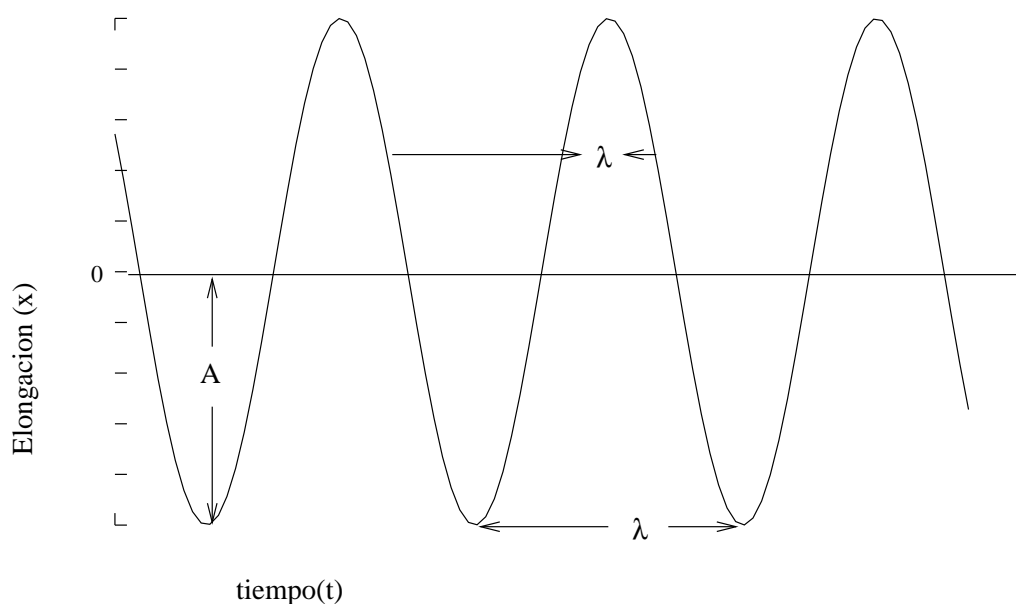


Figura 14.2: Longitud de onda de una onda armónica.

que cuando se pone en función de  $T$  adquiere el singular aspecto de

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

es decir, la velocidad de propagación es el espacio que recorre la propagación en un cierto tiempo dividido por ese tiempo. Tomando el tiempo como un periodo obtenemos que la longitud que recorre es  $\lambda$  y el tiempo que tarda es  $T$ .

Se suele definir también número de ondas como

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Poniendo así la función de onda armónica en función de  $\omega$  y  $k$  queda la sencilla expresión.

$$\psi(x, t) = y(x, t) = A \sin(\omega t - kx).$$

En la figura 14.2 se puede ver de manera gráfica lo que representa la magnitud  $\lambda$ .

## 14.4. Consideraciones energéticas de las ondas

### 14.4.1. Energía

Para llegar a la expresión de la energía que propaga una onda vamos a tomar como caso particular el de una onda propagándose por una cuerda tensa. En este caso la energía total involucrada por cada partícula  $i$  es la que correspondería a un movimiento armónico simple, que puesto en función de la masa y de  $\omega$  será

$$E_i = \frac{1}{2} m_i A^2 \omega^2$$

siendo  $m_i$  la masa correspondiente a la partícula  $i$ . La energía total será la suma a toda la cuerda de las energías de cada partícula  $i$ . Hay que tener en cuenta que la

amplitud  $A$  y la velocidad angular  $\omega$  van a ser constantes en toda la cuerda, y por tanto

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \sum_i m_i.$$

La suma a la Masa de cada partícula será la masa total de la cuerda, que podemos poner en función de su densidad lineal como  $m_{total} = \rho l$ . Con esto nos queda que

$$E = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho l. \quad (14.2)$$

### 14.4.2. Potencia

¿Cuál será la potencia transmitida?. Para ello basta tener presente que  $P = \frac{E}{t}$  y, dividiendo así la expresión (14.2) por  $t$  y considerando que la longitud recorrida en la cuerda por unidad de tiempo va a coincidir con la velocidad de propagación, tendremos que

$$P = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho v \quad (14.3)$$

### 14.4.3. Intensidad

Se define la magnitud intensidad de una onda como la potencia por unidad de área que atraviesa una superficie. Para el caso de una onda plana la intensidad es igual a

$$I = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho v.$$

# Capítulo 15

## Fenómenos ondulatorios

### 15.1. Introducción

Los procesos en los cuales intervienen ondas dan lugar a una serie de fenómenos especiales, dada la naturaleza particular de las ondas, que son de interesante estudio, y que explican muchas de las asombrosas propiedades que tiene tanto la luz como el sonido. En el caso de la luz podemos explicar en qué consisten los fenómenos de reflexión y refracción y qué leyes gobiernan estos fenómenos. También habrá que dedicar un apartado al fenómeno físico que se produce cuando se superponen dos o más ondas: la interferencia, y por último, tratar algunos temas someramente para un conocimiento cualitativo por parte del lector, como son los temas sobre la difracción y la polarización de las ondas.

### 15.2. Principio de Huygens

El principio de Huygens es una herramienta útil y bastante sencilla para entender muchos de los extraños procesos que suceden relacionados con las ondas. Si bien no es estrictamente correcto y además se acepta sin una demostración rigurosa, sirve para explicar satisfactoriamente algunos fenómenos ondulatorios como la interferencia, reflexión (figura 15.6) o refracción (figura 15.8).

Básicamente este principio explica cómo tiene lugar la propagación de una onda: cuando cada uno de los puntos de un medio material es alcanzado por una onda, este punto se vuelve a comportar como un foco emisor de ondas, creando una serie de ondas secundarias. El resultado global de todos estos puntos emitiendo ondas a la vez será la de un nuevo frente de ondas similar al anterior, con lo que la onda se irá propagando sucesivamente.

### 15.3. Interferencia entre ondas

¿Qué sucederá cuando dos ondas se cruzan?. Esta es la pregunta que queremos explicar en este apartado. Para resolverla hemos de volver a recurrir a nuestro “conocido” el principio de superposición, es decir, que podemos considerar el resultado final como una mera suma de los efectos causados por la primera onda más la segunda. Recordemos que este principio parece ser una propiedad de la naturaleza, ya que el efecto de aplicar dos ondas consecutivas sobre un mismo medio no tendría por que dar como resultado la simple suma de ambas ondas.

▷ Al propagarse dos o más ondas por un medio la perturbación to-

Recuerda



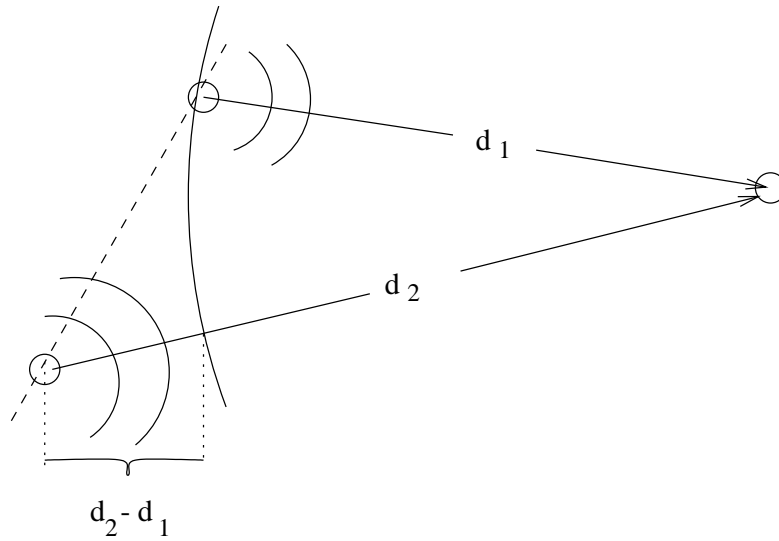


Figura 15.1: Esquema de un fenómeno de interferencias.

tal resultante es, simplemente, la suma de las perturbaciones de ambas ondas.

Vamos a utilizar el principio de superposición para estudiar algunos casos sencillos de interferencia entre ondas.

### 15.3.1. Ondas coherentes: Interferencias constructivas y destructivas

Supongamos que tenemos dos ondas tales que su longitud de onda, frecuencia y amplitud son iguales, y que sus fases o bien son iguales, o bien presenta una cierta discrepancia que permanece constante. Son precisamente este tipo de ondas las que reciben el nombre de ondas coherentes. Matemáticamente llamemos  $\psi$  a una onda y  $\phi$  a la otra y supongamos que queremos calcular el efecto que hacen sobre un cierto punto. Ahora bien, los puntos de aplicación del foco de dichas ondas no tienen por que coincidir, por lo que las distancias a dicho punto serán distintas, y las llamaremos  $d_1$  y  $d_2$ . Tomaremos su frecuencia como  $\omega$  y su longitud de onda  $\lambda$  aunque, no obstante, vamos a realizar el tratamiento matemático expresando las ondas en función del número de ondas  $k$  para simplificar un poco la notación. Así pues tendremos que una onda será

$$\psi = A \sin(\omega t - kd_1)$$

y la otra

$$\phi = A \sin(\omega t - kd_2).$$

La onda resultante será la suma de ambas, es decir

$$\Psi = \psi + \phi. \tag{15.1}$$

Hagamos ahora un poco de álgebra, la expresión (15.1) una vez sustituida se transforma en

$$\Psi = A \sin(\omega t - kd_1) + A \sin(\omega t - kd_2)$$



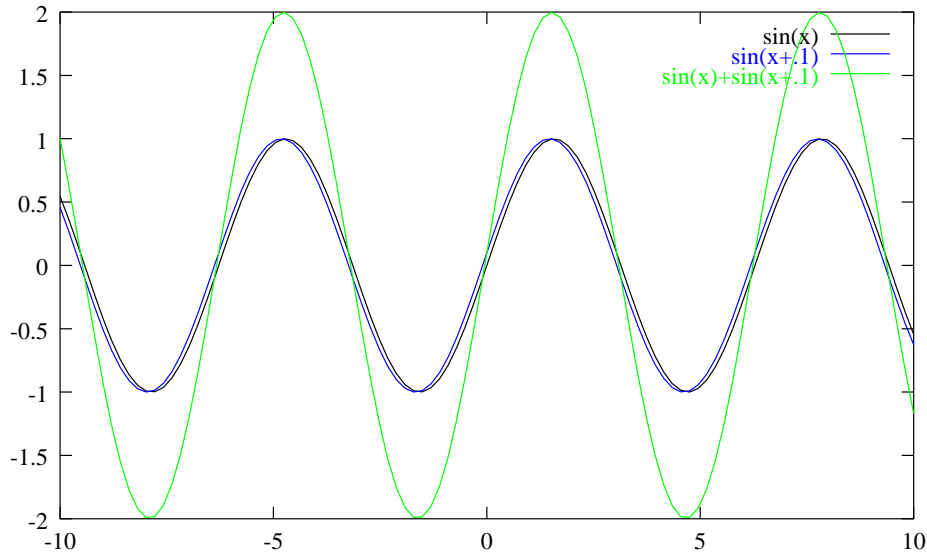


Figura 15.2: Representación de una interferencia (casi) constructiva.

que al extraer factor común a la amplitud da como resultado

$$\Psi = A(\sin(\omega t - kd_1) + \sin(\omega t - kd_2)).$$

Apliquemos ahora la igualdad trigonométrica siguiente

$$\sin(A) + \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (15.2)$$

a nuestra expresión de  $\Psi$  y el resultado final será que

$$\Psi = 2A \sin\left(\omega t - k \frac{d_1 + d_2}{2}\right) \cos\left(\frac{kd_2 - kd_1}{2}\right). \quad (15.3)$$

Interpretar este resultado es sencillo, pero no por ello poco sorprendente. Si hacemos la sustitución  $d = \frac{d_1 + d_2}{2}$  tendremos que la onda resultante es una onda que parece provenir de una distancia  $d$ , que es la semisuma de las distancias a ambos focos, pero cuya amplitud no es constante, sino que depende del término  $2A \cos\left(\frac{kd_2 - kd_1}{2}\right)$  y que por tanto va a variar según el punto del plano y las relaciones entre las distancias a los focos, como se representa en la figura 15.1.

### Interferencia constructiva

Concretamente esta amplitud será máxima en los lugares en los cuales  $\cos\left(\frac{kd_2 - kd_1}{2}\right) = 1$  y mínima para aquellos sitios donde  $\cos\left(\frac{kd_2 - kd_1}{2}\right) = 0$ . Analizando esto un poco más profundamente tendremos que aquellos puntos que verifiquen

$$\frac{kd_2 - kd_1}{2} = n\pi$$

tendrán una amplitud máxima. En ellos se producirá lo que se denomina interferencia constructiva, ya que en dichos puntos las ondas se “funden” constructivamente dando lugar a una amplitud que es la suma de ambas amplitudes. Un ejemplo se ve representado en la figura 15.2, donde la interferencia no es puramente constructiva, porque si no se vería únicamente el dibujo de una onda, pero sí existe un desfase tan pequeño como para ver qué significa este tipo de interferencia.

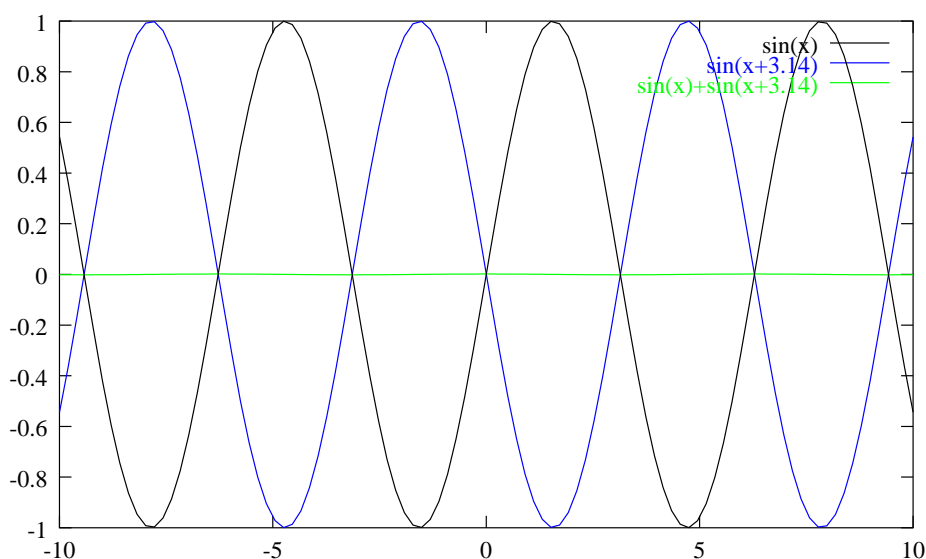


Figura 15.3: Representación de una interferencia destructiva.

### Interferencia destructiva

A su vez, en los sitios donde este coseno modulador sea nulo, que serán aquellos para los cuales se cumpla

$$\frac{kd_2 - kd_1}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

tendremos que la amplitud será siempre cero, independientemente del tiempo que pase, ya que al ser cero uno de los dos términos de la ecuación (15.3) el resultado total será nulo y no dependerá del tiempo. Entonces a estos puntos que nunca presentan amplitud se les denomina nodos y a las líneas que los unen se las denomina líneas nodales. Un ejemplo de interferencia destructiva está representado en la figura 15.3. Nótese que el resultado de la suma de las ondas es una línea plana, una onda de amplitud nula.

Recuerda



Nota



▷ Interferencia constructiva supone amplitud máxima, destructiva implica amplitud nula.

◊ Se puede intentar entender estos resultados utilizando un poco de intuición física. Una interferencia constructiva se producirá cuando la diferencia de fase sea de  $n\pi$  pero dicha diferencia está marcada por el término

$$\frac{kd_2 - kd_1}{2}$$

que, puesto en función de  $\lambda$  resulta ser

$$\pi \left( \frac{d_2}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda} \right).$$

Igualando esta diferencia de fase a  $n\pi$  tendremos que

$$d_2 - d_1 = n\lambda$$

lo cual constituye una fórmula mucho más inteligible que las anteriores. Resulta que para puntos separados una longitud entera de longitudes de onda la

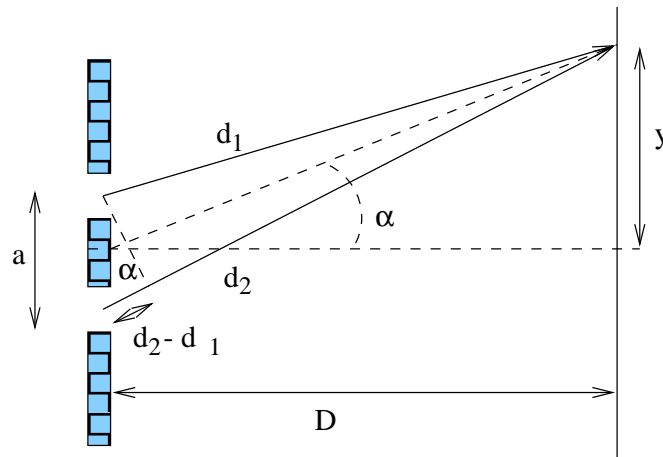


Figura 15.4: Experiencia de Young.

interferencia es constructiva. Un cálculo similar para interferencia destructiva nos llevaría a que

$$d_2 - d_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda.$$

¿Qué significa esto?. Pues sencillamente que si la distancia entre los puntos es un número entero de longitudes de onda, como ambas ondas parten con la misma fase de sus focos respectivos, cuando llegan se encuentran una frente a la otra variadas en lo que han logrado recorrer de más o de menos en esta diferencia de distancias. Si esta diferencia es de un número entero de longitudes ambas ondas se encuentran exactamente igual, porque la función seno es periódica y se repita cuando ha avanzado espacialmente esta magnitud  $\lambda$ . En cambio si ha avanzado cierto número de longitudes más la mitad de una  $\lambda$  resulta que las ondas se encuentran en contra-fase, o bien que una es justo la opuesta de la otra<sup>1</sup> y por tanto ambas se anulan simultáneamente.

### Experiencia de Young

o Consiste esta experiencia en hacer iluminar dos rendijas muy pequeñas y separadas una distancia  $a$ , también pequeña, con un foco de luz. A una distancia  $d$  medida desde la mitad de las rendijas, y que debe ser mucho mayor que  $a$ , se puede observar que existirá un máximo, una interferencia constructiva, si

$$\frac{ay}{d} = n\lambda,$$

siendo  $y$  la distancia vertical medida desde el centro de la pantalla de observación, como se ha representado en la figura 15.4.

Sería un ejercicio interesante para el lector intentar demostrar esto partiendo de la relación para un máximo  $d_2 - d_1 = n\lambda$  y la figura 15.4.

Ampliación



### 15.3.2. Ondas estacionarias: Propagación en direcciones opuestas

Vamos ahora a proponer una forma un poco diferente de “interferencia”. Tomemos como ejemplo una cuerda y fijémosla por uno de sus extremos. (En un gancho de una pared, por ejemplo). Si propagamos ahora una onda por la cuerda esta tarde o

<sup>1</sup>Ya que  $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$ .

temprano llegará a la pared y rebotará en ella. Tendremos entonces una interferencia que se producirá en la cuerda, debida a dos ondas iguales, con la excepción de que se propagan en sentido contrario. Se va a adelantar ya que este tipo de situación se denomina ondas estacionarias.

Matemáticamente lo que tenemos es que una onda presenta la forma

$$\phi = A \sin(\omega t - kx)$$

y la otra, por propagarse en sentido contrario, será

$$\psi = -A \sin(\omega t + kx)$$

, donde el signo negativo es debido a que al “rebotar” también se produce un cambio de fase de  $\pi$  radianes, siendo la resultante la suma de ambas, por tanto

$$\Phi = \phi + \psi = A \sin(\omega t - kx) - A \sin(\omega t + kx).$$

Para ver que significa esta expresión se va a volver a utilizar la relación (15.2) de la suma de dos funciones seno, nos dará

$$\Phi = 2A \cos(\omega t) \sin(kx). \quad (15.4)$$

¿Qué significa (15.4)? Tenemos que destacar algunos puntos:

- No se trata de una onda propiamente dicha, pues no aparece un término que contenga una dependencia espacial y temporal, sino que estas dependencias aparecen separadas.
- La energía no se puede propagar por la cuerda. Esto es debido a que aquellos puntos para los cuales  $\sin(kx) = 0$  van a estar siempre quietos, ya que no presenta ninguna otra dependencia. Evidentemente la energía no podrá rebasar estos puntos para propagarse al otro lado. Por tanto esta construcción no es una onda normal, no es una onda “viajera”; precisamente por esto se la denomina onda estacionaria.
- Un punto cualquiera de la cuerda se limitará a moverse de forma armónica en el tiempo, debido al término  $\cos(\omega t)$  con una amplitud  $2A \sin(kx)$ .

A los puntos que cumplen  $\sin(kx) = 0$  y que por tanto, van a estar siempre quietos, se les denomina nodos. En nuestro caso tendremos nodos en las posiciones en las cuales  $kx = n\pi$ .

### Onda estacionaria en una cuerda fija por ambos extremos

Este es un caso interesante y con ciertas aplicaciones prácticas. Como ejemplo, en cualquier instrumento de cuerda tendremos una disposición de este tipo.

Vamos a hacer un análisis semi-cuantitativo de este fenómeno. Si en este caso la cuerda debe estar sujeta por ambos extremos significa que dichos extremos no van a poder moverse. Deberán ser por tanto nodos. Esto nos lleva a afirmar que  $\sin(k0) = 0$  y  $\sin(kL) = 0$  donde se ha supuesto, como resulta lógico, que la cuerda empieza en  $x = 0$  y acaba en  $x = L$ . La primera condición es trivial y es siempre cierta, pero la segunda nos ofrece que

$$kL = n\pi$$

expresión que hay que interpretar. Es ésta una relación entre el número de ondas  $k$  y la longitud de la cuerda  $L$ . Ahora bien, puesto que la longitud  $L$  de la cuerda es algo que podemos variar a nuestro antojo lo que tenemos realmente es que el

número de ondas no puede ser uno cualquiera, sino que debe cumplir que  $k = \frac{n\pi}{L}$ , es decir ser discreto y con unos valores concretos<sup>2</sup>. Poniendo estos valores en función de  $\lambda$  tenemos que

$$\lambda = 2\frac{L}{n},$$

y como también existe una relación entre  $\lambda$  y  $T$  y  $T = \nu^{-1}$  podemos por fin expresar la frecuencia de la vibración como

$$\nu = n\frac{v}{2L}$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda (si se propagara).

