

TD

Suites numériques

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ □ □ Vrai ou faux? Justifier

- ① Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 0$.
- ② Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- ③ Pour toute suite réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- ④ Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si (u_n) est strictement décroissante et à termes positifs ou nuls, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- ⑤ Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et (u_n) est à termes positifs ou nuls, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
- ⑥ Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = +\infty$.
- ⑦ Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = +\infty$.
- ⑧ Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors (u_n) est convergente.
- ⑨ Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique telle que $v_3 = 3$ et $v_6 = 24$.

- ① Calculer le premier terme v_0 et la raison de cette suite.
- ② Même question si on suppose que la suite est géométrique.

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ u_n + v_n \rightarrow a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \rightarrow a$ et $v_n \rightarrow b$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent. ► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ (A) ■

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(u_n, v_n)$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$0 \leq u_n \leq 1, \quad 0 \leq v_n \leq 1 \quad \text{et} \quad u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Que dire de ces suites? ► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ ■ □

Soient $\theta \in]0, \pi/2[$, $u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$ et $v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et donner leur limite.

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. ► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ □ □

Donner l'expression du terme général et la limite des suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

① $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$

② $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$.

③ $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n - 2\bar{u}_n)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$, montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites. ► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■ □ □

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n)$.

Montrer que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de z_0 . ► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■ □ □

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

① $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

② $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

► Indication ► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 13 ■ ■ □ Encore des limites...

Calculer les limites des suites de termes généraux suivants, quand elles existent.

① $u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$

⑤ $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

② $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$

⑥ $u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n}$

③ $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

⑦ $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

④ $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$

⑧ $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

⑨ $u_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$

⑪ $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$

⑩ $u_n = \frac{e^n}{n^n}$

⑫ $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$

⑪ $u_n = \frac{n!}{n^n}$

⑬ $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

⑫ $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

⑬ $u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$

⑭ $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$

⑭ ■ ■ $u_n = \frac{\ln(n!)}{n}$

⑮ $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

⑮ ■ ■ $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^\alpha}$,
en fonction de $x, \alpha \in \mathbb{R}$

⑯ ■ ■ $S_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$

⑰ $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ □ □

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites déterminées par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

- ① Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
- ② Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
- ③ Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) .

► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ □ □

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes, et leur limite quand elle existe.

- ① $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3, u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
- ② $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
- ③ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
- ④ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
- ⑤ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2 \cos \theta u_{n+1} + u_n = 0$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □

Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$.

► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ □

Étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

- ① $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$
- ② $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$
- ③ $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

$$\textcircled{4} \quad u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

$$\textcircled{5} \quad u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$$

$$\textcircled{6} \quad u_0 \geq 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n).$$

$$\textcircled{7} \quad u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □

Soient $f : x \mapsto \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$, avec $a > 0$, et (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Étudier les variations de f , le signe de $f(x) - x$ et en déduire le comportement de (u_n) .

► Indication ► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □ Série alternée

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$. Étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

Quelle est la nature de (u_n) ?

► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ □

Établir $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$.

► Indication ► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 22 ■ ■ □

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k!$. [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 23 ■ (A) ■

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \rightarrow 0$.
Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 24 ■ ■ □

Soit u une suite de réels non nuls vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 0$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
[► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 25 ■ ■ □

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+$.
Calculer la limite de u_n en discutant la valeur de ℓ . [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 26 ■ ■ ■

Soient K un réel strictement supérieur à 1 et (ε_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit (u_n) une suite de réels de $[0, 1]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$.
La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ? [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 27 ■ □ □

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}$. [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 28 ■ (A) ■

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Calculer si elle existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k})$
[► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 29 ■ ■ □

Soit (u_n) une suite réelle convergente. Étudier la limite de la suite $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$.

[► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 30 ■ ■ ■

Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ possède une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 31 ■ ■ □

Étudier la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$. [► Indication](#)
[► Correction](#)

EXERCICE 32 ■ □ □

Soient $a > 0$, et $u_1 = \sqrt{a}$, $u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $u_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$, ...
Montrer que (u_n) est convergente. [► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 33 ■ □ □ Moyenne de Cesaro

Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ . On pose $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$.

- ① Montrer que v est croissante et établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ② En déduire que $v \xrightarrow{+\infty} \ell$.

[► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 34 ■ ■ □ Ma première comparaison Somme-Intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

- ① Établir que pour tout $p > 1$, $\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{dx}{x}$.
En déduire la limite de (S_n) .
- ② Établir que $T_{2n} = S_n$. En déduire la limite de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

[► Indication](#) [► Correction](#)

EXERCICE 35 ■ ■ ■

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant

$$u_{\varphi(n)}(n) - n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 .$$

► [Indication](#)

► [Correction](#)

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 **Vrai ou faux? Justifier** _____

On exhibe un contre-exemple si on pense que c'est faux.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

On utilise l'expression générale d'une suite arithmétique, puis géométrique.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

Essayez d'encadrer $u_n - a$ avec $u_n + v_n$ et $a - b$. On rappelle que $v_n - a$ est positif.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

Utilisez les sommes de limites.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

Utilisez la formule du max. On fait un dessin pour s'en souvenir.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 _____

On peut encadrer u et v de manière réfléchie.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 _____

On oublie pas les formules de trigonométrie de $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$, pour les monotonies de suites.

Pour $u_n - v_n$, on peut utiliser les taux d'accroissement.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 _____

Deux résultats du cours à utiliser ensemble : Un sur les suites monotones et l'autre sur les suites extraites !

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

Réduction de suites arithmético-géométriques.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 _____

Montrer que z est géométrique.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 _____

Etudiez les suites données par les parties réelles et les parties imaginaires de la suite z .

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 **Encore des limites...**

Pensez à vous faire une idée de la limite que vous voulez démontrer.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

De l'entraînement sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

Le cas d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients complexes. Dans la méthode, rien ne change !

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

- ① On peut trouver l'expression de u , et le démontrer par récurrence.
- ② Étude classique de la fonction itératrice. Disjonction de cas sur la valeur de u_0 .
- ③ Étude classique de la fonction itératrice.
- ④ Étude classique de la fonction itératrice. Disjonction de cas sur la valeur de u_0 .
- ⑤ Utilisation de la méthode de Héron possible.
- ⑥ Utilisation de la méthode de Héron possible.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Posez $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = x$. Résoudre cette suite vous donnera des informations sur f .

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

Étude habituelle de la fonction itératrice. La difficulté est de faire la disjonction de cas en fonction de la valeur de a .

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20 **Série alternée**

Deux suites à étudier... Une croissante, l'autre décroissante... Il y a des chances qu'elles soient adjacentes.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

On comprend les valeurs présentées comme des limites de suites récurrentes.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 22

Le terme le plus grand est toujours positif ! On regroupe les termes de manière à minorer S par une suite divergente vers $+\infty$.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23

On montre que $(u + v)^2$ et uv tendent vers 0. On conclut grâce à une identité remarquable.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 24

On doit utiliser la définition de limite avec la méthode de Héron.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 25

Même méthode. Faire une disjonction de cas

- ① $l < 1$ ② $l > 1$ ③ $l = 1$

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 26

Montrer qu'à partir d'un certain $N \in \mathbb{N}$, et pour p suffisamment grand, on peut rendre u_{N+p} aussi petit que l'on veut.

Partir de u_{n+1} et fonctionner par récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 27

Essayez de voir quel est la limite de chaque terme.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 28

$$(1 - a)(1 + a) = (1 - a^2)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 29

Montrez que toutes les limites existent, et supposez par l'absurde qu'elles sont différentes.

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 30

Pour montrer l'existence de x_n : TVI

Pour étudier la limite, étudier la monotonie, et montrer qu'une limite finie n'est pas possible.

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 31

Exprimer z_n en fonction de z_0 exprimé en forme exponentielle. Cela vous donnera un produit trigonométrique que l'on a déjà calculé.

[↩ retour à l'EXERCICE 31](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 32

Étudier la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 32](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 33 **Moyenne de Cesaro** _____

La question ② vient après la question ①.

[↩ retour à l'EXERCICE 33](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 34 **Ma première comparaison Somme-Intégrale**

Pensez à utiliser la même idée que les majoration grossières sur les sommes, mais cette fois ci aussi sur les intégrales.

