

Sous-espaces affines

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel. L'idée général est de translater les sous-espaces vectoriels de E pour obtenir les droites, plans, ... de E qui ne passent pas par l'origine.

1 SOUS-ESPACES AFFINES

Définition 1 : Translation

Si u est un élément d'un espace vectoriel E , l'application de E dans E définie par $x \mapsto u + x$ est appelée **translation de vecteur u** et notée t_u .

Proposition 1

Soient $u, v \in E$. On a $(1) \quad t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_v \circ t_u \quad (2) \quad t_u^{-1} = t_{-u}.$

Preuve. Pour tous $u, v, w \in E$, $(t_u \circ t_v)(w) = u + (v + w) = \underbrace{(u + v) + w}_{=t_{u+v}(w)} = \underbrace{v + (u + w)}_{=(t_v \circ t_u)(w)}.$

Cela donne en particulier, pour tous $u \in E$, $t_u \circ t_{-u} = t_{-u} \circ t_u = t_0 = \text{Id}_E$. $\square$

Notation Pour $u \in E$, et pour F sous-espace vectoriel de E , on note $t_u(F) = u + F := \{u + f \mid f \in F\}.$

Définition 2 : Sous-espace affine

Soient $u \in E$, F un sous-espace vectoriel de E .

Le **sous-espace affine de E passant par u et dirigé par F** est l'espace $\mathcal{F} := u + F$.

F est appelé la **direction** de $\mathcal{F}$

Vérifions la bonne définition de $\mathcal{F}$

Soit $u \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E . L'ensemble $u + F$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $u \in F$. En effet, sinon, $0_E \notin u + F$. Dans ce cas on a $u + F = F$.

De plus, si $v \in E$ et G un sous-espace vectoriel tels que $u + F = v + G$, alors pour tout $f \in F$, $u + f \in v + G$ donc il existe $g, h \in G$ tel que $u + f = v + g$ et $u = v + h$, donc, $f = (u + f) - u = (v + g) - (v + h) = g - h \in G$. Alors $F = G$ et $u - v \in F$.

On a donc montré la bonne définition et l'unicité de $\mathcal{F}$, quelque soit son représentant u .

⚠ ATTENTION Un sous-espace affine $\mathcal{F} = u + F$ est non vide puisqu'il contient le vecteur u . D'ailleurs, un singleton est un sous-espace affine dont la direction est le sous-espace trivial $\{0\}$.

Proposition 2

Si $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de E passant par $u \in E$ et dirigé par un sous-espace vectoriel F de E , alors pour tout $v \in \mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = v + F$.

Preuve. Soit $v \in \mathcal{F}$. Prouvons le résultat par double inclusion.

- Soit $x \in \mathcal{F}$. Alors il existe $f, g \in F$ tels que $x = u + f$ et $v = u + g$. D'où $x = u + f = v + (f - g) \in V + F$.
- Soit $y \in v + F$. Alors il existe $f, g \in F$ tels que $y = v + f$ et $v = u + g$. D'où $y = u + (g + f) \in \mathcal{F}$.

□

Définition 3 : Droite/plan affine

On appelle **droite affine** tout espace affine de direction de dimension 1.

On appelle **plan affine** tout espace affine de direction de dimension 2.

On appelle **hyperplan affine** tout espace affine dont la direction est un hyperplan vectoriel.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^3$, considérons l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 1\}$. C'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ dirigé par l'hyperplan vectoriel $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$ et passant par le point $(0, -1, 0)$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est donc un hyperplan affine de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 1\}$ est un hyperplan affine.

En effet, le polynôme 1 appartient à $\mathcal{H}$, et l'on constate que $P \in \mathcal{H} \iff P - 1 \in H$, où $H := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$, qui est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$:

$$P \mapsto P(\alpha).$$

Ainsi, $\mathcal{H}$ est l'hyperplan affine dirigé par H et passant par le point 1.

Proposition 3 : Intersection de sous-espaces affines

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E , de directions respectives F et G .

Si $F = G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Si $F \neq G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Preuve. Supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ soient tels que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Montrons, pour tout $u \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, la double inclusion entre $u + F \cap G$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

- Pour tout $x \in u + F \cap G$, $x \in u + F = \mathcal{F}$ et $x \in u + G = \mathcal{G}$ donc $x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
- Pour tout $x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $x = u + f = u + g$ d'où $f = g \in F \cap G$ et $x \in u + F \cap G$.

Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$. □

2 ÉQUATION LINÉAIRES

Proposition 4

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.

L'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ est non vide si et seulement si $b \in \text{Im } u$.

Si c'est le cas, c'est un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } u$.

Preuve. La définition de l'image de u donne la première affirmation. Supposons alors qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = b$, alors $u(x) = b$ si, et seulement si, $u(x - x_0) = 0_F$ soit $x - x_0 \in \text{Ker } u$. □

Exemple 3

Soient deux fonctions a et b continues sur un intervalle d'intérieur non vide I de $\mathbb{R}$, ainsi que l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$.

On sait, d'après le chapitre **ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES**, que l'équation (*) possède, au moins, une solution f_0 , et que f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque $f'_0 = b - af_0$ est continue, par continuité de a et b .

En utilisant l'application linéaire $u : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ la proposition précédente nous dit que

$$f \longmapsto (x \mapsto f'(x) + a(x)f(x))$$

l'ensemble des fonctions solutions est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, passant par f_0 et de direction $\text{Ker } u = S_0$, ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Comme le sous-espace vectoriel des solutions de l'équation homogène est engendré par une solution non nulle, l'ensemble des solutions de (*) est une droite affine.

Bien sûr on peut faire la même chose pour les équations différentielles du second ordre.

Cas général

Soit un système linéaire tel que ceux que l'on a déjà vu

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n, \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.

En utilisant l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{array} \right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{array} \right) \end{array}$$

la proposition précédente nous dit que, si le système est compatible, alors l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ passant par une solution particulière et dirigé par l'ensemble des solutions du système homogène associé.