Este resultado sí que es extraordinariamente interesante, porque nos dice que la frecuencia de la onda va a estar delimitada por el valor de su longitud  $L$ . Aún así para una longitud  $L$  tendremos una serie de frecuencias diferentes según el valor de  $n$  que tomemos, que se denominan armónicos. Esta es la razón fundamental de la existencia de los instrumentos de cuerda, como por ejemplo una guitarra. Como la frecuencia de la oscilación se propaga por el aire y se escucha como sonido, tendremos que podemos variar la nota bien cambiando la longitud de la cuerda  $L$ , por ejemplo, poniendo el dedo sobre un traste y acertando esta longitud en cierta cantidad determinada, o bien variando la velocidad de propagación de la onda en la cuerda, que dependía de la tensión y la densidad: es decir, bien afinando la guitarra, es decir, aumentando y disminuyendo la tensión de la cuerda, o bien variando la densidad de la cuerda poniendo una primera en vez de una segunda, o una tercera, etc. . .

## 15.4. Otras propiedades de las ondas

### 15.4.1. Difracción

La difracción es un fenómeno característico de las magnitudes ondulatorias, caracterizado por la propagación “anómala” de dicha magnitud en las cercanías de un obstáculo o una abertura comparable, en tamaño, a su longitud de onda.

En un lenguaje más intuitivo: la difracción supone una contradicción a nuestra idea preconcebida de que la luz se propaga en línea recta, observándose en las cercanías de esquinas de obstáculos, o en los bordes de la sombra de la luz tras atravesar una rendija estrecha, que dicha luz parece “torcer la esquina” o desviarse de su trayectoria recta.

La difracción es el resultado de una compleja serie de interferencias de las magnitudes ondulatorias consigo mismas. Si en la luz no se observa aparentemente este fenómeno, razón por la cual surge nuestra idea preconcebida de la “propagación en línea recta de la luz”, es debido a que, como ya se ha dicho antes, este fenómeno aparece sólo cuando el tamaño de los objetos o rendijas es comparable al de la longitud de onda de la propagación. Como en el caso de la luz visible esta longitud es diminuta. en nuestra experiencia macroscópica y cotidiana de la existencia, no tenemos consciencia de estos fenómenos.

### 15.4.2. Polarización

En una onda transversal el movimiento de las partículas que componen el medio (o de los campos que oscilan, como en el caso de la luz), debe ser perpendicular a la dirección de propagación, Ahora bien, como la dirección de propagación es una recta en el espacio tridimensional, la perpendicular a esta recta supondrá un plano

<sup>2</sup>En lenguaje de física moderna se podría decir que  $k$  está cuantizado.

en el cual el medio puede desplazarse. Imaginemos que una onda se propaga en el eje  $z$ . Esto supone que la oscilación deberá producirse ortogonal a dicho eje, es decir, estar contenida en el plano  $xy$ . Pero no se nos dice si estando contenido en dicho plano puede oscilar en sentido norte-sur, o este-oeste, o suroeste -nordeste, etc. Esta libertad de elección que queda de la dirección de vibración componente de la onda se puede caracterizar en una propiedad que se denomina polarización. Polarización de una onda será por tanto la dirección concreta que toma dicha onda en la vibración de sus partículas componentes.

La luz normal, por ejemplo, no está polarizada. Esto significa que varía aleatoriamente su dirección de vibración en el plano perpendicular a la propagación. Cuando esta variación no se produce, o bien se conoce con exactitud, se dice que la onda está polarizada, y además se puede definir su tipo de polarización.

Decir por último que existen dispositivos capaces de polarizar la luz, tales como los polarizadores o polaroides.

### 15.4.3. Otras propiedades

Existen otras propiedades interesantes de los fenómenos ondulatorios en general y la luz en particular, que quiero reseñar aquí, así como una serie de fenómenos que son fáciles de explicar con las nociones que se recogen en párrafos anteriores y posteriores de este capítulo. Por ejemplo la dispersión de la luz, responsable de que el cielo sea azul y las puestas de sol rojizas, responsable también de la salida del arco iris cuando el sol logra iluminar el mundo en un día lluvioso. La reflexión y refracción de la luz, que trataremos posteriormente, y causa de que podamos vernos en un espejo, de los espejismos y de que las cucharillas se “tuerzan” cuando las metemos en agua, causa también de los halos que el sol y la luna ofrecen a veces.

Así pues fenómenos como estos, o como el atractivo colorido que el aceite ofrece sobre un charco, por qué no vemos bien debajo del agua si abrimos los ojos al líquido elemento, o incluso por qué los peces son plateados por su panza, pueden explicarse utilizando algunos principios básicos de interferencia de la luz en capas delgadas, índice de refracción del agua frente al del cristalino e incluso reflexión total e ideas evolutivas darwinistas. Queda a juicio del lector estimar si la física ofrece sólo algunas explicaciones parciales e inútiles o si bien es capaz de formar parte junto con la poesía, la religión y la mística de las doctrinas que son capaces de crear una visión global de la belleza de nuestro Universo, e incluso llegar a suplantarlas algún día...

## 15.5. Reflexión y refracción de la luz

Los fenómenos de reflexión y refracción se producen en general cuando un movimiento ondulatorio se encuentra en sus propagación con una superficie que separa dos medios distintos. La parte de la onda que logra atravesar dicha superficie y pasar al otro lado frecuentemente cambia de dirección, conociéndose este fenómeno como refracción. También sucede que parte de la onda (o toda) rebota con la superficie, denominándose reflexión a este fenómeno.

### 15.5.1. Reflexión

La ley de la reflexión se enuncia afirmando que, cuando un rayo de luz, o bien la dirección de propagación de un frente de ondas, se encuentra con una superficie, la onda reflejada lo hará con un ángulo igual que el de la onda incidente, medido desde la perpendicular a la superficie donde se refleja la onda.

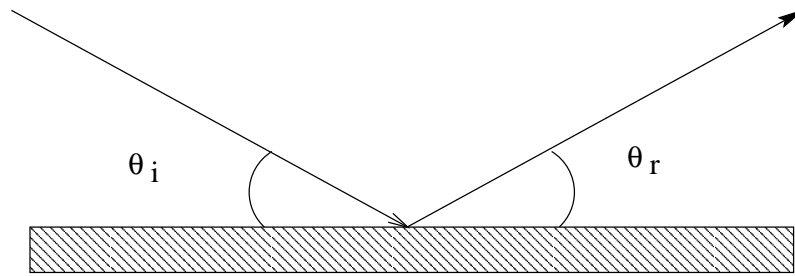
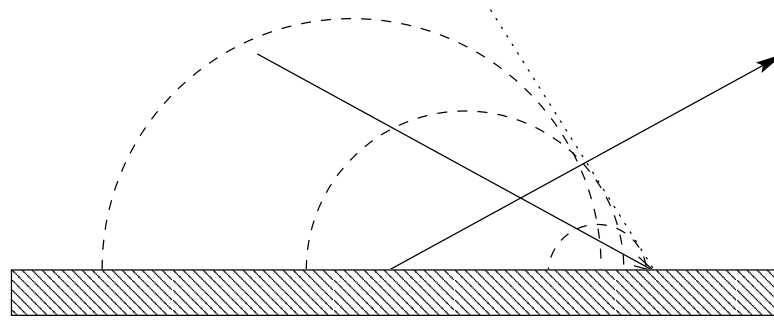


Figura 15.5: Reflexión de una onda.



Ondas secundarias según el principio de Huygens.

Figura 15.6: Explicación según el principio de Huygens de la reflexión.

Tomando las magnitudes de la figura 15.5 esto se expresa simplemente como  $\theta_i = \theta_r$ .

### 15.5.2. Refracción

La ley de refracción nos ofrece el ángulo que adopta la propagación de la onda en el segundo medio, medido también respecto a la vertical a la superficie, como se indica en la figura 15.7. Además los rayos de incidencia, reflexión y refracción se encuentran siempre en el mismo plano. La ley que relaciona el ángulo de incidencia con el de refracción se conoce como ley de Snell, que es

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son dos constantes relacionadas con las características de cada medio y que se denominan índice de refracción. Este índice de refracción de un medio resulta ser

$$n = \frac{c}{v},$$

en donde  $v$  es la velocidad de la luz en dicho medio. Se deduce por tanto que para luz en el vacío cuya velocidad es  $c$  se tendrá que  $n = 1$ .

### Reflexión total

La ley de Snell es válida para pasar de un medio a otro cualquiera. Cuando tenemos que pasar de un medio 1 a otro 2 tal que  $n_1 < n_2$  tendremos que  $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$  y como  $\frac{n_1}{n_2} < 1$  no habrá ningún tipo de problema. Ahora bien, cuando tengamos que  $n_1 > n_2$  entonces  $\frac{n_1}{n_2} > 1$  y al tomar  $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$  existirá un

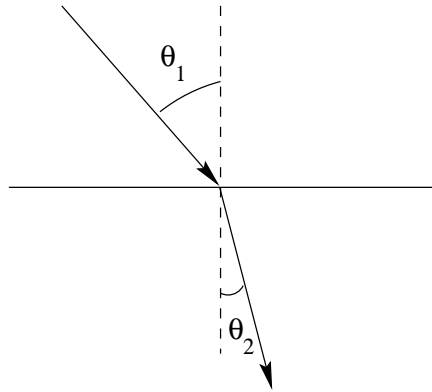


Figura 15.7: Refracción de una onda.

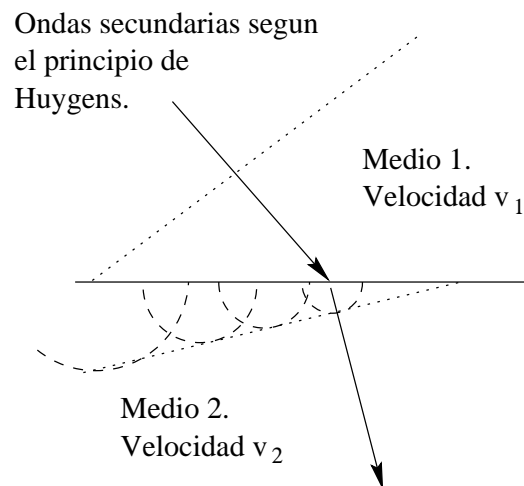


Figura 15.8: Explicación según el principio de Huygens de la refracción.



ángulo  $\theta_l = \arccos \frac{n_2}{n_1}$  tal que  $\sin \theta_2 = 1$ . ¿Qué pasará para ángulos  $\theta_1 > \theta_l$ ? Pues sucederá que para estos  $\sin \theta_2 > 1$  y por tanto, nuestro problema *no tendrá solución real*.

El significado físico de este fenómeno nos dice lo siguiente: en estos casos existe un ángulo límite  $\theta_l$  a partir del cual es imposible que se produzca el fenómeno de refracción y por tanto toda la luz que incida sobre esa superficie será reflejada. Por esta razón a este fenómeno se le conoce como reflexión total.

Un ejemplo práctico se puede observar cuando se bucea: a partir de cierto ángulo de inclinación en el cual miremos a la superficie del agua, veremos esta como un espejo, pero no podremos ver absolutamente nada de lo que hay por encima del agua.

### 15.5.3. Principio de Fermat

◦ Una forma muy elegante de entender estos fenómenos de reflexión y refracción, y que aún sigue siendo válida, es hacer uso del principio de Fermat. Dicho principio dice que la luz, para ir desde un punto  $A$  hasta otro  $B$  elige siempre un camino tal que el tiempo en recorrerle sea el mínimo (o, a veces el máximo). Es de notar que la ley afirma que es el *tiempo* el que es mínimo, no el espacio que recorre.

De esta forma en un mismo medio la luz viaja en línea recta, porque como la velocidad es constante entonces el tiempo mínimo lo logra con una distancia mínima, y ya se conoce que la recta es el camino más corto entre dos puntos.

En cuanto a la reflexión, resulta que si tenemos que ir de un punto  $A$  a otro  $B$  pero “tocando un espejo” por el camino, la forma más rápida en la cual lo haremos será logrando que el ángulo de incidencia sea igual al de refracción.

Por último para la refracción: si debemos ir de un punto  $A$  en un medio donde uno se desplaza muy rápidamente (por ejemplo) a otro punto  $B$  situado en un medio distinto y donde la velocidad de desplazamiento resulta muy lenta, nos resultará más favorable, para llegar antes, recorrer algo más de espacio donde la velocidad es más rápida para poder así “atajar” algo de espacio en el medio donde esta velocidad es lenta y recorrer allí menos. Como ejemplo basta pensar que a veces para ir de un sitio a otro preferimos tomar una autopista, aunque demos un ligero rodeo, que una carretera de tierra y piedras que vaya recta, sin poner en duda que aunque en la autopista recorremos más camino vamos a llegar antes.

Una explicación clara y amena de las leyes de refracción y reflexión gracias al principio de Fermat puede ser consultada por el lector en el [1] capítulo 26.

Ampliación



CAPÍTULO 15. FENÓMENOS ONDULATORIOS

# Capítulo 16

## Electromagnetismo

### 16.1. Introducción

Si bien algunos efectos magnéticos han sido conocidos desde la antigüedad, como por ejemplo el poder de atracción que sobre el hierro ejerce la magnetita, no fue sino hasta el siglo XIX cuando la relación entre la electricidad y el magnetismo quedó patente, pasando ambos campos de ser diferenciados a formar el cuerpo de lo que se conoce como electromagnetismo.

Con el advenimiento posterior de las ecuaciones de Maxwell, relación de ecuaciones en las que quedan expresadas todas las leyes del electromagnetismo, quedó cerrado el estudio clásico de este campo. Tan importantes y logradas fueron estas ecuaciones que Albert Einstein, eligiendo entre la veracidad de las ecuaciones de Maxwell o la Mecánica Newtoniana, que no son compatibles entre sí, logró desbancar la teoría Newtoniana imponiendo la llamada Teoría de la Relatividad.

En este nivel veremos algunas de las relaciones más patentes entre la electricidad y el magnetismo, así como las fuerzas a las que la aparición de campos magnéticos da lugar.

### 16.2. Fuerza de Lorentz

Dado un campo magnético  $\vec{B}$  y una partícula de carga  $q$  que se desplaza por el interior de dicho campo con una velocidad  $\vec{v}$  Lorentz descubrió que esta partícula sufre una fuerza magnética igual a

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (16.1)$$

Elementos a destacar de esta fórmula es que la fuerza magnética se deja notar, por tanto, sólo sobre partículas cargadas; para partículas neutras ( $q = 0$ ) se tendrá que  $\vec{F} = 0$ . Un hecho aún más reseñable es que sólo actúa sobre partículas en movimiento. Si una partícula está en reposo respecto a nuestro sistema de referencia la fuerza magnética ejercida sobre ella, aunque esté cargada y exista un campo magnético, es nula.

◊ Para caracterizar el sentido del campo se puede emplear la denominada regla de la mano izquierda, consistente en que, si consideramos los dedos pulgar, índice y corazón de la mano izquierda, de tal forma que el dedo corazón señale en la dirección y sentido de la velocidad y el índice en el del campo, obtendremos el pulgar “apuntando” en la dirección y sentido correctos de la fuerza magnética.



La unidad de campo magnético en el Sistema Internacional es el Tesla. De la ecuación (16.1) se puede extraer que dimensionalmente un Tesla será  $T = \frac{Ns}{mC}$  Newton segundo entre metro Culombio.



▷ La fuerza magnética siempre es perpendicular a la trayectoria de la partícula y al campo magnético

◦ Si, además de un campo magnético existiera un campo eléctrico  $\vec{E}$  podemos incluir esta fuerza en la Ley de Lorentz y, como la fuerza eléctrica es simplemente  $\vec{F} = q\vec{E}$  y podemos usar el principio de superposición

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Un ejemplo de cómo se puede aplicar esta fórmula para campos magnéticos constantes se puede ver en la sección 16.5.1.

### 16.2.1. Fuerza sobre una corriente eléctrica

Pero... ¿Y si en vez de una sola partícula tenemos varias moviéndose?, esto es como preguntarse por la fuerza que experimentará, debido al magnetismo, una corriente eléctrica. Para ello vamos a suponer una corriente eléctrica y tomar un elemento diferencial de ella. Si diferenciamos (16.1) tendremos que, como sólo la carga  $q$  va a variar

$$d\vec{F} = dq(\vec{v} \wedge \vec{B}),$$

pero habrá que calcular cuanto puede ser este  $dq$ . Partiendo de la definición de intensidad para una corriente eléctrica,  $I = \frac{dq}{dt}$  y sustituyendo  $dq$  tendremos que

$$d\vec{F} = I dt \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Veamos ahora que podemos hacer con esta expresión usando la conocida fórmula de la velocidad  $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$  y sustituyendo por tanto  $d\vec{l} = \vec{v} dt$ :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

Por último, recordando que en un circuito la intensidad, por la ley de Ohm, depende sólo de la diferencia de potencial y la resistencia de dicho circuito y podemos considerarla por tanto constante, tendremos que para un conductor finito:

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \wedge \vec{B}. \quad (16.2)$$

## 16.3. Campo magnético debido a una carga en movimiento

La relación entre la electricidad y el magnetismo es tan íntima que cualquier carga moviéndose genera a su alrededor un campo magnético. Deducir cual es dicho campo a partir de principios iniciales no es fácil, y por eso se detalla aquí simplemente cual es el campo que genera una carga en movimiento:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \hat{r}}{r^2} \quad (16.3)$$

donde  $\mu_0$  es la constante correspondiente al campo magnético, y se denomina permeabilidad magnética del vacío,  $q$  es la carga de la partícula  $\vec{v}$  es la velocidad a la que se mueve y  $\hat{r}$  es el vector que indica el lugar dónde queremos calcular el campo pero *visto desde un sistema de referencia centrado en la partícula*. También se la conoce como ley de Biot y Savart.

Esta fórmula nos indica cómo el magnetismo está creado por corrientes y no por monopolos, es decir por “cargas magnéticas” del estilo de las cargas eléctricas.

◊ Como ejemplo para ver la naturaleza un poco distinta del campo magnético basta considerar el intento de separar el polo de un imán. Aunque rompamos un imán por la mitad este “reproduce” sus dos polos. Si ahora partimos estos cachos otra vez en dos, nuevamente tendremos cada cachito con dos polos norte y sur diferenciados. En magnetismo no existen los “monopolos”

Nota



◦ Una explicación detallada aunque con bastante nivel que deduzca más rigurosamente estas expresiones y de razones para ellas puede buscarse en cualquier libro que trate sobre electromagnetismo, ecuaciones de Maxwell o incluso teoría de la Relatividad.

Ampliación



### 16.3.1. Campo magnético producido por una corriente eléctrica

Si intentamos generalizar la fórmula (16.3) a una corriente eléctrica deberemos pasar primero a una forma diferencial para intentar integrar después, igual que hicimos con la fuerza de Lorentz. Para ello partimos de

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\vec{v} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

en donde, haciendo también el cambio en función de la intensidad y teniendo en cuenta que  $\vec{r}$  es el punto donde queremos calcular el campo pero visto desde la carga, si llamamos a ese punto  $\vec{r}'$  desde un sistema de coordenadas, y  $\vec{r}''$  a cada punto del conductor que vamos a recorrer en la integración, tendremos que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \wedge \hat{r} - \vec{r}'}{(\vec{r} - \vec{r}')^2}.$$

## 16.4. Ley de Ampère

El hecho de la no existencia de un “monopolo” magnético va a hacer que en cualquier situación “entren y salgan” líneas de campo magnético en cualquier volumen que queramos imaginar y que, por tanto, el flujo del campo magnético sea nulo siempre, con lo cual no hay ningún teorema similar al de Gauss para el campo magnético en cuanto a flujo se refiere. Pero no obstante la circulación del campo magnético, es decir  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  si que va a ser una magnitud interesante debido a que, se puede demostrar, que la circulación del campo magnético a través de una trayectoria cerrada cualquiera va a ser igual a  $\mu_0 I$  por la intensidad de corriente que atraviesa el plano encerrado por dicha superficie. Esta relación, expresada matemáticamente se convierte en

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{16.4}$$

donde el símbolo  $\oint$  se utiliza para expresar integrales sobre trayectorias cerradas.

◊ El hecho de que la circulación del campo magnético no sea nula para cualquier trayectoria indica que este campo no es conservativo, y por tanto no vamos a lograr encontrar un potencial para él. No obstante esto se refiere únicamente al campo magnético, no a la fuerza magnética y no implica, por tanto, la no conservación de la energía. Es más, como la fuerza magnética siempre es perpendicular a la trayectoria esto supondrá que el trabajo magnético siempre es cero, es decir, no se produce trabajo magnético.

Nota



## 16.5. Resolución de problemas típicos

### 16.5.1. Partícula sometida a un campo magnético constante y uniforme

Supongamos que tenemos una carga que entra en un campo magnético con una cierta velocidad y de tal forma que el campo magnético sea perpendicular a dicha velocidad. ¿Cómo se moverá en el seno de este campo?. Se puede entender de forma intuitiva que al se ejercerá una fuerza sobre la carga que, debido a (16.1) debe ser *perpendicular* a la velocidad con la que se desplaza la carga, y por tanto tendrá una componente exclusivamente normal a la trayectoria. Como en todo momento la fuerza es perpendicular a la trayectoria, porque así lo exige la ley de Lorentz, tendremos que la carga describirá una circunferencia, ya que estará sometida a una fuerza que creará una aceleración normal constante y una aceleración tangencial nula. Podemos por tanto igualar la fuerza centrípeta de este movimiento con la fuerza magnética y tener así que, si tomamos los módulos,

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

de donde se puede deducir que el radio de la trayectoria será

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

### 16.5.2. Fuerza magnética experimentada por un conductor recto y perpendicular al campo magnético

Podemos tomar un conductor recto y de longitud  $L$  que está situado sobre el eje  $OX$ . Un campo perpendicular a él puede ser  $\vec{B} = B\hat{j}$ . Entonces utilizando la expresión (16.2) en donde  $d\vec{l} = \hat{i}dx$  tenemos que

$$\vec{F} = I \int_0^L dx \hat{i} \wedge B\hat{j} = ILB\hat{k}$$

donde se ha supuesto que  $\vec{B}$  es constante.

### 16.5.3. Campo magnético creado por un conductor recto e infinito

Este problema es fácilmente resoluble utilizando la ley de Ampère. Debido a la simetría que va a presentar el problema podemos afirmar que el campo magnético será en cualquier punto perpendicular al hilo conductor (ya que éste es recto y en el cálculo del campo  $\vec{B}$  aparece un producto vectorial) y, lo que resulta de gran utilidad, su módulo sólo puede depender de la distancia al hilo.

