

Gabriel Barbosa Paganini
João Otávio Tanaka de Oliveira
Lucas Souza Vieira
Luís Felipe Biancardi Palharini
Patrick Sampaio dos Santos Brandão
Vinícius Bueno Bernardes

Fundamentos de propulsão sólida de foguetes

Universidade de São Paulo

Projeto Jupiter

São Paulo, Brasil

2020

Lista de ilustrações

Figura 1 – Curva de empuxo do motor Jiboia	3
Figura 2 – Relação entre a curva de empuxo e a geometria do grão	4
Figura 3 – Força de sustentação (do inglês, <i>lift</i>) em um aleta	4
Figura 4 – Simplificação da câmara de combustão.	6
Figura 5 – Bocal do Rocketdyne F-1.	9
Figura 6 – Desenho esquemático de um nozzle	11
Figura 7 – Relação ente proporção de áreas e M	14
Figura 8 – Variação de parâmetros do bocal em função da pressão neste	17
Figura 9 – Comportamento de bocais de diferentes estágios a diferentes pressões externas	21
Figura 10 – Gráfico da área de queima para um grão em formato estrela	22
Figura 11 – Gráfico experimental da taxa de queima de propelente KNDX	24
Figura 12 – Grão na configuração BATES com inibidor destacado	25
Figura 13 – Motor Keron	26
Figura 14 – Molde dos grãos	27
Figura 15 – Nitrato cristalizado no balde	28
Figura 16 – Utilização do macaco hidráulico para desmolde do grão	30
Figura 17 – Inibição de um grão	30
Figura 18 – Grãos nas barras roscadas para que a resina cure	31
Figura 19 – Grãos prontos para serem embarcados	31
Figura 20 – Regressão da superfície de queima	33
Figura 21 – Curvas de $r(P_0)$ para alguns valores de n	34
Figura 22 – Efeito da temperatura inicial na pressão de câmara	35
Figura 23 – Processo de transferência de calor que influencia a taxa de queima	36
Figura 24 – Influência da queima erosiva na pressão de câmara	37
Figura 25 – Representação esquemática de vista em corte do motor, com indicação das massas do sistema	39

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	FUNDAMENTOS DA MECÂNICA	2
2.1	Impulso Total	2
2.1.1	Impacto do propelente no impulso	3
2.1.2	Início da queima	4
2.2	Impulso Específico	5
2.3	Empuxo	6
2.4	Velocidade dos gases	6
2.5	Exercícios	7
3	NOZZLE	9
3.1	Definição e hipóteses de escoamento	9
3.2	Análise do Escoamento no Bocal	10
3.2.1	Relações Termodinâmicas Úteis	11
3.2.2	Análise da Área	13
3.2.3	Propriedades de estagnação	15
3.2.4	Velocidade de exaustão dos gases	15
3.2.5	Razão de pressão	16
3.2.6	Coeficiente de empuxo, velocidade efetiva de exaustão e velocidade característica	18
3.2.7	Bocais sub-expandidos e sobre-expandidos	19
4	PROPELENTE SÓLIDO	22
4.1	Comportamento do grão	22
4.1.1	Taxa de queima	23
4.1.2	Grãos BATES	25
4.2	Propelente KNSB	25
4.3	Fabricação do grão	26
4.3.1	Molde dos Grãos	26
4.3.2	Purificação do Nitrato	27
4.3.3	Fabricação do Grão	28
4.3.4	Desmolde e Inibição	29
4.3.5	Armazenamento	31
5	FUNCIONAMENTO DO MOTOR SÓLIDO	32
5.1	Panorama geral	32

5.2	Taxa de queima	32
5.2.1	Equacionamentos	32
5.2.2	Fatores que influenciam a taxa de queima	34
5.3	Pressão de câmara	38
5.3.1	Expressão geral	38
5.3.2	Expressão para regime permanente	43
	 REFERÊNCIAS	 44

1 Introdução

Esta apostila tem como objetivo introduzir membros novos a conceitos de **propulsão de foguetes**, assim como servir de guia para que membros antigos organizem aulas e passem conhecimento aos membros novos. Desta forma, esta apostila não será fonte de consulta com conteúdo muito específico, e sim um resumo de termos e conceitos fundamentais para discussões que ocorrem na área.

De antemão, podemos citar algumas características do motor como:

- **Tempo de queima:** é o tempo entre a ignição do motor e a queima de todo o propelente.
- **Massa total de propelente** [m_p]: Massa de propelente do foguete (combustível + oxidante) antes do lançamento.
- **Velocidade de exaustão das partículas** [c]: Velocidade em que as partículas de gases provenientes da combustão são expelidas. É medida em relação ao foguete.
- **Empuxo** [F]: Valor momentâneo da força do motor em um dado instante de tempo.
- **Empuxo máximo** [F_{max}]: Força máxima exercida pelo motor durante toda a queima (no gráfico $F \times t$, este valor é dado pelo pico da curva). O empuxo máximo é o valor fundamental para projetar a estrutura não somente do motor, mas também de todo o foguete.
- **Impulso total** [I_t]: Definido como a integral do empuxo no tempo. Pode ser interpretado como a energia total do motor disponível para acelerar o foguete.

Exemplo destes dados do motor Jiboia, produzido pela equipe.

```

1 Motor Details
2 Total Burning Time: 5.274 s
3 Total Propellant Mass: 1.335 kg
4 Propellant Exhaust Velocity: 1060.396 m/s
5 Average Thrust: 268.326 N
6 Maximum Thrust: 1068.36 N at 1.508 s after ignition.
7 Total Impulse: 1415.151 Ns

```

2 Fundamentos da mecânica

O funcionamento de um motor de foguete consiste, basicamente, em expelir gases a altas velocidades no sentido contrário ao que se deseja movimentar, de sorte que, pela **3º Lei de Newton**, o foguete sofrerá uma força contrária e de módulo equivalente.

2.1 Impulso Total

Uma das informações mais importantes de um motor, é a quantidade de empuxo ou impulso gerado pelo mesmo. A importância desta grandeza é refletida no método de classificação dos motores:

Classe	Impulso Total(N)
J	640.01–1,280
K	1,280.01–2,560
L	2,560.01–5,120
M	10,240.01–20,480

Todavia, como é que eu calculo esse tal **impulso total**?

$$I_t = \int_0^t F dt \quad (2.1)$$

O Impulso total é calculado como a somatória da **Força instantânea** que o motor gera, multiplicado pelo infinitesimal de tempo em que ocorre, durante todo o período de queima dele. Pode-se visualizar tal grandeza também como a área da curva de empuxo na Figura 1.

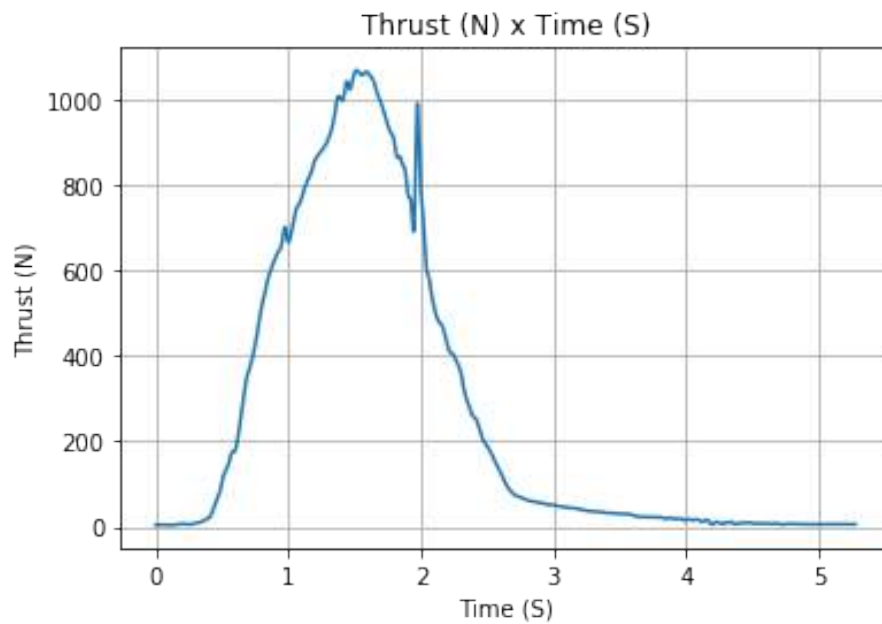


Figura 1 – Curva de empuxo do motor Jiboia

Curva de empuxo gerada pelo motor Jiboia, projetado e produzido pela equipe de propulsão do Projeto Jupiter.

De forma mais concreta, o impulso total pode ser calculado de duas formas:

- Somatória da Força Instantânea da força de cada segundo gerada pelo motor
- Área da curva de empuxo, ou integral da curva

2.1.1 Impacto do propelente no impulso

Existem alguns fatores relativos ao motor e propelente que podem impactar a queima e, conseqüentemente, alterar a curva de empuxo. Um destes fatores é a geometria do grão. Como pode ser visto na Figura 12, um grão que possua formato circular apresenta a curva de empuxo diferente de um grão com formato de estrela. Um dos fatores por trás de tal comportamento é que diferentes geometrias propiciam diferentes áreas de queim. Desta forma, a geometria afeta diretamente a taxa com que a câmara irá pressurizar. A pressurização de câmara será explicada posteriormente.

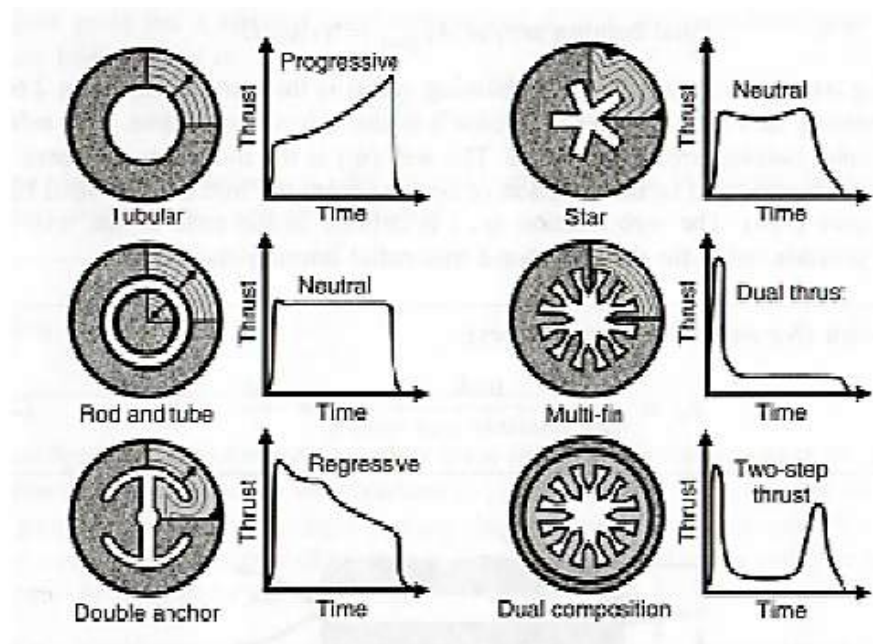


Figura 2 – Relação entre a curva de empuxo e a geometria do grão

Alguns outros fatores impactantes na queima são composição do propelente, separação entre os grãos, inibição de cada grão, e a ignição. É trabalho da equipe de propulsão manipular tais fatores para gerar uma curva de empuxo ideal para o projeto.

