GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

GUÍA TEÓRICA

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN PRIMER CICLO

Construyendo
la Base de los
Aprendizajes

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

PROPUESTA EDUCATIVA
EDUCACIÓN PARA VIVIR MEJOR

PROGRAMA CONSTRUYENDO LA BASE DE LOS APRENDIZAJES (CON BASE)

LUIS ABINADER
PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA

RAQUEL PEÑA
VICEPRESIDENTA DE LA REPÚBLICA

ROBERTO FULCAR
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Con el apoyo técnico y financiero de

unicef

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

Estimados docentes:

En el marco del Modelo Educativo "Educación para Vivir Mejor", que estamos impulsando, ponemos en tus manos las guías teóricas y didácticas de Lengua Española y Matemática, cuyo propósito es fortalecer el proceso de enseñanza en el Primer Ciclo del Nivel Primario, por lo que nos enfocamos en la alfabetización inicial y el desarrollo del pensamiento lógico de nuestros estudiantes.

El proceso de formación de todo individuo inicia con el desarrollo del pensamiento lógico y la alfabetización, que es la puerta de acceso y la base fundamental del conocimiento. Desde hace mucho tiempo esta última ha sido una tarea social pendiente. Es tiempo de prestarle atención e implementar las propuestas basadas en la evidencia que nos ofrece la investigación neurocientífica.

Por esta razón, el Programa Construyendo la Base de los Aprendizajes (Con Base), que llevamos a cabo con el apoyo del Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia (UNICEF), inicia con un proceso de formación teórico-práctico que busca fortalecer las competencias de los docentes para desarrollar procesos educativos vanguardistas e innovadores centrados en generar aprendizajes en los niños, por medio de estrategias y actividades lúdicas motivadoras.

Cada guía contiene seis secuencias basadas en el currículo de cada grado. Al final de estas se ofrecen orientaciones didácticas para los estudiantes que requieren apoyo adicional, así como criterios para la valoración de los aprendizajes. De igual forma, cada estudiante tendrá un fascículo con los insumos necesarios para realizar las actividades de aprendizaje.

Estamos comprometidos con apoyarles para que puedan encarar con calidad esta misión, cuya ejecución contiene importantes desafíos, por lo que no escatimaremos esfuerzos para proveerles los recursos que se requieran y así lograr que nuestros estudiantes desarrollen la compresión lectora y el pensamiento lógico, y con ello garantizar su aprendizaje a lo largo de toda la vida.

Apreciados colegas les invitamos a que juntos continuemos el camino hacia la calidad educativa con la dedicación, entrega y compromiso que les caracteriza.

¡Seguimos apostando al cambio de la educación dominicana!

Un abrazo fraterno,

Dr. Roberto Fulcar Encarnación
Ministro de Educación

Guía teórica Enseñanza de la Matemática en el primer ciclo

Coordinación general desde UNICEF: Lissette Núñez Valdez, Oficial de Educación.

Coordinación general desde el equipo MINERD: Elvira Blanco B.

Coordinación general del equipo de producción: Irene Kit.

Revisión técnica Ministerio de Educación: Cilia Quezada, asesora pedagógica; Norma Familia, técnico nacional de primaria; Aury Pérez, técnico de currículo en el área de matemática; Edwin Ortiz, técnico nacional de primaria; Altagracia Miguelina Abreu Casado, técnico nacional de primaria.

Revisión editorial desde UNICEF: Yina Guerrero y Ana Bencosme.

Revisión de contenido: Rosa Divina Oviedo, consultora UNICEF.

Autores: Marta Ester Fierro, Sergio España, Graciela Chemello y Mónica Agrasar.

Revisión autoral: Silvia Gabriela Pérez y Victoria Rusconi.

Corrección de estilo: Austria G. Holguín.

Diseño y diagramación: Lourdes Periche Agencia Creativa.

Diseñadora en jefe: Lourdes Periche.

Coordinación desde L Periche: Cristina Pujol.

Diseñador gráfico: Luis Isidor.

GUÍA TEÓRICA

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN EL PRIMER CICLO

Contenido

CAPÍTULO I: MARCO CURRICULAR DEL ÁREA DE MATEMÁTICA PARA EL PRIMER CICLO DEL NIVEL PRIMARIO 7

Autor: Sergio España

1. **El enfoque curricular** 7
2. **Las competencias** 8
3. **Orientaciones metodológicas** 11
4. **La enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en el primer ciclo** 13
5. **Principios de gestión pedagógica** 14

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO DEL ÁREA DE MATEMÁTICA PARA EL PRIMER CICLO DEL NIVEL PRIMARIO 17

Autoras: Graciela Chemello y Mónica Agrasar

1. **Introducción** 17
   a. Enseñar y aprender Matemática hoy 18
   b. Los sentidos de la Matemática y de su aprendizaje en la escuela 18
   c. ¿Cómo pensar la Matemática para enseñarla? 20
   d. ¿Qué es entonces saber Matemática? 21
   e. ¿Qué hacer en la escuela? 22
2. **La planificación de la enseñanza a través de problemas** 23
   a. ¿Qué problemas elegir? 23
   b. ¿Siempre conviene que los problemas sean tomados de situaciones cotidianas? 24
   c. ¿Es necesario incluir el uso de material concreto para resolver los problemas? 24
   d. ¿Cómo relacionar las operaciones con los problemas? 25
   e. ¿Por qué incluir distintas formas de representación? 26
   f. Varios problemas ¿una secuencia? 27
   g. ¿Por qué juegos en el aprendizaje de la Matemática? 28
   h. ¿Cómo desarrollar las clases? 29

i. ¿Qué debieran hacer los estudiantes en la clase de resolución de problemas? 30
j. La evaluación para la toma de decisiones 31
k. La interacción en el aula y el aprendizaje de la Matemática 32

CAPÍTULO III: LAS SECUENCIAS MÁS DE CERCA 35

Autora: Marta Ester Fierro

1. Características de las secuencias 35
a. ¿Qué aprendizajes promueven estas secuencias? 35
b. ¿Con qué criterios se organizaron estas secuencias de matemática? 36
c. ¿Qué estructura tienen las secuencias para plasmar lo planteado? 38
2. Profundización en la resolución de problemas en estas secuencias 41
a. ¿Qué se entiende por problema? 41
b. ¿Qué implica resolver un problema? 42
c. ¿Por qué en las secuencias de Matemática se prioriza la competencia de resolución de problemas? 42
d. ¿Por qué proponer variedad de problemas en diferentes contextos de uso? 43
e. ¿En qué consiste el trabajo matemático en la resolución de problemas? 44
f. ¿Por qué promover el trabajo con otros en la resolución de problemas? 45
g. ¿Qué significa modelizar las operaciones? 45
h. ¿Qué es el sentido de un conocimiento? 46
i. ¿Qué plantea la teoría de los campos conceptuales? 47

CAPÍTULO IV: LOS CONTENIDOS EN LAS SECUENCIAS 49

Autora: Marta Ester Fierro

1. La enseñanza del número y de la numeración 49
a. ¿Es lo mismo hablar de número que de numeración? 49
b. ¿En qué situaciones es necesario usar los números? 50
c. ¿Qué diferencias hay entre recitar la serie numérica, contar y conservar una cantidad discreta? 50
d. ¿Qué se propone hoy para enseñar la noción de número? 53
e. ¿Qué caracteriza a nuestro sistema de numeración decimal? 54
f. ¿Cuáles son las recomendaciones actuales para la enseñanza de la numeración? 56
g. Sintetizando 58
h. Alcances del contenido en los diferentes grados 59
2. La enseñanza de las operaciones 60
a. ¿Cuáles son los sentidos del campo aditivo? 60
b. ¿Cuáles son los sentidos del campo multiplicativo? 63

c. ¿Cómo enseñar las operaciones? 66

i. ¿Cómo trabajar la construcción de la noción de cada operación? 66

ii. ¿Cómo abordar la enseñanza del cálculo? 67

d. Alcances del contenido en los diferentes grados: 71

i. Sentido de las operaciones 71

ii. Resolución de cálculos y conteos 72

3. Otros contenidos enseñados en las secuencias 75

a. Mediciones 75

b. Geometría 76

c. Estadística 77

4. Errores en el proceso de aprendizaje matemático 78

a. ¿Cuál concepción sobre los errores se tiene actualmente? 78

b. ¿Cuáles pueden ser las causas de un error? 79

c. ¿En qué ocasiones surgen estos errores? 80

d. ¿Cuáles errores son frecuentes? 81

e. ¿Cómo aprovechar los errores? 84

Mensaje final 85

REFERENCIAS 87

I.

CAPÍTULO I.

MARCO CURRICULAR DEL ÁREA DE MATEMÁTICA PARA EL PRIMER CICLO DEL NIVEL PRIMARIO

Autor: Sergio España

1. El enfoque curricular

Los documentos curriculares del Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD) dan elementos valiosos para estructurar la estrategia de alfabetización inicial. Entre ellos:

- La caracterización de las competencias de Lengua Española y Matemática que se espera desarrollar en el primer ciclo.
- Las pautas metodológicas.
- Las pautas para la formación en servicio y de articulación para la inserción institucional de las propuestas metodológicas.
- Las secuencias didácticas como concepto instrumental articulado con el resto de instrumentos de planificación de la enseñanza y del aprendizaje.

Se reseñan a continuación los principales elementos que se deben tomar en cuenta.

El Diseño Curricular brinda un marco de referencia teniendo en cuenta para el diseño de las propuestas de la enseñanza y del aprendizaje, que se fundamenta en "una filosofía y práctica pedagógica, el constructivismo socio-crítico usa la problematización, es decir, el cuestionamiento informado de la realidad como medio para develar el origen social de los problemas humanos, y el diálogo y la colaboración como herramientas para superarlos. En este contexto, la alfabetización y la escolarización cobran un sentido especial"; y agrega "No se trata de solo descifrar y producir códigos de manera mecánica, sino de entender cómo se construyen y transforman los significados en el curso de las interacciones sociales".

Ello supone una metodología que permita la apropiación del sistema de la palabra escrita y el sistema numérico a través de procesos de comprensión y de uso como instrumento comunicacional; no mediante la copia y memorización de grafemas o números sin significados. Esta metodología requiere de tiempo y dedicación para que el niño genere interiormente el significado a partir de integrarlo con sus conocimientos previos y poner en marcha complejos circuitos cerebrales que no son genéticos, sino que son construidos especialmente en un proceso muy trabajoso que involucra habilidades cognitivas y emocionales muy importantes. El tiempo de construcción de esos circuitos requiere en sus inicios una atención plena por parte del niño, y un estado emocional de absoluta confianza, que le permita ensayar y asumir errores sin temor. Por otro lado, ese tiempo de trabajo interior debe estar acompañado por las intervenciones del docente, que les den a los estudiantes los elementos necesarios para superar en cada caso el desafío de lo que no dominan aún.

Ese proceso es muy delicado, y suele estar expuesto a dos riesgos que se deben tener en cuenta. Por un lado, muchas veces se cree que es tiempo perdido porque el estudiante no exterioriza los procesos interiores que se están produciendo. Frente a ello, se suele interrumpir ese proceso interior dando las soluciones al estudiante, abortando así el trabajo y generando sensación de impotencia en el niño.

Otras veces, en cambio, se cree que ese proceso ocurre solo, sin intervención del docente que lo ayude, generando el mismo resultado: el desaliento y la interrupción del proceso en los niños que no lograron resolverlos solos. Es muy importante que el docente encuentre el punto justo de acompañamiento de cada niño, que no lo apresure, pero tampoco lo abandone.

El Diseño Curricular también destaca que "desde la perspectiva socio-crítica se reconoce que los discursos que se manejan en la escuela dan forma a procesos que tradicionalmente son considerados individuales, tales como la atención y la percepción, la generalización y la abstracción, la deducción y la inferencia, el razonamiento y la solución de problemas, la imaginación, la reflexión, el autoanálisis y la toma de conciencia de los propios pensamientos, motivos, afectos y concepciones". Si bien estos fenómenos ocurren dentro de cada individuo, sabido es por los aportes fundamentales de Lev Vigotsky que son producto de la interacción con los demás. En el aula, compañeros y docentes son los vínculos que estimulan permanentemente esos procesos, por lo cual ya no pueden ser considerados individuales, sino colectivos.

El documento Bases de la Revisión y Actualización Curricular expone ciertas claves que resaltan la importancia del proceso de alfabetización y sus implicaciones didácticas. "La centralidad del lenguaje como modelo principal para la comunicación, el pensamiento y la coordinación de acciones; y la unidad de lo cognitivo y lo afectivo expresada en la construcción de significados y la elaboración de sentidos subjetivos. Desde estas claves, la pedagogía cobra un significado particular, pues asume su misión no sólo vinculada a la didáctica de saberes, sino a la formación de conciencias y subjetividades. Esta pedagogía da énfasis a la comprensión de las complejas relaciones entre lenguaje, pensamiento y afectividad"[1].

Ello refuerza la importancia de la alfabetización para la formación integral de las personas. Un buen desarrollo de las capacidades lectoras, de producción de mensajes, de interpretación, ayudará a los niños a construir identidades más sólidas y en condiciones de integrarse con el resto. Por otro lado, es un llamado para que la didáctica dé plena atención a las habilidades sociales y emocionales, no solo a las cognitivas.

Reconoce en esas relaciones la materia prima para la construcción de conocimiento y, a partir de ese reconocimiento, opta por estrategias que promuevan la comprensión y uso del lenguaje y de otras herramientas culturales. Su meta última es el desarrollo de capacidades para la reflexión crítica, la evaluación, la investigación y la acción comprometida con la solución de problemas. Es por ello que el constructivismo socio-crítico es la forma de constructivismo más congruente con el enfoque histórico-cultural, y las metas se traducen en capacidades que se deben desarrollar en procesos de enseñanza y de aprendizaje.

2. Las competencias

El Diseño Curricular identifica entre sus componentes las competencias fundamentales y las específicas propias de las áreas curriculares, los contenidos que a su vez pueden ser conceptuales, procedimentales y actitudinales, y son vistos como mediadores para el desarrollo de las competencias y los indicadores de logro como referentes para medir el logro de las competencias. Es necesario identificar el significado de cada uno de ellos y articularlos correctamente para que las actividades permitan los aprendizajes esperados en los estudiantes. Las estrategias que se despliegan en estos módulos intentan brindar los elementos para ayudar a los docentes a esa articulación en los contextos concretos de trabajo, que registren las características del grupo de clase a su cargo en el centro educativo donde se desempeñan.

El Diseño Curricular define las competencias como "el dominio efectivo de las habilidades que una determinada sociedad acuerde como necesarias para afrontar los problemas y aportar soluciones"[2]; y como "la capacidad para

1 MINERD (2014), *Bases de la Revisión y Actualización Curricular, p. 35.*

2 MINERD (2014), *Bases de la Revisión y Actualización Curricular, p. 36.*

actuar de manera eficaz y autónoma en contextos diversos movilizando de forma integrada conceptos, procedimientos, actitudes y valores". Señala también que "las competencias se desarrollan de forma gradual en un proceso que se mantiene a lo largo de toda la vida, tienen como finalidad la realización personal, el mejoramiento de la calidad de vida y el desarrollo de la sociedad en equilibrio con el medio ambiente".

Las competencias se refieren a la capacidad para actuar de manera autónoma en contextos y situaciones diversas, movilizando de manera integrada conceptos, procedimientos, actitudes y valores. No se restringen a las habilidades cognitivas o al grado de eficiencia en la ejecución, implican un conjunto mucho más complejo que incluye motivaciones, emociones y afectos que están situados y son mediados culturalmente.

El valor de ese concepto deriva de su vinculación con la actividad reflexiva del sujeto, del énfasis en la movilización de los conocimientos para la realización efectiva de la actividad. Es una didáctica orientada a la activación y utilización de conocimientos pertinentes para afrontar las situaciones y problemas que plantea el contexto de la actividad misma.

La realización óptima de la actividad depende de la apropiación y del uso de estrategias accesibles en el medio sociocultural y de la capacidad de movilizarse para gestionar herramientas a las que no se tiene acceso. Esta capacidad de autogestión y de autorregulación en el uso de los conocimientos no se genera de forma espontánea. Es el resultado de un proceso de aprendizaje que el currículo puede guiar, pero que corresponderá al sistema educativo como totalidad hacer funcionar.

Aquí hay que destacar la importancia de la formación docente y poner en el centro las competencias que debe desarrollar en su profesionalización.[3]

El desarrollo de competencias en el proceso formativo de los docentes implica la capacidad de organizar los aprendizajes para gestionar su progreso, elaborar y monitorear formas que permitan la diferenciación, motivar a los estudiantes a involucrarse en sus propios procesos de aprendizaje y en el trabajo en equipo. Sólo con la apropiación y el uso de estas competencias podrá el docente aspirar a apoyar el desarrollo de las competencias fundamentales definidas en este currículo.[4]

Asimismo, el currículo identifica tres tipos de competencias: las fundamentales, las específicas y las laborales profesionales. Los módulos que se presentan se enfocan en las fundamentales, en tanto ellas incluyen la alfabetización en sus diversos estadios y el dominio de las nociones matemáticas. Se exponen a continuación las consideraciones curriculares que sostienen esta focalización:

- Las Competencias Fundamentales expresan las intenciones educativas de mayor relevancia y significatividad. Son competencias que permiten conectar de forma significativa todo el currículo. Son esenciales para el desarrollo pleno e integral del ser humano en sus distintas dimensiones, y se sustentan en los principios de los derechos humanos y en los valores universales. Describen las capacidades necesarias para la realización de las individualidades y para su adecuado aporte y participación en los procesos democráticos de cara a la construcción de una ciudadanía intercultural que contemple la participación, el respeto a la diversidad, la inclusión de todos los sectores y grupos de la sociedad.
- "Las Competencias Fundamentales del currículo dominicano son la Competencia Ética y Ciudadana; la Competencia Comunicativa; la Competencia de Pensamiento Lógico, Creativo y Crítico; la Competencia de Resolución de Problemas; la Competencia Científica y Tecnológica; la Competencia Ambiental y de la Salud; la Competencia de Desarrollo Personal y Espiritual".

---

3 MINERD (2014), *Bases de la Revisión y Actualización Curricular, p. 34.*
4 *Op cit. p. 35.*

- "La Competencia Comunicativa está íntimamente relacionada con las restantes seis Competencias Fundamentales. Es un apoyo indispensable para el ejercicio de las demás y a la vez todas ellas proporcionan contextos de aplicación para su desarrollo".[5]

Las secuencias propuestas abordan estrategias y metodologías para el desarrollo de las competencias comunicativas, pensamiento lógico y resolución de problemas. Ello no significa que se desestime el trabajo sobre el resto de las competencias: la focalización solo refiere al apoyo a los docentes para la preparación de los procesos de enseñanza-aprendizaje de Lengua Española y Matemática, de forma interdisciplinaria.

Es importante destacar que estas propuestas no afectan el tiempo escolar que se debe dedicar al resto de las áreas. Solo se plantea dedicar especial atención a la lectura, la escritura y la Matemática por la prioridad que se ha dado a esos aprendizajes; sin requerir para ello más horas de clase que las previstas para esas áreas. Se trata de un cambio cualitativo –el modo de enseñar– no cuantitativo que vaya en desmedro de otros aprendizajes.

Se ratifica así la prioridad que debe darse a esta competencia, que es importante en sí misma y es trascendente para el desarrollo de las otras competencias. Es decir, cuanto mejor se adquieran y automaticen las destrezas involucradas en la lectura y la escritura, el dominio del código y del principio alfabético, más posibilidades tendrán los estudiantes de aprender lo necesario para desarrollarse en las competencias fundamentales como ética ciudadana, resolver problemas y entrar en el conocimiento científico y tecnológico. Más aún, hay suficiente evidencia de que la competencia comunicativa es decisiva para avanzar en esas otras dimensiones. Es por ello fundamental dar plena atención a estos aprendizajes, no temer "perder tiempo en ellos" y dedicarles todos los esfuerzos necesarios.

También los documentos curriculares aportan definiciones sobre los contenidos: "son mediadores de aprendizajes significativos. Son los conocimientos o saberes propios de las áreas curriculares. Los contenidos constituyen una selección del conjunto de saberes o formas culturales del conocimiento cuya apropiación, construcción y reconstrucción por parte del estudiantado se considera esencial para el desarrollo de las competencias".[6] Como se ve, esta propia definición da las bases para la articulación entre competencias y contenidos. El docente debe seleccionar los contenidos que se van a trabajar en función de las competencias que se deben desarrollar. Este es un cambio significativo en relación con otros enfoques curriculares y con la tradición escolar que toman los contenidos como "un fin en sí mismo", no como un instrumento para el desarrollo de la capacidad.

Los procedimientos son contenidos referidos a cómo hacer, es decir, estrategias de acción para transformar la realidad o para organizarse mejor. Son "modos de hacer" en y sobre la realidad. Han sido definidos como "un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a alcanzar un propósito determinado". Existen procedimientos de distintos tipos y de distintos grados de complejidad. El propio Diseño Curricular da ejemplos de procedimientos, tales como atarse los cordones de los zapatos, lavarse los dientes, escribir; y que "en todos los campos del saber y del hacer existen procedimientos. El empleo de buenos procedimientos permite utilizar más y mejores conceptos según las circunstancias e incluso construir otros nuevos, permite manipular información y datos con menores esfuerzos".[7]

La lectura, la escritura, el manejo de información numérica, la seriación y clasificación, la comparación, el dominio del sistema alfabético, la representación del espacio, son procedimientos que se trabajan intensamente en estos módulos. Es de destacar que las secuencias didácticas se apoyan en conceptos como la recurrencia de las actividades, que justamente remiten a desarrollar ciertas formas de trabajo con un orden y reiteración intencionados

5 MINERD (2014), *Bases de la Revisión y Actualización Curricular, p. 67*

6 MINERD (2014), *Bases de la Revisión y Actualización Curricular, p. 43.*

7 MINERD (2014), *Diseño Curricular Nivel Primario, Primer Ciclo (1ro., 2do. y 3ro.), p. 30.*

para que los estudiantes dominen esos procedimientos. Se evitan expresamente actividades episódicas, que pueden ser ocasionalmente interesantes, pero no dejan huella de aprendizaje.

En cuanto a los criterios para la selección y organización de los contenidos, el currículo recomienda "tener presente la concepción de educación asumida, las características de las personas en las distintas edades y etapas de su desarrollo, la variedad, diversidad, flexibilidad, apertura y la articulación vertical y horizontal". Es necesario dosificar los desafíos que se proponen a los niños, con foco siempre en el desarrollo de las competencias fundamentales. Solemos tener la tentación de avanzar hacia contenidos más complejos, por ejemplo, cuestiones de ortografía o gramática cuando se trabaja aún con los primeros pasos del código alfabético, o las operaciones antes de consolidar ciertas nociones matemáticas básicas.

De este modo, el currículo armoniza las estrategias de enseñar contenidos y competencias. "Dado que los contenidos son mediadores de aprendizajes significativos, el criterio fundamental para su selección es su capacidad de aportar al desarrollo de las competencias. Una vez se ha formulado una competencia, el siguiente paso es preguntarse qué contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) son necesarios para su desarrollo".

La Competencia Comunicativa requiere la aplicación del conocimiento del sistema y las normas del modelo en que se produce la comunicación. En el caso de los sistemas lingüísticos que implican las diversas lenguas, es indispensable el conocimiento de las unidades y las funciones que se manifiestan en el léxico, la sintaxis, entre otros aspectos.[8]

3. Orientaciones metodológicas

Para el desarrollo de las competencias "es necesario que el estudiante enfrente distintas situaciones y aplique sus conocimientos, habilidades, actitudes y valores en diversos contextos. Los docentes cumplen un papel fundamental, pues son responsables de planificar y diseñar estas experiencias que permitirán poner en práctica las competencias, así como también de ofrecer acompañamiento y retroalimentación durante el proceso. Al diseñar las situaciones de aprendizaje se debe tomar en cuenta que las Competencias Fundamentales se desarrollan de manera interactiva. Se denomina situación de aprendizaje o didáctica a las circunstancias creadas sobre la base de la realidad con el propósito de que el estudiante construya y aplique determinados conocimientos o saberes."[9]

El Diseño Curricular ofrece importantes definiciones hacia una metodología fundamentada en la activa participación de los estudiantes, con base en secuencias didácticas que lo guíen desde un orden programado por el docente. Ellas orientan las propuestas metodológicas que desarrollan los presentes módulos:

- "Las estrategias de enseñanza y de aprendizaje constituyen la secuencia de actividades planificadas y organizadas sistemáticamente para apoyar la construcción de conocimientos en el ámbito escolar, en permanente interacción con las comunidades".[10]
- "Cada actividad tiene una finalidad y esa finalidad está vinculada a la solución de problemas en contextos en los que se requiere la integración de saberes y la superación de la forma fragmentada y reduccionista de la enseñanza tradicional".

8 *Op. cit, p. 66.*

9 *Op cit. p. 45.*

10 *Op cit. p. 45.*

- El valor formativo de la realización de cada actividad "depende de la apropiación y del uso de estrategias accesibles en el medio sociocultural y de la capacidad de movilizarse para gestionar herramientas a las que no se tiene acceso. Esta capacidad de autogestión y de autorregulación en el uso de los saberes no se genera de forma espontánea".

En este mismo documento también se destacan estrategias y técnicas:

- Estrategias de recuperación de experiencias previas. Además de involucrar los sentidos, orienta a los docentes a valorizar los conocimientos de los estudiantes, incluso los más pequeños, sobre conceptos que la escuela debe sistematizar. Es fundamental recuperar después, en actividades grupales conjuntas, las percepciones de todos los estudiantes.
- Estrategias de descubrimiento e indagación para el aprendizaje metodológico de búsqueda e identificación de información y de formas adecuadas de experimentación, según las edades y los contenidos que se van a trabajar. Estas estrategias son particularmente adecuadas para ser utilizadas al abrir o al cerrar una secuencia de aprendizaje, ya que permiten integrar contenidos de diversas matrices conceptuales y metodológicas. (p. 48)
- Estrategias de socialización centradas en actividades grupales. El grupo permite la libre expresión de las opiniones, la identificación de problemas y soluciones en un ambiente de cooperación y solidaridad. Algunas de las estrategias de socialización que se pueden organizar y llevar a cabo son las dramatizaciones y el canto, entre otras.
- Estrategia de indagación dialógica o cuestionamiento. Mediante esta estrategia se formulan preguntas a lo largo del proceso de enseñanza y de aprendizaje: al inicio para introducir un tema o motivar, durante el desarrollo para verificar la comprensión y al finalizar para evaluar. Al momento de cuestionar es importante tener clara la intención y relacionarla con los contenidos y con los intereses de los estudiantes. Debe también darse oportunidad para preguntar, enseñándoles a construir y plantear preguntas que no se limiten a una sola respuesta, promoviendo una participación activa y una actitud inquisitiva para favorecer el desarrollo del pensamiento analítico y reflexivo.

El Diseño Curricular brinda definiciones para orientar la gestión pedagógica hacia el logro de las competencias asumidas en el Nivel de Dominio para el primer ciclo:

- Aprendizaje Basado en Problemas. El objetivo final de esta estrategia es que la resolución del problema propicie que "el estudiantado investigue sobre los contenidos seleccionados previamente por el docente. Supone un proceso de aprendizaje para aprender a problematizar la realidad, para analizarla separando los elementos y factores que la conforman". (p. 38)
  Pasos del Aprendizaje Basado en Problemas. Preguntarse cuál es el problema por resolver; identificar en el grupo los propósitos de la resolución del problema, es decir, qué se quiere lograr; se plantean posibles soluciones al problema para seleccionar las más adecuadas y se comunican la o las soluciones, o de lo contrario, se plantean nuevas opciones para su solución.
- El juego, elemento primordial en las estrategias para el aprendizaje. Se lo caracteriza como un conjunto de actividades agradables, cortas, divertidas, con reglas que permiten el fortalecimiento de los valores: respeto, colaboración grupal e intergrupal, responsabilidad, solidaridad, confianza en sí mismo y en los demás, seguridad, amor al prójimo, además de que fomenta el compañerismo para compartir ideas, conocimientos e inquietudes. El juego es una estrategia que favorece la integración del conocimiento y ayuda a crear un ambiente propio desde sus necesidades e intereses, además de canalizar su energía y curiosidad, ampliar sus competencias comunicativa, cognitiva y creativa. (p. 40)

Todas estas estrategias recomendadas por el currículo están presentes en las diversas actividades y tareas propuestas en las secuencias didácticas incluidas en los presentes módulos. Al trabajarlas, los docentes estarán aplicando en el aula dichas estrategias de manera sistemática.