Aprovechando estas condiciones vamos a tomar como trayectoria una circunferencia centrada en el hilo conductor y perpendicular a él. La circulación del campo magnético a través de este camino será

$$\mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l},$$

para hacer esta integral debemos darnos cuenta de que, en cualquier punto de la trayectoria,  $\vec{B}$  va a resultar paralelo a  $d\vec{l}$  y por tanto tendremos

$$\mu_0 I = \oint B d\vec{l}$$

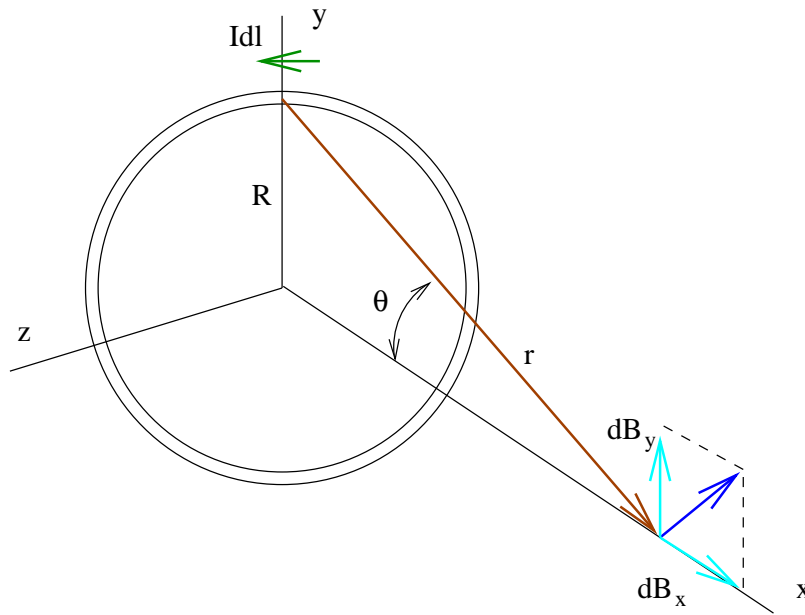


Figura 16.1: Geometría para calcular el campo magnético en el eje de una espira.

y cómo además  $|\vec{B}|$  va a resultar constante

$$\mu_0 I = B \oint dl = B 2\pi r,$$

siendo  $r$  el radio de la circunferencia, que coincide con la distancia mínima de un punto cualquiera de nuestra trayectoria hasta al cable conductor. De esta última expresión podemos despejar  $B$  que es lo único que no conocemos (la dirección y sentido de  $\vec{B}$  se conocen, y se pueden obtener usando la “regla de la mano derecha<sup>1</sup>” y así

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Queda únicamente darse cuenta de que  $I$  es, tal y como pide el teorema de Ampère, la intensidad que cruza la superficie limitada por nuestra trayectoria.

#### 16.5.4. Campo producido por una espira en su eje

Se va a calcular el campo que produce una espira circular en un punto del eje que diste una distancia  $R$  del centro de la espira, si circulara por dicha espira una intensidad  $I$ . No es un cálculo sencillo y tendremos que utilizar la ley de Biot-Savart expresada en (16.3) Vamos a proceder también usando la simetría, para facilitar el cálculo de la expresión. El producto de  $d\vec{l} \cdot \vec{r}$  podrá descomponerse en dos componentes, una paralela al eje y otra perpendicular a él. Las componentes perpendiculares se anulan unas con otras y por tanto nos bastará con conocer cual va a ser la componente paralela, ya que la otra será nula. Todo esto puede verse en la figura 16.1.

<sup>1</sup>Tomando la mano con el pulgar señalando en la dirección de la corriente, el resto de los dedos marcan cual es el sentido del campo eléctrico

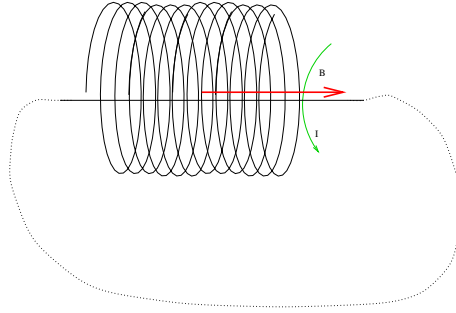


Figura 16.2: Trayectoria para un solenoide infinito.

Debemos calcular por tanto únicamente las componentes  $dB_x$  paralelas al eje. Esto será

$$dB_x = dB \sin \theta = dB \left( \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

que, utilizando Biot y Savart será

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Para determinar ahora el campo debido a la espira completa bastará integrar la expresión anterior alrededor de la espira:

$$B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dl$$

y, como  $x$  y  $R$  no van a variar<sup>2</sup> la expresión anterior puede tomarse como

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi (x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \oint dl$$

donde la integral de  $dl$  alrededor de la espira es  $2\pi r$ . Por tanto

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nota



◊ La ecuación para el campo en el centro de la espira se deduce de la anterior muy sencillamente y es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

cosa que el lector interesado puede entretenerse en demostrar.

### 16.5.5. Campo magnético en el interior de un solenoide infinito

Se llama solenoide a un conjunto de espiras arrolladas consecutivamente. Para calcular el campo magnético de un solenoide habría que proceder más rigurosamente de lo que se va a hacer en este apartado pero, en aras a conseguir cierta claridad, vamos a hacer ciertas aproximaciones “fuertes” y algunas “tropolías matemáticas”.

<sup>2</sup> $x$  será la distancia desde el centro hasta donde queremos tomar el punto, y  $R$  el radio de la espira. Ambas magnitudes son constantes.



Concretamente vamos a tomar un solenoide infinito enrollado de tal forma que haya un total de  $n$  vueltas por unidad de longitud. Tomemos entonces el recorrido insinuado en la figura 16.2 que es un tanto peculiar. Dicho recorrido pasa por el centro de la espira infinita para luego salir y alejarse hasta el infinito, donde se cierra el circuito. Reconocemos que este recorrido no deja de ser peculiar, pero nos va a llevar correctamente a la expresión deseada si nos abstenemos de hacer preguntas sobre la rigurosidad de esta demostración. Evidentemente en el infinito el campo  $\vec{B}$  será nulo, porque la perturbación de la espira no llega hasta tan lejos, con lo cual la integral  $\int \vec{B} \cdot \vec{l}$  va a ser nula en esta parte del recorrido. A su vez en los bordes de este solenoide (en el casi en el cual un solenoide infinito tuviera bordes) el campo va a ser perpendicular al recorrido. ¿Por qué?, por simetría es lógico suponer que el campo  $\vec{B}$  va a ser paralelo al solenoide en su interior y, si existiere en el exterior, también debería ser paralelo. Por tanto únicamente quedará hallar la integral en el recorrido que discurre por el interior del solenoide. Esta integral será

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = BL$$

donde  $L$  es la longitud del solenoide (sí, pese a todo sabemos que  $L = \infty$ , pero es útil ponerlo así). ¿Y cuánto será  $I$ , la intensidad total que atraviesa el plano?. Como tenemos  $n$  espiras por unidad de longitud de solenoide, la corriente total que atraviesa el plano limitado por esta singular trayectoria será  $I_{total} = LnI$ . Así pues tendremos que

$$\mu_0 LnI = BL$$

con lo cual

$$B = \mu_0 nI.$$

Esta es la expresión del campo en el interior de un solenoide infinito. Su interés radica en que es también una buena expresión para el campo magnético que existe en el interior de un solenoide finito, *siempre que nos encontremos lejos de los bordes*.

### 16.5.6. Fuerzas entre corrientes paralelas

¿Cómo podemos calcular la fuerza con que se atraen (o repelen) dos corrientes paralelas?. Para ello combinaremos las expresiones usadas en los apartados 16.5.3 y 16.5.2. Tomando el primer hilo, con una corriente eléctrica  $I_1$ , creará en un hilo conductor, situado paralelamente a una distancia  $d$  de él, un campo que, usando 16.5.3 será

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d},$$

y claro está, este hilo segundo por el cual circula una corriente  $I_2$  experimentará una fuerza por estar sometido a este campo. Esta fuerza la tomamos de 16.5.2 y es

$$F = I_2 LB.$$

Ahora bien, como la longitud de ambos hilos es infinita, la fuerza total que sienten estos hilos también es infinita, aunque eso sí, repartida por su longitud sin límite. Una magnitud útil es ver cuanta fuerza se siente por unidad de longitud  $L$ , lo que equivale a decir que

$$\frac{F}{l} = I_2 B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}.$$

Respecto al sentido de la fuerza, se puede ver que ésta es atractiva cuando las corrientes son en sentidos contrarios y repulsiva si el sentido es el mismo. Una forma de verlo es considerando el sentido del campo en cada hilo y aplicando entonces que  $\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$ , o bien la llamada regla de la mano izquierda.

## CAPÍTULO 16. ELECTROMAGNETISMO

◊ Es frecuente utilizar estas relaciones para definir el Amperio. 1 Amperio sería así la intensidad de corriente necesaria para que dos hilos rectos situados a 1 metro el uno respecto al otro sientan una fuerza por unidad de longitud equivalente a  $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$ .



# Capítulo 17

## Inducción electromagnética

### 17.1. Introducción

La unión de la electricidad y el magnetismo queda patente cuando descubrimos que una intensidad eléctrica es capaz de crear un campo magnético a su alrededor. No obstante la física es una ciencia en la que el pensamiento “simétrico” resulta frecuentemente ampliamente productivo, es decir, podemos preguntarnos ¿Y podrá un campo magnético producir un fenómeno eléctrico?. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, como veremos a continuación.

### 17.2. Ley de Faraday-Henry

Si uno conecta un galvanómetro a una bobina de conductor, sin nada más, el galvanómetro no deberá señalar nada: por allí no circula corriente de ningún tipo. Pero ahora bien, al acercar o alejar un imán de la bobina descubriría un hecho sorprendente: el galvanómetro marcaría una tenue corriente durante este proceso. Esta experiencia, similar a las llamadas experiencias de Faraday, demuestra claramente que existe una relación entre el campo magnético y el eléctrico.

Si en la experiencia anterior uno acerca un imán a la bobina y lo deja ahí vería que el galvanómetro marca corriente mientras el imán se mueve, pero no cuando lo dejamos quieto. Este fenómeno constituye la esencia de la ley de Faraday y Henry, que podemos ya enunciar:

$$\epsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}. \quad (17.1)$$

En esta ecuación  $\epsilon$  es la *fuerza electromotriz* inducida y  $\phi_B$  es el flujo magnético que atraviesa la superficie delimitada por el circuito. Así pues la variación del flujo magnético ocasiona la aparición de una fuerza electromotriz. Como el flujo magnético  $\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$  esta variación puede deberse a tres causas diferenciadas o a una mezcla de todas:

1. Variación del módulo del campo magnético B.
2. Variación del módulo de la superficie del circuito S.
3. Variación de la orientación entre ambos.

▷ La variación del flujo magnético induce una fuerza electromotriz.

Recuerda



### 17.2.1. Ley de Lenz

¿Y qué significa el signo menos en la expresión (17.1)? Éste puede deducirse de un principio físico más general, conocido con el nombre de Ley de Lenz que afirma que “la fuerza electromotriz inducida posee una dirección y sentido tal que tiende a oponerse a la variación que la produce”.

Este principio es una manera más elegante de “adivinar” cómo será la f.e.m. inducida en un circuito. Por ejemplo, supongamos que tomamos una espira conductora e introducimos en ella un imán. En este caso el flujo magnético aumenta, lo cual produce una f.e.m. inducida. ¿Qué sentido tendrá?. Aquel que se oponga a la causa que lo produce, es decir, como en este caso es producido por un aumento del flujo magnético el circuito tenderá a disminuir dicho flujo magnético. ¿Y cómo puede lograrse esto?. Haciendo que la intensidad de corriente creada genere a su vez un campo magnético que se oponga al anterior y disminuyendo de esta manera el campo.

De alguna manera este es un mecanismo de “inercia” que, en general, presentan todos los sistemas físicos.

## 17.3. Fuerza electromotriz

En general para que en un circuito exista una corriente eléctrica estacionaria debe existir un elemento que suministre esta energía a las cargas. Este elemento puede ser, por ejemplo, una pila o bien un campo magnético variable.

Se define así la fuerza electromotriz como el trabajo realizado por unidad de carga realizado a lo largo del circuito; como el trabajo por unidad de carga es el campo eléctrico tendremos que:

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

definiendo la integral a lo largo del circuito. Se ve de esta definición que su unidad va a ser el Voltio, al igual que el potencial eléctrico.

Nota



◊ Entonces ¿por qué no llamar también  $V$  a la fuerza electromotriz?. Cuando tenemos un campo estático, por ser conservativo resulta que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

lo cual nos permitía definir el potencial eléctrico. Ahora bien, ahora el campo eléctrico no resulta ser conservativo y por lo tanto no podemos definir un potencial, con lo cual aunque  $\epsilon$  y  $V$  sean magnitudes similares que se miden en la misma unidad, no obstante no son la misma cosa.

## 17.4. Autoinducción

Imaginemos ahora que tenemos un circuito eléctrico apagado, con el interruptor de corriente abierto. ¿Qué sucede cuando lo encendemos?.

Puede pareceros que simplemente se crea instantáneamente una corriente en su interior igual a, según la ley de Ohm,  $I = \frac{V}{R}$  pero la realidad no es tan simple. Al encender el circuito empieza a aumentar la intensidad por su interior, lo cual genera un campo eléctrico que atraviesa el propio circuito. Este campo es proporcional a la intensidad y por tanto varía junto con la intensidad. La variación del campo crea una variación del flujo magnético, y por lo tanto la aparición de una fuerza electromotriz inducida que se opone a esta intensidad creada. Por tanto el circuito presenta una cierta “inercia a ser arrancado”.

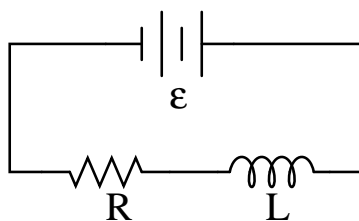


Figura 17.1: Circuito con una resistencia y una autoinducción.

Ahora bien: ¿Cómo podemos relacionar el flujo magnético que el circuito crea sobre sí mismo?. En principio como el flujo de un circuito, si no se deforma, va a resultar proporcional al campo magnético, y este es proporcional a la intensidad, tendremos que el flujo que el circuito genera sobre sí mismo va a ser proporcional a la intensidad. Esta constante de proporcionalidad se denomina la autoinducción  $L$ , y se tiene

$$\phi = LI$$

. La unidad de autoinducción en el Sistema Internacional es el henrio (H), equivalente a  $1H = 1\Omega s$ .

#### 17.4.1. Inducción mutua

De una manera análoga a la anterior si tenemos dos circuitos próximos uno de ellos puede inducir un cierto flujo magnético en el otro (y al revés). El flujo magnético que atraviesa el primer circuito, llamémosle  $a$  debido a la corriente eléctrica que circula por  $b$  será proporcional a ésta, y por tanto

$$\phi_a = M_{ab}I_b.$$

Este coeficiente  $M$  presenta también las mismas unidades que  $L$ , el henrio, y se llama inductancia mutua.

◊ Análogamente se tendrá que  $\phi_b = M_{ba}I_a$  donde, además, se puede demostrar que  $M_{ab} = M_{ba}$ , una prueba más de las simetrías tan comunes en física.



### 17.5. Energía magnética

Deducir la expresión de la energía magnética de forma directa no es sencillo, pero en cambio se puede obtener un resultado muy útil utilizando argumentos indirectos en los que la conservación de la energía juega su papel. Supongamos que tenemos el circuito de la figura 17.1 y analicemos que está sucediendo. Por la ley de Ohm el efecto de todas las fuerzas electromotrices es generar una  $IR$ , es decir,  $\sum \epsilon = IR$ . Podemos atribuir una  $\epsilon$  a la pila y una  $\epsilon'$  a la f.e.m. que se induce en el circuito. Sabemos que  $\epsilon' = -\frac{d\phi}{dt}$  y que para un propio circuito  $\phi = LI$  siendo  $L$  una constante. Tendremos por tanto que

$$\epsilon + \epsilon' = IR \Rightarrow \epsilon - L\frac{dI}{dt} = IR,$$

y despejando de aquí la f.e.m. que produce la pila, es decir,  $\epsilon$  resultará que

$$\epsilon = IR + L \frac{dI}{dt}. \quad (17.2)$$

Sabemos ahora que  $\epsilon I$  es toda la potencia que suministra la pila. Multipliquemos entonces toda la ecuación (17.2) por  $I$  para ver a donde va a para esa potencia y tendremos que

$$\epsilon I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt},$$

es decir, que parte de la potencia se gasta en el efecto Joule (producir calor) y otra parte se va en el término  $LI \frac{dI}{dt}$ . Como la potencia es  $P = \frac{dE}{dt}$  si llamamos  $E_B$  a la energía asociada con el campo magnético que se almacena en la autoinducción tendremos que

$$\frac{dE_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

de donde integrando se tiene que

$$E_B = \frac{1}{2} LI^2.$$

Ampliación



◦ La expresión general del campo magnético contenido en una región del espacio en función de  $B$  es más difícil de obtener y tiene el siguiente aspecto:

$$E_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV.$$

## 17.6. Problemas y aplicaciones de inducción electromagnética

### 17.6.1. Generadores

Un generador es un dispositivo capaz de producir corriente a partir de otras formas de energía, generalmente a partir de energía mecánica.

La gran mayoría de los generadores consisten en una espira conductora que gira en el interior de un campo magnético constante y homogéneo a velocidad angular  $\omega$  también constante. ¿Cómo será su fuerza electromotriz inducida?.

El flujo magnético que atraviesa la espira será igual a  $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta$ . En este caso si la espira gira a una velocidad angular constante, esto supondrá que  $\theta = \omega t + \phi$  siendo  $\phi$  una fase inicial que podemos suponer tranquilamente que es cero. Tendremos por tanto que  $\phi = BS \cos(\omega t)$ .

Para calcular  $\epsilon$  sabemos que  $\epsilon = -\frac{d\phi}{dt}$  con lo cual directamente obtenemos que  $\epsilon = BS\omega \sin(\omega t)$ .

En la práctica se usan solenoides con muchas espiras y otras mejoras técnicas, pero en cualquier caso la f.e.m. producida siempre es del tipo  $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t)$ .

Nota



◊ Si representamos la f.e.m. inducida en este tipo de generadores en función del tiempo, como en la figura 17.2 vemos que esta corriente generada es alterna. Esta es una de las razones por las que el uso de la corriente alterna está tan difundido: ya que su generación es mucho más sencilla que la de la corriente continua.

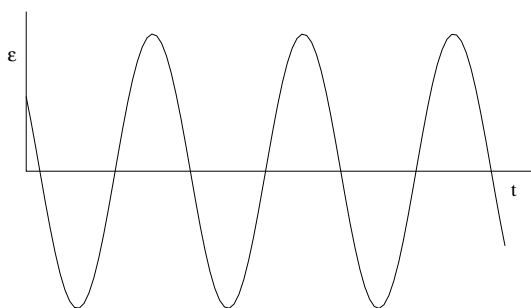


Figura 17.2: Corriente alterna.

### 17.6.2. Transformadores

Un transformador es un aparato capaz de cambiar el voltaje o tensión de la corriente eléctrica alterna. Básicamente están formados por dos solenoides de  $n_1$  y  $n_2$  espiras arrollados en torno a un núcleo de hierro, como en la figura 17.3. Si uno de estos circuitos es alimentado por un generador que produce una f.e.m.  $\epsilon_1$  esto producirá un flujo magnético  $\phi$  que atravesará cada espira del solenoide. En este circuito, si suponemos que no se pierde energía en calor, etc. . . tendremos que toda su  $\epsilon_1$  se está invirtiendo en flujo magnético y, según (17.1) y como el flujo total que atraviesa el circuito es el de una espira,  $\phi$  por todas las  $n_1$  espiras que tiene se obtiene que

$$\epsilon_1 = -n_1 \frac{d\phi}{dt}.$$

Veamos que sucede para el circuito 2. El hecho de arrollar ambos circuitos a un núcleo de hierro sirve para que casi todo el flujo (siempre se pierde algo)  $\phi$  que atravesaba cada espira del primer circuito lo haga también en las del segundo. De esta manera vamos a suponer que no hay pérdida alguna y que, también para el segundo circuito cada espira es atravesada por el flujo  $\phi$ . En este caso se inducirá una corriente  $\epsilon_2$  equivalente a la derivada temporal del flujo total con signo menos, esto es

$$\epsilon_2 = -n_2 \frac{d\phi}{dt}$$

y como el término  $\frac{d\phi}{dt}$  es el mismo en ambas expresiones si dividimos miembro a miembro tenemos que

$$\epsilon_2 = \frac{n_2}{n_1} \epsilon_1$$

que nos da la relación entre las tensiones de entrada y salida de un transformador.

Ahora bien, este no es un dispositivo “milagroso” y aunque logra transformar un tenue voltaje en otro más alto debe respetar el principio de conservación de la energía, y por tanto las potencias de entrada y salida deberían ser, si no hay pérdidas<sup>1</sup> iguales. Como la potencia es  $P = I\epsilon$  esto nos dice que las intensidades se transforman como  $I_2 = \frac{n_1}{n_2} I_1$ .

Resumiendo: Si elevamos la tensión de un circuito lo hacemos a costa de disminuir su intensidad. Cuando bajamos la tensión de otro a cambio elevamos la intensidad. La potencia, que es el término energético, se mantiene constante.

<sup>1</sup>En un caso real la potencia de salida siempre es menor que la de entrada, el resto se disipa en forma de calor.

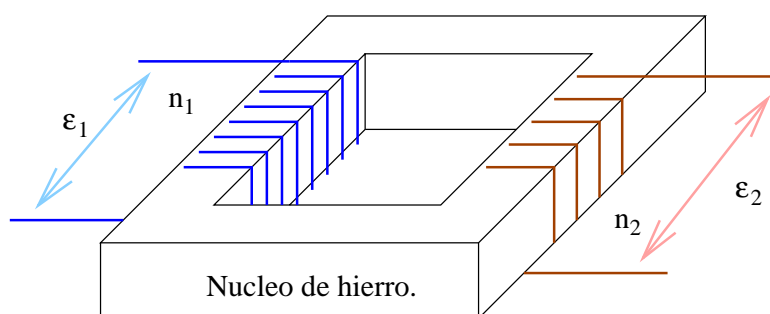


Figura 17.3: Esquema simplificado de un transformador.