[↩ retour à l'EXERCICE 34](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 35 _____

On construit les valeurs de φ par récurrence en posant $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n-1) \text{ et } u_k \geq n\}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 35](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1 Vrai ou faux? Justifier _____

- ① FAUX. Les suites de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournissent un contre-exemple.
- ② FAUX. Les suites de terme général $u_n = (-1)^n + 1$ et $v_n = (-1)^{n+1} + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournissent un contre-exemple.
- ③ FAUX. Les suites de terme général $u_n = n((-1)^n + 1)$ et $v_n = n((-1)^{n+1} + 1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournissent un contre-exemple.
- ④ FAUX. La suite de terme général $u_n = 1 + e^{-n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournit un contre-exemple.
- ⑤ FAUX. La suite de terme général $u_n = \frac{((-1)^n + 1)}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournit un contre-exemple.
- ⑥ FAUX. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournit un contre-exemple.
- ⑦ FAUX. La suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournit un contre-exemple.
- ⑧ FAUX. La suite de terme général $u_n = \ln(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournit un contre-exemple.
- ⑨ FAUX. La suite de terme général $u_n = n((-1)^n + 1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, fournit un contre-exemple.

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2 _____

- ① Notons r la raison de la suite arithmétique $(v_n)_{n \geq 0}$. On a

$$v_3 = v_0 + 3r \quad \text{et} \quad v_6 = v_0 + 6r.$$

Ainsi, il vient $v_0 = 2v_3 - v_6 = 6 - 24 = -18$, puis $r = (v_3 - v_0)/3 = 21/3 = 7$.

- ② Notons r la raison de la suite géométrique $(v_n)_{n \geq 0}$. On a

$$v_3 = v_0 \times r^3 \quad \text{et} \quad v_6 = v_0 \times r^6.$$

Ainsi, il vient $v_0 = \frac{v_3^2}{v_6} = \frac{3}{8}$, puis $r^3 = \frac{v_3}{v_0} = 3 \times \frac{8}{3} = 8$ et donc $r = 2$.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3 _____

On a l'encadrement

$$0 \leq a - u_n \leq (a - u_n) + (b - v_n) = (a + b) - (u_n + v_n) \rightarrow 0$$

donc $u_n \rightarrow a$ puis

$$v_n = (u_n + v_n) - u_n \rightarrow (a + b) - a = b$$

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4 _____

Supposons $u_n + v_n \rightarrow \ell$ et $u_n - v_n \rightarrow \ell'$. On a $u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) + \frac{1}{2}(u_n - v_n) \rightarrow \frac{\ell + \ell'}{2}$ et de même $v_n \rightarrow \frac{\ell - \ell'}{2}$.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5 _____

On a

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}((a + b) + |a - b|)$$

donc

$$\max(u_n, v_n) = \frac{1}{2}((u_n + v_n) + |u_n - v_n|) \rightarrow \max(\lim u_n, \lim v_n)$$

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6 _____

On a

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1$$

et de même pour v_n . Par le théorème d'encadrement on obtient

$$\lim u_n = \lim v_n = 1.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

on a $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, donc

$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \leq u_{n+1}$$

Via $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$, on obtient

$$v_n = 2^{n+1} \frac{\tan(\theta/2^{n+1})}{1 - \tan^2(\theta/2^{n+1})} \geq v_{n+1}$$

$\sin(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\tan(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc $u \rightarrow \theta$ et $v \rightarrow \theta$ d'où $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes de limite commune égale à θ .

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

La suite (u_n) étant croissante, elle admet une limite (finie ou infinie). La suite (u_{2n}) qui en est extraite a la même limite. Or (u_{2n}) converge, il en est donc de même de (u_n) .

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

① Posons $v_n = u_n + 1$. (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 1$ donc $u_n = 2^n - 1 \rightarrow +\infty$.

② Posons $v_n = u_n - 1$. (v_n) est géométrique de raison $1/2$ et $v_0 = -1$ donc $u_n = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1$.