4. La enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en el primer ciclo

El currículo brinda definiciones fundamentales que deben ser tenidas en cuenta para la interpretación de las propuestas de los presentes módulos. Entre ellas:

- La alfabetización matemática se entiende como la "capacidad para identificar y comprender el papel que desempeña la matemática en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar la matemática y comprometerse con ella, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo". La competencia matemática implica entonces el dominio de las destrezas superiores del pensamiento matemático, tales como analizar, razonar y comunicar eficazmente en la formulación y resolución de problemas matemáticos en una variedad de contextos y situaciones.
- El desarrollo de la alfabetización inicial en matemática requiere que los estudiantes se involucren de forma activa y frecuente en actividades contextualizadas. Esto implica que el modo en que se enseña la matemática es tan importante como la finalidad misma de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
- Los procesos orientados al desarrollo de competencias matemáticas deben partir de la experiencia, necesidades, intereses y motivaciones de los estudiantes, y girar en torno a la resolución de problemas —como competencia, como estrategia y como eje articulador de aprendizaje— y a la discusión y reflexión a partir de lo realizado. En el proceso de resolución de problemas, los estudiantes ponen en juego sus conocimientos matemáticos y no matemáticos, los modifican y establecen nuevas relaciones; asimismo utilizan sus estrategias personales de resolución; reconstruyen nuevos conocimientos matemáticos y desarrollan el razonamiento, el pensamiento crítico y creativo, y la comunicación matemática.[11]
- En el Nivel Primario, los problemas que se planteen y las experiencias que se desarrollen deben ser de naturaleza esencialmente intuitiva en situaciones y contextos diversos, incluyendo los de carácter lúdico y la manipulación de objetos concretos cuando la situación lo requiera. Estas experiencias son el punto de partida para el desarrollo de las competencias matemáticas. A partir de esta etapa específica se realizan otras actividades que permiten dar el paso a distintos tipos de representaciones y a la abstracción y formalización creciente de los contenidos estudiados. En otras palabras, el símbolo o el concepto es el punto de llegada, no el de partida.
- Desarrollar el pensamiento lógico se refiere al proceso de abstracción mediante el cual se independizan los conceptos de sus usos y representaciones, y se relacionan y jerarquizan, se encadenan proposiciones y a partir de ellas se construyen conclusiones o juicios. Estas conclusiones pueden ser construidas por deducción, inducción o analogía. El ejercicio del pensamiento lógico se apoya en la observación, la comparación, la clasificación y análisis de los datos, las informaciones, los objetos y fenómenos. Esta forma de pensamiento es esencial para la construcción y evaluación de argumentos y para la toma de decisiones.[12]

11 MINERD (2014), *Diseño Curricular Nivel Primario, Primer Ciclo (1ro.,2do. y 3ro.), p. 71.*

12 MINERD (2014), *Bases de la Revisión y Actualización Curricular, p. 72.*

5. Principios de gestión pedagógica

Estas guías didácticas se basan en una serie de conceptos pedagógicos consistentes con los expresados por los documentos curriculares vigentes, que es oportuno exponer para posibilitar la interpretación de la propuesta. Una primera definición: en ellos se focalizará la atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la lectura, la escritura y la matemática en el primer ciclo sin pretender abarcar todas las áreas del conocimiento establecidas por el currículo. Es una enseñanza intradisciplinar. Ello parte de reconocer que:

- Los referidos aprendizajes involucran habilidades complejas, que requieren serios esfuerzos por parte de los estudiantes. Su desarrollo necesita un trabajo sistemático y sostenido por parte de los docentes, lo cual impone una concentración en cada paso.
- Del dominio de la lectura, la escritura y la matemática dependerá —en buena medida— las posibilidades de los otros aprendizajes en Ciencias Sociales, Ciencias de la Naturaleza, entre otras, en tanto los estudiantes tendrán la capacidad de comprender lo que leen, estudiar desde los textos en diversos soportes, preguntar, responder, tomar nota, y construir razonamiento lógico. Son habilidades cognitivas básicas, decisivas para abordar el horizonte de conocimientos que la escuela pretende generar.
- Es importante tener en cuenta que se propone la priorización en las actividades de formación docente. No se propone disminuir el tiempo ni la intensidad del trabajo con los estudiantes sobre el resto del currículo previsto para 1.º y 2.º grados. Solo se trata de preparar cuidadosamente las clases de Lengua Española y de Matemática, siguiendo las propuestas metodológicas con el acompañamiento del equipo técnico y el seguimiento del equipo de gestión.
- Los referidos aprendizajes requieren de un proceso continuo e integrado que abarca por lo menos dos años consecutivos de enseñanza sostenida, y un tercero que permite consolidar los mecanismos y nociones fundamentales.

Una segunda definición tiene que ver con el proceso de formación y acompañamiento a los docentes, al cual se integran estos módulos. Las experiencias regionales muestran la eficacia de estrategias de formación en servicio que incluyen instancias presenciales, asistencia situada y materiales de apoyo como estos módulos. Son tres elementos que combinados se potencian y complementan en tanto propician un diálogo sistemático entre teoría y práctica que permita a los docentes una gradual apropiación del enfoque. Una de sus claves es concebirlo como un proceso gradual que comienza con la aplicación muy pautada al inicio de las propuestas de enseñanza; sigue con la reflexión guiada sobre la experiencia generada en la aplicación de las propuestas en el aula, y culmina con la elaboración de los docentes de sus propias actividades de enseñanza.

Es fundamental dar suficiente tiempo y atención a cada uno de esos pasos. Pretender saltar rápidamente al siguiente paso anula la riqueza de la experiencia. Asimismo, la instrumentación de las acciones de formación y acompañamiento de los docentes deberá tener en cuenta los ritmos de aprendizaje y los conocimientos previos de los propios docentes, lo cual requerirá de diagnósticos y ajustes de las propuestas formativas a las características de los docentes participantes.

En esa estrategia formativa, las guías juegan un papel de soporte permanente, tanto para cada uno de los pasos como para la visión global del proceso. A tales efectos, incluye:

- Los fundamentos conceptuales para interpretar el sentido de las propuestas y la articulación entre la enseñanza y el aprendizaje; evitando que la aplicación no sea una actividad mecánica con escaso valor real. El propósito es que la aplicación sea una sucesión de vivencias y aprovechamiento de las situaciones de aprendizajes auténticos que se dan en las aulas.

- Propuestas metodológicas concretas para planificar las actividades de enseñanza, que ayuden al docente a visualizar con ejemplos claros qué y cómo plantear las actividades en el aula.
- Orientaciones para la reflexión posterior a la aplicación de las secuencias didácticas en el aula; actividad que deben desarrollar los docentes en grupos, con apoyo de los coordinadores de ciclo y de equipos técnicos. Esa metacognición es el paso clave para pasar de la aplicación a la apropiación de las estrategias.

Con esta intención, las guías fueron preparadas con una estructura que propicia un diálogo fluido entre la teoría y la práctica, con formatos que sirven tanto para el trabajo de preparación en el seno del equipo docente de cada escuela como para trazar la hoja de ruta de los formadores y el trabajo de los asistentes técnicos que colaboran desde las direcciones departamentales y desde las instituciones que brindan apoyo a las escuelas.

II.

CAPÍTULO II.

MARCO TEÓRICO DEL ÁREA DE MATEMÁTICA PARA EL PRIMER CICLO DEL NIVEL PRIMARIO

Autoras: Graciela Chemello y Mónica Agrasar

1. Introducción

Hoy la sociedad reclama cada vez más a todo ciudadano una formación que le permita enfrentarse a situaciones muy diversas y cambiantes que requieren interpretar información y tomar decisiones para encontrar nuevas respuestas o formular nuevas preguntas.

Frente a esta necesidad, reconocida en los diseños curriculares de los países de la región, cabe preguntarse cuál es el aporte de la escuela a esta formación en un marco social complejo que la interroga acerca de qué oportunidades de aprendizajes es capaz de generar y sostener.

En principio, se necesita formular propuestas educativas que tengan en cuenta la singularidad de cada situación de enseñanza y de aprendizaje, en las que se interrelacionan un docente, un grupo de estudiantes y un saber dentro de un contexto sociocultural determinado.

Las investigaciones y los diseños curriculares actuales señalan la importancia de organizar actividades que enfrenten a los estudiantes de la escuela primaria a "problemas" de distintos tipos para que elaboren procedimientos propios de resolución, y que luego puedan comparar las producciones realizadas, analizar su validez y producir textos con información matemática avanzando en el uso del lenguaje apropiado. Se busca que los estudiantes puedan hacerse preguntas y producir afirmaciones sobre los números y las operaciones, determinando en qué casos son válidas, y que puedan explicar sus conocimientos matemáticos estableciendo relaciones entre ellos.

Esta perspectiva pretende formar un ciudadano autónomo que pueda desplegar prácticas matemáticas diversas, adecuadas a distintas situaciones lo que supone, además de poder resolver problemas nuevos, tener control sobre los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos, y emplear los modos de hacer, comunicar y pensar propios de la disciplina.

Las propuestas de enseñanza, entonces, tienen que adoptar formas diferentes según cada necesidad y cada contexto, reconociendo y aceptando como un hecho natural la diversidad de ideas, experiencias y actitudes de los estudiantes, de sus estilos y ritmos de aprendizaje, de capacidades y habilidades, de intereses y expectativas ante el aprendizaje escolar.

Para promover el éxito de estos aprendizajes, cada escuela y cada docente podrá elaborar una propuesta de enseñanza con las siguientes características:

- Que incluya a todos los estudiantes, cualesquiera que sean sus puntos de partida, contemplando la composición diversa de estos grupos y aprovechar como factor de enriquecimiento de los aprendizajes.
- Que se proponga la formación de estudiantes autónomos, promoviendo la reflexión sobre lo aprendido, aun con los más pequeños.
- Que adopte un modelo de intervención y ayuda pedagógica sobre la base de propuestas didácticas adaptadas a la capacidad, ritmo, motivación, intereses, posibilidades, otros, de cada estudiante.

- Que incluya la concepción de la evaluación como un elemento esencial para la mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
- Que conciba el trabajo en equipo como facilitador de la construcción cooperativa del conocimiento.
- Que dé lugar a la expresión y producción individual de cada estudiante.
- Que brinde los apoyos necesarios para garantizar las trayectorias de aprendizaje de todos los estudiantes.
- Que forme parte de un proyecto institucional articulado, flexible y adecuado a las necesidades de la comunidad de la que forma parte la escuela.

En los materiales que aquí se presentan, se abordarán aspectos centrales de la tarea de enseñar Matemática desde las actuales perspectivas didácticas dadas por el currículo y que están estrechamente relacionados con la necesidad de promover mejores aprendizajes para todos, teniendo en cuenta que las primeras experiencias en la escuela son vitales tanto para construir el sentido que los niños podrán atribuir a la Matemática como para desarrollar confianza en sus posibilidades de aprenderla.

Analizar cómo influye la gestión de la clase en el tipo de aprendizaje que logren los estudiantes, qué sentido tiene aprender matemática, qué se entiende por enseñar matemática a través de la resolución de problemas y qué se concibe como problema, nos brindará elementos para encontrar nuevos sentidos en las prácticas áulicas.

Las Guías Didácticas contienen una propuesta de actividades organizadas en secuencias de enseñanza que fueron pensadas para desarrollar algunos contenidos sobre números y operaciones, explicando orientaciones sobre la planificación y su práctica en el aula, así como los criterios que orientan la evaluación desde esta perspectiva. Es importante recordar que en estas secuencias se encuentran desplegadas las diversas estrategias de enseñanza que el currículo recomienda para el abordaje de las competencias y contenidos establecidos en el mismo.

a. Enseñar y aprender Matemática hoy

El gran desafío que se presenta hoy al enseñar Matemática es que los estudiantes, además de adquirir técnicas, aprendan en qué situaciones pueden utilizarlas y recurran a ellas en forma autónoma, de control sobre los resultados que obtienen y los procedimientos que usan, pudiendo evaluar su adecuación y sus límites en relación con la situación que interesa resolver.

La escuela, que tiene el rol fundamental de ir introduciendo los conocimientos matemáticos de modo sistemático, deberá entonces dar al estudiante la oportunidad de construir y aplicar ese conocimiento, es decir, de aprender una matemática con sentido. Pero, ¿qué entendemos por aprender una "matemática con sentido"?

b. Los sentidos de la Matemática y de su aprendizaje en la escuela

Si se concibe la matemática como una serie de resultados que están allí, que deben ser aprendidos: definiciones, propiedades, técnicas de resolución, y que los estudiantes solo deben enunciar las propiedades y manejar esas técnicas cuando se les soliciten de manera explícita, entonces se enseña de cierta forma y los estudiantes solo construyen un "sentido escolar" para esas actividades. Veamos un ejemplo:

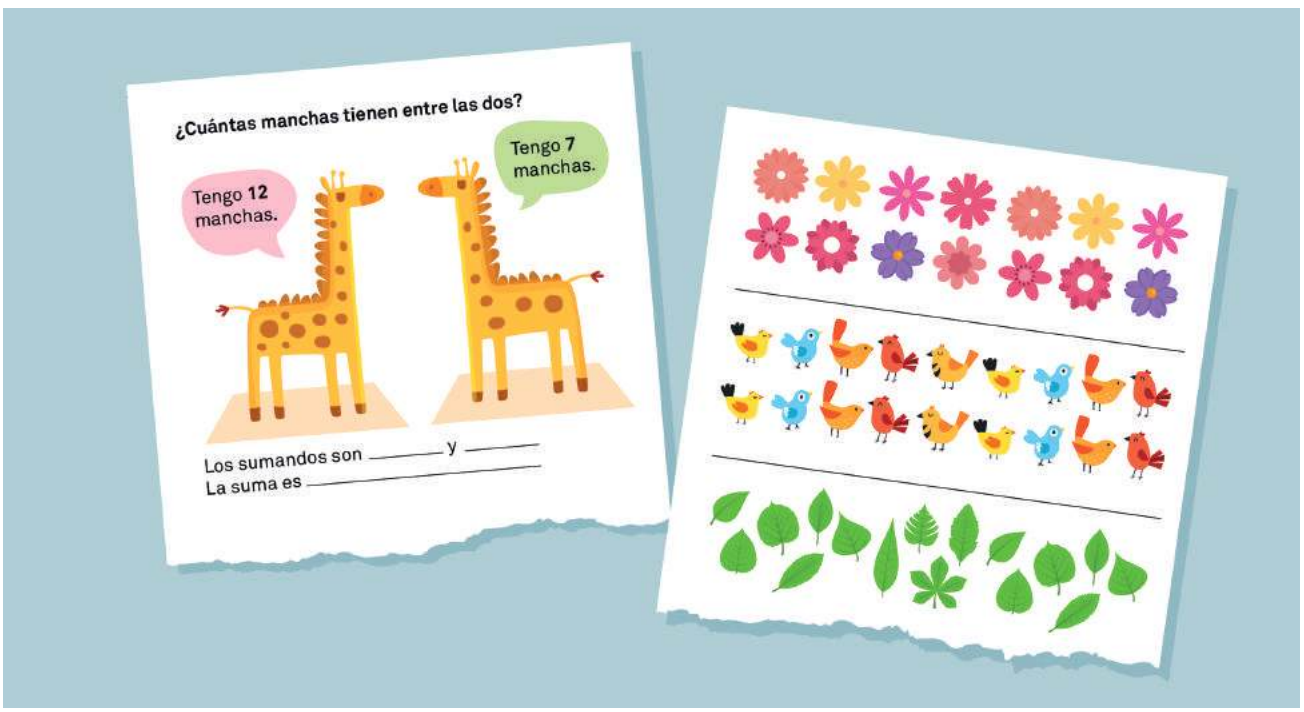
Entrevistador: —¿Para qué sirve sumar?
Alumno: —Para aprender los problemas.
E: —¿Y para qué más?
A: —Para sumar cosas.
E: —¿Sumar cosas, para qué sirve?
A: (silencio)
E: —¿Hacer problemas para qué te sirve?

A: —Para aprender más las sumas, las multiplicaciones, las restas.
E: —¿Y aprender más las sumas, para qué te sirve?
A: —Para pasar de curso, para sumar diez más quince.
E: —¿Y eso para qué te sirve?
A: —Para los problemas.
E: —¿Para algo más?
A: (Piensa largo rato) —Para sumar quince más diez, para sumar muchos números.
E: —¿Sirve para algo más?
A: (Piensa largo rato como si no se atreviese a decir que no)
E: —Puedes decirme lo que quieras, yo no se lo diré a nadie. ¿Te sirve para algo hacer sumas?
A: —Para saber restar.

Estas entrevistas[13] fueron realizadas hace casi ya 30 años, ¿qué responderían hoy los estudiantes de nuestras escuelas?

Esta concepción se ha construido, por ejemplo, a partir de la reiteración de propuestas de enseñanza como las siguientes:

Cuento y escribo cuántos hay
¿Qué lleva a contar flores, pajaritos, hojas?
¿Quién necesita hacerlo y para qué?
¿Por qué podría ser pertinente saber el resultado de sumar las 7 manchas de una jirafa más las 12 de la otra?



En ambos casos, la actividad tiene algún sentido solo en el ámbito de la escuela, y la posibilidad de utilizar lo aprendido en otras situaciones de la vida cotidiana queda a cargo de los niños, y no es interesante ni mucho menos automática.

13 *Moreno, M. y otros (1983) La enseñanza de la Matemática y el aprendizaje de la alienación, en La pedagogía operatoria. Laia. Barcelona*

En el caso particular de los "problemas de enunciado", plantear cuestiones como, por ejemplo, averiguar cuántos ratones cazaron entre dos gatos o cuántos pajaritos quedaron en el árbol si había 25 y se volaron 17, solo contribuye a instalar un cierto funcionamiento escolar en el que los problemas son 'de suma' cuando en el enunciado dice en 'total o entre todos' y son 'de resta' si dice 'quedaron'.

Frente a este tipo de propuestas, muchos estudiantes se adaptan y avanzan asumiendo que "hay que hacer" lo que indica el docente, pero otros tienen dificultades porque no comprenden por qué se hace una operación u otra.

Cuando se presenta un nuevo desafío que "no se parece" a las actividades realizadas en la escuela, aún los estudiantes que han tenido cierto éxito escolar pueden encontrar dificultades. Otros estudiantes no pueden relacionar lo que saben con las exigencias escolares, bajan los brazos y se asumen como poco capacitados para la matemática. Numerosas investigaciones muestran que niños que "no resuelven bien" en la escuela, pueden realizar actividades matemáticas complejas fuera de la escuela.

> *Por ejemplo, un niño que puede dar correctamente el cambio de 200 en la venta de un producto que cuesta 35 en una situación real de compra y venta, cuando se le pide en la escuela que resuelva 200 - 35, obtiene 90, y explica:…5 para llegar a cero, nada, llevo 1; 3 para llegar a 12, faltan 9. Aparentemente, al decir llevo 1, el niño transforma el 2 del 200 en 12.*[14]

Esta experiencia muestra que concebir que lo que tienen que saber los niños al finalizar la escuela es solamente un conjunto de resultados y técnicas memorizadas, no resulta operativo en términos de asegurar la disponibilidad de lo estudiado. Estas técnicas, cuya justificación no se trabaja, suelen olvidarse o confundirse.

El tipo de trabajo que suele proponerse en la escuela en relación con la enseñanza de las operaciones da lugar a la idea de que para cada problema hay un cálculo y una solución.

De este modo muchos estudiantes se hacen la idea de que para cada problema hay un único cálculo y una solución que el docente conoce; que deben descubrir que para hacer ese cálculo deben seguir determinados pasos y no otros. Esta situación se opone claramente al tipo de trabajo matemático que deseamos que se desarrolle en la escuela, y para evitarla, resulta imprescindible considerar una perspectiva alternativa desde la cual se presenta este trabajo con secuencias didácticas.

c. ¿Cómo pensar la Matemática para enseñarla?

Se ha dicho muchas veces que la matemática es un cuerpo de conocimientos lógicamente organizado, o también que es un lenguaje que permite expresar ideas abstractas. Sin embargo, nuestra perspectiva pone el foco en otro aspecto que considera que la matemática es un campo de conocimientos en el que trabaja una cierta comunidad que desarrolla prácticas de producción. Las nociones que se crean y recrean en estas prácticas van evolucionando con el tiempo y adquiriendo distintas formas, según los usos que de ellos hacen distintos grupos culturales en distintas instituciones. Estas prácticas, estas "formas de hacer" surgen para dar respuesta a ciertos tipos de problemas y se caracterizan por un modo particular de razonar tomando ciertos puntos de partida y de comunicar los resultados utilizando un lenguaje específico.

Desde esta perspectiva, todo estudiante que posea una alfabetización básica puede iniciarse en estas prácticas estudiando una matemática con sentido y reconociendo el valor que estos conocimientos tienen para su vida.

14 *Al respecto puede consultarse: Carraher T, Carraher., D y Schliemann A. En la vida diez; en la escuela, cero. 1999. Siglo XXI México*

En principio, una característica de esta práctica es que los conocimientos matemáticos producidos permiten anticipar el resultado de algunas acciones sin realizarlas efectivamente.

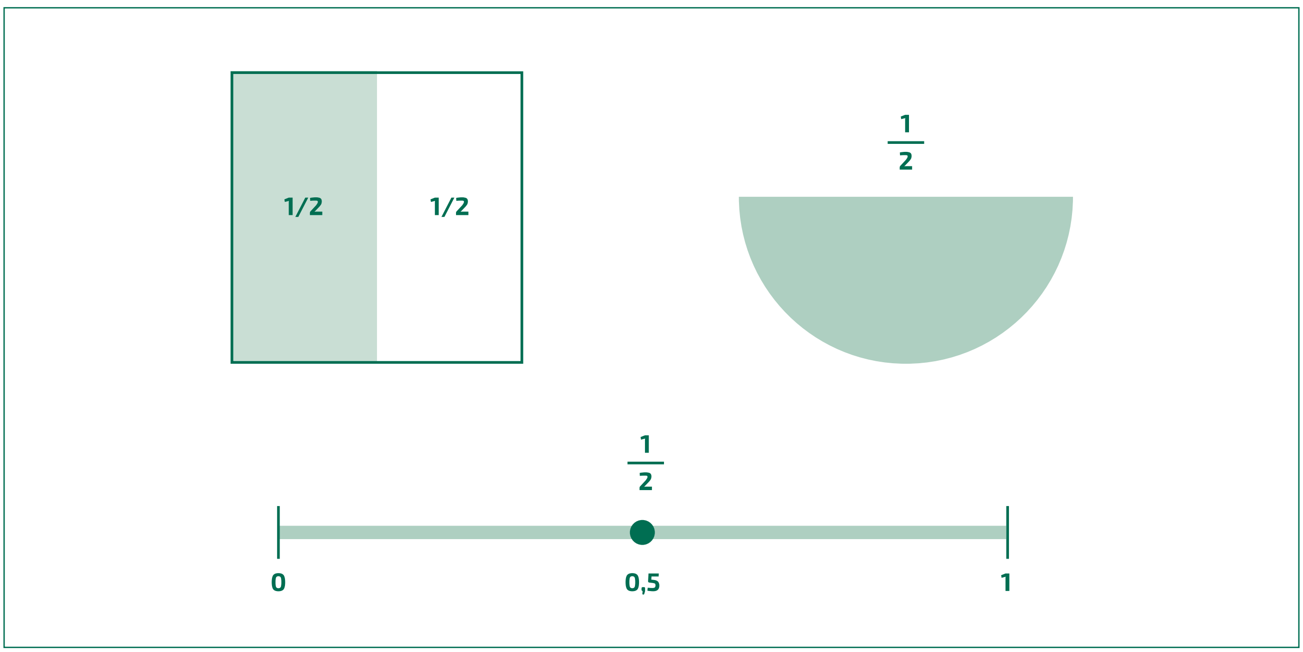
Por ejemplo, si se quieren usar 4 huevos para una receta y 3 para otra, es posible asegurar que se necesitan 7 huevos sumando 4 más 3, sin necesidad de contar las unidades.

Otra característica importante es que los resultados se consideran necesariamente verdaderos si para obtenerlos se han respetado ciertas reglas matemáticas, y en este sentido, es vital poder identificar cuáles son las reglas que garantizan la validez de lo que se hace.

Por ejemplo, sabiendo que 4 + 3 = 7, podemos asegurar que 4 + 4 = 8 sin hacer la cuenta, pues al comparar las sumas, como el segundo sumando tiene una unidad más, el resultado tendrá una unidad más.

A la vez, los números, las figuras y las relaciones tienen variadas representaciones cuyo uso se acuerda entre los matemáticos y que nos permiten trabajar con los objetos matemáticos. De este modo, la posibilidad de avanzar en la comprensión de una noción implica reconocerla en sus distintas representaciones, pudiendo elegir la más conveniente y pasar de una a otra en función del problema por resolver.

Por ejemplo, la idea de mitad puede escribirse como 1/2; 0,5; 0,50; 50% según la situación en la que se usa, y también representarse gráficamente de distintas maneras.



d. ¿Qué es entonces saber matemática?

Desde esta perspectiva, entendemos entonces que saber matemática requiere dominar los conocimientos de esta disciplina para utilizarlos como instrumentos en la resolución de problemas, y también para definirlos y reconocerlos como objetos de una cultura a través de un lenguaje específico.

Así, los estudiantes deben poder, además de enunciar propiedades y utilizar técnicas en un cierto tipo de registro formal, reconocer las ocasiones de uso de la matemática que aprenden, estableciendo relaciones con las prácticas de su entorno social y anticipando los desafíos de su vinculación con otros mundos de conocimiento.

Los estudiantes tienen que aprender que existen determinadas herramientas y un modo de trabajar propios de la matemática que son útiles para enfrentarse a ciertos problemas, y que ellos deben ir afinando su dominio en las distintas etapas de estudio. Pero esas herramientas tienen su razón de ser y no son creaciones escolares arbitrarias.

Asociar la enseñanza de cada conocimiento matemático a sus "razones de ser" es considerar que la matemática, aún la más elemental, ha sido generada para dar respuesta a situaciones.

> *Así, contar una colección para saber cuántos hay y registrar la cantidad permite volver a ella cuando sea necesario; por ejemplo, saber cuántas cabras se llevan a pastar permite saber al regresar si están todas o alguna se perdió, saber cuántos niños hay en un aula permite decidir cuántas sillas poner o cuántos cuadernos necesitan.*

Lograr autonomía en el trabajo matemático es crucial para cualquier estudiante; es decir, todos debieran poder utilizar dentro y fuera de la escuela la matemática que se les enseñó, en la situación que lo necesite, sea una situación de estudio, de trabajo, o cualquier otra, pudiendo tener control sobre ese uso.

e. ¿Qué hacer en la escuela?

Para que ocurra este tipo de aprendizaje los estudiantes deberían, en principio, resolver problemas mediante procedimientos que ellos produzcan, tomando decisiones en ese proceso en función de lo que saben, para arribar luego a distintas técnicas disponibles para las diferentes situaciones planteadas. Luego de la resolución, habrá que plantear preguntas que permitan a los estudiantes reflexionar sobre los conocimientos utilizados por ellos para explicar o fundamentar lo realizado, y el docente tendrá que realizar una síntesis, introduciendo el vocabulario y las escrituras específicas que se requieran. No se propone una resolución única para los problemas al inicio de la clase para luego escribirla en el cuaderno y ejercitarla.

La idea es que, según lo que el docente decida, cada niño o cada grupo vaya escribiendo el procedimiento que "inventa" en su cuaderno. Cuando todos tienen su resolución, se explican los procedimientos distintos o se escriben en el pizarrón para que se pueda debatir, se analizan las distintas formas de hacerlo, se explican los errores y, con la ayuda del docente, se obtienen conclusiones para todos.

Estas conclusiones serán el punto de partida para que el docente vincule lo que se produce en clase con las escrituras más formales o las técnicas a las que desee arribar como meta, en un proceso que llevará tiempo y actividades secuenciadas convenientemente.

Así, cada estudiante podrá trabajar en nuevos problemas en forma individual a partir de lo que sabe, no sólo resolviendo, sino también inventando otros o elaborando más preguntas. De esta forma se promueve un aprendizaje colectivo, cooperativo, que se complementa con actividades individuales en las que el estudiante vaya afianzando sus potencialidades.

Este modo de enseñar matemática es diferente del modelo en el que el docente es el que sabe y muestra y el niño escucha, copia y repite. Se parte del convencimiento de que todos los estudiantes pueden construir su aprendizaje, todos pueden "hacer matemática".

2. La planificación de la enseñanza a través de problemas

Aprender matemática está estrechamente ligado a la resolución de problemas, y en esta actividad están presentes las formas propias de la disciplina para representar, definir y comunicar procedimientos y resultados tanto en forma oral como escrita. Esto se realiza en el marco de un trabajo colaborativo entre pares y con el docente, quien siempre incluye el análisis del campo de validez de las producciones obtenidas.

Desde esta perspectiva, la resolución de problemas es la estrategia de enseñanza privilegiada, y por eso nos detendremos en especificar qué entendemos por "problema", qué problema es importante presentar y cómo conducir estas clases.

a. ¿Qué problemas elegir?

Partimos de la formulación siguiente, planteada en términos cognitivos, donde la "dificultad" refiere al conflicto entre lo ya conocido por quien aprende y un medio problemático al que habrá que adaptar los conocimientos iniciales para generar unos nuevos.

> *"Se entiende por problema toda situación que lleve a los alumnos a poner en juego los conocimientos de los que disponen pero que, a la vez, ofrece algún tipo de dificultad que torna insuficientes dichos conocimientos y fuerza a la búsqueda de soluciones en las que se producen nuevos conocimientos modificando (enriqueciendo o rechazando) los conocimientos anteriores".*
> *(Brousseau en Parra, Broitman e Itzcovich, 1996, p. 6)*[15].

Si nos referimos a los problemas en relación al modo en que están presentes en ellos los conocimientos matemáticos, podemos decir que estos aparecen contextualizados, funcionando en una situación y no formalmente expresados en una definición.

Al resolver la situación, los conocimientos matemáticos se usan y se transforman, lo que permite generar una respuesta; tienen el carácter de "herramienta" para el trabajo matemático.

> *Por ejemplo, si se trata de sumar 8 + 5 + 7 + 2 + 3 + 4 y se reagrupa mentalmente 8 + 2 y 7 + 3 para obtener 10 y facilitar el cálculo, se están usando como herramientas las propiedades asociativa y conmutativa de la suma.*

Ahora bien, en la enseñanza, el proceso no termina allí. Es necesario descontextualizar los conocimientos utilizados, precisarlos y darles una forma coherente con el modo en que son conocidos en la cultura matemática, acercándolos a su formulación como "objetos" teóricos. Esto último es lo que permitirá luego reconocerlos y utilizarlos nuevamente en otras situaciones.

> *Por ejemplo, si se pregunta si es cierto que para sumar y restar se puede cambiar el orden de los números, explorando si 2 + 8 es igual que 8 + 2, 8 - 2 es igual que 2 - 8, se trata de estudiar como objeto la propiedad conmutativa determinando para qué operaciones vale.*

Así, a lo largo de una clase, de varias, o de una secuencia se da un juego entre ambos caracteres, "herramienta" y "objeto" que va contribuyendo de la noción que se estudia.

15 *Todos pueden aprender Matemática en 2.º, p 47*

b. ¿Siempre conviene que los problemas sean tomados de situaciones cotidianas?

