Chapitre II

Fonctions circulaires et applications réciproques

A Fonctions circulaires

A.1 Rappels de trigonométrie

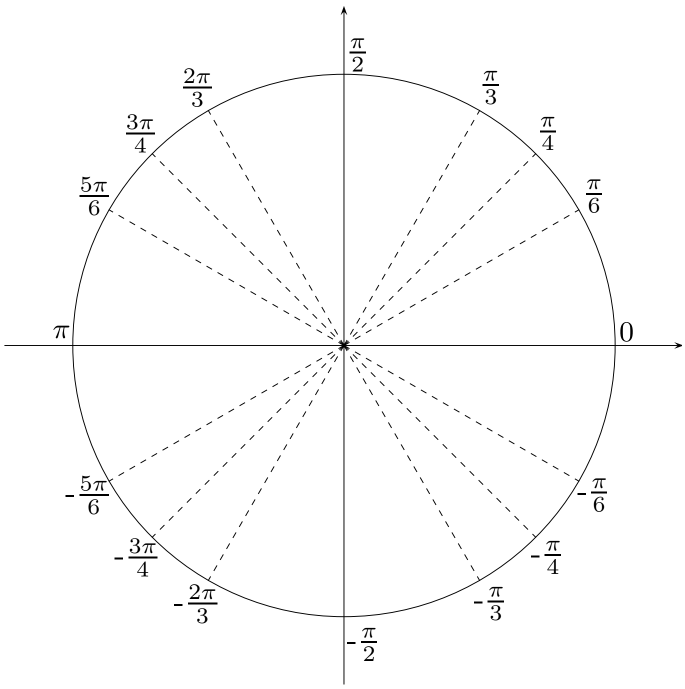
▶ Radians et cercle trigonométrique

Le *radian* est une unité de mesure d'angle (orienté) définie par le fait que la mesure d'un angle plat est π radians.

Un angle droit par exemple mesure $\pm\frac{\pi}{2}$ radians.

On appelle *cercle trigonométrique* le cercle centré en l'origine de rayon 1. La circonférence de ce cercle mesure 2π.

Pour représenter un angle de x radians, on considère un arc de cercle de longueur x *orienté* dans le *sens trigonométrique* (*i.e.* dans le sens contraire des aiguilles d'une montre).



▶ Les fonctions sinus, cosinus et tangente

Les fonctions *cosinus* et *sinus* sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1,1]$, 2π-périodiques et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos' x = -\sin x \qquad \text{et} \qquad \sin' x = \cos x.$$

La variable x désigne une mesure d'angle exprimée en radians.

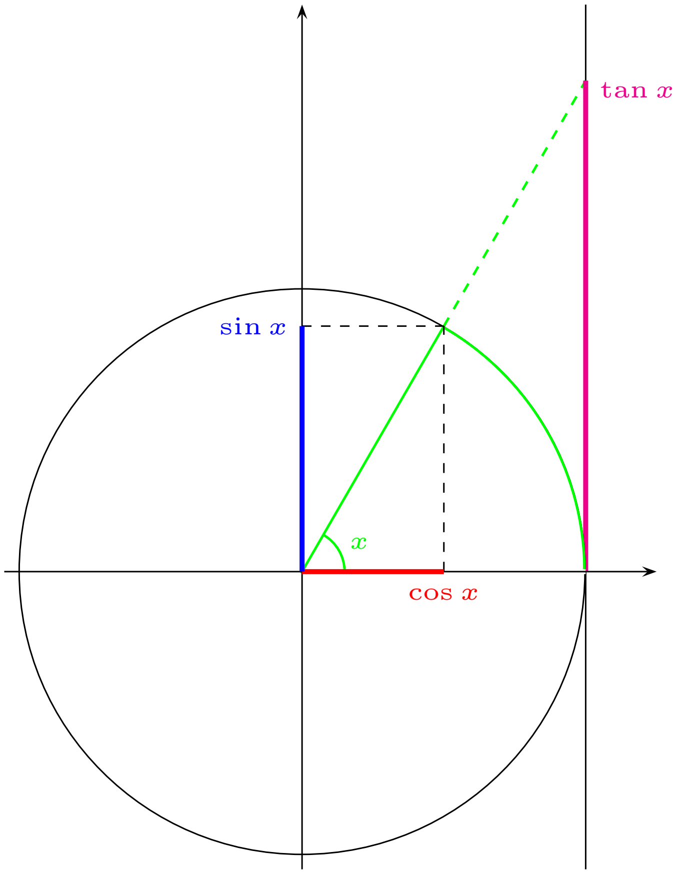
Par ailleurs, la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

