

Des sommes qui donnent π

Vous allez démontrer quelques limites de sommes en s'entraînant sur les symboles $\sum$. Trop bien !

PARTIE A - UNE PREMIÈRE SOMME QUI DONNE π

On pose : $D = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, puis pour tout $x \in D$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, la fonction cosinus ne s'annulant pas sur D .

- ① Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan x \leq 1$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$.

- ② (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \tan^{2k} x \, dx = \frac{1}{2k+1}$.
On se rappellera de la dérivée de $\tan$.

- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$.

- ③ (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (b) Simplifier $u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4n+2}$.

- (c) En déduire finalement la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

On note cette formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

PARTIE B - PRÉPARATION POUR LES PROCHAINES FORMULES

- ④ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$.

- (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

- (b) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle converge. On note α sa limite.

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n+1} = \frac{a_n}{4} + b_n$.

- (d) En déduire que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de α .

- ⑤ Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, avec $m \leq n$ et $p_m, \dots, p_n$ des réels pour lesquels $0 \leq p_n \leq p_{n-1} \leq \dots \leq p_m$.

- (a) Montrer que si m est pair et n est impair, $0 \leq \sum_{k=m}^n (-1)^k p_k \leq p_m$, puis que la même inégalité est vraie si m et n sont pairs.

- (b) Montrer en toute généralité que $\left| \sum_{k=m}^n (-1)^k p_k \right| \leq p_m$.

On essaiera d'exploiter la question ⑤ plutôt que de traiter deux nouveaux cas.

- ⑥ (a) Montrer sans calculer l'intégrale que pour tout entier $i \geq 2$, $\frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^i \frac{dx}{x}$.

On pourra majorer l'intégrande.

- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \ln n + 1$.

On pourra utiliser la relation de Chasles pour l'intégrale.

PARTIE C - DES SOMMES QUI TENDENT VERS π^2 .

Cette partie est plus difficile.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $d_n = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$.

⑦ (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ en exploitant les résultats précédents.

(b) Montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de α .

⑧ (a) Factoriser la différence $\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1}$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n^2 = d_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{-n \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1} \right)$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n^2 - d_n = \sum_{\substack{-n \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)(2i+1)}$.

⑨ On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $s_{n,i} = \sum_{\substack{-n \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}$.

(a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $s_{n,-i} = -s_{n,i}$. Que vaut $s_{n,0}$?

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n^2 - d_n = \sum_{i=1}^n \frac{s_{n,i}}{2i+1} + \sum_{i=1}^n \frac{s_{n,i}}{2i-1}$.

(c) Montrer, en commençant par poser $k = j-i$, que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_{n,i} = \sum_{k=n-i+1}^{n+i} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(d) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|s_{n,i}| \leq \frac{1}{n-i+1}$.

(e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|c_n^2 - d_n| \leq 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(n-i+1)}$.

(f) Factoriser la somme $\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i+1}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(g) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|c_n^2 - d_n| \leq \frac{4}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

⑩ Déduire des résultats précédents les limites suivantes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On note ces formules

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$