El plantear que los conocimientos matemáticos se presentan contextualizados en los problemas, nos lleva a interrogarnos sobre qué contextos serán los más adecuados para la enseñanza de cada una de las nociones que se van a enseñar.

En principio, al elegir los problemas, es esencial revisar las instrucciones que se presentan, pues muchas veces se incluyen preguntas que carecen de sentido en sí mismas, pues no aluden a problemas reales o posibles. Tal como se muestra en un ejemplo anterior, no tiene sentido sumar las manchas de dos jirafas.

Por otra parte, es tan importante que los contextos se refieran a situaciones o escenas de la vida cotidiana retomando una variedad de experiencias de los estudiantes en su comunidad, como que acerquen otras realidades más o menos lejanas pero interesantes y posibles de ser comprendidas a través de información ofrecida por distintos medios: imágenes, libros, programas de televisión, videos o páginas en Internet.

Estos contextos que llamamos extramatemáticos se diferencian de aquellos que denominamos matemáticos, y deben incluirse también para completar el estudio de las distintas nociones. Estos últimos implican preguntar sobre números, operaciones o figuras para establecer relaciones entre ellos y avanzar en un uso cada vez más general y posible de ser aplicado a futuro.

> *Por ejemplo, cuando se pregunta “Empiezo con 2 y soy mayor que 28. ¿Quién soy?” al estudiar la serie numérica o cuando se propone comparar dos procedimientos de cálculo para ver si son o no correctos.*

Lo que resulta central en todos los casos es que el contexto sea significativo para los estudiantes, es decir, que los conocimientos involucrados en el problema deberán ser interesantes para ellos e implicarán un desafío que puedan resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y sus experiencias sociales y culturales previas.

La significatividad está dada así por la posibilidad de relacionar lo que se pregunta con lo conocido en relación con la matemática (significatividad cognitiva) y en relación con sus experiencias de vida (significatividad cultural).

c. ¿Es necesario incluir el uso de material concreto para resolver los problemas?

Dada la gran difusión que ha tenido esta idea como caracterizando una enseñanza constructivista, muchas veces se piensa que es necesario manipular material concreto. para los estudiantes pequeños poder resolver los problemas.

Sin embargo, la respuesta a la pregunta no puede formularse de manera general. Según el conocimiento que se quiere enseñar y según el propósito del docente, el material puede estar o no a disposición de los estudiantes, teniendo en cuenta que el desafío ha de ser siempre intelectual.

Si se busca avanzar en la producción de un registro de la cantidad, es necesario ofrecer situaciones en las que haya que contar efectivamente elementos estableciendo la correspondencia entre cada uno de ellos y la serie oral al ir pasando uno a uno, al ordenarlos o agruparlos. En este sentido, siempre habrá que ofrecer colecciones de objetos suficientemente grandes que sirvan de apoyo para el conteo y tengan sentido de ser contados: lápices o tazas para ver si alcanzan para todos los chicos, colecciones de caracoles, semillas, figuritas, pelotas que van aumentando.

Si, en cambio, se busca pasar del conteo al cálculo, se debe combinar la presencia del material con preguntas desafiantes que den lugar a la anticipación de la respuesta previamente a la verificación a través del conteo del material.

Por ejemplo, supongamos que en un primer grado, después de una actividad, el docente guarda en una caja 7 tijeras que fueron usadas por un grupo de estudiantes; después, a la vista de todos, agrega 4 tijeras que usó otro grupo, y luego otras 5 de otro. A continuación les pregunta a los estudiantes si pueden decirle cuántas tijeras hay en la caja para saber si están todas las que había en total. Algunos estudiantes podrían realizar un dibujo de las tijeras, otros marcar palitos y contar, otros podrían recurrir a los dedos, y otros efectuar cálculos.

Frente a esta diversidad, el docente propone discutir los resultados y comunicar los procedimientos, y luego de esta discusión, cuentan las tijeras de la caja.

Si antes de verificar el resultado deben anticiparlo, y se comprueba contando los objetos, el material concreto no impidió que hubiera actividad matemática por parte de los estudiantes. Si la exigencia del uso del material concreto es planteada por el docente al inicio y para todos los estudiantes, se olvida que una de las principales características de la actividad matemática es que es una actividad intelectual y no empírica y, a la vez, se impide que sea el alumno quien decida el procedimiento a utilizar.

Por otra parte, en relación con el uso muy difundido de materiales específicos para apoyar la enseñanza del sistema de numeración, la investigación didáctica ha mostrado que resulta más potente para el aprendizaje apoyarse en los conocimientos de la serie oral y el análisis de las características de la serie escrita que recurrir a dichos materiales. Asimismo, se ha comprobado que muchos estudiantes aprenden a manipular el material sin establecer relaciones con el sistema de numeración, por lo tanto no pueden despegarse de su uso y no avanzan en la comprensión de la representación decimal de los números.

d. ¿Cómo relacionar las operaciones con los problemas?

En el caso de las operaciones básicas con números naturales, hasta hace poco tiempo, no nos habíamos detenido a considerar que los problemas aritméticos que se resuelven con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones tienen diferentes niveles de dificultad, no solamente por la técnica operatoria, sino también por la naturaleza de los datos y por la estructura matemática del problema; es decir, por las relaciones que existen entre los datos. Resulta entonces que, con una misma operación, es posible resolver un cierto conjunto de problemas de diferentes niveles de dificultad.

La naturaleza de los datos y las diferentes relaciones entre ellos dan lugar a considerar diferentes significados para una misma operación.

Por ejemplo, podemos enunciar problemas distintos que se resuelvan sumando 4 + 5:

—Me regalaron 5 dulces y yo tenía 4 dulces guardados ¿Cuántos tengo ahora?

—Alejandro llevó a la escuela 4 dulces y 5 bombones. ¿Cuántas golosinas llevó?

—Estaba en el casillero 4 de un juego de la Oca y saqué 5 al tirar el dado ¿A qué casillero debo mover mi ficha?

En el primer caso las cantidades son del mismo tipo (dulces) y se trata de “agregar” una cantidad a otra. En el segundo, son cantidades de dos clases distintas (dulces y bombones) y se trata de reunir esas cantidades en una sola clase (golosinas). En el tercer caso, los números ordenan (los casilleros) y se trata de avanzar en la serie. Así para la suma podemos encontrar problemas en los que se trata de agregar, de reunir o de avanzar.

De modo similar, la resta no tiene el mismo significado cuando se usa para calcular cuánto quedó después de quitar una cantidad que cuando se usa para encontrar un complemento.

Por ejemplo, los siguientes problemas pueden resolverse calculando 9 - 4, pero las situaciones son distintas:

—Si teníamos 9 dulces y comimos 4, ¿cuántos quedaron?

—Tengo 9 dulces, 4 son de naranja y los otros de limón. ¿Cuántos son los dulces de limón?

Los estudios didácticos muestran que para los estudiantes los problemas con diferente significado implican dificultades diferentes, y por ello es conveniente tenerlo en cuenta al planificar.

Con respecto a los problemas que se resuelven con multiplicaciones, también encontramos diferentes significados posibles. Entre ellos, los problemas donde se involucra el concepto de la proporcionalidad. Este significado permite a los estudiantes comprender las diferencias entre suma y multiplicación, por lo que resulta conveniente para presentar esta operación.

En cambio, la presentación de la multiplicación como suma repetida no pone en juego este concepto, y no contribuye a que los estudiantes avancen en la diferenciación señalada, sino que en ocasiones conduce a confusiones.

Un ejemplo de ello es el problema inventado por un estudiante cuya profesora pidió que crearan un problema que se resolviera haciendo 3 x 3. El niño escribió: Mi mamá tiene 3 cucharas, 3 cuchillos, 3 tenedores. ¿Cuántos cubiertos tiene?

En este caso el problema se resuelve sumando los mismos números y no conlleva la idea de proporcionalidad, de modo que, aunque el resultado numérico es el mismo no tiene sentido resolverlo con una multiplicación.

e. ¿Por qué incluir distintas formas de representación?

Otro aspecto central que es necesario tener en cuenta al proponer problemas es que cada noción matemática, cada relación, cada propiedad, puede ser representada en forma escrita de diferentes formas.

Esta es una cuestión que, en general, no ha sido tenida en cuenta en la enseñanza primaria y, por el contrario, se ha trabajado con una única forma de representación dando por resultado que los estudiantes no puedan reconocer bajo otras escrituras ideas que ya conocen. Así, por ejemplo, reconocen el producto de 17 x 25 en la primera forma, pero no en las otras dos.

a)
$$\begin{array}{r} 17 \\ +\ 28 \\ \hline 45 \end{array}$$

b)

17 + 28 =

10 + 7 20 + 8

30 + 15 = 45

c)

17 + 28 =

30 + 15 = 45

Es por esto que más allá de las distintas representaciones que aparezcan durante la resolución de los problemas también se incluyan actividades específicas para analizar otras escrituras y otros procedimientos para los mismos problemas.

Por otra parte, es importante variar el modo en que se presenta la información en los enunciados de las actividades, alternando distintos tipos de escrituras numéricas, gráficos y expresiones en el lenguaje coloquial.

Es importante que los estudiantes puedan conocer las diversas formas de representar una idea matemática y cambiar la representación según convenga a la situación en la que están trabajando con ella. Al trabajar con distintas representaciones para una misma noción y comparar distintos procedimientos para resolver un mismo problema, a la vez que se habilita la participación de todos, se enriquece el sentido que los estudiantes van construyendo de la noción en estudio.

f. Varios problemas ¿una secuencia?

Si afirmamos que los estudiantes avanzan en la construcción del sentido de los conocimientos matemáticos por medio de la resolución de problemas y de la reflexión sobre estos desde el momento en que se inician en el estudio de la matemática, cabe preguntarse ¿cómo se seleccionan y se organizan estos problemas?, ¿en qué orden?, ¿qué otras actividades plantear?

En principio, según lo que hemos expresado más arriba, debemos tener en cuenta al elegirlos la diversidad de contextos, significados y representaciones propios de la noción matemática que se quiere enseñar. Además, habrá que considerar que, en cada situación, son varias y diferentes las actividades que podrían realizar los estudiantes, entre ellas resolver y dar una respuesta, explicar cómo resolvieron, comparar sus procedimientos con los de otros estudiantes, justificar el porqué de su respuesta, analizar si la explicación o la justificación de otro le parece bien y por qué.

Sin embargo, esta variedad no puede abordarse simultáneamente, y por esta razón se organizan secuencias con propósitos definidos en relación con la enseñanza de un mismo contenido, tomando solamente uno o dos aspectos del mismo.

Esta forma de organizar las actividades de enseñanza tiene varias ventajas. Como cada actividad de una secuencia se apoya en algo elaborado en la actividad anterior, es posible sostener un trabajo articulado en clases sucesivas sobre un mismo contenido. Volver sobre algo que se hizo el día anterior para revisarlo o para usarlo en un nuevo problema, manteniendo el foco de trabajo, permite que los estudiantes que tuvieron dificultades en la primera o segunda actividad encuentren una nueva oportunidad en las siguientes, y que aquellos estudiantes que lo hicieron con más facilidad afiancen lo aprendido o descubran nuevas relaciones. Este trabajo por aproximaciones sucesivas a la noción, el concepto en elaboración que se quiere enseñar da lugar a que más estudiantes avancen en el logro del propósito al que se apunta.

Una secuencia puede tener diferentes duraciones. Cuando requieren de dos o más semanas de trabajo, al finalizar cada etapa de trabajo se revisa el proceso, se recuperan las conclusiones del grupo y se sintetizan los aspectos que se deben recordar, y de esta forma, la síntesis resulta significativa para el grupo de estudiantes. Este modo de elaborar “aquello que hay que saber” como producto del trabajo de la comunidad clase, es para los estudiantes muy diferente que recibirlo como explicación de la maestra al inicio de la clase. Cuando se muestra al inicio “cómo resolver” lo que suele suceder es que algunos estudiantes se adaptan fácilmente a hacer lo que se les dice, aunque no comprendan por qué, mientras que otros se quedan “afuera” y cuando están tratando de sumarse a la actividad ya hay que hacer otra cosa distinta.

La organización en secuencias también permite un mayor control sobre los aspectos del contenido seleccionado y se puede monitorear mejor el avance de cada uno de los estudiantes. Cuando se abordan a la vez muchos contenidos o muchos aspectos de un mismo contenido, resulta difícil detectar a qué causas podrían atribuirse las dificultades de los estudiantes y, en consecuencia, no es posible precisar qué intervenciones serían las más adecuadas para ajustar el trabajo en la clase de modo que todos aprendan.

Es importante tener en cuenta al organizar secuencias, incluir en ellas actividades de familiarización con los conocimientos aprendidos durante la resolución de problemas. Estas son actividades que permiten a los estudiantes avanzar en el dominio de los nuevos conocimientos para que aquello que se aprendió se pueda usar con mayor seguridad y rapidez, y en situaciones cada vez más variadas.

Son, en general, actividades que los estudiantes realizarán en forma individual, cada uno a su ritmo. La cantidad y variedad que cada uno necesite deberá ser decidida por el docente en función de la evaluación que haga del progreso de cada niño.

Los criterios que permiten organizar secuencias dependen de los contenidos seleccionados para enseñar, los propósitos del docente y las competencias que desea desarrollar en los estudiantes. Explicamos algunas a modo de ejemplo:

- Resolver y comparar problemas donde una operación tiene diferentes significados.
- Producir diferentes formas de hacer un cálculo, que las comparen y avancen hacia el algoritmo convencional.
- Producir un repertorio de cálculo e inicien su memorización.
- Recuperar los conocimientos sobre la escritura y orden de números de dos cifras para extenderlo a números de tres cifras.

Dado que en las secuencias que presentamos se mantiene un mismo eje, pero se varían las actividades que realizan los estudiantes y los contextos en los que se presentan los problemas, es importante tener en cuenta que algunas actividades lúdicas, convenientemente seleccionadas y organizadas, pueden constituirse en verdaderos desafíos de aprendizaje para los estudiantes.

g. ¿Por qué juegos en el aprendizaje de la Matemática?

Incluir actividades lúdicas en las secuencias de enseñanza puede ser muy fértil para el aprendizaje pues este tipo de situaciones desarrollan la interacción, la creatividad y la autonomía de los estudiantes. A su vez les permiten gustar de la matemática y verla como un conocimiento dinámico, que les da herramientas para interactuar con su medio. Asimismo, jugar en grupo contribuye a poner en juego la descentración de las propias ideas y estrategias para considerar las de otros, al buscar la mejor estrategia con los integrantes del propio equipo a la vez que se aprende a esperar turnos, esperar a los otros, perder y ganar.

Aunque jugar suele ser una actividad presente en la vida de los niños de muchas comunidades, cuando decimos en estas páginas que los niños aprenden jugando, estamos pensando en la actividad lúdica a disposición del aprendizaje como parte de las actividades planificadas para el aula.

Estas actividades se incluyen dentro de una secuencia de enseñanza, y en este sentido, no es un entretenimiento, sino una herramienta efectiva y útil para aprender determinados contenidos.

> *"El propósito de las actividades lúdicas es recuperar y hacer avanzar los conocimientos matemáticos que poseen los niños y las niñas. Son propuestas que exigen un desafío o un problema, que intentan favorecer la socialización, crecimiento y sistematización de los conocimientos. Pero para lograrlo es necesario un trabajo con continuidad, que permita a los niños y las niñas reorganizar sus estrategias de resolución, abandonar procedimientos erróneos y pensar en relaciones que se generaron en clases anteriores".*[16]

16 *Todos pueden aprender Matemática en 2.º, p 49*

Este tipo de actividades poseen la ventaja de interesar a los estudiantes, con lo que, en el momento de jugar, se independizan relativamente de la intencionalidad del docente y pueden desarrollar la actividad cada uno a partir de sus conocimientos. Así, estudiantes con diferentes conocimientos juegan con diferentes estrategias. También es posible modificar los materiales o las reglas para distintos grupos, lo que permite atender a la diversidad natural de la clase. Por otra parte, también los niños pueden generar modificaciones a los juegos, inventando nuevas reglas.

Pero jugar por jugar no es suficiente para aprender, ya que es la intencionalidad del docente la que marca la diferencia entre el uso didáctico del juego y su uso social.

En el aula, siempre se plantea un momento de reflexión posterior: qué estrategias utilizó cada uno, si todos jugaron de la misma manera o si hay alguna estrategia más eficiente dentro de las utilizadas y se plantean preguntas que lleven a los estudiantes a reflexionar sobre el contenido particular que se está trabajando. Luego se presentan nuevas actividades en la que los estudiantes puedan volver a utilizar los conocimientos aprendidos en tareas diferentes.

Otro valor importante de las propuestas lúdicas es que es posible proponerlas como tarea para la casa en función de distintas necesidades de los niños. Esto da lugar al fortalecimiento de los conocimientos involucrados y puede dar lugar a la aparición de estrategias elaboradas por otros integrantes de las familias, que ponen a los estudiantes en situación de describir y defender o rechazar estrategias que no son propias. Por otra parte, estas propuestas dan ocasión a la familia de participar en el proceso de aprendizaje de los niños, en un apoyo articulado con la tarea del docente.

h. ¿Cómo desarrollar las clases?

Actualmente, instalar en las aulas la resolución de problemas como estrategia docente es un gran desafío, pues en general, los docentes no hemos sido formados desde este enfoque. Para que los estudiantes construyan el sentido de los conocimientos matemáticos además de trabajar con problemas bien elegidos, es necesario que en la clase se desarrollen momentos de trabajo con diferentes propósitos. Consideremos esos momentos y el para qué de cada uno.

Una primera cuestión es atender a la forma de presentación del problema.

El docente organiza a los niños para trabajar en una primera etapa de forma individual o en pequeños grupos, presenta la actividad leyendo el enunciado del problema, explicando las reglas de un juego, dando una instrucción, y se asegura, a través del intercambio oral con los estudiantes, de que dicha actividad tenga sentido para todos ellos.

Luego habrá que dar lugar al trabajo autónomo de los estudiantes, es decir, a un momento de investigación. Para resolver el problema, los estudiantes intentan poner en juego sus conocimientos previos, exploran, hacen observaciones, elaboran estrategias de resolución, y obtienen resultados.

Si el trabajo es grupal, a continuación, habrá que dar lugar en cada grupo a un intercambio de lo producido. Los estudiantes comunican informaciones a sus compañeros utilizando su lenguaje habitual y mejorando eventualmente sus explicaciones para darse a entender a los otros.

Paralelamente, el docente circula por el aula, observa y registra los procedimientos utilizados, detecta las dificultades, pero se abstiene de intervenir dando soluciones; en todo caso, formula nuevas preguntas, a los estudiantes que no están trabajando, para que puedan hacerlo. También va seleccionando qué producciones se pondrán en común.

Finalmente, se organiza un momento de presentación de resultados y balance de lo realizado. Luego de cierto tiempo de trabajo, los equipos que el docente designe pasan a mostrar sus formas de solución al resto. Se comparten y discuten las soluciones presentadas. Los estudiantes argumentan para defender las afirmaciones que hacen sobre los distintos procedimientos, mientras el docente coordina el debate. Por ejemplo, si se trata de un problema que involucra cálculos, se analiza cuáles son los procedimientos más económicos, cuáles los más fáciles, aunque sean más largos, cuáles los que puedan resultar erróneos y las causas del error, las principales dificultades encontradas, otros.

En el caso de que el docente haya observado que los trabajos de los grupos son muy similares, elige para analizar aquellas producciones que permitan generar algún tipo de debate. De otro modo, la comunicación reiterada de un mismo procedimiento no resulta productiva para el conjunto de la clase.

Al analizar las diferentes soluciones, se tendrá que valorizar de igual modo todas las producciones, ya sea que permitan o no llegar a una solución correcta al problema planteado. Es más, muchas veces son las producciones erróneas las que dan lugar a los intercambios más fértiles en relación con el aprendizaje.

Para finalizar el debate no debe faltar la síntesis a cargo del docente y el registro de las conclusiones en el pizarrón, en los cuadernos o en una cartulina que se cuelga en la clase en el que se identifican los conocimientos matemáticos utilizados empleando el vocabulario específico. El docente destaca lo que los estudiantes deben retener y se lo señala.

Sin esta síntesis no es posible que los estudiantes puedan reconocer esos conocimientos y utilizarlos en nuevas situaciones.

A partir de esta síntesis se podrán realizar nuevas preguntas para el problema inicial abriendo una nueva investigación, proponer una nueva actividad, relacionar con otros conocimientos anteriores.

i. ¿Qué debieran hacer los estudiantes en la clase de resolución de problemas?

En este documento han sido planteadas algunas ideas respecto de la enseñanza que forman parte fundamental del marco teórico que este Programa toma como base para desarrollar las propuestas que realiza a los docentes del primer ciclo. Desde esta concepción de la enseñanza, que intenta favorecer la diversidad y provocar evoluciones en el conocimiento, resulta fundamental para los estudiantes:

- involucrarse en la resolución de distintos problemas confiando en sus propias posibilidades de resolverlos;
- elaborar procedimientos propios usando distintas representaciones;
- comunicar a sus compañeros y al docente lo realizado en forma oral y escrita;
- comparar distintas producciones escritas realizadas por los compañeros;
- analizar qué procedimientos son correctos y cuáles no;
- discutir acerca de la posibilidad de utilizar varias formas de resolución para una misma operación o problema;
- decidir cuáles son los procedimientos más convenientes para resolver cada operación o problema;
- abandonar procedimientos inadecuados o poco óptimos para la resolución de los problemas;
- incorporar como propios procedimientos planteados por otros;
- formularse preguntas sobre las formas de resolver y elaborar conjeturas, que luego serán reconocidas como propiedades, y comprobarlas usando ejemplos;
- reflexionar y tomar conciencia de lo que ya saben y de lo que no saben;
- reflexionar acerca de lo que es fácil o difícil para unos y para otros;
- tomar conciencia de lo que se aprende con la resolución de los problemas;
- utilizar estos conocimientos en la resolución de nuevos problemas.

j. La evaluación para la toma de decisiones

Una parte central del proceso de enseñanza es la toma de información sobre sus efectos en los aprendizajes de los estudiantes. En el enfoque que desarrollamos, las actividades que permiten evaluar son también problemas que permiten tomar permanentemente información sobre qué saben los estudiantes sobre lo que se ha enseñado o se desea enseñar.

En este sentido, cuando nos proponemos enseñar un nuevo contenido, es importante considerar una evaluación para tener algunos indicios de los conocimientos del grupo y considerarlos en un sentido diagnóstico, es decir, para conocer los saberes previos de los estudiantes en relación con los temas que se van a enseñar, pues funcionarán como punto de partida para las actividades que planifiquemos. De este modo, la evaluación diagnóstica se vincula con la planificación de cada unidad en lugar de focalizarse en el inicio del año. Por ejemplo, si queremos enseñar los primeros números naturales en primer grado, conviene hacer un diagnóstico sobre las posibilidades de los estudiantes en relación al conteo.

Durante el desarrollo de las actividades estaremos atentos a los procedimientos y reflexiones que los estudiantes van produciendo para ir detectando tanto los aciertos como las dificultades de los estudiantes en una evaluación del proceso de aprendizaje, y vamos proponiendo actividades extra para aquellos que lo necesitan.

Finalmente, al concluir el conjunto de actividades planificadas, realizamos una evaluación final con nuevos problemas similares a los trabajados para tener un registro de los avances que cada niño ha logrado.

En todos los casos, el sentido fundamental de la evaluación es recoger información sobre el estado de los conocimientos de los estudiantes, para luego tomar decisiones que permitan orientar las estrategias de enseñanza.

Al considerar las producciones de los estudiantes, pueden aparecer errores de diferente origen, pero muchas veces los que llamamos “errores” no son tales. Algunos de ellos están vinculados con una distracción circunstancial como copiar mal un número del pizarrón que sólo habrá que aclarar.

Otros, en cambio, estarán mostrando una forma de pensar provisoria, por ejemplo, cuando los estudiantes dicen “al multiplicar siempre se obtiene un número mayor que cada factor”. Esto último no es cierto si se considera el campo de los números racionales, pero sí lo es para un chico del primer ciclo que lo piensa desde sus experiencias numéricas vinculadas al campo de los números naturales.

En otros casos, se considera como error que los estudiantes utilicen una representación distinta de la convencional. Por ejemplo, producir procedimientos de cálculo para agregar 4 a 16, y escribir la serie 17, 18, 19, 20, en lugar de 16 + 4 = 20 sería un paso posible para evolucionar del conteo al cálculo y no un error.

Frente a los “errores” descubiertos será necesario analizarlos, intentar comprender cómo y por qué se producen y plantear actividades de distinto tipo. En el caso de cuestiones presentes en las producciones de muchos estudiantes del grupo, habrá que volver sobre la noción involucrada en ese momento, cuestionándolos con ejemplos que contradigan sus ideas. No es evitando los “errores” como se acorta el proceso de aprendizaje, sino que es tomándolos como se enriquece. Los errores son parte del proceso de aprendizaje, y como tales, debatir sobre ellos es una estrategia que contribuye a superarlos.

k. La interacción en el aula y el aprendizaje de la Matemática

Hemos planteado que, en las situaciones de aprendizaje de la matemática, el trabajo del estudiante se concibe no solamente en forma individual, sino también grupal, entendiendo que la interacción fortalece la cooperación para afianzar los conocimientos y experiencias de cada uno.

En los casos en que los estudiantes hablen lenguas distintas de aquella que se está enseñando a escribir, resulta central que se expresen en la lengua que dominan, de modo que todos puedan expresar sus ideas.

También señalamos que cuando se presentan las distintas situaciones problemáticas, se busca que los estudiantes resuelvan de manera individual o en pequeños grupos; con diferentes procedimientos, según los conocimientos que posee cada uno, aunque no respondan a las formas convencionales de operar. Así, los estudiantes podrían recurrir a una variedad de procedimientos para responder: algunos usarán los dedos; otros, dibujitos; otros, el material concreto disponible; otros, una tabla con números, registrando sus procedimientos o justificaciones en la lengua que están aprendiendo a escribir en la medida de sus posibilidades.

Al dar lugar a la presentación y explicación de los procedimientos utilizados por los estudiantes, es necesario animarlos a que den razones de lo realizado, a explicar por qué lo hicieron de cierta forma, a argumentar sobre la validez de sus producciones. Esto les permitirá volver sobre lo que han realizado analizando sus aciertos y errores y controlando, de este modo, el trabajo.

Es importante alentar a hablar y a participar a aquellos que no lo hacen espontáneamente, lo que no puede hacerse si la lengua que usa el docente no es la misma que hablan los estudiantes.

En el caso de estas secuencias está previsto que las interacciones orales se realicen en la lengua materna de los estudiantes, atendiendo a las razones antes mencionadas, aunque estén aprendiendo otra lengua. Si bien entender el enunciado de un problema resulta un desafío interesante y pertinente en términos del aprendizaje de la lectura, no conviene abusar de esta estrategia ya que no hay que olvidar que el estudiante se enfrenta a una doble dificultad, comprender la lengua escrita y establecer las relaciones para responder a la pregunta del problema.

Así, en las primeras actividades de las secuencias de primer grado no se espera que los estudiantes lean ni copien textos con enunciados o instrucciones, tarea que se podrá incorporar a medida que avancen en el aprendizaje de la lectura y la escritura.

III.

CAPÍTULO III.

LAS SECUENCIAS MÁS DE CERCA

Autora: Marta Ester Fierro

1. Características de las secuencias

En este apartado se responderán las siguientes preguntas:

a. ¿Qué aprendizajes promueven estas secuencias?
b. ¿Con qué criterios se organizaron estas secuencias de matemática?
c. ¿Qué estructura tienen las secuencias para plasmar lo planteado?

a. ¿Qué aprendizajes promueven estas secuencias?

Una secuencia didáctica es un conjunto de actividades organizadas y programadas para que los estudiantes desarrollen competencias y se apropien de un objeto de conocimiento a partir de poner en juego una variada colección de habilidades cognitivas, emocionales y sociales.

Las secuencias de matemática de todo el primer ciclo se diseñaron para promover la autopercepción positiva de cada niño, es decir:

> Se aspira a que las actividades propuestas promuevan la confianza en las propias posibilidades para aprender, para resolver problemas, trabajar con otros, formularse interrogantes e identificar que los errores son parte de un proceso que se debe superar y una oportunidad. Todo esto a partir del aprendizaje de contenidos matemáticos.

Se propone entonces un proceso de enseñanza que permita al niño que, a partir de su trabajo en matemática, reconozca que puede abordar por sí mismo un conjunto de situaciones. En esta área el foco del docente debe ser doble, porque hay una construcción social de que la matemática es "solo para elegidos" o para "los más inteligentes". Es de especial importancia recordar que ***todos los niños pueden aprender matemática***. Claro que para ello la actitud docente es clave. Es importante que trasmita su confianza en que cada uno de los estudiantes puede resolver lo que se les plantea. Es preciso ayudarlos a crecer en su autoestima y a partir de allí a encontrar el placer de disfrutar con el aprendizaje de nuevos conocimientos, especialmente los matemáticos. Se espera que se pueda identificar y revertir la situación de aquellos estudiantes que no confían en sí mismos, porque esto será el factor fundamental que incidirá en sus aprendizajes futuros.

Justamente, para que todos puedan resolver las situaciones planteadas, se secuencian los contenidos mediadores y las habilidades que se deben desarrollar considerando que éstas se ordenan a partir del grado de dificultad que puede presentar su aprendizaje. El orden en la presentación de las actividades por resolver está encadenado para que se vayan recordando y fortaleciendo los aprendizajes necesarios a fin de abordar nuevos contenidos o perspectivas diferentes de aquellos con los que ya se trabaja. Por ejemplo, previo a trabajar estrategias de suma a partir de valores posicionales se retoman dichas nociones en actividades específicas.

La disposición para defender sus propios puntos de vista, considerar ideas y opiniones de otros, debatirlas y elaborar conclusiones, aceptando que los errores son propios de todo proceso de aprendizaje y que se pueden corregir.

