

Fonctions réelles : Rappels et compléments

Les fonctions réelles sont les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. On a besoin de quelques notions sur les parties de $\mathbb{R}$ avant de commencer.

L'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^X$.

Table des matières

1	Définitions	2
2	Transformations affines	5
2.1	Symétries	5
2.2	Translations	6
2.3	Contractions, dilatations	7
2.4	Graphe inchangé par transformation du plan	8
3	Dérivations d'une fonction	8
3.1	Dérivabilité	8
3.2	Rappel des formules de dérivation de terminale	9
4	Etudes de fonctions	9
4.1	Méthode	9
4.2	Un exemple	10
4.3	Exemples d'applications	12
5	Bijections et fonctions réciproques	12
6	Fonctions réelles usuelles	14
6.1	Fonctions affines	14
6.2	Fonctions polynomiales et rationnelles	15
6.3	Fonctions exponentielle et logarithme	16
6.4	Fonctions puissances	16
6.5	Fonctions hyperboliques	19
6.6	Fonctions circulaires	21
7	Primitives et intégrales	26
8	Equations différentielles	28
9	L'équation homogène $y' = ay$	29
10	L'équation $y' = ay + b$	30
11	L'équation $y' = ay + f$	30

1 DÉFINITIONS AUTOUR D'UNE FONCTION RÉELLE

Définition 1 : Fonction réelle

Une fonction réelle est la donnée d'un ensemble de départ $X \subset \mathbb{R}$, et d'une manière d'associer à chaque $x \in X$ un unique élément de $\mathbb{R}$ noté $f(x)$. On note généralement

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définie sur X .

Point Vocabulaire : Pour tout $(x, y) \in X \times \mathbb{R}$, tel que

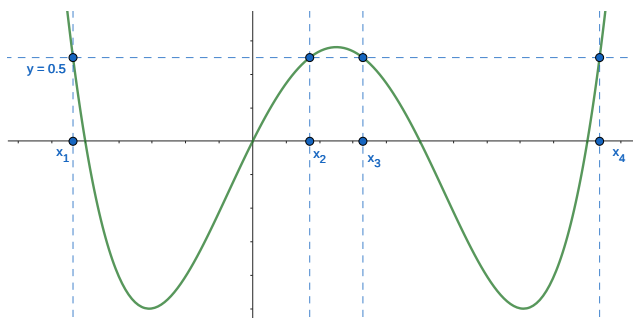
$$y = f(x),$$

on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f .

On dit que f est **bien définie** lorsque pour tout $x \in X$, $f(x)$ a un sens et appartient bien à F .

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est le plus grand ensemble de départ possible pour f . On peut le noter D_f . Tout réel $f(x)$ avec $x \in D_f$ est appelé une valeur de f .

⚠ ATTENTION On parle bien d'**un** antécédent. Sur la figure ci-dessous, y possède plusieurs antécédents par f , raison pour laquelle on parle pas de "l'" antécédent de y .



Exemple 1

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f définie par l'expression

$$f(x) := \frac{\sqrt{-x}}{x+2}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est définie que pour $x \geq 0$ et que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ n'est définie que pour $x \neq -2$ seulement $f(x)$, alors

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 0] = \mathbb{R}_- \setminus \{-2\}.$$

Définition 2 : Image d'une fonction, restriction

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour toute partie X de D_f , on appelle **image de X par f** , notée $f(X)$, l'ensemble

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

L'image de D_f tout entier est simplement appelée l'**image de f** .

Si $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, telle que pour tout $x \in X$, $f(x) = g(x)$, on dit que g est la **restriction de f à X** et on la note $f|_X$.

Soit $Y \subset \mathbb{R}$ telle que $D_f \subset Y$. Si $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, telle que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = h(x)$, on dit que h est un **prolongement de f à Y** .

Exemple 2

- L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est l'intervalle $[1, +\infty[$. L'image de $\mathbb{R}_-$ est $]0, 1]$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sinus est $\{0\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$, l'image de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est $[-1, 1]$ et l'image de $[0, 2\pi]$ est aussi $[-1, 1]$.

Point Vocabulaire : Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que **f est à valeurs dans Y** si toute valeur de f est élément de Y , c'est à dire, si $\forall x \in X, f(x) \in Y$, ou encore de manière équivalente si $f(X) \subset Y$.

▲ En aucun cas cela veut dire que f prend toutes les valeurs de Y .

Définition 3 : Opérations sur les fonctions

On fixe un ensemble de départ X et deux fonctions f et g définies sur X . Soit λ un réel. On définit respectivement $f + g$, λf et fg sur X par les expressions suivantes, pour tout $x \in E$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

On dit que l'ensemble des fonctions est une *algèbre*. Si de plus, g ne s'annule pas sur E on définit

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

Point Notation : Soit $X \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction indicatrice** de X et on note $\mathbb{1}_X$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

Produit de fonctions nulles

Est-il vrai qu'un produit de deux fonctions est nul si, et seulement si, l'une des deux fonctions est nulle?

Avant de répondre, il faut savoir ce qu'est "un produit de fonctions nul". C'est quand le produit des fonctions donne la fonction nulle, c'est à dire

$$\begin{aligned} 0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0, \end{aligned}$$

la fonction constante égale à 0. La réponse est alors **non !**

Prenons les fonctions $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$, qui sont deux fonctions non nulles. Pourtant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-})(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) = 0.$$

On dit que la multiplication de fonctions, contrairement à la multiplication des nombres réels, n'est pas **intègre** : un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit ! On verra d'autres exemples de multiplications non intègres cette année.

Définition 4 : Composée de deux fonctions

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose f à valeurs dans Y . On appelle composée de g et f la fonction $g \circ f$ définie pour tout $x \in X$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)) .$$

Proposition 1

La composition est **associative**. Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : Z \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions. Si f est à valeurs dans Y et g à valeurs dans Z , alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

⚠ ATTENTION La composition n'est pas commutative, ne confondez pas $g \circ f$ et $f \circ g$. Il arrive d'ailleurs souvent que l'une de ces fonctions soit définie sans que l'autre le soit. Par exemple, si f est la fonction $x \mapsto x^2$ et si g la fonction $x \mapsto x + 1$, alors $g \circ f$ est la fonction

$$x \mapsto x^2 + 1$$

et $f \circ g$ la fonction

$$x \mapsto (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 .$$

Définition 5 : Monotonie

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est croissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est strictement croissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) < f(y)$.
- On dit que f est décroissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est strictement décroissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) > f(y)$.
- On dit que f est (resp. strictement) monotone si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.

Proposition 2 : Conservation des monotonies

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que la composition est possible, dans les cas où elle est écrite.

- Si f et g sont croissantes, alors $f + g$, et λf sont croissantes, pour tout $\lambda \geq 0$. Si $\lambda \leq 0$, alors λf est décroissante.
- Si f et g sont strictement croissantes, alors $f + g$, et λf sont strictement croissantes, pour tout $\lambda > 0$. Si $\lambda < 0$, alors λf est strictement décroissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Preuve.

On montre pour la somme de deux fonctions croissantes. Les autres démonstrations sont similaires. Soient $x, y \in X$ avec : $x \leq y$. Par hypothèse $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$, donc par somme $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$. $\square$

Dérivation inutiles

On évite les dérivations inutiles et on utilise plutôt la Proposition 2. Pas besoin de dériver

$$x \mapsto x + e^x, \quad x \mapsto (e^2)^x, \quad x \mapsto \ln(1 - x), \quad \text{ou } x \mapsto \sqrt{x^2 + 5}.$$

Définition 6 : Fonction majorée/minorée/bornée

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \leq M$. Un tel réel M est appelé un majorant de f . On dit aussi que f est majorée par M ou que M majore f .
- On dit que f est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \geq m$. Un tel réel m est appelé un minorant de f . On dit aussi que f est minorée par m ou que m minore f .
- On dit que f est **bornée** si f est à la fois majorée et minorée, c'est à dire, si : $\exists K \geq 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq K$.

Définition 7 : Maximum/minimum d'une fonction

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$.

- On dit que f admet un **maximum** en a si pour tout $x \in X$: $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f et noté $\max_X f$ ou $\max_{x \in X} f(x)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si pour tout $x \in X$: $f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f et noté $\min_X f$ ou $\min_{x \in X} f(x)$.

Consistance des définitions

L'étudiant attentif aura remarqué que

$$f \text{ est } \left| \begin{array}{l} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{array} \right| \iff \text{La partie } \{f(x) \mid x \in X\} \text{ de } \mathbb{R} \text{ est } \left| \begin{array}{l} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{array} \right|.$$

et

$$f \text{ admet un } \left| \begin{array}{l} \text{maximum} \\ \text{minimum} \end{array} \right| \text{ en } a \iff \text{La partie } \{f(x) \mid x \in X\} \text{ de } \mathbb{R} \text{ admet } f(a) \text{ comme } \left| \begin{array}{l} \text{plus grand} \\ \text{plus petit} \end{array} \right| \text{ élément.}$$

Rien de nouveau à apprendre donc.