③ On pose $u_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. On a alors

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 2x_n}{5} = \frac{x_n}{5} \text{ et } y_{n+1} = \frac{3y_n + 2y_n}{5} = y_n$$

On en déduit que $x_n \rightarrow 0$ tandis que $y_n = y_0$. Autrement dit, la suite (u_n) converge vers $iy_0 = i \operatorname{Im}(u_0)$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

On a

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$$

donc

$$z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0$$

Or $\left|\frac{1+i}{2}\right| < 1$ donc $z_n \rightarrow 0$ puis $x_n, y_n \rightarrow 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

Introduisons $x_n = \operatorname{Re}(z_n)$ et $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$. On a

$$x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}.$$

$x_n \rightarrow x_0$ et $y_n \rightarrow 0$ donc $z_n \rightarrow \operatorname{Re}(z_0)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

① Il est clair que (u_n) est croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et que $v_n - u_n \rightarrow 0$. La seule difficulté est de prouver que (v_n) est décroissante. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

② Là encore, il suffit d'appliquer la définition, même si c'est plus difficile techniquement. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{1+(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0. \end{aligned}$$

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leq 0$$

et enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

qui tend bien vers 0. On peut aussi remarquer, pour cela, qu'avec un changement d'indices $l = k + n$, on a

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 13 Encore des limites...

$$\textcircled{1} \quad u_n = \frac{1 - (-2/3)^n}{1 + (-2/3)^n} \rightarrow 1$$

$$\textcircled{2} \quad u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1$$

$$\textcircled{3} \quad u_n = \frac{1 - \sqrt{1 + 1/n^2}}{1 + \sqrt{1 - 1/n^2}} \rightarrow 0$$

$$\textcircled{4} \quad u_n = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{5} \quad u_n = e^{n(\ln(1+1/n))} \text{ or } n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1 \text{ car } \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1. \text{ Par suite } u_n \rightarrow e.$$

$$\textcircled{6} \quad u_n = e^{\frac{2}{n} \ln n} \rightarrow 1 \text{ car } \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$$

$$\textcircled{7} \quad \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(\sin \frac{1}{n})} \text{ or } \frac{1}{n} \ln\left(\sin \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ donc } \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} \rightarrow 1$$

$$\textcircled{8} \quad \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{2}{n+1})} \text{ or } n \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim -2 \rightarrow -2 \text{ donc } \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \rightarrow e^{-2}$$

$$\textcircled{9} \quad |u_n| \leq \frac{1}{n-1} \rightarrow 0 \text{ donc } u_n \rightarrow 0.$$

$$\textcircled{10} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ donc } u_n \rightarrow 0.$$

$$\textcircled{11} \quad \frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n-1} \text{ avec } \frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1} \rightarrow 1 \text{ donc } u_n \rightarrow 1.$$

$$\textcircled{12} \quad \text{Pour } n \geq 3, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^n \rightarrow 0 \text{ donc } u_n \rightarrow 0.$$

$$\textcircled{13} \quad 1 \leq u_n \leq \sqrt[n]{3} = e^{\frac{1}{n} \ln 3} \rightarrow 1 \text{ donc } u_n \rightarrow 1.$$

- ⑭ On va démontrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln(n!) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$$

Pour cela, on distingue les cas n pairs et n impairs. Si $n = 2p$, on écrit

$$\ln(n!) = \ln(1) + \dots + \ln(2p) \geq \ln(p+1) + \dots + \ln(2p) \geq p \ln(p+1) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$$

Si $n = 2p+1$, on écrit

$$\ln(n!) = \ln(1) + \dots + \ln(2p+1) \geq \ln(p+1) + \dots + \ln(2p+1) \geq (p+1) \ln(p+1) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$$

On en déduit que

$$\frac{\ln(n!)}{n} \geq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$$

et donc la suite $(\ln(n!)/n)$ tend vers $+\infty$.

- ⑮ On sait que $nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$ et donc

$$\frac{x}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \leq u_n \leq \frac{x}{n^{\alpha-1}}$$

On distingue alors plusieurs cas. D'abord, si $x = 0$, la suite (u_n) est identiquement nulle, et donc elle est convergente. Ensuite, si $x \neq 0$, et si $\alpha > 1$, alors $\frac{x}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha}$ et $\frac{x}{n^{\alpha-1}}$ tendent vers 0. Par le théorème d'encadrement, il en est de même de (u_n) . Si $\alpha = 1$, alors par le même théorème, (u_n) tend vers x . Enfin, si $\alpha < 1$ et $x > 0$, alors $\frac{x}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha}$ tend vers $+\infty$, et il en est de même de (u_n) ; si $\alpha < 1$ et $x < 0$, on utilise que $\frac{x}{n^{\alpha-1}}$ tend vers $-\infty$ pour conclure que (u_n) tend vers $-\infty$.