### 17.6.3. Autoinducción de un solenoide

Si tomamos la aproximación de solenoide muy largo que vimos en el apartado 16.5.5 podemos intentar calcular el valor de su coeficiente de autoinducción. Como el campo en su interior vale  $B = \mu_0 n I$  siendo  $n$ , recordemos, la densidad longitudinal de espiras, tendremos que si cada espira presenta una superficie  $S$  el flujo total será  $\phi_T = n l B S$  donde  $l$  es la longitud del solenoide. Despejando

$$L = \frac{\phi_T}{I}$$

y por tanto en esta aproximación resultará que

$$L = \mu_0 n^2 l S.$$



## Capítulo 18

# La naturaleza de la luz. Dualidad onda corpúsculo de la materia

### 18.1. Introducción histórica

Históricamente la luz ha sido siempre un ente escurridizo al que los físicos han querido asignar una naturaleza determinada, sin conseguirlo. Newton, a finales del siglo XVII, sostuvo que la luz estaba compuesta por partículas, diferentes según el color, y que “rebotaban” en un espejo logrando así explicar porqué los ángulos de incidencia y reflexión eran los mismos. Parece ser que la propagación rectilínea de la luz tuvo mucho que ver con esta posición. Además lograba explicar la refracción sobre la superficie de dos medios diferentes usando también una teoría corpuscular. Huygens, contemporáneo de Newton, hablaba de ondas luminosas, y mediante el principio de Huygens, visto en 15.2 explicaba también la refracción y reflexión. Según Newton la luz debía ir más rápida en un medio más denso. Según Huygens el fenómeno era al revés, pero no obstante en aquella época aún no se podía medir la velocidad de la luz de manera fiable, y no se levó a cabo ningún experimento para descubrir quien tenía razón; fue la eminencia de Newton lo que decantó la balanza hacia el lado corpuscular de la luz durante esa época, y esta inercia hizo que, pese a los continuos debates y polémicas, fuera la naturaleza corpuscular de la luz la dominante durante el siglo siguiente al de Newton.

A principios del siglo XIX empezó a formarse un sistema consecuente y desarrollado de la luz vista desde un punto ondulatorio. Fueron de gran importancia las aportaciones de Young y Fresnel. El descubrimiento de muchos fenómenos de difracción e interferencia relacionados con la luz y la posterior explicación del fenómeno ondulatorio de la luz como una onda electromagnética por parte de Maxwell pareció dejar sentada definitivamente la teoría ondulatoria sobre la luz a finales del siglo XIX.

Pero no obstante a finales del siglo XX surge uno de los fenómenos más complejos y enrevesados estudiados entonces: la radiación del cuerpo negro: un sistema ideal que absorbe toda la radiación que incide sobre él y que, en buena aproximación, puede tomarse como un cuerpo con una cavidad que comunica con el exterior con un pequeño orificio, y cuyas características radiativas cumplen la propiedad de depender sólo de la temperatura de sus paredes.

Fue este hecho el que jugó un papel primordial en la historia de la física moderna y que obligó a Planck (a disgusto, según cuenta la historia) en 1.900 a introducir

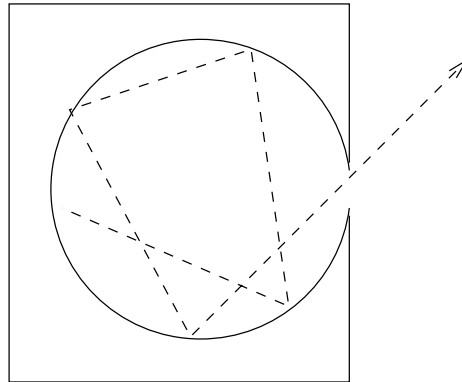


Figura 18.1: Dibujo de un “cuerpo negro”.

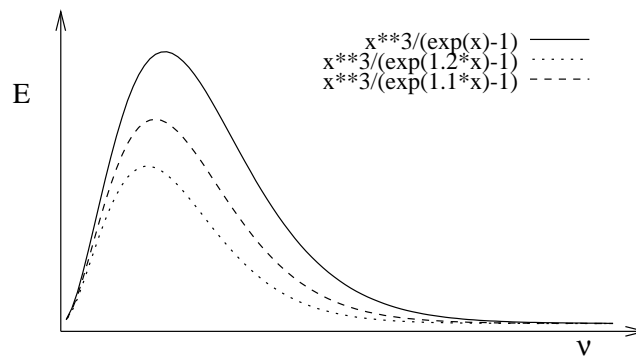


Figura 18.2: Distribución espectral de la radiación emitida por un cuerpo negro a distintas temperaturas.

uno de los fenómenos más sorprendentes de la física: la cuantización de la energía y, en concreto, de la luz.

## 18.2. El cuerpo negro

Un esquema de la cavidad que puede aproximarse a un cuerpo negro ideal se encuentra en la figura 18.1. Estos cuerpos al irse calentando van encontrando un equilibrio de radiación en el cual, a mayor temperatura, el cuerpo emite a su vez más radiación. Además al irse calentando el cuerpo aumenta la cantidad de energía radiada (de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann) y la concentración de la energía se desplaza hacia longitudes de ondas más cortas. Precisamente a una representación de la potencia radiada frente a la longitud de onda se le puede denominar distribución de la radiación o distribución espectral.

Una gráfica de la distribución espectral de la radiación de un cuerpo negro puede verse en la figura 18.2. Este resultado experimental se intentó explicar de una forma directa a partir de la termodinámica clásica, y el resultado obtenido, que también está representado en la figura 18.2, claramente no coincidía con el resultado “verdadero”, que es siempre el que marca la experiencia de laboratorio.

En 1900 el físico alemán, Max Planck afirmó que realizando una inusitada modificación de los cálculos clásicos, e introduciendo una hipótesis nueva y singularmente

extraña, había encontrado una distribución espectral que explicaba perfectamente los datos experimentales.

Esta “sorprendente hipótesis” era que la energía emitida y absorbida por el cuerpo no era continua, es decir, el cuerpo no podía tomar o dejar cualquier valor de ésta, sino discreta y además, proporcional a la frecuencia. Es decir

$$E = h\nu \quad (18.1)$$

donde  $h$  es la constante de proporcionalidad, de valor  $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  y conocida actualmente como *constante de Planck*.

Planck fue absolutamente incapaz de encajar esta hipótesis dentro del marco de la mecánica clásica y, sin proponérselo, había dado el primer paso para el advenimiento de la mecánica cuántica.

▷ La radiación electromagnética se emite en “paquetes” de energía o fotones cuyo valor energético es:

$$E = h\nu.$$

Recuerda



## 18.3. El efecto fotoeléctrico

### 18.3.1. Descripción del problema

Este efecto fue descubierto por Hertz en 1.887 y estudiado por Lenard en 1.900. Fue satisfactoriamente explicado por Einstein en 1.905 y su explicación le supuso ganar el Premio Nobel de Física. El efecto fotoeléctrico consiste en el hecho de que, cuando se ilumina una superficie metálica limpia, bajo ciertas condiciones se emiten electrones. Estos electrones pueden ser recogidos en un tubo de rayos catódicos para relacionar su emisión con algo fácilmente medible, como es la intensidad y voltaje eléctrico.

Analicemos que sucede en el circuito de la figura 18.3. Cuando la luz incide sobre el cátodo C se emiten electrones. Si alguno de ellos choca con el ánodo A existirá una cierta corriente por el circuito. El número de electrones emitidos que alcanzan el ánodo puede variarse haciendo el ánodo positivo o negativo respecto al cátodo, es decir, creando una diferencia de potencial  $V$  entre ellos. Cuando  $V$  es positivo los electrones arrancados por la luz son atraídos por el ánodo. Para un valor lo suficientemente alto de  $V$  todos los electrones “arrancados” por la luz alcanzan el ánodo y la corriente logra su valor máximo; si aumentamos más  $V$  descubriremos que que la corriente ya no aumenta, se mantiene en su valor máximo, ya que  $V$  no influye en que se liberen más electrones del cátodo, sino sólo en que todos los que son liberados se acerquen hacia el ánodo. Si variamos  $V$  al revés los electrones serán repelidos por el ánodo, y sólo aquellos que tengan una energía cinética ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) suficientemente alta lograrán llegar al ánodo y generar corriente. Pero ahora bien, cuando bajamos  $V$  y lo hacemos menor que un cierto valor  $-V_0$  no existe corriente alguna, lo cual significa que ningún electrón alcanza el ánodo. Entonces este potencial  $V_0$  estará relacionado con la máxima energía cinética que tendrán los electrones, de manera que podemos poner

$$\frac{1}{2}mv^2|_{max} = eV_0.$$

Ahora bien ¿y qué es lo interesante de esta experiencia?. Lo curioso es que el valor de  $V_0$  *no depende de la intensidad de la radiación*, pero si depende de “algo tan peregrino” como el color de la luz con que se ilumine el cátodo. Así pues aparentemente al aumentar la intensidad, por tanto la energía por unidad de tiempo

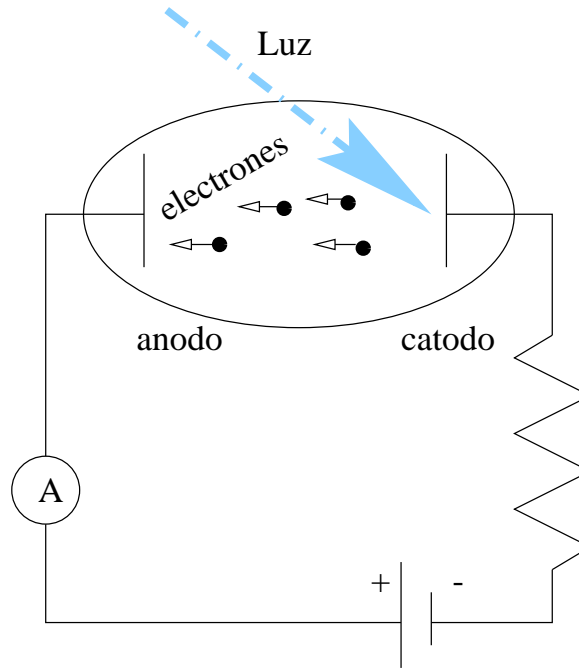


Figura 18.3: Dispositivo simplificado para la medición del efecto fotoeléctrico.

que cae sobre el cátodo, no aumenta la energía cinética de los electrones emitidos. ¿Cómo se puede explicar esto?. ¿Por qué sucede?. Estas fueron las preguntas que se hizo Einstein ( y logró contestar) en 1.905.

### 18.3.2. Solución

Einstein demostró que estas experiencias podían entenderse suponiendo que la energía luminosa no se distribuye de manera continua, como dice el modelo clásico ( y Maxwelliano) de la luz, sino cuantizada en paquetes pequeños llamados fotones. La energía de un fotón es  $E = h\nu$ , la relación que Planck usó para la explicación del cuerpo negro. Einstein supuso que un electrón emitido desde la superficie del cátodo es de alguna forma “arrancado” por el impacto con el fotón, de forma que toda la energía del fotón pasa al electrón. Ahora bien, el electrón recibe su energía de un único fotón. Así, cuando se aumenta la intensidad de la luz lo que sucede es que al incidir más fotones sobre el cátodo por unidad de tiempo quedan más electrones liberados, pero la energía que ha absorbido cada electrón no varía, es la misma.

De esta manera se hace un sencillo cálculo energético: Si la energía necesaria para que se desprenda un electrón de la superficie de un metal es, pongamos, una cierta  $W$ , la energía máxima de los electrones debería ser la que queda de la que tenía el electrón, es decir

$$\frac{1}{2}mv^2|_{max} = h\nu - W$$

y como a su vez, sabíamos que esta energía era  $eV_0$  podemos deducir que este potencial de frenado  $V_0$  será

$$V = \frac{h\nu - W}{e}.$$

Este resultado coincidía plenamente con los datos experimentales, y además el valor  $h$  de la constante  $h$  resultó ser igual que el usado por Planck para explicar

el cuerpo negro. Esto supuso una nueva evidencia sobre la validez universal de la hipótesis de la cuantificación de la energía lumínica.

## 18.4. Efecto Compton

Arthur H. Compton, en 1.923 realizó una experiencia en la que se enviaban rayos X (un tipo de luz más energética que la visible) a una zona con átomos, y posteriormente se medía tanto la frecuencia y ángulo de la luz dispersada como la velocidad del electrón derivado tras el choque. Utilizando los principios de conservación de la energía y del momento lineal en estos choques, todos los resultados eran coherentes si se suponía que la luz se comportaba como una partícula (un fotón) que colisiona con el electrón, con energía dada por la relación de Planck  $E = h\nu$  y con momento lineal igual a

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (18.2)$$

◊ Puede resultar útil recordar que, de acuerdo con la teoría clásica, la energía y cantidad de movimiento de una onda electromagnética está marcada por

$$E = pc,$$

entonces, relacionando esta  $E$  mediante la ecuación (18.1) y recordando que  $c = \lambda\nu$  se obtiene fácilmente (18.2).



## 18.5. Naturaleza ondulatoria de la materia

Las ideas de simetría, que se muestran siempre muy útiles en la física, llevaron a Louis de Broglie a pensar que, al igual que la luz, pese a ser de naturaleza supuestamente ondulatoria, presentaba muchas veces una componente corpuscular, podía ser que la materia normal, tratada siempre como partícula, tuviese también una naturaleza ondulatoria.

Pero de Broglie fue más allá: si el momento lineal de un fotón, según el experimento de Compton, era  $p = \frac{h}{\lambda}$  ¿por qué no utilizar esta relación para encontrar la “longitud de onda de la materia”??. Esto es, para un cuerpo normal  $p = mv$  y usando (18.2) y despejando así  $\lambda$  obtenemos

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (18.3)$$

Ahora bien, la física tiene siempre una forma para decidir cuando una hipótesis es o no correcta: la experimentación. En experiencias posteriores se pudo comprobar que efectivamente, partículas como los electrones, pueden producir patrones de difracción, un hecho puramente ondulatorio, similares a los que producen los rayos X.

Ahora bien, si todas las partículas presentan esta dualidad onda y corpúsculo, ¿por qué en nuestra vida cotidiana no vemos, por ejemplo, la difracción de una bola de billar o de algún objeto igualmente macroscópico?. La respuesta es que, si tomamos una bola de billar con una masa de 100 gramos y una velocidad de  $1 \frac{m}{s}$  su longitud de onda será, dado el ínfimo valor de  $h$ , extremadamente pequeña, razón por la cual con los aparatos actuales somos incapaces de comprobar su existencia. Para objetos más pequeños (protones, electrones, neutrinos...) se ha encontrado un comportamiento ondulatorio siempre que se ha buscado.

◊ Evidentemente toda esta serie de fenómenos nuevo invalida de tal manera las leyes anteriores que es necesaria la búsqueda de nuevas “leyes de Newton”, de nuevas ecuaciones que sean capaces de explicar a su vez estos nuevos



fenómenos. Estas nuevas leyes entran a formar parte de un nuevo marco de la física que se conoce como Física Cuántica o Mecánica Cuántica. La palabra cuántica hace referencia al hecho de que, en este nuevo marco, algunas magnitudes no van a ser continuas, sino que van a ser discretas, a estar cuantizadas, es decir, a permitir sólo ciertos valores discretos.

Podemos citar a los físicos Schrödinger, Heisenberg y Pauli como los padres de la mecánica cuántica, descubridores a su vez respectivamente de la mecánica de matrices, la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica y la ecuación de Pauli de la Mecánica Cuántica y Relativista (en la cual aparece de manera natural el fenómeno del espín), pero toda lista sería incompleta. La Mecánica Cuántica y la Mecánica Relativista son dos espectaculares teorías, en su mayoría poco intuitivas e incluso muchas veces “contra el sentido común” que han revolucionado la física del siglo XX y han logrado explicar infinidad de hechos nuevos y otros ya conocidos bajo una luz diferente. Su unión con las teorías de campos, en lo que se conoce como Teoría Cuántica de Campos ha dado pie a una de las teorías más exactas y extrañas que existen actualmente.

Tecnológicamente aparatos tan cotidianos como los ordenadores o avances médicos como la radiología no habrían sido posibles sin estos descubrimientos.

## 18.6. Resumen: Dualidad onda-corpúsculo de la luz y la materia

Así pues como resumen ¿qué es la luz y la materia? ¿Son ondas o son partículas? ¿Se comportan como las primeras o las segundas?. Como se ha podido ir desgajando a lo largo de las secciones la respuesta no es fácil. La física en sí misma no es una ciencia que pretenda explicar la esencia de la Naturaleza, sino más bien cómo se comporta ésta. Por eso la contestación a la pregunta de si la luz es onda o es partícula es irrelevante. Lo importante es que, según la experiencia, se comporta de una u otra forma en unos u otros casos. Así mismo la materia se comporta como onda o como corpúsculo según la ocasión. Sería como si “fuera onda los lunes miércoles y viernes y partícula el resto”.

No obstante quizás esta explicación parezca muy absurda a muchos, que piensen que todo esto tiene que estar claramente equivocado porque ¿cómo va a ser algo onda y partícula a la vez?. Según los más elementales principios de la lógica algo no puede ser y no ser a la vez, o bien un ente no puede contener dos propiedades contradictorias de forma consecutiva.

El problema surge al considerar la esencia misma de la concepción “onda” o de la concepción “partícula”. La mente humana crea un modelo, un concepto como “onda” para explicar una serie de hechos, y luego renuncia a los hechos para afirmarse más en la concepción de “onda”. Análogamente crea la concepción “partícula”. Posteriormente cree que, el hecho de que ciertos aspectos de la Naturaleza puedan explicarse como partícula implican que ese aspecto es una partícula, y esta identificación es la que resulta incorrecta. Por ejemplo: una bola de billar se comporta como una partícula, pero esto no significa que sea una partícula. ¿Qué es por tanto una bola de billar?. No es la física quien tiene que dar la respuesta, entre otras cosas porque (es mi opinión) ni es un tema de su incumbencia ni lo podrá saber nunca. La bola de billar es un objeto incognoscible al que podemos asociar una etiqueta “partícula” porque en todas las ocasiones se comporta como tal, pero por ello no tiene por qué ser una partícula. Dicho de otra forma, “onda” o “partícula” son sólo modelos o categorías mentales, y la Naturaleza no tiene por qué amoldarse a nuestras aldeanas categorías mentales. La Naturaleza será lo que sea, y muchas facetas suyas se aproximarán a “onda” y otras a “partícula” que no son más que aproximaciones o modelos humanos.

Así pues ¿qué es un fotón? ¿Qué es la luz?. Conocer la *esencia* de la luz no es tarea de la física, su tarea es describir cómo se comporta la luz bajo ciertas condiciones. Y de esta forma se descubre y estudia que a veces se comporta como luz y a veces como partícula, pero “comportarse como” es muy distinto de “ser”.

Aún así sería interesante concluir citando unas palabras de Einstein: *Lo mas incomprensible es que sea comprensible.*

CAPÍTULO 18. LA NATURALEZA DE LA LUZ. DUALIDAD ONDA CORPÚSCULO DE LA MATERIA



## Capítulo 19

# Fundamentos de Física Nuclear

### 19.1. Introducción

La materia está compuesta por átomos, unidos entre sí por enlaces químicos. A su vez los átomos están compuestos de electrones, neutrones y protones, denominándose a estos dos últimos el núcleo atómico. Como los átomos son neutros esto obliga a que exista el mismo número de electrones que de protones en un átomo normal, ya que los neutrones no tiene carga y los protones y electrones tienen igual carga pero de distinto signo.

Ahora bien ¿qué es un núcleo? ¿qué pasa dentro de un núcleo? ¿puede variar el núcleo?. Estas son las preguntas que intentaremos responder.

### 19.2. El núcleo atómico

#### 19.2.1. Algunas definiciones

La masa de un núcleo cualquiera se puede constatar que coincide muy bien con un número entero de veces la masa del núcleo del átomo de hidrógeno. Las variaciones de masa de unos núcleos a otros también es un múltiplo de la masa del átomo de  $H$ . De esta manera se denomina  $A$  al número másico de un átomo, es decir, precisamente al número que es ese múltiplo del átomo de  $H$ . De esta manera claramente para el hidrógeno  $A = 1$ .

Al número de protones que contiene un núcleo, que como hemos dicho es el mismo que electrones tiene su corteza, se le denomina  $Z$ . Como además la masa de protones y neutrones es casi igual se tiene que el número de neutrones de un átomo es

$$N = A - Z.$$

Un elemento químico está formado por un conjunto de átomos con igual  $Z$ , pero donde puede variar  $N$ . Por esta razón se denomina isótopos a los átomos del mismo elemento pero de distinta masa, es decir, que necesariamente tienen que poseer un número distinto de neutrones. Un núclido es aquel conjunto de átomos de igual  $A$  y  $Z$  (y por tanto  $N$ ) y se representa como  ${}^A_ZX$  siendo  $X$  el símbolo químico del elemento correspondiente a su  $Z$ . Se ve fácilmente que en esta notación hay información redundante.

El patrón de medida que se utiliza para las masas atómicas es la unidad de masa atómica o u.m.a., se define como la doceava parte de la masa del  $^{12}_6C$ .

### 19.2.2. Características

Cuando se mide muy precisamente la masa del núcleo resulta sorprendente comprobar que ésta siempre es algo menor que la suma de las masas de las partículas que lo componen. Concretamente se puede restar la masa de las partículas que lo componen de su masa real y obtener así

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_X$$

siendo  $m_X$  la masa real del átomo de  $^A_ZX$ .

¿Qué ha sucedido con esta masa que se ha perdido?. Recordemos que según la teoría de la relatividad de Einstein masa y energía son intercambiables, por lo que podemos afirmar que el núcleo como tal tiene una energía  $E = \Delta mc^2$  menor que las partículas que lo forman. Esta energía, por tanto, se desprendió cuando se formó el núcleo y su carencia es lo que ahora posibilita su existencia como agregado. Si la volviéramos a reintegrar al núcleo obtendríamos otra vez los neutrones y protones correspondientes y por tanto disgregaríamos el átomo a sus componentes. Se trata por tanto de la energía de enlace del núcleo atómico.

Esta energía nuclear está asociada a su vez a la fuerza nuclear fuerte, la interacción que evita que los protones se alejen (se repelen entre sí) manteniéndoles fuertemente unidos. Algunas propiedades de esta fuerza son:

- Es de muy corto alcance, sólo se nota a distancia de un fermi ( $1 \cdot 10^{-15}m$ ) o menores.
- No depende de la carga eléctrica.
- Es una fuerza atractiva, aunque a distancias mucho más pequeñas que su alcance resulta repulsiva.
- Depende del espín de los protones y neutrones que relaciona.

En cuanto al tamaño del núcleo es del orden de  $10^{-15}$ . Se ha encontrado que se puede suponer a los núcleos como esferas de radio

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$$

donde  $R_0 = 1,2fm$  y  $A$  es el número másico del núcleo en cuestión.

## 19.3. Radiactividad

La radiactividad es la emisión de partículas  $\alpha^1$ ,  $\beta^2$  y  $\gamma^3$  por parte de un núcleo atómico y como consecuencia de ajustes y cambios internos en los que generalmente el núcleo cambia su número de neutrones y protones (y por tanto pasa de un elemento a otro). Históricamente la radiactividad fue descubierta por Becquerel al descubrir que un compuesto que contenía uranio era capaz de velar una placa fotográfica sin necesidad de exponer ésta a la luz.