On appelle *fonction tangente* la fonction notée tan définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Il s'agit d'une fonction impaire, π-périodique, infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et qui vérifie pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$



▶ Quelques valeurs remarquables des fonctions sinus, cosinus et tangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Beaucoup d'autres valeurs remarquables se retrouvent aisément à partir de celles qui précèdent en utilisant les relations entre sinus et cosinus (consulter le formulaire à ce propos).

▶ Équivalents

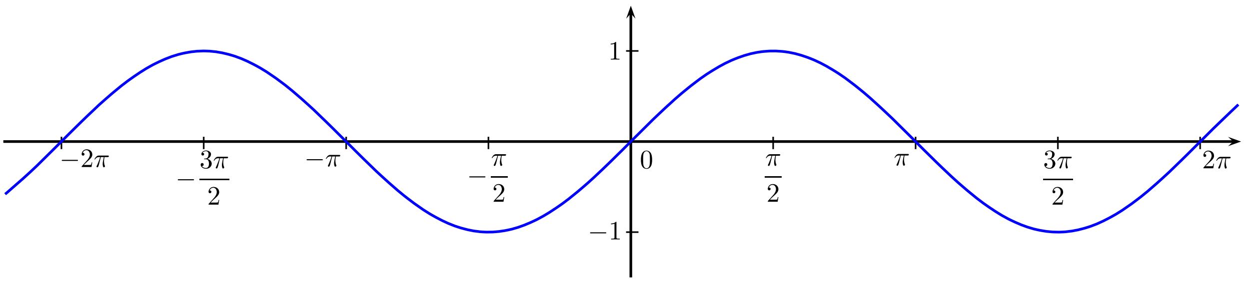
En utilisant la définition de la dérivée en un point, on vérifie aisément que :

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \quad , \quad \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \tan x \underset{0}{\sim} x.$$

A.2 Variations de la fonction sinus

Puisque la fonction sinus est 2π-périodique et impaire, il suffit de connaître ses variations sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

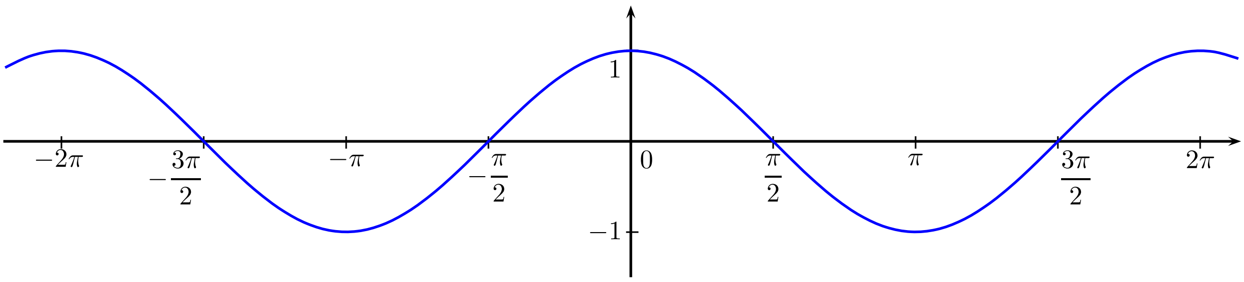


$y = \sin x$

A.3 Variations de la fonction cosinus

La fonction cosinus est 2π-périodique et paire, il suffit donc de connaître ses variations sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x = -\sin x$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