- ⑯ L'idée ici est que la suite $n!$ tend extrêmement vite vers $+\infty$, et que les termes $k!/n!$ avec $k < n$ sont tous très petits. On peut formaliser ceci en remarquant d'une part que $u_n \geq 1$, et que d'autre part

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + (n-2) \times \frac{1}{n(n-1)} \\ &\leq 1 + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement des limites, la suite (u_n) converge vers 1.

⑰ $S_n \geq \sum_{k=1}^n 1 = n \rightarrow +\infty$

⑱ $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1}$ donc $\frac{n}{n+1} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ puis $u_n \rightarrow 1$.

⑲ $S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$.

⑳ $0 \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$ donc $u_n \rightarrow 0$.

㉑ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ par le théorème des gendarmes, $S_n \rightarrow 1$.

㉒ $0 \leq S_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \rightarrow 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

- ① L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, de racines 1 et 2. La solution générale est donc de la forme

$$u_n = a + b2^n$$

En introduisant la valeur de u_0 et u_1 , on trouve $a = 1$ et $b = 2$, soit $u_n = 1 + 2^{n+1}$.

② $u_n = 2^n(1 - n)$.

③ $u_n = -3 + 2^{2-n}$.

④ $u_n = 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{3}$.

- ⑤ (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0$$

de solutions $r = e^{i\theta}$ et $r = e^{-i\theta}$. Par suite, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta$$

$n = 0$ donne $\alpha = 1$ et $n = 1$ donne $\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = 1$ donc

$$\beta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta / 2}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n\theta + \tan \frac{\theta}{2} \sin n\theta = \frac{\cos((2n-1)\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - (3 - 2i)r + (5 - 5i) = 0$$

On obtient

$$u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n$$

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

① On a $u_0 = a, u_1 = a^2, u_2 = a^4$, par récurrence $u_n = a^{2^n}$. Pour $|a| < 1$ alors $u_n \rightarrow 0$, pour $|a| = 1, u_n \rightarrow 1$ et pour $|a| > 1, u_n \rightarrow +\infty$.

② La suite (u_n) est bien définie et supérieure à 1 à partir du rang 1 car la fonction itératrice $f : x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1; +\infty[$. Et $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 \geq 0$ car le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = -3 < 0$. La suite (u_n) est croissante. Si celle-ci converge vers un réel ℓ alors en passant à la limite la relation d'itération: $\ell = \ell^2 + 1$. Or cette équation ne possède pas de racines réelles. Par suite (u_n) diverge, or elle est croissante, donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

③ Pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + u_{n-1}}}$$

Puisque $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \geq 0$, la suite (u_n) est croissante. Si (u_n) converge vers ℓ alors $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ donne à la limite $\ell = \sqrt{1 + \ell}$ donc $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et $\ell \geq 0$. Par suite

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$$

Par récurrence on montre aisément que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$ et par suite (u_n) converge vers α .

④ La suite (u_n) est bien définie car sa fonction itératrice $f : x \mapsto e^x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 1, u_{n+1} - u_n = e^{u_n} - e^{u_{n-1}}$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$. La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de $u_1 - u_0 = e^{u_0} - u_0 - 1$. Étudions la fonction $g(x) = e^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. g est dérivable et $g'(x) = e^x - 1$ du signe de x . $g(0) = 0$ donc g est positive. Si $u_0 = 0$ alors (u_n) est constante égale à 0. Si $u_0 > 0$ alors (u_n) est croissante. Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = e^\ell - 1$ donc $\ell = 0$. Or (u_n) est minorée par $u_0 > 0$ donc ne peut converger vers 0. Par suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Si $u_0 < 0$ alors (u_n) est croissante et majorée par 0 donc (u_n) converge vers la seule limite finie possible 0.

⑤ La suite (u_n) est bien définie et strictement positive car de fonction itératrice $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2+\ell}$ et $\ell \geq 0$ donc $\ell = -1 + \sqrt{2}$.

$$|u_{n+1} - \ell| = \left| \frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{(2+u_n)(2+\ell)} \leq \frac{1}{4} |u_n - \ell|.$$

Par récurrence, on montre $|u_n - \ell| = \frac{1}{4^n} |u_0 - \ell|$ et on conclut $u_n \rightarrow \ell$.