⚠ ATTENTION Une fonction peut ne pas avoir de minimum et/ou de maximum. Comme par exemple la fonction

$$x \mapsto x.$$

⚠ ATTENTION Quand une fonction admet un maximum ou un minimum, il peut être atteint plusieurs fois, comme la fonction

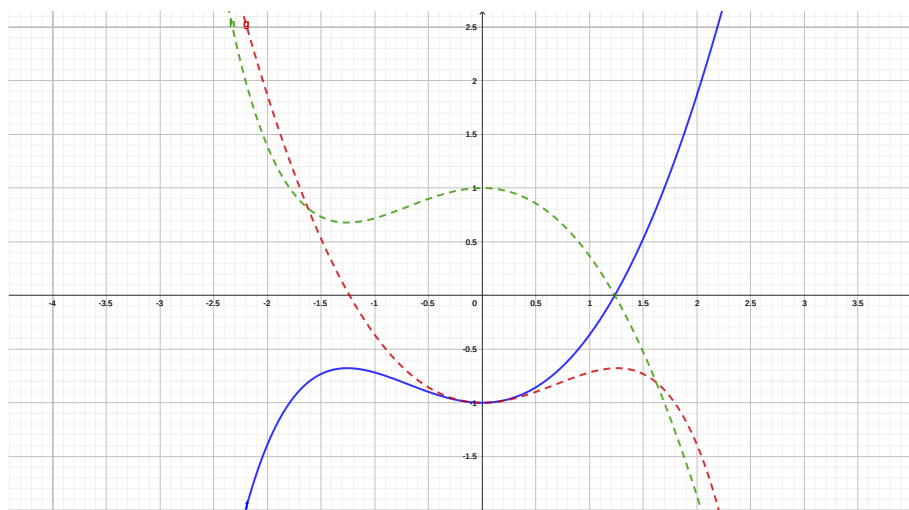
$$x \mapsto \sin x.$$

2 CAS PARTICULIERS DES TRANSFORMATIONS AFFINES DU GRAPHE

Dans cette partie, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2.1 SYMÉTRIES

Comment fait-on pour obtenir la fonction qui a un graphe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ? des abscisses ? Par exemple, quelles sont les expressions des fonctions du graphe vert et rouge ?



Proposition 3

- La fonction $x \mapsto -f(x)$ est définie sur D et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox) .
- La fonction $x \mapsto f(-x)$ est définie sur $-D$, i.e. le symétrique de D par rapport à 0 , et son graphe s'obtient aussi à partir de celui de f par la même symétrie.

2.2 TRANSLATIONS

Définition 8 : Translation d'un ensemble

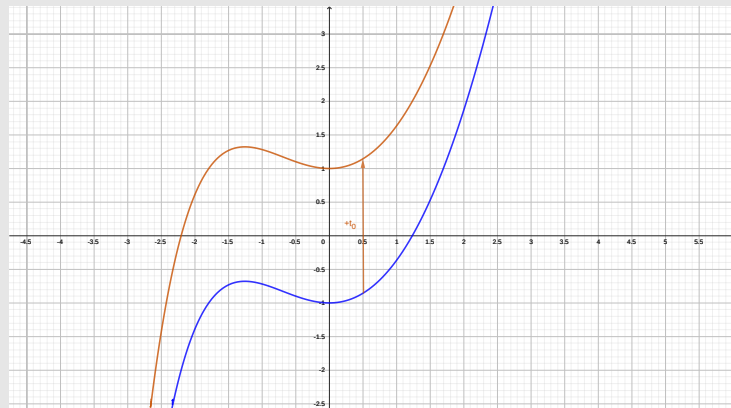
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. On appelle l'ensemble translaté de A par t et on note $A + t$ l'ensemble

$$A + t := \{a + t \mid a \in A\}.$$

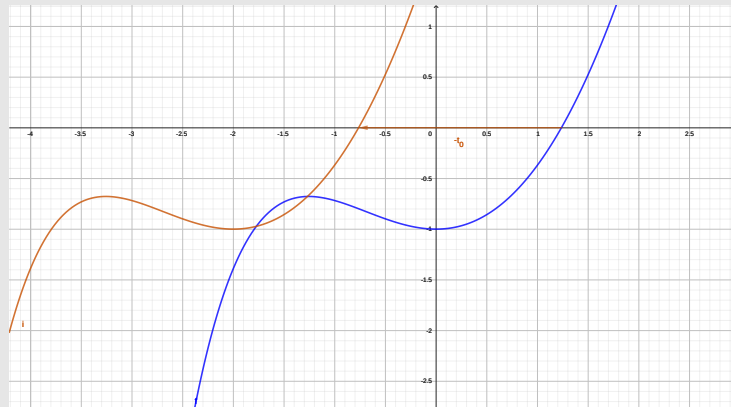
Proposition 4

Soit $f : X \rightarrow Y$, une fonction. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto f(x) + t_0$ est définie sur X et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $t_0\vec{j}$.



- La fonction $x \mapsto f(x + t_0)$ est définie sur $X - t_0$, l'ensemble X translaté du vecteur $-t_0\vec{i}$, et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-t_0\vec{i}$.

**2.3 CONTRACTIONS, DILATATIONS****Définition 9 : Homothétie**

On rappelle qu'une **homothétie de centre O et de rapport k** est la transformation h du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui laisse le point O invariant et telle que, pour tout point M distinct de O :

- Les points O, M et $f(M)$ sont alignés;
- On a l'égalité

$$\frac{Of(M)}{OM} = k$$

En fonction du rapport k , si

- $|k| > 1$, est un **agrandissement** ou une **dilatation** de rapport $|k|$;
- $|k| < 1$, est une **réduction** ou une **contraction** de rapport $|k|$.

2.4 GRAPHE INCHANGÉ PAR TRANSFORMATION DU PLAN

Définition 10 : Parité/imparité

On suppose X symétrique par rapport à 0, c'est à dire que $\forall x \in X, -x \in X$.
Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ① On dit que f est **paire** si $\forall x \in X, f(-x) = f(x)$, c'est à dire, si le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ② On dit que f est **impaire** si $\forall x \in X, f(-x) = -f(x)$, c'est à dire, si le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Pas besoin d'étudier une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ paire ou impaire sur X tout entier, une étude sur $X \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Définition 11 : Périodicité

Soit $T > 0$. On suppose que X est T -périodique, c'est à dire que

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad x - T \in D$$

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **T -périodique** ou périodique de période T si $\forall x \in X, f(x+T) = f(x)$. Le réel T est alors appelé une période de f .

Pas besoin d'étudier une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui est T -périodique sur X tout entier, une étude sur une période suffit, par exemple $X \cap [0, T[$.

⚠ ATTENTION Une fonction périodique ne possède jamais qu'une seule période. Tout multiple entier d'une période T est encore une période : $2T, 3T, 4T, \dots$

Voilà pourquoi on ne parle jamais de «la» période, mais toujours d'une période. Certaines fonctions possèdent en revanche une plus petite période, mais pas toutes. On peut montrer que toute fonction continue non constante périodique possède une plus petite période. Les fonctions sinus et cosinus admettent par exemple 2π pour plus petite période. Certaines fonctions admettent au contraire tout réel strictement positif pour période et n'en ont donc pas de plus petite. C'est le cas des fonctions constantes et de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Proposition 5 : Opérations sur les fonctions périodiques

Soit $T > 0$. On suppose que X est T -périodique. Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T -périodiques.

- ① Les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont aussi T -périodiques, ainsi que $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- ② Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto f(\omega x)$ est $\frac{T}{\omega}$ -périodique sur l'ensemble dilaté/contracté $\frac{1}{\omega}X$.

Exemple 3

Par exemple, si $\omega = 2$, le graphe de la fonction $x \mapsto f(2x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de facteur 2. Si f est T -périodique, rien d'étonnant du coup à ce que $x \mapsto f(2x)$ soit $\frac{T}{2}$ -périodique.

Preuve.

- ① Concernant $f + g$, pour tout $x \in X$: $(f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$.
- ② Notons g la fonction $x \mapsto f(\omega x)$ définie en tout point x pour lequel $\omega x \in X$, c'est à dire, sur $\frac{1}{\omega}X$. Pour tout $x \in \frac{1}{\omega}X$: $g(x + \frac{T}{\omega}) = f(\omega(x + \frac{T}{\omega})) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x)$.

□

3 DÉRIVATIONS D'UNE FONCTION

3.1 DÉRIVABILITÉ

Résoudre $f'(x) = 0$ ne justifie pas et ne donne pas le signe de la dérivée pour les fonctions.