En el capítulo anterior se explicó la actual concepción sobre la matemática que es la base de estas secuencias. Se espera que los estudiantes puedan internalizar esa concepción cultural según la cual los resultados que se obtienen son consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones. Esto será posible si el aula se transforma en un espacio de producción de conocimiento matemático en un clima de respeto, trabajo y confianza.

Mucho se ha dicho acerca de que la concepción de la matemática que cada uno tiene surge en general de las propias experiencias escolares en esta materia. En este sentido, en las secuencias se proponen tanto enunciados de tareas por resolver como algunas recomendaciones de gestión, ya que lograr esas experiencias placenteras dependerá de la gestión de la clase que realice el docente. Se torna fundamental que los estudiantes tomen conciencia de las relaciones que generan los resultados, que se internalice la matemática como una disciplina dinámica que resuelve desafíos, que requiere el trabajo personal y autónomo de cada uno de los estudiantes. Esto no se alcanza a partir de copiar lo que el docente escribe en la pizarra, ya sea porque él resuelve o porque escribe lo que los estudiantes responden a sus preguntas. El saber así trasmitido reproduce conocimientos, pero no permite que el estudiante se apropie de ellos para transformarlos en aprendizajes duraderos. Es fundamental lo que el estudiante "haga" en su proceso de aprender matemática, por eso se plantea que es a partir de poner en práctica diversas habilidades y competencias que logrará aprendizajes estables. Si cada uno resuelve por sí mismo, podrá encontrar razones para su actuar y defender lo realizado desde las relaciones matemáticas que haya establecido.

b. ¿Con qué criterios se organizaron estas secuencias de Matemática?

La secuencia didáctica tiene un horizonte temporal –es decir, se desarrolla en un cierto número de clases– y un producto final o productos parciales que conforman la producción esperada. No es un conjunto más o menos agradable o motivador de tareas, sino la concreción de un modelo didáctico en forma de una propuesta de actividades de enseñanza para ser desarrollada en el aula a fin de lograr aprendizajes duraderos.

En matemática el aprendizaje de algunos conceptos y procedimientos demanda tiempos prolongados. Por ejemplo, la lectura y escritura de números de dos dígitos, la resolución de problemas del campo aditivo o multiplicativo, los procedimientos de cálculo, las mediciones u otros. La enseñanza de cada uno de ellos requiere la minuciosa identificación de los obstáculos conocidos para su aprendizaje y su abordaje focalizado. Por ejemplo, la enseñanza de la lectura y escritura de números se plantea como un proceso de comprensión global del sistema de numeración a partir de detectar patrones en la formación de los números, pero esta detección no implica que ya lo hayan aprendido. Simultáneamente hay que trabajar con los valores posicionales y la cardinalidad de los números, entre otros aspectos. Para cada núcleo temático del Diseño Curricular (numeración, operaciones, mediciones, geometría, etc.), la enseñanza supone un conjunto de actividades que, organizadas en sucesivas secuencias, lograrán su objetivo.

Se recuerda que se aprende a lo largo del tiempo, frecuentando los mismos contenidos y competencias en forma espiralada, desde nuevas perspectivas de creciente nivel de complejidad.

Por eso en las secuencias se plantea intercalar los avances sobre numeración y operaciones a fin de garantizar que, con frecuencias por lo menos quincenales, los estudiantes se vinculen con problemáticas de los diversos aspectos que se deben abordar sobre estos contenidos.

Es importante considerar que no basta haber trabajado una, dos o tres clases con un concepto o procedimiento para que los estudiantes lo hayan aprendido para siempre. Es indispensable reiterar su tratamiento desde otros contextos, con tareas que no sean siempre idénticas, que promuevan un efectivo trabajo matemático de los estudiantes. A lo largo de las secuencias se procura lograr un equilibrio entre:

- las frecuentaciones a la enseñanza de la numeración y las operaciones (en segundo y tercero, tanto del campo aditivo como multiplicativo) que son los ejes priorizados para ser abordados. En el caso de la geometría, se incorporan las mediciones y la estadística, pero con una presencia relativa menor en cada secuencia;
- el trabajo matemático que se plantea (detectar patrones, elaborar conjeturas, validar, comunicar, justificar, calcular, medir, etc.);
- las competencias que se quieren desarrollar;
- el trabajo individual, en parejas y en grupos de no más de cuatro participantes.

En síntesis, cada núcleo general del Diseño Curricular (numeración, operaciones, geometría y otros) tiene un orden específico de enseñanza, pero en su avance a lo largo de las secuencias se realizará en articulación con las de otros núcleos que aporten en la construcción conjunta de nuevos conocimientos a producir en cada grupo escolar.

Así, la organización general de las secuencias se diseñó para que:

- **Las actividades programadas promuevan un trabajo matemático rico**. Se presentan problemas en diversos formatos: enunciados, juegos, análisis de resoluciones, determinación de errores, etc. En cada una de ellas hay una selección precisa de contenidos y habilidades que se presentan que los estudiantes deben resolver siempre. Se incorporan también tareas para el hogar con los mismos focos de dificultad en los contenidos y en las habilidades que los trabajados en la clase.
- **La gestión de la clase permita a los estudiantes trabajar en forma cada vez más autónoma, que les posibilite la toma de decisiones por sí mismos**, sin adelantarles la resolución a las dudas que aún no se plantearon, ni respuestas que no decidieron cómo encontrar. Una clase expositiva o una con diálogo y resolución entre todos no permite a los estudiantes tomar decisiones, pues ya las toma el docente. Es él quien organiza la resolución del problema. Por eso se indican sugerencias específicas en cada actividad para promover un modelo de intervenciones docentes que posibilite lograr la autonomía creciente de los estudiantes, sin dejar de brindarles el apoyo que requieren. Específicamente en relación con la gestión de la clase se destaca que se incorpora en la mayoría de las actividades:

  El recorrido docente

  Una vez presentada la tarea, cuando los estudiantes han comenzado su trabajo, se requiere que el docente recorra el salón detectando quiénes:

  - *no lograron involucrarse en la tarea*, en cuyo caso podrá pedirles que vuelvan a leer o que expliquen lo que se solicitó realizar, así como asistirlos hasta que estén encaminados en la resolución.
  - *tienen dificultades en encarar solos la tarea, o encuentran dificultades en algún paso de la resolución.* Se considera necesario que en primer lugar se intente detectar cómo lo están pensando los estudiantes y qué estrategias de resolución empezaron a utilizar. A partir de allí tendrán que surgir los interrogantes que se van a realizar. Resulta fundamental que no se les diga cómo resolver, sino que se los oriente mediante preguntas que no se resuelvan con sí o con no.

La puesta en común

Una vez que los estudiantes han resuelto el mandato, es el momento de coordinar el intercambio de sus realizaciones. En su recorrido, el docente habrá podido observar las distintas representaciones y procedimientos planteados por los diferentes grupos. Al momento de pasar a la pizarra se recomienda que primero lo hagan los estudiantes que acudieron a las estrategias más elementales; por ejemplo, representaciones con material concreto y procedimientos de conteo. En último término se sugiere que se propongan las resoluciones con procedimientos más complejos, como utilizar el lenguaje simbólico y/o la operación óptima; por ejemplo, la multiplicación en lugar de sumas reiteradas. Es importante diferenciar la puesta en común de la mera corrección de las tareas. En esta última se leen o escriben en la pizarra las resoluciones y se establece si está bien o mal. En el mejor de los casos se pide explicar por qué se lo hizo. En cambio, cuando se habla de la puesta en común se trata de promover el diálogo en el grupo clase para que los estudiantes comuniquen sus propias resoluciones, y así, con el intercambio, ayudarlos a revisar cómo se la pensó y por qué se tomaron esas decisiones sobre cómo resolver. Las explicaciones que entre ellos mismos se dan sobre cómo resolver y por qué, suelen ser de más ayuda que las del propio docente. Es positivo y enriquecedor que surjan estrategias y representaciones variadas. Si así no fuera, es responsabilidad del docente proponerlas y estimular que aparezcan en próximas ocasiones. Del mismo modo, será necesario que aborde los errores más frecuentes y se discuta cómo resolverlos, así como por qué pueden surgir.

La sistematización

Es el momento en que hay que objetivar el concepto o procedimiento trabajado. Esto implica explicar con palabras sencillas las nociones o patrones detectados y los procedimientos que se quieren enseñar. Esto no sucede en todas las clases, sino solo en aquellas en las que, después de un proceso, los estudiantes pueden expresar con sus palabras lo aprendido. Hay muchas alternativas para lograr esto. En general son las preguntas bien dirigidas del docente las que logran que ellos expresen lo que se aprendió aquí o en la puesta en común previa. Esto es lo que el docente debe retomar y explicar nuevamente para todos. Es importante que el docente parta de lo que dicen los estudiantes: si ellos no pueden expresar lo aprendido, tienen que por lo menos poder resolver situaciones semejantes. En caso de que así no sea, se tienen que plantear nuevas situaciones semejantes a las de la clase antes de avanzar en las explicaciones que sintetizan lo que se quiso enseñar. En estas secuencias las sistematizaciones propuestas concluyen con algo escrito en el cuaderno de los estudiantes o en un papelógrafo para dejar colocado en las paredes del salón.

c. ¿Qué estructura tienen las secuencias para plasmar lo planteado?

Esta colección de módulos integra propuestas didácticas para cada grado del primer ciclo. Abordan el desarrollo de competencias y contenidos previstos en el Diseño Curricular Dominicano en forma de secuencias de actividades de enseñanza. Las secuencias, actividades y tareas son opciones modélicas, pensadas para promover su enriquecimiento de la mano de los docentes y en función de cada realidad áulica. Se articulan con un proceso formativo que se debe desarrollar en cada distrito, centrado en la didáctica de la enseñanza de la matemática, que combina capacitación a cargo de especialistas, acompañamiento en los centros, estudio individual de cada docente y obtención o relevamiento de información sobre procesos y resultados de aprendizaje de los estudiantes.

En cada módulo se presentan seis secuencias, cada una con la siguiente estructura de apartados:

1. INSERCIÓN CURRICULAR

Indica los contenidos —conceptos, procedimientos, actitudes y valores—, las competencias específicas y los indicadores de logro del Diseño Curricular para los que se propone una enseñanza focalizada.

2. PRESENTACIÓN DE LA SECUENCIA

Explica brevemente el tratamiento didáctico de las competencias y contenidos seleccionados. Este breve desarrollo se amplía en el módulo teórico que los docentes deben conocer y estudiar, en el marco del proceso formativo. La interacción entre el módulo teórico y este módulo con secuencias didácticas es continua, ya que apoya la mejor implementación, y da soporte a la transferencia a otros contenidos del área, y posteriormente a la elaboración de las propias secuencias. Por ello, el docente acudirá asiduamente al módulo teórico.

3. RECURSOS PARA TODA LA SECUENCIA

Presenta los recursos necesarios, según el siguiente detalle:

- **Recursos para estudiantes**, que se deben solicitar a los estudiantes, además del cuaderno de clases. El **Fascículo para estudiantes** es un impreso totalmente alineado con las secuencias, con actividades específicas y textos especialmente preparados. Debe ser entregado en propiedad a cada estudiante, y debe ser llevado a clase todos los días.
- **Recursos para exhibir en el aula** que el docente debe preparar para las distintas actividades de las secuencias. En las sesiones de preparación previas a cada secuencia, se invita a tener especial atención a este punto, para anticipar y compartir esta preparación con el equipo docente.
- El **Papelógrafo de aprendizajes** es un cartel preparado por el docente que se presenta en la primera actividad de la secuencia como anticipación del proceso, para compartir con el grupo de estudiantes los principales aprendizajes esperados.

4. DESARROLLO DE LA SECUENCIA

Este apartado es el que desarrolla paso a paso cada una de las actividades que componen las secuencias.
La estructura de este desarrollo es idéntica entre las secuencias de las ambas áreas de Lengua Española y Matemática. Por ello, es importante repasar e identificar la estructura de organización:

BLOQUES DE ACTIVIDADES

Las actividades de las secuencias están organizadas en bloques. Cada bloque aborda contenidos vinculados entre sí por su unidad de sentido.
El inicio de este apartado indica la cantidad de bloques en que está organizada cada secuencia, junto a una sintética descripción de esa unidad de sentido, marcada por el tipo de actividades incluidas.

ACTIVIDADES DE CLASE

En cada secuencia hay de 10 a 18 actividades, distribuidas en los bloques ya referidos.

En cada actividad se explican:

- Los **contenidos específicos que se van a enseñar**.
- Los **recursos** para estudiantes y para el aula. Entre estos últimos se incluyen ejemplos de los tipos de instrucciones que debe preparar el docente.
- La **intención pedagógica** de la actividad.
- Los **momentos** para su desarrollo.
- El **título** de la actividad que debe figurar en el cuaderno del estudiante.
- La **gestión de la clase** propuesta considerando el recorrido docente para atender a los estudiantes mientras trabajan, la puesta en común y eventualmente la sistematización.
- La **tarea para el hogar**, que tiene el mismo nivel de dificultades que las planteadas en la clase, tanto en lo referido a las habilidades cognitivas que requiere, como en lo que respecta a los contenidos matemáticos. Es muy importante su realización para afianzar los aprendizajes desarrollados en las clases.
- Un **recurso adicional** para los docentes que son las tareas de los cuadernillos “Aprendemos en casa” vinculados a los contenidos de la actividad.

Las actividades adquieren rasgos particulares según el momento del proceso de la secuencia:

- **Actividad inicial**, en la que se presentan y explican a los estudiantes los aprendizajes esperados, que quedan registrados en un Papelógrafo de aprendizajes exhibido en el aula.
- **Actividades de desarrollo** para abordar competencias y contenidos desde la enseñanza, promoviendo los aprendizajes previstos.
- **Actividades de recapitulación** al final de cada bloque como sistematización parcial de lo trabajado en ese tramo.
- **Actividad de producción final** que sintetiza los principales contenidos desarrollados en la secuencia.
- **Actividad de reflexión metacognitiva** para que los estudiantes protagonicen con mirada reflexiva su propio quehacer y sus aprendizajes durante la secuencia.

Cada actividad está propuesta para ser desarrollada en una clase. Dicha duración puede extenderse en la medida en que se identifique la necesidad de los estudiantes para poder desarrollar apropiadamente las asignaciones planteadas. Ello puede variar entre distintos grupos de clase. Es necesario destacar que los tiempos de trabajo personal, en parejas o en grupos deberían ser respetados según el ritmo de los destinatarios.

Las tareas para el hogar son una aplicación de lo trabajado en la clase. Implican el mismo contenido y las mismas estrategias cognitivas desarrolladas en el aula.

MOMENTOS DE LAS ACTIVIDADES

Son las etapas del desarrollo de una actividad a lo largo de una clase: es la unidad organizadora del trabajo del docente y los estudiantes para ir construyendo conocimiento. En cada momento se explica de qué manera y con qué procedimientos se aborda el contenido, y se indica el registro que puede quedar plasmado en los cuadernos de los estudiantes, en un papelógrafo o en ambos soportes.

5. CRITERIOS PARA LA VALORACIÓN

Los criterios de valoración son aspectos observables de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. Surgen de las competencias y contenidos abordados en la secuencia. Al finalizar cada una de ellas se propone un conjunto de criterios para valorar o ponderar los aprendizajes realizados. La enumeración de los criterios principales de valoración es una referencia para analizar los trabajos de los estudiantes y en función de ello, reorganizar los procesos de enseñanza. Tiene en especial consideración las competencias, contenidos e indicadores de logro enunciados en el primer apartado de cada secuencia, de Inserción Curricular.

6. ORIENTACIONES GENERALES PARA PROFUNDIZAR LA ENSEÑANZA

Los estudiantes tienen diferentes ritmos de aprendizaje. Además, cada uno parte de conocimientos previos semejantes, pero quizás no todos los tienen suficientemente afianzados. Es por ello que se presentan al final de las secuencias algunas recomendaciones y sugerencias de actividades para abordar algunas de las posibles dificultades que pueden tener los estudiantes en el desarrollo de la secuencia.

2. Profundización en la resolución de problemas en estas secuencias

En este apartado se responderá a los siguientes interrogantes:

a. ¿Qué se entiende por problema?
b. ¿Qué implica resolver un problema?
c. ¿Por qué en las secuencias de Matemática se prioriza la competencia de resolución de problemas?
d. ¿Por qué proponer variedad de problemas en diversos contextos de uso?
e. ¿En qué consiste el trabajo matemático en la resolución de problemas?
f. ¿Por qué promover el trabajo con otros en la resolución de problemas?
g. ¿Qué significa modelizar las operaciones?
h. ¿Qué es el sentido de un conocimiento?
i. ¿Qué plantea la Teoría de los Campos Conceptuales?

a. ¿Qué se entiende por problema?

Para comenzar, recordemos algunas nociones ya explicadas en el capítulo anterior. La noción de problema asume diversas definiciones según las diferentes teorías y los autores que las han desarrollado. Sin embargo, según señala Rodríguez[17] (2012), la gran mayoría coincide en que existe:

- una persona que ha de resolver la actividad;
- un punto de partida y una meta por alcanzar, y
- una cierta dificultad, obstáculo o resistencia que no permite acceder a la meta inmediatamente.

En la enseñanza de resolución de problemas, entonces, hay que tener en cuenta la necesidad de identificar claramente qué información inicial se tiene y cuál se requiere para obtener aquello que se espera lograr como respuesta. También, hay que considerar que las condiciones que están presentes forman parte de la información inicial disponible. Por otra parte, hay que identificar qué es lo que se necesita averiguar. En todas las secuencias se pone énfasis en que el docente promueva la escritura de las respuestas. Esto se hace justamente para que los números en juego no sean meros datos, sino que estén cargados de significación transformándose así en información. La elaboración de una respuesta completa obliga a volver sobre lo que se tenía que resolver, y esto permite muchas veces identificar que aún faltan algunos pasos para hallarla. En primer grado sólo se requerirá su formulación oral y la escritura de los números, acompañado quizás por algún dibujo. En segundo, se sugiere poner frases que los estudiantes deben completar. Por ejemplo, si la pregunta es "*¿Cuántos caramelos se compraron?*", la respuesta será "*Se compraron----caramelos*". En tercero, ya se espera que sistemáticamente, en todas las situaciones que lo ameritan, los estudiantes escriban la respuesta completa.

Dado que entre lo conocido y lo que se quiere encontrar hay un obstáculo, se necesita que alguna persona "se haga cargo" de resolver ese obstáculo. Este podrá ser trivial para algunos, en cuyo caso no estaría resolviendo un problema, sino un ejercicio. Para otros, en cambio, constituye un verdadero desafío posible de resolver justamente porque disponen de conocimientos que les permiten abordarlo, mientras que otros quizás ni siquiera puedan planteárselo porque no han adquirido las herramientas suficientes para hacerlo. El obstáculo que posibilita aprendizajes es aquel que representa un desafío cognitivo para quien resuelve el problema. De allí la importancia de estar al tanto de los conocimientos de los estudiantes para plantearles situaciones que se constituyan en problemas genuinos para ellos.

17 RODRÍGUEZ, Mabel 2012 cap. VI Teoría de Resolución de problemas en POCHULU, Marcel y RODRÍGUEZ, Mabel (compiladores), 2012 Aportes a la formación docente desde distintos enfoques.

b. ¿Qué implica resolver un problema?

G. Polya[18] (1945) planteaba ya en la década del cuarenta en el siglo XX que las etapas para resolver problemas son:

- Comprender el problema, detectar la información inicial, la que se solicita y las relaciones entre ellas.
- Elaborar un plan para resolverlo, anticipar resultados.
- Ejecutar el plan, ir controlando los resultados parciales, recomenzar el proceso si es necesario.
- Hacer una mirada retrospectiva para decir si es correcta o incorrecta la resolución, justificar los procedimientos, decidir si fue la mejor alternativa de solución y, especialmente, para poder transferir las estrategias a nuevas situaciones.

Esto no debe entenderse como una secuencia lineal, sino como un orientador del trabajo de resolución de problemas. Por el contrario, al avanzar en las resoluciones se requiere volver a considerar los mandatos y la información. A medida que se avanza en la resolución es muy probable que haya que volver a la comprensión del enunciado y viceversa.

c. ¿Por qué en las secuencias de Matemática se prioriza la competencia de resolución de problemas?

La competencia de resolver problemas puede entenderse, en términos generales, como la posibilidad de afrontar una situación nueva que un individuo o un grupo desea resolver y de la cual se conoce el punto de partida y a dónde se desea llegar, pero se desconoce total o parcialmente cómo lograrlo. Es decir, que media un obstáculo entre lo que se conoce y lo que se debe averiguar.

Muchos especialistas sostienen que esta competencia no habilita para resolver cualquier problema, sino que está directamente vinculada con áreas específicas de conocimiento. Si bien hay un conjunto de habilidades generales para lograrla, cada problema específico de una disciplina requiere conocimientos, habilidades y procedimientos de resolución característicos del área que implica. El Diseño Curricular Dominicano habla de la enseñanza por medio de la resolución de problemas. Esto no solo es válido para matemática, sino también para todos los campos de aprendizaje. Es una estrategia didáctica que posibilita el desarrollo cognitivo que implica el aprendizaje en cualquier ámbito. Es importante recordar que es indispensable trabajar en la escuela en:

- resolver problemas para aprender y
- aprender a resolver problemas.

En el ámbito de la enseñanza de la matemática es donde esta competencia adquiere una significación fundamental, pues actualmente en la didáctica específica del área se concibe como quehacer matemático fundamental, y por ello se plantean los problemas como recurso para la enseñanza de los diversos contenidos. Promueven instancias de aprendizaje a los sujetos que los resuelven, dado que:

- plantean un desafío que se resuelve presentando un obstáculo en el momento de solucionarlo;
- permiten hacer uso de conocimientos previos y decidir los procedimientos que se utilizarán;
- permiten elaborar nuevas conceptualizaciones, aplicar las ya aprendidas o modificar las concepciones ya adquiridas.

---

18 POLYA, G. (reimpresión 1979) Cómo plantear y resolver problemas. Serie de Matemática. Trillas. Méjico

La resolución de problemas es el método por excelencia del trabajo de los matemáticos. Se ponen en juego un conjunto de habilidades, algunas específicas del área y otras generales, para poder entender el problema, definirlo si hace falta y precisar datos si se requiere. El concebir un plan para lograr la información final solicitada requiere no solo disponer de conocimientos previos, sino también poder seleccionarlos, analizarlos, compararlos, integrarlos, revisarlos, ampliarlos, entre otras cuestiones, lo que hace un proceso complejo que requiere el desarrollo de otras habilidades cognitivas.

Por todo lo expuesto, en las secuencias se pone énfasis en que los estudiantes:

- comprendan que hay toda una clase de problemas que se resuelven de una misma manera óptima, pero que puede haber procedimientos alternativos para arribar a su resolución;
- identifiquen que es indispensable el trabajo en torno a los patrones (detectarlos, describirlos, extenderlos) para poder abordar justamente la generalización que caracteriza a la matemática, dado que trabaja con objetos de conocimiento abstractos;
- aprendan la necesidad permanente de una visión retrospectiva de lo realizado, no solo para revisar la pertinencia de lo hecho y la posibilidad de mejorarlo, sino también para poder transferirlo con mayor precisión a situaciones análogas. Es decir, se presentan mandatos de reflexión sobre los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos como tarea metacognitiva para promover aprendizajes duraderos.

Para desarrollar la competencia de resolución de problemas, en todos los grados las secuencias priorizan:

- identificar información inicial;
- desarrollar estrategias de resolución con complejidad creciente;
- alcanzar procedimientos más eficientes, y
- comunicar la información final en situaciones de la vida cotidiana y de las diversas áreas del conocimiento.

La presentación de problemas a los estudiantes no es condición suficiente para que **ellos aprendan a resolverlos, hay que generar estrategias que les permitan crecer en autonomía para abordar las diversas situaciones. La gestión de las clases se transforma** por ello **en un aspecto crucial** para que efectivamente los estudiantes puedan aprender a resolverlos y a poner en juego otras capacidades como las de lectura comprensiva, producción escrita, trabajo con otros y emisión de juicio crítico. Es por esto que en todas las secuencias se presentan propuestas de intervenciones docentes que contribuyan al desarrollo de estos aspectos.

d. ¿Por qué proponer variedad de problemas en diferentes contextos de uso?

La diversidad de situaciones problemáticas es necesaria para que los estudiantes avancen en el desarrollo de esta compleja competencia de resolución de problemas. Esto implica la puesta en acto de un conjunto de habilidades cognitivas que posibilitarán la resolución.

Un concepto adquiere su sentido en función de la multiplicidad de problemas a los cuales responde. Es decir, que el conocimiento surge a partir de los problemas por resolver y de las situaciones por dominar. Según lo explica Gerard Vergnaud[19] (1990), "…las concepciones, modelos y teorías de los estudiantes están formadas por las situaciones con las cuales se han encontrado…". Utilizar un mismo conocimiento en diferentes contextos contribuye a su enriquecimiento o a una comprensión conceptual más rica, más profunda.

19 VERGNAUD, G (1990) Teoría de los campos conceptuales. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170, CNRS y Université René Descartes. PDF Traducción Juan Godino

e. ¿En qué consiste el trabajo matemático en la resolución de problemas?

Existen diversas corrientes de Didáctica de la Matemática que desarrollan diferentes teorías para mejorar la enseñanza de esta disciplina en la escuela. En todas ellas hay un común denominador relacionado con la necesaria actividad cognitiva de los sujetos que están aprendiendo matemática. Se considera indispensable que el estudiante resuelva problemas que promuevan las habilidades, capacidades y competencias de distinto tipo, que también desarrollan los matemáticos en su trabajo científico. Este conjunto de habilidades puestas en acto es lo que llamaremos trabajo *matemático* de los estudiantes. Algunos también lo llaman *actividad matemática* y otros el hacer *Matemática*.

Los estudiantes ponen en acto este trabajo matemático al tener que resolver problemas, pero no cualquier situación promueve un desarrollo y aprendizaje de las habilidades más complejas. Cuanto mayor demanda tienen las actividades cognitivas involucradas, más rico será el trabajo matemático. Un punto esencial es que las tareas por resolver permitan a los sujetos tomar decisiones y que no sean meros ejecutores de pasos diseñados por otros para las resoluciones.

Algunas características[20] del trabajo matemático son que:

- es un trabajo que realiza un **sujeto**;
- sólo cierto **tipo de tareas** promueven que el sujeto realice ese trabajo;
- se vincula con **el hacer**, con una actitud cognitivamente activa frente a una tarea;
- el sujeto debe tener la posibilidad de **tomar decisiones**, confrontarlas y corregir o continuar.

El trabajo matemático puede tener diferentes grados de demanda, según sea la complejidad de habilidades cognitivas requeridas. Por ejemplo, no es lo mismo escribir los números del 1 al 300 que detectar y comunicar el patrón de formación de todos los números anteriores a todos los terminados en 99. La primera tarea requiere solo la memorización de una secuencia, mientras que la segunda exige “ver” o detectar el patrón, elaborar una conjetura y comunicarla. Se podrá considerar ante cualquier tarea, encuadrada en un contexto y un objetivo, si promueve un trabajo matemático rico o pobre considerando las decisiones que permite tomar al sujeto y las habilidades cognitivas que promueve. Las intervenciones docentes llevadas adelante durante la gestión de la clase son determinantes para promoverlo u obstaculizarlo. Es por esto que las secuencias propician que en las actividades se desarrollen, entre otras, las siguientes habilidades:

- La exploración de las situaciones.
- La representación de las situaciones.
- La elaboración de planes de resolución.
- La anticipación de resultados.
- La estimación de resultados.
- La comunicación de los procedimientos y resultados.
- La identificación de equivalencia entre diferentes procesos para lograr resultados únicos o variados que respondan a lo planteado.
- La revisión de lo realizado para analizar alternativas de solución más convenientes a la realizada.
- La detección de patrones.

20 Esta caracterización es copia de lo planteado en FIERRO, M.; RODRÍGUEZ, M. (2015) Práctica Docente en el Profesorado de Matemática: un espacio para el aprendizaje. Aportes para el formador y el estudiante. Instituto Nacional de Formación Docente. Argentina.

- La elaboración de conjeturas.
- La argumentación.
- La generalización de soluciones.
- La modelización de situaciones.

Para que esto sea posible, es indispensable que el docente **destine tiempo** para que los estudiantes tengan **su propia vinculación** con los contenidos a partir de poner en acción habilidades generales y específicas del quehacer matemático y sus conocimientos previos.

f. ¿Por qué promover el trabajo con otros en la resolución de problemas?

En el proceso de aprendizaje es muy importante que el estudiante pueda tener instancias de trabajo individual, en parejas y en grupos. En las actividades propuestas en las secuencias se promueven momentos de trabajo individual porque se valoran la importancia del involucramiento y las resoluciones personales. Sin embargo, también se propician espacios en parejas o pequeños grupos dado que la capacidad de trabajar con otros se vincula con la posibilidad de interacción y supone el desarrollo y adquisición de habilidades para recuperar las ideas de los demás a través de la escucha activa y exponer las propias a través del uso de la palabra pública. Se añade a estos beneficios que se logra construir un saber que se va mejorando con el aporte de cada uno, se contribuye a lograr los objetivos del trabajo conjunto, a mejorar las prácticas cooperativas, a apreciar los frutos de esas prácticas y valorar la tarea grupal.

El intercambio y la explicación entre los estudiantes de lo que van haciendo los aproxima al objeto de conocimiento desde un lugar más cercano al sujeto. Se constituye en el espacio para poder poner en acto lo planteado por Vigotsky[21] sobre aprendizajes en zonas de desarrollo próximo. En esta zona de desarrollo próximo es donde se producen aprendizajes que se van construyendo en la interacción grupal. Es la oportunidad para que los estudiantes se compartan las conjeturas de lo que cada uno va hipotetizando en la clase de matemática. Esto supone un enriquecimiento mutuo de los integrantes de la clase: los más expertos ganan en profundización al tener que explicar, con la reconfiguración de lo que se sabe que esto implica, y los que tienen más dificultades se vinculan con un experto más próximo que el docente que les ayuda a avanzar en sus comprensiones.