Antes de entrar en detalle en estos procesos radiactivos es interesante señalar que en aquellos que se producen desintegraciones (reacciones atómicas) se conservan la energía, el momento angular y el lineal y la carga, así como otras “magnitudes” como conservar el número de protones más neutrones (de nucleones).

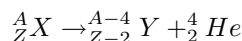
<sup>1</sup>Núcleos de Helio.

<sup>2</sup>Positrones o electrones.

<sup>3</sup>Fotones muy energéticos.

### 19.3.1. Radiactividad $\alpha$

En la radiación  $\alpha$  un núcleo se desintegra emitiendo un núcleo de Helio, que es a lo que se denomina partícula  $\alpha$ . De esta manera la reacción que se establece es la siguiente



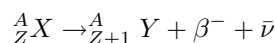
en donde  $X$  era el núcleo original e  $Y$  será el producto de la reacción, cuyo número atómico es dos unidades menor que el del original. Haciendo un cálculo de diferencias de energía, la energía liberada en esta reacción será

$$E = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2.$$

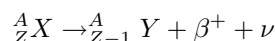
La radiactividad  $\alpha$  es muy poco penetrante. Basta una hoja de papel o un vestido para pararla.

### 19.3.2. Radiactividad $\beta$

Existen dos tipos de radiactividad  $\beta$ , la  $\beta^+$  y la  $\beta^-$  en cuyas reacciones se emiten positrones y electrones, respectivamente. De esta manera procesos de este tipo darán lugar a reacciones como



y



en donde  $\bar{\nu}$  y  $\nu$  son respectivamente un antineutrino y un neutrino, de los cuales hablaremos más tarde.

Experimentalmente se encontró que la energía de los productos finales no se correspondía con la que se esperaba si sólo se emitieran un núcleo hijo más la partícula beta respectiva. Por esta razón Pauli postuló la existencia de unas partículas nuevas, de carga neutra (razón que hacía difícil su detección) y masa, caso de tener<sup>4</sup>, muy pequeña (y por eso se le bautizó neutrino, puesto que era como un “neutrón chiquitín”).

Posteriormente se descubrió que, efectivamente, esta partícula existe.

La radiactividad beta es bastante penetrante, aunque se puede parar con una lámina de metal.

### 19.3.3. Radiactividad $\gamma$

La radiación  $\gamma$  consiste en la emisión de fotones muy energéticos. La razón de la existencia de esta radiación se debe a la necesidad de descargar parte de su energía que tienen algunos núcleos después de una desintegración en la que quedan en un estado excitado. Este proceso es similar al de la emisión de luz por parte de un átomo normal (por ejemplo, uno de hidrógeno) cuando los electrones “caen” de un nivel excitado a otro más fundamental. De esta manera el núcleo también tiene algunos niveles energéticos diferenciados entre los cuales puede moverse mediante la emisión de fotones. Como la diferencia entre niveles energéticos de un núcleo es bastante cuantiosa, los fotones emitidos o partículas gamma tienen energías muy impresionantes.

Esta radiactividad es la más peligrosa de todas por su alto poder de penetración y por su elevado nivel energético. Para frenarla se requieren, en casos extremos, planchas de plomo muy gruesas.

<sup>4</sup>Tras cuidadosas mediciones se ha logrado establecer, tras varios años de duda, que la masa del neutrino es muy pequeña pero distinta de cero.

## 19.4. Características de los procesos radiactivos

### 19.4.1. Cinética de las reacciones nucleares: Ley de desintegración

Un núcleo radiactivo posee una cierta probabilidad de desintegrarse. El hecho de que estemos tratando con un proceso probabilístico se debe a que la naturaleza de la desintegración es fundamentalmente de tipo cuántico.

Así, la cantidad de núcleos  $dN$  que se desintegran será proporcional al tiempo que pasa  $dt$  y al número total de núcleos que teníamos,  $N$ . De esta manera obtenemos que

$$dN = -\lambda N dt$$

donde  $\lambda$  es una constante de proporcionalidad que se llama constante de desintegración.

Integrando y despejando convenientemente se demuestra que

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (19.1)$$

donde  $N$  es el número de núcleos radiactivos que quedan en una muestra cuando, tomando una muestra original de  $N_0$  núcleos dejamos transcurrir un tiempo  $t$ .

También se puede expresar este fenómeno en términos del periodo de semidesintegración  $T_{\frac{1}{2}}$ , que se define como el intervalo de tiempo necesario para que en una muestra el número de núcleos radiactivos se reduzca a la mitad.

De esta manera, el que al pasar un tiempo  $T_{\frac{1}{2}}$  tengamos una muestra que al principio presentaba  $N_0$  núcleos con sólo  $\frac{N_0}{2}$  supondrá que

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}}$$

y, por tanto

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}.$$

Es usual también hablar de la vida media  $\tau$  de un núcleo como el tiempo necesario para que el número  $N_0$  de núcleos radiactivos de una muestra se reduzca a  $\frac{N_0}{e}$ . De esta manera se demuestra que

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Por último se define la actividad de una muestra, cuya unidad en el S.I. es el becquerel (Bq) como una desintegración por segundo. Así actividad será

$$\frac{|dN|}{dt} = N_0 \lambda e^{-\lambda t}.$$

### 19.4.2. Las series radiactivas

Una serie radiactiva es un conjunto de núclidos radiactivos que derivan del mismo núclido inicial pero que, por desintegraciones consecutivas, conducen a un mismo núclido que resulta estable.

Existen tres series naturales, según el elemento que les de origen. Se denominan pues la serie del uranio, del torio y del actinio. Por ejemplo, la serie del uranio, que comienza con el  $^{238}\text{U}$  y termina con el  $^{206}\text{Pb}$  puede consultarse en la figura 19.1.

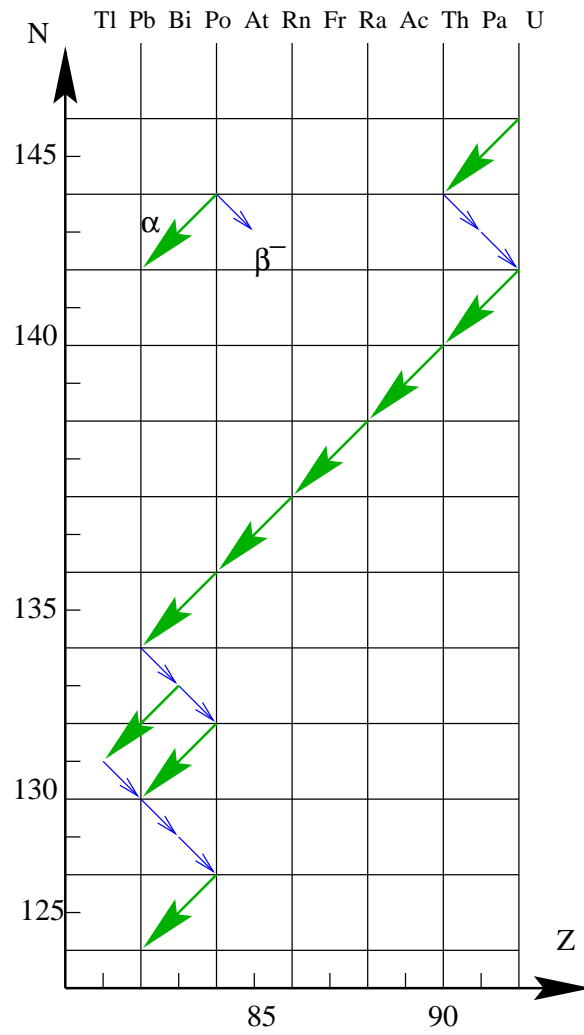


Figura 19.1: Serie radiactiva del uranio.

Nota



◊ ¿Y cuál puede ser la aplicación de las desintegraciones nucleares?. La radiactividad tiene múltiples campos de utilización. Por ejemplo, el método del  $^{14}\text{C}$  permite fechar una muestra midiendo la proporción de  $^{14}\text{C}$  frente al  $^{12}\text{C}$  en muestras orgánicas antiguas y, comparando dicha proporción con la normal, se calcula cuanto  $^{14}\text{C}$  ha decaído. Posteriormente con este dato y conociendo que la semivida del elemento son unos 5500 años se pueden datar muestras en un intervalo de unos 1000 a 55000 años. Para muestras de edad superior o inferior los datos no son significativos y el proceso no es fiable.

Otra aplicación consiste en el uso de isótopos radiactivos. Como sabemos un isótopo es químicamente indistinguible de otro que sea estable. De esta manera, introduciendo algunos isótopos radiactivos en un organismo, éste los asimila como si fueran normales. y así podemos usarlos como trazadores en ciertos procesos biológicos, o para determinar las velocidades de reacciones químicas, observar el recorrido de la sangre en el cerebro. . .

## 19.5. Reacciones nucleares

Cuando los núcleos vencen la repulsión eléctrica que los protones generan entre sí y se sitúan en posiciones de alcance de la fuerza nuclear fuerte, es posible que se produzca un reagrupamiento de los núcleos obteniendo así unos productos de la reacción distintos de los originales. Este proceso es el denominado reacción nuclear.

En estas reacciones se conservan la carga y el número de nucleones, la energía y los momentos angular y lineal.

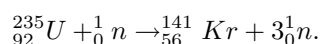
Tipos importantes de reacciones nucleares son las de fisión y fusión.

### 19.5.1. Fisión nuclear

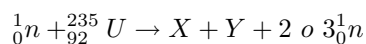
Es la división o ruptura de un núcleo pesado en otros dos más ligeros de masas similares. Es una reacción que espontáneamente se produce con gran dificultad.

Artificialmente se puede generar bombardeando los núcleos con neutrones. Éstos, al no presentar carga, penetran con cierta facilidad en los núcleos y pueden desencadenar así un proceso que termina con la ruptura del núcleo original.

Por ejemplo, una reacción nuclear típica es



En general, las reacciones del  ${}_{92}^{235}\text{U}$  pueden esquematizarse como



siendo los restos de la reacción  $X$  e  $Y$  núclidos con números comprendidos entre los intervalos (84, 104) y (129, 149).

El hecho de que entre los productos finales de la reacción existan 2 o 3 neutrones posibilita el hecho de que se produzca una reacción en cadena, es decir, que estos nuevos neutrones emitidos vuelvan a incidir en núcleos que se fisiónen, creando así más neutrones que. . . y el proceso continúa. Cuando sucede una reacción en cadena de este tipo todo el “combustible nuclear” se fisiona muy rápidamente y de manera explosiva liberando enormes cantidades de energía: hablamos de una explosión nuclear. Este es el fundamento básico de una bomba atómica.

Ahora bien, si logramos reducir el número medio de neutrones liberados hasta uno por núcleo fisionado, tendremos una reacción controlada. Este es el fundamento de las reacciones nucleares que suceden en un reactor nuclear de una central atómica.

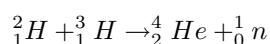
### 19.5.2. Fusión nuclear

Así como fisionar es dividir, fusionar es juntar: en una reacción de fusión se obtiene un núcleo pesado a partir de dos ligeros. Debido a la repulsión eléctrica entre protones este proceso es más sencillo cuanto más ligeros sean los núcleos originales. Cuando el núcleo creado tenga menos masa que la suma de los núcleos originales tendremos que, este defecto de masa se libera como energía. Este es el proceso que sucede en todas las estrellas, auténticos “hornos de fusión” en los que la enorme presión que genera la gravedad al apiñar estas cantidades gigantescas de sustancias es suficiente para generar espontáneamente reacciones de fusión.

Actualmente el proceso de fusión controlada no está dominado (el incontrolado sí, en las tristemente célebres bombas de hidrógeno o de neutrones) puesto que se requiere alcanzar y mantener temperaturas del orden de millones de grados centígrados y no existe ningún recipiente que soporte esto, con lo que hay que contener magnéticamente el plasma formado: en cualquier caso el proceso no es fácil.

No obstante, algunas razones para interesarse por el proceso de fusión controlada son

- Es una energía relativamente limpia: al contrario que en las reacciones de fisión apenas hay sustancias de desecho peligrosas.
- Su rendimiento energético es muy grande. Por ejemplo en la reacción



se liberan unos 18MeV.

- El “carburante” que necesita, deuterio y tritio, es fácil de obtener. El agua de mar contiene cantidades ingentes de deuterio.





## Parte III

# Prácticas de laboratorio



## Capítulo 20

# Cambios de fase y descenso ebulloscópico

### 20.1. Material experimental

Para llevar a cabo esta práctica se requiere

- Infiernillo
- Vaso de precipitados
- Termómetro
- Cronómetro
- Agua y un soluto. ( $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ ).
- Balanza y pesas.

### 20.2. Introducción teórica

A medida que se va calentando un compuesto, sea sólido o líquido, su temperatura aumenta conforme a las leyes de la calorimetría, de tal forma que si se suministra un calor  $Q$  a una sustancia tendremos que

$$Q = mC\Delta T$$

donde  $m$  es la cantidad de masa de la sustancia,  $\Delta T$  la variación de su temperatura y  $C$  una constante que se conoce con el nombre de calor específico y cuyas unidades pueden ser Julios/ $^{\circ}C$  kg o similares.

Esto significa que, a medida que se calienta una sustancia con una cantidad de calor  $Q$  constante, su temperatura aumenta de forma lineal. No obstante, puede ser que esta sustancia alcance su punto de vaporización. En ese caso la temperatura permanece constante en tal punto hasta que toda la sustancia se evapora.

Dicho punto de vaporización depende de la presión atmosférica y de la “pureza” del líquido que se evapore. Quiere esto decir que si en vez de agua destilada, se evapora agua con un cierto soluto, el punto de ebullición descenderá según la ley

$$\Delta T_e = Cm$$

donde  $m$  es la molaridad de la disolución y la constante  $C$  es una expresión complicada, pero que puede considerarse constante.

## 20.3. Realización práctica

### 20.3.1. Parte 1: Cambios de fase

1. Vamos a verter una cierta cantidad de agua en el vaso de precipitados. Para medir su masa es conveniente pesar primero el vaso vacío y después lleno de agua. La diferencia de peso será la masa de agua.
2. Pon el vaso encima del infiernillo y mete dentro el termómetro. Espera un rato para medir la temperatura del agua. Apunta esta.
3. Enciende el infiernillo y vete observando la temperatura del termómetro a intervalos regulares. (cada 10 o 15 segundos, apunta el tiempo que discurre y su temperatura).
4. Habrá un momento en que el agua empiece a hervir. Haz tres o cuatro mediciones más con el termómetro y apaga el infiernillo. Si quieres puedes seguir haciendo mediciones con el infiernillo apagado, verás que la temperatura del termómetro empieza a descender lentamente.
5. Representa todos los datos en datos en papel milimetrado. Cerciórate de que hay partes en las cuales los puntos se pueden unir con una recta, y otras partes en las cuales dicha recta es horizontal. ¿Cuáles son esas partes?.
6. Revisa los conocimientos de este año y de años anteriores e intenta dar una explicación a estos hechos. Anota todos los datos en tu guión de prácticas junto con la explicación (y la bibliografía de la que la obtienes).

### 20.3.2. Parte 2: Descenso ebulloscópico

1. Pon ahora a hervir agua con un soluto disuelto en ella. Por ejemplo puedes utilizar la muestra de  $H_2SO_4 \cdot 5H_2O$  (calcantita o sulfato de cobre) que tienes.
2. Vete anotando las temperaturas a intervalos regulares, igual que antes.
3. Cuando empiece a hervir toma unas mediciones más de la temperatura.
4. Representa los datos y compáralos con la experiencia anterior: deberás observar un fenómeno algo diferente.
5. Explica en qué consiste dicho fenómeno y busca en algún libro (quizás de algún año anterior o de este mismo) qué ha sucedido. Acompaña tu explicación en el guión de prácticas con los datos que has tomado.
6. ¿Serías capaz de idear un procedimiento experimental para medir la constante  $C$  en la fórmula  $\Delta T_e = Cm$ . Intenta explicar cómo lo harías. Si estás animado proponselo al profesor y hazlo en el laboratorio.

## 20.4. Precauciones a tener con la práctica

Si bien esta práctica no es peligrosa habrás de tener algunas precauciones para evitar accidentes e imprevistos:

- No toques los líquidos ni el infiernillo: quemarán.
- Ten cuidado al enchufar y desenchufar el infiernillo: los cables están sueltos y pueden hacer un cortocircuito.

- No viertas agua sobre el infernillo: puede cortocircuitar éste.
- El sulfato de cobre es venenoso: manipúlalo con precaución y luego lávate las manos.
- No dejes nunca que se evapore todo el líquido del vaso de precipitados, apágalo antes: si se evaporase el termómetro reventaría y el vaso de precipitados también, y este material es delicado.
- Trata el termómetro y el vaso de precipitados con cuidado: son bastante frágiles.



## Capítulo 21

# Carga y descarga de un condensador.

### 21.1. Material experimental

Para llevar a cabo esta práctica se necesitará:

- Placa de circuitos.
- Generador de ondas.
- Resistencias.
- Condensador.
- Cables y clavijas.
- Osciloscopio.

### 21.2. Introducción teórica

Estudiemos teóricamente el circuito con condensador representado en la figura 21.1. En el hemos unido un condensador, a través de una resistencia, cuya misión es servir como “descarga” del circuito, es decir, gastar parte de la energía eléctrica para que no se queme ningún aparato, con un generador de onda el cual, mediante el empleo de una onda cuadrada (ver también en 21.1) va a ir cargando y descargando el condensador.

En cualquier caso, si tenemos este circuito alimentado durante cierto instante con corriente continua, y que parte de la desconexión<sup>1</sup> veamos que sucede cuando se le somete a un potencial  $V$ .

Aplicando la ley de Kirchoff a la única malla del circuito, o lo que es lo mismo, considerando que  $V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ , analicemos por separado cada término:

$V$  Será el que proporcione el generador.

$\Delta V_1$  es la caída de potencial en la resistencia que, según la ley de Ohm, será simplemente  $\Delta V_1 = IR$ .

$\Delta V_2$  es la caída de tensión en el condensador. Como  $q = C\Delta V$ , siendo  $C$  la capacidad del mismo, tenemos que  $\Delta V_2 = \frac{q}{C}$ .

---

<sup>1</sup>Luego la carga inicial será nula.

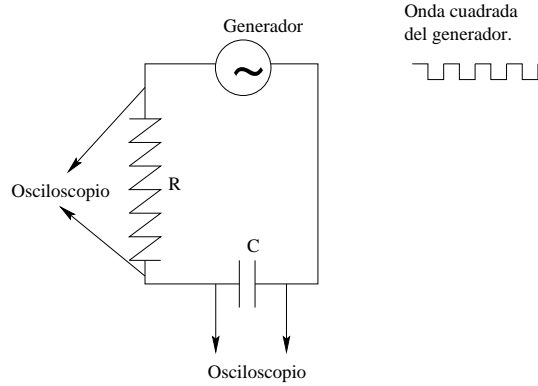


Figura 21.1: Circuito con condensador.

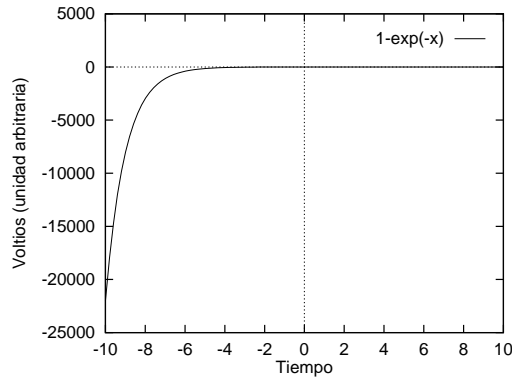


Figura 21.2: Carga de un condensador.

Así pues tenemos la ecuación

$$IR + \frac{q}{C} = V$$

Ahora bien,  $I = \frac{dq}{dt}$ , de donde el resultado final es que, para hallar como se cargará el condensador, habremos de resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = V \tag{21.1}$$

La resolución de esta ecuación está a un nivel superior al planteamiento de este curso, pero en cualquier caso, la persona interesada puede encontrar su solución en el apéndice 21.4.

El resultado que se consigue es que

$$V = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{21.2}$$

sabiendo que  $V$  es la tensión que cae entre los bornes del condensador y  $V_0$  es la que proporciona el generador. Una gráfica de cómo es esta función se puede tener en la figura 21.2. Ésta será la gráfica que hemos de lograr ver en el osciloscopio.



### 21.3. Realización de la práctica

Antes de nada pide al profesor de las prácticas que te explique como funcionan el osciloscopio y el generador de ondas. Son aparatos complicados y sensibles que hay que tratar con cuidado. Una vez sepas ya como se usan prueba a visualizar los distintos tipos de ondas en el osciloscopio (cuadrada, sinusoidal y triangular) así como a variar su frecuencia y amplitud para comprobar que significa cada parámetro. Al cambiar su frecuencia y amplitud tendrás que cambiar también las escalas de tiempos y voltajes en el osciloscopio si no quieres que se salga la onda de la pantalla o quede tan pequeña que no se vea.

Escribe en tu cuaderno de prácticas lo que has ido haciendo y como infuye en lo que se visualiza. Haz un dibujo de cada tipo de onda.

Monta ahora el circuito de la figura 21.1 en la mesa de circuitos. Para ello ten en cuenta que los puntos horizontales que no estén separados por ninguna banda de plástico estarán conectados entre si. Utilizando esta información termina de montar el circuito.

Sitúa los bornes del osciloscopio donde te indica el dibujo, en la entrada y salida del condensador, para poder observar como cae la tensión en su interior. Si haces circular ahora por el circuito un onda vuadrada, deberás ver como el condensador se carga y descarga, Se cargará cuando la tensión suba bruscamente (la parte lisa alta de la onda cuadrada) y se descargará en la parte lisa baja de la onda. Si tienes bien “sintonizado” el osciloscopio deberías ver un dibujo parecido al de la figura 21.2.

En el caso de que veas la caída de potencial muy similar a la de la onda cuadrada, significa que estás dando demasiado tiempo al condensador para que se cargue. Prueba a aumentar la frecuencia en el generador de onda. Si sucede al revés, que lo que se visualiza es demasiado curvo, prueba a disminuir la frecuencia, pues ello significa que no estás dando tiempo suficiente al condensador para que se cargue.

Una vez que tengas bien visible y clara la gráfica de carga del condensador comparala con la teórica. ¿Coinciden?. En el caso de que haya alguna desavenencia intenta adivinar a qué se debe.

Si tienes un condensador variable modifica su capacidad poco a poco y mira lo que sucede. ¿Cómo lo puedes explicar?.