2.1.2 Início da queima

Quando projetamos um motor para um foguete, existem algumas exigências estruturais e aerodinâmicas que exigem certos comportamentos da curva de empuxo. O fator mais relevante dentro deste aspecto está relacionado com a **velocidade de saída de trilho**. Este termo, mais comumente usado na área de Aerodinâmica, é referente à velocidade com que o foguete deixa o trilho e começa a voar sem a orientação do mesmo. A partir deste ponto, a aerodinâmica do foguete é responsável por manter uma trajetória estável. As aletas de um foguete tem como função promover forças de sustentação a partir do escoamento do ar sob sua superfície, conforme demonstrado nas figuras 3

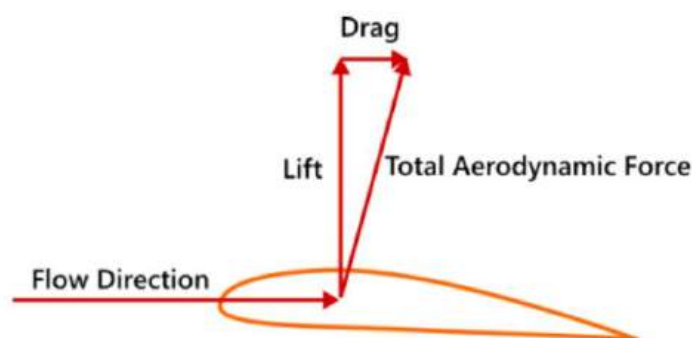


Figura 3 – Força de sustentação (do inglês, *lift*) em um aleta

Percebe-se que a força de sustentação está diretamente relacionada com a velocidade do escoamento (do inglês, *flow*). Como o ar tem velocidade absoluta nula (desconsideram-se os ventos), podemos assumir que a velocidade relativa entre o ar e o foguete é igual à velocidade absoluta do foguete. Portanto, para garantir o bom funcionamento das aletas, o sistema de propulsão deve garantir uma velocidade de saída de trilho suficientemente alta. Por isso, no Projeto Jupiter, a curva de empuxo do motor deve ter um pico de força próximo ao início da queima, o que garante uma aceleração alta e um início de voo estável para o foguete.

2.2 Impulso Específico

Se você já conversou com algum membro da Propulsão sobre o projeto do **motor híbrido**, provavelmente ele já deve ter falado que um dos motivos deste motor ser tão interessante é que ele possui maior eficiência que o motor sólido. Mas você já se questionou qual grandeza mede essa eficiência? Como é possível ele afirmar que esse motor é mais eficiente que o sólido?

Para isso introduziremos o conceito de **Impulso específico** (I_s), que na prática mede a eficiência do subsistema de propulsão num dado instante (tanto do mecanismo de queima como do propelente). Seu equacionamento é apresentado na eq. (2.2).

$$I_s = \frac{\int_0^t F dt}{g_0 \int_0^t \dot{m} dt} \quad (2.2)$$

Onde g_0 é o valor da aceleração da gravidade no nível do mar e o termo \dot{m} indica a vazão mássica (em kg/s) do propelente, i.e. sua derivada temporal, conforme a (eq. 2.3).

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (2.3)$$

Este equacionamento irá retornar o valor instantâneo do impulso específico. Todavia para parâmetro de projeto, i.e para comparar rendimento entre sistemas de propulsão, utiliza-se o **Impulso Específico médio**:

$$I_s = \frac{F}{g_0 \dot{m}} = \frac{I_t}{g_0 m_p} \quad (2.4)$$

Onde m_p é a massa de propelente queimada durante o voo, F é a força de empuxo (aqui considerada média) e \dot{m} é a vazão mássica (aqui considerada constante).

2.3 Empuxo

Até agora, falamos de maneira abstrata sobre a força instânea \vec{F} que o motor gera. Todavia, no projeto do motor, é muito importante o entendimento da maneira com que essa força é gerada e calculada. Para isso, serão importante algumas características da câmara de combustão.

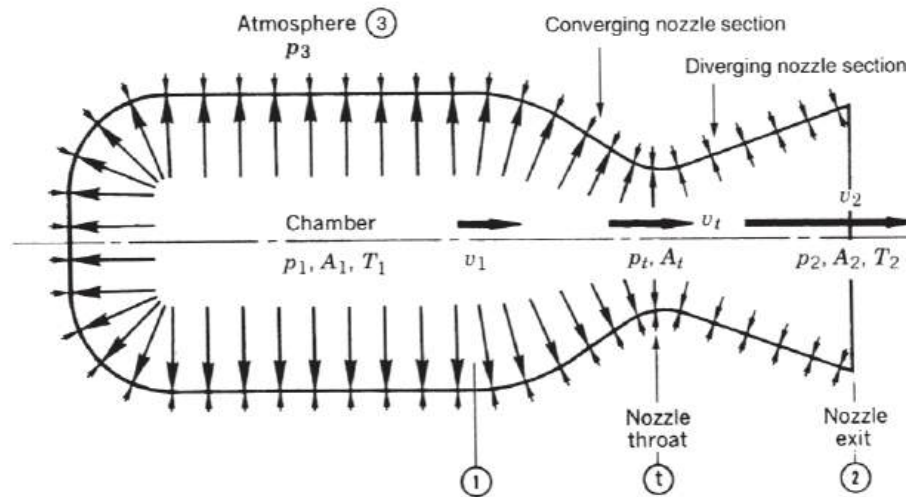


Figura 4 – Simplificação da câmara de combustão.

Os índices A_i, p_i, T_i, v_i , representam respectivamente, Área, pressão, temperatura e velocidade em locais específicos (1, 2, 3, t)

A Figura 4 é uma simplificação de uma câmara de combustão de um foguete. Uma das suas características importantes é a *simetria*. Esta simplificação permite assumir que a pressão interna é igualmente distribuída nas paredes da câmara. Desta forma, trabalharemos com a hipótese de **escoamento axial**, ou seja, as componentes que não são no sentido das setas grossas serão canceladas pelo critério de simetria.

Com isso, equacionaremos a força instantânea como:

$$F = \dot{m}v_2 + (p_2 - p_3)A_2 \quad (2.5)$$

A dedução da equação 2.5 advém de matérias mais avançadas da engenharia (Mecânica dos fluidos e Termodinâmica) e estará melhor descrita no Capítulo 3

2.4 Velocidade dos gases

Como visto no início do Capítulo 2, o que faz o foguete se mover é a ejeção de gases a altíssimas velocidades pelo **nozzle**. Portanto, um parâmetro importante será

a velocidade com que esses gases serão ejetados. Esta é denominada **velocidade de exaustão** (denotada na Figura 4 como v_2).

É razoável assumir que diferenças de pressão no interior da câmara provocam variações na velocidade de exaustão (verificar na equação 2.5 que a pressão na saída do nozzle p_2 é importante para o cálculo do empuxo instantâneo F). Assim, adota-se também o conceito de **velocidade efetiva de exaustão**, denotada como c :

$$c = I_s g_0 = \frac{F}{\dot{m}} \quad (2.6)$$

$$c = v_2 + \frac{(p_2 - p_3)A_2}{\dot{m}} \quad (2.7)$$

A variável c pode ser interpretada como a velocidade das partículas que acabaram de ser expelidas pelo foguete. Em design, consideramos $p_3 = p_2$, conseqüentemente $c = v_2$, visto que o nozzle é projetado para tal equivalência de pressão.

Por fim, a última propriedade importante relacionada à velocidade é c^* , chamada de *velocidade característica* ("cê estrela"), cuja definição é:

$$c^* = \frac{p_1 A_t}{\dot{m}} \quad (2.8)$$

Esta propriedade é importante para determinar a eficiência da queima e do propelente.

2.5 Exercícios

Ambos os exercícios foram traduzidos de *Rocket Propulsion Elements* - Oscar Biblarz e George Paul Sutton.

P. 33 Example 2-1, adaptado.

Um foguete apresenta as seguintes características:

- Massa inicial: 200 kg
- Massa após a operação do foguete: 130 kg
- Payload e estruturas não propulsivas: 110 kg
- Duração da operação do foguete: 3.0 s
- Impulso específico médio do propelente: 240 s

Determine a velocidade de exaustão efetiva e o impulso total. Além disso, a carga paga apresenta aparelhos eletrônicos sensíveis, cujo limite máximo de aceleração é 35g. Isso é excedido durante o voo? Assuma empuxo constante e tempos nulos de ignição e parada do motor e aceleração da gravidade $g = 9,81\text{m/s.s}$

P. 37 Example 2-2, adaptado.

As seguintes medidas foram feitas a nível do mar, para um motor de teste de propelente sólido:

- Tempo de queima: 40 s
- Massa inicial do sistema de propulsão: 1210 kg
- Massa do motor após o teste: 215 kg
- Empuxo a nível do mar: 62250 N
- Pressão de câmara: 7,00 MPa
- Pressão na saída do bocal: 70,0 kPa
- Diâmetro na garganta do bocal: 8,55 cm
- Diâmetro na saída do bocal: 27,03 cm

Determine a vazão mássica, a velocidade exaustão na saída do nozzle, a velocidade característica e a velocidade efetiva de exaustão. Além disso, **determine** o *empuxo de pressão* e o impulso específico a nível do mar, 1000 m e 25000 m de altitude. Assuma empuxo constante e tempos nulos de ignição e para do motor.

Note que: *empuxo de pressão* é o segundo termo da equação 2.5.

A pressão atmosférica a nível do mar é 101,32 kPa, a 1000 m é 89,88 kPa e a 25000m 2,55 kPa.

Assuma a aceleração da gravidade igual a 9,81 m/s.s

Item Extra: Descubra a altura de operação para qual esse motor foi projetado.

3 Nozzle

3.1 Definição e hipóteses de escoamento

O nozzle, que em português é traduzido como bocal ou tubeira, é uma das principais partes de um motor. Ao mesmo tempo que é muito simples (basicamente um canal entre a câmara de combustão e a atmosfera) carrega uma larga teoria e um complexo projeto de engenharia. Sua função é canalizar e acelerar os produtos da combustão produzidos pela queima do propelente, de modo a maximizar a velocidade de exaustão a velocidades super sônicas. O bocal mais comum, conhecido como convergente-divergente, ou bocal de *de Laval*, consegue isso por geometria simples, basicamente com a variação do diâmetro da secção transversal do nozzle.

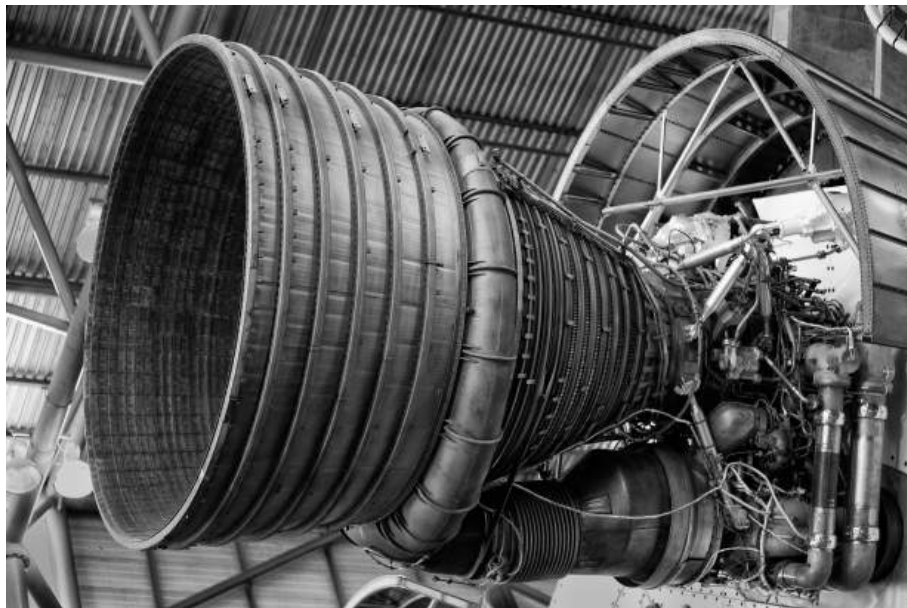


Figura 5 – Bocal do Rocketdyne F-1.

Para a análise do bocal do foguete, assumiremos algumas hipóteses de foguete ideal (SUTTON; BIBLARZ, 2010).

Hipóteses:

1. Nossa substância de trabalho (ou os produtos da reação de combustão do propelente) é *homogênea*, isto é, sua composição é uniforme.
2. Vamos considerar que as massas das fases sólida e líquida são desprezíveis face à massa total. Em outras palavras, vamos considerar a fase gasosa da substância.
3. A substância de trabalho pode ser modelada como um *gás perfeito*.