3.2 RAPPEL DES FORMULES DE DÉRIVATION DE TERMINALE

Fonction simple	fonction dérivée en x	Fonction composée	dérivée de la fonction composée
$f : x \mapsto \lambda$	$f'(x) = 0$		
$f : x \mapsto \lambda x + \mu$	$f'(x) = \lambda$	$x \mapsto \lambda \cdot u(x) + \mu$	$\lambda \cdot u'$
$f : x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	u^n	$nu'u^{n-1}$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$	$\sqrt{u}$ pour $u(x) \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ pour $u(x) > 0$.
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$ pour $u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$ pour $u(x) \neq 0$
$\sin$	$\cos$	$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos$	$-\sin$	$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$f : x \mapsto \ln x$, pour $x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\ln(u)$ pour $u(x) > 0$	$\frac{u'}{u}$ pour $u(x) > 0$
$\exp$	$\exp$	e^u	$u'e^u$

On remarquera que les formules pour $\sqrt{\cdot}$ et pour l'inverse sont des cas particuliers de la formule de dérivation de x^n pour $n = \frac{1}{2}$, et $n = -1$.

On remarquera aussi que les formules de dérivations composées se déduisent simplement des dérivées simples "en multipliant par u' ".

somme de fonctions	$(u + v)' = u' + v'$
produit de fonctions	$(uv)' = u'v + uv'$
quotient de fonctions	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

4 ETUDES DE FONCTIONS

Dans ce qui suit, seul ce qui est en bleu fait partie de la rédaction. Il y a des explication en noir, italique.

4.1 MÉTHODE

Dans cette fiche sont données les étapes d'étude d'une fonction. Vous les connaissez sûrement déjà depuis la terminale.

- ① On cherche le domaine de définition de la fonction. On ne peut pas faire d'étude sinon !
- ② D'abord, on réduit le domaine d'étude à l'aide de la périodicité, puis de la parité. Pourquoi réduire le domaine d'étude ? Pour travailler moins ! Pour ceux qui veulent travailler plus, je vous laisse sauter cette étape !
- ③ On calcule la dérivée. On vérifie (avant ou après) ou la dérivée est définie et on donne le domaine de dérivabilité. Ce n'est pas trop difficile : Pour toutes les fonctions usuelles, La fonction est dérivables où elle est définie, sauf pour les fonctions racines n -ièmes.

Méthode : Pensez à Factoriser le plus possible. Le but est d'étudier son signe !

- ④ On dresse le tableau de signe de la dérivée et le tableau de variation de la fonction.
- ⑤ Et oui ce n'est pas fini ! On étudie les limites aux bornes du tableau.

Asymptotes :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, cela signifie que le graphe de f aura une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$. De même en $-\infty$.
- Si, pour $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors le graphe de f aura une asymptote verticale d'équation $x = a$.

⑥ Etude des asymptotes obliques si le cas se présente.

Methode : On regarde les limites infinies comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par exemple. Il faut chercher si f dans ce voisinage est proche d'une fonction affine, donc on regarde si $f'(x)$ ou $f(x)/x$ a une limite finie $l \in \mathbb{R}$! Ensuite, il suffit de retrancher à f la fonction $x \mapsto lx$ et de montrer que cette fonction tend vers une constante.

⑦ Si demandé, on trace le graphe en faisant apparaître toutes les asymptotes, toutes les tangentes horizontales (points où la dérivée s'annule). Le tracé doit être fluide et respecter le tableau de variations. En aucun cas, ce n'est un nuage de petites croix : ce n'est pas un relevé numérique de mesures physiques.

Et en pratique ça sert à quoi ?

Dans un problème plus complexe, ça peut servir à

- Trouver des extrema : Soit $f : x \mapsto xe^{-x}$. Montrer que cette fonction est majorée sur $\mathbb{R}^+$, et minorée sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle admet deux extrema sur $\mathbb{R}^+$ dont on donnera la valeur.
Il suffit d'étudier la fonction et dresser son tableau de variation.
- Résoudre une inéquation : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \leq x + 2$
- Montrer une inégalité : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq x + 1$

4.2 UN EXEMPLE

Énoncé. On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f , étudier ses limites et ses éventuelles asymptotes, dresser son tableau de variations complet, et tracer l'allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Ensemble de définition. La fonction f est définie si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Ainsi

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Cet ensemble est symétrique par rapport à 0, ce qui autorise l'étude de la parité. Si

Parité. Pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$.

La fonction f est donc **impaire**.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

On peut donc restreindre l'étude à $D_f^+ = D_f \cap [0, +\infty[= [0, 1[\cup]1, +\infty[$, et compléter ensuite par symétrie.

Limites et asymptotes sur D_f^+ . Le numérateur x^3 tend vers 1 quand $x \rightarrow 1$. Pour le dénominateur :

$$x \rightarrow 1^- \implies x^2 - 1 \rightarrow 0^-, \quad x \rightarrow 1^+ \implies x^2 - 1 \rightarrow 0^+.$$

D'où, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = 1$ est donc asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

On effectue la division euclidienne de x^3 par $x^2 - 1$: puisque $x^3 = x(x^2 - 1) + x$, on obtient, pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Comme $\frac{x}{x^2 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. *Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ)* : le signe de $f(x) - x = \frac{x}{x^2 - 1}$ sur D_f^+ est celui de $x^2 - 1$ (car $x \geq 0$) :

- pour $x \in]1, +\infty[$: $f(x) - x > 0$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (Δ) ;
- pour $x \in [0, 1[$: $f(x) - x < 0$ (ou nul en 0), $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de (Δ) .

Dérivabilité et signe de f' sur D_f^+ . f est le quotient de deux fonctions polynomiales, donc dérivable sur D_f . Pour $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

On factorise le numérateur :

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Signe de $f'(x)$. Le dénominateur $(x^2 - 1)^2$ est strictement positif sur D_f , et $x^2 \geq 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x^2 - 3$, avec un zéro supplémentaire en $x = 0$ dû au facteur x^2 :

$$x^2 - 3 < 0 \iff |x| < \sqrt{3}, \quad x^2 - 3 = 0 \iff |x| = \sqrt{3}.$$

Sur D_f^+ , on obtient : $f'(x) \leq 0$ sur $[0, \sqrt{3}]$ (nul en 0 et en $\sqrt{3}$), et $f'(x) \geq 0$ sur $[\sqrt{3}, +\infty[$.

Remarque importante. En $x = 0$, $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe au voisinage de 0 (elle est ≤ 0 des deux côtés, 0 étant l'extrémité de l'intervalle d'étude D_f^+) : il n'y a donc **pas d'extremum local en 0**, contrairement à $x = \sqrt{3}$ où f' s'annule en changeant de signe (de $-$ à $+$) : f admet donc un **minimum local** en $\sqrt{3}$, de valeur

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tableau de variations sur D_f^+ . On en déduit que f est décroissante sur $[0, 1[$, décroissante sur $]1, \sqrt{3}]$, puis croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$.

x	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	0	+
f	0 $\longrightarrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

Tableau de variation complet (Pas demandé en général). Comme f est impaire, f' est **paire** (en dérivant $f(-x) = -f(x)$, on obtient $-f'(-x) = -f'(x)$, soit $f'(-x) = f'(x)$), ce qui est cohérent avec l'expression de $f'(x)$ trouvée plus haut, qui ne dépend que de x^2 . Le sens de variation de f est donc **conservé** par la symétrie $x \mapsto -x$ (si f est décroissante sur (a, b) avec $0 \leq a < b$, alors f est aussi décroissante sur $(-b, -a)$, et de même pour la croissance).

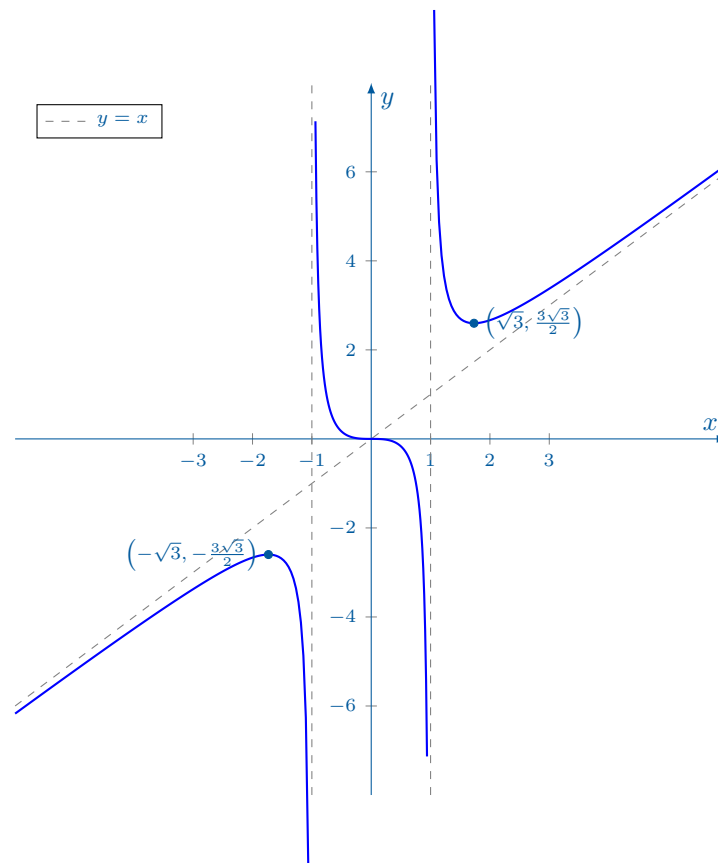
On en déduit immédiatement, sans nouveau calcul :

- f est croissante sur $] -\infty, -\sqrt{3}]$, avec un **maximum local** en $-\sqrt{3}$ valant $f(-\sqrt{3}) = -f(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
- f est décroissante sur $[-\sqrt{3}, -1[$, sur $] -1, 1[$ (avec $f(0) = 0$, tangente horizontale sans extremum), et sur $]1, \sqrt{3}]$;
- f est croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$;

- la droite $x = -1$ est également asymptote verticale, avec $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ (limites obtenues par imparité à partir de celles en 1).