La limite peut être calculée comme le seul point fixe de f^2 positif, soit $\sqrt{2} - 1$.

⑥ On vérifie que $[1, +\infty[$ est stable par $f : x \mapsto 1 + \ln(x)$, donc u est bien définie. f est croissante. Il faut donc savoir le terme le plus grand entre u_0 et u_1 . Une étude de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ nous donne $u_0 < u_1$, donc u est décroissante.

Elle est minorée et donc converge vers le seul point fixe de f , soit 1.

⑦ Le segment $[0, 3]$ est stable par f et contient u_0 . Donc u a toutes ses valeurs dans $[0, 3]$.

La fonction ne vérifie rien d'intéressant ici. On utilise la méthode de Héron.

Posons α le point fixe de f . Après calculs, $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{(\sqrt{3 - u_n} - \sqrt{3 - \alpha})(\sqrt{3 - u_n} + \sqrt{3 - \alpha})}{\sqrt{3 - u_n} + \sqrt{3 - \alpha}} - \frac{\alpha - u_n}{\sqrt{3 - u_n} + \sqrt{3 - \alpha}},$$

d'où

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{|u_n - \alpha|}{\sqrt{3 - \alpha}} = \frac{1}{\alpha} |u_n - \alpha|.$$

Une récurrence immédiate montre que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{\alpha^n} |u_0 - \alpha|$, et donc que u_n converge vers α .

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

Soit f une fonction solution. Pour $x > 0$, on considère la suite (u_n) déterminée par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite (u_n) est formée de réels strictement positifs et satisfait la relation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique associée sont 2 et -3 de sorte qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu (-3)^n$$

Puisque la suite (u_n) n'est formée que de réels strictement positifs, il est nécessaire que μ soit nul. Après résolution cela donne $f(x) = 2x$. Inversement, cette fonction est bien solution.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

$f'(x)$ est du signe de $3(x^2 - a)^2$ donc f est croissante et par suite (u_n) est monotone. Les racines de l'équation $f(x) = x$ sont 0, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Ce sont les seules limites possibles pour (u_n) . $f(x) - x$ est du signe de $ax - x^3 = -x(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$. Si $u_0 \in]0; \sqrt{a}]$ la suite est croissante et majorée par $\sqrt{a}$ donc converge vers $\sqrt{a}$. Si $u_0 \in [\sqrt{a}; +\infty[$ la suite est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc converge vers $\sqrt{a}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20 Série alternée

On va montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En effet, on a

$$u_p - u_{p-2} = (-1)^p \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \right) = \frac{(-1)^{p+1}}{p(p+1)}$$

Ainsi, $u_{2n} - u_{2n-2} \leq 0$ et $u_{2n+1} - u_{2n-1} \geq 0$. La suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante. De plus, on a

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+2}$$

ce qui entraîne que $u_{2n+1} - u_{2n} \rightarrow 0$. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc adjacentes : elles convergent vers la même limite l . Il en est de même de (u_n) .

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

La première suite est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle a été traitée dans l'exercice 17.

La seconde est définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + 1/v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Après résolution, on remarque que l est aussi le point fixe de la fonction itératrice de v , et on a

$$|v_{n+1} - l| = \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l} \right| \leq \underbrace{\frac{|v_n - l|}{|v_n| l}}_{\geq 1} \leq \frac{|v_n - l|}{l}.$$

Donc par récurrence immédiate, $|v_n - \theta| \leq \frac{1}{m} |v_0 - \theta| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\epsilon > 1$.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 22

$S_n = n! - (n-1)! + (n-2)! + \dots + (-1)^n$. Par regroupement de termes. Si n est pair alors $S_n \geq n! - (n-1)!$ et si n est impair $S_n \geq n! - (n-1)! - 1$. Puisque $n! - (n-1)! = (n-1) \cdot (n-1)! \rightarrow +\infty$, on a $S_n \rightarrow +\infty$.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

Correction de l'EXERCICE 23

On a

$$0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 \leq 2(u_n^2 + u_nv_n + v_n^2) \rightarrow 0$$