Por último, a partir del trabajo con otros, se desarrollan más habilidades de tipo interpersonales, como por ejemplo elaborar acuerdos, establecer conclusiones, solucionar conflictos y sostener consensos. La escuela y el aula constituyen uno de los primeros ámbitos en donde se puede aprender a valorar el trabajo conjunto, y estas experiencias tendrán su impronta en las relaciones que cada uno establezca al interior de su grupo clase.

Es por todo lo dicho anteriormente que en estas secuencias del primer ciclo se pone énfasis en:

- ejercitar la escucha respetuosa entre compañeros,
- realizar actividades con otros, y
- dar a conocer opiniones sobre las producciones propias y de los pares, y del trabajo realizado en el aula.

g. ¿Qué significa modelizar las operaciones?

Uno de los problemas de la enseñanza de la matemática hoy es que se la enseña descontextualizada, es decir, sin vincularla con aquellos problemas en los que intervienen los contenidos que se quieren enseñar. Muchos estu-

21 BAQUERO, R (2001) Vigotsky y el aprendizaje escolar. Cuarta Edición. Buenos Aires. Argentina. Aique.

diantes ante un tema de matemática suelen preguntarse: *¿Y esto para qué me sirve?* La resolución de problemas es lo que dio origen a determinados conceptos y procedimientos matemáticos. Ciertas situaciones similares entre sí, al ser resueltas, permiten establecer pautas para la resolución de todos los casos semejantes. Esto es lo que implica *modelizar*: encontrar estrategias generales para abordar toda una serie de problemas semejantes entre sí. Se encuentran modelos ante nuevas clases de problemas y se usan los modelos encontrados para resolver otras situaciones análogas. Para los estudiantes del primer ciclo, modelizar situaciones será por ejemplo resolver problemas en los que se juntan cantidades (5 globos rojos y 4 globos azules) y se quiere averiguar el total; primero detectarán que hay que contar todo (es un modelo de resolución) y más adelante identificarán que la suma resuelve todos los problemas similares. Finalmente, utilizarán en otros problemas de juntar y averiguar el total este "modelo de suma". Así como este, hay otros modelos para las operaciones. El modelizar es propio del quehacer matemático, por eso tiene un lugar privilegiado en las secuencias. Se plantea el proceso de enseñanza como el espacio para que los estudiantes vayan incorporando los nuevos conocimientos a partir de resolver determinadas situaciones que plantean necesidades de resolución no conocidas hasta el momento.

Todo conocimiento matemático tiene un conjunto de situaciones semejantes que plantearon la necesidad de encontrar nuevas herramientas matemáticas. Para una buena enseñanza de ese contenido, hoy se propone trabajar el conjunto de problemas que resuelve ese conocimiento. Esto en didáctica de la matemática se lo identifica como trabajar el "sentido de un conocimiento".

h. ¿Qué es el sentido de un conocimiento?

Según Brosseau[22] (1983), el sentido de un conocimiento matemático se define por la colección de situaciones que resuelve, el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economía que procura, de formulaciones que retoma, etc.

Es decir, Brosseau (1983) plantea que trabajar el sentido de un conocimiento implica saber qué problemas resuelve, pero también identificar qué otras formas de resolución más elementales permite reemplazar, qué ideas sobre ese conocimiento no son adecuadas (por eso las rechaza), y cómo identificar qué errores dejan de suceder por la aplicación de este nuevo conocimiento.

Para Charnay[23] (1994), por su parte, construir el sentido de un conocimiento implica que los estudiantes puedan relacionarlo con sus experiencias y conocimientos anteriores, visualizar su utilidad, que tenga "sentido" para ellos, que puedan identificar sus alcances y limitaciones, y comprender por qué y cómo permite llegar al resultado deseado en forma correcta. Él plantea que hay dos niveles de trabajo:

- Un nivel "interno": **¿Cómo y por qué funciona tal herramienta?** Por ejemplo, *¿cómo se multiplica por dos cifras y por qué se procede así?* Es evidente que esto requiere otros conocimientos matemáticos, por ejemplo, en este caso, la organización de nuestro sistema de numeración y propiedades de la multiplicación.
- Un nivel "externo": **¿Cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo?** Esto implica poder identificar en qué problemas utilizarlo y en cuáles no es apto, es decir, sus alcances y limitaciones.

22 Brosseau (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 4, pp. 165-198*

23 CHARNAY, R en

Considerar el "sentido" de un conocimiento matemático no es exclusivo para las operaciones. Al hablar de "sentido" de un contenido, se hace referencia a la importancia de trabajar los problemas que resuelve (las limitaciones, los errores posibles, el nivel interno y externo) de ese contenido.

i. ¿Qué plantea la teoría de los campos conceptuales?

La teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud[24] (1996) es una teoría psicológica cognitivista que supone que el núcleo del desarrollo cognitivo es la conceptualización de lo real. Según esta teoría, la conceptualización es considerada la piedra angular de la cognición (1998):

> *Vergnaud toma como premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje (1982, p. 40). Campo conceptual es, para él, un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición (ibid.). El dominio de un campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años. Al contrario, nuevos problemas y nuevas propiedades deben ser estudiadas a lo largo de varios años si quisiéramos que los alumnos progresivamente los dominen. De nada sirve rodear las dificultades conceptuales; ellas son superadas en la medida en que son detectadas y enfrentadas, pero esto no ocurre de una sola vez (Moreira[25] 1983a, p. 401).*

El interés didáctico de esta teoría radica en que esto significa que los conocimientos no se dan aisladamente, sino conformando redes. De esta forma, una mejor comprensión de algunos de sus componentes redunda en una mayor comprensión del sistema en su conjunto y de cada uno de sus elementos en particular. Vergnaud precisa inicialmente para la resolución de problemas en matemática, los campos aditivos y multiplicativos y luego, en investigaciones posteriores, va integrando en campos conocimientos de la física y otros.

Algunas cuestiones que se deben tener en cuenta de este marco teórico son las siguientes:

- Un conocimiento no puede comprenderse totalmente solamente con una clase de problemas, en general puede aplicarse a diferentes situaciones. Por ejemplo, se suma cuando se juntan cantidades y se busca el total o también cuando se tiene una cantidad, se agrega otra y se quiere averiguar cuánto queda.
- Una situación puede resolverse con diferentes modelos, aunque haya una resolución óptima. Por ejemplo, un problema cuya resolución óptima es la multiplicación podría resolverse contando, con material concreto o dibujos, o haciendo sumas reiteradas de sumandos iguales.

24 VERGNAUD, G (1990) Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170, CNRS y Université René Descartes. PDF Traducción Juan Godino.*

25 MOREIRA, M.A sin fecha. La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. Porto Alegre. Brasil. Instituto de Física.

IV.

CAPÍTULO IV.

LOS CONTENIDOS EN LAS SECUENCIAS

Autora: Marta Ester Fierro

1. La enseñanza del número y de la numeración

En este apartado se responde a las preguntas:

a. ¿Es lo mismo hablar de número que de numeración?
b. ¿En qué situaciones es necesario usar los números?
c. ¿Qué diferencias hay entre recitar la serie numérica, contar y conservar una cantidad discreta?
d. ¿Qué se propone hoy para enseñar la noción de número?
e. ¿Qué caracteriza a nuestro sistema de numeración decimal?
f. ¿Cuáles son las recomendaciones actuales para la enseñanza de la numeración?
g. Sintetizando
h. Alcance de los contenidos en los diferentes grados

a. ¿Es lo mismo hablar de número que de numeración?

Para organizar la enseñanza el docente debe tener claro el objeto de conocimiento que se quiere enseñar. Por eso es fundamental marcar la diferencia entre estos dos conceptos. El **número** es un objeto matemático. Como tal es abstracto. No tiene una existencia real. Todo objeto matemático necesita representaciones para poder ser utilizado, comunicado, y por ende, también aprendido. Los números no son excepciones. La **numeración** es la representación de los números. Los símbolos que los representan se llaman numerales. Los distintos números se representan a partir de un conjunto limitado de símbolos porque fueron organizados conformando un sistema de numeración, que en nuestro caso es posicional.

En realidad, cuando se habla de número en el primer ciclo, nos referimos a los números naturales. Históricamente se ha hecho para este conjunto numérico la distinción entre el aspecto cardinal (cuántos hay) y el ordinal (qué posición indica) de los elementos de este conjunto numérico. Las cantidades corresponden a elementos que se pueden hacer corresponder con un número natural, por eso se las llama cantidades discretas, porque no pueden tomar valores entre dos números consecutivos dados (entre 4 y 5 elementos no hay otra cantidad que pueda designarse con un número natural). Las cantidades continuas son las que, para poder cuantificarlas, requieren de otro conjunto numérico como son los números racionales, porque entre dos valores pueden encontrarse infinita cantidad de números (entre 4 y 5 metros podemos tener 4.3 metros o 4.75 metros, etcétera).

Cantidad discreta	**Cantidad continua**
Hay ocho caramelos. 	Se tiene una soga de un metro y medio de largo. 

b. ¿En qué situaciones es necesario usar los números?

El número es el conocimiento matemático que permite realizar el conteo y registrar su resultado. Los números hacen posible precisar la cantidad de objetos que tiene una colección. Ellos permiten responder a la pregunta sobre cuántos hay (son la "memoria" de la cantidad). Los números cobran poder a raíz de que permiten evocar una cantidad sin que esté presente, ya sea por la distancia física o porque media el tiempo (información que va a ser usada mañana, puntaje de una ronda de un tiro, etc.). Para que los estudiantes puedan poner en juego esta función de los números es necesario organizar situaciones en las que tengan que conservar memoria de una cantidad mediado el tiempo o el espacio[26] (Parra, C., p. 1).

En el texto de Parra (2021) se menciona "**la memoria de cantidad**". Con esto se está poniendo en juego el aspecto **cardinal** de un número, es decir, la **cardinalidad**. Por ejemplo, se le pide a un niño que en un único viaje busque los lápices necesarios para darle uno a cada uno de los miembros de su grupo. Nada se le dice sobre cómo hacerlo, pero poniendo en juego el conteo tendrá que llegar a identificar la cantidad de personas de su grupo y recordar ese número para retirar la cantidad de lápices necesarios.

También los números tienen un aspecto **ordinal** que permite ubicar las posiciones en un conjunto ordenado de elementos. Este aspecto suele identificarse exclusivamente cuando se usan los términos primero, segundo, tercero. Sin embargo, también se pone en juego cuando permite recordar la posición de un objeto, por eso se habla de la "**memoria de posición**". Por ejemplo[27] en un perchero de una sala de nivel inicial un niño sabe que cuelga su abrigo en el perchero 7.

Los números tienen también una función muy importante vinculada a la **cardinalidad** como es la de **anticipar resultados**. Esto se pone en juego ante un cálculo al poder decir el resultado sin estar presentes las cantidades o sin que puedan visibilizarse.

Algunos autores[28] sostienen también otras funciones del número, como:

- Utilizarlos como **códigos**, por ejemplo para identificar determinadas líneas de colectivo o bien los números de teléfono. Es evidente que aquí no se pone en juego la noción de número, sino su uso como un código o etiqueta.
- Para expresar **medidas de determinadas magnitudes**. Por ejemplo: 7 m; 2.5 l, ½ kg. En realidad, esta función podría considerarse incluida considerando que las cantidades sean también continuas, es decir, que requieran números comprendidos entre dos enteros, lo que ya requiere otro conjunto numérico.

c. ¿Qué diferencias hay entre recitar la serie numérica, contar y conservar una cantidad discreta?

Es necesario establecer diferencias entre estas nociones. A pesar de ello, es importante recordar que en cualquiera de estas competencias específicas se avanza paulatinamente en la cantidad de elementos que puede manejar adecuadamente un niño.

26 Parra, Cecilia (2021) Contar y comparar colecciones. Síntesis de la autora del encuentro con estudiantes del Instituto Superior de Formación Docente N.° 112 de San Miguel, provincia de Buenos Aires, Argentina.

27 Este ejemplo está tomado de Bartolomé y Fregona (2003) *El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales*, en Panizza, M. (comp.) Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB, Buenos Aires, Paidós. P. 10.

28 Ídem anterior.

Recitado de la serie numérica

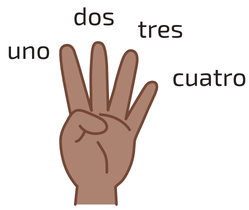
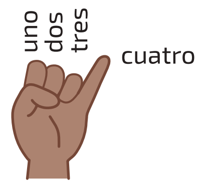
Recitar la serie numérica es decir, en forma oral y convencional los números naturales. Ejemplo: 1,2, 3, 4. Los estudiantes aprenden desde muy temprana edad a hacerlo por su vinculación con el entorno en el que se desempeña. Esto lo van construyendo a partir de incorporar paulatinamente tramos de números. Esta enunciación de la serie indica solo su repetición, sin que esté en correspondencia con elementos, sin referencia a qué cantidades representa cada uno, ni en qué situaciones se aplica lo que está diciendo. No siempre el avance en el aprendizaje de la serie numérica es lineal, suele haber períodos de inestabilidad en su construcción. Así un niño puede decir un día *uno, dos, tres, cuatro* y al día siguiente *uno, dos, cinco, ocho*. La interacción del niño con otros niños mayores o con los adultos lo ayudará a avanzar en este recitado. Después de algún tiempo, llegará un momento en el que al decir *diecinueve* no podrá seguir. Si alguien lo ayuda y dice *veinte, veintiuno, veintidós* es muy frecuente que continúe hasta el veintinueve en el que esperará. Si nuevamente se lo ayuda diciéndole *treinta*, con seguridad continuará *treinta y uno, treinta y dos*… y así podría seguir. Este niño, que no puede leer ni escribir, ya detectó un patrón de formación de la serie numérica. Este recitado, aunque parezca una mera repetición, es indispensable que se vaya consolidando para poder avanzar en el uso e interacción con los números.

Contar

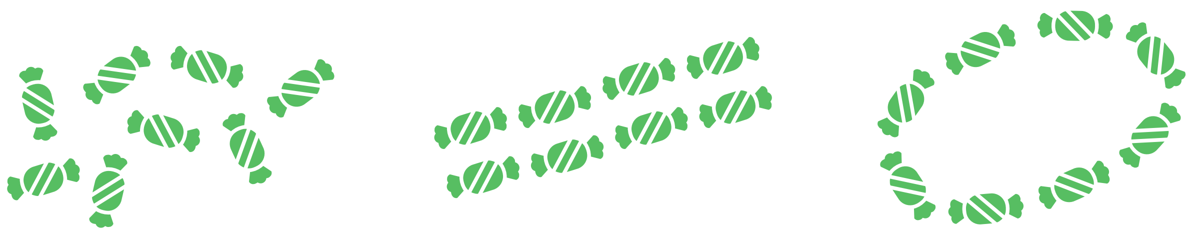
Contar, enumerar son distintas formas de designar lo que hace el niño cuando puede establecer la cantidad de elementos en una colección, es decir, responder a la pregunta **¿cuántos hay?** Ya en el seno de la familia suelen iniciarse estos aprendizajes. Por ejemplo, cuando se le suben los dedos al niño para que indique cuántos años tiene; cuando se le van entregando dos o tres caramelos y se va diciendo uno (y se entrega uno), dos (y se le entrega el segundo) o se le pregunta *¿cuántas figuritas tienes?* y se le dice tienes *tres figuritas, mira una* (y se la señala), *dos* (se hace lo mismo con la segunda), *tres* (y se indica la última).

Hay que tener en cuenta que contar requiere la internalización de una serie de principios que posibilitan llegar a decir cuántos hay. Ellos son:

- **Recitar la serie numérica en un orden correcto y estable**; es decir, el conteo supone un recitado correcto. Así la cantidad de elementos que se van a contar estará directamente vinculada al avance en la enunciación de la serie numérica. Sin embargo, esto no debe llevar a la confusión de que se puede contar la misma cantidad que se recita. Los alcances de la serie numérica oral suelen ser mayores que las posibilidades de cardinalizar un conjunto de elementos.
- **Contar una sola vez cada elemento**; es decir, hacer corresponder a cada palabra número (uno, dos, …) con un único elemento y a cada elemento una única palabra número. Es por esto que muchos niños van desplazando los objetos a medida que van contando para no confundirse, o si están dibujados suelen ir tachándolos.
- **Identificar que la cantidad total contada queda representada por el total de los elementos contados y no por el que corresponde a la última palabra número que se dice**. Esto supone identificar la cardinalidad de un número. Por ejemplo, se le dice a una niña que muestre cuatro dedos. Ante esto puede suceder…

Que identifique: Muestra todos los elementos contados hasta el último número dicho.	Que no identifique: Muestra solo el elemento que está en la última posición indicada.
	

- **Identificar que no importa el orden en que se cuenten** los elementos de una colección, la cantidad final será siempre la misma, lo que supone claramente establecer un orden. Esto que parece trivial es para los niños todo un proceso complejo, pues los obliga a ir eligiendo cada vez un elemento nuevo y realizar esto reiteradamente. El grado de dificultad dependerá de la naturaleza, cantidad y distribución de los elementos. Así un niño que puede contar bien los elementos de una fila no puede hacerlo si los mismos están distribuidos desordenadamente en una superficie, o formando una línea curva cerrada en la que no identifican el primer elemento.

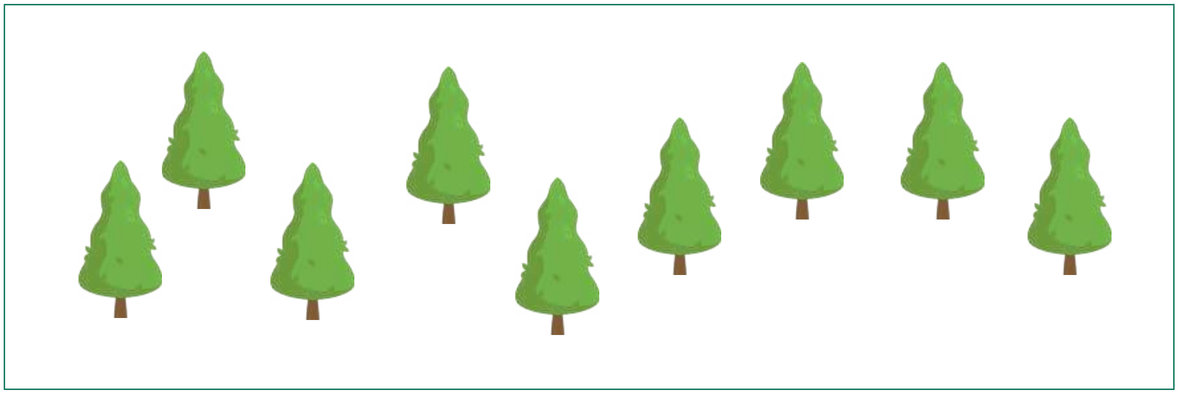


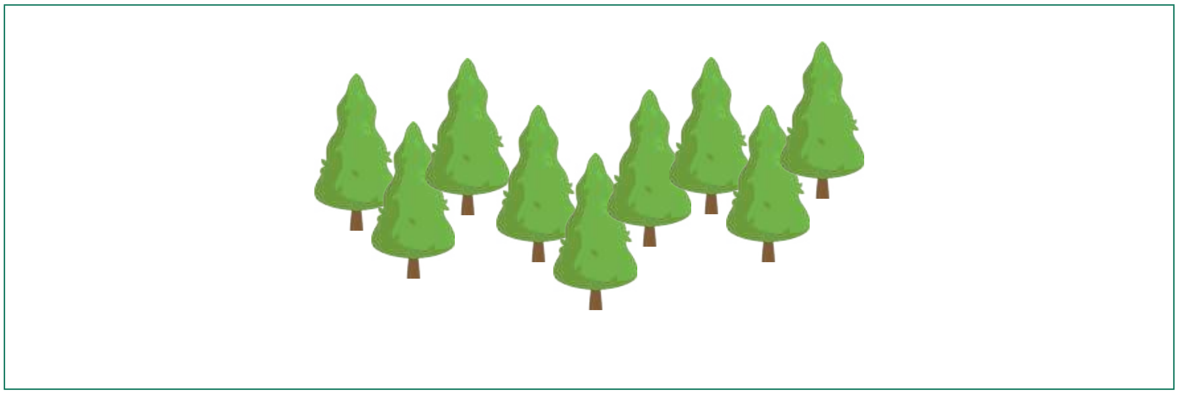
- **Generalizar el procedimiento de conteo** para cualquier elemento presente o ausente. Es darse cuenta que el conteo no depende de la naturaleza de lo que se cuenta, sino que es un proceso idéntico en todos los casos. Implica abstraerse de la naturaleza física o perceptual de los objetos que se cuentan y considerarlos todos susceptibles de ser contados

Conservación de cantidades discretas

La conservación de cantidades fue ampliamente investigada por Piaget. Conservar una cantidad es poder identificar que esta no varía, aunque la distribución de los elementos sí lo haga. Implica no guiarse por lo perceptual en la comparación de dos cantidades iguales de objetos, pero distribuidas espacialmente en forma muy distinta. También supone identificar que un número solo puede representar una cantidad determinada.

La conservación puede no estar lograda y, sin embargo, el niño puede contar adecuadamente los elementos, aunque suela confiar más en “lo que ve” que en lo que cuenta. No es sencillo identificar que en las dos situaciones siguientes está presente la misma cantidad de elementos.





d. ¿Qué se propone hoy para enseñar la noción de número?

Los estudiantes llegan a la escuela con muchos conocimientos sobre los números; sin embargo, es allí donde es indispensable organizar la enseñanza para que pueda sistematizar lo que ya conoce, profundizarlo y avanzar con nuevas complejidades.

Ya en 1992 Cecilia Parra[29] afirmaba:

> "La hipótesis central de este enfoque es que resulta vano definir, componer, simbolizar los números fuera de un contexto de utilización de los números.
>
> Al contrario, es a través del uso que haga, del dominio que se construya, que el estudiante elaborará sus propias concepciones del número, no definitivas, siempre en evolución, completadas o cuestionadas en la extensión del campo numérico que conoce, con el descubrimiento de nuevas posibilidades de utilización, con el avance en las capacidades de calcular, y …mucho más tarde con el descubrimiento de la existencia de otras clases de números…
>
> Desde esta perspectiva, el rol del maestro no consiste en enseñar los números al modo descripto en la perspectiva histórica, sino en proponer a los niños situaciones que les permitan utilizarlos de modo que las palabras y los signos que los designan se impregnen de sentido. Estos números que los estudiantes han así comenzado a utilizar pueden ser "aprovisionados" (registrados, afichados, ordenados…) buscando comprender sus escrituras cifradas, sus denominaciones orales, ciertas relaciones entre ellos, etc."

Como se ve, es indispensable presentar problemas para lograr lo planteado. El conteo es la estrategia principal que permitirá resolver las diferentes situaciones. Por todo lo expuesto, en las secuencias se proponen problemas

29 PARRA, Cecilia. 1992 reedición 1996. Los niños, los maestros y los números. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Argentina.

en los que se requiere identificar cuántos hay, comparar o igualar cantidades, armar colecciones que tengan una determinada cantidad de elementos. Partiendo de los conocimientos disponibles de los niños, se trata de a andar de a poco el camino anterior. Se plantean situaciones en las que se requiere registrar las cantidades y se va construyendo paulatinamente la vinculación con el tratamiento sistemático de las representaciones simbólicas de los números. La identificación de diferentes configuraciones de los dígitos en dedos, dados, juego de dominó, etc. tiene un rol fundamental, no sólo en esta etapa de identificación de las cantidades, sino que son la antesala al trabajo posterior con el cálculo.

e. ¿Qué caracteriza a nuestro sistema de numeración decimal?

Nuestro objeto de enseñanza también es el sistema de numeración decimal. Por eso, es muy importante que identifiquemos las características del mismo:

- "El sistema está compuesto de 10 signos que, combinados entre sí, pueden representar cualquier número.
- Es un sistema decimal porque está organizado en base 10, es decir, que cada unidad de un orden equivale a 10 unidades del orden inmediato anterior.
- Además, es un sistema posicional porque la misma cifra adquiere valor diferente según la posición que ocupe en un número; por ejemplo, la cifra 7 vale diferente en 7, en 70, en 700, etc. Esta organización procura una enorme economía tanto para anotar o para leer los números como también para operar con ellos.
- Se escribe en un orden decreciente de izquierda a derecha: las cifras que implican cantidades mayores a la izquierda, y las menores a la derecha.
- Incluye el 0 … 2 (Itzcovich[30], 2008, p. 33)

También para el trabajo de enseñanza es importante considerar que:

- Cada lugar de posición implica:
    - Un valor de posición del dígito. Ejemplo: En 645 el 4 vale 40.
    - En esa posición, la cifra indica la cantidad de grupos de 10; 100; 1,000… En 640 el 4 indica 4 grupos de 10.
    - Una operación oculta que resulta de multiplicar la cifra por la cantidad de grupos de 10; 100; 1,000… Ese resultado es el valor posicional. En 640 el 4 está multiplicado por 10, por eso es 40.
    - Cada unidad en un lugar de posición representa 10 grupos de la posición que está a derecha y la décima parte de la que está a su izquierda. En 310 el 1 indica 10 grupos de 1 y la décima parte de un grupo de 100.
- Los diferentes lugares de posición se identifican con nombres:
    - Unidad, decena, centena

$$\underbrace{\text{Centena (C), Decena (D), Unidad (U)}}_{\text{Órdenes simples}}$$

Recordemos que a partir de estos tres nombres se organizan todos los nombres de los lugares de posición. Así los tres lugares siguientes hacia la izquierda en el mismo orden se los llama miles. Se identifica entonces la unidad de mil, la decena de mil y la centena de mil.

30 ITZCOVICH, Horacio. 2008. La matemática escolar. AIQUE. Buenos Aires, Argentina.

C de mil, D de mil, U de mil	Centena (C), Decena (D), Unidad (U)
Miles	Órdenes simples

Luego, ese mismo grupo de 6 posiciones se reiterará, pero llamándose de millones, mil de millones, de billones, mil de billones, de trillones, y así sucesivamente.

...U de mil de millón	C de millón, D de millón, U de millón	C de mil, D de mil, U de mil	Centena (C), Decena (D), Unidad (U)
Mil de millón	Millones	Miles	Órdenes simples

Millones

- La organización del sistema va incluyendo en la nueva posición a la izquierda todos los números que indican los del orden o posición a su derecha. Ejemplos:
  En cada decena se incluyen todos los números del 0 al 9.
  En cada centena se incluyen todos los números del 0 al 99.
  En cada unidad de mil se incluyen todos los números del 0 al 999.
  Y así sucesivamente.
- Para leer un número se tienen que indicar todos los valores posicionales indicados simbólicamente:

2,358 se lee *dos mil trescientos cincuenta y ocho*

Tal como puede "escucharse", nuestro sistema de numeración en su oralidad es un sistema aditivo, pues la lectura de los valores posicionales terminan expresando la **descomposición aditiva** de dicho número:

$2{,}358 = 2000 + 300 + 50 + 8$

Esto, que facilitará el reconocimiento y la lectura o escritura de números, será también fuente de dificultades que luego se indicarán.

Para el segundo ciclo quedará considerar la **descomposición y composición polinómica** de un número, es decir, la que presenta todas las multiplicaciones por potencias de 10 (aunque en primaria no se habla de potencias) y sumas que lo conforman. Ejemplo:

$543 = 5 \times 100 + 4 \times 10 + 3 = 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$

- La organización decimal permite revelar un conjunto de patrones fácilmente detectables. Ejemplos:
  - *Siempre después de un número terminado en 0 sigue la serie 1,2 3,…*
  - *Todos los siguientes de un número terminado en 9 terminan en 0 e incrementa en uno el valor de la decena.*

f. ¿Cuáles son las recomendaciones actuales para la enseñanza de la numeración?

Desde su nacimiento, los niños están en contacto informal con los números. Así, al llegar a la escuela, tienen internalizada una serie de conocimientos que requerirán sistematizarlos y profundizarlos. Esto se verá facilitado si el ambiente del aula presenta un conjunto de portadores numéricos que favorezcan la interacción personal, y la mayoría de las veces, no sistemática de los estudiantes con los números organizados. Entre ellos se recomienda especialmente en primer grado: el calendario, la banda numérica comenzando desde el 1 y el cuadro de números del 1 al 100, dejando en blanco el casillero del 0. Inicialmente no es conveniente incorporar el 0 porque los niños usan la banda para apoyarse en el conteo –que comienza con uno– y especialmente luego en la escritura. Si comenzara desde 0 ya no podrían establecer esa correspondencia.

Tal como se ha estado diciendo en este documento, la enseñanza de la numeración también se inscribe en la presentación a los estudiantes de un conjunto de problemas; es decir, de situaciones que les presentan algunos obstáculos que deben ser resueltos por ellos para aprender los contenidos centrales que se quieren enseñar. Así, para avanzar en la escritura de los números de un dígito, es importante crear situaciones que requieran el registro de las cantidades contadas.

Antes, en la enseñanza se avanzaba de a un número. Hoy se presentan tramos de una considerable cantidad de números para poder analizar lo que tienen en común estos números y lo que tienen diferente, es decir, para poder detectar los patrones en su formación. Así, mirando los cuadros, se puede descubrir que todos los que terminan en 7 tienen como anterior un número que termina en 6.

Se pueden organizar los contenidos referidos a la enseñanza de la numeración en dos grandes grupos:

- lo referente a la lectura, escritura, comparación y orden de los números
- lo que concierne al abordaje de la organización del sistema de numeración.

En relación a la lectura, escritura, comparación y orden de los números

A comienzo de la década del noventa, Delia Lerner y Patricia Sadosvky[31] realizaron una investigación exploratoria con niños y su relación con el sistema de numeración decimal. En ella pudieron detectar que los niños elaboran tres hipótesis: dos de ellas son relativas a la comparación de números y la tercera está vinculada a la relación entre la numeración escrita y la oral.