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	+
f	$-\infty$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Allure de la courbe. On résume les éléments obtenus : asymptote oblique $y = x$ en $\pm\infty$, asymptotes verticales $x = \pm 1$, extremums locaux en $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, symétrie par rapport à O , et $f(0) = 0$ avec tangente horizontale.



4.3 EXEMPLES D'APPLICATIONS

5 BIJECTIONS ET FONCTIONS RÉCIPROQUES

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction réelle.

Définition 12 : Bijection

On dit que f est **bijection** de X sur Y , ou que f est une **bijection** de X sur Y si tout élément de Y possède un et un seul antécédent par f , c'est à dire si $\forall y \in Y, \exists ! x \in X, y = f(x)$.

⚠ ATTENTION On a vu qu'une fonction continue strictement monotone est une bijection sur son image. Mais, une bijection n'est pas forcément strictement monotone. Pensez à la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Vocabulaire Une bijection «de X dans Y » avec «de X sur Y ».

dans veut dire que les valeurs de f sont dans Y , mais pas forcément que toutes les valeurs de Y sont atteintes par f . On dit aussi que f est "à valeurs dans Y ".

sur veut dire que les valeurs de f sont sur Y , donc que les valeurs de f "recouvrent" Y . Cela veut donc dire que $f(X) = Y$ (on dira que f est *surjective*).

Définition 13 : Application identité

Pour tout ensemble E , on appelle **application identité** de E et on note Id_E la fonction

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

L'identité de $\mathbb{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$.

Définition 14 : Réciproque

On appelle **réciproque** de f sur Y toute fonction $g : Y \longrightarrow X$ pour laquelle

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Proposition 6 : Réciproque d'une fonction bijective

La fonction f est bijective de X sur Y si et seulement si elle possède une réciproque sur Y .

La fonction réciproque est alors unique, et notée f^{-1} . Pour tous $x \in D$ et $y \in E$

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Géométriquement

Les deux courbes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. La démonstration est simple. Les courbes sont symétriques donc, pour (α, β) le symétrique de $(a, f(a)) \in \mathcal{C}_f$ par rapport à $y = x$, on a

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \text{Le milieu entre } (\alpha, \beta) \text{ et } (a, f(a)) \text{ est sur } y = x, \\ \text{la droite passant par } (\alpha, \beta) \text{ et } (a, f(a)) \text{ est perpendiculaire à } y = x. \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \left(\frac{\alpha+a}{2}, \frac{f(a)+\beta}{2} \right) \text{ est sur } y = x, \\ \text{le coefficient directeur de la droite passant par } (\alpha, \beta) \text{ et } (a, f(a)) \text{ est } -1. \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \frac{\alpha+a}{2} = \frac{f(a)+\beta}{2} \\ \frac{\beta-f(a)}{\alpha-a} = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\alpha+a}{2} = \frac{f(a)+\beta}{2} \\ \beta = -\alpha + a + f(a) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = f(a) \\ \beta = a \end{cases} \end{aligned}$$

Un dernier point utile :

Proposition 7

Supposons f bijective de X sur Y .

- Si f est monotone, elle l'est strictement et f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation.
- Si X est symétrique par rapport à 0 et si f est impaire, Y est symétrique par rapport à 0 et f^{-1} est impaire.

Preuve. f est bijective, donc il est impossible d'avoir $f(x) = f(y)$ si $x \neq y$. Donc f est strictement monotone (le cas d'égalité dans la monotonie est impossible).

Montrons que, si f est strictement croissante, alors f^{-1} est strictement croissante. Soient $y, y' \in Y$ tels que $y < y'$.

Or si $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, alors par croissance de f : $y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) = y'$ ce qui est absurde.

Si f est impaire, l'imparité de f^{-1} est immédiate. $\square$

Rappel sur la continuité et dérivabilité et la bijectivité

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective entre deux intervalles I et J .

- Si f est continue sur I , f^{-1} est continue sur J .
- Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas, f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

6 FONCTIONS RÉELLES USUELLES

Dans ce paragraphe nous allons voir les fonctions usuelles, que vous connaissez déjà pour la plupart, mais aussi leurs réciproques. On va donc parler d'abord brièvement de la réciproque d'une fonction.

6.1 FONCTIONS AFFINES**Définition 15 : Fonctions affines**

On appelle fonction affine toute fonction de la forme $x \mapsto mx + p$ pour certains $m, p \in \mathbb{R}$.

Le graphe d'une fonction affine f est une droite.

Tangente et dérivée

Comme c'est une droite, la courbe d'une fonction coïncide avec sa tangente en tout point. Pour tous $a, x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Cette identité encadrée vous permet de calculer l'expression d'une fonction affine, si on connaît sa pente. Plus besoin de l'ordonnée à l'origine p ! Donc, plus besoin de passer des heures à trouver l'expression d'une fonction affine !

Définition 16 : Fonction affine par morceaux

On appelle fonction affine par morceaux, toute fonction f dont le domaine de définition est la réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints sur lesquels f est affine.

Exemple 4

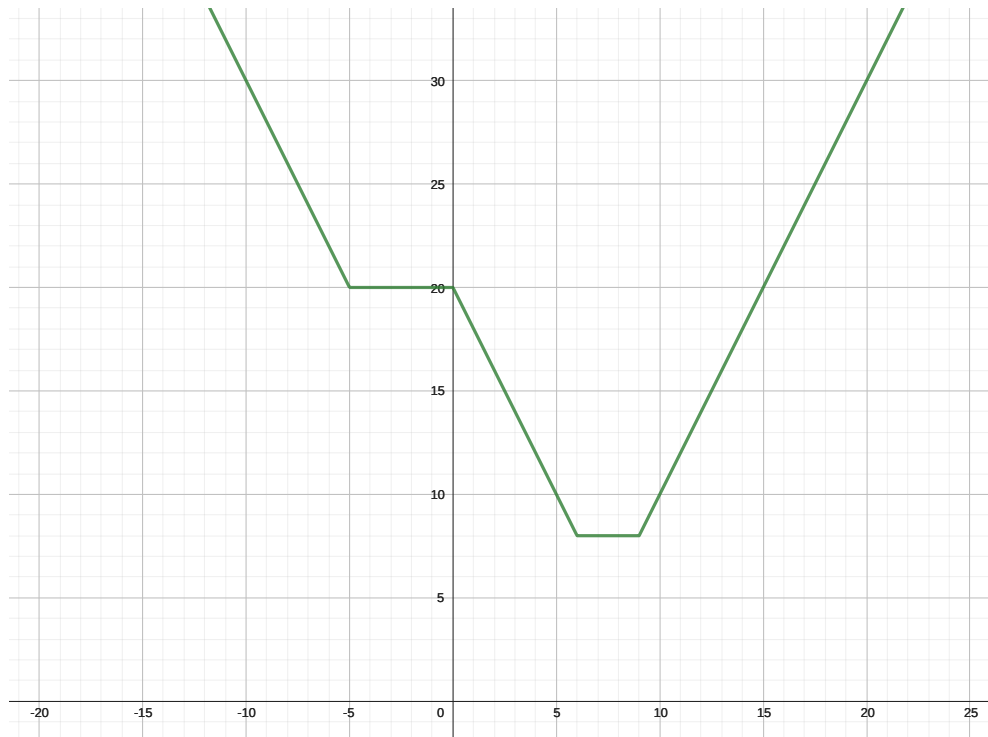
La fonction valeur absolue, par exemple, est affine par morceaux, paire et continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 5

La fonction $f : x \mapsto |x + 5| - |x| + |x - 6| + |x - 9|$ est une fonction affine par morceaux. En effet, en faisant les

disjonctions de cas adéquates, on obtient

$$f(x) = \begin{cases} (x+5) - x + (x-6) + (x-9) & = 2x - 10 & \text{si } x \geq 9 \\ (x+5) - x + (x-6) - (x-9) & = 8 & \text{si } 6 \leq x < 9 \\ (x+5) - x - (x-6) - (x-9) & = -2x + 20 & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ (x+5) + x - (x-6) - (x-9) & = 20 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ -(x+5) + x - (x-6) - (x-9) & = -2x + 10 & \text{si } x < -5. \end{cases}$$



6.2 FONCTIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

Même si on passera plus de temps sur les polynômes plus tard dans l'année, on va donner quelques résultats les concernant, en tant que fonctions.