4. Consideraremos a capacidade calorífica da estrutura do foguete desprezível, isto é, não há transferência de calor através das paredes internas. Este escoamento é denominado *adiabático*.

5. Não há atrito considerável nas paredes internas do foguete, de modo que os efeitos da *camada limite* são desprezados.

6. Não há ondas de choque ou discontinuidades no fluxo pelo nozzle.

7. O escoamento do propelente é *permanente e constante*. Em geral, os parâmetros de um escoamento dependem do tempo e das coordenadas espaciais e, dessa forma, podem sofrer mudanças temporais (*efeitos transitórios*) e espaciais (*efeitos convectivos*). Os parâmetros do escoamento (velocidade, temperatura, pressão, etc.) não variam com o tempo quando esse é permanente e então os efeitos transitórios são nulos. Note que estes parâmetros ainda podem variar de ponto para ponto no espaço quando há gradiente no campo de escoamento (efeitos convectivos não nulos).

8. Os gases de exaustão saindo pelo nozzle possuem direção axial paralela ao eixo do mesmo.

9. Os parâmetros velocidade, pressão, temperatura e massa específica são uniformes ao longo de qualquer seção transversal perpendicular ao eixo do nozzle.

10. O equilíbrio químico estabelecido na câmara de combustão e a composição do gás não mudam no bocal.

11. Propelentes comuns estão a temperatura ambiente e propelentes criogênicos estão em sua temperatura de ebulição.

3.2 Análise do Escoamento no Bocal

Como já citado, o objetivo do nozzle, de maneira simplificada, é converter o calor dos gases em velocidade da maneira mais eficiente possível. Isso é atingido através de um design de bocal que tem como objetivo a obtenção de um *escoamento isentrópico*. Neste escoamento, suas características são dependentes apenas da área da seção transversal. Para isso é necessário que as hipóteses 4, 5 e 6 sejam verdadeiras. Logo, é possível mudar as propriedades do escoamento, tais como velocidade, densidade, pressão e temperatura, apenas pela mudança da seção transversal do nozzle.

As seções transversais de interesse de um bocal são as seguintes:

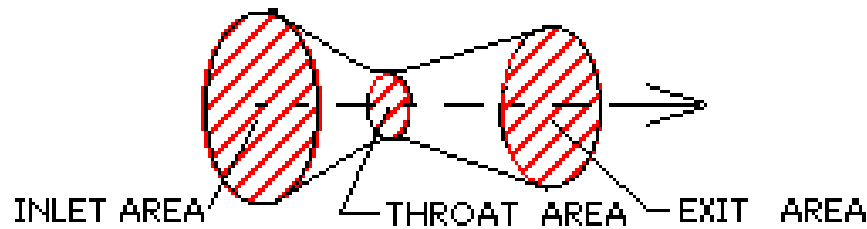


Figura 6 – Desenho esquemático de um nozzle

Na Figura 6, *inlet area* é por onde os gases entram da câmara de combustão (índice 1); a *throat area* é a chamada garganta do nozzle, região de menor diâmetro do nozzle (índice t); e a *exit area* (índice 2) é por onde os gases saem do motor para a atmosfera (índice 3).

3.2.1 Relações Termodinâmicas Úteis

A análise do escoamento no bocal envolve quatro equações relacionadas à termodinâmica e à mecânica dos fluidos, que serão mostradas no tempo oportuno. As equações são indicadas de eq. (3.6) a (3.12). Os subscritos x e y indicam seções transversais diferentes no bocal. O subscrito 0 indica que a propriedade está relacionada ao estado de *estagnação*, i.e. estado que supõe velocidade nula do fluido (desacelerado isentropicamente).

Vale ainda mencionar que, em Termodinâmica, é frequente o uso de grandezas intensivas, ou seja, que dependem da massa. Propriedades extensivas são as que estamos acostumados a usar, independentes de massa: volume (\forall), energia interna (U), entalpia (H), energia (E), entropia (S), entre outros. As recíprocas intensivas das propriedades apresentadas correspondem a seus "valores extensivos"divididos pela massa do volume analisado, e serão denominadas conforme seu "nome extensivo"acompanhado da palavra "específico(a)". Como exemplo, tomemos o volume específico, definida como $v = \frac{\forall}{m}$. Repare que o volume específico é o inverso da densidade.

1. Energia

Aplicando a primeira lei Termodinâmica para o volume de controle do bocal, podemos fazer um balanço das propriedades energéticas do escoamento. Assumindo as hipóteses já discutidas, concluímos que a soma dos termos de energia cinética e entalpia a cada seção transversal do bocal assume valor constante, conforme a eq. (3.1).

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = cte \quad (3.1)$$

A eq. (3.1) nos permite uma reflexão interessante. A diminuição da entalpia tem como resultado o aumento da energia cinética. Em outras palavras, o calor oriundo da combustão é utilizado para a aceleração dos gases expelidos pelo bocal. Considerando nosso modelo isentrópico, esse processo pode ser considerado como reversível. Tendo

em vista essa reversibilidade, reflita sobre o efeito de qualquer tipo de obstrução para o escoamento do bocal, cujo resultado imediato seria uma drástica redução na velocidade do escoamento.

Definimos entalpia como a soma da energia interna e o produto entre pressão e volume de um dado sistema, conforme a eq (3.2). Dividindo pela massa em (3.3), temos a mesma relação para as propriedades específicas.

$$H = U + pV \quad (3.2)$$

$$h = u + pv \quad (3.3)$$

Para gases, definimos os calores específicos a volume constante (c_v) e a pressão constante (c_p). Esses parâmetros serão considerados aproximadamente constantes para os produtos da combustão de cada tipo de propelente, e são equacionados conforme (3.4) e (3.5). Para um gás ideal, vale que $c_p - c_v = R$.

$$c_p = \left[\frac{\partial h}{\partial T} \right]_p \approx \frac{\Delta h}{\Delta T} \quad (3.4)$$

$$c_v = \left[\frac{\partial u}{\partial T} \right]_v \approx \frac{\Delta u}{\Delta T} \quad (3.5)$$

Finalmente podemos utilizar as equações (3.1) e (3.4) para escrever (3.6).

$$h_x - h_y = \frac{1}{2}(V_y^2 - V_x^2) = c_p(T_x - T_y) \quad (3.6)$$

É com essa última equação que podemos relacionar entalpia, velocidade e temperatura do escoamento no bocal para diferentes seções transversais x e y .

2. Continuidade

A equação da continuidade permite-nos analisar a vazão mássica (kg/s) em diferentes seções. Usando a hipóteses de regime uniforme, podemos demonstrar que valem as equações (3.7) e (3.8).

$$\dot{m}_x = \dot{m}_y = \dot{m} \quad (3.7)$$

$$\dot{m} = \frac{V_x A_x}{v_x} = \rho_x V_x A_x \quad (3.8)$$

Veja que o resultado é razoavelmente intuitivo: a taxa com que entra massa em uma seção x no tempo, por continuidade, é igual à mesma taxa para qualquer outra seção y .

3. escoamento isentrópico

O modelo de escoamento isentrópico nos permite relacionar P , v e T algebricamente. Antes, definimos a razão entre calores específicos k (você pode encontrar γ por aí também) conforme a eq. (3.9). Definida a grandeza k , equacionamos as relações para escoamento isentrópico em (3.10).

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.9)$$

$$\frac{T_x}{T_y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{v_y}{v_x}\right)^{k-1} \quad (3.10)$$

Para escoamento isentrópico, demonstra-se ainda, pela segunda lei da Termodinâmica, que:

$$pv^k = cte \quad (3.11)$$

4. Equação de estado (gás ideal)

A equação de estado para gás ideal é uma velha conhecida do ensino médio. Dado o modelo de gás ideal adotado, a equação será válida para cada seção transversal, conforme a eq. (3.12). Repare que o termo v_x na equação é o **volume específico** e que R é definido de acordo com (3.13), onde \bar{R} é a constante universal dos gases e M_M é a massa molecular média dos produtos de combustão. Para gás ideal, vale ainda a relação entre c_p e c_v indicada em (3.13).

$$p_x v_x = RT_x \quad (3.12)$$

$$R = \frac{\bar{R}}{M_M} = c_p - c_v \quad (3.13)$$

3.2.2 Análise da Área

A geometria convergente-divergente do bocal (*de Laval nozzle*) é projetada para aproveitar ao máximo a aceleração dos gases. Como já vimos, a energia de entalpia no bocal vai se transformando em energia cinética de exaustão dos gases. Conforme será apresentado algebricamente e graficamente nesta seção, o escoamento apresenta velocidade crescente, sendo subsônico nas seções convergentes, sônico na garganta, e super-sônico na região divergente. Note que, no regime sub-sônico, a velocidade aumenta conforme a redução de diâmetro, mas no regime super-sônico o contrário acontece.

A velocidade do som de um dado fluido pode ser calculada utilizando as propriedades do próprio fluido. Assim, o número de Mach pode ser calculada pela equação pela razão

entre a velocidade de escoamento do fluido v e a velocidade sônica a , conforme a equação 3.14.

$$M = \frac{v}{a} = \frac{v}{\sqrt{kRT}} \quad (3.14)$$

Nesta seção, teremos como foco a região da garganta (do inglês, *throat*), local onde o regime de escoamento passa de sub-sônico para super-sônico. A área da garganta A_t deve ser calculada utilizando a 2ª lei da Termodinâmica (equação 3.11) e as propriedades dos gases de combustão, sendo elas o expoente isentrópico k (equação 3.9) e a velocidade do som local a (equação 3.14). Por fim, tem-se como resultado a relação exposta pela equação 3.15 e pelo gráfico da figura 7

$$\frac{A}{A_t} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.15)$$

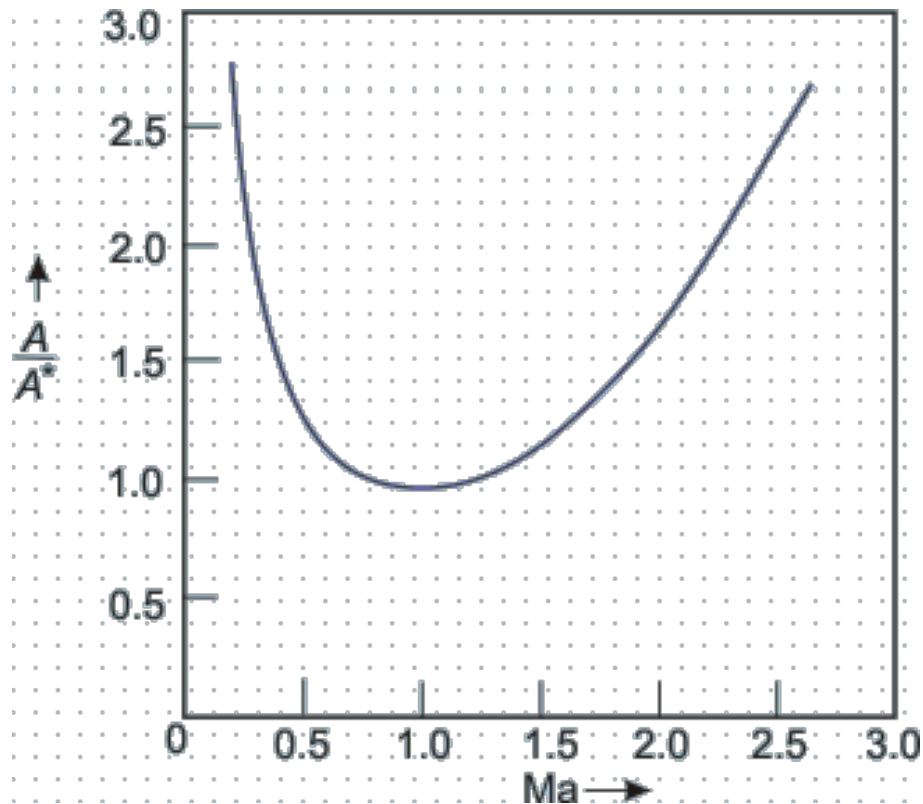


Figura 7 – Relação entre proporção de áreas e M

Na curva da Figura 7, nota-se que além de $M = 1$, só é possível obter velocidades maiores com aumento de diâmetro da seção transversal. Para a análise de duas seções transversais quaisquer, podemos usar a eq. (3.16). Note que, para $A_x = A_t$, teremos

$M_x = 1.0$ e a equação torna-se idêntica a eq. (3.15).

$$\frac{A_y}{A_x} = \frac{M_x}{M_y} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.16)$$

3.2.3 Propriedades de estagnação

Propriedades de estagnação são obtidas quando zeramos (isentropicamente) o termo de energia cinética do escoamento. Esses valores das propriedades são interessantes pois, na entrada do nozzle, a velocidade do escoamento é consideravelmente menor do que a velocidade super-sônica em sua saída. Neste caso, dada uma propriedade genérica f do escoamento, podemos fazer a aproximação de que $f_0 \approx f_1$, i.e. a propriedade no estado de estagnação é aproximadamente igual à mesma propriedade na câmara.