Ainsi $u_n + v_n \rightarrow 0$ puis

$$u_nv_n = (u_n + v_n)^2 - (u_n^2 + u_nv_n + v_n^2) \rightarrow 0$$

et donc

$$u_n^2 + v_n^2 = 2(u_n^2 + u_nv_n + v_n^2) - (u_n + v_n)^2 \rightarrow 0$$

qui permet de conclure $u_n \rightarrow 0$ et $v_n \rightarrow 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Correction de l'EXERCICE 24

Puisque $|u_{n+1}/u_n| \rightarrow 0 < 1/2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N, |u_{n+1}/u_n| \leq 1/2$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq N, |u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n|$$

On a alors par récurrence

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-N}} |u_N|$$

et donc par comparaison $u_n \rightarrow 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25

- ① Soit $\rho = \frac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$. Comme $\frac{u_{n+1}^2}{u_n} \rightarrow \ell < \rho$, il existe un rang N au delà duquel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \rho$$

On a alors

$$0 \leq u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_{N+1}}{u_N} u_N \leq \rho^{n-N} u_N \rightarrow 0$$

donc $u_n \rightarrow 0$. On peut aussi raisonner en observant que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, donc convergente et que sa seule limite possible est nulle.

- ② Même démarche mais par minoration ou par croissance.

- ③ $u_n = n, u_n = 1$ et $u_n = 1/n$ sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

Montrons que la suite (u_n) converge vers 0, avec la définition. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (ε_n) converge vers 0, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$\forall n \geq N, 0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$$

et alors pour tout $n \geq N$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon}{K}$$

On en déduit

$$0 \leq u_{n+2} \leq \frac{u_n}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K}$$

et par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{K^i}$$

La suite (u_n) est majorée par 1 et on peut encore écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K} \frac{1 - (1/K)^p}{1 - 1/K} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K-1}$$

Pour p assez grand, on a $1/K^p \leq \varepsilon$ et alors

$$0 \leq u_{n+p} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{K-1} = \lambda \varepsilon$$

avec λ une constante strictement positive ce qui permet de conclure.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27

On a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} + \frac{1}{n} + 1 \quad (1)$$

Or pour $k \in \{2, \dots, n-2\}$,

$$\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \rightarrow 0$$

puis $u_n \rightarrow 2$.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28

$$(1-z) \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = (1-z^{2^{n+1}})$$

Or $z^{2^{n+1}} \rightarrow 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Correction de l'EXERCICE 29

(u_n) converge donc (u_n) est bornée. La suite (v_n) est donc bien définie et elle-même bornée. On a $v_{n+1} \leq v_n$ donc (v_n) est décroissante et donc converge. Posons $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$. $v_n \geq u_n$ donc à la limite $\ell' \geq \ell$. Si $\ell' > \ell$ alors $\ell' > \frac{\ell' + \ell}{2} > \ell$. À partir d'un certain rang $v_n > \frac{\ell + \ell'}{2}$ et $u_n < \frac{\ell + \ell'}{2}$. Impossible. Il reste $\ell' = \ell$.

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

Correction de l'EXERCICE 30

On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. On observe que $f_n(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f'_{n+1} = f_n$. La propriété est vraie pour $n = 1$ et si elle est vraie au rang n , le tableau de signe de f_n permet d'assurer que f_{n+1} est décroissante (et donc strictement négative) sur $[0; x_n]$ puis strictement croissante sur $[x_n; +\infty]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut assurer que f s'annule en un $x_{n+1} > x_n$ et celui-ci est unique. La suite (x_n) est croissante. Si elle est majorée alors elle converge vers un réel ℓ et $\frac{x_n^n}{n!} \rightarrow 0$. Or la suite de terme général est $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$ est croissante et strictement positive. Elle ne peut donc converger vers 0. Par conséquent la suite (x_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

Correction de l'EXERCICE 31

On peut écrire $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$. On a alors

$$z_1 = \rho \frac{1 + e^{i\theta}}{2} = \rho \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}, z_2 = \rho \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} e^{i\frac{\theta}{4}}, \dots, z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k}$$

Si $\theta = 0$ alors $z_n = \rho \rightarrow \rho$. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin \frac{\theta}{2^n} \neq 0$ et

$$\sin \frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n}$$

par exploitations successives de l'identité $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$. On en déduit

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Finalement

$$z_n \rightarrow \rho \frac{\sin \theta}{\theta}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 31](#)

Correction de l'EXERCICE 32

Par récurrence, on montre que u_n existe et $u_n > 0$. La relation de récurrence donne alors

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

La suite (u_{n+1}/u_n) est constante égale à $u_1/u_0 = b/a$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison b/a et finalement

$$u_n = a \left(\frac{b}{a} \right)^n$$

La suite (u_n) converge si, et seulement si, $b \leq a$.