Proposition 8

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur son ensemble de définition,

$$\mathbb{R} \text{ si } n \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0,$$

et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.

Définition 17 : Fonctions polynomiale et rationnelle

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ pour certains $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Les réels $a_0, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients de P , et s'ils ne sont pas tous nuls, le plus grand exposant de x doté d'un coefficient non nul est appelé le degré de P .

On appelle **fonction rationnelle** tout quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non nulle.

Définition 18 : Racine d'une fonction polynomiale

Soient $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une **racine de P** si $P(\lambda) = 0$.

Factorisation d'un polynôme

Si λ est racine de P , alors il existe une fonction polynomiale $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \lambda)Q(x)$. En effet, Notons $a_0, \dots, a_n$ des réels pour lesquels pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Supposons que λ soit une racine de P . On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = P(x) - \overbrace{P(\lambda)}^{=0} = \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = \sum_{k=1}^n a_k (x^k - \lambda^k) = \sum_{k=1}^n a_k (x - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} x^i =: (x - \lambda)Q(x).$$

La fonction Q est bien polynomiale.

6.3 FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Proposition 9 : Rappels des propriétés du logarithme

La fonction logarithme $\ln$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

Elle vérifie :

- **Transformation des produits en sommes** Pour tous $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ et $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
- **Constante de Néper** La fonction logarithme prend la valeur 1 en un unique réel e appelé parfois la constante de Néper. On a $e \approx 2,71828$.
- **Position par rapport à la tangente en 1** Pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. En décalant d'une unité, pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.
- **Croissances comparées** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Preuve. Faite ça et là dans les exercices. $\square$

Proposition 10 : Rappels des propriétés de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle $\exp$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée elle-même. En outre : $\exp(1) = e$.

Elle vérifie :

- **Lien avec le logarithme** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$.
- **Transformation des sommes en produits** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- **Constante de Néper** La fonction logarithme prend la valeur 1 en un unique réel e appelé parfois la constante de Néper. On a $e \approx 2,71828$.
- **Position par rapport à la tangente en 0** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq x + 1$.
- **Croissances comparées** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Preuve. Faite ça et là dans les exercices. $\square$

6.4 FONCTIONS PUISSANCES

Définition 19 : Puissances quelconques et racines n -èmes d'un réel strictement positif

Soit $x > 0$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on appelle **x puissance y** le réel $x^y = \exp(y \ln x)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine n -ème** de x le réel $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Exemple 6

Pour tout $x > 1$, $x^{\frac{\ln \ln x}{\ln x}} = e^{\frac{\ln \ln x}{\ln x} \times \ln x} = e^{\ln \ln x} = \ln x$.

Proposition 11 : Propriétés algébriques des puissances

La définition de puissance réelle concorde avec celle de puissance entière et pour tous $x, x' > 0$ et $y, y' \in \mathbb{R}$, on a

$$\ln(x^y) = y \ln x, \quad x^{y+y'} = x^y x^{y'}, \quad x^{yy'} = (x^y)^{y'}, \quad (xx')^y = x^y x'^y \quad \text{et} \quad x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y.$$

Preuve. Pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e^{n \ln x} = e^{\ln x + \dots + \ln x} = \overbrace{e^{\ln x} \times \dots \times e^{\ln x}}^{n \text{ fois}} = \overbrace{x \times \dots \times x}^{n \text{ fois}}.$$

Cette égalité signifie que la notation traditionnelle x^n et notre nouvelle notation x^n coïncident. On raisonne de même dans le cas d'un entier négatif.

De plus, pour tous $x, x' > 0$ et $y, y' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \ln(x^y) &= \ln(e^{y \ln x}) = y \ln x, & x^{y+y'} &= e^{(y+y') \ln x} = e^{y \ln x + y' \ln x} = e^{y \ln x} e^{y' \ln x} = x^y x^{y'}, \\ x^{yy'} &= e^{yy' \ln x} = e^{y' \ln(x^y)} = (x^y)^{y'}, & (xx')^y &= e^{y \ln(xx')} = e^{y \ln x + y \ln x'} = e^{y \ln x} e^{y \ln x'} = x^y x'^y, \\ x^{-y} &= e^{-y \ln x} = \frac{1}{e^{y \ln x}} = \frac{1}{x^y} \quad \text{et} & x^{-y} &= e^{-y \ln x} = e^{y \ln(\frac{1}{x})} = \left(\frac{1}{x}\right)^y. \end{aligned}$$

□

Proposition 12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ① **Dérivabilité** La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
- ② **Positions relatives**
 Pour tous $x \in]0, 1]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha \leq \beta \implies x^\beta \leq x^\alpha$.
 Pour tous $x \in [1, +\infty[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha \leq \beta \implies x^\alpha \leq x^\beta$.
- ③ **Prolongement par continuité en 0 pour $\alpha > 0$** Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité en 0 par 0.

En pratique

On a donc

- ① pour $x \in]0, 1]$: $0 \leq \dots \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3} \leq \dots$
- ② pour $x \in [1, +\infty[$: $0 \leq \dots \leq \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \leq x \leq x^2 \leq x^3 \leq \dots$

⚠ ATTENTION Pour $\alpha \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue en 0 après prolongement, mais elle possède en 0 une tangente verticale, donc elle n'est pas dérivable en 0.

Preuve.

- ① Pour tout $x > 0$, $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln x}) = \frac{\alpha}{x} \times e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.
- ② Soient $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \leq \beta$.
 - Si $x \in]0, 1]$, $\ln x \leq 0$, donc $\beta \ln x \leq \alpha \ln x$, et donc $x^\beta = e^{\beta \ln x} \leq e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.
 - Si $x \in [1, +\infty[$, $\ln x \geq 0$, donc $\alpha \ln x \leq \beta \ln x$, et donc $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \leq e^{\beta \ln x} = x^\beta$.
- ③ Pour $\alpha > 0$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc la continuité en 0 de $x \mapsto x^\alpha$ si on pose $0^\alpha = 0$.

□

Proposition 13 : Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Le principe général, c'est que l'exponentielle est plus puissante que les puissances, qui sont elles-mêmes plus puissantes que le logarithme.

Concrètement, pour tous $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.

Preuve. A vous ! $\square$

6.5 FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Définition 20 : Fonctions hyperboliques

La fonction **cosinus hyperbolique** est définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

La fonction **sinus hyperbolique** est définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

La fonction **tangente hyperbolique** est définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Etude des cosinus et sinus hyperboliques

Un calcul rapide montre que

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$$

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$$

et

$$\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$$

On obtient les tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch}(x)$		+	
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$	-	0	+
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

Exemple 7

Résolution d'équation hyperboliques :

Résolvons $\operatorname{ch} x = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x = 2 &\iff e^x - 4 + e^{-x} = 0 \xrightarrow{\times e^x} (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \\ &\iff e^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

or ces deux nombres sont strictement positif, donc les solutions de l'équation sont