Vamos apresentar as equações sem nos preocuparmos com as deduções, que podem ser conferidas em (SUTTON; BIBLARZ, 2010). Observe as similaridades das equações apresentadas com as relações P , v , T para escoamento isentrópico. Verifique que, assim como para a razão de áreas (*area ratio*), poderíamos traçar as curvas das razões de P , v e T para diferentes números de Mach.

- Temperatura de estagnação

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (3.17)$$

- Pressão de estagnação

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.18)$$

- Volume específico de estagnação

$$\frac{v}{v_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (3.19)$$

3.2.4 Velocidade de exaustão dos gases

Apresentados os equacionamentos anteriores, podemos calcular a velocidade de exaustão dos gases na saída do nozzle v_2 (não confunda com a velocidade efetiva c). Da equação da energia:

$$V_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2) + v_1^2} \quad (3.20)$$

Utilizando os equacionamentos obtidos das considerações de escoamento isentrópico, pode-se demonstrar que:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} + V_1^2 \quad (3.21)$$

Como a velocidade na entrada do bocal é consideravelmente menor que a velocidade de exaustão na saída, podemos desprezar o termo V_1 e considerá-lo próximo da velocidade de estagnação, i.e. nula. Adotando o estado na entrada como aproximadamente igual ao estado de estagnação, temos $T_0 \approx T_1$, e podemos escrever a equação simplificada:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (3.22)$$

3.2.5 Razão de pressão

Definimos razão de pressão (*pressure ratio*) como a relação entre as pressões de uma seção qualquer com a pressão de câmara (em nosso modelo, aproximada pela pressão de estagnação) $\frac{p_x}{p_1}$. Na garganta, temos a razão de pressão crítica $\frac{p_t}{p_1}$. A razão de pressão é interessante pois nos permite reescrever algumas das equações apresentadas até o momento como funções dessa relação.

Essa mudança de variáveis nos equacionamentos pode auxiliar no entendimento de como se comportam as grandezas ao longo das seções do bocal. É muito interessante fornecer essa intuição qualitativa de como "funcionam" as variações dos parâmetros que nos interessam. Seguem as equações (3.23) e (3.24).

$$\frac{A_t}{A_x} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (3.23)$$

$$\frac{V_x}{V_t} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (3.24)$$

Sabemos que o escoamento perde pressão conforme atravessa as seções transversais do bocal. Podemos constatar esse fato tendo em vista a diminuição da entalpia ao longo da direção do escoamento (lembre-se: $h = u + pv$) ou analisando a equação 3.18. Isso significa que a razão de pressão tende a diminuir quando seguimos em direção à saída do bocal.

Apresentadas as equações e adquiridas as noções intuitivas do comportamento dos parâmetros no bocal, podemos *plottar* a relação de algumas grandezas interessantes *versus* pressão no bocal. Essas relações são apresentadas na Figura 8.

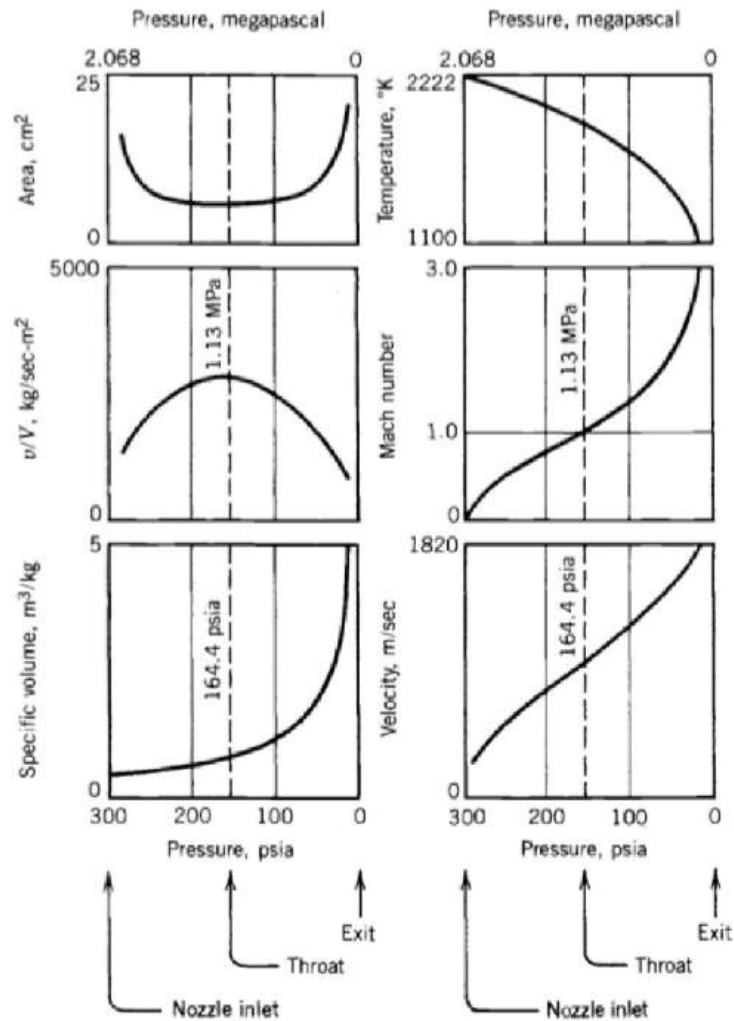


Figura 8 – Variação de parâmetros do bocal em função da pressão neste

Fonte: (SUTTON; BIBLARZ, 2010)

EXERCÍCIO: Demonstre que as seguintes relações termodinâmicas na gargantas dependem apenas das propriedades de estagnação e da razão entre calores específicos k .
Dica: Utilize as equações 3.17 a 3.19 e utilize o número de Mach compatível com a garganta. Essas relações são importantes e servem para demonstrar as equações apresentadas nessas seção. **Dado:** $T_0 \approx T_1$

- p_t/p_1
- v_t/v_1
- T_t/T_1

3.2.6 Coeficiente de empuxo, velocidade efetiva de exaustão e velocidade característica

O objetivo dessa seção é introduzir o conceito de coeficiente de empuxo e relacioná-lo com as já apresentadas velocidades efetiva de exaustão e característica. Recorde-se da expressão para o empuxo da eq. (2.5), reescrita a seguir:

$$F = \dot{m}V_2 + (p_2 - p_3)A_2 \quad (3.25)$$

Lembrando da equação da continuidade, a vazão mássica é constante para qualquer seção transversal do bocal. Neste caso, podemos escolher convenientemente as relações de \dot{m} na garganta, apresentadas na eq. (3.26), para reescrever a expressão da força de empuxo. Fazemos isso na eq. (3.27).

$$\dot{m} = \frac{A_t V_t}{v_t} \quad (3.26)$$

$$F = \frac{A_t V_t}{v_t} V_2 + (p_2 - p_3)A_2 \quad (3.27)$$

Aproveitando as relações das propriedades termodinâmicas no bocal, pode-se demonstrar que:

$$F = A_t p_1 \sqrt{\frac{2k^2}{k-1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} + (p_2 - p_3)A_2 \quad (3.28)$$

Define-se o adimensional coeficiente de empuxo (C_f) como a razão entre a força de empuxo e produto da pressão na entrada do nozzle e a área na garganta. Indicamos sua expressão nas eqs. (3.29) e (3.30).

$$C_f = \frac{F}{p_1 A_t} \Leftrightarrow F = C_f A_1 p_1 \quad (3.29)$$

$$C_f = \sqrt{\frac{2k^2}{k-1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} + \frac{p_2 - p_3}{p_1} \frac{A_2}{A_t} \quad (3.30)$$

Como dissemos no início da seção, o coeficiente de empuxo C_f guarda algumas relações com c e c^* . Lembre-se que $c = I_s g_0$ e $c^* = p_1 A_t / \dot{m}$. Dividindo a segunda igualdade da eq. (3.29) por \dot{m} , obtemos:

$$I_s g_0 = C_f c^* \quad (3.31)$$

$$c^* = \frac{c}{C_f} \quad (3.32)$$

Substituindo as expressões de c e C_f com as suas expressões advindas das considerações de escoamento isentrópico apresentadas anteriormente, demonstra-se que:

$$c^* = \frac{\sqrt{kRT_1}}{k\sqrt{[2/(k+1)]^{(k+1)/(k-1)}}} \quad (3.33)$$

Repare que, na dedução das expressões obtidas de C_f e c^* nas eqs. (3.30) e (3.33), utilizamos fortemente as hipóteses e aproximações de escoamento isentrópico, propriedades na entrada próximas da estagnação, k constante, entre outras já mencionadas. Nosso modelo se adequa de modo relativamente satisfatório com a realidade, mas é evidente que não é 100% preciso. Haverá um rendimento associado a essas grandezas.

Vale ainda mencionar que as equações apresentadas são válidas considerando que o nozzle está totalmente preenchido pelo escoamento, i.e. não há separação deste com as paredes do bocal. O C_f também é útil para avaliar a condição de sub-expansão ou sobre-expansão, discutidos na próxima sessão.

3.2.7 Bocais sub-expandidos e sobre-expandidos

Conforme já dito anteriormente, o projeto ideal de um nozzle deve ter a relação $p_2 = p_3$ entre pressões na saída do nozzle (p_2) e atmosférica (p_3). Entretanto, durante o vôo, a mudança de altitude acompanha uma mudança da pressão atmosférica. Assim, na maior parte do vôo, o nozzle será submetido à situações não ideais. Nesta seção, analisaremos quais os efeitos da mudança da pressão externa e como projetar o nozzle de acordo com esta peculiaridade.

Basicamente, existem três situações possíveis: $p_2 < p_3$, $p_2 = p_3$ e $p_2 > p_3$. No primeiro caso, quando a pressão externa é superior à de saída, tem-se um

- $p_2 > p_3$: Bocal sub-expandido, que libera os produtos de combustão a uma pressão de saída (p_2) superior à pressão externa (p_3), uma vez que a área de saída (A_2) é muito pequena para uma razão de áreas ideal. Neste caso, a expansão dos gases no nozzle é incompleta e haverá expansão após a saída do bocal.
- $p_2 = p_3$: Bocal com expansão ideal que libera os produtos de combustão a uma pressão de saída (p_2) igual à pressão externa (p_3) pois a área de saída (A_2) é ideal.
- $p_2 < p_3$: Bocal super-expandido que libera os produtos de combustão a um pressão de saída (p_2) inferior à pressão atmosférica (p_3), já que tem uma área de saída (A_2)

muito grande para o escoamento ser ótimo. Logo, a pluma será menor que o diâmetro de saída do bocal.

