

TD

Nombres complexes

EXERCICE 1

- ① Déterminer la forme algébrique de $\frac{2+i}{3+i}$, $\frac{(2+i)(1-4i)}{1+i}$.
- ② Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants, l'exprimer sous forme algébrique.

Ⓐ $(3-i)(-1+4i)$
Ⓑ $\frac{3i}{1+2i}$
Ⓒ $i(1+i)^3$
Ⓓ $\frac{1}{1+i} - \frac{5}{1-5i}$
- ③ Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants.

Ⓐ $z_0 = 1 - i$
Ⓑ $z_1 = -i$
Ⓒ $z_2 = -\sqrt{3} + i$
Ⓓ $z_3 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-i\pi}{5}}$
- ④ Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2+i}{1+2i} \quad z_2 = (1+i)^5 \quad z_3 = \frac{e^{-it}}{1+3i} \quad z_4 = \frac{1}{2-e^{it}}.$$

Déterminer le module de z_1, z_2, z_3 et z_4 .

► Indication ► Correction

EXERCICE 2

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants

$$z_1 = (2+2i)^6 \quad z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \quad z_3 = \frac{(1+i)^{2020}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 3

Soit z un complexe différent de 2. On pose $Z = \frac{iz}{z-2}$.

- ① Exprimer $\bar{Z}$ en fonction de $\bar{z}$.
- ② Trouver z tel que $Z = 2 + 3i$.

- ③ L'affirmation suivante est-elle vraie? " Z est imaginaire pur si et seulement si z est réel".

► Indication ► Correction

EXERCICE 4

Montrer que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, puis interpréter géométriquement cette égalité. ► Indication ► Correction

EXERCICE 5

- ① Simplifier $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ pour $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
- ② Simplifier $\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 6

Montrer que $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z-i| = |z+i|$. Interpréter géométriquement.

► Indication ► Correction

EXERCICE 7

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

- | | |
|---|---|
| ① $ z + 1 = z + 1 $ | ⑪ $z^2 - (9 - 2i)z + 26 = 0$ |
| ② $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0$ | ⑫ $2z + 6\bar{z} = 3 + 2i$ |
| ③ $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ | ⑬ $z^2 + (4 - 3i)z = 2 + 8i$ |
| ④ $z^3 = \bar{z}$ | ⑭ $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$ |
| ⑤ $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$ | ⑮ $z^2 + 5z + 7 - i = 0$ |
| ⑥ $2z + 3\bar{z} = 1$ | ⑯ $2z^2 + (8 - 5i)z + (4 - 13i) = 0$ |
| ⑦ $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$ | ⑰ $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$ |
| ⑧ $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ | ⑱ $(z^2 - 2z) \cos^2 \varphi + 1 = 0$, où $\varphi \in \mathbb{R}$ |
| ⑨ $z^2 - 2z + 1 = 0$ | ⑲ $\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)$ |
| ⑩ $\frac{z-i}{z+i} = \frac{z+2}{z-3i}$ | |

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx), \quad T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(kx).$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 9 ■ □ □

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $x, y \in \mathbb{C}$:

①
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2. \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i. \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} x + y = 3i \\ xy = -1 - 3i. \end{cases}$$

④
$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = a^2 \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{C}.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis en déduire une expression explicite de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ □ □

Montrer que $\left(\frac{z + |z|}{\sqrt{\operatorname{Re}(z) + |z|}}\right)^2 = 2z$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■ □ □

Soit z et z' deux complexes non nuls et de même module.Montrer que $\frac{(z + z')^2}{zz'}$ est un nombre réel positif. ► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \sin(x - y).$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □

① Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geq \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

② En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n |\sin k|$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ ■

Résoudre l'équation $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

① $e^z = 1 + i$ ② $e^z + e^{-z} = 1$ ③ $e^z = -5 - 12i$ ④ $e^z + 2e^{-z} = i$

► Indication

► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ □

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \text{① } (i + z)^n &= (i - z)^n. & \text{③ } (z - 1)^3 &= 8i. & \text{⑤ } z^n &= \bar{z} \\ \text{② } z^4 &= 4 + 4i. & \text{④ } z^n + 1 &= 0 & \text{⑥ } \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n &= 1. \end{aligned}$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □

Écrire sous la forme $a + bj$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ les quantités suivantes

$$\text{① } (1 + j)^7. \quad \text{② } \frac{j^9}{1 + j}. \quad \text{③ } \frac{(1 + j)(1 - j^2)}{1 - j}. \quad \text{④ } (1 - j + j^2)^4.$$

Simplifier le produit $(u + v)(u + jv)(u + j^2v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M dont l'afixe z vérifie la relation demandée :

① $\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

② $\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

③ $\arg(iz) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

④ $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

► Indication

► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □

À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :① les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont-ils alignés?③ les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ sont-ils situés sur un même cercle de centre O ?② les vecteurs d'affixes z et $\bar{z}$ sont-ils orthogonaux ?④ les vecteurs d'affixes z et z^5 sont-ils orthogonaux?