$$\ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \ln(2 - \sqrt{3}).$$

Etude de tangente hyperbolique

Un calcul direct montre que

$$\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

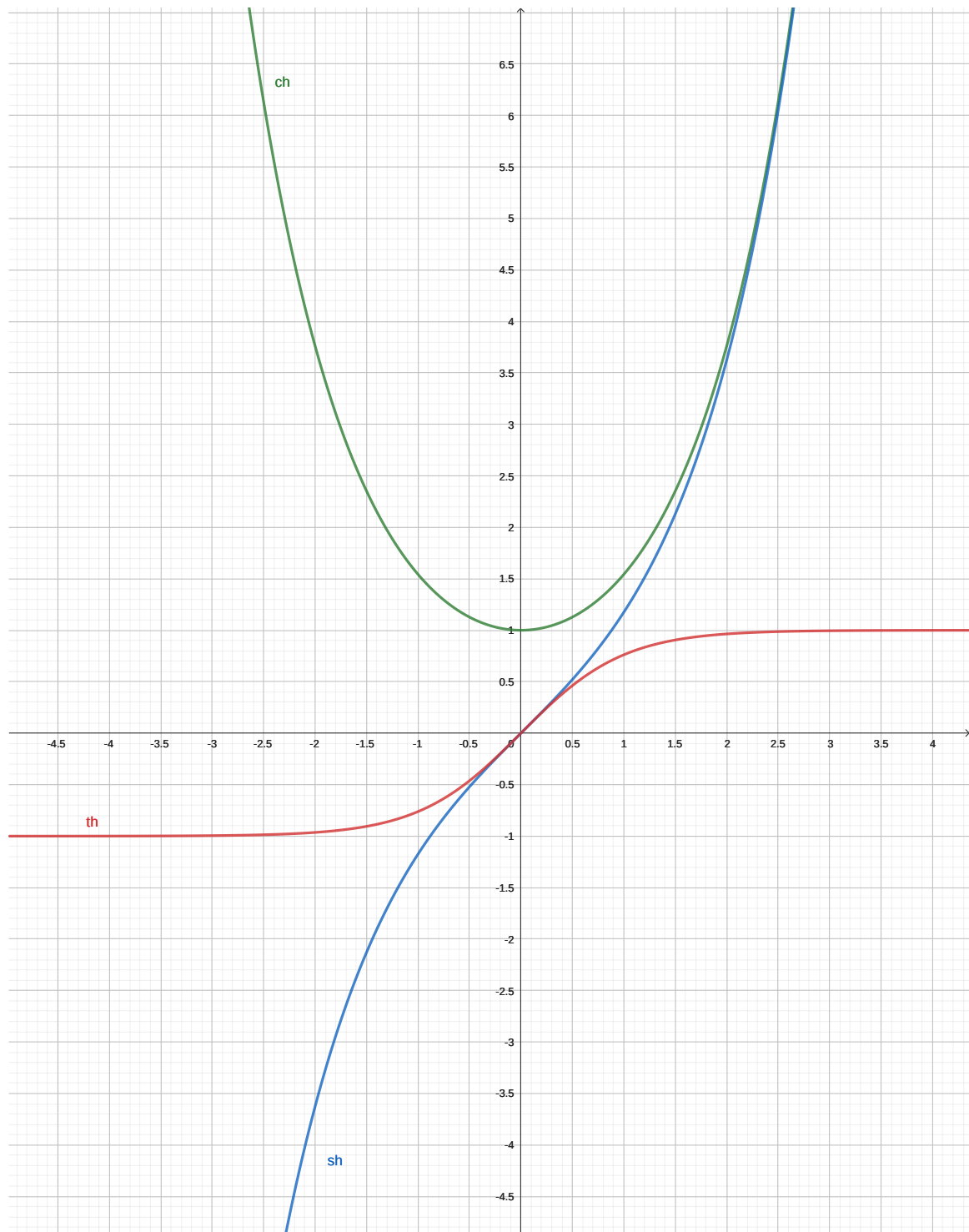
La fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{+\infty} \operatorname{th} = 1$$

et

$$\lim_{-\infty} \operatorname{th} = -1$$

Elle possède donc une asymptote d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ et $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.



Graphe 1: Graphe des fonctions hyperboliques

6.6 FONCTIONS CIRCULAIRES

FONCTIONS SINUS, COSINUS, TANGENTE

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons défini les fonctions $\sin$, $\cos$, $\tan$ dans le chapitre **TRIGONOMETRIE**.

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition 14

Les fonctions sinus et cosinus sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques. La fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos$$

On appelle fonction tangente la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$ par la relation

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

Elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, π -périodique et impaire.

De plus, pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$,

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Preuve. La périodicité et la parité ont été démontrée dans le chapitre **TRIGONOMETRIE**. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a pour tout x dans un voisinage de a qui tend vers a , et en posant $h = \frac{x-a}{2}$,

$$\frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = -2 \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x - a} = - \frac{\sin(h) \sin(h+a)}{h}$$

et

$$\frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = 2 \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x - a} = \frac{\sin(h) \cos(h+a)}{h}.$$

Or $h \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, la limite des 2 taux d'accroissement est calculable si l'on connaît $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$, ce qui est connu depuis la terminale. Donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) \sin(h+a)}{h} = -\sin(a)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) \cos(h+a)}{h} = \cos(a)$$

ce qui nous donne les dérivées de $\cos$ et $\sin$. Par récurrence immédiate, on montre que $\cos$ et $\sin$ sont $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tangente, il suffit d'utiliser la définition. On a

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\sin' \times \cos - \sin \times \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2},$$

donc $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2. \quad \square$

LA FONCTION ARCSINUS

L'application sinus restreinte à l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une application continue strictement croissante de I sur l'intervalle $[-1, 1]$. Elle admet donc une application réciproque continue sur $[-1, 1]$, strictement croissante sur $[-1, 1]$. Cette application réciproque est **définie sur l'intervalle $[-1, 1]$** appelée l'application **arcsinus**. Elle est notée $\arcsin$ ou $\sin^{-1}$. Par définition de la fonction réciproque,

$$[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x$$

et

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$

De plus, on a $\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, \quad y = \arcsin(x) \iff \begin{cases} x = \sin(y) \\ \text{et} \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Exemple 8

- ① $\arcsin(0) = 0$, car $\sin(0) = 0$ et $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- ② $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, car $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- ③ $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$, car $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

⚠ ATTENTION L'application composée $\arcsin \circ \sin$ n'est pas l'application identique ! puisque l'ensemble du départ ($\mathbb{R}$) est différent de l'ensemble d'arrivée $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} [-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Par contre pour tout x dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\sin} [-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]), \quad \arcsin(\sin(x)) = x.$$

Par exemple, pour calculer $\arcsin(\sin(\frac{2\pi}{3}))$, comme $\frac{2\pi}{3}$ n'appartient pas à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il **faut** se ramener à cet intervalle. On écrit :

$$\sin(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\pi) \sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3})$$

et donc

$$\arcsin(\sin(\frac{2\pi}{3})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$$

car $\frac{\pi}{3}$ est un élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Enfin, l'application arcsinus est dérivable sur $] -1, 1[$, et

$$\text{pour tout } x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Preuve.

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

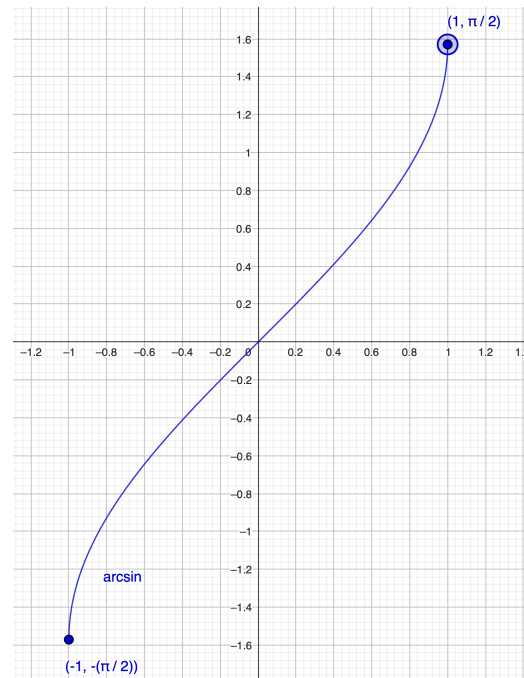
Exemple 9

Montrer que l'application arcsin est une application impaire.

Soit x dans $\mathbb{R}$ et soit y dans $\mathbb{R}$. En utilisant

$$y = \arcsin(-x) \iff \begin{cases} -x = \sin(y) \\ \text{et} \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

montrer que $y = -\arcsin(x)$.



Graph 2: Graphe de la fonction arcsinus

LA FONCTION ARCCOSINUS

L'application cosinus restreinte à l'intervalle $I = [0, \pi]$ est une application continue strictement décroissante de I sur l'intervalle $[-1, 1]$. Elle admet donc une application réciproque continue sur $[-1, 1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$. Cette application réciproque est **définie sur l'intervalle $[-1, 1]$** appelée l'application **arccosinus**. Elle est notée : $\arccos$ ou $\cos^{-1}$. Par définition de la réciproque d'une fonction,

$$[-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x$$

$$\text{et } \forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x$$

De plus, on a

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, \quad y = \arccos(x) \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ \text{et} \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

Exemple 10

- ① $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.
- ② $\arccos(1) = 0$, car $\cos(0) = 1$ et $0 \in [0, \pi]$.
- ③ $\arccos(-1) = \pi$, car $\cos(\pi) = -1$ et $\pi \in [0, \pi]$.

⚠ ATTENTION L'application $\arccos \circ \cos$ n'est pas l'application identique ! puisque l'ensemble du départ ($\mathbb{R}$) est différent de l'ensemble d'arrivée $[0, \pi]$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} [-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$$

Par contre pour tout x dans l'intervalle $[0, \pi]$, on a

$$[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi].$$

$$(\forall x \in [0, \pi]), \quad \arccos(\cos(x)) = x.$$

Enfin, l'application arccosinus est dérivable sur $] -1, 1[$, et

$$\text{pour tout } x \in] -1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Preuve.

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Exemple 11

Calculer $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$. $\frac{7\pi}{6}$ n'appartient pas à $[0, \pi]$. Il faut se ramener à cet intervalle. On écrit :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

et donc

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$$

car $\frac{5\pi}{6}$ est un élément de $[0, \pi]$.