Quando um bocal apresenta comportamento não ideal, há formação de ondas de compressão e ondas de choque no interior da seção divergente do bocal, que são presentes apenas em escoamentos supersônicos. As condições possíveis de escoamento não ideal em bocais supersônicos são as seguintes:

1. Quando a pressão externa p_3 é menor que a pressão de saída no nozzle p_2 , os gases fluirão por toda a seção transversal do bocal, mas haverá ondas de expansão na saída. Logo, a expansão dos gases no interior do nozzle é incompleta e os valores de C_f e I_s serão menores que na expansão ótima.
2. Para pressões externas p_3 levemente maiores que a pressão de saída do nozzle p_2 , ainda haverá escoamento completo pela seção transversal do bocal. Isso ocorre até que p_2 atinja um valor entre 10 e 40% de p_3 . Essa expansão é ligeiramente ineficiente e haverá ondas de choque fora da saída do nozzle.
3. Para pressões externas mais altas, separação do escoamento ocorrerá dentro da porção divergente do bocal. O diâmetro da pluma supersônica será menor que o diâmetro de saída do bocal. Com fluxo constante, a separação é axialmente simétrica. O ponto de separação do escoamento é cada vez mais próximo da garganta quanto maior for a diferença $p_2 - p_3$. No centro da seção transversal após o descolamento do fluxo, o escoamento permanece supersônico, mas é rodeado por um anel de escoamento subsônico. Há uma redução considerável de empuxo e ondas de choque existem no interior da pluma no exterior do nozzle.
4. Em nozzles cuja pressão da garganta é menor que a pressão crítica (razão de pressão inferior à de pressão crítica, conforme descrita na equação 3.18), o escoamento não atinge o regime super-sônico, mas sim se mantém sub-sônico. Neste caso, a expansão do cone divergente não resulta em aumento de velocidade dos gases e nem em queda de pressão. É natural que este caso ocorra no início e fim da queima (quando a pressão de câmara é baixa).

Para vôos longos e foguetes com diversos estágios, é ideal ter nozzles projetados para as altitudes em que atuarão. Assim, conforme demonstrado na Figura 9, cada estágio deve ter um nozzle próprio. Na mesma figura, nota-se a diferença de comportamento do mesmo nozzle à pressões diferentes (de atuação e de teste). Percebe-se que, para estágios de altitudes elevadas, devemos ter um nozzle sobre-expandido em situação a nível do mar.

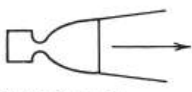

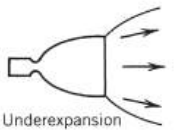

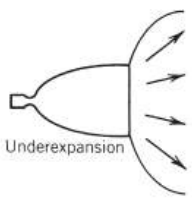

Stage	A_2/A_t	During flight		During sea level static tests	
		h (km)	I_s (sec)	h (km)	I_s (sec)
Booster or first stage	6	0	267	0	267
					
		Nozzle flows full, slight underexpansion		Nozzle flows full	
Second stage	10	24	312	0	254
					
		Underexpansion		Overexpansion, slight contraction	
Third stage	40	100	334	0	245
					
		Underexpansion		Flow separation caused by overexpansion	

Figura 9 – Comportamento de bocais de diferentes estágios a diferentes pressões externas

Fonte: (SUTTON; BIBLARZ, 2010)

4 Propelente sólido

Em foguetemodeslimo, diversos tipos de combustíveis já foram testados ao longo da história, principalmente combustíveis sólidos. Industrialmente, não veremos combustíveis utilizados aqui no Jupiter como padrão, pois o nosso combustível sólido é **ineficiente**. Todavia, ele também é muito seguro, o que é essencial a um grupo de extensão de faculdade, onde não há profissionais lidando com procedimentos que podem ser perigosos.

Desta forma, podemos elencar alguns critérios para a escolha de um propelente:

- **Fabricação:** Antes de tudo, o propelente escolhido deve ser passível de ser fabricado por nossos membros nas diversas situações em que nos encontramos (tanto na oficina quanto no deserto, caso preciso) e com materiais e ferramentas à nossa disposição.
- **Toxicidade/Segurança:** Para termos permissão de operar na USP e em competições, temos que comprovar que a nossa operação é segura¹. Dessa forma, o nosso propelente não pode ter em sua composição componentes tóxicos (descrito por regras da competição), além de que precisamos conseguir lidar com a sua inflamabilidade.
- **Custo:** Fator mais intuitivo, dado os diversos lançamentos e testes estáticos programados para o ano, a área tem que ser capaz de pagar pelo propelente sem consumir a maioria do seu orçamento, assim o custo é um fator crítico para a escolha.

4.1 Comportamento do grão

A primeira coisa a se considerar para analisar o comportamento do grão durante o processo de queima é a **geometria** do grão. Por trás desse conceito tem-se que as diferentes geometrias de grãos geram diferentes áreas de queima, as quais são responsáveis pelo comportamento diferente de empuxo.

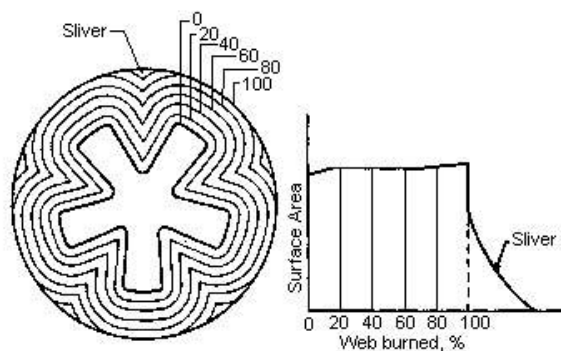


Figura 10 – Gráfico da área de queima para um grão em formato estrela

¹ Para mais detalhes procure um membro da Comissão de Segurança do Projeto Jupiter

Durante a escolha da geometria, é importante levar em consideração a própria fabricação dos grãos. Grãos de geometria interna circular são relativamente fáceis de serem confeccionados, enquanto um grão com geometria similar à exposta na figura 10 apresenta maiores desafios na fabricação e pode resultar em assimetria ou assimilaridades entre grãos, não garantindo a replicabilidade do método. Além do processo de confecção, a geometria influencia não apenas na curva de empuxo que será gerada, mas também na complexidade da sua progressão durante a queima. Uma geometria não circular pode ser mais complexa de ser simulada, visto que a superfície de queima tem sua geometria variando com o decorrer da queima. Conforme aumentamos a área de queima, mais "massa" está sendo queimada. Podemos equacionar este comportamento como:

$$\dot{m} = A_b \rho_b r \quad (4.1)$$

Onde:

- A_b é a área instantânea de queima
- ρ_b : Densidade do grão utilizado
- r : taxa de queima do propelente (mm/s) - usa-se também a notação B_r

A propriedade r , chamada de taxa de queima, não é fixa ao longo do tempo. A taxa de queima varia conforme o propelente usado e a pressão. Dessa forma, é possível descobrir uma curva de queima para cada tipo de propelente em relação à pressão, conforme descrito na seção 4.1.1.

4.1.1 Taxa de queima

A taxa de queima é uma das propriedades necessárias para determinar a variação de massa do propelente em um dado instante. Essa taxa de queima, para complicar ainda mais o sistema, não é constante, assim como A_b não é constante.

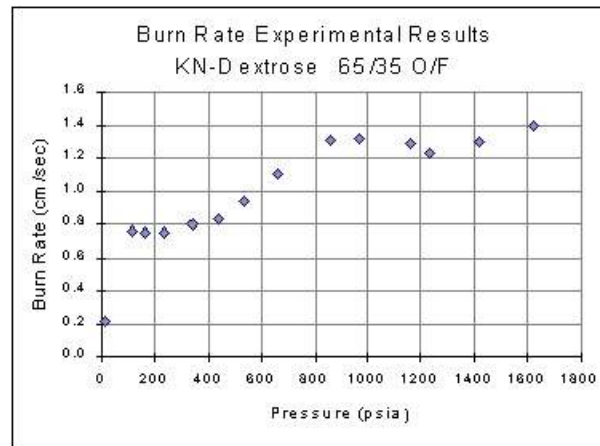


Figura 11 – Gráfico experimental da taxa de queima de propelente KNDX

Fonte: Nakka Rocketry

Esse comportamento da taxa de queima pode ser equacionado pela *lei de Saint Robert* que afirma que

$$r = r_0 + aP^n \quad (4.2)$$

Onde:

- r_0 usualmente é igual a 0
- a : propriedade obtida experimentalmente referida como "coeficiente de pressão"
- n : propriedade obtida experimentalmente referida como "exponente de pressão"
- P : pressão de câmara

Range de Pressão (Mpa)	a	n
0.103 a 0.807	10.71	0.625
0.807 a 1.50	8.763	-0.314
1.50 a 3.79	7.852	-0.013
3.79 a 7.03	3.907	0.535
7.03 a 10.67	9.653	0.064

Fonte: Nakka Rocketry

Essa tabela foi feita com base em experimentos realizados pelo Nakka. Todavia, como temos uma processo de fabricação próprio e diferentes componentes no propelente, é interessante que a equipe de propulsão tenha uma tabela com esses valores referente especificamente ao seu propelente. Porém como se trata do mesmo tipo de propelente (KNSB), por hora, podemos utilizar esses valores para simulações e cálculos.

4.1.2 Grãos BATES

Outro fator que altera a área de queima, além da geometria, é a presença ou não de inibidores nos graos. Inibidores são materiais termicamente resistentes que são adicionados à superfície externa do grão para impedir a queima desta região.

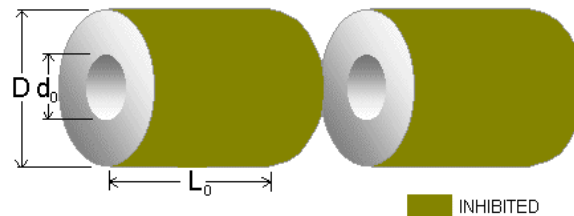


Figura 12 – Grão na configuração BATES com inibidor destacado

Fonte: Nakka Rocketry

Na Figura 12 vemos um grão de geometria cilíndrica cuja superfície externa é inibida. Nesta configuração haverá apenas queima na lateral interior do cilindro (região que chamamos de "port") e nas suas superfícies superior e inferior. Os grãos BATES promovem uma área de queima A_b constante ao longo do tempo, mantendo assim uma pressão interna da câmara também constante. No Projeto Jupiter, priorizamos o uso desta configuração de grão não apenas por sua facilidade de confecção, mas também por seu comportamento previsível, de modo a facilitar cálculos e simulações referentes à queima.

4.2 Propelente KNSB

Os principais componentes químicos desse propelente são o **(1) nitrato de potássio (KN)**, que age como o oxidante da queima, e o **(2) sorbitol (SB)**, combustível de alto peso molecular. Aqui podemos ver alguns dados do sorbitol para exemplificação:

Propriedades	Sorbitol
Fórmula Química	$C_6H_{14}O_6$
Peso molecular (g/mol)	182.2
Temperatura de fusão (C)	110-112 ²
Densidade	1.489
Entalpia de formação (KJ/mol)	-1353.7
Aparencia	pó branco

Fonte: Nakka Rocketry

O uso de Sorbitol, em detrimento de outros combustíveis (como Sucrose no propelente KNSU, por exemplo), é explicado pelo formato da cadeia carbônica: enquanto o

Sorbitol tem cadeia aberta (facilmente quebrável, logo requer menos energia para ignitar), a Sucrose é de cadeia fechada (requer mais energia para a ignição).

O propelente utilizado pela propulsão no Projeto Jupiter consiste na mistura de 65% em massa de nitrato de potássio e 35% de sorbitol. Por isso, é frequentemente descrito em documentos técnicos como "*KNSB 65-35*".

4.3 Fabricação do grão

A fabricação do grão de propelente consiste de uma série de etapas que vão desde a preparação dos moldes até a finalização do grão. Neste documento, trataremos da fabricação de grãos para os chamados minimotores do Projeto Jupiter: Jiboia e Keron. Para motores sólidos maiores, como o Mandioca, o processo é análogo, guardando-se as devidas peculiaridades, que consistem basicamente de um molde maior e uma quantidade maior de propelente.



Figura 13 – Motor Keron

4.3.1 Molde dos Grãos

Os moldes de propelente são constituídos por diversas peças, a começar pelos discos de MDF, os quais são cortados à laser segundo especificações próprias para a fixação dos tubos e a passagem do furador.