► Indication

► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ ■

À quelle condition nécessaire et suffisante sur z, z et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en z ?

► Indication

► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ □

On considère trois points A, B, C distincts du cercle de centre O et de rayon 1 d'affixe respectifs a, b, c .① Justifier qu'il existe $\theta_A, \theta_B, \theta_C \in \mathbb{R}$ tels que $a = e^{i\theta_A}, b = e^{i\theta_B}$ et $c = e^{i\theta_C}$.

② Montrer que

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{e^{i\frac{\theta_B+\theta_C}{2}} \sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta_A+\theta_C}{2}} \sin\left(\frac{\theta_A-\theta_C}{2}\right)}.$$

⑤ $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

⑥ $|z-i| = |z+i|$

⑦ $\frac{|z-3+i|}{|z+5-2i|} = 1$

⑧ $|(1+i)z-2i| = 2$

⑨ $|3+iz| = |3-iz|$

③ En déduire que

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\theta_B - \theta_A}{2}[\pi].$$

Interpréter géométriquement le résultat.

► Indication

► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ □

Soit ABC un triangle dont les points ont pour affixes a, b et c .① Montrer que l'orthocentre de ABC a pour affixe $a+b+c$.

② En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés.

Lorsque le triangle n'est pas équilatéral, la droite par laquelle passent ces trois points est appelée **droite d'Euler** du triangle, dont l'étude est un classique de la géométrie du triangle.

► Indication

► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ □

Soit A, B, C trois points d'affixes a, b, c , tous distincts.① Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a+jb+j^2c=0$, et un triangle équilatéral indirect si et seulement si $a+jc+j^2b=0$.② Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 25 ■ ■ ■

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe $e^{\frac{in\pi}{4}}$. On définit alors une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante: $M_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur (OA_{n+1}) .Déterminer l'affixe z_n du point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 26 ■ ■ □

① Soient $u, v \in \mathbb{U}$. Montrer que si $u+v=-1$, alors $\{u, v\} = \{j, \bar{j}\}$.② Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$.Que peut-on dire du triangle de sommets a, b et c si $a+b+c=0$?

[► Indication](#)[► Correction](#)EXERCICE 27 ■ ■ ■

Calculer en fonction de l'entier n les intégrales

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos^3 x \sin(3x) \, dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^4 x \, dx, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta \, d\theta.$$

[► Indication](#)[► Correction](#)

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

$$|Z|^2 = Z\bar{Z}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

Technique de l'angle moitié.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

On utilise les module avec le conjugué !

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

On peut passer à $z = a + ib$, quand nécessaire. Bien sûr, une fois que vous avez compris, ne faites pas tout...

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} \text{ est un binôme de Newton !}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

Ce sont des systèmes coefficients/racines, donc des équations de degré 2.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

Linéarisation classique en utilisant les formules de Moivre.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Calcul direct en passant le dénominateur dans le membre de droite.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

On pourra utiliser l'hypothèse du même module en remplaçant $z = re^{i\theta}$ et $z' = re^{i\theta'}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

On remplace par les formules d'Euler dans le membre de droite et on retrouve le membre de gauche.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Pas besoin des complexes pour ①.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Factorisations par e^{ix} et e^{iy} pas faciles à trouver. Faisables sans les complexes aussi. Poser $X = e^{ix}$ et $Y = e^{iy}$ peut aider.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

On utilise la définition de l'exponentielle complexe.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

L'idée est toujours de se ramener à $Z^n = re^{i\theta}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Du calcul, sans oublier les propriétés de j .

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20

Passer des propriétés géométriques aux propriétés algébriques des affixes, puis résoudre.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

Passer des propriétés géométriques aux propriétés algébriques des affixes, puis résoudre. on rappelle que les deux racines carrées de z sont opposées.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 24

Direct : l'angle BAC est positif.

On peut penser à traduire les points A , B et C sans perte de généralité, pour avoir des propriétés plus simples sur leurs affixes.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 25

On pourra commencer par trouver une formule pour le projeté orthogonal sur OA_n . Cela donnera une relation de récurrence pour z_n , que l'on peut résoudre, en posant une nouvelle suite bien choisie.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 26

Dans ②, multiplier par $\bar{a}$, nous ramène à la question 1.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 27

Linéariser. Seule difficulté pour J_n . Il faut passer aux complexes, et se rappeler des propriétés des racines de l'unité !