A partir de los cuadraditos del osciloscopio y de la fórmula de carga del condensador puedes probar a intentar conseguir la capacidad del condensador. Para ello toma algunos puntos significativos y luego prueba a ajustarles una función de subida exponencial como la (21.2). ¿Cuál es la capacidad?. En el caso de que ponga en el condensador la capacidad. ¿Coincide con la calculada?. Piensa que, en cualquier caso, siempre hay una pequeña diferencia (a veces no tan pequeña) atribuible a errores de medición de los aparatos, impedancias internas, etc ...

En el caso de que no sepas hacer esta última parte pregúntale a tu profesor. El te lo explicará.

### 21.4. Apéndice: Resolución de la ecuación diferencial

Los textos de cálculo dicen que, una ecuación del tipo de la ecuación (21.1) se resuelve tomando primero la ecuación homogénea y después una solución particular.

La ecuación homogénea es

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

donde despejando

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{C}$$

e, integrando ambos miembros

$$\int \frac{dq}{q} = \int -\frac{dt}{C}$$

tenemos que

$$\ln q = -\frac{t}{C} + K_1$$

y exponenciando

$$q = K_2 e^{-\frac{t}{C}}.$$

La solución particular se puede extraer “a ojo”. Tomemos  $q = K_3$  como solución particular, y operando en (21.1) tendremos

$$\frac{q}{C} = V$$

o, lo que es lo mismo

$$K_3 = CV.$$

Ahora sólo queda unir la solución homogénea y la particular y obligar a que, para  $t = 0 \Rightarrow q = 0$ .

Teniendo todo esto en cuenta se llega, tras algunas sustituciones a

$$q = CV \left(1 - e^{-\frac{t}{C}}\right),$$

y considerando que  $V = \frac{q}{C}$  tendremos pues la ecuación (21.2) o, lo que es lo mismo, que

$$V = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{C}}\right).$$

Donde  $V$  es el voltaje que cae en el condensador cada  $t$  y  $V_0$  es la tensión que suministramos al circuito.

## Capítulo 22

# Principio de Arquímedes: Determinación de la densidad

### 22.1. Material experimental

- Materiales para medir su densidad. (Bola de acero, minerales...)
- Balanza y pesas.
- Hilo.
- Recipiente con agua.

### 22.2. Introducción teórica

El principio de Arquímedes puede ser enunciado como:

▷ “Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical, y dirigido hacia arriba, igual al peso del fluido desalojado.”

Vamos a aprovechar este principio para calcular la densidad de algunos objetos y, de paso, hacer una pequeña investigación de algunos minerales.



#### 22.2.1. Medición de la densidad

¿Cómo se puede usar el principio de Arquímedes para calcular la densidad de algún material?. Supongamos que tenemos una muestra de material de masa  $m$  y densidad  $\rho$ . Si la introducimos en agua, pero aún así la seguimos pesando, tendremos que sentirá una fuerza  $Mg$  hacia abajo y otra  $F$  hacia arriba de magnitud igual al peso de agua desalojada. ¿Y cuál es este peso?. Pues si el volumen de la sustancia que sumergimos es  $V$ , usando su densidad tendremos que

$$V = \frac{M}{\rho},$$

siendo este  $V$  el volumen del líquido desalojado. Como la densidad del agua, en  $\frac{g}{cm^3}$  es 1, tendremos que se desalojan  $\frac{M}{\rho}$  gramos de agua. De esta manera el peso del cuerpo dentro del agua será  $P = (M - \frac{M}{\rho})g$ , es decir, que mediremos una masa, en gramos y que vamos a llamar  $m$  de

$$m = M - \frac{M}{\rho}.$$

Despejando de aquí  $\rho$ , que es el parámetro buscado, obtenemos que

$$\rho = \frac{M}{M - m} \quad (22.1)$$

estando esta densidad en  $\frac{g}{cm^3}$ .

### 22.3. Realización práctica

Esta práctica es extraordinariamente sencilla. Basta medir en la balanza la masa del material antes de sumergirlo en el agua y después. Utilizando entonces (22.1) se calcula rápidamente la densidad del material.

Puedes, por tanto, medir la densidad de la bola de acero suministrada en la práctica. También puede resultar muy interesante coger un trozo de algún mineral más o menos conocido (un trozo de mármol, carbón o un típico canto rodado de los que por dentro son cristalinos y al entrechocarlos salen chispas y huele a quemado: son cuarzo) y medir su densidad. Posteriormente se comprueba en cualquier libro de minerales que la densidad medida coincide con la que tiene el mineral.

## Capítulo 23

# Experiencia de Faraday. Inducción.

### 23.1. Material experimental

Para hacer esta experiencia se requiere.

- Cables y clavijas.
- Bobina
- Imán
- Polímetro.

### 23.2. Introducción histórica y teórica.

Faraday, trabajando con imanes y corrientes eléctricas fue el primero que descubrió el fenómeno de la inducción electromagnética, que consiste en la creación de corrientes eléctricas inducidas en un conductor por la variación de un campo magnético.

Los fenómenos observados por Faraday fueron:

- En una espira se genera una corriente eléctrica cuando se le aproxima un imán.
- Al alejar el imán se genera también una corriente eléctrica, pero de sentido contrario al de la corriente creada cuando se aproximaba el imán.
- Al dejar estacionario el imán no se produce corriente eléctrica en la espira.
- Los mismo efectos se producen cuando el imán se mantiene estacionario y es la propia espira la que se aproxima o aleja del imán.
- También se producen los mismos efectos cuando el imán es sustituido por una corriente eléctrica que se aproxima o aleja de la espira.

### 23.3. Realización práctica.

Simplemente une la espira al polímetro y pon este a medir voltajes<sup>1</sup> e intensidades. Acerca el imán a la bobina y pásalo a través de ella. Observarás que el

---

<sup>1</sup>Aunque un voltímetro debe situarse en paralelo, en este caso la intensidad de la corriente será tan pequeña que no hay problema de que se queme aunque cerremos con él el circuito.

polímetro indica una tímida corriente que se ha generado al pasar tú el imán a través de la bobina. Prueba a moverlo más rápido o más lento, a dejarlo dentro un rato, etc... para observar cuando es exactamente la producción de corriente. Con todo esto intenta confirmar las experiencias de Faraday.

Posteriormente busca qué fenómeno físico produce esto y haz un pequeño trabajo sobre ello en tu cuaderno de prácticas. Encuentra la fórmula que puede explicar esta experiencia y comenta detalladamente por qué esta fórmula explica este extraño fenómeno. Busca por último el significado de la palabra imán y sus implicaciones etimológicas y coméntalo también brevemente en tu cuaderno.

## Capítulo 24

# Iniciación a la hidráulica: Diversas experiencias.

### 24.1. Material experimental

- Frasco de plástico.
- Tubos de plástico.
- Tapón de corcho.
- Tapón con orificio.
- Agua.

### 24.2. Introducción teórica

La hidráulica es una parte de la física que se encarga de estudiar y deducir las propiedades de los líquidos y su movimiento. A este nivel puede resumirse en dos leyes sencillas y diferentes, que permiten explicar multitud de propiedades distintas debido a su carácter general. Estas leyes son la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad de los líquidos.

El objetivo de esta práctica es descubrir estas ecuaciones o, al menos, presentar una serie de hechos para que después el alumno busque e investigue información sobre estos fenómenos, de tal forma que sea capaz al final de explicarlos usando estas ecuaciones, y además entender dichas expresiones.

### 24.3. Realización práctica

1. Toma la botella y llénala de agua. Verás que el agua se escapa por el tubo de la parte de abajo. Prueba a levantar el tubo. Hay una altura a la cual el agua no escapa. A medida que el agua sube por la botella verás que la altura del tubo también debe aumentar, o si no el agua se escapará. Es muy fácil darse cuenta de cual debe ser esta altura.
2. Investiga el llamado *principio de los vasos comunicantes*. Para hacer esto vierte sólo un poco de agua en la botella. Después levanta el tubo y, haciéndolo un bucle, pon su extremo final por debajo del nivel del agua de la botella. Intenta que el bucle se llene de agua y asegúrate de que la parte más alta del recorrido del tubo está por encima del nivel del agua: verás algo sorprendente.

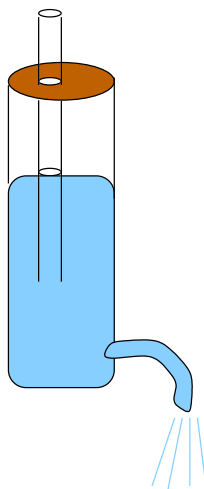


Figura 24.1: Frasco de Mariotte.

3. Llena el frasco de agua a diferentes altura y tapónalo herméticamente con el tapón de corcho. Deja después que salga el agua por el tubo de abajo. ¿Qué sucede?. ¿Por qué?.

Hasta aquí hemos investigado algunos hechos elementales que se producen en la conducción del agua. Veamos ahora otro hecho que puede explicarse mediante la *ley de Torricelli*.

1. Llena el frasco con agua hasta arriba.
2. Observa la velocidad con la que sale el agua por el pitorro de abajo. ¿Es constante esta velocidad?. ¿Sale el agua siempre con la misma velocidad o varía con algún factor?.

Una vez que hemos observado este fenómeno, fácilmente explicable mediante la ley de Torricelli, comprobemos ahora qué sucede si hacemos un *frasco de Mariotte* como el de la figura 24.1.

1. Llena el frasco con agua hasta arriba.
2. Pon el tapón agujerado en el frasco. Pasa un tubo de plástico por el tapón (asegúrate de que encaje bien). Baja el tubo hasta cierta altura, de forma que se introduzca por el extremo de abajo en el agua del frasco, pero que por el de arriba siga estando fuera del frasco.
3. Deja escapar ahora el agua por el extremo inferior de la botella.
4. Observa atentamente cómo sale ahora el agua. ¿Sale igual de veloz que antes?. ¿Varía ahora la velocidad del agua que sale?. ¿Sucede algo especial cuando el agua deja de llegar al nivel del tubo que atraviesa el frasco desde el tapón de arriba?. ¿Y antes?.

## 24.4. Objetivo de la práctica

Una vez observados todos estos fenómenos deberás hacer una labor de investigación para aclarar que está sucediendo, así como haber observado atentamente



y con “espíritu científico” todo lo que se te pedía, para poder contestar correctamente las preguntas arriba formuladas. Como pista final, si no sabes por donde empezar prueba a buscar en un diccionario enciclopédico, o en algún libro de física, las palabras *así escritas*.

Una vez que hayas encontrado la explicación a estos fenómenos prueba a hallar una explicación a este hecho: cuando se abre un grifo de agua un poco, de forma que el chorro de agua se vea transparente, el diámetro del chorro cerca de la boca del grifo siempre es mayor que más abajo, lejos de la boca del grifo. ¿Por qué?



## Capítulo 25

# Comprobación de la ley de Ohm.

### 25.1. Material experimental

- Generador de voltaje variable.
- Voltímetro.
- Amperímetro.
- Resistencias.
- Cables y conectores.

### 25.2. Introducción teórica

La ley de Ohm establece que cuando por un circuito eléctrico que ofrece cierta resistencia  $R$  al paso de la corriente está circulando una intensidad  $I$ , se produce una diferencia de potencial  $\Delta V$  entre sus extremos igual a

$$\Delta V = IR.$$

### 25.3. Realización práctica

Para realizar esta experiencia necesitas montar el circuito que aparece en la figura 25.1. De esta manera podrás medir la intensidad que circula por la resistencia y su caída de voltaje simultáneamente.

A continuación deberás de empezar a elevar el voltaje del generador variable y tomar muestras de los datos, es decir, pares de datos voltaje, intensidad. Para ello fíjate en el amperímetro y empieza a subir un poco el voltaje. Toma las muestras que estimes oportunas, teniendo en cuenta que, para que estos datos experimentales sean significativos, debes tener un número suficiente de muestras abarcando el mayor rango posible (siempre dentro de los límites de detección de los aparatos).

Una vez hayas tomado los pares de datos necesarios. (Por lo menos toma diez pares) represéntalos en una gráfica en papel milimetrado. ¿Cómo es esta gráfica?. ¿Qué crees que puede representar la pendiente de la recta que aparece?.

Haz un ajuste de los datos que has tomado con una calculadora o un ordenador a una recta (es decir, haz un ajuste por mínimos cuadrados), esto te dará los dos

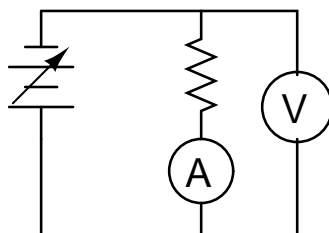


Figura 25.1: Circuito a realizar.

parámetro de una recta. Intenta interpretarlos. Evidentemente el dato que no es la pendiente deberá ser muy cercano a cero. ¿Por qué?. ¿Qué significa esto?.

Por último mide con un ohmímetro la resistencia real de tu resistencia y compárala con el valor que puedes calcular a partir de la pendiente de la recta de la gráfica. ¿Coinciden?. Si no coinciden del todo intenta hallar alguna explicación.

## 25.4. Precauciones

1. Comprueba que no se caliente ninguno de los aparatos. Si así sucediera apágalos y espera a que se enfríen.
2. Ten cuidado al hacer las conexiones: puedes producir un cortocircuito.
3. No te salgas del rango de medición de los aparatos: puedes estropearlos.

## Capítulo 26

# Solución al problema planteado en el método científico

### 26.1. Advertencia

Por favor, no leas esto a no ser que estés intentando predecir cuantas veces deberían salir  $x$  caras y  $20 - x$  cruces al tirar 20 monedas al aire  $n$  veces.

Si has llegado hasta aquí es porque, aunque lo has intentado arduamente, no sabes como calcular las veces que deberían salir  $x$  caras y  $20 - x$  cruces al tirar 20 monedas al aire  $n$  veces. Si no es así intenta adivinarlo por cuenta propia antes de ver esta solución.

### 26.2. Solución

En este momento habrás deducido ya que la probabilidad de que al tirar una moneda al aire salga cara o cruz es de  $\frac{1}{2}$ , es decir, la mitad de las veces más o menos se obtiene cara y la otra mitad cruz.

Por tanto cuanto tiras 20 monedas a la vez cada una tiene  $\frac{1}{2}$  de probabilidad de ser cara o ser cruz. Supongamos que hacemos esto  $N$  veces. El número de veces que deberíamos obtener una jugada, por ejemplo, que las 20 sean caras, será igual a  $N$  multiplicado por la probabilidad de que salgan 20 caras. Esto es muy lógico, ya que si hacemos 40 tiradas parece lógico que la probabilidad sea 4 veces mayor que si sólo hiciéramos 10 tiradas.

Veamos ahora cual puede ser la probabilidad de que en una jugada las 20 monedas sean cara. La probabilidad de que lo sea 1 sola moneda es de  $\frac{1}{2}$ , la probabilidad de que lo sean 2 será de  $\frac{1}{2}$  para la primera por  $\frac{1}{2}$  para la segunda, es decir de  $\frac{1}{4}$ . Por tanto para que lo sean las 20 será de  $\frac{1}{2^{20}}$ . Se puede ver que es bastante pequeña. Ahora bien ¿de cuantas maneras distintas podemos lograr que todas sean caras? Pues sólo hay una, y es que la primera lo sea, la segunda, y así hasta la última. Sólo hay una manera posible.

Veamos para conseguir  $x$  caras y  $20 - x$  cruces. Podemos lograr esto teniendo las primeras  $x$  caras y las últimas  $20 - x$  cruces. También teniendo las últimas  $x$  caras y las primeras  $20 - x$  cruces. O teniendo las  $x$  caras en medio y el resto cruces, o una al principio y luego distribuidas, o... ¿De cuántas maneras se puede conseguir tener  $x$  caras y  $20 - x$  cruces?. Es fácil ver que este número se logra pensando que en total podemos situar las monedas de  $20!$  formas distintas que, si dividimos entre

las  $x!$  formas en las que podemos ordenar las caras entre sí y las  $20 - x$  formas en que podemos ordenar las cruces entre sí tenemos por fin que salen

$$\binom{20}{n} = \frac{20!}{n!(20-n)!}$$

y como estos tipos de números salen con frecuencia en estos cálculos por eso se definen las combinaciones de  $n$  elementos tomados de  $i$  en  $i$  sin considerar el orden como

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Volviendo a nuestro problema planteado. Como la probabilidad de tener una determinada combinación es  $\frac{1}{2^{20}}$  multiplicado por el número de combinaciones distintas que podemos tener para la misma jugada que son  $\frac{20!}{x!(20-x)!}$  y como hemos hecho  $N$  tiradas distintas tendremos que el número *estimado* de obtener  $x$  caras tirando  $N$  veces 20 monedas será de

$$N \frac{20!}{x!(20-x)!} \frac{1}{2^{20}}.$$

Una tabla donde están calculados dichas probabilidades desde  $x = 1$  hasta  $x = 10$  es la siguiente:

1	$1,907 \cdot 10^{-5}$	}
2	$1,812 \cdot 10^{-4}$	
3	$1,087 \cdot 10^{-3}$	
4	$4,621 \cdot 10^{-3}$	
5	$1,479 \cdot 10^{-2}$	
6	$3,696 \cdot 10^{-2}$	
7	$7,393 \cdot 10^{-2}$	
8	0,120	
9	0,160	
10	0,176	

## Capítulo 27

# El método científico

### 27.1. Material experimental

Para llevar a cabo esta práctica se necesitará:

- Caja o similar.
- Papel y lápiz.
- 20 monedas.

### 27.2. Introducción teórica

Muchas veces en ciencia se habla del método científico sin precisar muy bien de que se trata o bien suponiendo que ya se sabe exactamente que significa dicha expresión. No obstante no es menos habitual que el conocimiento de lo que se denomina *método científico* no siempre esté muy claro. Por ello en esta práctica se pretende familiarizar a quien la realice con dicho método, disponiendo de una situación sencilla en la que el método científico pueda trabajar y mostrando así un ejemplo de lo que supone.

Si bien es difícil precisar exactamente en que consiste dicho sistema de trabajo, se puede sintetizar en una serie de pasos

1. Observación de un fenómeno natural. Esta observación es importante para establecer la base de lo que se va a estudiar.
2. Formulación de alguna hipótesis que permita explicar satisfactoriamente los hechos observados.
3. Comprobación formal de que dichos hechos pueden ser realmente explicados con las hipótesis creadas. Para esto se recurre a la experimentación.
4. Si la idea adquirida demuestra ser útil para la explicación de los fenómenos observados puede empezar a considerarse como una “ley” del hecho puntual observado. Si no habrá que desechar la idea y tomar alguna otra que funcione mejor.
5. Es muy conveniente, valiéndose de la ley, intentar predecir algún hecho nuevo o algún resultado que llegue más allá del mero hecho observado. Si se logra hacer esta predicción y una posterior experimentación lo ratifica, entonces la nueva “ley” puede ser ya considerada como tal, en caso contrario no significa necesariamente que nuestras hipótesis estén mal, sino que quizás no sean todo lo refinadas o generales que debieran.

Así pues este método engloba por una parte una tarea de racionalización y otra de experimentación. Aunque ambas son importantes hay que destacar que realmente *es la experimentación quien informa sobre si una ley física es o no es verídica, y en ningún caso este “chequeo” puede ser suprimido por la mera racionalización* pues, si así lo hiciéramos saldríamos del campo de la física para entrar en la lógica o en filosofía.

### 27.3. Realización práctica.

1. Empecemos la práctica tirando una moneda al aire bastantes veces y apuntando si sale cara o cruz. Es importante analizar el fenómeno repitiendo múltiples veces la experiencia. Observemos así si existe alguna periodicidad, algún hecho cuantitativo que nos permita explicar de alguna manera los resultados.
2. Una vez observado el resultado se establecen algunas hipótesis para explicar estos datos. Es muy sencillo darse cuenta en este caso de cual será la probabilidad de que se obtenga cara o cruz al tirar una moneda al aire, y en virtud de este idea, explicar los resultados experimentales.
3. Tenemos ya, por tanto, una idea, un indicio de ley sobre el fenómeno “tirar una moneda al aire”, que parece funcionar. Pongamos a prueba dicha ley. Imaginemos que tiramos al aire 20 monedas a la vez y después contamos cuantas caras y cuantas cruces salen. Hagamos este experimento un mínimo de 25 veces y apuntemos cuantas caras salieron en la primera tirada de las veinte monedas, cuantas en la segunda, etc... pero, no obstante, *vamos a intentar predecir antes* cuanto debería salir. Nuestra hipótesis para una sola moneda puede ser generalizada a las veinte y así predecir cuantas veces, deberían salir 10 caras y 10 cruces si tiramos las veinte monedas  $N$  veces, cuantas saldrán 11 caras y 9 cruces, cuantas 12 caras y 8 cruces, etc...
4. Realicemos por fin la experiencia y comprobamos los resultados *verdaderos y reales*, es decir, los resultados experimentales, con nuestras hipótesis. ¿Concuerdan bien nuestras ideas? ¿Hemos logrado una estimación razonable del proceso?. Si la respuesta es afirmativa significa que nuestras ideas pueden ser elevadas a una “ley física” para la tirada de la moneda, si no es así tendremos que mejorar nuestro modelo hasta dar con una explicación razonable del fenómeno.

En cualquier caso explica todas tus ideas en el guión de prácticas comentando claramente lo que son las ideas y cavilaciones, y lo que son los hechos experimentales, y después haz una gráfica donde se relacionen los resultados que has predicho con los que has obtenido experimentalmente. Evalúa la concordancia y expón como la mejorarías, indicando las virtudes y fallos del modelo.



# Capítulo 28

## Estudio de un muelle.

### 28.1. Material experimental

Para llevar a cabo esta práctica se necesitará:

- Muelle con soporte.
- Peso. (Para colgar al muelle) y balanza.
- Cronómetro.
- Metro.

### 28.2. Introducción teórica

Cuando colocamos un peso en un muelle éste se estira hasta una posición de equilibrio, en la cual se compensan la fuerza que realiza el muelle hacia arriba, gracias a la ley de Hooke

$$F = -k\Delta x$$

con la fuerza que la gravedad ejerce hacia abajo. De esta manera tenemos que

$$-k\Delta x = -mg$$

de donde despejando  $g$  se obtiene la siguiente expresión

$$g = \frac{k\Delta x}{m} \quad (28.1)$$

teniendo en cuenta que  $m$  será la masa normal del peso situado en el muelle,  $\Delta x$  se corresponde con la longitud que se ha elongado el muelle hasta alcanzar el equilibrio y  $k$  es la constante del muelle, que vamos a ver ahora como se calcula.