A estrutura externa é composta por um tubo de CPVC e um tubo de PVC com borracha alocado por dentro do primeiro. No centro da estrutura, passa uma barra redonda metálica (chamada de "furador"), a qual é centralizada com os discos de MDF. O conjunto de CPVC e discos de MDF é estabilizado por barras roscadas no exterior.

As borrachas são utilizadas para facilitar o desmolde suave do grão e são cortadas na cortadora a laser do Inovalab no prédio da Engenharia de Produção. Em seguida, as borrachas devem ser devidamente coladas no MDF com cola de sapateiro "Amazonas". O procedimento de montagem dos moldes é feito com base em um CAD já existente para a os grãos do motor em questão, de modo a verificar a ordem das peças de MDF.

Detalhes práticos

A partir disso, é possível fazer a montagem adequada das peças, com barras roscadas e parafusos apropriados. Deve-se cortar os tubos de CPVC e PVC no tamanho desejado para os moldes, assim como a borracha a ser colada no PVC. O tubo de PVC deve ser cortado longitudinalmente, retirando um pedaço de forma a encaixá-lo dentro do de CPVC. A borracha deve ser colada, também com cola de sapateiro, na parte interior para facilitar o desmolde dos grãos. A cola deve secar por 24 horas.

Uma tira de fita isolante é colocada no corte longitudinal do tubo, por dentro e por fora, para ser cortada no desmolde. Tendo isto feito, o molde deve ser montado, de forma que fique o mais reto possível sobre uma superfície.



Figura 14 – Molde dos grãos

4.3.2 Purificação do Nitrato

Para a purificação, o nitrato, que inicialmente é comprado em forma de fertilizante, deve ser colocado em água, a fim de retirar impurezas do produto. Deve ser solubilizado em aquecimento até dissolver o sal (usando fogão e panela de alumínio).

A panela usada tem uma saída em uma torneira, na qual deve ser colocada uma "trouxinha" de pano (presa com enforca-gato de forma apropriada para não vazar) para filtrar a água. Depois da total solubilização, a torneira deve ser aberta para passar o

material pelo pano, deixando a água com nitrato cair em um balde e retendo as impurezas, que são descartadas. Essa água deve “descansar” por um dia para cristalizar o nitrato com a diminuição de temperatura.

A água restante pode ser colocada no freezer por mais um dia para maior cristalização. Depois de finalizado o processo, os cristais devem ser secos. O nitrato deve ser seco em um fogão, com a intenção de vaporizar toda a água. O processo consiste em botar o nitrato na panela com a temperatura máxima e mexer bastante durante todo o processo para evitar que ele grude no fundo. Após alguns minutos a pasta de nitrato vai espirrar para fora da panela e, depois, a temperatura diminui. Quando ele apresentar o aspecto de uma farinha, com alguns torrões, já está bom para ser retirado e armazenado.



Figura 15 – Nitrato cristalizado no balde

4.3.3 Fabricação do Grão

A proporção inicial prevista para os grãos do Jibóia foi de 260 gramas de nitrato de potássio para 140 gramas de sorbitol. Foi observado o desperdício de material e optou-se por diminuir as medidas. É suficiente usar 130 g e 70 g, respectivamente. Usa-se o fogão por indução com a panela de aço inox.

Partindo disso, deve-se usar os moldes montados e o nitrato purificado com sorbitol. O nitrato é então solubilizado em água, com a posterior adição de sorbitol, mexendo constantemente para não grudar no fundo e evitar ignição (usa-se a espátula de cabo metálico e a “pá” de borracha).

O aquecimento é feito até 140°C ou até a mistura ficar mais viscosa visualmente (a água vai evaporando e é importante mexer rápido no final para garantir uma mistura homogênea). O grão é moldado, dentro do tubo, batendo o molde na mesa durante todo o processo para não deixar bolhas de ar no grão. Depois de tampar o molde, deve-se passar WD40 no furador e passá-lo por dentro do grão, girando, para evitar aderência e facilitar o desmolde. O ideal é que ele escorregue pelo grão, porém deve-se ter atenção na temperatura do óleo que pode causar danos. Passa-se o furador até o outro lado e retira-se a tampa inferior, presa por duas arruelas em barras roscadas opostas para agilizar o processo. As

barras roscadas podem ser usadas para facilitar na centralização do furadores, verificando o seu alinhamento e verticalidade.

Tendo isso feito, preferencialmente de forma rápida, a cura deve ser feita até o dia seguinte. O ideal é que seja fabricado pelo menos um grão a mais do que será utilizado no motor, já que bolhas e trincas ou fragilidade do material impossibilitam seu uso, podendo alterar a taxa de queima e torná-la imprevisível.

4.3.4 Desmolde e Inibição

Para desmoldar os grãos, deve-se tirar os apoios de MDF e as barras.

A retirada do CPVC e do furador costumam ser mais difíceis. Podem ser feitas com marteladas de leve para não trincar o grão (não martelar diretamente no grão! Usar o próprio furador para retirar o grão do CPVC, caso necessário). Caso o furador ou o CPVC não saia com marteladas leves, recomenda-se o uso do macaco hidráulico, que garante mais segurança para a integridade do grão.

Para tirar o PVC do grão, deve-se cortar a fita isolante do tubo e abrí-lo. A borracha ajuda a desgrudar o propelente e o ideal é descolar um lado e ir girando até soltar totalmente. É um processo a ser feito com duas pessoas: um segura o grão por dentro enquanto outro gira a casca de PVC para retirá-la.



Figura 16 – Utilização do macaco hidráulico para desmolde do grão

Depois deve ser feita a inibição do grão, usando tela de pintura com dimensões da altura do grão (com uma folga de 1 a 2 centímetros) e duas vezes o comprimento da base, para que ele dê duas voltas. Deve-se usar resina com a proporção certa de endurecedor (100 de resina para 48 de endurecedor, em massa), passando-a no lado interno da tela, enrolando o grão e passando resina na tela pelo lado de fora.

É importante que haja resina em toda a tela e que esta esteja o mais esticada possível. Não podem haver regiões do grão mal inibidas, logo, é de suma importância que esta etapa seja cumprida com atenção e, posteriormente, validada.



Figura 17 – Inibição de um grão

A cura da resina deve ser feita em algumas horas e depois deve-se cortar o excesso de tela nas extremidades do grão. O tempo de cura ideal depende da resina, mas é bom que o grão “seque” por 24 horas. Colocamos os grãos para secar sobre nossa mesa de usinagem, apoiados em arruelas presas a barras roscadas, como na Figura 18.



Figura 18 – Grãos nas barras roscadas para que a resina cure

4.3.5 Armazenamento

Aconselha-se que os grãos sejam fabricados o mais próximo da data de lançamento a fim de garantir a qualidade dos grãos, já que o propelente KNSB é altamente higroscópico (capacidade de absorver umidade do ar). Em média, inicia-se a fabricação 7 a 10 dias antes do lançamento e o processo demora de 3 a 4 dias para o cozimento de 6 grãos do motor Keron. Em casos de emergência, é possível fazer todo o processo em 2 dias, mas isso não é recomendado (embora já feito... mais de uma vez).

Depois de prontos, os grãos devem ser guardados em sacos plásticos com *zip lock*, jogando cristais de sílica no interior do saco para evitar que a umidade do ar seja absorvida pelo grão. Os grãos embalados devem ser alocados em um local seco, acima do chão e longe de qualquer fonte de eletricidade, umidade ou calor por determinações de segurança.



Figura 19 – Grãos prontos para serem embarcados

5 Funcionamento do motor sólido

5.1 Panorama geral

Com os conceitos fundamentais de propulsão sólida bem consolidados, debruçamo-nos sobre o estudo do funcionamento do motor. Dedicaremos nossa atenção especialmente sobre a taxa de queima e a pressão de câmara. As demais relações termodinâmicas e conceitos já foram abordados nos capítulos anteriores, e se relacionam intimamente com as apresentadas neste capítulo.

Iniciada a combustão, teremos a transformação da mistura combustível e oxidante em seus produtos de combustão. A geração desses gases - acelerados pelo bocal e responsáveis pelo empuxo, como já vimos - é responsável pela pressurização da câmara. A queima do propelente sólido ocorrerá nas áreas de queima, isto é, superfícies "expostas" do grão que não foram inibidas. Teremos a progressão da queima nas direções perpendiculares à superfície de queima, caracterizando a já mencionada taxa de queima do propelente, até o esgotamento de propelente. Ambos os fatores, pressão e taxa de queima, se relacionam quantitativamente como veremos posteriormente.

Tendo posse das equações governantes do funcionamento do motor sólido, poderemos então simular seu regime e conhecer seus parâmetros operacionais. Essas informações são extremamente valiosas nas iterações de projeto com outras áreas do Projeto Jupiter, especialmente com a Aerodinâmica. Projetar o funcionamento do motor também é extremamente valioso para o dimensionamento estrutural de seus componentes.

5.2 Taxa de queima

5.2.1 Equacionamentos

Retomamos o conceito de taxa de queima, apresentado na seção 4.1.1. Ele é crucial para a determinação de parâmetros de propulsão ao longo da atuação do motor. Conforme já dissemos, modelamos a queima como simétrica nas respectivas superfícies de queima e atuando perpendicularmente a elas. A figura 20 ilustra bem o sentido de propagação da frente de chama.

Verifique que a área de queima A_b é variável ao longo do tempo, conforme a superfície de queima regride. Conforme apresentaremos mais tarde, a produção de gases na câmara e sua exaustão no bocal estão relacionadas com a regressão nas regiões de queima. Compreender e estudar a taxa de queima e suas relações com regressão no grão, pressão

de câmara e vazão mássica são fundamentais para bem prever e projetar o funcionamento do motor.

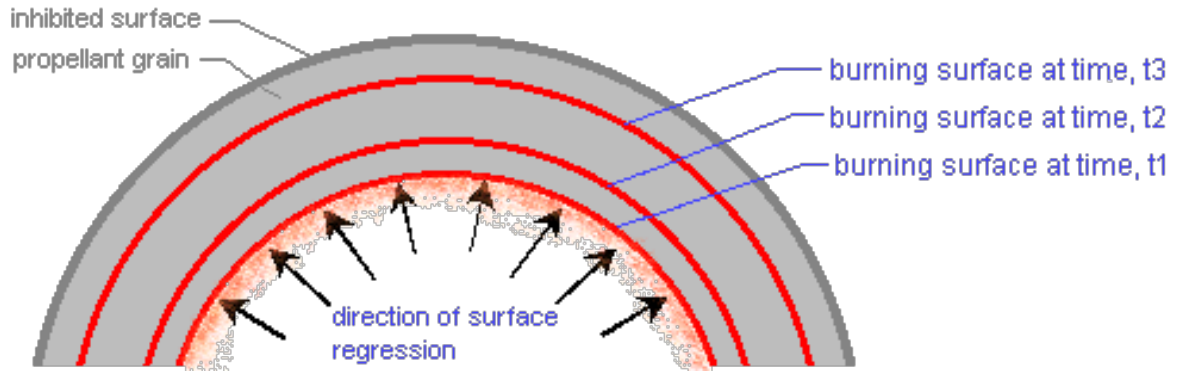


Figura 20 – Regressão da superfície de queima

Fonte: Nakka Rocketry

Definimos o adimensional K_n como a razão entre a área de queima e a área da garganta, como apresentado na eq. (5.1). Veja que temos A_t constante ao longo da queima de propelente, sendo a variação de K_n unicamente responsabilidade do termo referente à superfície de queima. Definindo $s = s(t)$ como o deslocamento da superfície de queima, veja que a área de queima será uma função desse deslocamento, i.e. $A_b = A_b(s(t))$. Usualmente, utilizamos as grandezas de área expressas em mm^2 .

$$K_n = \frac{A_b}{A_t} \quad (5.1)$$

Definimos a taxa de queima r como a velocidade de regressão da área de queima. Usualmente esta grandeza é medida em mm/s . Podemos calculá-la pela lei de Saint Robert (já apresentada e retomada na seção 5.3) ou, alternativamente, pela eq. (5.2). Esta última expressão é bastante útil na simulação da evolução temporal da superfície de queima ao longo da combustão do propelente.

$$r = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (5.2)$$

$$A_b = \pi N \left\{ \frac{1}{2} \left[D^2 - (d_0 + 2s)^2 + (L_0 - 2s)(d_0 + 2s) \right] \right\} \quad (5.3)$$

Finalmente apresentamos ainda a expressão para a área de queima A_b do grão *BATES*, usualmente utilizado nos motores da equipe de Propulsão. Esse tipo de grão

apresenta porta circular e superfície externa inibida. Isso significa que teremos regressão da superfície de queima apenas em direções perpendiculares à superfície cilíndrica da porta e aos anéis circulares na base e no topo do grão. A eq. (5.3) indica a expressão para cálculo da área de queima em função do deslocamento da frente de chama s , do diâmetro interno inicial d_0 , diâmetro externo D (constante pois a superfície externa está inibida), comprimento inicial L_0 e número de grãos N . Tente deduzi-la você mesmo. Veja que, dada uma geometria de grão e um número de grãos, como já dissemos, teremos que a área de queima é função da regressão da superfície de queima, $A_b = A_b(s(t))$.