- De las dos hipótesis de comparación,
  - una de ellas es relativa a la comparación de números de distinta cantidad de dígitos, donde la hipótesis es que “a mayor cantidad de dígitos, mayor es el número”;
  - la otra de comparación es cuando hay números de igual cantidad de dígitos en cuyo caso se dice que “el primero es el que manda”.
- La tercera hipótesis refiere a la correspondencia entre la numeración oral y la escrita simbólicamente. Así, ante doscientos treinta y cuatro es frecuente encontrar su escritura simbólica como 200 30 4 o bien 200.

De la misma investigación concluyen que se aprenden más rápidamente las series de 10, de 100, de 1,000; que los números intermedios. Por ejemplo: **aprenden primero los números 10, 20, 30, … 80, 90** que los números 42, 43 u otros. Esto es considerado en la etapa de enseñanza de la lectura y escritura de cualquier número de dos dígitos

31 LERNER, Delia y SADOVSKY, Patricia. 1994.Capítulo 5 El sistema de numeración: un problema didáctico en PARRA, Cecilia y SAIZ, Irma “La Didáctica de las Matemáticas, Aportes y Reflexiones”. Editorial PAIDOS, EDUCADOR. Buenos Aires.

–luego de tres, cuatro y otros–. En lugar de presentar los números por familias o series que inician con el mismo dígito y avanzando de a uno, hoy se enseñan las series de múltiplos de 10, 100… mencionadas y luego se presentan cuadros con los números. Estos están organizados adecuadamente para que puedan detectar claramente los patrones de formación de los números y apoyarse en ellos para leer, escribir y comparar números. Se entiende que podrán leer y escribir los números de dos dígitos cuando logren:

- leer y escribir sin dificultad los números de la serie de 10 en 10; es decir, los múltiplos de 10 de dos dígitos, e
- identificar que entre dos números consecutivos de esa serie los números terminan sucesivamente en la serie 1, 2, 3… 8 y 9.

Lo dicho sobre números de dos dígitos para la lectura y la escritura vale también para los de mayor cantidad de dígitos. La lectura se basa en la verbalización de los valores posicionales de los números. Esto trae aparejadas algunas dificultades que deben ser tomadas en cuenta porque en la verbalización de los números no es necesario el cero, lo que suele generar problemas en la escritura de números como 608 o 5,054. Por eso estos aspectos son considerados en la organización y secuenciación de las dificultades en las actividades presentadas en las secuencias. También allí podrá observarse que el cero aparecerá en primer grado vinculado a la necesidad que surge al tener que resolver problemas semejantes a: Estoy en el número 4 en el cuadro de números, y al jugar me indican que tengo que retroceder cuatro casilleros, ¿a cuál llego?

La enseñanza de la lectura y la escritura tendrá su fortalecimiento al trabajar la descomposición y composición de los números involucrados y las sumas de números de dos dígitos terminados en cero y números de un dígito. Ejemplo: 60 + 8 = __.

Se resume a continuación la organización de la enseñanza que se presenta en las secuencias de primer grado, y luego en forma análoga, en las de los dos grados posteriores:

- La lectura, escritura, la comparación y el orden de los números del 1 al 10 y el intercambio y reconocimiento de números hasta el 30/31 y posteriormente al 50.
- La lectura, la escritura y el orden de la serie de 10.
- La presentación de los números hasta el 100, trabajando para que detecten patrones en la formación de los números. Esto que ya identificaron en forma oral al enunciar la serie numérica, es necesario que lo vuelvan a identificar ahora en forma escrita.
- En estas secuencias se proponen cuadros de números que tengan los múltiplos de 10 adelante en la primera columna para poder encontrar todos los que comienzan igual en la misma fila (los veinti, doscientos ochenta…). Esto facilitará el trabajo con detección de patrones, la lectura, escritura, comparación y el cálculo. Presentar todo el cuadro no significa que los niños aprenderán en una semana todos ellos. Por el contrario, es esperable que demore en primer grado tres o cuatro meses en recordar en cualquier circunstancia cómo se lee y escribe cualquiera de los números.
- Otro aspecto relacionado con la comprensión de la numeración es el trabajo con los anteriores y posteriores. Por cuestiones didácticas se diferencian las situaciones en las que se buscan los anteriores y posteriores (o siguientes) de números terminados en cualquier dígito menos en 9 y en 0, y los que sí terminan en estos números. En todos los casos se avanza considerando las regularidades o patrones de muchos que terminan igual. Luego se hace lo mismo con las otras terminaciones que presentan mayor dificultad, pues modifican dos lugares de posición, no solamente el último. Algo semejante se hace luego con los terminados en 99, 00 y lo mismo con 999, 000, y otros mayores.

En relación con la organización del sistema de numeración

La detección de patrones en los cuadros numéricos presentados en grupos de 100 números, así como los patrones que surgen de la comparación de diversos cuadros de los números de tres cifras, se propone como estrategia para que inicien la comprensión de la formación de números de mayor cantidad de dígitos.

En lo que refiere a la organización del sistema de numeración, es importante mencionar que hoy **se parte del valor posicional** en lugar de los agrupamientos como se hacía antes. ¿Por qué sucede esto? Las indagaciones muestran que un niño de 6 años puede reconocer e identificar el cuarenta en 45, pero difícilmente pueda indicar que equivale a 4 grupos de 10. Esto es así por dos motivos:

- Porque los niños desde muy pequeños comprenden que los dígitos valen en los números según el lugar que ocupan, aunque a veces no, puedan precisar cuánto valen.
- Porque los niños de primero no tienen internalizada una estructura multiplicativa que los ayude a comprender que tres grupos de 10 equivalen a 30. Aún los de segundo tienen dificultades en comprender que diez grupos de 10 forman el 100.

Posteriormente, y apoyados por el conteo de cantidades cada vez mayores, se plantea trabajar el agrupamiento en relación con identificar que el dígito en un lugar indica la cantidad de grupos de 10, 100, o 1,000 que hay allí. Por ejemplo, en 2,345 hay dos grupos de 1,000, tres de 100, de las operaciones ocultas en cada lugar de posición. Las operaciones ocultas en todo el número, es decir, la descomposición polinómica del número queda para una instancia posterior.

Otro aspecto del agrupamiento que comenzará paulatinamente a trabajarse es la relación entre lugares contiguos de posición; por ejemplo, una centena equivale a 10 decenas y cada 10 decenas se forma una centena. Esta característica del sistema de numeración que se ha de profundizar desde 2.° grado es indispensable para poder avanzar adecuadamente en el cálculo. Hay que recordar que el mayor conocimiento del sistema de numeración ayuda a calcular, y a su vez el cálculo profundiza y da sentidos a muchos de los contenidos específicos de la organización del sistema de numeración decimal.

En relación con la denominación unidad, decena, centena, se considera que no han de ser punto de partida. Avanzado el trabajo con los números, se los incorpora para identificar fácilmente los lugares de posición, pero estarán vacíos de su real significado hasta que se vayan resolviendo las diversas actividades de las secuencias a lo largo de los años.

g. Sintetizando

En principio ha de trabajarse la noción de número e internalizar las cantidades (aspecto cardinal) que expresan dichos números resolviendo muchas actividades de conteo. Simultáneamente hay que ayudar a conocer cómo se representan simbólicamente esos números que se designan oralmente. El sistema de numeración, con sus características, será aprendido por los estudiantes a lo largo de su escolaridad. Cuando ingresan a 1.° grado, los niños ya conocen algunas de ellas, ya sea por su interacción social o por lo aprendido en el nivel inicial. No ingresan como tablas vacías sobre las que hay que escribir. Es indispensable ayudarlos a construir nociones especialmente sobre la cardinalidad de los números y del sistema de numeración. También significa trabajar procedimientos para detectar regularidades o patrones y elaborar conjeturas que promuevan la adecuada lectura, escritura, comparación y orden de los números.

Muy sintéticamente podríamos afirmar que hay que considerar:

Número

- Enunciación de la serie numérica.
- Conteo de pequeñas cantidades.
- Conteo de grandes cantidades.
- Conservación de cantidades discretas.
- El número para indicar una cantidad (cardinalidad) y una posición (ordinalidad).

Numeración

- Reconocimiento, lectura, escritura de números (con copia y sin copia).
- Comparación, orden, anteriores y posteriores.

Organización del sistema:

- Regularidades en la formación.
- Valor posicional, agrupamientos, operaciones ocultas en un número, relaciones entre posiciones contiguas.

h. Alcances del contenido en los diferentes grados

	1.º GRADO	2.º GRADO	3.º GRADO
Conteo. Lectura, escritura, orden, comparación, anteriores, posteriores.	Conteo de pequeñas cantidades. Mínimo hasta 100. Patrones en la formación de los números a partir de nudos. Siguientes de terminados en 9 anteriores a terminados en 0.	Mínimo hasta 1,000. Con un cero intermedio. Siguientes de terminados en 99 anteriores a terminados en 00.	Mínimo hasta 10,000. Con dos ceros intermedios. Siguientes de terminados en 999 anteriores a terminados en 000.
La organización del sistema de numeración. (hacia las nociones de unidad, decena, centena…)	Valor posicional. Regularidades en la formación de los números de dos dígitos. Descomposición y composición aditiva. Conteos de a 10.	Conteos de cantidades mayores. Regularidades en la formación de los números de tres dígitos. Inclusión de los dieces en los cienes. Descomposición y composición aditiva. Relaciones entre decenas y centenas. Agrupamientos de a 10 y su vinculación con valor posicional.	Inclusión en miles de cienes y dieces. Agrupamientos de 10 y 100 y su vinculación con valor posicional. Descomposición y composición aditiva. Relaciones entre unidades de mil y centenas. Operación oculta en cada valor posicional.

2. La enseñanza de las operaciones

Aquí se intenta responder:

a. ¿Cuáles son los sentidos del campo aditivo?
b. ¿Cuáles son los sentidos del campo multiplicativo?
c. ¿Cómo enseñar las operaciones?
   i. ¿Cómo trabajar la construcción de la noción de cada operación?
   ii. ¿Cómo abordar la enseñanza del cálculo?
d. Alcances de los contenidos en los diferentes grados:
   i. Sentido de las operaciones
   ii. Resolución de cálculos y conteos

a. ¿Cuáles son los sentidos del campo aditivo?

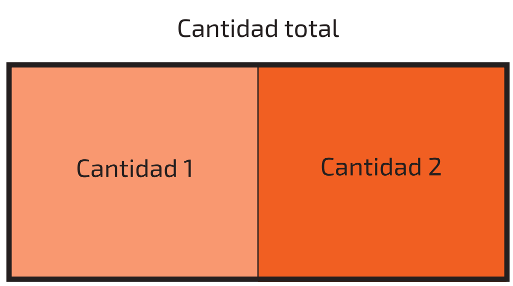
Ya se mencionaron estas clases de problemas (o sentidos) en el capítulo dos. Se retoman aquí para hacer nuevas precisiones didácticas vinculadas a su inclusión en las secuencias.

Los problemas del campo aditivo surgen de aquellas situaciones en las que su solución óptima se logra a partir de realizar una suma o una resta según la información disponible y lo que se quiere averiguar. El sentido identifica una situación. Vergnaud hace un análisis de las diferentes situaciones en las que estas dos operaciones permiten resolver los problemas. Ellas son:

- **Se juntan dos cantidades para obtener una cantidad total.** En este caso bastaría sacar una foto para tener la situación completa; es decir, ver las dos cantidades que se juntan, unen o reúnen y la cantidad total que forman. En estos problemas se puede averiguar:

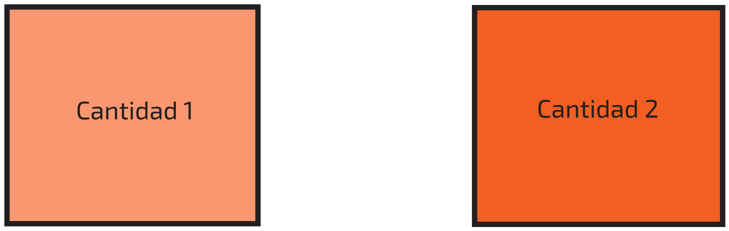
  - *La cantidad total (conocidas las cantidades involucradas). Por ejemplo: Tengo 10 rosas rojas y 4 blancas, ¿cuántas rosas tengo?*
  - *Una de esas cantidades (conocida la cantidad total y una de las cantidades parciales). Por ejemplo: Tengo 14 rosas, 10 son rojas y el resto blancas. ¿Cuántas rosas blancas tengo?*

  Estos problemas están presentes en las secuencias de primero, segundo y tercer grado porque sus dificultades son abordables en todo el primer ciclo. Aquí hay que trabajar especialmente la noción de complemento, es decir, "lo que le falta para llegar a…" con la operación de restar. En este sentido, la resta puede resolverse mediante una suma relacionada con ella. También ha de prestarse atención a que los estudiantes puedan reconocer cuándo una clase de elementos está incluida en otra. Por ejemplo: María tiene 8 rosas y 3 claveles. ¿Cuántas flores tienen? Si los estudiantes no identifican que las rosas y los claveles son flores, tendrán dificultades en resolver la situación.



- **Se tiene una cantidad a la que se le agrega o se le quita algo** que se indica con el nombre de "transformación".

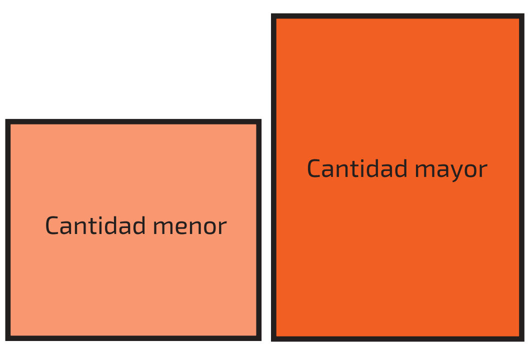
  Estas situaciones se dan en un transcurso de tiempo. Se necesita una secuencia de fotos para tener toda la situación planteada.



  En este caso hay mucha diferencia en los niveles de dificultad de estos problemas según sea la ubicación de la incógnita. Las diferentes situaciones para averiguar las incógnitas pueden ser:

  - *La cantidad final* (conocido cuánto tenía al principio y lo que se agregó o quitó). Este es el caso más sencillo de los problemas de este sentido y se aborda desde el nivel inicial. Por ejemplo: *Tenía 8 lápices y perdí 3, ¿cuántos lápices tengo ahora?*
  - *Lo que se agrega o se quita, es decir, la transformación* (conocida la cantidad inicial y la final). Luego de retomar los problemas anteriores ya vistos en primero, hay que avanzar con esta dificultad en segundo grado. Un problema con esta ubicación de incógnita es: *Tenía 8 lápices y ahora me quedan 5. ¿Cuántos lápices perdí?* En las secuencias se presentan situaciones similares sin indicar si se perdió o se ganó para que los estudiantes deban decidirlo por sí mismos en función de la relación que establezcan entre las cantidades dadas.
  - *La cantidad inicial* (conocido lo que se agrega y la cantidad que queda al final). Luego de afianzar muy bien las situaciones con las dos ubicaciones posibles de incógnitas anteriores, en tercero hay que presentar problemas para averiguar la cantidad inicial. Esto no se llegó a incorporar en las secuencias presentadas, pues se priorizó ponderar las dificultades vinculadas al campo multiplicativo. Ejemplo de esta ubicación de incógnita en este sentido es: *Tenía una cierta cantidad de lápices y perdí 3. Ahora tengo 5. ¿Cuántos lápices tenía al principio?* Al presentar estas situaciones se sugiere pedir a los estudiantes que cierren los ojos e imaginen la situación, que la dramaticen, y que luego hagan como el retroceso en un video, para ver cómo se obtiene esa cantidad inicial.

- **Se establecen relaciones entre dos cantidades**, de mayor, menor o igual, es decir, que se comparan cantidades. Se indica cuánto más grande o más chica es una cantidad que la otra.



En estos problemas también basta una foto para tener el registro de todas las cantidades, pues pueden estar incluidas la cantidad mayor, la menor y de allí surgirá la diferencia. En estos casos se puede querer averiguar:

- *La cantidad mayor* (conocida la cantidad menor y la diferencia). En estos casos siempre se agrega la diferencia a la cantidad menor. *Por ejemplo: Elvira tiene 4 rosas más que su hermana Lissette, que tiene 10 rosas. ¿Cuántas rosas tiene Elvira?*
- *La cantidad menor* (conocida la cantidad mayor y la diferencia). Por ejemplo: *Elvira tiene 14 rosas, 4 más que su hermana Lissette. ¿Cuántas rosas tiene Lissette?*
- *La diferencia entre las cantidades*, es decir, cuánto le falta a la menor para igualar a la mayor, o bien cuánto hay que sacarle a la mayor para obtener la menor. Por ejemplo: *Lissette tiene 10 rosas y Elvira 14. ¿Cuántas rosas más que Lissette tiene Elvira?*

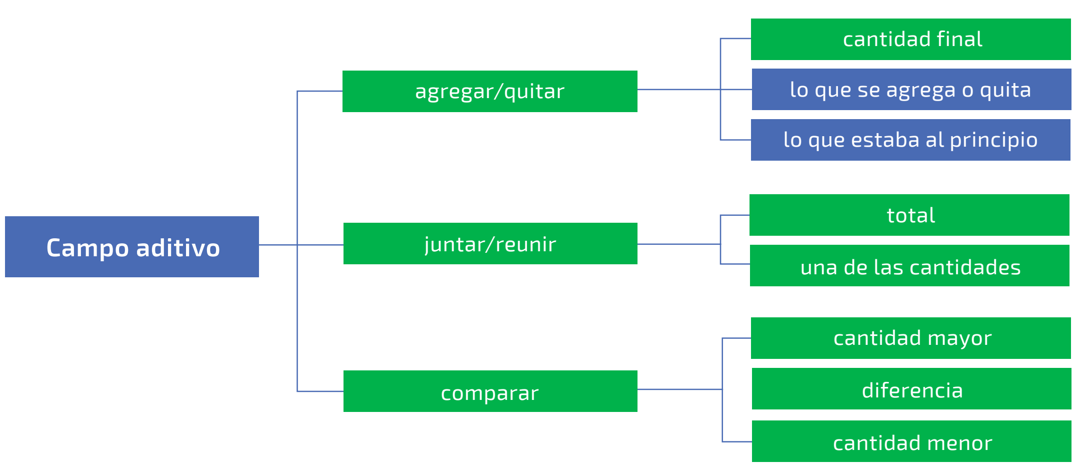
En primer grado se abordan en las secuencias aquellas situaciones en las que se averiguan las cantidades mayor o menor con enunciados muy sencillos. En segundo y tercero se avanza en problemas que presentan diferentes ubicaciones de incógnitas.

Es importante consignar que, en estos problemas, a diferencia de aquellos en los que se juntan cantidades, el total de rosas que están involucradas en la situación no se corresponde con la cantidad mayor. En este caso, el total de rosas que saldrían en una foto son 24 (las 14 de Elvira y las 10 de Lissette), mientras que en el otro sentido de reunir o juntar –sentido presentado en segundo lugar– el total será de 14 rosas.

Estos son los sentidos que se trabajan en el primer ciclo. Hay otros, pero sus niveles de dificultad superan el trabajo en este período. Aquí se presenta sólo un ejemplo posible de cada sentido, sin agotar todas las posibles ubicaciones de la incógnita.

- *Se combinan dos transformaciones*, por ejemplo: *En el primer partido gané 25 puntos y en el segundo perdí 50 puntos. ¿Qué pasó entre los dos partidos, ¿gané o perdí puntos? ¿Cuántos?*
- *Se juntan cantidades que pueden ser positivas o negativas*, por ejemplo: *Tengo una deuda de RD$ 50 y me deben RD$ 36. ¿Cuál es el resumen de mi situación?, ¿estoy en equilibrio? ¿Tengo deuda o me deben? ¿Cuánto?*
- *Se tienen cantidades que pueden ser positivas o negativas a las que se le agrega o quita algo* –se modifican a partir de una transformación–. Por ejemplo: *Debo RD$ 40 y vuelvo a contraer una deuda de RD$ 100. ¿Cuánto debo ahora?*

El siguiente gráfico muestra aquellos sentidos –con sus respectivas ubicaciones de incógnitas– que se presentan en las secuencias elaboradas en esta ocasión. En verde están las situaciones que están incluidas en las secuencias:



b. ¿Cuáles son los sentidos del campo multiplicativo?

En el campo multiplicativo se consideran las clases de problemas que se resuelven en forma óptima con la multiplicación, la división o una combinación de ambas operaciones.

Hay dos grandes grupos de estos problemas:

- **Los de multiplicación/división de una medida o de proporcionalidad**

  Son aquellos en los que una cantidad se repite un cierto número de veces para generar un total, es decir, aquellos que podrían resolverse con sumas reiteradas de sumandos iguales.

En estas situaciones, las posibles ubicaciones de las incógnitas son:

- *El total* (conocida la cantidad que se reitera y la cantidad de veces que esto sucede). Por ejemplo: *Tengo 4 cartucheras con 3 lápices en cada una. ¿Cuántos lápices tengo?*
- *La cantidad que se repite o se suma* (conocido el total y la cantidad de veces que se repite). A estas situaciones se las suele reconocer como de reparto equitativo, es decir, que se conoce entre cuántos se reparte en partes iguales y se quiere averiguar cuánto le toca a cada uno. Por ejemplo: *Si tengo 12 lápices distribuidos en partes iguales entre 4 cartucheras, ¿cuántos lápices habrá en cada cartuchera?*
- *Cuántas veces se repite la cantidad dada* (conocido el total y la cantidad igual que se suma). Estas situaciones se las conoce como de agrupamiento en partes iguales o partición. Es decir, se conoce cuánto corresponde a cada grupo entregando a todos una misma cantidad y se busca como respuesta cuántas veces hay que sumarla, o sea, entre cuántos se distribuye equitativamente. Por ejemplo. *Se tienen 12 lápices distribuidos de a 3 en cada cartuchera. ¿Cuántas cartucheras tengo?*

Dentro de este sentido se encuentran, además, como una subclase de problemas los de:

- Comparación multiplicativa, es decir, aquellos en los que se establecen relaciones entre dos cantidades, pero en lugar de explicar la diferencia aditiva entre ellas, se establece la cantidad de veces que una repite a la otra. Por ejemplo: *Yunior tiene 8 años y su hermana el doble. ¿Cuántos años tiene su hermana?* Del mismo modo, podrían pensarse otras ubicaciones de incógnitas y relaciones multiplicativas, por ejemplo: mitad, tercio, triple, etc.

Es importante recordar que este es el sentido más sencillo para iniciar la enseñanza de la multiplicación y la división. Por largo tiempo, será el sentido que los estudiantes identificarán como multiplicativo, por eso es el que se trabaja preponderantemente en las secuencias.

- **Los de multiplicación/división de dos medidas.** Como su nombre lo indica, se tienen dos (podrían ser más) cantidades que se multiplican entre sí para encontrar totales. Este sentido se puede abordar en el primer ciclo, pero sólo para que los estudiantes resuelvan con estrategias elementales, sin que se identifique aún como resolución óptima la multiplicación o la división.

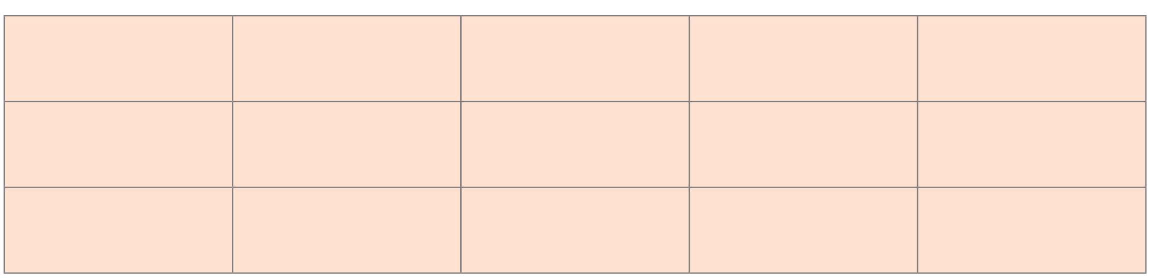
  Así como en los de proporcionalidad, se pueden identificar los de comparación como subclases; aquí se pueden identificar los problemas:

  - De combinatoria: los que permiten calcular cuántos elementos se pueden obtener combinado las cantidades que hay de cada uno de los elementos que se combinan. Por ejemplo: *Analía tiene 3 pantalones y 4 remeras. ¿De cuántas formas diferentes se puede vestir?*

  Distingue a estos problemas, y de allí su complejidad, que el resultado es algo nuevo, diferente a las cantidades iniciales. En el ejemplo anterior, hay pantalones y remeras que al combinarse dan un conjunto de vestir. Podrían ser platos y bebidas que se combinan en menús distintos. En estos problemas, la multiplicación permite responder a la cantidad total de combinaciones (no a cuáles son las combinaciones que se forman).

- Organizaciones rectangulares: los que tienen elementos organizados en una cantidad de filas y otra cantidad de columnas formando un rectángulo. En este caso, la cantidad de casilleros que se forman entre filas y columnas es el resultado de la multiplicación entre la cantidad de filas y de columnas. Es importante trabajar con este sentido porque son la base para comprender más adelante cómo calcular el área de un rectángulo conocida la medida de la longitud de sus lados.

3 filas



5 columnas

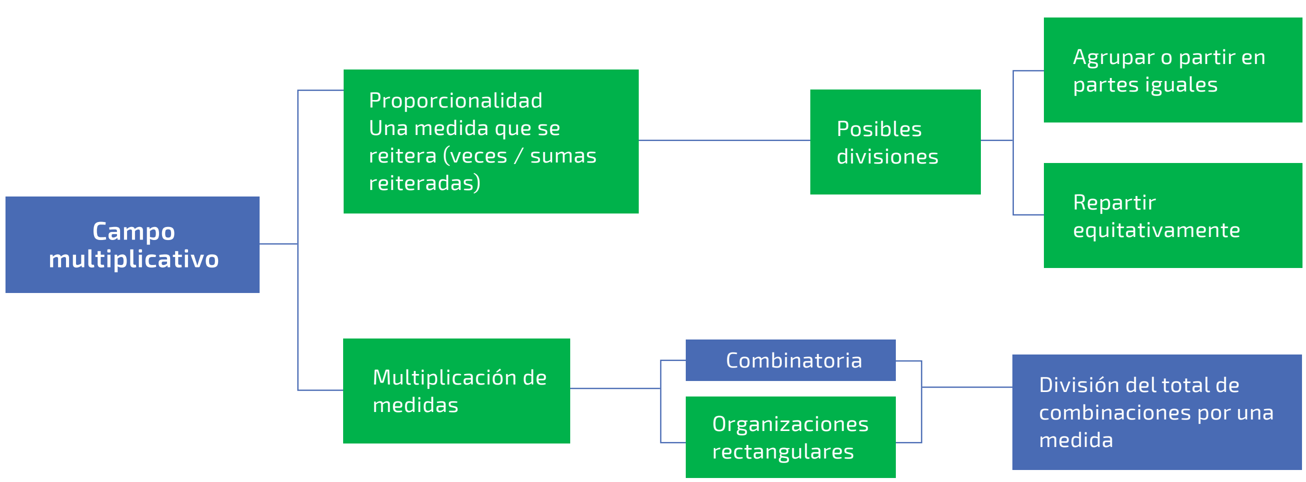
En este sentido multiplicativo, la división tendrá un único significado; es decir, no hay dos dificultades posibles diferentes por averiguar, además del total. Se pueden tener como incógnitas:

- *la cantidad total de combinaciones posibles* (conocidas las cantidades que se combinarán). Ejemplo 1: *En una heladería hay 3 gustos de helados de fruta y 5 de crema. Si quiero comer un helado combinando un gusto de fruta y otro de crema, ¿cuántas combinaciones puedo hacer?* Ejemplo 2: *Se quiere embaldosar un balcón rectangular con baldosas cuadradas. Si se necesitan colocar 8 filas y 7 columnas, ¿cuántas baldosas se necesitarán?*
- *una de las cantidades que se combinan* (conocido el total de combinaciones y una de las cantidades que se combinan). Ejemplo 1: *Si puedo hacer 15 combinaciones entre un gusto de helado de frutas y otro de crema y tengo 5 gustos de crema, ¿cuántos gustos de fruta tengo?* Ejemplo 2: *Se quiere embaldosar un balcón y se tienen 56 baldosas. Si se colocan 8 filas, ¿cuántas columnas habrá que colocar?*

Antes de resolver estos problemas a partir de multiplicaciones, la estrategia privilegiada para hacerlo es el conteo. Lamentablemente, muchos docentes desvirtúan estos problemas y los transforman en problemas de proporcionalidad, transformando las filas y las columnas en la cantidad de veces que se repite una de ellas. Esto no está mal si el estudiante lo hace por sí mismo, pero si se lo impone el docente, se evita que el niño invente otra clase de estrategias de solución posibles. En las secuencias sólo se hace una primera iniciación a estos problemas a partir de juegos para trabajar resultados multiplicativos con representación de rectángulos en hoja cuadriculada.

Después de trabajar las secuencias en segundo grado, también se podría avanzar con algunos problemas rectangulares, pero sin intentar vincularlos con la multiplicación ni con la suma reiterada si los estudiantes no lo hacen. En tercer grado sería importante avanzar en la resolución de los problemas rectangulares, tanto para averiguar el total de casilleros como la cantidad de filas o columnas. Los problemas de combinatoria también deberían ser presentados, pero propiciando resoluciones elementales y solo buscando una cantidad posible de combinaciones, no la situación inversa en la que se conoce el total de combinaciones posibles y una de las cantidades y se quiere averiguar la otra.

Esquemáticamente, los sentidos del campo multiplicativo que se trabajan en las secuencias se presentan aquí en verde:



c. ¿Cómo enseñar las operaciones?