Una vez que el muelle se encuentra en equilibrio podemos llamar a esta posición  $x_0 = 0$ . Cualquier pequeña desviación del peso respecto de esta posición donde el muelle está equilibrado y no hay movimiento va a producir una oscilación. Para estudiar esta oscilación basta con saber que, nuevamente, se estará ejerciendo una fuerza neta proporcional al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio<sup>1</sup> (con peso). Entonces aplicando conjuntamente la ley de Hooke y la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} F &= ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F &= -kx \end{aligned} \quad (28.2)$$

---

<sup>1</sup>Hay que notar que estamos hablando de dos posiciones de equilibrio distintas, según cuelgue el peso o no, La de ahora es con el peso colgado.

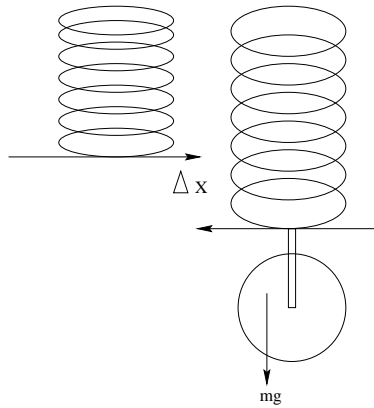


Figura 28.1: Medida de la elongación del muelle al poner el peso.

tendremos que  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ . Entonces resolviendo la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

tendremos la solución del problema.

Se puede demostrar<sup>2</sup> que una solución de esta ecuación es

$$x = A \cos(\omega t) \quad (28.3)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular que presenta la oscilación y es igual a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (28.4)$$

de donde tenemos que

$$K = m\omega^2. \quad (28.5)$$

### 28.3. Realización práctica.

Para llevar a cabo esta práctica comenzamos midiendo el período de la oscilación. Para ello tiramos del peso hacia abajo y, al soltar el peso, encendemos el cronómetro. Después contamos hasta unas veinte veces que vuelva a pasar por abajo del todo y paramos el cronómetro. Dividiendo el tiempo que ha transcurrido entre el número de oscilaciones tendremos cual es el período de la oscilación, es decir, cuanto tarda en dar una vuelta completa, en repetirse el movimiento. La relación entre este período  $T$  y  $\omega$  es

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (28.6)$$

Usando ahora las ecuaciones (28.6) y (28.5) logramos conseguir la constante  $k$  del muelle.

La segunda parte de la práctica consiste en soltar el peso y lograr que el muelle recobre el equilibrio. Se mide esta posición respecto, por ejemplo, la parte alta del muelle. Después se vuelve a colocar el peso y se mide, una vez se encuentre en equilibrio (quieto) donde está ahora el extremo inferior del muelle. Restando

<sup>2</sup>Ver en cualquier libro de ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo el de la editorial MIR y autores A. Kiseliov, M. Krasnov y G. Makarenko.

obtendremos la elongación que ha sufrido, es decir,  $\Delta x$ , como se puede ver en la figura 28.1. Bastará usar ahora la fórmula (28.1) y ya tendremos cuanto vale, aproximadamente, la aceleración de la gravedad  $g$ .

CAPÍTULO 28. ESTUDIO DE UN MUELLE.

## Capítulo 29

# Experiencia de Oersted.

### 29.1. Material experimental

Para llevar a cabo esta práctica se necesitará:

- Brújula o aguja móvil.
- Bobina.
- Generador de corriente.
- Interruptor.

### 29.2. Introducción histórica

En 1.820 el físico danés Oersted observó que una aguja magnética o brújula se orientaba en una determinada dirección en las proximidades de un hilo por el que circulaba corriente eléctrica.

La orientación que adquiría la brújula era tal que dependía de la dirección de la corriente eléctrica por el hilo conductor. Esta orientación era siempre perpendicular a la corriente eléctrica, y el polo norte de la brújula se orienta en la dirección del dedo pulgar de la mano derecha, cuando el resto de los dedos extendidos se colocan en la dirección de la corriente eléctrica.

En cualquier caso esta experiencia supuso la primera y sorprendente relación entre la electricidad y el magnetismo, hasta entonces considerados fenómenos independientes.

### 29.3. Realización práctica

La consecución de esta práctica es muy sencilla. Basta que montes un circuito donde pase electricidad por la bobina, y puedas interrumpir además el paso de electricidad a tu gusto con el uso del interruptor.

Acerca entonces la aguja a la bobina. Si el circuito está apagado no sucederá nada. Prueba a encender el circuito y verás como la aguja se mueve señalando hacia la bobina.

Observa este fenómeno varias veces hasta que estés familiarizado con él. Después busca en tu libro de física o en alguno de la biblioteca una explicación más rigurosa a este problema. Presenta dicha explicación junto con las deducciones pertinentes y el razonamiento que te ha llevado a pensar que ésa es la explicación en tu cuaderno de prácticas. Haz también un estudio histórico sobre Oersted.



## Capítulo 30

# Comprobación de la ley de Ohm

### 30.1. Material experimental

Para llevar a cabo esta práctica se necesitará:

- Resistencia lineal variable
- Voltímetro.
- Amperímetro
- Cables y conexiones.
- Fuente de alimentación.

### 30.2. Introducción teórica

En los conductores denominados óhmicos (la mayoría) la intensidad de corriente que circula es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada

$$\Delta V = IR \quad (30.1)$$

donde la constante  $R$  recibe el nombre de resistencia óhmica del conductor.

Esta resistencia es directamente proporcional a la longitud  $l$  del mismo e inversamente proporcional a su sección  $S$ , con lo cual

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (30.2)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\rho$  recibe el nombre de resistividad.

### 30.3. Realización práctica

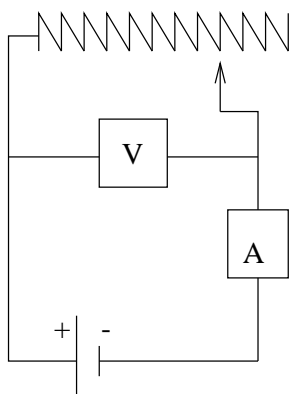


Figura 30.1: Circuito para comprobar la ley de Ohm.

Para hacer esta práctica hay que montar primero un circuito donde la corriente caiga a través de la resistencia variable (realmente un hilo resistivo cuya longitud podemos variar a nuestro antojo) pudiéndose medir simultáneamente la caída de potencial y la intensidad. Para ello habremos de poner el voltímetro en paralelo con el circuito y el amperímetro en serie con él. *Es muy importante no aumentar desmesuradamente la corriente, cuidando siempre que las magnitudes medidas estén dentro del rango de los aparatos para no quemar éstos.* Esta instalación se puede observar en la figura 30.1.

Después habrá que analizar como pueden variar la resistencia en función de la longitud de hilo resistivo que se tenga. Para ello procedamos por pasos.

1. Midiendo la resistencia cuando la longitud del hilo sea nula tendremos una contribución  $R_0$  a la resistencia en una posición cualquiera.
2. Después habrá que tomar una serie de puntos significativos de la función  $R(l)$ , es decir, de cómo varía la resistencia con la longitud del hilo. Para ello, como la contribución inicial ya ha sido medida y es  $R_0$ , haciendo uso de la ecuación (30.1) y siguientes podemos poner

$$R_h = R_t - R_0$$

donde  $R_h$  será la resistencia del hilo que queremos medir, y  $R_t$  la resistencia total, medida como  $R_t = \frac{V}{I}$ . Por último recordando (30.2) tendremos:

$$\frac{V}{I} = \frac{\rho}{S}l + R_0.$$

3. Se toman medidas de  $R_t$  y de  $l$  y cuando se representen en una hoja de papel milimetrado frente a  $l$  se deberá obtener una recta. De aquí se consiguen tres cosas
  - a) Una demostración de que la ley de Ohm es cierta.
  - b) Un valor de  $\frac{\rho}{S}$ , que será la pendiente de dicha recta.
  - c) Un “chequeo” de la práctica, ya que la extrapolación de los puntos con  $l \neq 0$  en su corte con el eje  $y$  deberán dar como valor nuevamente  $R_0$ .
4. Escribe en tu cuaderno todo lo que has hecho junto con una (pequeña) biografía de Ohm.
5. Si eres valiente ajusta los datos haciendo una regresión lineal, bien a mano o con la calculadora. Si no sabes lo que es una regresión lineal búscalo en algún libro de matemáticas (o de prácticas de laboratorio) o pregúntaselo a tu profesor.



# Capítulo 31

## Uso elemental de un osciloscopio

### 31.1. Material experimental

- Osciloscopio.
- Generador de onda.
- Cables y resistencias.

### 31.2. Introducción teórica

Esta es una práctica que no trata tanto de demostrar algún concepto físico como de aprender a usar este complicado, pero muy útil y versátil instrumento: el osciloscopio.

#### 31.2.1. El osciloscopio

Un osciloscopio es un instrumento que, mediante pulsos eléctricos cuya duración se puede regular, representa en una pantalla una relación del voltaje de entrada frente al tiempo, es decir  $V(t)$ .

Los instrumentos básicos para su utilización son un mando que regula la duración del barrido del osciloscopio, es decir, la escala de tiempos, y que puede durar desde microsegundos hasta segundos. Esta escala viene marcada a su vez por los cuadrados de la pantalla del osciloscopio, cada uno de los cuales presenta cuatro divisiones que permiten así conocer el tiempo discurrido en un evento con una precisión de  $\frac{1}{5}$  de la escala usada.

La escala vertical, es decir, el voltaje, viene a su vez regulada por dos mandos similares, uno por cada canal (como nosotros vamos a usar sólo un canal no hará falta preocuparse del otro para nada), en donde podemos elegir la escala. Al igual que antes cada cuadradito, con sus cinco divisiones, representará una unidad del voltaje seleccionado.

La escala del tiempo se corresponde al eje horizontal de la pantalla del osciloscopio, y el voltaje a la vertical. Es muy importante el ajuste apropiado de estos mandos para la correcta realización de medidas. El mando de la escala temporal tiene, a su vez, un mando de ajuste fino, pero para que las magnitudes reales se correspondan con las medidas no hay que tocar este mando.

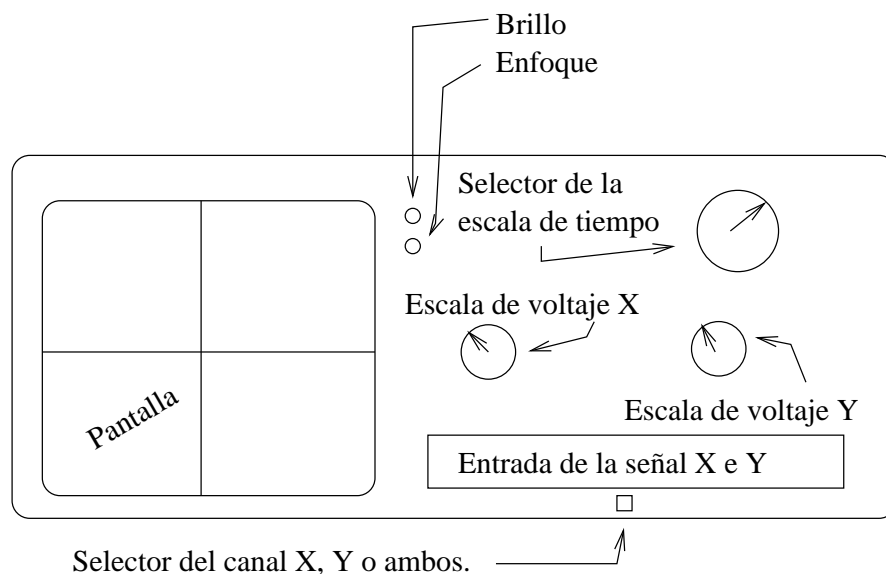


Figura 31.1: Mandos fundamentales de un osciloscopio.

Por último los osciloscopios presentan dos mandos más para regular el desplazamiento de los ejes  $x$  e  $y$ , es decir, del tiempo y el voltaje, pero sin variar la escala. Es decir, hay dos mandos para el ajuste del origen de coordenadas vertical y horizontalmente.

La posición aproximada de estos mandos importantes puede verse en la figura 31.1.

### 31.2.2. El generador de onda

Se trata de un aparato para generar corriente alterna con la forma, frecuencia y amplitud que deseemos.

La forma de la onda puede ser triangular, sinusoidal o cuadrada y se cambia con los botones correspondientes.

Para cambiar la intensidad tenemos un mando de ajuste fino y unos botones en el generador para cambiar la escala en un factor múltiplo de 10.

La amplitud se puede variar con un mando que no está reglado.

### 31.3. Realización práctica

Comprueba que sabes usar ya correctamente los aparatos e intenta entonces comprobar, mediante el uso del osciloscopio, que la frecuencia a la que el generador emite las ondas es realmente la que marca.

Para ello haz pasar la señal del generador de onda a través de una resistencia y conecta en los extremos de esta resistencia los extremos del osciloscopio. Ajusta el instrumento hasta que obtengas una onda visible con claridad en la pantalla. Fíjate que la onda se repite cada cierto tiempo. Si mides cada cuanto tiempo se repite la onda habrás obtenido el periodo de la onda  $T$ . Para conseguir su frecuencia  $\nu$  recuerda que

$$\nu = T^{-1}.$$

Nota



◊ Recuerda que, para que el cálculo te de en Hertzios, que es lo que señala el generador de onda, debes tomar el tiempo en segundos.

### 31.4. Precauciones

Dada la complejidad y alto precio de los aparatos que se usan en esta práctica es más que conveniente que tengas presente las siguientes indicaciones:

- Antes de encender asegúrate que los contactos son correctos.
- No manipules los controles que no sabes para que sirven.
- Mantén siempre la onda en los límites de detección del aparato.
- El osciloscopio no es un juguete, no hagas cosas raras con él.
- Si notaras que algo se calienta o que huele a quemado apaga todo rápidamente y avisa al profesor.

CAPÍTULO 31. USO ELEMENTAL DE UN OSCILOSCOPIO

## Capítulo 32

# Estudio de un péndulo.

### 32.1. Material experimental

Para llevar a cabo esta práctica se necesitará:

- Hilo con soporte.
- Peso. (Para colgar del hilo).
- Cronómetro.
- Metro.

### 32.2. Introducción teórica

Al colocar un peso de un hilo colgado e inextensible y desplazar ligeramente el hilo se produce una oscilación periódica. Para estudiar esta oscilación es necesario proyectar las fuerzas que se ejercen sobre el peso en todo momento, y ver que componentes nos interesan y cuales no. Esto se puede observar en la figura 13.1. Un estudio análogo, quizás algo más completo al que se va a hacer aquí, está expresado en el punto 13.4.

Vemos pues que, considerando únicamente el desplazamiento tangente a la trayectoria, es decir, el arco que se está recorriendo, podemos poner

$$ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mg \sin(\alpha) = 0 \quad (32.1)$$

donde no hemos hecho sino aplicar la segunda ley de Newton. Esto se puede ver considerando que el arco es  $l\alpha$  y, como  $l$  es la longitud del hilo y es constante<sup>1</sup>, la aceleración será  $l \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ . Por otra parte, aplicando  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ , en este caso la fuerza es sólo la de la gravedad,  $mg$  que se descompone en una componente, que se contrarresta con la tensión, más otra, que es la que hace que exista movimiento en la trayectoria marcada por el arco.

Esta ecuación diferencial no es nada fácil de resolver<sup>2</sup> y por ello recurrimos a la aproximación siguiente: suponiendo que el ángulo que desplazamos es pequeño, tomamos que  $\sin(\alpha) \simeq \alpha$  y así tenemos que

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \quad (32.2)$$

---

<sup>1</sup>Se considera un hilo inextensible.

<sup>2</sup>Realmente no tiene solución analítica.

que a veces también se expresa como  $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$ .

Esta ecuación se puede demostrar que tiene por solución

$$\alpha = A \cos(\omega t) \quad (32.3)$$

donde  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  y  $A$  es el arco máximo que se aleja el péndulo.

También es muy común, puesto que hemos supuesto arcos muy pequeños para hacer la aproximación, suponer que la trayectoria que sigue el péndulo es recta, y no curvada, ya que, para<sup>3</sup>  $\alpha \ll 1$  el arco se confunde con la cuerda, y por tanto, tratar este movimiento como un oscilador armónico simple cualesquiera.

### 32.3. Realización práctica

Hacer esta práctica es muy sencillo. Para ello basta medir la longitud de la cuerda hasta el centro de gravedad del peso, y después indagar cual será el período  $T$  del movimiento.

Para hallar el período del movimiento separamos ligeramente el péndulo y con el cronómetro contamos hasta 20 o 30 oscilaciones. Después dividimos el tiempo que tardó en oscilar estas veces por el número de oscilaciones que hemos contado y obtendremos el período, es decir, el tiempo que se tarda en dar una única oscilación. Basta ahora relacionar  $T$  con  $\omega$  mediante la sencilla fórmula

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

y, sabiendo que

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

se despeja  $g$  y se halla, dado que tenemos también el resto de parámetros.

---

<sup>3</sup>Lease,  $\alpha$  muy pequeño.

## Capítulo 33

# Cálculo de la aceleración de un sistema mediante dinámica y cinemática

### 33.1. Material experimental

- Cronómetro fotoeléctrico.
- Poleas
- Hilo con dos soportes y un disco de aluminio muy ligero.
- Regla.
- Balanza y pesas.

### 33.2. Introducción teórica

En esta práctica se trata de combinar cinemática y dinámica en un experimento sencillo para comprobar como son aplicables ambas teorías a una situación concreta.

Aplicando las ecuaciones de la dinámica a un sistema como el de la figura 33.1

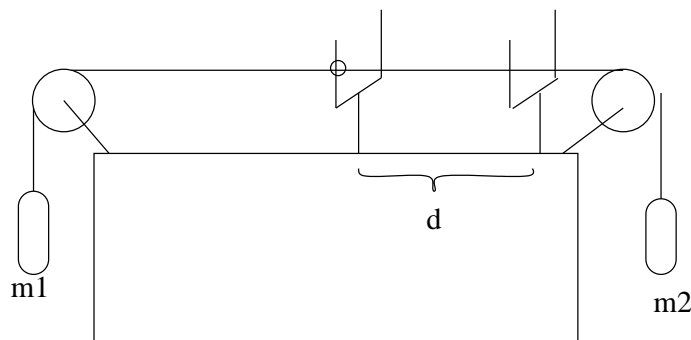


Figura 33.1: Sistema de poleas.

y suponiendo que éste se mueve de izquierda a derecha se tendrá que:

$$\left. \begin{aligned} m_1g - T &= m_1a \\ T - m_2g &= m_2a \end{aligned} \right\}$$

de donde, fácilmente se observa que

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g. \quad (33.1)$$

Ahora bien ¿cómo podemos obtener la aceleración usando cinemática?. Si la distancia entre los dos sensores del cronómetro fotoeléctrico es  $d$  y justo dejamos partir el disco señal del primero sin velocidad inicial, considerando también este primer sensor como el origen de medición tendremos que

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow d = \frac{1}{2}at^2.$$

y una vez medido  $t$ , que será el dato que nos de el cronómetro cuando el disco pase por el segundo detector, tendremos que

$$a = \frac{2d}{t^2}. \quad (33.2)$$

### 33.3. Realización práctica

Coge dos masas cuidadosamente pesadas y sitúalas en los dos extremos de la práctica. La elección de las masas es importante, puesto que deben ser lo suficientemente grandes para poder despreciar el efecto de las poleas y la masa del hilo, y la diferencia entre ellas debe ser suficientemente grande para que no le afecte el error de medida de las masas, pero lo suficientemente pequeña para que el conjunto no se desplace muy deprisa y el error de medición del tiempo no sea significativo. Habrás de probar con distintas combinaciones de masas hasta que encuentres la que parezca más oportuna.

Deja deslizarse al sistema y toma cinco o seis medidas del tiempo que tarda en cruzar el disco de aluminio los dos sensores: después toma el tiempo medio entre los seis experimentos.

Usando las fórmulas (33.1) y (33.2) calcula la aceleración del sistema. Evidentemente en un caso ideal el resultado por los dos caminos debería ser exactamente el mismo, pero no obstante nunca da lo mismo debido a los errores experimentales y a las aproximaciones echas. ¿Cómo interpretas el resultado?. ¿Coinciden significativamente?.

Idea algún sistema para mejorar la precisión del experimento o bien de tus cálculos y, si eres capaz, realízalo. Explica todo esto en tu guión de prácticas.



## Capítulo 34

# Medición de la humedad mediante un psicrómetro

### 34.1. Material experimental

- Termómetro.
- Ballesta o trapo húmedo.
- Tabla de temperaturas húmeda-seca.

### 34.2. Introducción teórica

Un termómetro húmedo es un dispositivo sencillo para medir la humedad relativa de la atmósfera. Su funcionamiento se basa en la bajada de temperatura que acompaña a un fenómeno de evaporación de agua.

Cuando se coloca un paño continuamente húmedo en la parte sensible de un termómetro, aunque el agua esté a temperatura atmosférica se observa un descenso de la temperatura en el así llamado “termómetro húmedo”. Esto se debe a que el agua se evapora del paño, tomando el calor que le falta para este proceso del termómetro, y haciendo entonces que su temperatura baje significativamente. Este descenso de temperatura se puede medir tomando después la temperatura con un termómetro normal o “seco”.

Como la facilidad de evaporación del agua depende de lo saturada que esté la atmósfera de vapor de agua, y esto se refleja a su vez en esta diferencia de temperatura, mediante este mecanismo podemos obtener cual es la humedad relativa de la atmósfera.

Por ejemplo, si las temperaturas entre ambos termómetros son iguales supone que no se ha evaporado nada de agua del paño húmedo, y por tanto la humedad relativa deberá ser la máxima posible: 100 %, ya que se impide la evaporación de líquido.

Cuanto mayor sea la diferencia de temperaturas más agua se estará evaporando, lo cual significa que la humedad relativa de la atmósfera es pequeña y por tanto permite que se evapore agua.

### 34.3. Realización práctica

Simplemente se mide la temperatura asegurándose de que el bulbo de mercurio esté seco. Se anota bien esta temperatura. Posteriormente se moja un paño y se

#### CAPÍTULO 34. MEDICIÓN DE LA HUMEDAD MEDIANTE UN PSICRÓMETRO

rodea suavemente el termómetro con él. Se deja un rato (asegurándose que siempre esté húmedo el paño) y se comprueba la nueva temperatura, que será ligeramente inferior. Posteriormente, comprobando la tabla adjunta, se sabrá cual es la humedad de la atmósfera.

## Capítulo 35

# Resistencias en serie y en paralelo.

### 35.1. Material experimental

Para llevar a cabo esta práctica se necesitará:

- Placa de circuitos.
- Resistencias y cables.
- Polímetro.

### 35.2. Introducción teórica

La asociación de resistencias en serie y en paralelo parte del uso de la ley de Ohm

$$\Delta V = IR$$

donde  $\Delta V$  es la diferencia de tensión entre las resistencias,  $I$  la intensidad de corriente que circula por ellas y  $R$  el valor de la resistencia en cuestión.