5.2.2 Fatores que influenciam a taxa de queima

Alguns fatores são responsáveis por interferir na taxa de queima, variando sua intensidade. Nesta subseção, pretende-se identificar os mais significantes e passar uma noção geral de como se dá esta influência. Listamos esses elementos a seguir.

- Pressão da câmara

A taxa de queima é fortemente influenciada pela pressão de câmara e vice-versa. A equação empírica que relaciona ambos é a equação de Saint Robert: $r = aP_0^n$. Os valores de a e n são obtidos experimentalmente. Veja que o expoente n influenciará diretamente na relação entre r e P_0 .

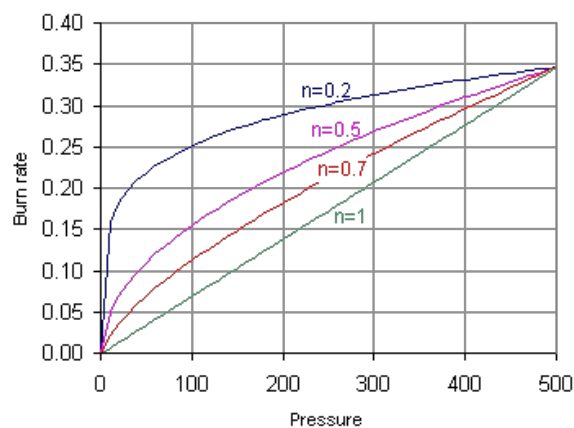


Figura 21 – Curvas de $r(P_0)$ para alguns valores de n

Fonte: Nakka Rocketry

Na Figura 21, verificamos o comportamento de r como função de P_0 . Verifique que o valor de n é bastante interessante para indicar o quão difícil é para iniciarmos o motor. Valores altos de n podem não ser interessantes também por fornecerem altas variações de taxa de queima para pequenas variações de pressão, com consequências potencialmente catastróficas.

- Temperatura inicial do grão de propelente

A temperatura inicial pode afetar de modo sensível a taxa de queima, uma vez que afetará a cinética das reações químicas. É preciso ter atenção à temperatura ambiente inicial na câmara e no propelente, que pode variar bastante na exposição prolongada ao sol, por exemplo. A Figura 22 apresenta a evolução da pressão de um certo motor para condições iniciais distintas de temperatura. Como r e P_0 guardam uma relação apresentada no item anterior, podemos estender o comportamento de r para a temperatura inicial como semelhante

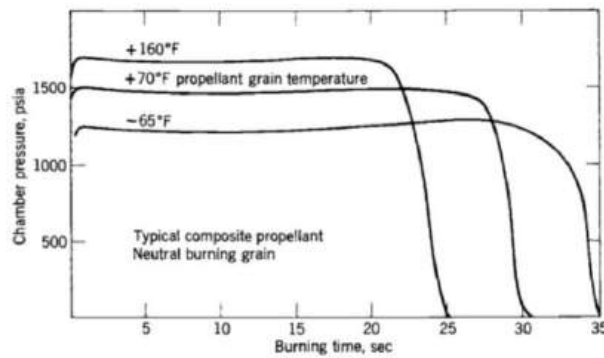


Figura 22 – Efeito da temperatura inicial na pressão de câmara

Fonte: (SUTTON; BIBLARZ, 2010)

Podemos expressar algebricamente a sensibilidade de taxa de queima e pressão à temperatura como os coeficientes π_{K_n} e σ_p , respectivamente, medidos em $^{\circ}C^{-1}$ ou K^{-1} . O coeficiente π_{K_n} é medido para um dado valor de K_n e σ_p , para um dado valor de pressão. Suas definições e relações algébricas são fornecidas a seguir:

$$\sigma_p = \left(\frac{\delta \ln(r)}{\delta T} \right)_P = \frac{1}{r} \left(\frac{\delta r}{\delta T} \right)_P \quad (5.4)$$

$$\pi_{K_n} = \left(\frac{\delta \ln(P)}{\delta T} \right)_{K_n} = \frac{1}{P_0} \left(\frac{\delta P}{\delta T} \right)_{K_n} \quad (5.5)$$

$$\pi_{K_n} = \frac{1}{1-n} \sigma_p \quad (5.6)$$

Valores de σ_p ficam tipicamente em um intervalo de 0.001 a 0.009 K^{-1} e valores de π_{K_n} , em torno de 0.067 a 0.278% $^{\circ}C^{-1}$ (SUTTON; BIBLARZ, 2010).

- Velocidade do escoamento dos gases de combustão paralelamente à superfície de queima

Para a maioria dos propelentes, certos níveis de velocidade dos gases de combustão fluindo paralelamente para a superfície de queima leva uma taxa de queima elevada. Esse aumento é referido como *queima erosiva*, com a intensidade do efeito variando para cada propelente e pressão de câmara. O mecanismo de maior transferência de calor por convecção para a superfície do propelente é a maior responsável por esse aumento. Para muitos propelentes, existe uma velocidade mínima de fluxo. Abaixo desse nível, ou não ocorre aumento, ou há uma diminuição da taxa de queima, que é chamada de *queima erosiva negativa*.

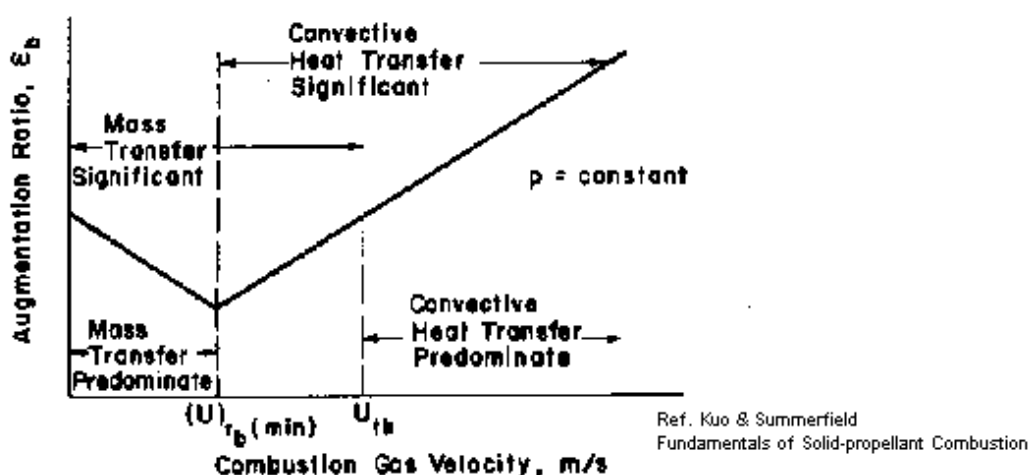


Figura 23 – Processo de transferência de calor que influencia a taxa de queima

Como pode-se perceber pela imagem, abaixo da velocidade mínima há uma predominância da transferência de massa na taxa de queima, enquanto que acima há predominância da transferência convectiva de calor. Curiosamente, abaixo da velocidade mínima, a taxa de queima é inferior do que quando há zero fluxo de massa, isso se deve provavelmente à mudança dos mecanismos de transferência de calor que controlam a taxa de queima. O propelente KNSB em específico é suscetível à queima erosiva negativa.

Os efeitos da queima erosiva podem ser minimizados projetando um motor com uma razão entre port e garganta suficientemente grande. Uma regra aceita é que a razão deve ser no mínimo 2, pra um típico grão com razão entre comprimento e diâmetro de 6, para maiores razões comprimento-diâmetro, uma maior razão port-garganta dever ser usada.

Para relacionar a taxa de queima erosiva com o fluxo de gás pela câmara, é usada a seguinte lei empírica, onde k é a constante, G é o fluxo mássico específico e G^* é o fluxo mássico mínimo.

$$r = aP_c^n [1 + k(G - G^*)] \tag{5.7}$$

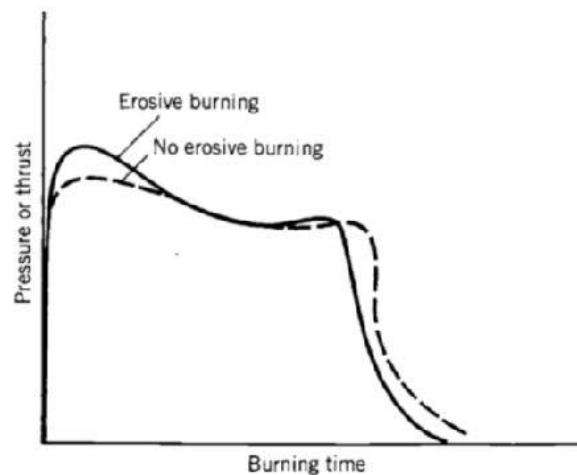


Figura 24 – Influência da queima erosiva na pressão de câmara

- Pressão estática local

Como já vimos, a pressão dos gases de combustão apresenta um comportamento decrescente ao longo do motor, justamente para que possa ocorrer sua exaustão no bocal. Dessa forma, teremos pressões mais elevadas no início da câmara de combustão, i.e. no *bulkhead*. Como a taxa de queima está relacionada com a pressão, a primeira será máxima onde também é máxima a segunda. Esse efeito, contudo, é minorado pelos outros já mencionados.

- Aceleração e spin do motor

A taxa de queima é aumentada pela aceleração do motor. Não importa se essa aceleração seja fruto de uma força longitudinal ou por rotação do motor. Superfícies de queima que formam um ângulo de 60-90° com o vetor de aceleração apresentam aumento da taxa de queima. Como a maior parte da superfície de queima do grão é perpendicular ao eixo do motor, spin tem um efeito muito maior que aceleração longitudinal.

1. Rotação reduz o fluxo mássico na garganta.
2. Padrões de fluxo viscoso são criados no motor, aumentando transferência de calor e área de propelente
3. A aceleração radial acumula os produtos de combustão próximos à superfície de propelente

5.3 Pressão de câmara

Compreender o comportamento da pressão de câmara ao longo do funcionamento do foguete é fundamental para seu processo. Primeiro, porque vários parâmetros de projeto do motor estão intrinsecamente ligados à pressão na câmara de combustão. Em segundo lugar, mas de modo algum menos importante, a pressão na câmara representará um esforço sob o qual a estrutura física do motor estará submetida. É imprescindível lançar mão destes dados para termos um motor que resista aos esforços de pressão e seja seguro para lançamento. Discussões sobre estruturas, fator de segurança e mecânica dos sólidos para essa etapa de projeto serão discutidos em material a parte e fazem parte do cotidiano da Propulsão.

Gostaríamos de obter uma expressão que nos fornecesse a pressão de câmara em função de parâmetros conhecidos ou calculados do motor. Em um primeiro momento, vamos obter sua expressão geral com todo o desenvolvimento algébrico. Em seguida, simplificaremos esta expressão para regime permanente e discutiremos alguns resultados obtidos.