En la Antigüedad resolver cuentas era cuestión de especialistas. Hasta muy avanzado el siglo XX, la principal demanda a la escuela primaria era enseñar a resolver las cuentas de las diferentes operaciones. Esta responsabilidad del nivel primario aseguraba una mejor formación de los ciudadanos para permitir mayor intervención de cada sujeto en los asuntos en los que se demandaba esta competencia. Esta visión de las operaciones se restringía al cálculo. Sin embargo, al aparecer la calculadora y generalizarse su uso, esta demanda fue transformándose en la imperiosa necesidad de que la escuela enseñe a resolver problemas, no sólo de operaciones ni exclusivamente en matemática. La competencia de resolución de problemas es hoy uno de los mayores compromisos que tiene la formación de los estudiantes, tal como está expresado en el Diseño Curricular Dominicano.

Hoy el tratamiento de las operaciones es mucho más amplio y extenso que realizar cálculos, y por ello hay que tener en cuenta que para el estudiante del primer ciclo cada situación que implica el uso de alguna de las cuatro operaciones básicas presenta dos dificultades que tiene que abordar:

- La **elección de la estrategia** para resolver la situación, que en muchos casos consistirá en seleccionar la operación o un procedimiento adecuado, aunque no sea la óptima inicialmente. Por ejemplo, un niño elige contar todo para resolver un problema de suma.
- La **resolución de la estrategia elegida**. Una vez elegido lo que tiene que contar o el cálculo que tiene que realizar surge la dificultad de cómo hacerlo. Por ejemplo, si un niño decidió que había que contar todo, ¿cómo contará? ¿comenzando desde 1 y seguirá de a 1 hasta el final, o avanzará con sobreconteo, es decir, contando a partir de una de las cantidades dadas?

Hoy la enseñanza de las operaciones se inicia a partir de construir la noción de cada operación, es decir, de identificar las clases de problemas que resuelve esa operación. A partir de esto, luego se avanzará en las estrategias de cálculo. Las propiedades de las operaciones se las usa, y luego, más adelante, se las definirá.

i. ¿Cómo trabajar la construcción de la noción de cada operación?

Se comienza enseñando las operaciones **a partir de situaciones problemáticas con los sentidos más fáciles**, es decir, con los problemas que frecuentemente el niño se puede encontrar y que tienen una complejidad de acuerdo con su edad. Se presentan problemas en los que la resolución óptima sea esa operación, aunque los niños las resuelvan inicialmente con operaciones o procedimientos más elementales.

El aprendizaje de un concepto o de estrategias se logra a partir de la actividad cognitiva del sujeto al resolver un problema que le dé sentido al mismo. Esto lo hace partiendo de sus conocimientos previos. Así, ante un problema de suma, de división o de cualquiera de las operaciones, los estudiantes, que aún no conocen esas operaciones, las resolverán con estrategias elementales que ya dominan y que les permitan encontrar las soluciones. En la exploración de los problemas ellos utilizan representaciones que les son cercanas y que les permiten abordar el problema. Hay que tener en cuenta que aquí juegan un rol fundamental **las representaciones que puede hacer cada niño**. De este modo, habrá simultáneamente en el aula algunos que trabajen con representaciones y estrategias diversas:

- a nivel concreto (con objetos o dedos) y contando,
- haciendo dibujos y contando,
- presentando cálculos y operando, en muchos casos identificando la operación como la que resuelve, pero recurriendo a estrategias anteriores para obtener los resultados de ese cálculo. Por ejemplo, para saber el resultado de 4 x 5 harán 5+5+5+5.

El uso de estas diferentes representaciones no es lineal, ni tampoco han de pensarse como etapas que todos los estudiantes recorren. Las secuencias se organizan considerando los niveles de generalización que implican y procurando promover que los estudiantes avancen hacia estrategias superadoras. Consideremos, por ejemplo, el caso de la división en las secuencias. Cuando se trabaja esta operación, pueden identificarse las estrategias que implican el uso del material concreto, los dibujos, las estrategias aditivas y en todos estos casos se tiene que recurrir también al conteo. Eventualmente, y con posterioridad, los estudiantes pensarán al resultado de una división como el número por el que hay que multiplicar a … para llegar a … Es decir, utilizarán una estrategia multiplicativa. La superación de cada una de ellas no se logra en una, dos o tres clases. Esto **demanda tiempo**, hasta que los estudiantes identifiquen que toda una clase de problemas admite una estrategia determinada de resolución. Por ello es **indispensable que sigan frecuentando la resolución de esa clase de problemas** para poder llegar del material concreto a lo simbólico. En las secuencias se presentan situaciones que traccionan hacia resoluciones más avanzadas, pero se recomienda que el docente a cargo del curso no presente las nuevas situaciones hasta estar seguro de que los estudiantes ya dominan la estrategia que están usando. Cuando el docente identifica que ya resuelven sin dificultad, abordará las nuevas actividades, que avanzan hacia procedimientos superadores mediante problemas en los que la estrategia usada resulta tediosa por las cantidades que se presentan. Se parte de la convicción de que las operaciones hay que concebirlas, es decir, ir aproximándose paulatinamente a ellas a partir de identificar las clases de problemas que resuelven. En este proceso ayuda el trabajar simultáneamente con las operaciones inversas, dado que las situaciones que resuelven ambas son las mismas, solo varía aquello que se conoce, y por lo tanto, lo que se quiere averiguar. Este trabajo paralelo con una operación y su inversa enriquece la comprensión que los estudiantes van construyendo de ambas.

Cuando ya los estudiantes identifican cierta clase de problemas que se resuelven con una operación, es el momento de presentarla como tal junto con su signo. En el caso de la multiplicación y la división, se incrementan las dos cantidades que resuelven para que surja la necesidad de una nueva estrategia. Se plantea que los estudiantes resuelvan los primeros cálculos con una calculadora para que puedan reconocer claramente que la operación que resuelve es la multiplicación o eventualmente la división, ya que aún no pueden resolver de otra forma el cálculo con esa operación con números tan grandes. Esto se hace para no generar la confusión que implica decir que se resuelve con una multiplicación cuando en realidad se hace una suma para obtener el resultado. Esto se superará a lo largo de las clases.

En las secuencias también se considera muy importante, antes y después de presentar cada operación, identificar las diferencias entre los problemas que esa operación resuelve y los que resuelven las otras operaciones que los estudiantes ya conocen.

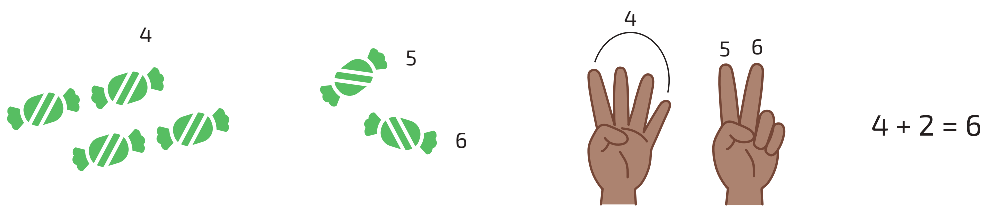
ii. ¿Cómo abordar la enseñanza del cálculo?

Al considerar la enseñanza del cálculo hay que tener en cuenta que, en primer lugar, debe trabajarse muy bien el conteo. Por ejemplo, ante el problema: *Tengo 4 caramelos y me regalan 2. ¿Cuántos caramelos tengo?*, veamos algunos escenarios posibles de resolución:

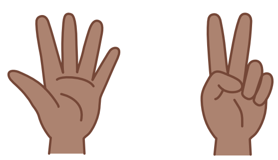
- Un niño puede usar los dedos, poner 4, luego agregar dos dedos y finalmente contar desde 1 o desde 4 (sobreconteo) para llegar al resultado.

- Una niña podría dibujar los 4 caramelos primero, luego los dos y contar con una estrategia más o menos desarrollada.

- Un tercer niño podría escribir 4 + 2 =. Este niño identifica la suma como operación óptima, aunque luego tenga que usar los dedos para contar y decir el resultado.

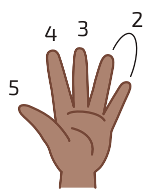


Especialmente en primero, aunque también en segundo grado, se presentan en las actividades oportunidades para trabajar el repertorio aditivo con el apoyo de los dedos o determinados elementos que presentan configuraciones de números. En cada una de las actividades en las que esto sucede se presentan alternativas factibles de ser utilizadas por los estudiantes. Por ejemplo: para sumar elementos el estudiante puede sumar todo o sumar a partir de un número dado. Para restar 5 – 3, según el enunciado del problema podrá:

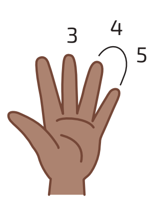


Tengo 5. Bajo 3. Quedan 2.

O quizás cuente regresivamente.



O reste por complemento.



Suele ser poco frecuente que los docentes se ocupen de que los estudiantes compartan sus estrategias de conteo, ya que no se lo considera un tema de enseñanza. Sin embargo, esta es la clave para afianzar la cardinalidad y propiciar buenas estrategias de cálculo futuro.

Las **estrategias de cálculo** requieren procesos especiales de enseñanza en los que no se impongan procedimientos que parecen mágicos para los estudiantes. El avance en el conocimiento del sistema de numeración decimal, el recordar resultados y disponer de estrategias de cálculos mentales los ayudará a ir construyendo algoritmos alternativos. Por sobre todo se espera que ellos puedan:

- utilizar estrategias cargadas de significados reconocidos porque establecen las relaciones necesarias para utilizarlas,
- cargar de significado los números con los que operan y los resultados que buscan y obtienen, y
- controlar los resultados que se obtienen.

Al hacer este análisis conviene diferenciar:

- **el cálculo automático:** que implica aplicar un mismo procedimiento o algoritmo, cualesquiera sean los números que aparecen. En este caso, siempre se usa el mismo método. Por ejemplo:
  - *cualquiera de los algoritmos tradicionales de las operaciones*. Se escriben los números bien encolumnados según los valores posicionales. Se suma en cada columna, respetando los agrupamientos de a 10:

$$\begin{array}{r} 78 \\ +\ 125 \\ \hline 203 \end{array}$$

  - *el uso de la calculadora:* Se presiona o ingresa 78, luego + , después 125 y finalmente el signo = para obtener el resultado en la calculadora.

- **el cálculo reflexivo:** es aquel en el que se decide el procedimiento a utilizar en función de:
  - los números que aparecen,
  - el repertorio de resultados que se recuerdan,
  - las estrategias conocidas.

Es decir, se eligen los más apropiados, según los disponibles, para resolver el cálculo planteado. Por ejemplo:

44 x 9 = se puede resolver haciendo 44 x 10 = 440 y luego se le resta 44 porque se lo consideró una vez más de las indicadas,
y para resolver 440 – 44= se plantea 440 – 40 = 400, para luego a 400 restarle 4, 400 – 4 = 396, que resulta sencillo si se recuerdan los complementos a 10.

Para resolver así hay que recordar cómo multiplicar por 10, que 9 se puede reemplazar por 10 - 1, y que se puede aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o la resta y así queda 44 x 10 - 44 x 1. Luego, para hacer las restas, se debe recordar cómo, aplicando la descomposición aditiva, 44 se puede expresar como 40 + 4, restar primero 40 porque eran 40 los que sobraban a 400 y luego restar 4 recordando los complementos a 10 (4 + … = 10).

Es importante tener en cuenta que en las secuencias se proponen un conjunto considerable de tareas que promueven la práctica de este cálculo reflexivo. Su desarrollo podrá potenciar luego la elección de procedimientos de resolución más económicos. Es muy importante que estos procedimientos alternativos no sean impuestos ni rechazados por el docente. Se espera que los propicie y luego promueva, en las puestas en común, su análisis e intercambio para validarlos y enriquecer paulatinamente las resoluciones. A partir de comprender cómo y por qué se van haciendo los diversos pasos, se podrá avanzar hasta concluir en el algoritmo tradicional. Pero esto se logra después de un largo tiempo en el que se comprenden mejor la organización del sistema de numeración y se fortalecen las estrategias de cálculo.

Como caso especial del cálculo reflexivo hay que considerar al **cálculo mental** que permite, además de brindar resultados, avanzar en la comprensión y el control de los procesos de cálculos de lápiz y papel al elegir estrategias, estimar y controlar resultados, entre otras cuestiones.

Se mencionó que para el cálculo reflexivo hay que recordar y/o reconstruir resultados numéricos. Dada la operación 8 + 5, recordar el resultado sería decir directamente 13, mientras que reconstruirlo consistiría en decir por ejemplo 8 + 2 = 10 y 10 + 3 = 13. Para ello se tuvo que apelar también a estrategias de resolución conocidas, como la de descomponer un número en sumas y asociar para obtener resultados fáciles como los que implican complementos o sumar un número terminado en cero con otro de un dígito.

En las secuencias se destina bastante tiempo de trabajo áulico a producir y recordar resultados. En este sentido, se brindan muchas oportunidades para memorizarlos, especialmente a través de juegos. En primer grado la actividad se concentra en resultados aditivos (de sumas que luego se vinculan con las respectivas restas). En segundo, por su parte, se fortalecen resultados de cálculos ya abordados en primero, extendiendo las estrategias a mayor número de dígitos, y se inician las propuestas de actividades para recordar los resultados multiplicativos. En tercero se concentra una mayor cantidad de actividades relacionadas con este aspecto, vinculadas al campo multiplicativo. En los documentos de las secuencias de cada grado se explica el repertorio de cálculos que se propicia trabajar. La tabla o cuadro de resultados multiplicativos tiene un espacio especial, pues se la utiliza frecuentemente en las secuencias de segundo y de tercero para propiciar el abandono paulatino de la estrategia de sumar para decir los resultados multiplicativos. También es un valioso recurso auxiliar para iniciar a los estudiantes en las estrategias multiplicativas para resolver los problemas de división.

Por otra parte, se busca que los estudiantes aprendan estrategias para resolver cálculos aplicando propiedades de las operaciones sin necesidad de que las expliquen con su nombre. Por ejemplo: 33 x 4 es lo mismo que sumar a 30 x 4 el resultado de 3 x 4. Estos son ejemplos de cálculos reflexivos que permiten avanzar comprensivamente hacia el algoritmo de la multiplicación.

Tan importante como enseñar la clase de problemas que resuelve una operación, es enseñar a recordar o reconstruir los resultados de los dígitos entre sí, tanto para la suma como para la multiplicación, con sus respectivas inversas (la resta y la división). Se dirá que un estudiante suma o multiplica cuando puede identificar qué clase de problemas se resuelven sumando o multiplicando. Pero también si ante un determinado cálculo puede decir directamente el resultado o reconstruirlo. Aunque exprese el cálculo con la operación de suma, si recurre al conteo, o si ante un cálculo de multiplicación recurre a la suma para encontrar el resultado, entonces no puede decirse que ese estudiante ya suma o multiplica.

Antes de concluir este apartado es importante señalar lo invalorable de la calculadora **como recurso para la enseñanza**, ya sea para encontrar rápidamente muchos resultados que en algunas ocasiones ayuden a detectar patrones y sacar conclusiones; para realizar juegos; para explorar el funcionamiento de las operaciones; para validar resultados, entre otros. Además de que sirve como herramienta que permite obtener rápidamente resultados de cálculos con muchos dígitos tediosos para procesar manualmente.

d. Alcances del contenido en los diferentes grados:

i. Sentido de las operaciones

	1.º GRADO	2.º GRADO	3.º GRADO
Campo aditivo **(Suma y resta).**	Agregar y quitar (avanzar y retroceder) con incógnita en la cantidad final. Juntar o reunir con incógnitas en el total o en una de las cantidades parciales. Comparar con incógnita en la cantidad mayor o en la menor. Diferenciar los problemas de suma y de resta.	Agregar y quitar (avanzar y retroceder) con incógnita en la cantidad final y en lo que se quita o se agrega. Juntar o reunir con incógnitas en el total o en una de las cantidades parciales. Comparar con incógnita en la cantidad mayor, en la menor o en la diferencia.	Agregar y quitar (avanzar y retroceder) con incógnita en la cantidad final y en lo que se agrega o quita. Queda pendiente preguntar por la cantidad inicial. Juntar o reunir con incógnitas en el total o en una de las cantidades parciales. Comparar con incógnita en la cantidad mayor o en la menor.
Campo multiplicativo **(Multiplicación y división).**	Suma de iguales.	Problemas en los que una cantidad se reitera cierta cantidad de veces (proporcionalidad) con incógnita en el total, o en las veces o en lo que se suma. Diferenciar problemas de suma y de multiplicación. Situaciones de reparto equitativo y agrupamientos equitativos con resto o residuo 0. Identificar qué problemas resuelve cada uno.	Problemas en los que una cantidad se reitera cierta cantidad de veces (proporcionalidad) con incógnita en el total, o en las veces o en lo que se suma. Diferenciar problemas de suma y de multiplicación. Situaciones de reparto equitativo y agrupamientos equitativos. Identificar qué problemas resuelve cada uno. Problemas con resto 0 y distinto de resto 0.

ii. Resolución de cálculos y conteos

	1.º GRADO	2.º GRADO	3.º GRADO
Representaciones y primeras estrategias (sumas y restas).	Representaciones con los dedos u otro material concreto. Representaciones con dibujos. Estrategias de conteo de todo y sobreconteo para las sumas. Estrategia de conteo regresivo, de quitar y contar lo que queda, de contar lo que falta para llegar a un número (complementos).	Representaciones con los dedos u otro material concreto. Representaciones con dibujos y en recta numérica. Estrategias de conteo de todo y sobreconteo para las sumas. Estrategia de conteo regresivo, de quitar y contar lo que queda, y contar lo que falta para llegar a un número (complementos).	Conteo con material concreto de números menores que 100, comparación de cantidades.
Representaciones y primeras estrategias (multiplicación y división).	-	Representaciones con material concreto, dibujos y simbólicas. Estrategias de conteo con material concreto o con dibujos y de sumas reiteradas de sumandos iguales para multiplicación. Estrategias de conteo en material concreto o dibujos en división. Iniciación a las estrategias aditivas de suma o resta y conteo en división.	Representaciones con material concreto, dibujos y simbólicas. Iniciación al agrupamiento de a 10. Estrategias de conteo con material concreto o con dibujos y de sumas reiteradas de sumandos iguales para multiplicación. Estrategias de conteo en material concreto o dibujos en división. Estrategias aditivas de suma o resta y conteo en división. Estrategia de búsqueda de factor en multiplicación.

Cálculos reflexivos. **Resultados.** **Suma cada uno con los dos cálculos recíprocos de resta.**	+1/-1 Si a números terminados igual se le suma número de un dígito igual a ambos los resultados son iguales. +/- 10 Complementos a 10. Sumas de números de dos dígitos terminados en cero. Sumas de un número de dos cifras terminado en cero más uno de un dígito. Sumas de dobles.	+1/-1, +/- 10 , + /- 100 Complementos a 10 y a 100. Sumas de números de dos y tres dígitos terminados en cero. Sumas de valores posicionales en números de dos, tres y cuatro dígitos. Sumas de dobles.	+1/-1, +/- 10 , + /- 100 Complementos a 10, 100 y a 1,000. Sumas de números de dos, tres, cuatro y cinco dígitos terminados en cero, doble, triple y cuatro ceros. Sumas de valores posicionales en números de dos, tres, cuatro y cinco dígitos. Sumas de dobles.
Cálculos reflexivos **Resultados** **Multiplicación y división**	-	Multiplicaciones por 10 y por 2. Uso del Cuadro Multiplicativo para buscar resultados. Seis primeros dígitos por seis primeros dígitos. Productos de dos factores.	Multiplicaciones por 10, por 100, por 2 y por 5. Uso del Cuadro Multiplicativo para buscar resultados de multiplicaciones y divisiones. Relación entre escalas o series numéricas de los dígitos y las tablas. Diez primeros dígitos por diez primeros dígitos. Encontrar factores (de un dígito) que multiplicados por otro conocido (de un dígito) den un resultado conocido.
Cálculos reflexivos. **Estrategias.** **Suma y resta.**	Compensación de cantidades en sumas. Descomponer y componer números según convenga. Sumas de unidades entre sí y de decenas entre sí previa descomposición y posterior composición.	Compensación de cantidades en sumas. Descomponer y componer números según convenga. Sumas de 10 para sumar / restar 9 u 11 o 12 Sumar por complementos a 10 /100 Propiedades conmutativa y asociativa.	Propiedades conmutativa, asociativa.

Cálculos reflexivos. **Estrategias .** **Multiplicación y división.**	-	Propiedad conmutativa.	Obtención de multiplicaciones de dígitos entre sí por sumas o multiplicaciones de otros más sencillos. Descomposición y composición de números y uso de otras estrategias según los números que aparecen. Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva (sin nombrarlas).
Algoritmos alternativos. **Sumas y restas.**	Descomposiciones en sumas.	Descomposición y composición de cantidades y sumas o restas de los valores posicionales.	Descomposición y composición de cantidades y sumas o restas de los valores posicionales.
Algoritmos alternativos. **Multiplicaciones y divisiones.**	-	Suma reiterada de sumandos iguales. Estrategias aditivas para división.	Descomposición y aplicación de propiedad distributiva para números de dos y tres dígitos por números de un dígito.
Algoritmos tradicionales. **Suma y resta.**	Iniciación al algoritmo de la suma (no planteado en las secuencias).	Consolidación de la suma y iniciación a la resta. Sus vinculaciones con los otros algoritmos reflexivos.	Consolidación de resta. Sus vinculaciones con los otros algoritmos reflexivos.
Algoritmos tradicionales. **Multiplicación y división.**	-	-	No se abordan algoritmos de división.

La calculadora es una herramienta de trabajo para los cálculos y un recurso didáctico para usarla en la enseñanza:

a) Para obtener resultados de números de tamaño que lo justifiquen.

b) Para validar resultados.

c) Para obtener resultados de los que luego se buscarán patrones.

d) Para resignificar algunos contenidos (valores posicionales entre otros).

e) Para presentar las operaciones de multiplicación y división diferenciándolas de la suma y de la multiplicación respectivamente.

3. Otros contenidos enseñados en las secuencias

¿Qué otros ejes de contenidos se abordan en las secuencias?
a. Mediciones b. Geometría c. Estadística

¿Qué otros ejes de contenidos se abordan en las secuencias?

En todas las secuencias de los tres grados se trabaja con números y operaciones. Además de esto, en tres de las secuencias de primero y segundo grados se incorporan, además, otros contenidos, y en tercer grado, en cinco de las seis secuencias.

Los otros ejes considerados, aunque con menor cantidad de clases, son:

a. Mediciones
b. Geometría
c. Estadística

Una de las decisiones que se tomó al seleccionar los contenidos y las actividades para proponer en cada grado fue procurar que de cada una de ellas, los docentes pudieran tomar ideas para cualquiera de los tres ejes en el conjunto de los grados, adaptándolas a las especificidades de los contenidos específicos y de sus grados.

a. Mediciones

En la vida cotidiana la presencia de las medidas es muy frecuente. Es responsabilidad de la escuela que los estudiantes egresen del nivel primario con los conocimientos básicos requeridos para desempeñarse eficazmente en su obtención y utilización.

En este eje es indispensable la resolución concreta de muchos de los problemas porque se trata de cuantificar, es decir, asignar un número a una cantidad de una determinada magnitud física de un objeto, por ejemplo, la capacidad de un balde o el largo de una soga. Para poder asignar ese número, hay que disponer de alguna herramienta o instrumento graduado que ayude a determinar cuántas veces entra otra cantidad de la misma magnitud, que se llama unidad de medida en la cantidad a medir. Por ejemplo, se considera una longitud de un centímetro para medir el ancho de una ventana, o la unidad de litro para medir la capacidad de un balde. Así se obtiene la medida de lo que se está midiendo. Está compuesta del número que se asigna acompañado del nombre de dicha unidad. En el ejemplo anterior podría quedar que el ancho de la ventana es de 90 cm o que el balde tiene una capacidad de 10 l.

En la enseñanza hay que proponer una serie de actividades organizadas según las dificultades que presentan los procesos de medición con las distintas magnitudes. En primer lugar, los estudiantes tienen que identificar la magnitud que se está midiendo, es decir, aislarla de otras propiedades físicas. Por ejemplo, medir el ancho de la pizarra, porque se podría medir su superficie, su peso, su volumen.

Al trabajar con estudiantes del primer ciclo se torna indispensable que realicen prácticas para que puedan evitar el dejarse llevar únicamente por la percepción para basarse en los resultados de las mediciones. Para ambas cuestiones, las tareas de comparar cantidades de esa magnitud suelen ser las que frecuentemente se usan. Para realizar mediciones, se trabaja inicialmente con unidades arbitrarias, por ejemplo: el largo de un lápiz para medir longitudes pequeñas, el largo de un paso para medir el ancho de una habitación, o el propio cuerpo, por ejemplo, el ancho de un dedo. Cuando se pasa a las unidades del sistema en vigencia, es importante que los estudiantes puedan internalizar el tamaño de las unidades de uso frecuente, estimar cantidades, decidir la unidad más conveniente de utilizar para el tamaño de lo que se quiere medir, aprender a utilizar los instrumentos de medición, fabricarlos y realizar otras experiencias convocantes. En tercer grado, dada la ampliación del campo numérico, se ofrecen experiencias que posibiliten la iniciación al conjunto de los números racionales con el uso de fracciones sencillas para expresar una medida.

Los estudiantes suelen involucrarse activamente y con interés en las experiencias que desarrollan en la enseñanza de estos temas. Es una excelente oportunidad para que disfruten aprendiendo matemática, lo que contribuirá a mejorar su autoestima en relación con sus posibilidades de "hacer" en el área. En las secuencias se presentan actividades relativas a algunos de los aspectos mencionados según la siguiente distribución por grados.

1.º GRADO	2.º GRADO	3.º GRADO
Internalizar la magnitud longitud. Comparar longitudes. Medir longitudes con unidades arbitrarias y corporales.	Comparar longitudes. Medir longitudes con unidades convencionales: el centímetro Internalizar el tamaño del centímetro. Usar la regla.	Internalizar el tamaño del metro. Medir longitudes en centímetros y en metros. Equivalencia entre centímetros y metros. Iniciación a la estimación. Iniciación a la fracción ½. Medidas de capacidad. El litro y el medio litro.

b. Geometría

Cuando el niño ingresa a primer grado aún está en la etapa de internalizar el espacio que lo circunda. De allí que la geometría que se enseña en la escuela sea la geometría métrica, es decir, la que modeliza el espacio en el que nos movemos. La mayor internalización del espacio físico le permitirá ir avanzando en geometría en aproximaciones sucesivas a mayores niveles de abstracción.

A diferencia de los problemas de ubicación en el espacio que ponen en contacto al estudiante con el espacio físico o sensible, las situaciones geométricas lo ponen en contacto con objetos abstractos que solo conocemos por sus representaciones. Vale la pena recordar que una persona no patea una esfera, sino una pelota que se asemeja a ella. Los dibujos y los cuerpos geométricos (tanto los que se usan como modelos en las aulas como los envases u otros que puedan utilizarse) son las representaciones de las formas geométricas, que pueden ser de dos y tres dimensiones, que no tienen existencia real, son abstractos. Esto es algo que el docente debe tener presente, pero que excede la comprensión de los niños en el primer ciclo. En el modo de expresión de los docentes, la mención sistemática de que, por ejemplo, un dado "se parece a" o "tiene forma de" cubo, y no que "es" un cubo, ayudará en esta dirección.

Las interacciones con las figuras y cuerpos geométricos en esta etapa ayudarán a los estudiantes a formar imágenes mentales, y a partir de ellas, ir iniciándose intuitivamente en la identificación de sus elementos y la detección de las propiedades que las caracterizan. Al establecer diferencias entre ellas, esa interacción contribuirá a la construcción de las concepciones de lo plano y lo espacial. Estos conocimientos quizás no siempre sean "útiles" para la vida cotidiana, pero les permitirán ir aprendiendo un vocabulario específico (vértices, aristas, caras, etc.) que posibilitará más adelante una mayor rigurosidad en las expresiones y en los conceptos. Por ejemplo, en la vida cotidiana suele usarse indistintamente la expresión cuadrada para indicar formas que no necesariamente tienen las propiedades de los cuadrados, sino que son rectángulos. Vista la importancia de la construcción de imágenes mentales, es muy necesario que a los estudiantes se les presenten las diferentes posibilidades de modelos de figuras. Esto evitará, por ejemplo, que los estudiantes sólo identifiquen a los triángulos como equiláteros o eventualmente como isósceles.

Dependerá de las actividades que se propongan y el trabajo matemático que estas promuevan, la posibilidad de iniciarlos en un modo de pensar característico de lo geométrico. Las anticipaciones que puedan realizar los estudiantes son un claro aporte en esta línea. Vale mencionar que las actividades de las secuencias promueven además la puesta en acción y desarrollo de habilidades geométricas variadas[32]: de visualización (vinculadas a la creación y uso de representaciones internas y externas), de comunicación (oral por ser del primer ciclo), de dibujo y construcción (asociadas a las representaciones externas), de razonamiento lógico (ligadas al análisis de propiedades de los objetos geométricos y argumentos sobre sus relaciones) y de transferencia o aplicación (que posibilitan el uso de los conocimientos geométricos en la resolución de problemas tanto matemáticos como de otras áreas).

En estas secuencias se abordan los siguientes contenidos:

1.º GRADO	2.º GRADO	3.º GRADO
Identificación de figuras básicas: círculo, triángulo, cuadrado, rectángulo. Patrones geométricos. Uso de la regla.	Cuerpos geométricos. Identificación de sus elementos.	Cuerpos geométricos. Identificación de sus elementos. Relación entre cuerpos y figuras. Patrones geométricos.

c. Estadística

Recoger información, organizarla y representarla para poder comunicarla es la forma más sencilla de iniciar a los estudiantes en las nociones de estadística. Su aprendizaje implica que ellos mismos se involucren activamente en las distintas actividades que el proceso estadístico implica. Enfrentar las dificultades que esto les presenta los ayudará a ir construyendo conceptos y procedimientos centrales para poder disponer de información para la toma de decisiones.

La mayor parte de la información estadística que circula en los medios de comunicación está presentada en forma de gráficos porque estos permiten tener una noción rápida de las relaciones que se dan entre esas cantidades. Esto gráficos son los que permiten percibir visualmente, antes que analíticamente, los mayores valores, los mínimos, la relación entre ellos. Esas visualizaciones forman imágenes mentales que influirán en sus apreciaciones sobre el tema del que trata el gráfico e inciden sobre la opinión y las decisiones que finalmente se toman a partir de su lectura.

