

SEMAINE DU 2/2 AU 8/2

Le nouveau tableau de colles est déjà en ligne sur e-colle.

ANNEAUX DES POLYNÔMES ET ARITHMÉTIQUE

- ① Définitions formelle de polynôme, du produit, de la somme, du produit par un scalaire, de la composition de polynômes. Définition du degré d'un polynôme, propriétés du degré, Intégrité de $\mathbb{K}[X]$.
- ② Définitions de l'évaluation et des fonctions polynomiales. L'évaluation polynomiale est un morphisme d'anneaux. *Si possible, pensez à reprendre, sans perte de points, les étudiants, qui parlent de polynômes pour des fonctions polynomiales.*
- ③ Définitions de divisibilité, polynômes associés, division euclidienne. Les polynômes associés sont égaux à un scalaire près. Définitions de coefficients dominants et de polynômes unitaires. Propriétés de la relation de divisibilité.
- ④ Divisibilité par $(X - \alpha)$, définition d'une racine, un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes et s'il s'annule en au moins $n + 1$ points distincts, est le polynôme nul.
- ⑤ Définition du polynôme dérivée, propriétés du polynôme dérivée, formule de Taylor (polynomiale), Définition et caractérisation par les polynômes dérivés des racines multiples.
- ⑥ Définition des fonctions symétriques et relations coefficients racines, définition de polynômes scindés, Théorème de D'Alembert-Gauss. Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, factorisation des polynômes à coefficients réels.
- ⑦ Polynômes de Lagrange
- ⑧ **Arithmétique des polynomes**
 - $\text{div}(A) \cap \text{div}(B) = \text{div}(B) \cap \text{div}(R)$, avec R le reste de la division euclidienne de A par B . Définitions des PGCDs, du PGCD $A \wedge B$, des PPCMs, du PPCM $A \vee B$, Coefficients de Bézout,
 - Polynômes premiers entre eux, identité de Bézout, propriétés des polynômes premiers entre eux,
$$A \wedge B = D \iff \exists A_1, B_1 \in \mathbb{K}[X], \begin{cases} A_1 \wedge B_1 = 1 \\ A = A_1 D \\ B = B_1 D \end{cases}$$
 - AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$ sont associés,
 - Polynômes irréductibles, Décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ et cas particuliers de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

FRACTION RATIONNELLES

- ① Définition formelle d'une fraction rationnelle. Définition d'une fraction irréductible, de la dérivée, du degré, des pôles et des zéros d'une fraction rationnelle. Les étudiants doivent savoir "jongler" entre racines de polynômes et pôles d'une fraction rationnelle. Définition de la partie entière d'une fraction rationnelle, existence et unicité.
- ② Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Corollaire utile : Si λ est un pôle simple de $R \in \mathbb{K}(X)$, sa partie polaire dans la décomposition en élément simple est $\frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)(X - \lambda)}$.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Définition des polynômes de Bézout. Chercher les coefficients de Bézout, dans un exemple simple, grâce à l'algorithme d'Euclide (Par exemple : $X^4 - 4X^2 + 1$ et $X^2 - 2X + 1$)
- ②
 - Définitions de polynômes premiers entre eux.
 - Preuve du Lemme de Gauss
 - Preuve de "Premier entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ $\iff$ pas de racine commune".
- ③ Preuve du Corollaire : Si λ est un pôle simple de R de partie polaire associée $\frac{a}{X - \lambda}$ avec $a \in \mathbb{C}$, alors
$$a = \frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}.$$