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1

$$\textcircled{1} \quad \frac{2+i}{3+i} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i, \quad \frac{(2+i)(1-4i)}{1+i} = -\frac{1}{2} - \frac{13}{2}i.$$

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{2.a} \quad (3-i)(-1+4i) = 1+13i. \quad \overline{(3-i)(-1+4i)} = 1-13i.$$

$$\textcircled{2.b} \quad \frac{3i}{1+2i} = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i. \quad \overline{\frac{3i}{1+2i}} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i.$$

$$\textcircled{2.c} \quad i(1+i)^3 = -2-2i. \quad \overline{i(1+i)^3} = -2+2i.$$

$$\textcircled{2.d} \quad \frac{1}{1+i} - \frac{5}{1-5i} = \frac{4}{13} - \frac{19}{13}i. \quad \overline{\left(\frac{1}{1+i} - \frac{5}{1-5i}\right)} = \frac{4}{13} + \frac{19}{13}i.$$

$$\textcircled{3} \quad \textcircled{3.a} \quad z_0 = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

$$\textcircled{3.b} \quad z_1 = -i = 1 \cdot e^{-i\pi/2}.$$

$$\textcircled{3.c} \quad z_2 = -\sqrt{3}+i = 2e^{i5\pi/6}.$$

$$\textcircled{3.d} \quad z_3 = e^{2i\pi/5} + e^{-i\pi/5} = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)e^{i\pi/10}.$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{aligned} \text{Re}(z_1) &= \frac{4}{5}, \quad |z_1| = 1. \\ \text{Re}(z_2) &= -4, \quad |z_2| = 4\sqrt{2} \\ \text{Re}(z_3) &= \frac{\cos t - 3\sin t}{10}, \quad |z_3| = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{1}{\sqrt{10}}. \\ \text{Re}(z_4) &= \frac{2-\cos t}{5-4\cos t}, \quad |z_4| = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos t}}. \end{aligned}$$

↪ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

↪ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

$$\textcircled{1} \quad \bar{Z} = \bar{i} \frac{\bar{z}}{\bar{z}-2} = -i \frac{\bar{z}}{\bar{z}-2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{aligned} \text{L'équation est équivalente à } & \quad iz = (2+3i)(z-2), \\ \text{puis à } & \quad iz - (2+3i)z = -2(2+3i) \iff z(i - (2+3i)) = -4-6i. \end{aligned}$$

$$\text{Or } i - (2+3i) = -2-2i = -2(1+i), \text{ donc } z = \frac{-4-6i}{-2-2i} = \frac{2+3i}{1+i}.$$

On obtient donc

$$z = \frac{(2+3i)(1-i)}{2} = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} \text{Vraie. Il suffit de faire une preuve par double implication.} \\ \text{Dans le sens indirecte, le cas } Z = i \text{ est impossible, car ne respecte pas l'équation.} \end{aligned}$$

↪ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

Il suffit de développer avec l'identité remarquable des complexes.

C'est l'identité du parallélogramme ! La somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

↪ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

$$\textcircled{1} \quad \text{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

↪ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

$$\begin{aligned} |z-i| = |z+i| & \iff \overline{(z-i)}(z-i) = \overline{(z+i)}(z+i) \iff |z|^2 + i(z-\bar{z}) + 1 = \\ & |z|^2 + i(-z+\bar{z}) + 1, \\ \text{ce qui donne finalement } & \quad z = \bar{z} \text{ et donc, ce qui est équivalent à } z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

↪ retour à l'EXERCICE 6

Correction de l'EXERCICE 7

① $z \in \mathbb{R}_+$.

② $z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})}$, avec $k = 0, 1, 2, 3$

③ $\left| z - \frac{1}{2}(1+i) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $z \neq i$.

④ $z^3 = \bar{z}$
 $z = 0$ ou $|z| = 1$ et $4 \arg z \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Autrement dit $z \in \{0, 1, i, -1, -i\}$.

⑤ $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$ $z = re^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $r \geq 0$. (Toute r réelle non négative.)

⑥ $2z + 3\bar{z} = 1$
 $z = \frac{1}{5}$

⑦ $z^2 + (5-2i)z + 5-5i = 0$
 $z = -2+i$ ou $z = -3+i$

⑧ $z^5 = -1, z \neq -1$.

⑨ $z = 1$

⑩ $z = \frac{-16+11i}{29}$.

⑪ $z = 6-4i$ ou $z = 3+2i$.