5.3.1 Expressão geral

O primeiro passo para obtermos a expressão geral da pressão na câmara de combustão é fazermos um balanço de massa. Entender essa etapa do desenvolvimento algébrico é a parte mais fundamental. A regressão da superfície de queima está reduzindo a massa de propelente, ao mesmo tempo em que está gerando gases que preenchem a câmara de combustão e escapam acelerados pelo bocal. Em outras palavras, toda a massa consumida de propelente está "se tornando" massa de produtos de combustão na câmara, mais a massa que escapou do motor e está na atmosfera. Em Termodinâmica, diríamos estar analisando esse problema sobre o ponto de vista de *sistema*. A Figura 25 ilustra as massas identificadas do sistema.

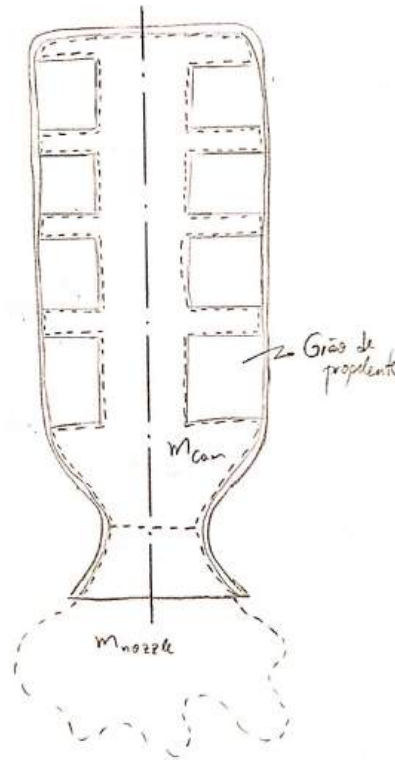


Figura 25 – Representação esquemática de vista em corte do motor, com indicação das massas do sistema

A eq. (5.8) nos indica o referido balanço, onde m_{grain} é a massa consumida no grão, m_{cam} é a massa de gás preenchendo o volume livre da câmara, i.e. sem propelente, e m_{nozzle} indica a massa rejeitada após o bocal. A validade dessa equação se deve à simples conservação de massa do sistema, velho conhecido da lei de Lavoisier.

$$m_{grain} = m_{cam} + m_{nozzle} \quad (5.8)$$

Veja, contudo, que a maneira como está equacionado o problema nos trará dificuldades. Teríamos que conhecer a massa que já saiu pelo bocal e está na atmosfera, que já nem nos interessa mais. Uma maneira inteligente de resolver o problema, então, será pensarmos em taxas de variação das massas. Essas grandezas de fato nos interessam e possibilitam o equacionamento com expressões que já conhecemos ou que podemos facilmente obter.

Olhando exclusivamente para taxas de variação de massa e "fixando" as fronteiras do problema, estamos analisando-o sob a perspectiva do que chamamos, em Termodinâmica, de **volume de controle**. Derivamos a eq. (5.8) no tempo e obtemos a eq. (5.9), que nada mais é que a aplicação da equação da continuidade para nosso volume de controle. Repare que, lidando com a câmara, teremos, nela, aproximações das grandezas de estagnação, que já discutimos. Por isso substituiremos o subscrito *cam* por 0. Por simplicidade, trocamos

os demais subscritos por sua letra inicial.

$$\dot{m}_g = \dot{m}_0 + \dot{m}_n \quad (5.9)$$

Devemos agora encontrar a expressão correspondente para cada termo da eq. (5.9). Começamos pela vazão mássica \dot{m}_g , representativa da variação de massa no tempo do grão de propelente. Conforme já foi apresentado na seção 4.1, teremos:

$$\dot{m}_g = A_b \rho_g r \quad (5.10)$$

Partimos para a obtenção do segundo termo de eq. (5.9). Veja que a massa de produtos de combustão na câmara é igual ao produto entre a densidade instantânea destes e o volume livre de câmara, i.e. $m_0 = \rho_0 \forall_0$. Derivamos os dois lados da igualdade, respeitando a regra da cadeia, e obtemos:

$$\frac{dm_0}{dt} = \frac{d(\rho_0 \forall_0)}{dt} = \rho_0 \frac{d\forall_0}{dt} + \forall_0 \frac{d\rho_0}{dt} \quad (5.11)$$

A variação de volume livre de câmara é igual ao produto entre área de queima e taxa de regressão, conforme eq. (5.12). Verifique que a expressão está dimensionalmente correta, medida em mm^3/s . Em seguida, precisamos obter o termo de variação de pressão. Para tanto, vamos usar a lei dos gases ideais, apresentada novamente na eq. (5.13), e derivá-la no tempo, como feito em eq. (5.14). Veja que estamos assumindo uma temperatura de combustão relativamente constante no tempo. Verifique ainda que cumprimos nosso objetivo ao expressarmos \dot{m}_0 em função de parâmetros conhecidos e da pressão, de que queremos obter a expressão geral. Reapresentamos o resultado na eq. (5.15).

$$\frac{d\forall_0}{dt} = A_b r \quad (5.12)$$

$$P_0 = \rho_0 R T_0 \quad (5.13)$$

$$\frac{d\rho_0}{dt} = \frac{1}{R T_0} \frac{dP_0}{dt} \quad (5.14)$$

$$\dot{m}_0 = \rho_0 A_b r + \frac{\forall_0}{R T_0} \frac{dP_0}{dt} \quad (5.15)$$

Partimos finalmente para o terceiro e último termo de vazão mássica que queremos substituir em eq.(5.9), o termo de taxa de variação no bocal. Já sabemos deduzi-lo utilizando usando os conceitos e expressões indicados ao longo deste documento. Por isso, vamos obtê-lo juntos, na forma de exercício resolvido.

Exercício: Determine a vazão mássica \dot{m}_n pelo bocal em função dos parâmetros da pressão de estagnação (ou de câmara) P_0 , assumindo conhecidas a geometria do bocal, a temperatura de combustão T_0 e a razão de calores específicos k .

Solução

Conhecida a geometria do bocal, escolhamos uma seção transversal na qual conheçamos facilmente os parâmetros de escoamento. Lembre-se que assumimos, pela equação da continuidade, que a vazão mássica no bocal era constante para qualquer seção. Uma boa escolha é a garganta, pois sabemos que nela $M = 1$ e, tendo posse dessa informação, podemos equacionar as propriedades do escoamento. Calculamos \dot{m}_n como:

$$\dot{m}_n = \frac{V_t A_t}{v_t} \quad (5.16)$$

Da definição de M :

$$M = \frac{V}{\sqrt{kRT}} \quad (5.17)$$

Como já vimos, a temperatura em uma seção qualquer guarda a seguinte relação com a temperatura de câmara:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (5.18)$$

Tomamos $M = 1$ para ambas as equações e obtemos:

$$M = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} V_t = \sqrt{kRT} \\ T = T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{-1} \end{cases} \quad (5.19)$$

Resolvendo o sistema para V_t :

$$V_t = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{kRT_0} \quad (5.20)$$

Devemos ainda obter v_t . Pela relação com as propriedades de estagnação em seção qualquer para volume específico, temos:

$$v/v_0 = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (5.21)$$

Tomando $M = 1$ e, portanto, volume específico na garganta:

$$v_t = v_0 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (5.22)$$

Da lei dos gases ideais:

$$v_0 = \frac{RT_0}{P_0} \quad (5.23)$$

Substituindo eq. (5.23) em eq. (5.22) combinando esta última com eq. (5.20) em (5.16):

$$\dot{m}_n = \frac{P_0}{RT_0} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{kRT_0} A_t \quad (5.24)$$

Simplificando na forma final:

$$\dot{m}_n = P_0 A_t \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (5.25)$$



Obtidas as expressões para as vazões mássicas, retornamos à eq. (5.9) - das vazões mássicas de grão, câmara e bocal - e substituímos cada um dos termos que obtivemos até aqui. Obtemos:

$$A_b \rho_g r = \rho_0 A_b r + \frac{V_0}{RT_0} \frac{dP_0}{dt} + P_0 A_t \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (5.26)$$

Lembrando que a taxa de queima pode ser expressa segundo a lei de Saint Robert e substituindo sua expressão, obteremos a expressão final indicada na eq. (5.28):

$$r = a P_0^n \quad (5.27)$$

$$\frac{V_0}{RT_0} \frac{dP_0}{dt} = A_b a P_0^n (\rho_g - \rho_0) - P_0 A_t \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (5.28)$$

A solução desta equação diferencial nos permite descrever a curva de pressão em função do tempo para nosso motor. Veja que ela não é de simples resolução analítica, mas é de extrema utilidade para descrever o comportamento da pressão no regime transiente de pressurização, i.e. com $\frac{dP_0}{dt} > 0$. De maneira geral, essa expressão rege a pressão de câmara enquanto ainda temos propelente sendo queimado. Por mais que a equação assuste em um primeiro momento, é possível resolvê-la com o auxílio de métodos numéricos, que nos permitem aproximar com boa precisão a solução do problema.

Podemos modelar o funcionamento do motor em três etapas: pressurização transiente, regime permanente e depressurização (*tail-off*). A primeira já foi apresentada; a

segunda será amplamente na abordada na próxima subsecção. Resta-nos ainda a etapa final, de depressurização, que ocorrerá após esgotamento de propelente no motor, ou seja $A_b = 0$ e queda gradual da pressão. Reescrevemos a expressão geral tomando área de queima nula.

$$\frac{\forall_0}{RT_0} \frac{dP_0}{dt} = -P_0 A_t \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = -\frac{P_0 A_t}{c^*} \quad (5.29)$$

$$P_0 = P_{b0} e^{-\frac{RT_0 A_t}{\forall_0 c^*} t} \quad (5.30)$$

A equação diferencial (5.29) é de resolução analítica relativamente simples e nos fornece a solução expressa na eq. (5.30). O termo P_{b0} é a condição de pressão inicial no *tail off*, que vai decaindo exponencialmente com o instante de tempo t .

5.3.2 Expressão para regime permanente

Podemos simplificar a expressão geral quando consideramos regime permanente. Assumindo esse regime, o termo de variação de pressão no tempo é nulo, i.e. $\frac{dP_0}{dt} = 0$. Além disso, verificamos que $\rho_0 \ll \rho_g$ e podemos desprezar o termo de densidade dos produtos de combustão. Lembrando que $K_n = A_b/A_t$ e $c^* = \sqrt{RT_0 / \{k[2/(k+1)]^{(k+1)/(k-1)}\}}$, podemos reescrever 5.28 de modo muito mais simples:

$$P_0 = K_n \rho_g r c^* \quad (5.31)$$

Essa expressão, embora simples, é bastante valiosa, pois nos permite obter dados importantíssimos no dimensionamento do motor. Veja que a pressão não é mais uma função do tempo, mas uma função da área de queima definida por K_n e que a taxa de queima r é constante para uma dada P_0 . Isso nos permite extrair a pressão média e máxima de operação, definidas pelos K_n médio e máximo:

$$\begin{cases} \bar{P}_0 = \bar{K}_n \rho_g r c^* \\ P_{max} = (K_n)_{max} \rho_g r c^* \end{cases} \quad (5.32)$$

Já pensando em uma simulação de funcionamento em regime permanente, podemos utilizar as equações de $K_n = A_b/A_t$ e de $r = \Delta s / \Delta t$ para reescrever a eq. (5.31):

$$P_0 = \frac{A_b}{A_t} \rho_g \frac{\Delta s}{\Delta t} c^* \Leftrightarrow \Delta s = \frac{A_t}{A_b} \frac{P_0}{\rho_g c^*} \Delta t \quad (5.33)$$

Podemos então traçar a curva de pressão no regime permanente, via simulação numérica.

Referências

SUTTON, G.; BIBLARZ, O. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470080245. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=1Sf6eV6CgtEC>>. Cited 5 times on the pages 9, 15, 17, 21 e 35.