[↩ retour à l'EXERCICE 32](#)

Correction de l'EXERCICE 33 Moyenne de Cesaro

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)} \geq 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est croissante.} \\ v_{2n} &= \frac{u_1 + \dots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \dots + u_{2n}}{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ On a $v_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et (v_n) croissante donc (v_n) converge vers un réel $\ell' \leq \ell$. La relation précédente, passée à la limite, donne $2\ell' \geq \ell + \ell'$ ce qui permet de conclure $v_n \rightarrow \ell$.

[↩ retour à l'EXERCICE 33](#)

Correction de l'EXERCICE 34 Ma première comparaison Somme-Intégrale

$\textcircled{1}$ On a

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \int_p^{p+1} \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}$$

car la fonction décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$ est majorée par $\frac{1}{p}$ sur $[p; p+1]$. Par un argument semblable

$$\int_{p-1}^p \frac{dx}{x} \geq \int_{p-1}^p \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}$$

Pour $n \geq 1$,

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x}$$

donne en sommant

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x}$$

Or

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2$$

et

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln 2$$

donc $S_n \rightarrow \ln 2$.

$\textcircled{2}$ On a

$$T_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

donc

$$T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = S_n$$

Par suite $T_{2n} \rightarrow \ln 2$. De plus $T_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2$ donc

$$T_n \rightarrow \ln 2$$

[↩ retour à l'EXERCICE 34](#)

Correction de l'EXERCICE 35

Sachant que (u_n) tend vers $+\infty$, la valeur $\varphi(n)$ est bien définie en tant que plus petit élément d'une partie non vide de $\mathbb{N}$.

φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Il reste à vérifier que $u_{\varphi(n)} = v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Par construction, on a $u_{\varphi(n)} \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on a

$$\varphi(n) = \varphi(n-1) + 1 \quad \text{ou} \quad u_{\varphi(n)-1} < n.$$

Soit $\varepsilon > 0$ choisi inférieur à $1/2$. Il existe un rang N tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Introduisons $\alpha = u_{\varphi(N)} - N$. Les termes de la suite progressant par pas inférieur à ε au delà du rang N , une récurrence facile permet de vérifier

$$u_{\varphi(N)+p} \leq u_{\varphi(N)} + \varepsilon p \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Pour un indice p suffisamment grand, on obtient $u_{\varphi(N)+p} < N + p$. Or on a aussi par construction $u_{\varphi(N+p)} \geq N + p$ et donc

$$\varphi(N+p) \neq \varphi(N) + p.$$

Il existe alors au moins un entier n compris entre $N+1$ et $N+p$ pour lequel $\varphi(n-1)$ et $\varphi(n)$ ne sont pas successifs. Pour cet entier la propriété sur φ impose $u_{\varphi(n)-1} < n$. On en déduit $u_{\varphi(n)} \in [n, n + \varepsilon]$.

Il reste à vérifier que la propriété reste vraie pour les indices supérieurs. Par l'absurde s'il existe $m > n$ tel que $u_{\varphi(m)} \notin [m, m + \varepsilon]$ et considérons le plus petit de ceux-ci, alors $u_{\varphi(m-1)} \in [m-1, m-1 + \varepsilon]$ et $u_{\varphi(m)} > m + \varepsilon$.

Les termes de la suite ne progressant que par pas inférieur à ε avec ε plus petit que $1/2$, les indices $\varphi(m-1)$ et $\varphi(m)$ ne peuvent être successifs et la propriété sur ϕ impose alors $u_{\varphi(m)-1} < m$. C'est absurde car l'écart entre $u_{\varphi(m)-1}$ et $u_{\varphi(m)}$ doit être inférieur à ε . Cela montre la propriété voulue.

[↩ retour à l'EXERCICE 35](#)