Exemple 12

- ① Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

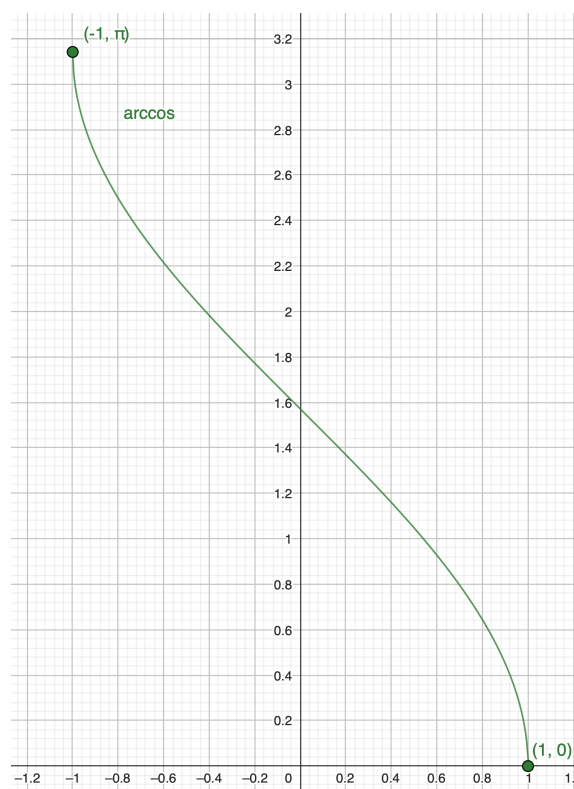
- ② Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

- ③ En déduire que $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Indication : On pourra calculer le sinus et le cosinus du premier membre de cette égalité.



Graphe 3: Graphe de la fonction arccosinus

LA FONCTION ARCTANGENTE

L'application tangente restreinte à l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une application continue strictement croissante de I sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une application réciproque continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cette application réciproque est **définie sur $\mathbb{R}$** appelée l'application **arctangente**. Elle est notée $\arctan$ ou $\tan^{-1}$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\arctan}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x$$

et

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan(x)) = x$$

De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y = \arctan(x) \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ \text{et} \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exemple 13

$$\textcircled{1} \arctan(0) = 0, \text{ car } \tan(0) = 0 \text{ et } 0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

$$\textcircled{2} \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \text{ car } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ et } \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

$$\textcircled{3} \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \text{ car } \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \text{ et } \frac{\pi}{3} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

⚠ ATTENTION L'application composée $\arctan \circ \tan$ n'est pas l'application identique ! puisque l'ensemble du départ $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\})$ est différent de l'ensemble d'arrivée $(\mathbb{R})$.

$$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\tan} \mathbb{R} \xrightarrow{\arctan}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Par contre pour tout x dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow{\tan} [-1, 1] \xrightarrow{\arctan}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan(x)) = x.$$

Enfin, l'application arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Preuve.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Exemple 14

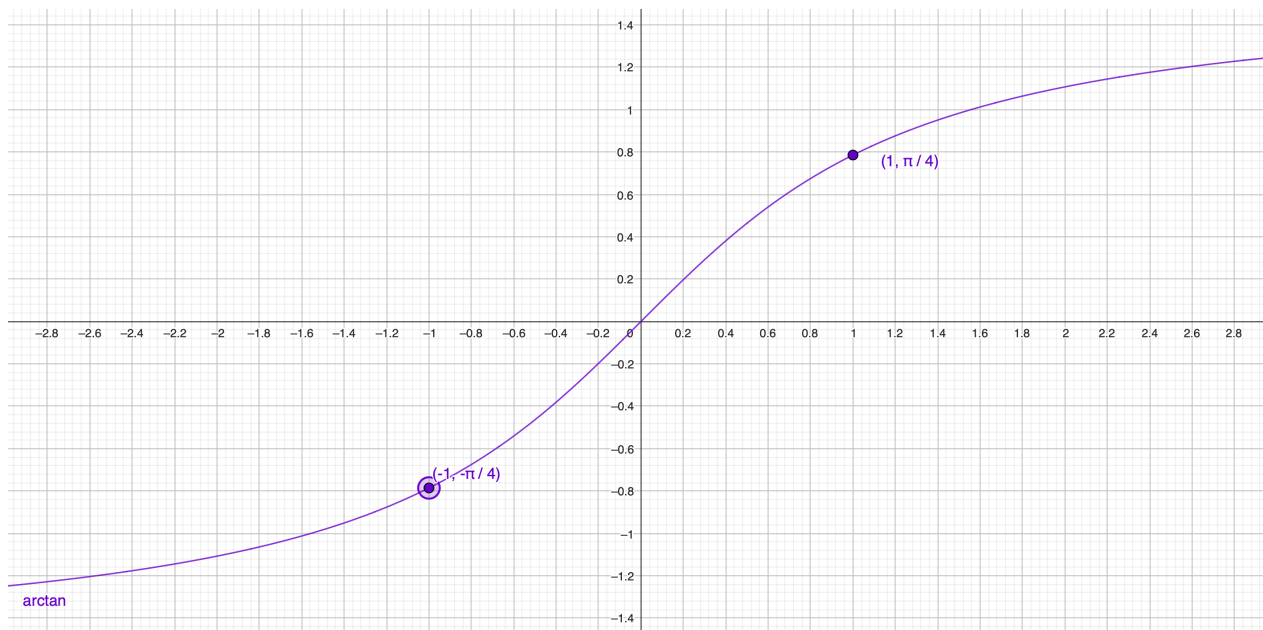
Calculer $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. $\frac{2\pi}{3}$ n'appartient pas à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il **faut** se ramener à cet intervalle. On écrit :

$$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

et donc

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

car $-\frac{\pi}{3}$ est un élément de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Graphe 4: Graphe de la fonction arctangeante

Exemple 15

Montrer que l'application $\arctan$ est une application impaire.

Soit x dans $\mathbb{R}$ et soit y dans $\mathbb{R}$. Par exemple, en utilisant

$$y = \arctan(-x) \iff \begin{cases} -x = \tan(y) \\ \text{et} \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

montrer que $y = -\arctan(x)$.

7 PRIMITIVES ET INTÉGRALES

NOTION D'AIRE. Soit a, b deux réels tels que $a \leq b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$.

On note $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f$ l'aire signée délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = a$, et la droite verticale d'équation $x = b$.

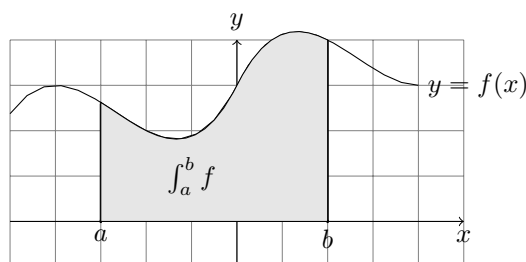
La variable d'intégration est muette, et peut être remplacé par n'importe quel autre nom de variable : $\int_a^b f = \int_a^b f(u)du$. Si

$a > b$, on prendra comme convention: $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

A partir de maintenant, on ne se souciera pas de l'ordre des bornes si les bornes sont des variables, les deux notions auront un sens.

NOTION DE PRIMITIVE. On appelle primitive de la fonction f toute fonction F dérivable tels que $F' = f$. C'est une sorte d'opération inverse de la dérivation.

Par exemple, une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est $x \mapsto \sqrt{x}$.



⚠ ATTENTION La notion F pour une primitive de f est commune, mais n'est pas une notation conventionnelle : On doit l'introduire à chaque fois.

LIEN ENTRE LES DEUX NOTIONS. Trouver une primitive de f va servir à calculer une intégrale, c'est-à-dire une aire sous la courbe. Voici le **THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'INTÉGRATION**.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ admettant pour primitive F sur $[a, b]$, alors, quelque soit l'ordre des bornes,

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

QUELQUES RÈGLES DE BASES.

• **Inversion des bornes :** $\int_a^b f = - \int_b^a f$

• **Relation de Chasles:** Pour tous réels a, b, c dans un intervalle I sur lequel f est continue, quelque soit l'ordre des bornes,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

• **Gestion des constantes :** si λ est une constante,

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

• **Somme :** par propriété sur la dérivation, une primitive d'une somme peut être trouvée en faisant la somme des primitives, et donc:

$$\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

• **RIEN** sur le produit ou le quotient... il faut alors ouvrir les yeux pour reconnaître une primitive parmi les fonctions usuelles ou composées de fonctions usuelles.

• S'il manque une **constante** ou un signe pour obtenir une forme $u'(x) \cdot f(u(x))$, forcez son expression.

Par exemple, si $f : x \mapsto \frac{1}{(3+2x)^2}$, cela fait penser à de la forme $\frac{-u'}{u^2}$, où $u(x) = 3+2x$, mais alors il manque un

"-2". Ainsi, on écrit, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{-2}{-2} \cdot \frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$ et une primitive de f est alors

$$F : x \mapsto \frac{1}{-2(3+2x)}.$$

⚠ ATTENTION Cela ne fonctionne que pour les constantes à cause des règles de dérivation.