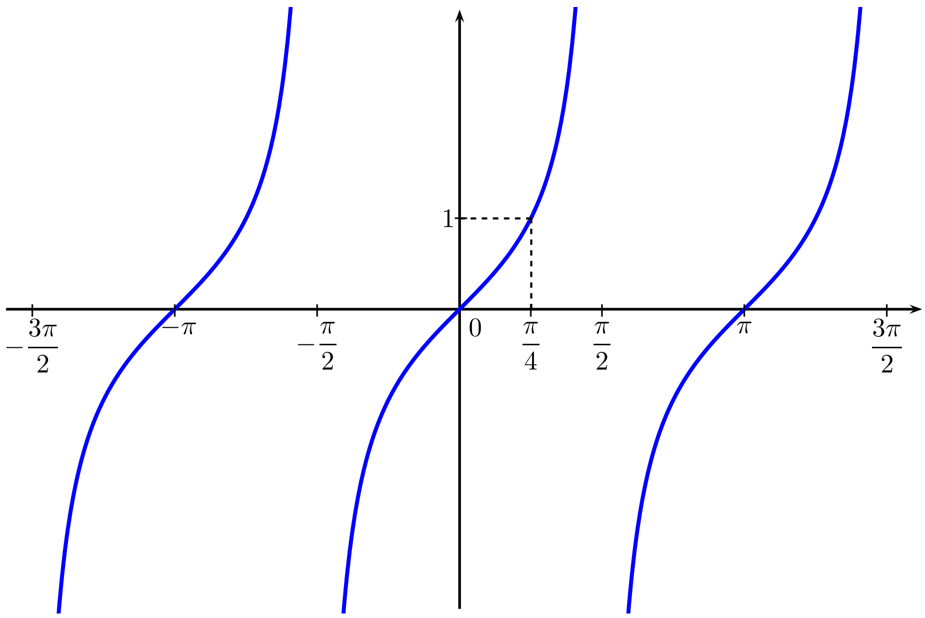
$y = \cos x$

A.4 Variations de la fonction tangente

La fonction tangente est π-périodique et impaire, il suffit donc de connaître ses variations sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour en déduire ses variations sur son ensemble de définition.

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$ donc la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x = 1 + \tan^2 x$	1	$+$	$\|$
$\tan x$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$



$y = \tan x$

Il faut prendre garde au fait que la fonction tangente n'est pas globalement croissante puisqu'il s'agit d'une fonction périodique !

B Fonctions réciproques des fonctions circulaires

B.1 La fonction arcsinus

▶ Définition

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image $[-1, 1]$ et on peut définir son application réciproque.

B.1.1 Définition

On appelle *fonction arcsinus*, et on note

$$\operatorname{Arcsin} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \mapsto \operatorname{Arcsin} x \ ,$$

l'application réciproque de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

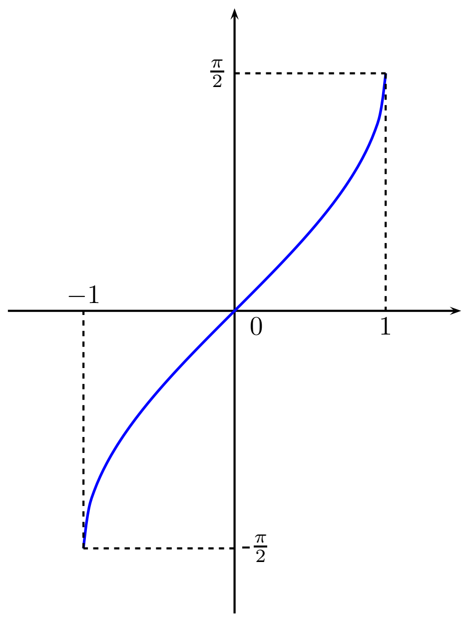
B.1.2 Remarques

- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ est la mesure d'angle *comprise* entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$.
- Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\operatorname{Arcsin}\big(\sin x\big) = x$.

▶ Étude des variations de la fonction arcsinus

Les variations de la fonction arcsinus sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont les mêmes que celles de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	-1		0		1
$\operatorname{Arcsin} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



$y = \operatorname{Arcsin} x$

B.1.3 Proposition

La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

B.2 La fonction arccosinus

▶ Définition

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image $[-1, 1]$ et on peut définir son application réciproque.

B.2.1 Définition

On appelle *fonction arccosinus*, et on note

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi], x \mapsto \text{Arccos}\, x \ ,$$

l'application réciproque de la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$.