En estas secuencias se propone una aproximación de los estudiantes al mundo de la estadística. Se les proponen actividades vinculadas con sus intereses y vida cotidiana para que puedan vivenciar qué implica registrar la información y presentarla en forma ordenada. Las tablas de valores son la primera aproximación a la organización y análisis de datos. También se aborda la lectura de gráficos según los grados, a partir de la lectura de pictogramas

32 Bressan, Reyna y Zorzoli (2003). Enseñar geometría: redescubrir una tarea posible. Ed. Styrka, Uruguay.

y gráficos de barra. Se prioriza la enseñanza de la lectura e interpretación de los mismos, y a medida que se avanza en la escolaridad, se abordan las relaciones entre los diferentes formatos de representación (tablas y gráficos) en que se muestra la información. La construcción de gráficos requiere de habilidades específicas más complejas. Sin embargo, se presentan algunas actividades que permiten iniciar a los estudiantes en estos procesos.

Es importante consignar que el abordaje de los gráficos y su interpretación obliga a los estudiantes a prestar atención a los formatos en que se presentan. En todos ellos la noción de escala juega un rol fundamental. Los estudiantes se van aproximando intuitivamente a esta compleja noción que implica relaciones de proporcionalidad directa.
Los contenidos de estadística que se abordan en las secuencias de cada grado son:

1.º GRADO	2.º GRADO	3.º GRADO
Elaboración e interpretación de pictogramas.	Interpretación de tablas y gráficas de barras. Relación entre tablas y gráficos.	Recolección de información. Elaboración e interpretación de gráficas de barras. Tablas y su relación con los gráficos.

4. Errores en el proceso de aprendizaje matemático

En este apartado se responderá a los siguientes interrogantes:

a. ¿Cuál concepción sobre los errores se tiene actualmente?
b. ¿Cuáles pueden ser las causas de un error?
c. ¿En qué oportunidades surgen estos errores?
d. ¿Qué errores suelen ser frecuentes?
e. ¿Cómo aprovechar los errores?

a. ¿Cuál concepción sobre los errores se tiene actualmente?

La resolución de problemas es uno de los procesos principales a través de los cuales los estudiantes aprenden matemática. Cuando los resuelven, ponen en juego sus concepciones[33] y es seguro que aparecerán errores de diverso orden. En este sentido, es fundamental que los estudiantes sean conscientes de los aciertos y errores que cometen para poder afianzar los primeros y modificar los últimos. Para ello, el docente recorrerá el salón mientras ellos resuelven las tareas. Podrá ayudarlos a identificar sus errores a partir de preguntas que puedan promover la revisión de lo trabajado. Es una forma de iniciarlos a tener un control sobre sus producciones. Muchas veces, también pueden lograrlo a partir del intercambio con otros compañeros en pequeños grupos. Por otra parte, es necesario que analicen errores que otros cometieron para poder evitarlos a partir de entender cómo se originaron. Se busca que el estudiante pueda por sí mismo validar los procesos realizados y los resultados encontrados, es decir, si son correctos o no, y poder argumentar la afirmación. Muchas veces esto suele realizarse en intercambios coordinados por el docente con todo en el grupo clase. La puesta en común es un momento privilegiado de la clase para generar estas oportunidades, aunque algunos de los errores hayan sido resueltos previamente. Es el momento

33 Conviene recordar que en las concepciones juegan un rol central las imágenes mentales del sujeto, los problemas previos que resolvió y que asocia a lo que se está abordando y los conocimientos previos con los que vincula las nociones con las que está trabajando, entre otras cuestiones.

en que los estudiantes podrán observar de manera metacognitiva el proceso que realizaron, para poder aprender entre todos. Por eso, esta instancia no es una mera corrección, sino una etapa indispensable en el tratamiento de los errores que surgen de lo que los estudiantes ponen en juego en su proceso de aprendizaje.

En los últimos años se han modificado sustantivamente los supuestos sobre los errores de los estudiantes al realizar diversas tareas. De ser considerados simplemente un mal que se deben erradicar porque surgían de falta de estudio de los estudiantes, de su falta de capacidad o de su comprensión limitada, se ha pasado a considerarlos una fuente de información indispensable para poder mejorar los aprendizajes y las propuestas de enseñanza posteriores al momento en que se los detecta. Para que esto sea posible, es necesario identificar aquellos que se repiten sistemáticamente y están instalados en los estudiantes, que aparecen en diversos contextos y suelen estar vinculados con otros errores con los que forman una trama. Este es uno de los objetivos centrales que los docentes deben tener, ya que les permitirá realizar efectivamente una ayuda ajustada a las dificultades detectadas. Por ejemplo, si algunos estudiantes tienen dificultades en la lectura y escritura de números de dos dígitos, habrá que considerar si pueden leer y escribir bien los números terminados en cero de esa cantidad de dígitos y también si han detectado el patrón de formación de los números relativo a que después de cada número de dos dígitos terminado en cero se reiteran las terminaciones de la serie del 1 al 9. Si esto no estuviera aprendido, hay que proponerles tareas que faciliten estos aprendizajes para poder adquirir o afianzar la lectura y escritura de los números de dos dígitos en forma estable.

b. ¿Cuáles pueden ser las causas de un error?

Los errores mencionados pueden tener diferentes causas, entre ellas conviene mencionar:

- Las causas **epistemológicas**, que surgen por las dificultades que implican algunos contenidos matemáticos. Por ejemplo, la correspondencia entre los nombres de los números y la escritura simbólica puede promover en la escritura diferentes errores. *Ciento ocho* para unos estudiantes puede ser:
  - *1008* ya que escriben el *100* al escuchar *ciento* y *8* cuando se menciona el *ocho*.
  - y para otros *18*. Esto se debe a que el nombre de los números se basa en los valores posicionales de los dígitos. En este caso el cero no se nombra y los estudiantes se basan en las cifras que corresponden a los valores de las cifras que indica el nombre del número, desatendiendo en este caso que además hay que considerar su posición.

  Del mismo modo, algunos tendrán dificultades en responder preguntas vinculadas con la conservación de cantidades continuas. Por ejemplo: Ante la pregunta sobre cuál es el hilo más largo entre estos dos:

  podría suceder que consideren que el de abajo es más largo porque perceptualmente así parece.

  Por eso en las secuencias se incorporan actividades específicas para abordar estas y otras posibles dificultades de igual origen.

- Las causas **didácticas**, que surgen por efecto de la enseñanza. Este tipo de errores se generan involuntariamente por enseñanzas previas que hacen que las concepciones de los estudiantes resulten, si no totalmente equivocadas, por lo menos imprecisas o incompletas. Por ejemplo, la convicción de que los triángulos solo son equiláteros dado que la imagen mental que surge es la de los vistos en los primeros grados, que solo tienen esas características. Otro caso podría ser el considerar palabras clave asociadas de manera irreflexiva con una operación, por ejemplo, *cuando se agrega siempre se suma o cuando se quita se resta*, pues es lo que escucharon al aprender la suma y la resta, sin tener en cuenta que esto es cierto solo si al agregar se pregunta por "lo que queda al final".

- Merecen especial atención aquí los errores que surgen a causa del **momento de desarrollo** en que está el estudiante y el grado de reversibilidad de su pensamiento. Por ejemplo, si se presenta a un niño de 1.° grado un problema en el que se pregunta ¿Cuántos caramelos tenía antes, si me comí 10 y ahora me quedan 15?, es muy probable que tenga muchas dificultades en resolverlo o que incluso muchos no puedan hacerlo.
- También es importante señalar los errores que surgen por los **acuerdos no explícitos** entre docentes y estudiantes. Algunos ejemplos frecuentes son: resolver problemas utilizando todos los datos del problema, que todos los problemas tienen una única solución, resolver con una división problemas en los que no es pertinente porque no se explica en el enunciado que el reparto sea equitativo. Una niña, ante la pregunta: *¿Cómo identificaste que el primer problema era de multiplicación y el segundo de división?,* respondió *"Porque la maestra siempre pone primero los problemas de 'por' y después los de 'dividido'".*

c. ¿En qué ocasiones surgen estos errores?

En cuanto a la ocasión y frecuencia con que aparecen los errores es importante distinguir:

- Los que **surgen en el proceso de aprendizaje** de un tema.
- Los que **se cometen ocasionalmente**.
- Los **errores sistemáticos**, es decir, los que se cometen repetidamente a pesar de haber transitado ya un proceso de enseñanza que debería haberlos solucionado.

Los errores que surgen en el proceso del aprendizaje

Es indispensable que el mismo docente, al enseñar un determinado contenido, proponga a sus estudiantes tareas en las que puedan aparecer los errores ya identificados por investigaciones o por su propia experiencia al enseñar ese contenido previamente. Por eso, especialmente los de origen epistemológicos son los considerados a la hora de organizar el orden de las clases en las secuencias de enseñanza propuestas. Este es un modo de **ir trabajando preventivamente los posibles errores**. Sin embargo, se ha de estar muy atento a detectar aquellos que persisten y se convierten en errores sistemáticos.

Los que se cometen ocasionalmente

Son los errores que se cometen por apresuramiento, distracción o falta de precisión en los mandatos o indicaciones. Hay que considerar que la edad de los estudiantes se caracteriza por tiempos muy cortos en los que se puede concentrar la atención en una tarea. Por eso suelen surgir muchos errores después de un tiempo inicial de trabajo. También a veces los docentes no reparamos en la ambigüedad de los enunciados o mandatos que presentamos a los estudiantes, y esto les genera confusiones y producen resultados que luego se consideran inadecuados o errores.

Los errores sistemáticos

Para poder detectar estos errores sistemáticos, es importante que a la hora de las correcciones de cuadernos, trabajos o pruebas, el docente pueda discriminar las equivocaciones. Muchas veces los errores son en los cálculos. Si el estudiante solo tiene como devolución que está mal o que tiene que rehacerlo, es probable que considere que se equivocó en todo, aún en la operación elegida para resolver. Por eso es importante que en las puestas en común y al corregir se diferencie:

- **La estrategia con que resuelve el problema**, es decir, si el procedimiento elegido es correcto, si lo es parcialmente, si está incompleto o si está mal.

- **La estrategia de conteo o de cálculo que utiliza**. En estos casos, será importante identificar los errores cometidos para hacer devoluciones ajustadas.

Si el problema es aritmético, aunque sea correcto el procedimiento, según el grado en que esté el niño habrá que considerar además si es necesario trabajar para que pueda reemplazarlo por otros más eficaces. Por ejemplo, cuando los estudiantes de tercer grado resuelven los problemas de multiplicaciones mediante dibujos o con sumas. Ambas cuestiones son indicadores de que hay que volver a trabajar con ellos los sentidos de las operaciones, hasta que puedan identificar la operación óptima. Marcar las respuestas elementales como errores dejará a los estudiantes sin estrategias a partir de las cuales avanzar, además de afectar la confianza en sí mismo y sus posibilidades. Pero no programar actividades de enseñanza para que detecten estrategias más avanzadas, será dificultarles otros aprendizajes en el segundo ciclo. Es decir, que en estos casos, es indispensable **planificar adecuadamente instancias de enseñanza remediales.**

d. ¿Cuáles errores son frecuentes?

Se presentan a continuación algunos ejemplos de dificultades o errores que suelen cometerse.

- **Los estudiantes tienen dificultades para entender el problema y/o elegir una estrategia adecuada para resolverlo**, lo que los puede llevar a hacerlo con estrategias equivocadas o a no resolverlo directamente. Esto puede surgir por algunas de las siguientes causas, que no son las únicas:

    - **Surgen por el sentido del problema o la ubicación de la incógnita con que se está trabajando.** Este es uno de los casos más frecuentes. Los estudiantes no pueden abordar problemas o cometen errores al aplicar las operaciones para resolverlos. En primer lugar, hay que despejar que la dificultad planteada corresponda a lo efectivamente enseñado o a la posibilidad de trabajarlo adecuadamente considerando el nivel de desarrollo de los estudiantes. Sin dudarlo, si estos errores son sistemáticos, surgen porque no se han concebido aún las operaciones que deberían aplicarse para resolver el problema. En estos casos es indispensable retomar un trabajo sistemático y prolongado en que los estudiantes puedan enfrentarse con problemas con los sentidos más sencillos[34] de las operaciones. Hay que permitirles a los estudiantes el tiempo para que puedan identificar lo que tienen en común toda una clase de problemas que se resuelven con determinada operación, y que utilicen para ello representaciones más elementales, es decir, usando material concreto, dibujando o con estrategias simbólicas más elementales como las aditivas al resolver en el campo multiplicativo. Cada una de estas resoluciones tiene que concluir con una tarea metacognitiva que ayude al niño a revisar qué información recibió cómo inicial, qué se pide encontrar como respuesta, qué vincula ambas informaciones, en qué se diferencia o asemeja ese problema con otros y cómo la estrategia utilizada contribuyó (o no) a darle respuesta. Sin estas explicaciones, es probable que siga sin diferenciar entre los problemas en los que se puede aplicar cada una de las operaciones.
    - **Los estudiantes piensan en términos solo de datos, no de información.** Esto los lleva a pensar qué cuentas aplicar, pero no tienen referencias para elegirlas en función del sentido de lo que se está buscando. Por ejemplo, ante el siguiente problema: *En un patio hay 3 macetas con 5 flores cada una. ¿Cuántas macetas hay en total?*, ellos leen y sólo reparan en 3 y 5. Ante eso, no saben qué hacer o finalmente resuelven aplicando cualquier operación. Por eso es importante preguntar sistemáticamente qué información brinda el problema tanto como la que se requiere averiguar. Si responden tres, se deberá insistir en preguntar *¿tres qué?*; si responden *tres macetas*, se preguntará *¿qué más dice de esas 3 macetas?*

34 En el caso de suma y resta, serán los problemas de agregar o quitar y los de juntar. Luego los de comparar. En el caso de las multiplicaciones, el sentido de la proporcionalidad y los problemas de reparto y partición o agrupamientos equitativos para división.

Pensar solo en términos de 3 y 5 dejará desprovistos a los estudiantes del sentido para buscar aún las estrategias concretas o de dibujos para resolverlo.

- **Los estudiantes quieren utilizar todos los datos o la información que tienen sin identificar si son necesarios o no para lo que tienen que resolver; si tienen que obtenerlos de dibujos, fotos o preguntárselos a alguien, o no saben cómo resolverlo.** Esto ocurre porque los estudiantes consideran que tienen "un contrato" con el docente, que todo lo que está debe usarse, dado que en todos los problemas siempre lo hacen y muchas veces en que no lo hicieron, el docente les preguntó "*¿Por qué no lo usaste?*". Dado que no están acostumbrados a recibir información por otra fuente que no sea el enunciado verbal escrito, los estudiantes no pueden buscar la información faltante.
- **Los que surgen porque desconocen la problemática que se aborda en el problema, el vocabulario, o bien la redacción es compleja o tiene distractores.** Por ejemplo, ante el problema: *Se tienen 3 cucharas y 2 tenedores, ¿cuántos cubiertos hay?*[35], los estudiantes pueden desconocer el significado de la palabra cubiertos. Otro ejemplo que puede surgir de las características de la presentación del enunciado es: *En un estante hay 18 libros, 4 más*[36] *que en el de abajo. ¿Cuántos libros hay en el estante de abajo?*
- **Los que surgen por el campo numérico o por el tamaño de los números con que se está trabajando.** En estos casos es importante que cada docente pueda detectar que los estudiantes están con dificultades en la resolución para poder despejar si estas radican en la comprensión del problema o si inciden dificultades con los números con que están trabajando. Esta discriminación hace que las situaciones de remediación sean bien diferentes. Por ejemplo, dado el siguiente problema: *En esta escuela hay 482 alumnos y la escuela vecina la supera por 231 alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene la otra escuela?*; resuelto el problema de conocer el significado de "supera", si no se lo puede resolver habrá que ver si bajando la cantidad de estudiantes de cada escuela la situación por resolver se hace más comprensible.

• **Los estudiantes cometen errores que surgen por el mal uso de los instrumentos con los que trabajan.** Por ejemplo, al dar resultados de la medida del largo un cuaderno, se cometen errores si se coloca el inicio de la longitud a medir en el principio de la regla en lugar de ubicarla en el 0, o en cualquier otro número a partir del cual medir. Por ejemplo, colocar el origen en 10 cm y medir hasta 15 cm. Se tienen así 5 cm. También forman parte de este tipo de errores los que pueden surgir por el mal uso de la calculadora.

• **Los estudiantes cometen errores al realizar los conteos o los cálculos.** Aquí pueden surgir diferentes dificultades:
  - que haya decidido **contar todo como estrategia, pero se equivoque en el conteo.** Esto se puede deber a que:
    - se cometen **errores en el enunciado de la serie numérica**,
    - **cuenta dos veces los mismos elementos**,
    - el **enunciado de la serie numérica avanza a diferente ritmo con el que se va identificando los elementos**, o
    - **no se establece bien el orden y se dejan de contar algunos elementos o reiteran el conteo de otros.**

35 Este problema también podría tener dificultades si los estudiantes no han logrado aún la inclusión de clases. En ese caso les resultará difícil comprender que un subconjunto puede estar incluido o ser una parte de otro conjunto "mayor".

36 La palabra más puede llevarlos a considerar que tienen que sumar. Además se presenta la relación de comparación en forma inversa a la que se solicita resolver.

- que elijan **resolver con una operación correcta un problema y no logren un resultado correcto**. Esto puede suceder por diferentes cuestiones:
  - Que **desconozcan o consideren incorrectamente un procedimiento para resolver el cálculo**. Por ejemplo, al multiplicar 6 x 9, alguien multiplica 6 por 10 y luego resta 9 en lugar de restar 6, dado que la multiplicación por 10 tiene una vez más sumado el número 6 de lo que se había pedido. El trabajo para elaborar conjeturas a partir de la detección de patrones es especialmente sugerido en estos casos. Otro ejemplo posible podría ser:

    Ante 230 – 120 = 200 – 100= 100 30 – 20= 10

    100 – 10 = 90

    En este último caso el error ocurre porque restadas las centenas y las decenas no se logra componer los resultados en un número. Se continúa restando. Esto es fruto de una falta de mayor conocimiento del funcionamiento sistema de numeración decimal (descomposición y luego composición aditiva de un número y valores posicionales). Este error también suele darse por no identificar los pasos del procedimiento para evitar las expresiones que implicarían sumas y restas con uso de paréntesis, dado que esto supera las dificultades factibles de ser abordadas a esta edad del primer ciclo.
  - Que **identifiquen bien el procedimiento de resolución pero que lo apliquen mal,** ya sean los algoritmos tradicionales o los alternativos que van construyendo:

    $$\begin{array}{r} 234 \\ +\quad 18 \\ \hline 2412 \end{array}$$

    Aquí es evidente que hay dificultades con las relaciones que existen entre lugares de posición contiguos en los números. Se da tanto en sumas como en restas. Por ello se sugiere volver a trabajar este tema, privilegiando como recurso el canje de billetes de 1 y 10 o de 10 y 100, resolver a partir de la descomposición aditiva de los números y su posterior composición y finalmente volver a abordar la estrategia de "cuenta parada" o algoritmo tradicional. Es importante recordar que los estudiantes demoran en identificar cuántos grupos de 10 o de 100 hay en cada lugar de posición por las razones ya explicadas –no tienen aún internalizada la organización multiplicativa. Mucho más les cuesta poder construir el agrupamiento que implica que en nuestro sistema de numeración cada lugar de posición es 10 veces mayor que el que está a su derecha y viceversa. Esto se complejiza y se pone en evidencia especialmente cuando hay que "llevarse o pedir decenas o centenas" en lugar de unidades. Por eso se recomienda ser muy cautelosos con la demanda de resolución por medio de estos algoritmos.

  - Que surjan **errores por mala ubicación de los números** para operar:

    $$\begin{array}{r} 234 \\ +\quad 18 \\ \hline 414 \end{array}$$

    Este error también se vincula con el conocimiento del sistema de numeración. Por lo tanto, antes de continuar exigiendo precisiones en el cálculo, conviene retomar la fuente de los errores. La sugerencia es que tengan un abordaje remedial semejante al del ejemplo anterior.

- Que **consignen resultados parciales erróneos:**

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 234 \\ 18 \end{array} \\ \hline 243 \end{array}$$

Para analizarlo bien y organizar nuevas clases al respecto habría que considerar cómo el estudiante obtiene los resultados, si por conteo, recordando el resultado de 8 + 4 o mediante alguna estrategia de cálculo mental como 10 + 4 – 2 (las opciones dependerán también del año en que se está). En cualquiera de los casos, si se detecta sistematicidad en errores de este tipo, hay que volver a trabajar estrategias para memorizar o reconstruir las sumas (o multiplicaciones en casos semejantes) de los 10 primeros dígitos por los 10 primeros dígitos.

e. ¿Cómo aprovechar los errores?

Ante los errores sistemáticos y los que surgen del proceso de enseñanza, es importante identificar cuán generalizados están en el conjunto de la clase, para considerar y decidir la mejor forma de abordarlos. Si alguno de ellos fuera común a un considerable[37] número de estudiantes, será indispensable repensar las secuencias por desarrollar para abordar las causas que generan esos errores. Por ejemplo, si tienen dificultades en la lectura de los números con ceros intermedios, será conveniente volver a trabajar con los números de sólo un dígito diferente de cero y con los valores posicionales. Según el año en que estén los niños también habrá que trabajar con operaciones ocultas en cada lugar de posición, con la detección de regularidades en los cuadros de números en las columnas de los números terminados en cero, con dictados e intercambios sobre por qué se escribe de una determinada manera un número, considerando explícitamente las diferencias entre el sistema de numeración decimal escrito simbólicamente, que es posicional, y la expresión oral de los números, que no lo es.

Si la dificultad se presenta solamente en algunos estudiantes, dependerá de cada situación en particular, pero a veces participando de las mismas tareas que el resto de la clase con menores niveles de dificultad puede avanzarse en los aprendizajes por revisar. No obstante, hay muchas circunstancias en las que es indispensable intensificar las tareas personalizadas. Para estos casos será importante que se organicen institucionalmente las instancias para poder brindar el apoyo individualizado que estos estudiantes requieren. Puede resultar muy importante involucrar a las familias en este acompañamiento, pero cuidando no depositar en ellos la responsabilidad de resolver la situación. Es la misma institución educativa y el docente quienes tienen que brindar la ayuda ajustada que el niño necesita. Claro que para que sea efectivo es indispensable que los estudiantes no lo vivan como una discriminación negativa porque esto incidirá en su autoestima y sus futuros aprendizajes.

Lo fundamental es que en cada grado se tenga muy claro cuáles son los aprendizajes prioritarios y se garantice que todos los estudiantes tengan la posibilidad de lograrlos. Para ello es importante que las actividades que se van a trabajar para promover o mejorar aprendizajes no logrados se organicen respetando los criterios básicos del modelo didáctico con que se enseña en las secuencias. A partir de las dificultades detectadas, será necesario que se incluyan tareas que reinstalen la posibilidad de que surjan esos obstáculos que deberían estar superados, pero que necesitan mayor distinción en las tareas para poder ser resueltos satisfactoriamente por esos niños. En pos de facilitar esto, en muchas de las actividades se indican las condiciones requeridas en las tareas que se proponen tanto para la clase presencial como para el hogar.

37 Se plantea como parámetro considerar el 20 % del grupo clase que está en esta situación.

Para que el docente pueda detectar los errores más fácilmente, es recomendable que ante las diferentes tareas propuestas anticipe una posible lista de los más factibles. Conocerlos de antemano le ayudará a identificarlos más rápidamente y discriminar mejor lo realizado por cada estudiante. A fin de completar este seguimiento, sería ideal que fuera registrando e individualizando a quienes los cometen.

Es muy importante recordar que los estudiantes van a la escuela a aprender. Los errores son parte crucial de todo proceso constructivo de aprendizaje. Cambiar esta concepción del error, de considerarlo como algo que se debe evitar en el aula a pasar a transformarlo en fuente de información para precisar lo que es necesario volver a enseñar, es hoy uno de los principales desafíos que se tiene. Sin este cambio de paradigma sobre los errores, los estudiantes seguirán temiendo a la matemática, repitiendo lo que les dicen para no cometer errores y privados de poder disfrutar del aprendizaje de esta disciplina. El clima áulico de respeto y confianza generará la motivación para el docente y sus estudiantes en lograr intercambios y reconocimiento de lo trabajado, aún en casos en que los resultados no hayan sido los correctos. El esfuerzo por lograrlos y por identificarlos son señales de que están desarrollando actitudes propias de la competencia de resolución de problemas, tales como:

- Deseo de buscar una solución.
- Actitud para perseverar en la búsqueda de soluciones.
- Tolerancia a la frustración.
- Apertura a la colaboración con otros.

MENSAJE FINAL
Si estamos convencidos de que TODOS los niños pueden aprender… los niños aprenderán.
Si podemos disfrutar enseñando matemática… los niños disfrutarán aprendiendo matemática.
Si aprendemos a escuchar y mirar a los niños… aprenderemos cada día cómo enseñar mejor.

REFERENCIAS

BRESSAN, Reyna y ZORZOLI, Horacio (2003). Enseñar geometría: redescubrir una tarea posible. Ed. Styrka, Uruguay.

BRESSAN, Ana; GALLEGO, María Fernanda; PÉREZ y Silvia Gabriela. 2018. Alfabetización numérica inicial. Diagnóstico y enseñanza. Editorial Novedades Educativas. Buenos Aires. Argentina.

BRESSAN, A. y YAKSICH, A. F. (Coord.) (2001). La medida: propuestas para repensar su enseñanza en la Educación General Básica. Módulo 1. Serie de Aportes al Proyecto Curricular Institucional. Obra colectiva de la Red de Escuelas de Campana. IIPE. OIE/UNESCO. Disponible en www.gpdmatematica.ar

BRESSAN, A.; Reyna, I. y ZORZOLI, G. (2003). Enseñar geometría. Redescubrir una tarea posible. Ed. Styrka. Uruguay. Disponible en www.gpdmatematica.ar

BRINNITZER, Evelina; COLLADO, María Edith; FERNÁNDEZ PANIZZA, Gabriela; GALLEGO, María Fernanda; PÉREZ, Silvia Gabriela y SANTAMARIA, Flavia. 2015. El juego en la enseñanza de la matemática. Editorial Novedades Educativas. Buenos Aires. Argentina.

BROSSEAU (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 4, pp. 165-198*

BROITMAN, Claudia 2000 "Las operaciones en el primer ciclo". Aportes para el trabajo en el aula. Novedades educativas. Bs. As.- Méjico.

CHEMELLO, Graciela (1995) EL CÁLCULO EN LA ESCUELA. ¿Las cuentas son un problema? Apunte

DIRECCION GENERAL DE CULTURA Y EDUCACCIÓN DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES: - La enseñanza de la división en la EGB. La Plata., https://www.uepc.org.ar/conectate/wp-content/uploads/2012/06/division.pdf visitada el 27 de mayo de 2022.

DIRECCION GENERAL DE CULTURA Y EDUCACCIÓN DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES: La enseñanza de la multiplicación en la EGB. https://www.uepc.org.ar/conectate/wp-content/uploads/2012/06/multiplicacion.pdf visitada el 27 de mayo de 2022.

DIRECCION GENERAL DE CULTURA Y EDUCACCIÓN DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES: El trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB. https://www.uepc.org.ar/conectate/wp-content/uploads/2012/06/Trabajo_con_calculadora.pdf visitada el 27 de mayo de 2022.

FIERRO, Marta Ester. 2012. "Todos pueden aprender Matemática 1.° grado". Educación para todos. Instituto Pedagógico Provincial. Formosa. Argentina. https://blogedprimaria.blogspot.com/2016/04/todos-pueden-aprender.html visitada el 27 de mayo de 2022.

FIERRO, Marta Ester 2016 Aportes para la enseñanza de la numeración. IPP. Formosa. https://docer.com.ar/doc/xs50vvn visitada el 27 de mayo de 2022.

FIERRO, Marta Ester 2016 Aportes para la enseñanza de las operaciones y los problemas. IPP. Formosa.

FIERRO, Marta Ester 2016 Aportes para la enseñanza del cálculo. IPP. Formosa. https://docer.com.ar/doc/xs50vv5 visitada el 27 de mayo de 2022.

ITZCOVICH, Horacio (coordinador) y otros. 2007. “La matemática escolar”. AIQUE. BUENOS AIRES. Argentina.

LERNER, Delia y SADOVSKY, Patricia. 1994.Capítulo 5 El sistema de numeración: un problema didáctico en PARRA, Cecilia y SAIZ, Irma “La Didáctica de las Matemáticas, Aportes y Reflexiones”. Editorial PAIDOS, EDUCADOR. Buenos Aires.

MINERD. 2016. Diseño Curricular Dominicano. Santo Domingo. República Dominicana.

MINERD, UNICEF 2021 Cuadernillos para alumnos del Programa Aprendemos en casa. Santo Domingo. República Dominicana.

MOREIRA, M.A. sin fecha. La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. Porto Alegre. Brasil. Instituto de Física,

PARRA, Cecilia. Capítulo 7 Cálculo mental en la escuela primaria en PARRA, Cecilia y SAIZ, Irma “La Didáctica de las Matemáticas, Aportes y Reflexiones”. Editorial PAIDOS, EDUCADOR. Buenos Aires. 1994.

PARRA, Cecilia y SAINZ, Irma. “Enseñar aritmética a los más chicos”. Ediciones Homo Sapiens. Buenos Aires. 2007.

PARRA, Cecilia y SAIZ, Irma “La Didáctica de las Matemáticas, Aportes y Reflexiones”. Editorial PAIDOS, EDUCADOR. Buenos Aires. 1994.

PANIZZA, Mabel (comp.) “Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB”. PAIDÓS. Buenos Aires. Reimpresión 2006.

VERGNAUD, G (1990) Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170*, CNRS y Université René Descartes. PDF Traducción Juan Godino.