#### 35.2.1. Acople en serie.

Si tomamos las resistencias y las acoplamos en serie, como en el dibujo 35.1 podemos afirmar que la intensidad que pasa por  $R_1$  es la misma que circulará por

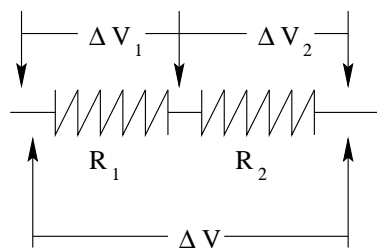


Figura 35.1: Resistencias en serie.

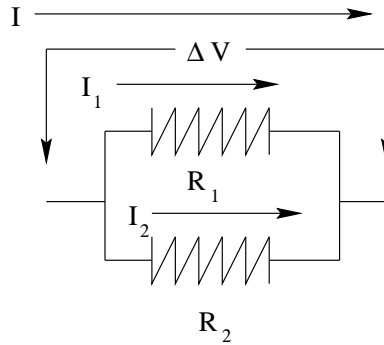


Figura 35.2: Resistencias en paralelo.

\$R\_2\$. Por tanto tendremos que \$\Delta V\_1 = IR\_1\$ y además \$\Delta V\_2 = IR\_2\$. La caída total de potencial será \$V\_1 + V\_2\$, es decir

$$\Delta V = V_1 + V_2 = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

Buscando el valor de una resistencia equivalente \$R\_e\$ tendremos que

$$\Delta V = IR_e = I(R_1 + R_2) \Rightarrow R_e = R_1 + R_2.$$

Hemos llegado así a la conocida relación para las resistencias en serie:

$$R_e = R_1 + R_2 \tag{35.1}$$

### 35.2.2. Acople en paralelo

Montemos ahora las resistencias en paralelo, tal y como se representa en el circuito dibujado en 35.2. Para resolver este nuevo problema basta darse cuenta de que, ahora, la diferencia de potencial \$\Delta V\$ es igual para ambas resistencias, es decir, que

$$\Delta V = V_1 = V_2.$$

Tendremos entonces que

$$\Delta V = IR_e = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

y, por las leyes de mallas de Kirchoff, o si se prefiere, por el concepto intuitivo de que la intensidad no se puede perder, es evidente que \$I = I\_1 + I\_2\$. Tomando esta última igualdad y notando que

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{R_e} \\ I_1 &= \frac{V}{R_1} \\ I_2 &= \frac{V}{R_2} \end{aligned}$$

tendremos, sólo con sustituir

$$\frac{V}{R_e} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

y, despejando la \$V\$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{35.2}$$

### 35.3. Realización de la práctica

La realización de esta práctica es muy sencilla. En primer lugar mediremos con el polímetro los valores en Ohmios de las resistencias que tengamos. Apuntando bien cada resistencia con su valor. Después asociaremos en serie y en paralelo algunas de estas resistencias, calculando posteriormente mediante el uso de las fórmulas (35.1) y (35.2) el valor teórico de la resistencia equivalente. Una vez tenido este dato mediremos con el polímetro el valor de la resistencia equivalente. ¿Coinciden estos valores?. En caso de que no sea así ¿Qué razones puede haber para ello? ¿Es significativa esta no coincidencia?.



**Parte IV**  
**Apéndices**





# Apéndice A

## Esquemas y formulario

### A.1. Cálculo vectorial

1. Definición

- a) Escalar
- b) Vector
  - 1) Módulo
  - 2) Dirección
  - 3) Sentido

2. Operaciones con vectores

- a) Componentes.  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$
- b) Módulo.  $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
- c) Vector unitario.  $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$ 
  - 1)  $(1, 0, 0) = \hat{i}$
  - 2)  $(0, 1, 0) = \hat{j}$
  - 3)  $(0, 0, 1) = \hat{k}$
- d) Suma.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ .  
Gráfica.
- e) Producto escalar.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

### A.2. Cinemática

- 1. Vector de posición  $\vec{r}$
- 2. Vector desplazamiento  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
- 3. Velocidad
  - a) Media  $\vec{v} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$
  - b) Instantánea  $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$
- 4. Aceleración
  - a) Media  $\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$

- b) Instantánea  $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$
- c) Tangencial.  $\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \hat{v}$
- d) Normal.  $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \hat{n}$ ,  $\hat{n} \perp \hat{v}$
- e) Relaciones
  - 1)  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$
  - 2)  $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

### A.2.1. Movimiento circular

1.  $\theta$  es el ángulo recorrido en radianes.
2.  $2\pi rad = 360^\circ$
3. Velocidad angular.  $\omega = \frac{d}{dt}\theta(t)$
4. Aceleración angular.  $\alpha = \frac{d}{dt}\omega(t)$
5. Relaciones magnitudes angulares con lineales
  - a)  $v = R\omega$
  - b)  $a_t = R\alpha$
  - c)  $a_n = R\omega^2$

## A.3. Dinámica

### A.3.1. Translación

1. Leyes de Newton.
  - a) Ley de inercia
  - b)  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
  - c) Ley de acción y reacción
2. Fuerzas
  - a) Peso.  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
  - b) Normal. En rampas  $N = mg \cos \theta$
  - c) Rozamiento.  $F_r = \mu N$
  - d) Tensiones. A ambos lados de una polea perfecta es igual.
3. Momento lineal:  $\vec{P} = m\vec{v}$
4. Conservación del momento lineal.  $\sum_i m_i^{ini} \vec{v}_i^{ini} = \sum_i m_i^{fin} \vec{v}_i^{fin}$
5. Cantidad de movimiento e impulso mecánico.  $\vec{I} = \vec{F}t = \Delta\vec{p}$

### A.3.2. Rotación

1. Movimiento circular.  $F_c = m\frac{v^2}{R}$
2. Aplicación a curvas con y sin peralte.  $v_{max} = \sqrt{\mu g R}$ ,  $v_{max} = \sqrt{\tan \alpha g r}$
3. Momento de un par de fuerzas.  $M = Fr \sin \alpha$
4. Momento de inercia.  $I = \sum_n m_n r_n^2$
5. Ecuación de la dinámica de rotación.  $M = I\alpha$

## A.4. Trabajo y Energía

1. Trabajo: concepto intuitivo.
2. Trabajo: concepto matemático:
  - a)  $W = Fr \cos \alpha$
  - b)  $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$
3. Potencia.  $P = \frac{dW}{dt} = Fv$ ,  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$
4. Energía.
  - a) Concepto intuitivo.
  - b) Cinética.  $T = E_c = \frac{1}{2}mv^2$
  - c) Potencial elástica.  $E_p = \frac{1}{2}Kx^2$
  - d) Potencial gravitatoria superficie.  $E_p = mgh$
  - e) Potencial gravitatoria general.  $E_p = -G \frac{Mm}{r}$
  - f) Potencial coulombiana.  $E_p = K \frac{Qq}{r}$
  - g) Teorema de conservación de la energía.  $E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$

## A.5. Movimiento armónico simple

1. Ley de Hooke.  $F = -Kx$
2. Ecuación del m.a.s.
  - a) Ecuación general.  $x = A \sin(\omega t + \theta)$
  - b) Relación velocidad posición.  $v = \sqrt{A^2 - x^2}$
  - c) Relación aceleración posición.  $a = -\omega^2 x$
3. ¿Qué es  $\omega$ ?
  - a)  $\omega^2 = \frac{K}{m}$
  - b) Periodo.  $\omega = \frac{2\pi}{T}$
  - c) Frecuencia.  $\omega = 2\pi\nu$
  - d) Relación periodo y frecuencia.  $\nu = T^{-1}$
4. Energía en un m.a.s.
  - a) Potencial.  $E_p = \frac{1}{2}Kx^2$
  - b) Mecánica.  $E_{total} = \frac{1}{2}KA^2$
5. Péndulo simple.
  - a) Relación con un m.a.s.  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
  - b) Propiedades. Cálculo aproximado para amplitudes pequeñas.

## A.6. Campo y potencial eléctrico y gravitatorio

1. Fuerzas

a) Coulombiana (cargas).  $\vec{F} = K \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$

b) Newtoniana (masas).  $\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$

2. Campos

a) Electrostático.  $\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ .

b) Gravitatorio.  $\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$ .

3. Principio de superposición vectorial.  $\vec{F}_{total} = \sum_i \vec{F}_i$ .

4. Energía potencial.

a) Electrostática.  $E_p = K \frac{Qq}{r}$ .

b) Gravitatoria.  $E_p = G \frac{Mm}{r}$ .

5. Potencial electrostático.  $V = K \frac{Q}{r}$ .

6. Principio de superposición escalar.  $V_{total} = \sum_i V_i$ .

7. Diferencia de potencial electrostático.

8. Relación entre la diferencia de potencial y el trabajo.  $\Delta W = q(V_A - V_B)$ .

9. Relaciones entre campos y fuerzas.

a) Electrostático.  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

b) Gravitatorio.  $\vec{F} = m\vec{g}$ .

10. Relación entre energía potencial y potencial electrostático.  $E_p = qV$ .

11. Flujo ( $\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$ ) y teorema de Gauss.

a) Electrostático.  $\phi = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$ .

b) Gravitatorio.  $\phi = 4\pi G m_{enc}$ .

12. Anexos.

a) Significado de la energía potencial negativa.

b) Velocidad de escape.  $E_t = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} = 0$ . Concepto de partículas "ligadas".

c) Relación (unidimensional) entre el campo y el potencial.  $E = \frac{dV}{dx}$

d) Leyes de Kepler.

e) Resolución de problemas de satélites.  $\frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2}$ .

## A.7. Circuitos de corriente continua

1. Conductores y aislantes.
2. Intensidad. Amperio.  $I = \frac{dq}{dt}$ .
3. Diferencia de potencial.  $\Delta V$ .
4. Ley de Ohm. Resistencia.  $\Delta V = IR$ ,  $R = \rho \frac{l}{S}$ .
5. Asociación de resistencias.
  - a) Asociación serie.  $R_e = \sum_{i=1}^{i=n} R_i$
  - b) Asociación paralelo.  $\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{R_i}$ .
6. Instrumentos de medida
  - a) Amperímetros. (Serie).
  - b) Voltímetros. (Paralelo).
7. Trabajo de la corriente eléctrica. Ley de Joule.  $W = I^2 R t (J)$ .
8. Potencia de la corriente eléctrica.  $P = I^2 R$ .
9. Generadores. Fuerza electromotriz (fem).  $\Delta V = \epsilon - I \sum r_i$ .
10. Motores. Fuerza contra-electromotriz. (fcem). Ley de Ohm generalizada.  $\sum \epsilon_i = \sum \epsilon'_i + I \sum R_i$ .
11. Redes eléctricas. Reglas de Kirchhoff.

## A.8. Electromagnetismo

1. Campo magnético.  $\vec{B}$ .
2. Flujo magnético.  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ .
3. Acción de un campo magnético sobre una carga en movimiento. Ley de Lorentz.  $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha$ .
4. Radio de la órbita de una carga moviéndose bajo la acción de un campo magnético.  $R = \frac{mv}{qB}$ .
5. Acción de un campo magnético sobre un conductor rectilíneo recorrido por una corriente. Ley de Laplace.  $|\vec{F}| = BIl \sin \alpha$ .
6. Campo magnético creado por una corriente rectilínea. Ley de Biot y Savart.  $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$ .
7. Campo magnético creado por una espira circular en su centro.  $B = \frac{\mu_0}{2} IR$ .
8. Campo magnético creado por un solenoide.  $B = \mu I \frac{n}{l}$ .
9. Fuerza entre corrientes paralelas. Definición de amperio.  $\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'}{d}$ .

APÉNDICE A. ESQUEMAS Y FORMULARIO

## Apéndice B

# Movimiento de un cuerpo en el campo gravitatorio bajo el rozamiento con el aire

### B.1. Introducción

Vamos a analizar que sucede cuando dejamos un cuerpo en caída libre bajo la acción de la gravedad, pero considerando también que existe un rozamiento con la atmósfera, con el aire, de valor  $F_r = -Kv$ .

### B.2. Planteamiento de la ley de Newton

Aplicando la ley de Newton tenemos que  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ . En este caso tomaremos el sistema de referencia habitual, y al tratarse el problema de una caída libre, haremos únicamente un tratamiento unidimensional para el eje  $y$ .

Las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo que cae son únicamente la fuerza de la gravedad  $-mg$  y la de rozamiento  $-Kv^1$ . La constante  $K$  la dejaremos indicada, su valor se mide experimentalmente.

Así pues la ley de Newton se expresará como

$$-mg - Kv = ma. \tag{B.1}$$

### B.3. Interpretación de la ecuación de Newton

Vemos que tenemos una ecuación que relaciona  $a$  con  $v$ . Ahora bien, la aceleración y la velocidad no son magnitudes independientes, ya que una es la derivada de la otra. Por tanto no podemos despejar tranquilamente  $a$  o  $V$ , ya que, al estar relacionadas entre sí, esto no sería una solución de la ecuación (B.1). Hemos de plantear como resolver

$$-mg - Kv = m \frac{dv}{dt},$$

---

<sup>1</sup>Hemos de ser conscientes que en este modelo del rozamiento hemos incluido ya el hecho de que el rozamiento siempre se opone al movimiento. ¿Qué cómo sucede esto aquí?, simplemente porque cuando la velocidad sea positiva  $-Kv$  será negativo e irá en sentido contrario al movimiento. Análogamente cuando  $v < 0$  tendremos que  $F_r > 0$  y también se opone al movimiento. Por último si el cuerpo no se mueve  $v = 0$  y no hay rozamiento.

que recibe el nombre de *ecuación diferencial*. Aunque el tema de las ecuaciones diferenciales supera con mucho el nivel y los planteamientos de la física general de este curso, este caso concreto representa, no sólo un caso sencillo e inteligible, sino además un ejemplo potente y didáctico de lo que representan las ecuaciones de Newton para el mundo físico, razón por la que trataremos este sistema como una excepción al nivel del curso, pero una excepción muy interesante.

Para resolver esta ecuación pasemos todos los términos con  $v$  a un lado y los que tienen  $t$  al otro. Así tendremos

$$-\frac{mdv}{mg + Kv} = dt$$

lo cual es una forma de acumular todos los términos en  $v$  a un lado y con  $t$  bien separados para nuestra próxima acción. Integremos ahora ambos miembros entre el instante  $t = 0$ , en el cual suponemos que  $v = 0$  y un instante genérico  $t$ .

$$-\int_0^t \frac{m}{mg + Kv} dv = \int_0^t dt$$

Esta integral es inmediata dándose cuenta de que

$$\frac{d}{dt}(mg + Kv) = \frac{K}{mg + Kv}$$

, y por tanto tendremos

$$t \Big|_0^t = -\frac{m}{K} \ln(Kv + mg) \Big|_0^t,$$

que sabiendo que en  $t = 0$  teníamos  $v = 0$  nos dirá que

$$t = -\frac{m}{K} \ln\left(\frac{Kv + mg}{mg}\right).$$

Bueno, ahora basta hacer alguna acrobacia matemática y despejar la velocidad, que es la magnitud que nos interesa, esto se logra exponenciando

$$e^{-\frac{Kt}{m}} = \frac{Kv + mg}{mg}$$

y despejando

$$v = -\frac{mg}{K} \left(1 - e^{-\frac{Kt}{m}}\right) \tag{B.2}$$

## B.4. Conclusión

Interpretar el resultado de la fórmula (B.2) es una delicia física que nos dirá mucho más que todo el desarrollo matemático, más o menos complejo, anterior. Dejemos de momento pensar al lector que nos está diciendo esta relación en general y, mucho más concretamente que sucede para tiempos muy pequeños y muy grandes, es decir, estudiar que significan los casos en los que  $t \ll 1$  y  $t \rightarrow \infty$ .



## Apéndice C

# Tablas y fórmulas útiles

### C.1. Introducción

Este apéndice está pensado como un complemento o un recordatorio matemático de algunos conceptos de esta índole imprescindibles para abordar con éxito el estudio de la física. No obstante, si el lector descubre que desconoce una gran parte del contenido de este apéndice, o bien que no comprende la procedencia de las fórmulas, debería por su cuenta estudiar estas bases hasta su total comprensión.

### C.2. Cálculo complejo

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ \sqrt{-1} &= i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (bc + ad)i \\ \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}$$

### C.3. Cálculo vectorial

**Módulo**  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ .

**Producto escalar**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$ .

**Producto vectorial** Ver 4.3.4.

### C.4. Funciones elementales

#### C.4.1. Trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin^2 t + \cos^2 t &= 1, \forall t \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \end{aligned}$$

### C.4.2. Logarítmicas y exponenciales

$$\begin{aligned}
 \ln 1 &= 0 \\
 \ln 0 &\rightarrow -\infty \\
 \ln(ab) &= \ln a + \ln b \\
 \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b \\
 \ln a^b &= b \ln a \\
 e^0 &= 1 \\
 e^t &\geq 0, \forall t \\
 e^{a+b} &= e^a e^b \\
 e^{ab} &= e^{ab}
 \end{aligned}$$

## C.5. Derivación

### C.5.1. Propiedades generales

**Constante**  $\frac{d}{dt}K = 0$ .

**Suma**  $\frac{d}{dt}(f + g) = \frac{d}{dt}f + \frac{d}{dt}g$ .

**Producto por constante**  $\frac{d}{dt}(Kf) = K \frac{d}{dt}f$ .

**Producto**  $\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \left(\frac{d}{dt}f\right)g + f\left(\frac{d}{dt}g\right)$ .

**División**  $\frac{d}{dt}\frac{f}{g} = \frac{\left(\frac{d}{dt}f\right)g - f\left(\frac{d}{dt}g\right)}{g^2}$ .

**Regla de la cadena**  $\frac{d}{dt}f(g(t)) = \left(\frac{d}{dt}f\right)(g(t)) \cdot \frac{d}{dt}g(t)$ .

**Ejemplo de la regla de la cadena**  $\frac{d}{dt}\sin(t^2) = \cos(t^2)2t$ .

### C.5.2. Tabla de derivadas

$f(t)$	$\frac{d}{dt}f(t)$	$f(t)$	$\frac{d}{dt}f(t)$
$t$	1	$t^n$	$nt^{n-1}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$	$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$	$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t}$
$\sinh t$	$\cosh t$	$\cosh t$	$\sinh t$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\log_a t$	$\frac{1}{t} \log_a e$
$a^t$	$a^t \ln a$	$e^t$	$e^t$
$\arcsin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arccos t$	$-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\arctan t$	$\frac{1}{1+t^2}$	$\operatorname{arg} \sinh t$	$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$
$\operatorname{arg} \cosh t$	$\frac{1}{\pm\sqrt{t^2-1}}$	$\operatorname{arg} \tanh t$	$\frac{1}{1-t^2}$

## C.6. Integración

### C.6.1. Definición y propiedades

Se define  $\int f(t)dt = F(t)+C$  si se cumple que  $\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$ . Algunas propiedades son:

**Nula**  $\int 0dt = C$  donde  $C$  es una constante cualesquiera.

**Constante**  $\int Kf(t)dt = K \int f(t)dt$ ,

**Suma**  $\int (f(t) + g(t)) dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt.$

La integral de un producto de dos funciones es

$$\int u(t)dv(t) = u(t)v(t) - \int v(t)du(t).$$

### C.6.2. Tabla de integrales

$$\begin{aligned} \int t^n dt &= \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \\ \int \frac{dt}{t} &= \ln |t| + C \\ \int e^t dt &= e^t + C \\ \int \sin t dt &= -\cos t + C \\ \int \cos t dt &= \sin t + C \\ \int \frac{dt}{\cos^2 t} &= \tan t + C \\ \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \arcsin t + C \\ \int \tan x &= -\ln |\cos t| + C \\ \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} &= \ln (t + \sqrt{t^2-1}) + C \\ \int \frac{dt}{1+t^2} &= \arctan t + C \end{aligned}$$

APÉNDICE C. TABLAS Y FÓRMULAS ÚTILES

## Apéndice D

# Agradecimientos

El autor quiere agradecer la colaboración, a la hora de buscar y corregir las erratas a todos sus (sufridos) alumnos, y más especialmente por su dedicación en dicha búsqueda a:

- Beatriz Estívaliz Muñoz Gonzalez.
- Elena Casillas Millán.
- M<sup>a</sup> de la Concepción de León López.
- Miguel Ángel Morillo Lozano.
- Miguel Torres Durán.

APÉNDICE D. AGRADECIMIENTOS

# Bibliografía

- [1] Física Feynman, Volumen I: Mecánica, radiación y calor. *Feynman, Leighton, Sands*. Addison-Wesley Iberoamericana. USA, 1987.
- [2] Física Feynman, Volumen II: Electromagnetismo y materia. *Feynman, Leighton, Sands*. Addison-Wesley Iberoamericana. USA, 1987.
- [3] Física Feynman, Volumen III: Mecánica cuántica. *Feynman, Leighton, Sands*. Addison-Wesley Iberoamericana. USA, 1987.
- [4] Física, Volumen I. *Paul A. Tipler*. Editorial Reverté, S.A. Bilbao, 1.995.
- [5] Física, Volumen II. *Paul A. Tipler*. Editorial Reverté, S. Bilbao, 1.995
- [6] Física recreativa, libro 1. *Y. Perelman*. Editorial MIR Rubiños-1.86 S.A. Madrid, 1.994,
- [7] Física recreativa, libro 2. *Y. Perelman*. Editorial MIR Rubiños-1.86 S.A. Madrid, 1.994,
- [8] Manual de fórmulas y tablas matemáticas, serie Schaum. *Murray R. Spiegel*. McGraw-Hill. Mexico 1.991.
- [9] Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. *A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko*. Editorial MIR Rubiños-1.86 S.A. Madrid, 1.992.
- [10] Prontuario de Física. *B.M Yavorski, A.A. Detlaf*. Editorial MIR. U.R.S.S. 1.988.
- [11] Manual de matemáticas. *I. Bronshtein, K. Semendiaev*. Editoriak U.R.S.S. Moscú, 1.988.
- [12] Dinámica de las partículas y sistemas. *Jerry B. Marion*. Editorial Reverté S.A. Barcelona, 1.992.
- [13] Mecánica Clásica. *H. Goldstein*. Editorial Reverté. Barcelona, 1.992.
- [14] Física COU. *A. Candel, J. Satoca, J.B. Soler, J.J. Tent*. Editorial Anaya. Madrid, 1992.
- [15] Probabilidad y aplicaciones estadísticas. *Paul L. Meyer*. Addison-Wesley Iberoamericana. U.S.A. 1986.
- [16] Física COU. *J. Damián, M. Ortuño y J.M<sup>a</sup> Rús*. Editorial Luis Vives. Zaragoza, 1.993.