⑫ $z = \frac{3}{8} - \frac{i}{2}$

⑬

⑭

⑮

⑯

⑰

⑱

⑲ D'abord $z = 0$ et $z = 1$ sont solutions. Ensuite, pour z différent de ces 2 solutions, en passant au module, on obtient $|z| = 1$. Donc on remplace z par $e^{i\theta}$. On obtient alors une équation de degré 3 en $Z = e^{i\theta}$ soit $Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0$. On factorise, et on obtient $Z = 1, Z = \pm i$, ce qui nous donne les solutions $0, 1, \pm i$.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = \operatorname{Re} \left((1 + e^{ix})^n \right) = \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^n \cos \left(\frac{nx}{2} \right),$$

$$T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) = \operatorname{Im} \left((1 + e^{ix})^n \right) = \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^n \sin \left(\frac{nx}{2} \right),$$

$$U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)(x+\pi)}}{1 - e^{i(x+\pi)}} \right) = \frac{\sin \left(\frac{(n+1)(x+\pi)}{2} \right) \cos \left(\frac{n(x+\pi)}{2} \right)}{\cos \frac{x}{2}}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

① $\{x, y\} = \{1+i, 1-i\}$

② $\{x, y\} = \{1+3i, -1\}$

③ $\{x, y\} = \{3-2i, -2+3i\}$

④ $\{x, y\} = \left\{ \frac{a(1+i\sqrt{3})}{2}, \frac{a(1-i\sqrt{3})}{2} \right\}$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

On a $\cos(5x) = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$. En prenant $x = \frac{\pi}{5}$ (donc $\cos(5x) = \cos \pi = -1$) on obtient les valeurs

$$\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \cos^2 \left(\frac{\pi}{10} \right) = \frac{5+\sqrt{5}}{8}, \quad \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

$$(\operatorname{Re}(z) + |z|) \times 2z = 2z \times \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z} + |z|)\right) = z^2 + z\bar{z} + 2z|z| = (z + |z|)^2.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Correction de l'EXERCICE 22

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

Correction de l'EXERCICE 23

Voir cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Correction de l'EXERCICE 24

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25

Posons z_n l'affixe de M_n . Pour $k \geq 0$ notons A_k d'affixe $a_k = e^{ik\pi/4}$. Le projeté orthogonal de z sur la droite (OA_k) (direction $e^{ik\pi/4}$) s'écrit

$$\operatorname{Proj}_{OA_k}(z) = \operatorname{Re}\left(ze^{-ik\pi/4}\right)e^{ik\pi/4}$$

Donc la récurrence pour z_n est

$$z_{n+1} = \operatorname{Re}\left(z_ne^{-i(n+1)\pi/4}\right)e^{i(n+1)\pi/4}$$

Posons $u_n := z_ne^{-in\pi/4}$. Alors

$$u_{n+1} = z_{n+1}e^{-i(n+1)\pi/4} = \operatorname{Re}\left(z_ne^{-i(n+1)\pi/4}\right) = \operatorname{Re}\left(u_ne^{-i\pi/4}\right).$$

Avec $u_0 = z_0e^0 = 1$. On calcule

$$u_1 = \operatorname{Re} \left(e^{-i\pi/4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et dès que u_n est réel (ce qui est le cas pour $n \geq 1$), on a

$$u_{n+1} = u_n \cos \frac{\pi}{4} = u_n \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 2^{-n/2}$$

D'où

$$z_n = u_n e^{in\pi/4} = 2^{-n/2} e^{in\pi/4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier $|z_n| = 2^{-n/2}$ et $\arg(z_n) = \frac{n\pi}{4}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

- ① Soient $u, v \in \mathbb{U}$ tels que $u + v = -1$.

Posons $v = -1 - u$. Comme $|v| = 1$ on a

$$1 = |v|^2 = |-1 - u|^2 = (-1 - u)(-1 - \bar{u}) = 1 + u + \bar{u} + |u|^2 = 2 + 2\operatorname{Re}(u).$$

D'où $\operatorname{Re}(u) = -\frac{1}{2}$. Avec $|u| = 1$ cela impose $\operatorname{Im}(u) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$u = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \in \{j, \bar{j}\}.$$

Ainsi $\{u, v\} = \{j, \bar{j}\}$ (les deux valeurs s'échangent puisque $v = -1 - u$).

- ② Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$ et $a + b + c = 0$. Multiplions l'équation par $\bar{a}$

$$1 + \bar{a}b + \bar{a}c = 0 \implies \bar{a}b + \bar{a}c = -1.$$

Les deux nombres $\bar{a}b$ et $\bar{a}c$ sont de module 1, et leur somme vaut -1. D'après la question 1 on en déduit

$$\{\bar{a}b, \bar{a}c\} = \{j, \bar{j}\}$$

Donc, quitte à permuter b, c ,

$$\bar{a}b = j, \quad \bar{a}c = \bar{j},$$

d'où

$$b = aj, \quad c = a\bar{j}.$$

Conclusion : b et c s'obtiennent par rotation de a d'angles $\pm 2\pi/3$. Les points d'affixes a, b, c forment donc un triangle équilatéral (centré en 0, le centre du cercle unité).

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)