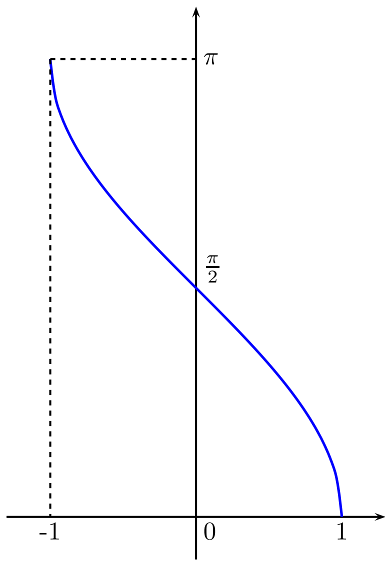
B.2.2 Remarques

- ▶ Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\text{Arccos}\, x$ est la mesure d'angle *comprise* entre 0 et π dont le cosinus vaut x.
- ▶ Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\cos\big(\text{Arccos}\, x\big) = x$.
- ▶ Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $\text{Arccos}\big(\cos x\big) = x$.

▶ Étude des variations de la fonction arccosinus

Les variations de la fonction arccosinus sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont les mêmes que celles de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0, \pi]$.

x	-1		0		1
$\text{Arccos}\, x$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



$y = \text{Arccos}\, x$

B.2.3 Proposition

La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

B.3 La fonction arctangente

▶ Définition

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image $\mathbb{R}$ et on peut définir son application réciproque.

B.3.1 Définition

On appelle *fonction arctangente*, et on note

$$\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, x \mapsto \operatorname{Arctan} x\ ,$$

l'application réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

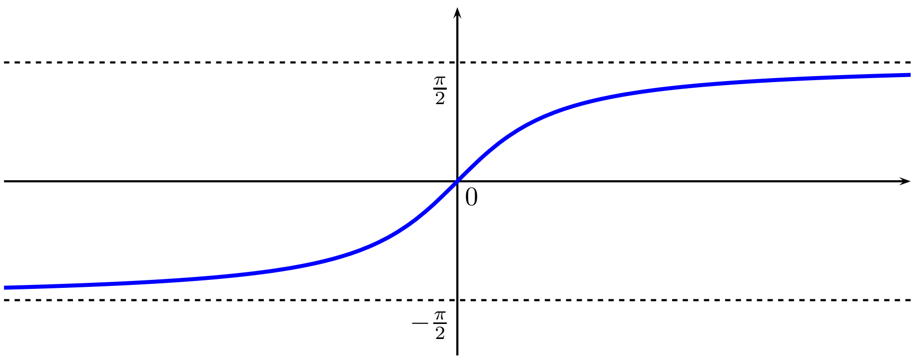
B.3.2 Remarques

- ▶ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ est la mesure d'angle *comprise* entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.
- ▶ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tan\big(\operatorname{Arctan} x\big) = x$.
- ▶ Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\operatorname{Arctan}\big(\tan x\big) = x$.

▶ Étude des variations de la fonction arctangente

Les variations de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$ sont les mêmes que celles de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{Arctan} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



$y = \operatorname{Arctan} x$

B.3.3 Proposition

La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

B.4 Deux relations remarquables entre les fonctions trigonométriques

Exercice

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}.$$

Solution

Soit $x \in [-1,1]$, on note $\alpha = \operatorname{Arcsin} x$ et $\beta = \operatorname{Arccos} x$, alors

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sin\big(\operatorname{Arcsin} x\big) = x \\ \cos\beta = \cos\big(\operatorname{Arccos} x\big) = x \end{cases}$$

On a donc $\sin\alpha = \cos\beta$ d'où (c'est une formule de trigonométrie classique) $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$.

La fonction Arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction Arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$ donc $\beta \in [0,\pi]$, d'où $\frac{\pi}{2} - \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, on a $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ alors que α et $\frac{\pi}{2} - \beta$ sont dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur lequel la fonction sinus est bijective. Par conséquent $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ *i.e.* $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Exercice

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solution

Pour tout $x \neq 0$, on pose $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$.

La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \operatorname{Arctan}'(x) + \operatorname{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Il s'ensuit que la fonction f est constante *sur chacun des intervalles* sur lesquels elle est définie *i.e.* il existe une constante c telle que l'on ait $f(x) = c$ pour tout $x > 0$ et il existe une constante d telle que l'on ait $f(x) = d$ pour tout $x < 0$.

On a $f(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

On a $f(-1) = \operatorname{Arctan}(-1) + \operatorname{Arctan}\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ donc $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout $x < 0$.