LES FORMULES DE BASES.

Dans le tableau ci-dessous, C désigne une constante réelle arbitraire et I un intervalle contenu dans l'ensemble de définition indiqué.

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \leq -2$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Et, pour u dérivable sur I :

f	F	condition
$u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	—
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	u ne s'annule pas
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	u ne s'annule pas
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$u'e^u$	e^u	—
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	—

Fonctions simples	Composition avec une fonction u
$\int^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\int u'u^\alpha = \left[\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} \right], \quad \text{pour } \alpha \neq -1.$
$\int^x \frac{1}{t} dt = \ln x $	$\int \frac{u'}{u} = [\ln(u)]$
$\int^x e^t dt = e^x$	$\int u'e^u = [e^u]$
$\int^x \cos t dt = \sin x$	$\int u' \cos(u) = [\sin(u)]$
$\int^x \sin t dt = -\cos x$	$\int u' \sin(u) = [-\cos(u)]$

On remarquera que la première ligne donne une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et aussi celle de $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

8 RAPPELS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tout le paragraphe, I désigne un *intervalle* de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et a, b des nombres réels.

⚠ ATTENTION Tous les énoncés qui suivent sont faux si l'on remplace *intervalle* par *réunion d'intervalles*.

Définition 21 : Équation différentielle du premier ordre

Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation, d'inconnue une fonction y , de la forme

$$y' = \varphi(x, y) .$$

Une **solution sur I** est une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que $\forall x \in I, \quad f'(x) = \varphi(x, f(x))$.

Résoudre l'équation sur I , c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions sur I . La courbe représentative d'une solution s'appelle une *courbe intégrale*.

⚠ ATTENTION Une équation différentielle, définie sur un intervalle, n'a jamais « une » solution mais une *famille* de solutions : on ne l'isole qu'en imposant une *condition initiale* $y(x_0) = y_0$. C'est ce couple (équation + condition initiale) que l'on appellera plus tard un *problème de Cauchy*.

Exemple 16

La fonction $f : x \mapsto (2x+1)e^{-x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = 2e^{-x}$. En effet f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x}, \quad \text{d'où} \quad f'(x) + f(x) = 2e^{-x}.$$

⚠ ATTENTION Le rôle de l'intervalle. L'hypothèse « I intervalle » est essentielle. Sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, la fonction

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est de dérivée nulle sans être constante. En MPSI, on résout donc *intervalle par intervalle*, avec une constante par intervalle.

9 L'ÉQUATION HOMOGÈNE $y' = ay$

Rappelons la caractérisation de l'exponentielle vue en terminale : $\exp$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Théorème 1 : Démonstration exigible

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = ay \tag{H}$$

sont exactement les fonctions

$$f_C : x \mapsto C e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Preuve. *Synthèse.* Pour $C \in \mathbb{R}$, la fonction $f_C : x \mapsto C e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_C(x) = a C e^{ax} = a f_C(x)$: c'est bien une solution.

Analyse. Réciproquement, soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) e^{-ax}.$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et

$$g'(x) = f'(x) e^{-ax} - a f(x) e^{-ax} = (f'(x) - a f(x)) e^{-ax} = 0.$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, g est constante : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g = C$. Puisque $e^{-ax} \neq 0$, on obtient $f(x) = C e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

remarque

L'astuce « on multiplie par e^{-ax} pour faire apparaître une dérivée nulle » est le ressort de toute la théorie linéaire du premier ordre : en MPSI, on remplacera e^{-ax} par $e^{-A(x)}$, où A est une primitive de a .

Corollaire 14.1 : Problème de Cauchy

Soient a, x_0, y_0 des réels. Il existe une unique solution f de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = y_0$, à savoir

$$f : x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Preuve. Les solutions sont les $f_C : x \mapsto C e^{ax}$. La condition $f_C(x_0) = y_0$ s'écrit $C e^{ax_0} = y_0$, soit $C = y_0 e^{-ax_0}$: elle détermine C de manière unique, et $f_C(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$. $\square$

Corollaire 14.2

Si une solution de $y' = ay$ s'annule en un point, elle est identiquement nulle. Autrement dit, deux courbes intégrales distinctes ne se coupent jamais.

Allure des courbes

Pour $C > 0$: la solution est strictement croissante et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ si $a > 0$; strictement décroissante et $\lim_{+\infty} f = 0^+$ si $a < 0$; constante si $a = 0$. Les cas $C < 0$ s'en déduisent par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Remarque

L'ensemble des solutions est $\{C e^{ax} : C \in \mathbb{R}\}$: c'est une droite vectorielle de l'espace des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dirigée par $x \mapsto e^{ax}$. Cette lecture structurelle sera systématisée en MPSI.

10 L'ÉQUATION $y' = ay + b$

Proposition 15 : Solution constante

On suppose $a \neq 0$. La fonction constante égale à $-\frac{b}{a}$ est solution de $y' = ay + b$, et c'est la seule solution constante.

Preuve. Une fonction constante $x \mapsto \lambda$ est solution si et seulement si $0 = a\lambda + b$, c'est-à-dire, puisque $a \neq 0$, $\lambda = -\frac{b}{a}$. $\square$

Théorème 2

Soient $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de

$$y' = ay + b \quad (E)$$

sont exactement les fonctions

$$x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Notons φ la fonction constante $-\frac{b}{a}$, solution de (E) d'après le lemme 15. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et posons $g = f - \varphi$. Alors g est dérivable, $g' = f'$ et

$$f \text{ solution de (E)} \iff f' = af + b \iff g' = a\left(g - \frac{b}{a}\right) + b \iff g' = ag.$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si g est solution de l'équation homogène $y' = ay$. D'après le théorème 1, cela équivaut à l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = C e^{ax}$, c'est-à-dire $f(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$. $\square$

Remarque

Si $a = 0$, l'équation devient $y' = b$ et ses solutions sont les fonctions affines $x \mapsto bx + C$.

Lecture « physique »

Si $a < 0$, toute solution vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{b}{a}$: le terme $C e^{ax}$ est le *régime transitoire*, la constante $-\frac{b}{a}$ le *régime permanent*. C'est exactement la charge d'un condensateur ou le refroidissement d'un corps.

11 L'ÉQUATION $y' = ay + f$

Théorème 3 : Structure des solutions

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur un intervalle I . On considère

$$y' = ay + f \quad (E_f)$$

et on suppose connue une solution particulière y_p de (E_f) sur I . Alors les solutions de (E_f) sur I sont exactement les fonctions

$$x \mapsto y_p(x) + C e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit y une fonction dérivable sur I et $g = y - y_p$. Alors

$$y' - ay - f = (g' + y_p') - a(g + y_p) - f = (g' - ag) + \underbrace{(y_p' - ay_p - f)}_{=0} = g' - ag.$$

Donc y est solution de (E_f) si et seulement si g est solution de l'équation homogène $y' = ay$, c'est-à-dire (théorème 1) si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = Ce^{ax}$. $\square$

Formulation à retenir

solution générale = solution particulière + solution générale de l'équation homogène.

L'ensemble des solutions n'est donc pas un espace vectoriel mais un *translaté* de la droite des solutions homogènes.

Proposition 16 : Principe de superposition

Si y_1 est solution de $y' = ay + f_1$ et y_2 solution de $y' = ay + f_2$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y' = ay + \lambda f_1 + \mu f_2$.

Preuve. Par linéarité de la dérivation : $(\lambda y_1 + \mu y_2)' = \lambda(ay_1 + f_1) + \mu(ay_2 + f_2) = a(\lambda y_1 + \mu y_2) + \lambda f_1 + \mu f_2$. $\square$
[Résolution de $y' = ay + f$]

- ① Résoudre l'équation homogène : $y_h(x) = Ce^{ax}$.
- ② Déterminer une solution particulière y_p . En terminale, la forme de y_p est *toujours donnée par l'énoncé* ; on l'injecte dans l'équation et on identifie les coefficients. Formes usuelles :
 - f constante $\Rightarrow y_p$ constante ;
 - f polynomiale de degré $n \Rightarrow y_p$ polynomiale de degré n ;
 - $f(x) = Ae^{\lambda x}$ avec $\lambda \neq a \Rightarrow y_p(x) = \alpha e^{\lambda x}$; si $\lambda = a$, essayer $y_p(x) = \alpha x e^{ax}$;
 - f combinaison de $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x) \Rightarrow y_p(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$.
- ③ Écrire $y = y_p + y_h$.
- ④ *Seulement à la fin*, utiliser la condition initiale pour déterminer C .

remarque

L'erreur classique consiste à fixer C avant d'avoir ajouté y_p : la condition initiale porte sur la solution *complète*, jamais sur la seule partie homogène.