

SEMAINE DU 4/5 AU 9/5

ALGÈBRE LINÉAIRE

Avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

- ① **Révision.** Matrices, applications linéaires. Les étudiants doivent revoir et être à l'aise avec le passage de d'une matrice A à l'application linéaire associée à la matrice A , et du passage d'une application linéaire f à sa matrice dans deux bases de l'espace vectoriel de départ et d'arrivée.
- ② **Rang d'une matrice.** Liens entre rang d'une matrice, rang d'une application linéaire, rang d'une famille de vecteurs.
 $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si A est de rang maximal.
- ③ **Changement de base pour un endomorphisme $f : E \rightarrow E$.** Définition d'une matrice de passage et propriétés. Formule de changement de base.
Définition des matrices semblables et lien avec le changement de bases.
Définition de la trace, Commutativité du produit matriciel sous l'application trace.
La trace est un invariant des matrices semblables : A, B semblables $\Rightarrow \text{trace}(A) = \text{trace}(B)$.
- ④ **Changement de base pour une application linéaire quelconque $f : E \rightarrow F$.** Formule de changement de base.
Définition des matrices équivalentes et lien avec le changement de bases.
Le rang est un invariant des matrices équivalentes : A, B équivalentes $\Leftrightarrow A$ et B ont le même rang $\Leftrightarrow$ On peut passer de A à B avec des opérations sur les lignes et les colonnes.
 $\text{rg } A = r \iff A \text{ est équivalente à } J_{m,n,r} = \begin{pmatrix} O_{r,n-r} & I_r \\ O_{m-r,n-r} & O_{m-r,r} \end{pmatrix}.$

Remarque : Dans le cours, on note $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} := \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.
Merci d'utiliser cette notation dans vos exercices, ou de bien définir vos matrices dans les énoncés.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Donner la formule de matrice de passage, et l'utiliser pour trouver la matrice de l'application linéaire définie par $u(x, y) = (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y)$ dans les bases $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, -1))$ et $\mathcal{C} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.
- ② Donner la formule de matrice de passage, et l'utiliser pour trouver la matrice de l'application linéaire définie par $v(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z)$ dans les bases $\mathcal{C} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ et $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, -1))$.
- ③ Définition de deux matrices semblables A et B , de la trace, et preuve que $\text{Tr} A = \text{Tr} B$.
 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ est à démontrer.
- ④ Savoir démontrer qu'une application est linéaire et donner une base de son noyau et son image. L'examineur pourra choisir l'exemple qu'il voudra parmi (voir exercice 2 pour les étudiants)

⑤ a)
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z) \end{array}$$

$$\textcircled{\text{b}} \quad u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ telle que } u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

$$\textcircled{\text{c}} \quad \begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P \end{array}$$

$$\textcircled{\text{d}} \quad \begin{array}{ccc} D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

$$\textcircled{\text{e}} \quad \begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

$$\textcircled{\text{f}} \quad \text{L'application linéaire de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ qui a pour matrice dans la base canonique } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{\text{g}} \quad \begin{array}{ccc} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & \text{Tr}(X)A, \end{array} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$